Bazı İntegral Dönüşümleri Ve Uygulamaları

Dilek Kırdar

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ekim-2007

Some Integral Transforms And Their Applications

Dilek Kırdar

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

October-2007

Bazı İntegral Dönüşümleri ve Uygulamaları

Dilek Kırdar

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd.Doç.Dr Dursun Eser

Ekim-2007

Dilek Kırdar' ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Bazı İntegral Dönüşümleri ve Uygulamaları" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Yrd.Doç.Dr.Dursun Eser

Üye : Prof.Dr.İsmail Kocayusufoğlu

Üye :Yrd.Doç.Dr.Salih Köse

Üye :Yrd.Doç.Dr.Ömer Özbaş

Üye : Yrd.Doç.Dr.Bülent Saka

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

Bazı İntegral Dönüşümleri ve Uygulamaları

Dilek KIRDAR

ÖZET

Bu tez çalışmasında uygulamalı matematikte, fizikte ve mühendislik bilimlerinde karşılaşılan birçok sınır değer ve başlangıç değer problemlerinde kullanılan Laplace dönüşümleri, Fourier dönüşümleri ve Mellin dönüşümleri incelenmiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde Laplace dönüşümleri, ikinci bölümünde Fourier dönüşümleri hakkında temel tanım, teorem ve özellikler verilmiş; üçüncü bölümünde yine integral dönüşümlerinden Mellin dönüşümleri incelenerek, örnekler ve uygulamalar sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Laplace, Fourier, Mellin, İntegral, Dönüşüm

Some Integral Transforms and Their Applications

Dilek KIRDAR

SUMMARY

In this study, Laplace Transforms, Fourier Transforms and Mellin Transforms, which are encountered in boundary value and initial value problems in applied mathematics, physics and engineering science, are investigated.

Basic discriptions theorems and properties about Laplace Transforms were given in the first chapter of the study. Those about Fourier Transforms were given in the second chapter of the study. In addition properties and examples about another integral transforms, Mellin Transforms were given and applications were presented in third chapter of the study.

Keywords: Laplace, Fourier, Mellin, Integral, Transforms

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım, sayın hocam Yrd.Doç.Dr Dursun ESER'e ve yazmamda yardımcı olan sayın Arş.Gör. Dr. Dursun IRK'a; ayrıca yardımlarını benden esirgemeyen tüm dostlarıma ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2007 Dilek KIRDAR

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

BÖLÜM 1

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE UYGULAMALARI

Çok sayıda fiziksel problemin başlangıç-değer ve sınır-değer problemlerinin ve diferansiyel denklemlerin çözüm metodlarından biri de integral dönüşümleridir. İntegral dönüşüm metodunun temel özelliği; herhangi bir integral dönüşüm uzayında $F(s)$ noktasına karşılık olarak esas uzayda $f(t)$ noktasını oluşturmaktır.

İntegral dönüşümlerinin kullanımının on dokuzuncu yüzyılın ilk yarısında başladığı görülmektedir. Fakat sembolik dönüşüm fikrini ilk olarak öne süren G.W.Leibnitz (1646-1716) dir. Sonraları sembolik dönüşüm metodları üzerine önemli çalışmalar yapanlar J. L. Lagrange (1736-1813) ve P.S.Laplace (1749-1827) dır. Ancak integral dönüşümleri için temel adım J.Fourier (1768-1830) ve A. L. Cauchy (1789-1853) tarafından atılmıştır. Bu integral dönüşüm metodlarının en önemlilerinden bir tanesi Laplace İntegral Dönüşümü'dür.

1.1 Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü bir integral dönüşümü olup; fizik, mekanik, mühendislik, telekominikasyon, matematik ve diğer uygulamalı bilim dallarında kullanılan önemli bir dönüşümdür. Ünlü matematikçi P. S. Laplace (1749 - 1827) tarafından tanımlanmıştır. Bu diferansiyel denklemlerin çözümünde büyük kolaylık sağladığı gibi, fiziğin matematiksel çözümünde de yararlanılabilen bir yöntemdir. Bu yoldan elde edilen denklemlerin başlangıç şartlarını da ihtiva ettiği görülür.(Aliyev, 1995)

Tanım 1.1: $f(t)$, $t \geq 0$ için t reel değişkeninin bir fonksiyonu olsun ($t < 0$ için $f(t) = 0$ kabul edilir). $s > 0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere, t reel değişkeninin bir fonksiyonu e^{-st} olduğuna göre,

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

integrali var olacak şekilde s parametresi için bir değer bulmak mümkün oluyorsa bu integrale $f(t)$ fonksiyonunun Laplace Dönüşümü denir. Bu dönüşüm $\mathcal{L}\{f(t)\}$

veya $F(s)$ ifadeleri ile gösterilir. Bunu

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{1.1}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada sonuç s değişkenine bağlıdır ve integral yakınsak olmalıdır.(Sneddon, 1972)

Tanım 1.2: Bir fonksiyon $\alpha \leq t \leq \beta$ aralığının sonlu sayıdaki alt aralıklarının her birinde sürekli ve bu alt aralıkların her birinde sağdan ve soldan limitleri mevcut ise bu fonksiyona parçalı sürekli fonksiyon denir. Buradaki süreksizlik sonlu sıçramalar şeklindedir.

Tanım 1.3: $M > 0$ reel sabiti göstermek üzere ve bütün $t \geq T'$ler için $(T > 0)$

$$\left|e^{-at}.f(t)\right| < M \qquad \text{veya} \qquad |f(t)| < M.e^{at} \tag{1.2}$$

olacak şekilde bir a sayısı bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna $t \to \infty$ için "a üstel mertebedendir" denir.(Özer - Eser, 2002)

1.1.1 Laplace dönüşümü için varlık teoremi

Teorem 1.1: $f(t)$ fonksiyonu, her zonlu $0 \leq t \leq T$ aralığında parçalı sürekli ve $t > T$ için a'ıncı üstel mertebeden ise $s > a$ için $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ Laplaece dönüşümü mevcuttur $(a \geq 0, t \geq 0)$.(Yaşar, 1988)

İspat 1.1: Laplace dönüşümünün tanımından

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{1.3}$$

olur. Buradaki I_1 integrali $f(t)$ fonksiyonunun $0 \leq t \leq T$ aralığında parçalı sürekli olması nedeniyle mevcuttur, belirli ve sınırlıdır. Yani yakınsaktır. I_2 integrali ise $f(t)$ nin $t > T$ üstel mertebeden olması nedeniyle vardır.

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int_T^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt \leq \int_0^\infty |f(t)|\, e^{-st} dt \leq \int_0^\infty M.e^{at}.e^{-st} dt \\
&= M.\int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = M.\lim_{k\to\infty} \int_0^k e^{-(s-a)t} dt \\
&= M.\lim_{k\to\infty} \left(\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} - \frac{1}{-(s-a)} \right) = \frac{M}{(s-a)} \quad , \ (s > a)
\end{aligned}$$

olduğundan, $s > a$ için Laplace dönüşümü vardır.

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünün var olması için gerekli şart; $f(t)$ nin üstel mertebeden olması veya

$$\lim_{t\to\infty} e^{-at}\left|f(t)\right| = 0 \quad , \quad (a > 0)$$

olmasıdır.

$f(t) = e^{t^2}$ şeklindeki bir fonksiyon $t > a > 0$ için, grafiği herhangi bir pozitif kuvvetinden daha hızlı büyüdüğünden üstel mertebeden değildir. Dolayısıyla Laplace dönüşümü bulunamaz.

Örnek 1.1: Tanım 1.1 i kullanarak

$$\begin{aligned} a)\ f(t) &= 1 \\ b)\ f(t) &= e^t \end{aligned}$$

fonksiyonlarının Laplace dönüşümünü hesaplayınız.(Dyke,2001)

$a)$ Laplace dönüşümünün tanımından

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

olduğundan, $f(t) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{1\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}.1.dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-st}}{-s}|_0^b \\ &= \frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}(1 - e^{-st}) \end{aligned}$$

bulunur. $s > 0$ ise $b \to \infty$ iken $e^{-sb} \to 0$ olduğundan limit var ve 1 sayısına eşittir. Dolayısıyla integral yakınsak olduğundan,

$$\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{1}{s}, \qquad s > 0$$

olarak bulunur.

$b)$ Yine Laplace dönüşümü tanımından, $f(1) = e^t$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{e^t\right\} &= \int_0^\infty e^t.e^{-st}.dt = \int_0^\infty e^{(1-s)t}.dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(s-1)t}.dt = \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-(s-1)t}}{-(s-1)}|_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{s-1}.e^{-(s-1)b} + \frac{1}{s-1}\right) \\ &= \frac{1}{s-1} \quad , \quad s>1 \end{aligned}$$

buluruz.

Bu örneklerden genellemeler yapılarak a bir sabit ve $s > 0$, $t > 0$ olmak üzere

a) $\mathcal{L}\{a\} = \frac{a}{s}$, $(s > 0)$
b) $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$, $(s > 0)$
c) $\mathcal{L}\{at\} = \frac{a}{s^2}$, $(s > 0)$
d) $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $(s > 0)$
e) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, $(s > 0)$
f) $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$, $(s > 0)$
g) $\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$, $(s > 0)$
h) $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$, $(s > |a|)$
ı) $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}$, $(s > |a|)$

bulunur.

1.1.2 Gama fonksiyonu

$\mathcal{L}\{t^n\}$ biçimindeki ifadelerde t nin tamsayı olmayan kuvvetlerinin Laplace dönüşümlerini bulmak için Gama fonksiyonuna ihtiyaç vardır. $x > 0$ için Gama fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u}.u^{x-1}.du \tag{1.4}$$

olarak tanımlandığından,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-u}.u^{x}.du$$

olur. Burada $s > 0$ için $u = st$ alırsak, yeni integral değişkeni t için $u \to 0$ iken $t \to 0$ ve $u \to \infty$ iken $t \to \infty$ olduğundan

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-st}.(st)^x.s.dt = s^{x+1}\int_0^\infty e^{-st}.t^x.dt \quad , \quad x+1>0$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} = \int_0^\infty e^{-st}.t^x.dt \ \ , s>0 \ \ , x>-1$$

veya sağ yan t^x fonksiyonunun Laplace dönüşümü olduğundan

$$\mathcal{L}\left\{t^x\right\} = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \ \ , \ s>0 \ \ , \ x>-1$$

formülünü buluruz.(Edward - Penney, 2006) Örneğin bu formülde $x = -\frac{1}{2}$ alırsak, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olduğundan,

$$\mathcal{L}\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

olarak buluruz.

1.2 Ters Laplace Dönüşümü

Verilen bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünün integral tanımı kullanılarak, s parametresine bağlı bir $F(s)$ fonksiyonu tanımlandığını ve

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. Şimdi bilinmeyen bir $f(t)$ fonksiyonunun verilen Laplace dönüşümü $F(s)$ ise $f(t)$ fonksiyonu nasıl bulunabilir? Buradaki $f(t)$ fonksiyonuna $F(s)$ fonksiyonunun Ters Laplace Dönüşümü denir ve sembolik olarak $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$ ile gösterilir. Burada $\mathcal{L}^{-1}$ sembolüne Ters Laplace Dönüşüm Operatörü denir.(Dyke, 2001)

a bir sabit ve $s>0, t>0$ olmak üzere

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n \qquad , n = 1,2,3,...$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin at$

e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$

f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2-a^2}\right\} = \sinh at$

g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh at$

şeklindedir.

Genel olarak s, $a+ib$ şeklinde bir parametre olmak üzere $F(s)$ belli iken $f(t)$ temel fonksiyonu

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st}dt \tag{1.5}$$

integrali ile hesaplanabilir. Bu integralin hesabı oldukça zor olduğundan uygulamada pek fazla kullanılmaz.(Dyke, 2001)

1.2.1 Ters laplace dönüşümünün tekliği

Teorem 1.2: Bir $F(s)$ fonksiyonunun Ters Laplace Dönüşümü olan $f(t)$ fonksiyonu, her $0 \leq t \leq N$ sonlu aralığında parçalı sürekli ve $t > N$ için üstel mertebeden ise, bu takdirde $F(s)$ nin Ters Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \tag{1.6}$$

olup tektir.(Edward - Penney, 2006)

İspat 1.2:$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f_1(t)$ ve $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f_2(t)$ olsun.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st}dt, \\ f_2(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st}dt \end{aligned}$$

denklemlerinin sağ tarafları eşit olduğu için sol tarafları da eşittir. Böylece $f_1(t) = f_2(t)$ olduğundan $F(s)$ nin ters Laplace dönüşümü tektir.

1.3 Laplace ve Ters Laplace Dönüşümlerinin Bazı Özellikleri

1.3.1 Lineerlik özelliği

Laplace dönüşümünün lineerliği aşağıda verilen teoremle gösterilebilir.

Teorem 1.3: $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ fonksiyonlarının $s > a_1, s > a_2, ...s > a_n$ için Laplace dönüşümleri $F_1(s), F_2(s), ..., F_n(s)$ fonksiyonları olsun. $c_1, c_2, ..., c_n$ herhangi sabitler olmak üzere ve $s \geq \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + ... + c_n f_n(t)\} &= c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + ... + c_n \mathcal{L}\{f_n(t)\} \\ &= c_1 F_1(s) + \ldots + c_n F_n(s) \end{aligned} \tag{1.7}$$

eşitliği sağlanır. Yani $\mathcal{L}$ Laplace operatörü lineerdir.(Özer - Eser, 2002)

İspat 1.3: İntegrallerin lineerliğinden ve Laplace dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + ... + c_n f_n(t)\} &= \int_0^\infty [L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + ... + c_n f_n(t)\}] .e^{-st} dt \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt + ... + c_n \int_0^\infty e^{-st} f_n(t) dt \\ &= c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + ... + c_n \mathcal{L}\{f_n(t)\} \\ &= c_1 .F_1(s) + ... + c_n F_n(s) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 1.2.:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\right\} &= 4\mathcal{L}\left\{t^2\right\} - 3\mathcal{L}\{\cos 2t\} + 5\mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\} \\ &= 4(\frac{2!}{s^3}) - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1} \end{aligned}$$

dir.

Ters Laplace dönüşümünün lineerlik özelliği benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 1.4:

Ters Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ operatörü lineerdir. Yani $F_1(s), ..., F_n(s)$ fonksiyonlarının ters laplace dönüşümleri $f_1(t), ..., f_n(t)$ fonksiyonları olsun. Bu durumda $c_1, ..., c_n$ sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1(s) + ... + c_nF_n(s)\} &= c_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + ... + c_n\mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\} \qquad (1.8) \\ &= c_1.f_1(t) + ... + c_n.f_n(t) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.(Özer - Eser, 2002)

İspat 1.4:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1(s) + ... + c_nF_n(s)\} &= c_1.f_1(t) + ... + c_n.f_n(t) \quad \text{ise,} \\ c_1F_1(s) + ... + c_nF_n(s) &= L\{c_1f_1(t) + ... + c_nf_n(t)\} \end{aligned}$$

olur. Bu ise Laplace dönüşümünün lineerlik özelliğinden bulunmuştur.

Örnek 1.3:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3s}{s^2+16}\right\} \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+4}\right\} \\ &= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} \\ &\quad + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} \\ &= 4e^{2t} - 3\cos 4t + \frac{5}{2}\sin 2t \end{aligned}$$

olarak bulunur.

1.3.2 Birinci kaydırma veya öteleme özelliği

Teorem 1.5: $F(s), f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü ise $F(s-a)$ da $e^{at}.f(t)$ fonksiyonunun dönüşümüdür. Yani,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= F(s) \quad \text{ve } a \text{ gerçel bir sayı olmak üzere,} \\ \mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} &= F(s-a) \ , (s > a) \qquad (1.9) \end{aligned}$$

dır.(Dyke, 2001)

İspat1.5: Laplace dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{e^{at}.f(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{at}.f(t).e^{-st}.dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}.f(t)dt \\ &= F(s-a)\end{aligned}$$

dır.

Bir fonksiyonun e^{at} ile çarpımının Laplace dönüşümünü elde etmek için fonksiyonun dönüşümünde (s) yerine $(s-a)$ koymak, yani öteleme yapmak yeterlidir. Bunu sembolik olarak,

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}.f(t)\right\} = \left\{\mathcal{L}f(t)\right\}_{s\to s-a}$$

şeklinde de gösterebiliriz.

Örnek 1.4: Aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümlerini Birinci Öteleme özelliğinden yararlanarak hesaplayalım.

$$\mathcal{L}\left\{\cos at\right\} = \frac{s}{s^2+a^2} \quad \text{olduğundan} \quad \mathcal{L}\left\{e^{ct}.\cos at\right\} = \frac{s-c}{(s-c)^2+a^2}, \quad s > c$$

$$\mathcal{L}\left\{t\right\} = \frac{1}{s^2} \quad \text{olduğundan} \quad \mathcal{L}\left\{t.e^{at}\right\} = \frac{1}{(s-a)^2} \quad , \quad s > a$$

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{olduğundan} \quad \mathcal{L}\left\{t^n.e^{at}\right\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad , \quad s > a$$

bulunur.

$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$ için yani ters Laplace dönüşümü

$$e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s-a)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)|_{s\to s-a}\right\} \tag{1.10}$$

şeklindedir.

Örnek 1.5:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}.\sin 2t$$

olması nedeniyle

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2}e^t \sin 2t$$

bulunur.

1.3.3 İkinci kaydırma veya öteleme özelliği

Teorem 1.6:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$$

ve

$$G(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

ise, bu taktirde

$$\mathcal{L}\left\{G(t)\right\} = e^{-as}.F(s) \tag{1.11}$$

dir.(Yaşar, 1988)

İspat 1.6:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (s > 0)$$

$$\begin{aligned} t &< a \qquad \to \mathcal{L}\left\{G(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}G(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}.0.dt = \int_0^\infty 0.dt = c \ \ \text{(sabit)} \\ t &> a \qquad \to \mathcal{L}\left\{G(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}G(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)dt \\ t-a &= u \ , \ \ t = a+u \ \ , \ \ dt = du \end{aligned}$$

değişken değiştirmesi sonucu

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-s(a+u)} f(u)du &= \int_0^\infty e^{-sa-su} f(u)du = \int_0^\infty e^{-sa}.e^{-su} f(u)du \\ &= e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su} f(u)du = e^{-sa}F(s) \\ \mathcal{L}\left\{G(t)\right\} &= e^{-as}F(s) \end{aligned}$$

olarak bulunur.(Edward - Penney, 2006)

Bu özellik İkinci Öteleme Özelliği olarak bilinir. Ters Laplace Dönüşümü için İkinci Öteleme Özelliği $a > 0$ ve $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

dır. Yani,

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

olsun. Buna göre $L^{-1}\{e^{-as}.F(s)\} = g(t)$ ise

$$e^{-as}F(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \tag{1.12}$$

olarak yazılabilir.

Örnek 1.6: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ nedeniyle

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{2\pi s}{3}}}{s^2+1}\right\} = \begin{cases} \sin(t-\frac{2\pi}{3}) & t > \frac{2\pi}{3} \\ 0 & t < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

olarak Ters Laplace dönüşümünün ikinci öteleme özelliğinde $a = \frac{2\pi}{3}$ için bulunur.

1.3.4 Skaler değişim özelliği

Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise bu taktirde;

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \tag{1.13}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.7:

$$\mathcal{L}\{\sinh t\} = \frac{1}{s^2-1} = F(s)$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) = \frac{1}{a}\frac{1}{(\frac{s}{a})^2-1} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

bulunur.

Ters Laplace Dönüşümü için skaler değişim özelliği;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= f(t) \quad \text{ise} \\ \mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} &= \frac{1}{a} f(\frac{t}{a}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.8: Skaler değişim özelliğini kullanarak $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s}{9s^2+4}\right\}$ ters Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} &= \cos 2t = f(t) \quad \text{olduğundan} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{(3s)^2+4}\right\} &= \frac{1}{3} f(\frac{t}{3}) = \frac{1}{3}\cos\frac{2t}{3} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

1.3.5 Çekirdek fonksiyonu "t^n" (veya s) ile çarpma özelliği

Teorem 1.7: Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise bu taktirde;

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[F(s)] = (-1)^n F^n(s) \tag{1.14}$$

dir.

İspat 1.7: Türev ile integral yer değiştirebildiğinden

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st} f(t)dt\right] \\ &= -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\} \end{aligned}$$

veya

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{t^2 f(t)\right\} &= \mathcal{L}\{t.tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{tf(t)\} \\ &= -\frac{d}{ds}(-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}) \\ &= \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{f(t)\} \end{aligned}$$

olur. Burada s parametresine göre n defa türev almak suretiyle $n = 1, 2, 3, ...$ için

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

dir.

Örnek 1.9: $\mathcal{L}\{t. \cos at\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

olduğu bilindiğine göre

$$\mathcal{L}\{t. \cos at\} = -\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2 + a^2}) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

bulunur.

Eğer, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ve $f(0) = 0$ ise bu taktirde

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) \tag{1.15}$$

dir. $f(0) \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{sF(s) - F(0)\} &= f'(t) \\ &\text{veya} \\ \mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} &= f'(t) + f(0).\delta(t) \end{aligned} \tag{1.16}$$

bulunur. Burada $\delta(t)$ Dirac Delta fonksiyonudur. Bu özellik ters laplace dönüşümü için s ile çarpma özelliği olarak bilinir.(Özer - Eser, 2002)

Örnek 1.10:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} &= \sin t \text{ ve } \sin(0) = 0 \text{ ise} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} &= \frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t \end{aligned}$$

olur. Bu teorem $n = 2, 3, 4, ...$ için $\mathcal{L}^{-1}\{s^n F(s)\}$ genişletilebilir.

1.3.6 Çekirdek fonksiyonu "t" veya s ile bölme özelliği

Teorem 1.8: Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ve $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$ var ise

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du \tag{1.17}$$

olarak tanımlanır.

İspat 1.8:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} &= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}.e^{-st}.dt = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t}f(t)dt \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-t}|_0^\infty .f(t)dt = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-st}ds\right].f(t)dt \\
&= \int_s^\infty \left[\int_0^\infty f(t).e^{-st}dt\right] ds = \int_s^\infty F(u)du
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 1.11: $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$ laplace dönüşümünü t ile bölme özelliğini kullanarak bulalım.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin t\} &= \frac{1}{s^2+1} = F(s) \quad , \quad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 \quad \text{olduğundan} \\
\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} &= \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(\frac{1}{s})
\end{aligned}$$

bulunur.

Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ise ters Laplace dönüşümü için s ile bölme özelliği

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du \tag{1.18}$$

olarak tanımlanır.(Edward - Penney, 2006)

Örnek 1.12: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s(s^2+4)}\right\}$ ters laplace dönüşümünü s ile bölme özelliğinden bulalım.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s^2+4}\right\} &= 4\sin 2t \qquad \text{olduğundan} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s(s^2+4)}\right\} &= \int_0^t 4\sin 2u du = 2(1-\cos 2t) \end{aligned}$$

bulunur.

1.4 Türevlerin Laplace ve Ters Laplace Dönüşümleri

Teorem 1.9: Eğer $t \geq 0$ için $f(t), f\,'(t), ..., f^{n-1}(t)$ fonksiyonları sürekli, üstel mertebeden ve eğer $t \geq 0$ için $f^n(t)$ parçalı sürekli ise $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f\,'(0) - ... - f^{n-1}(0) \tag{1.19}$$

olarak bulunur.(Yaşar, 1988)

İspat 1.9: $t \geq 0$ için $f\,'(t)$ fonksiyonu sürekli ise laplace dönüşümünün tanımından ve $t \to \infty$ iken $e^{-st}f(t) \to 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\,'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = e^{-st}f(t)|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\} = sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\,''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt = e^{-st}f'(t)|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f'(t)\} \\ &= s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Böyle devam ederek yüksek mertebeden türevlerin de Laplace dönüşümleri

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f\,'(0) - ... - f^{n-1}(0)$$

olarak bulunur.

Örnek 1.13: $f(t) = t^3$ fonksiyonunun $f(0) = 0,\ f\ '(0) = 0,\ f\ ''(0) = 0$ şartları altında $\mathcal{L}\{f'''(t)\}$ dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\ '''(t)\} &= s^3F(s) - s^2f(0) - sf\ '(0) - f\ ''(0) \\ &= s^3F(s), \quad F(s) = \mathcal{L}\left\{t^3\right\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4} \quad \text{olduğundan} \\ \mathcal{L}\{f\ '''(t)\} &= s^3.\frac{6}{s^4} = \frac{6}{s} \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ise türevlerin ters laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^n(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}F(s)\right\} = (-t)^n f(t) \tag{1.20}$$

olarak bulunur.

Örnek 1.14:$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \sin 2t$ ve $\frac{d}{ds}(\frac{2}{s^2+4}) = \frac{-4s}{(s^2+1)^2}$ dir. Böylece

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4s}{(s^2+1)^2}\right\} = (-t)\sin 2t \text{ veya } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{4}t\sin 2t$$

bulunur.

1.5 İntegrallerin Laplace ve Ters Laplace Dönüşümleri

Teorem 1.10: Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise o zaman

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{1.21}$$

olarak bulunur.

İspat 1.10:

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

yazalım. Bundan dolayı $g(0) = 0$ ve $g\ '(t) = f(t)$ dir. Bundan sonra

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = sG(s) = s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}$$

olup, her iki tarafı s' ye bölersek

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

bulunur.

Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ise integrallerin ters laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u)du\right\} = \frac{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}}{t} = \frac{f(t)}{t} \tag{1.22}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 1.15:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = 1 - e^{-t}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1})du\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln(1+\frac{1}{s})\right\} = \frac{1-e^{-t}}{t}$$

bulunur.

1.6 Konvolüsyon Teoremi

Eğer $t \geq 0$ için f ve g fonksiyonları parçalı sürekli ise, f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu $f * g$ ile gösterilir ve

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{1.23}$$

integraliyle tanımlanır.(Gonzalez - Enrique, 1995)

Teorem 1.11: Eğer $t \geq 0$ için $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları, $[0,\infty)$ aralığında parçalı, sürekli ve üstel mertebeden ise

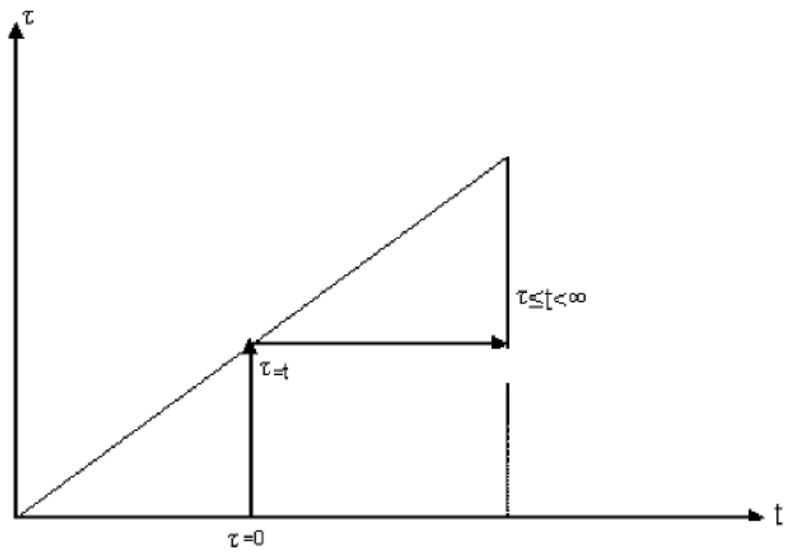
$$\mathcal{L}\{\, f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

olarak bulunur.

İspat 1.11: Tanımdan biliyoruz ki

$$\mathcal{L}\{\, f * g\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

dır. Buradaki integrasyon aralığı şekilde gösterildiği gibi $\tau - t$ düzlemindedir. Yukarıdaki integrasyon önce τ' ya göre $\tau = 0$ dan $\tau = t$ ye sonra $t = 0$ dan ∞ a dikey bandı $\tau = t$ doğrusu altındaki tüm bölgeyi kaplayacak şekilde dışa doğru hareket ettirilerek oluşturulur.



Şekil 1.1 İntegrasyon Bölgesi

İntegrasyonun sırasını değiştirerek $t = \tau$dan ∞ a yatay şeritte ve sonra yatay şeridi dikey olarak $\tau = 0$ dan yukarı doğru hareket ettirerek $\tau = 0$ dan ∞ a integral alırsak

$$\mathcal{L}\{\ f * g\} = \int_0^\infty f(t) \int_{t=\tau}^\infty e^{-st} g(t-\tau)dt$$

haline gelir. $t - \tau = x$ değişken değiştirilmesiyle

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\ f * g\} &= \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s(x-\tau)} g(x)dx \\ &= \int_0^\infty e^{-st} f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-sx} g(x)dx \\ &= F(s)G(s)\end{aligned}$$

elde edilir.

Konvolüsyon operatörü değişme, birleşme, dağılma özelliklerine sahiptir.

Örnek 1.16:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)d\tau\right\}$$

dönüşümünü konvolüsyon teoreminden yararlanarak çözelim.

$f(t)=e^t$ ve $g(t)=\cos t$ alınarak konvolüsyon teoreminden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)d\tau\right\} &= \mathcal{L}\left\{e^{\tau}\right\}.\mathcal{L}\left\{\cos t\right\}\\ &= \frac{1}{s-1}.\frac{s}{s^2+1}\\ &= \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}\end{aligned}$$

bulunur. Konvolüsyon teoremi, ters Laplace dönüşümü için

$$f*g=\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s).G(s)\right\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Örnek 1.17:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right\}$$

Ters Laplace dönüşümünü konvolüsyon teoreminden yararlanarak hesaplayalım.

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{1}{s-3}\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}=f(t)=e^{3t}\\ G(s) &= \frac{1}{s+1}\Rightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}=g(t)=e^{-t}\end{aligned}$$

Ters Laplace dönüşümü için konvolüsyon teoreminden

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right\} &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{3\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau\\ &= e^{-t}\int_0^t e^{4\tau}d\tau=e^{-t}\frac{1}{4}e^{4\tau}|_0^t\\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right\} &= \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}\end{aligned}$$

bulunur.

1.7 Periyodik Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

Teorem 1.12: Eğer $f(t)$ fonksiyonu, $f(t+T) = f(t)$ olacak şekilde $T > 0$ periyoduna sahip, ayrıca $t \geq 0$ için parçalı sürekli ve üstel mertebeden ise, bu taktirde Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt \tag{1.25}$$

şeklindedir.

İspat 1.12: $T > 0$ periyotlu periyodik bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{1.26}$$

olarak yazılır. İkinci integralde $t = u + T$ dönüşümü yapılırsa $f(u+T) = f(u)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt &= \int_0^\infty e^{-s(u+T)}.f(u+T)du \\ &= e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u)du \\ &= e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\} \end{aligned}$$

bulunur. Bu değer (1.26) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-sT} f(t)dt + e^{-sT} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

veya $\mathcal{L}\{f(t)\}$ çözülürse

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

bulunur.

Örnek 1.18: $T = 2\pi$ periyotlu

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t < \pi \quad \text{ise} \\ 0 & \pi \leq t < 2\pi \quad \text{ise} \end{cases}$$

periyodik fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st} f(t)dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\int_0^{\pi} e^{-st}\sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st} 0 dt\right] \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\frac{e^{-st}(-s.\sin t-\cos t)}{s^2+1}\right\}\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\} \\
&= \frac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}
\end{aligned}$$

bulunur.

1.8 Laplace Dönüşümü'nün Bazı Uygulamaları

1.8.1 Adi diferansiyel denklemlere uygulanması

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t) \tag{1.27}$$

şeklinde verilen bir basit katsayılı lineer diferensiyel denklemi verilen $x(0) = x_0$ ve $x'(0) = x_0'$ başlangıç şartları ile çözmek için Laplace dönüşümünü kullanacağız.

Örnek 1.19:

$$x'' - x' - 6x = 0 \;\; ; \;\; x(0) = 2, \;\; x'(0) = -1$$

başlangıç değer problemini Laplace dönüşümü yardımıyla çözelim.

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} - \mathcal{L}\{x'(t)\} - 6\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

olarak yazılabilir. Türevlerin Laplace dönüşümünden

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x'(t)\} &= s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0) = sX(s) - 2 \\
& \quad ve \\
\mathcal{L}\{x''(t)\} &= s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 2s + 1
\end{aligned}$$

verir. Burada $X(s), x(t)$ bilinmeyen fonksiyonunun Laplace dönüşümünü belirtir. Böylece dönüştürülmüş denklem

$$\left[s^2X(s)-2s+1\right]-\left[sX(s)-2\right]-6\left[X(s)\right]=0$$

dır ve böylece

$$(s^2-s-6)X(s)-2s+3=0$$

şeklinde sadeleştirilebilir. Buradan

$$X(s)=\frac{2s-3}{s^2-s-6}=\frac{2s-3}{(s-3)(s+2)}$$

elde edilir. Basit kesirlere ayırma metodunu kullanırsak

$$\frac{2s-3}{(s-3)(s+2)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+2}$$

olacak şekilde A ve B sabitleri vardır. Bu eşitliğin her iki tarafının $(s-3)(s+2)$ ile çarpılması

$$2s-3=A(s+2)+B(s-3)$$

özdeşliğini verir. Buradan $A=\frac{3}{5}$ ve $B=\frac{7}{5}$ elde edilir. Böylece

$$X(s)=\mathcal{L}\left\{x(t)\right\}=\frac{\frac{3}{5}}{s-3}+\frac{\frac{7}{5}}{s+2}$$

olur. $\mathcal{L}^{-1}\left\{1/(s-a)\right\}=e^{at}$ olduğundan

$$x(t)=\frac{3}{5}e^{3t}+\frac{7}{5}e^{-2t}$$

verilen başlangıç değer probleminin çözümüdür.

Örnek 1.20:

$$x''+4x=\sin 3t \quad , \quad x(0)=x'(0)=0$$

başlangıç değer problemini çözelim. Böyle bir problem dış kuvvetli bir kütle yay sisteminin hareketinde ortaya çıkar. Her iki başlangıç değeri de sıfır olduğundan

$$\mathcal{L}\left\{x''(t)\right\}=s^2X(s)$$

verir. $sin3t$ nin dönüşümünü kullanırsak

$$s^2X(s)+4X(s)=\frac{3}{s^2+9}$$

dönüştürülmüş denklemini elde ederiz. Böylece

$$X(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

olur. Basit kesirlere ayırma metodunu uygularsak

$$\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+9}$$

elde ederiz. $A = C = 0$ dır. Bundan sonra her iki tarafı $(s^2+4)(s^2+9)$ ile çarpalım. Sonuç

$$3 = B(s^2+9) + D(s^2+4) = (B+D)s^2 + (9B+4D)$$

özdeşliğidir.

$$\begin{aligned} B + D &= 0 \\ 9B + 4D &= 3 \end{aligned}$$

özdeşliğini çözersek $B = \frac{3}{5}$ ve $D = -\frac{3}{5}$ elde edilir.

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{3}{10}.\frac{2}{s^2+4} - \frac{1}{5}.\frac{3}{s^2+9}$$

olur. $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = 2/s^2+4$ ve $\mathcal{L}\{\sin 3t\} = 3/s^2+9$ olduğundan

$$x(t) = \frac{3}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\sin 3t$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi Laplace dönüşümü, ilk olarak tamamlayıcı fonksiyonu bulmaya ve orijinal homojen olmayan denklemin bir özel çözümünü bulmaya gerek kalmaksızın çözümü doğrudan verir.(Edward - Penney, 2006)

Örnek1.21:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} - 3x_1 - 4x_2 &= 0 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ikinci dereceden adi diferansiyel sistemin sonucunu

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_2(t) = 0 \\ \frac{dx_1}{dt} &= 2 \quad \text{ve} \quad \frac{dx_2}{dt} = 0 \quad , \quad t = 0 \end{aligned}$$

başlangıç koşullarına göre bulalım.

Verilen diferansiyel sisteme Laplace dönüşümünü uygularsak

$$\mathcal{L}\{x_1(t)\} = X_1(s) \quad \text{ve} \quad \mathcal{L}\{x_2(t)\} = X_2(s)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} (s^2-3)X_1(s) - 4X_2(s) &= 2 \\ X_1(s) + (s^2+1)X_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

Böylece

$$X_1(s) = \frac{2(s^2+1)}{(s^2-1)^2} = \frac{(s+1)^2+(s-1)^2}{(s^2-1)^2} = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

sonucuna ters dönüşüm uygularsak

$$x_1(t) = t(e^t + e^{-t})$$

bulunur. Aynı şekilde

$$X_2(s) = \frac{-2}{(s^2-1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2}\right]$$

ifadesine ters Laplace dönüşümünü uygularsak

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t} - te^t - te^{-t}\right)$$

bulunur.

Örnek 1.22: (Orta Dirençsiz, Harmonik Osilatör)

$Ff(t)$ dış etkili gücün bulunduğu osilatörün diferansiyel denklemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = Ff(t)$$

dir. Burada ω frekans ve F sabittir. Bu denklemin çözümünü

$$x(t) = a \quad , \quad x'(t) = U \quad , \quad t = 0 \quad \text{(a ve U sabitler)}$$

başlangıç koşullarıyla bulalım.

Verilen denklemin başlangıç şartlarına göre Laplace dönüşümünü alırsak

$$(s^2+\omega^2)X(s) = sa + U + F.F(s)$$

veya

$$X(s) = \frac{as}{s^2+\omega^2} + \frac{U}{s^2+\omega^2} + \frac{F.F(s)}{s^2+\omega^2}$$

bulunur. Konvolüsyon teoremiyle birlikte ters Laplace dönüşümünü alırsak

$$\begin{aligned} x(t) &= a.\cos\omega t + \frac{U}{\omega}\sin wt + \frac{F}{\omega}\int_0^t f(t-\tau)\sin\omega\tau d\tau \\ &= A\cos(\omega t-\phi) + \frac{F}{\omega}\int_0^t f(t-\tau)\sin\omega\tau d\tau \end{aligned}$$

bulunur.

$$A = \left(a^2 + \frac{U^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \quad \text{ve} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{U}{\omega.a}\right)$$

Bu sonuç iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım A amplitud (genlik) ϕ faz ve ω frekans değerlerinin bulunduğu, serbest titreşimin açıklandığı, osilatörün doğal frekansı olarak tanımlanan kısımdır. İkinci kısım, dış gücün içerisinde yer aldığı güçlü titreşimin açıklandığı kısımdır (Debnath, 1995).

Örnek 1.23:

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + a^2tx(t) = 0 \quad , \quad x(0) = 1$$

Bessel denkleminin çözümünü elde edelim.

Verilen denkleme Laplace dönüşümünü uygularsak

$$\mathcal{L}\left\{t\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + a^2\mathcal{L}\left\{tx(t)\right\} = 0$$

veya

$$-\frac{d}{ds}\left[\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\}\right] + sX(s) - x(0) - a^2\frac{dX(s)}{ds} = 0$$

veya

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right] + sX(s) - 1 - a^2\frac{dX(s)}{ds} = 0$$

Böylece

$$(s^2+a^2)\frac{dX(s)}{ds}+sX(s)=0$$

veya

$$\frac{dX(s)}{X(s)}=-\frac{sds}{s^2+a^2}$$

$X(s)$ in çözümünü bulmak için integrasyon uygulanırsa

$$X(s)=\frac{A}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

bulunur. Burada A integrasyon sabitidir. Ters dönüşüm alınarak çözüm

$$x(t)=AJ_0(at)$$

olarak bulunur.

Örnek 1.24:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{tdx}{dt}-2x=2 \qquad x(0)=x'(0)=0$$

Başlangıç-değer probleminin çözümünü bulalım.

Laplace dönüşümünü uygularsak

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\}+\mathcal{L}\left\{\frac{tdx}{dt}\right\}-2X(s)=\frac{2}{s}$$

veya

$$\begin{aligned} s^2X(s)-\frac{d}{ds}\{sX(s)\}-2X(s) &= \frac{2}{s} \\ \frac{dX(s)}{ds}+\left(\frac{3}{s}-s\right)X(s) &= -\frac{2}{s^2} \end{aligned}$$

Bu integral çarpanı metoduyla çözümlenebilen birinci dereceden lineer denklemdir. İntegral çarpanı $s^3.e^{-\frac{1}{2}s^2}$ dir. Denklemin integral çarpanıyla çarpılıp ve integralinin alınmasıyla

$$X(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{A}{s^3}e^{\frac{s^2}{2}}$$

bulunur. Burada A integrasyon sabitidir. ($s\to\infty$ iken $X(s)\to\infty$)

$$A=0 \quad \text{ise} \quad X(s)=\frac{2}{s^3}$$

bulunur ve ters dönüşüm alınırsa

$$x(t) = t^2$$

olarak hesaplanır.

Örnek 1.25: Bir yay üzerindeki, kütlenin sönümsüz zorlanmış salınımlarını belirleyen

$$x'' + \omega_0^2 x = F_0 \sin \omega t \quad ; \quad x(0) = 0 = x'(0)$$

başlangıç-değer problemini çözmek için Laplace dönüşümlerini kullanalım.

Diferansiyel denklemi dönüştürdüğümüzde

$$\begin{aligned} s^2 X(s) + \omega_0^2 X(s) &= \frac{F_0 \omega}{s^2 + \omega^2} \\ X(s) &= \frac{F_0 \omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \omega_0^2)} \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Eğer $\omega \neq \omega_0$ ise

$$X(s) = \frac{F_0 \omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \left(\frac{1}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right)$$

buluruz. Buradan

$$x(t) = \frac{F_0 \omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \left(\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right)$$

olur. Fakat $\omega = \omega_0$ ise

$$X(s) = \frac{F_0 \omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

olur. Böylece

$$x(t) = \frac{F_0}{2\omega_0^2} \left(\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t \right)$$

rezonans çözümünü verir. Bu çözüm eğrisi $x = \pm C(t)$ "zarf eğrileri"nin arasında ileri-geri salınır. $x = FC(t)$ zarf eğrilerinin

$$x(t) = A(t) \cos \omega_0 t + B(t) \sin \omega_0 t$$

formunda yazılmasıyla ve genliğin $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ alınması ile elde edilir. Bu durumda

$$C(t) = \frac{F_0}{2\omega_0^2} \sqrt{\omega_0^2 t^2 + 1}$$

bulunur.

Örnek 1.26:

Bir $m = 1$ kütlesi $k = 4$ sabiti bir yaya eklenmiştir. Sönümlendirici yoktur. Kütle $x(0) = 3$ de durgun halde iken serbest bırakılmıştır. $t = 2\pi$ anında kütleye bir çekiçle $p = 8$ darbesiyle vuruluyor. Kütlenin hareketini belirleyelim.

$$x'' + 4x = 8\delta_{2\pi}(t) \quad ; \quad x(0) = 3 \quad x'(0) = 0$$

başlangıç-değer problemini çözmeliyiz.

$$s^2X(s) - 3s + 4X(s) = 8e^{-2\pi s}$$

ifadesini Laplace dönüşümünü uygulayarak buluruz. Böylece

$$X(s) = \frac{3s}{s^2+4} + \frac{8e^{-2\pi s}}{s^2+4}$$

elde edilir. Ters dönüşüm alınarak

$$\begin{aligned} x(t) &= 3\cos 2t + 4u(t-2\pi)\sin 2(t-2\pi) \\ &= 3\cos 2t + 4u_{2\pi}(t)\sin 2t \end{aligned}$$

olarak bulunur.

1.8.2 İntegral denklemlere uygulanması

Bulunması gereken fonksiyon eğer intagral içerisinde bulunuyorsa bu denkleme integral denklemi denir. İntegral denklemlerini Laplace dönüşümü yöntemiyle çözebiliriz. Yalnız, çözeceğimiz integral denklemleri sınırlı sayıda olacaktır. $g(t)$ ve $h(t)$ verilmiş fonksiyonlar olmak üzere integral denklemleri

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau).h(t-\tau)d\tau \tag{1.28}$$

şeklindedir.

Örnek 1.27:

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau).\sin(t-\tau)d\tau$$

integral denklemini çözelim.

Konvolüsyon teoremini uygulayarak

$$y(t) = t + y(t) * \sin t$$

olarak yazabiliriz. Her iki yanın Laplace dönüşümünü alırsak

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{y(t)\}.\mathcal{L}\{\sin t\}$$

olur. Buradan $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ olmak üzere

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + Y(s).\frac{1}{s^2+1}$$

bulunur.

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$$

Ters Laplace dönüşümünü alırsak

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{1/s^2\right\} = t \ \text{ ve } \ \mathcal{L}^{-1}\left\{1/s^4\right\} = \frac{1}{6}t^3$$

olduğundan

$$y(t) = t + \frac{1}{6}t^3$$

sonucunu buluruz.

Seri bağlanmış bir elektrik devresinde Kirchoff'un ikinci kanunu, indüktör, rezistör ve kapasitördeki voltaj düşmelerinin toplamının $E(t)$ voltajına eşit olduğunu ifade eder. Buna göre $\dot{I}(t)$ akım ve L, R, C sabitler,

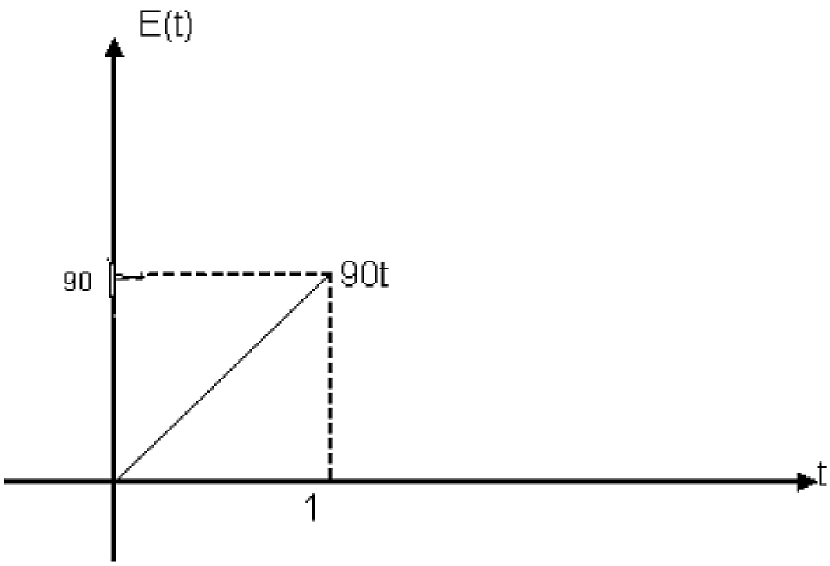
$$\begin{aligned} \text{İndüktör voltaj düşüşü} &= L\frac{di}{dt} \\ \text{Rezistördeki voltaj düşüşü} &= Ri(t) \\ \text{Kapasitördeki voltaj düşüşü} &= \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \end{aligned}$$

olmak üzere, seri bağlı elektrik devrelerinde akım,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t) \tag{1.29}$$

şeklindeki integro-diferensiyel denklemiyle belirlenir. Laplace metodu böyle bir denklem için çalışır.(Özer - Eser, 2002)

Örnek 1.28: $R = 110\Omega$, $L = 1H$, $C = 0,001F$ ile RLC devresi ele alalım ve $E_0 = 90V$ uygulansın. Başlangıçta devrede akım yoktur ve kapasitör şarjlı değildir. $t = 0$ anında anahtar kapatılıyor ve 1 saniye için kapalı kalıyor. $t = 1$ anında açılıyor ve daha sonra açık kalmaya devam ediyor. Devredeki akımı bulalım.



Şekil 1.2. Voltaj - Zaman Grafiği

$t \geq 1$ için voltaj kapalı olduğundan Şekil 1.2 de verilen voltaj, birim basamak fonksiyonuna bağlı olarak

$$E(t) = 90t - 90tu(t-1) \tag{1.30}$$

olarak yazabiliriz. Bu değerleri (1.29) denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{di}{dt} + 110i + 1000\int_0^t i(\tau)d\tau = 90\left[1 - u(t-1)\right]$$

olur.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t i(\tau)d\tau\right\} = \frac{I(s)}{s}$$

eşitliğini kullanırsak

$$sI(s) + 110I(s) + 1000\frac{I(s)}{s} = \frac{90}{s}(1 - e^{-s})$$

dir. Bu denklemi $I(s)$ için çözersek,

$$I(s) = \frac{90(1 - e^{-s})}{s^2 + 110s + 1000}$$

elde edilir. Fakat

$$\frac{90}{s^2 + 110s + 1000} = \frac{1}{s + 10} - \frac{1}{s + 100}$$

dir. Böylece

$$I(s) = \frac{1}{s + 10} - \frac{1}{s + 100} - e^{-s}(\frac{1}{s + 10} - \frac{1}{s + 100})$$

elde ederiz. Şimdi $f(t) = e^{-10t} - e^{-100t}$ ve ters Laplace dönüşümü için ikinci öteleme özelliğini uygularsak, elektrik devresindeki akım,

$$i(t) = e^{-10t} - e^{-100t} - u(t - 1)\left[e^{-10(t-1)} - e^{-100(t-1)}\right]$$

olarak bulunur.

Örnek 1.29:

$$f(t) = a \sin t + 2\int_0^t f'(\tau)\sin(t - \tau)d\tau \quad , \quad f(0) = 0$$

denkleminin çözümünü bulalım.

Verilen denklemin Laplace dönüşümünü alırsak

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + 1} + 2\mathcal{L}\{f'(t)\}\mathcal{L}\{\sin t\}$$

veya

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + 1} + 2\frac{\{sF(s) - f(0)\}}{s^2 + 1}$$

Başlangıç koşullarının uygulanmasıyla

$$F(s) = \frac{a}{(s - 1)^2}$$

elde edilir. Ters dönüşümün alınmasıyla denklemin çözümü

$$f(t) = ate^t$$

olarak bulunur.

Örnek 1.30:

Abel integral denkleminin çözümünü bulalım.

$$g(t) = \int_0^t f'(t)(t-\tau)^{-\alpha} d\tau \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$

Laplace dönüşümünün uygulanması sonucunda

$$G(s) = \mathcal{L}\{f'(t)\}\, \mathcal{L}\{t^{-\alpha}\}$$
$$F(s) = \tfrac{f(0)}{s} + \tfrac{G(s)}{\Gamma(1-\alpha)}.s^{-\alpha}$$
$$f(t) = f(0) + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t g(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$

Bu Abel denkleminin çözümüdür.(Denath,1995)

1.8.3 Kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması

Örnek 1.31:

$$u_t + x u_x = x \quad , \quad x > 0 \quad , \quad t > 0$$

başlangıç-sınır değer probleminin çözümünü

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \qquad x > 0 \quad \text{için} \\ u(0,t) &= 0 \qquad t > 0 \quad \text{için} \end{aligned}$$

koşullarıyla bulalım.

$u(x,t)$ ye Laplace dönüşümünü uygulayarak $\mathcal{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$ olmak üzere

$$sU(x,s) + \frac{xdU}{dx} = \frac{x}{s}$$

bulunur. İntegral çarpanı x^s kullanırsak, dönüşüm denkleminin sonucu

$$U(x,s) = Ax^{-s} + \frac{x}{s(s+1)}$$

hesaplanır. Burada A integrasyon sabitidir. $U(0,s) = 0$, $A = 0$ olduğu için

$$U(x,s) = \frac{x}{s(s+1)} = x\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)$$

olur. Ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$u(x,t) = x(1 - e^{-t})$$

çözümünü elde ederiz.

Örnek 1.32:

$$xu_t + u_x = x \quad , \quad x > 0 \quad , \quad t > 0$$

denkleminin sonucunu bir önceki örnekteki aynı başlangıç ve sınır değerleriyle bulalım.

Verilen denkleme Laplace dönüşümünü uygularsak

$$\frac{dU}{dx} + xsU = \frac{x}{s}$$

Bu denklemi $e^{\frac{1}{2}x^2 s}$ integral çarpanıyla çarpıp, integral alırsak

$$U(x,s) = \frac{1}{s^2} + Ae^{-\frac{1}{2}x^2 s}$$

bulunur. (A integrasyon sabitidir). Böylece $U(0,s) = 0, A = -\frac{1}{s^2}$ ve çözüm

$$U(x,s) = \frac{1}{s^2}\left[1 - e^{-\frac{1}{2}x^2 s}\right]$$

olur. Sonuç olarak ters dönüşümü alırsak

$$u(x,t) = \begin{cases} t & 2t < x^2 \\ \frac{1}{2}x^2 & 2t > x^2 \end{cases}$$

çözümü elde edilir.

Örnek 1.33: (Yarı-sonsuz düzlemde dalga denklemi)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 \leq x < \infty \qquad t > 0$$

ile verilen dalga denklemini

$$\begin{aligned} u(x,t) &= Af(t) \quad x = 0 \quad , \quad t \geq 0 \quad \text{için} \\ u(x,t) &\to 0 \quad x \to \infty \quad , \quad t \geq 0 \\ u(x,t) &= 0 = \frac{\partial u}{\partial t} \quad t = 0 \text{ da} \quad 0 < x < \infty \quad \text{için} \end{aligned}$$

başlangıç ve sınır değer koşullarıyla çözelim.

$u(x,t)$ fonksiyonuna Laplace dönüşümünü uygularsak

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2}U &= 0 \qquad 0 \leq x < \infty \quad \text{için} \\ U(x,s) &= AF(s) \qquad x = 0 \quad \text{da} \\ U(x,s) &\to 0 \qquad x \to \infty \quad \text{iken} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece bu diferansiyel sistemin çözümü

$$U(x,s) = AF(s)e^{-\frac{xs}{c}}$$

ve denklemin ters Laplace dönüşümünü alırsak

$$u(x,t) = \begin{cases} Af\left(t - \frac{x}{c}\right) & t > \frac{x}{c} \\ 0 & t < \frac{x}{c} \end{cases}$$

Örnek 1.34: (Homojen olmayan kısmi diferansiyel denklem)

$$\begin{aligned} u_{xt} &= -\omega \sin \omega t \qquad t > 0 \\ u(x,0) &= x \qquad u(0,t) = 0 \end{aligned}$$

Homojen olmayan problemin sonucunu bulalım. Verilen denkleme Laplace dönüşümünü uygularsak

$$\frac{dU}{dx} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

ve

$$U(x,s) = \frac{sx}{s^2 + \omega^2} + A$$

A burada sabittir. Ayrıca $U(0,s) = 0$, $A = 0$ ve ters dönüşüm alınarak çözüm

$$u(x,t) = x \cos \omega t$$

olarak elde edilir.(Debnath,1995)

BÖLÜM 2

FOURİER DÖNÜŞÜMÜ VE UYGULAMALARI

2.1 Fourier Serisi

Tanım 2.1: Bütün t'ler için

$$f(t+p) = f(t)$$

olacak şekilde bir pozitif p sayısının mevcut olması şartıyla, her t için tanımlı $f(t)$ fonksiyonuna periyodik fonksiyon, p sayısına da bu fonksiyonun periyodu denir.

Fransız bilimadamı Joseph Fourier (1768 - 1830) The Analytic Theory of Heat (1822) isimli ünlü çalışmasında şu iddiayı ortaya koymuştur: 2π periyotlu her $f(t)$ fonksiyonu,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{2.1}$$

formunda bir "sonsuz" trigonometrik seri ile gösterilebilir. (2.1) yapısındaki sonsuz seriye, Fourier Serisi denir. Fonksiyonların Fourier Serisi ile temsili, uygulamlı matematikte, özellikle kısmi türevli denklemlerin çözümlerinde, oldukça yaygın kullanılan tekniklerden birisidir.(Brown - Churchill, 1993)

Tanım 2.2: $f(t)$ bütün t ler için tanımlı ve $2L$ periyotlu parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. $f(t)$ nin Fourier Serisi

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n \sin\frac{n\pi t}{L}) \tag{2.2}$$

serisidir. Buradan a_n ve b_n Fourier katsayıları

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \tag{2.3}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt \tag{2.4}$$

olarak tanımlanır.

2.1.1 Fourier serisinin yakınsaklığı

f periyodik fonksiyonunun parçalı düzgün olduğunu kabul edelim. O zaman fonksiyonun (2.2) deki Fourier serisi,

a) f nin sürekli olduğu her noktada $f(t)$ değerine

b) f nin süreksiz olduğu her noktada $\frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$ değerine yakınsar.

$$\frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)],$$

t noktasında f nin sağ ve sol limitlerinin ortalamasıdır. f, t noktasında sürekli ise $f(t) = f(t+) = f(t-)$ ve böylece

$$f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2} \tag{2.5}$$

dir. Böylece bir parçalı düzgün f fonksiyonunun Fourier serisi her t için (2.5) deki ortalama değere yakınsar. $f(t)$ nin sürekliliği Fourier serilerinin yakınsaklığını garantilemez.

Örnek 2.1: $f(t) = t^2, 0 < t < 2$ ve periyodu 2 olan bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun Fourier serisini bulalım.

(2.5) deki ortalama değer şartı ile bir çift tamsayı t için $f(t)$ tanımlansın. Yani bir çift tamsayı t için $f(t) = 2$ dir.

$L = 1$ olup $t = 0$ dan $t = 2$ ye kadar integre etmek mümkündür. O halde

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_0^2 t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

dür. a_n ve b_n Fourier serisinin katsayıları idi.

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^2 t^2 \cos n\pi t dt \\
&= \frac{1}{n^3\pi^3}\int_0^{2n\pi} 4^2 \cos u du \qquad\qquad (4 = n\pi t, t = \frac{u}{n_x}) \\
&= \frac{1}{n^3\pi^3}\left[4^3 \sin u - 2\sin u + 2u\cos u\right]_0^{2n\pi} \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_0^2 t^2 \sin n\pi t dt \\
&= \frac{1}{n^3\pi^3} \int_0^{2n\pi} 4^2 \sin u du \\
&= \frac{1}{n^3\pi^3} \left[-u^2 \cos u - 2\cos u + 2u \sin u \right]_0^{2n\pi} \\
&= -\frac{4}{n\pi}
\end{aligned}$$

Böylece f nin Fourier serisi

$$f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi t}{n^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi t}{n}$$

dir.

2.1.2 Fourier sinüs ve kosinüs serileri

Tanım 2.3: Bütün t ler için tanımlı f fonksiyonuna

$$f(-t) = f(t)$$

ise çift,

$$f(-t) = -f(t)$$

ise tek fonksiyon denir.

Örneğin kosinüs fonksiyonu çift, sinüs fonksiyonu tek fonksiyondur.

Eğer f çift ise,

$$\int_{-a}^{a} f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \tag{2.6}$$

Eğer f tek ise

$$\int_{-a}^{a} f(t) dt = 0 \tag{2.7}$$

dır. f nin Fourier katsayılarını hesapladığımızda; f çift fonksiyon ise, $f(t)\cos(n\pi t/L)$ de çift fonksiyondur. Böylece

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \\
b_n &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $2L$ periyotlu çift fonksiyon f nin Fourier serisinde sadece kosinüslü terimler vardır. Bu fonksiyona Fourier kosinüs serisi de denir.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} \qquad (f \text{ çift}) \tag{2.8}$$

$f(t)$ tek fonksiyon ise, $f(t)\cos(n\pi t/L)$ de tektir, oysa $f(t)\sin(n\pi t/L)$ çift fonksiyondur. Böylece

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $2L$ periyotlu tek fonksiyonun Fourier serisinde sadece sinüslü terimler vardır. Bu fonksiyona f nin Fourier sinüs serisi de denir.

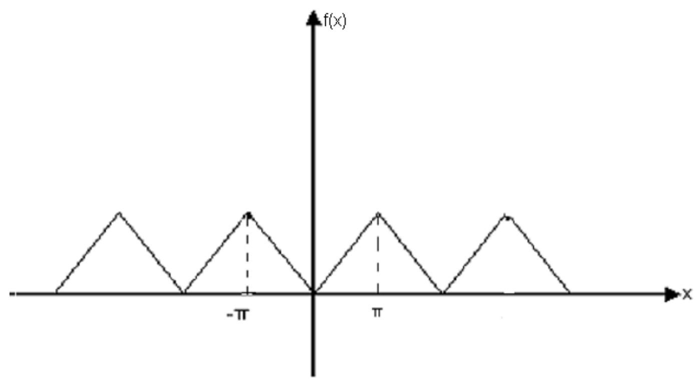
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L} \qquad (f \text{ tek}) \tag{2.9}$$

Örnek 2.2:

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \le x \le 0 \quad \text{ise} \\ x & 0 \le x \le \pi \quad \text{ise} \end{cases}$$

ve $f(x + 2\pi) = f(x)$ olan fonksiyonun Fourier serisini bulup, $x = 0$ için değerini hesaplayalım.

$f(x)$ fonksiyonu $f(-x) = f(x)$ olduğundan çift bir fonksiyondur.



Şekil 2.1. f(x) in Grafiği

Bu halde $b_n = 0$ dır. $p = 2\pi$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{4}{2\pi}\frac{x^2}{2}|_0^{\pi} = \pi \\
a_n &= \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} x\cos\frac{2n\pi x}{2\pi}dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx dx\right] \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\cos x|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right]
\end{aligned}
$$

katsayıları bulunur.

$n = 2m$ ise $a_{2m} = 0$, $n = 2m+1$ ise $a_{2m+1} = \dfrac{-4}{(2m+1)^2\pi}$ olur, böylece

$$
f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)x
$$

Fourier serisi elde edilir. $x = 0$ için $f(x) = 0$ olacağından

$$
\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}
$$

nümerik serisinin değeri bulunur.

2.2 Fourier İntegrali

Fourier integral teoremi matematikçiler ve matematikle uğraşan fizikçiler tarafından 19. ve 20. yüzyılda fark edildi. Bu modern matematik analizlerinin temel sonuçlarından biri olarak itibar kazanmıştır. Cauchy'nin ünlü bilimsel araştırması "Memoire sur ı'emploi des equations symboliques" tamamen sembolik açıklamaları ile anlatılmıştır. J. Fourier (1768-1830) temel adımı atmış ve Oliver Heaviside (1850-1925) bu metodu geliştirmiştir.

$2L$ periyotlu $f(x)$ fonksiyonunda $L \to \infty$ halinde (L sonsuza giderse) $f(x)$ fonksiyonunun periyodikliği kalmaz. Fourier serisi periyodik fonksiyonları içeren problemlerde önemli rol oynar. Özellikle kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerindeki yeri çok önemlidir. $L \to \infty$ olması durumunda Fourier serisi integraline dönüşür.

Tanım 2.4: Eğer bir $f(x)$ fonksiyonunun;

1) $f(x)$, $-L \leq x \leq L$ aralığında sonlu sayıda süreksizliğe sahip ve hiçbir sonsuz süreksizliği yok ise

2) $f(x)$ in sadece sonlu sayıda maximum ve minimumu var ise, bu fonksiyon $-L \leq x \leq L$ aralığında "Dirichlet şartlarını sağlıyor" denir.

Teorem 2.1: f fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın.

1) f fonksiyonu her sonlu $-L \leq x \leq L$ aralığında Dirichlet şartlarını sağlasın (Fourier serisine açılabilir)

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ integrali yakınsak, yani $(-\infty, \infty)$ da $f(x)$ mutlak integrallenebilir olsun. Bu durumda f sürekli ise

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} (A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x)d\alpha \tag{2.10}$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx \tag{2.11}$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx \tag{2.12}$$

dir. Şayet x_0 bir süreksizlik noktası ise

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} = \int\limits_{0}^{\infty} (A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x)d\alpha \tag{2.13}$$

olur. Burada (2.13) ifadesine Fourier integrali denir.

Teorem 2.2: Eğer $f(x)$, $(-\infty, \infty)$ aralığında Dirichlet şartlarını sağlıyorsa ve bu aralıkta kesinlikle integrallenebilirse,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha=0}^{\infty}\int\limits_{u=-\infty}^{\infty} f(u).\cos\alpha(x-u)dud\alpha \tag{2.14}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u).e^{-i\alpha(x-u)}dud\alpha \tag{2.15}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u).e^{-i\alpha u}du \tag{2.16}$$

biçiminde Fourier integraline açılır. Eğer $f(x)$ fonksiyonu x de sürekli değilse bu durumda $f(x)$ in Fourier integrali $f(x)$ fonksiyonunun sağdan ve soldan limitlerinin aritmetik ortalamasına yakınsar.

İspat 2.2: Bilindiği gibi Fourier serisinin limit durumu

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}) \tag{2.17}$$

idi. Burada

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi u}{L}du \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(u)\sin\frac{n\pi u}{L}du \end{aligned}$$

değerlerini (2.17) de yerine yazarsak

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)du + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi}{L}(u-x)du$$

elde edilir.

Eğer $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|du$ yakınsak ise ilk birinci terim $L \to \infty$ için sıfıra yakınlaşır, sağ yandaki ikinci terim ise

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\frac{n\pi}{L}(u-x)du$$

şekline dönüşür.

$\alpha = \dfrac{n\pi}{L}$ alınırsa $\Delta\alpha = \frac{\pi}{L}$ $\quad L \to \infty$ iken $\Delta\alpha \to 0$ olur.

$$f(x) = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha F(n.\Delta\alpha) = \int_{0}^{\infty} F(\alpha)d\alpha$$

yazılabilir. Buradan

$$F(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(u-x)du$$

elde edilir. Limit durumunda toplam, integral ile yer değiştirerek

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} F(\alpha)d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(u-x)du \tag{2.18}$$

ifadesi bulunur. Bu ise Fourier integral formülüdür.

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x d\alpha \int_0^\infty f(u)\sin\alpha u du \quad , \text{eğer } f(x) \text{ tek ise} \tag{2.19}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x d\alpha \int_0^\infty f(u)\cos\alpha u du \quad , \text{eğer } f(x) \text{ çift ise} \tag{2.20}$$

olur. Tek ve çift fonksiyonlar için bu integral formülleri Cauchy tarafından su üzerinde dalgaların yayılımı üzerine yaptığı çalışmasında bulunmuştur. (Davies, 1978)

2.3 Fourier Dönüşümünün Tanımı

Fourier integral teoremine göre

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} d\alpha \int_{-\alpha}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u} du \tag{2.21}$$

idi.

Tanım 2.5: (2.21) den dolayı

$$F(\alpha) = \int_0^\infty f(u)e^{-i\alpha u} du \tag{2.22}$$

ile $F(\alpha)$ fonksiyonunu tanımlayarak

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha u} d\alpha \tag{2.23}$$

elde edilir.

$F(\alpha)$ ya $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü ve $f(x)$ fonksiyonuna da $F(\alpha)$ fonksiyonunun Ters Fourier Dönüşümü denir ve

$$F(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\} \qquad \text{ve} \qquad f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)\} \tag{2.24}$$

ile gösterilir. Hem $\mathcal{F}$ ve hem de $\mathcal{F}^{-1}$ lineer integral operatörleridir. (Stuart, 1961)

$f(x)$ fonksiyonu çift bir fonksiyon ise,

$$F_c(\alpha) = 2\int_0^\infty f(u)\cos\alpha u du \tag{2.25}$$

alınırsa

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_c(\alpha)\cos\alpha x d\alpha \qquad (2.26)$$

bulunur. Burada $F_c(\alpha)$ ya $f(x)$ in Fourier Kosinüs Dönüşümü, $f(x)$ e de $F_c(\alpha)$ nın ters Fourier Kosinüs Dönüşümü denir.

$f(x)$ fonksiyonu tek bir fonksiyon ise

$$F_s(\alpha) = 2\int_{0}^{\infty} f(u)\sin\alpha u du \qquad (2.27)$$

alınırsa

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_s(\alpha)\sin\alpha x d\alpha \qquad (2.28)$$

elde edilir. Burada $F_s(\alpha)$ ya $f(x)$ in Fourier Sinüs Dönüşümü, $f(x)$ e de $F_s(\alpha)$ nın ters Fourier Sinüs Dönüşümü denir.

Matematik, matematiksel fizik ve mühendislik bilimlerinde kullanılan birçok lineer sınır-değer ve başlangıç-değer problemleri Fourier dönüşümü, Fourier Kosinüs ve Fourier Sinüs dönüşümleri kullanılarak etkili bir şekilde çözülebilmektedir. Bu dönüşümler diferensiyel ve integral denklemlerin çözümünde aşağıda açıklanan nedenlerden dolayı oldukça yararlıdır. Birincisi, bu denklemler, dönüşüm fonksiyonu sayesinde basit cebirsel denklemlere dönüşmektedir. Bu verilen denklemlerin çözümüyle ters dönüşüm alınarak başlangıçta aranan değişkenler bulunabilmektedir. İkinci olarak, Konvolüsyon teoremi ile birleştirilmiş olan dönüşümün çözümü, sınır-değer ve başlangıç-değer problemlerinin kolayca çözülebilmesini sağlar.(Ergeneli, 1984)

Fourier dönüşümünün kullanıldığı yerler belirli integralin hesabı, serilerin toplanması, elektrik tekniğinde frekans spektrumunun belirtilmesi, diferensiyel denklemlerin çözümleri olarak sınıflandırılabilir.(Ergeneli, 1984)

Uygulamalı matematikte x genellikle bir uzay değişkenini ve $\alpha(=\frac{2\pi}{\lambda})$ da dalga sayısı değişkenini gösterir. Burada λ dalga uzunluğudur. Bununla birlikte elektrik mühendisliğinde x, zaman değişkeni t ile ve α da $\omega(=2\pi v)$ frekans değişkeniyle yer değiştirir. Burada v dakika başına frekanstır. $F\{f(t)\} = F(\omega)$ fonksiyonuna zaman işaret fonksiyonu $f(t)$ nin tayfı denir. Elektrik mühendisliği literatüründe Fourier dönüşüm çifti biraz değişiktir.

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi vit} f(t)dt$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{F(v)\} &= f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(v)^{2\pi vit} dv \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{iwt}d\omega\end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada $\omega = 2\pi v$ ye açısal frekans denir. Fourier integral formülü ifade eder ki Fourier dönüşümüne sahip zamanın herhangi bir fonksiyonu $f(t)$ tayfı ile eşit olarak özelleştirilebilir. Fiziksel olarak $f(t)$ işareti basit harmonik osilasyonunun frekansı v, kompleks amplitüd(genlik) $F(v)$ nin tayfsal süperpozisyonunu sunar. (Debnath, 1995)

Örnek 2.3:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du = \int_{-1}^{1} e^{-i\alpha u}du \\ &= 2\frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0) \quad \text{ve} \quad \alpha = 0 \quad \text{için } F(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

2.4 Kompleks Fourier Dönüşümü

$F(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ dönüşümünde $f(x)$ reel ise

$$e^{-i\alpha x} = \cos\alpha x - i\sin\alpha x \tag{2.29}$$

koyarak

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx \tag{2.30}$$

yazılır. Buradaki integraller

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx \tag{2.31}$$

$$B(\alpha) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx \tag{2.32}$$

ile gösterirsek

$$F(\alpha) = A(\alpha) + iB(\alpha) \tag{2.33}$$

reel ve kompleks kısımları ayrılmış olarak elde edilir. Yukarıdaki eşitlik

$$F(\alpha) = |F(\alpha)| \, e^{i\Phi(\alpha)} \tag{2.34}$$

şeklinde de gösterilebilir. Burada $|F(\alpha)|$ ya $f(x)$ in Spektrum Amplitüdü(genlik), $\Phi(\alpha)$ ya $f(x)$ in Fazı da denilmektedir. (Ergeneli, 1984)

Örnek 2.4:

$$\int_{0}^{\infty} f(x) \cos uxdx = \begin{cases} 1-u & 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & u > 1 \end{cases}$$

integral denkleminin çözümünü bulalım.

$$F_c(u) = 2\int_{0}^{\infty} f(x) \cos uxdx = \begin{cases} 2(1-u) & 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & u > 1 \end{cases}$$

yazılırsa Fourier Kosinüs Dönüşümüne göre

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_c(u) \cos uxdu = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} 2(1-u) \cos uxdu \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1} (1-u) \cos uxdu \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

2.5 Fourier Dönüşümünün Temel Özellikleri

Teorem 2.3: Eğer $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha)$ ise

$a)\quad \mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-i\alpha a}\mathcal{F}\{f(x)\}$ (Kaydırma)

$b)\quad \mathcal{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\{f(x)\}$ (Skalerle Çarpma)

$c)\quad \mathcal{F}\left\{\overline{f(-x)}\right\} = \overline{\mathcal{F}\{f(x)\}}$ (Konjuge)

$d)\quad \mathcal{F}\{e^{iax}f(x)\} = F(\alpha - a)$ (Çevirim)

$e)\quad \mathcal{F}\{F(x)\} = f(-\alpha)$ (Duallik)

$f)\quad \mathcal{F}\{f^n(x)\} = (i\alpha)^n F(\alpha)$ (Türevlenebilirlik)

dir.

İspat 2.3:

a) Tanımdan

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(x-a)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(x-a)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(u+a)} f(u)du \quad , \quad (x-a=u) \\ &= e^{-i\alpha a}\mathcal{F}\{f(x)\}\end{aligned}$$

b-d şıklarının ispatı da Fourier dönüşümünün tanımından yapılabilir.

e) Tanımdan dolayı biliniyor ki,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}F(\alpha)d\alpha = \mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)\} \tag{2.35}$$

x ve α yı değiştirip α yerine $-\alpha$ yazarsak

$$f(-\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}F(\alpha)d\alpha = \mathcal{F}\{F(x)\} \tag{2.36}$$

2.6 Fourier Dönüşümü İçin Konvolüsyon Teoremi

Tanım 2.6: $f(x)$ ve $g(x)$ gibi iki fonksiyonun konvolüsyonu

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u).g(x-u)du \tag{2.37}$$

şeklinde tanımlanır. (Yarasa, 1976)

Teorem 2.4: (Konvolüsyon Teoremi)

Eğer $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha)$ ve $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(\alpha)$ ise o zaman

$$\mathcal{F}\{f * g\} = F(\alpha).G(\alpha) \tag{2.38}$$

veya

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha).G(\alpha)\} \tag{2.39}$$

olarak yazılır. (Yarasa, 1976)

İspat 2.4: Fourier dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha u}g(u)du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-u)}f(x-u)dx \\
\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha u}g(u)du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\eta}f(\eta)d\eta \\
&= G(\alpha).F(\alpha)
\end{aligned}$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 2.5:

$$y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(u)k(x-u)du$$

integral denklemini çözelim.

$y(x), g(x)$ ve $k(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri sırasıyla $Y(u), G(u)$ ve $K(u)$ olsun. Bu halde denklemin Fourier dönüşümünü alırsak,

$$Y(u) = G(u) + Y(u)K(u)$$

elde edilir. Buradan

$$Y(u) = \frac{G(u)}{1 - K(u)}$$

bulunur. Ters Fourier dönüşümünü alırsak

$$y(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{G(u)}{1 - K(u)}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{G(u)}{1 - K(u)} e^{iux} du$$

çözümü elde edilir.

2.7 Fourier Dönüşümü İçin Parseval Bağıntısı

Teorem 2.5: Eğer $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha)$ ve $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(\alpha)$ ise o zaman

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\overline{G(\alpha)}d\alpha \tag{2.40}$$

dır.

İspat 2.5:

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\overline{G(\alpha)}d\alpha &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha y} f(y)dy \overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} g(x)dx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{+i\alpha(x-y)}d\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\overline{G(\alpha)}d\alpha &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)f(y)dy \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx\end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak $f(x) = g(x)$ seçilirse

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\overline{F(\alpha)}d\alpha$$

veya

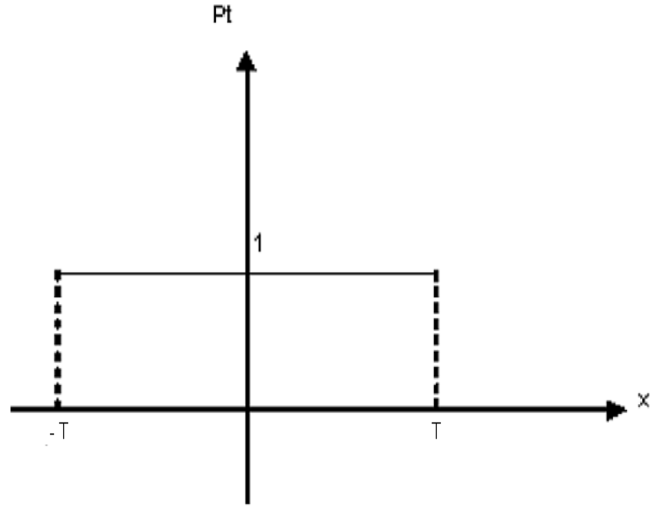
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha)|^2 d\alpha \tag{2.41}$$

haline gelir. Bu iyi bilinen Parseval Bağıntısı'dır.

Örnek 2.6: Dikdörtgen Puls olarak isimlendirilen $P_t(x)$ fonksiyonu

$$P_t(x) = \begin{cases} 1 & |x| < T \quad \text{için} \\ 0 & |x| > T \quad \text{için} \end{cases}$$

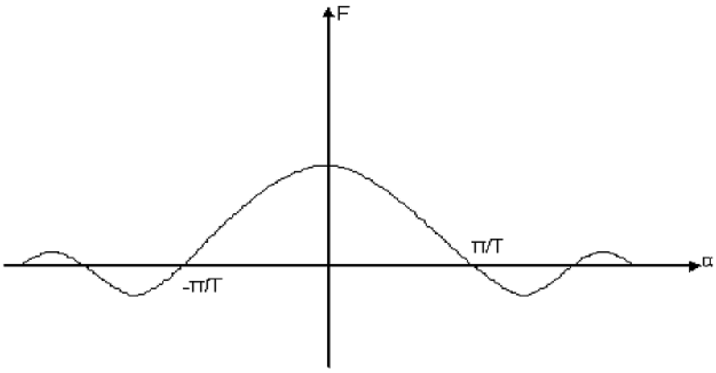
biçiminde tanımlanmıştır.



Şekil 2.2. Dikdörtgen Puls'un Grafiği

$P_t(x)$ fonksiyonunun Fourier Transformasyonu

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \mathcal{F}\left[P_t(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} 1.e^{-i\alpha x} dx \\ &= \int_{-T}^{T} 1.e^{-i\alpha x} dx \\ F(\alpha) &= 2\frac{\sin(\alpha T)}{\alpha} \\ &= 2T\frac{\sin(\alpha T)}{\alpha T} \qquad \text{dir.} \end{aligned}$$

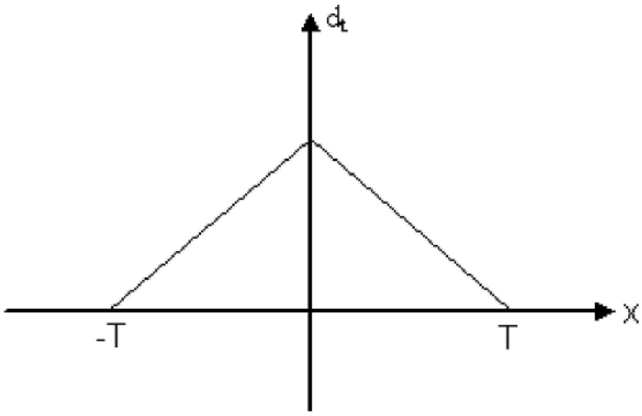


Şekil 2.3. F(α) nın Grafiği (Dyke, 2001)

Örnek 2.7: $d_t(x)$ ile gösterilen üçgen Puls

$$d_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{T}(T+x) & -T < x < 0 \\ \frac{1}{T}(T-x) & 0 < x < T \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır. $d_t(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulalım.



Şekil 2.4. Üçgen Puls'un Grafiği

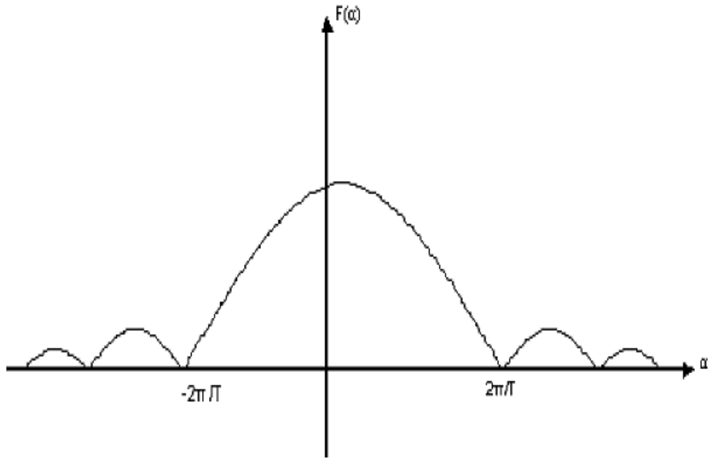
d_t fonksiyonu bir çift fonksiyondur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= 2\int_0^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx \\ F(\alpha) &= 2\int_0^{T} \frac{1}{T}(T-x)\cos\alpha x dx \\ &= \frac{2}{T}\frac{1-\cos\alpha T}{\alpha^2} \end{aligned}$$

ve buradan

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[d_t(x)\right] &= F(\alpha) \\
&= \frac{2}{T}\frac{1-\cos\alpha T}{\alpha^2} \\
&= \frac{4\sin^2(\alpha T/2)}{\alpha^2 T}
\end{aligned}
$$

bulunur.

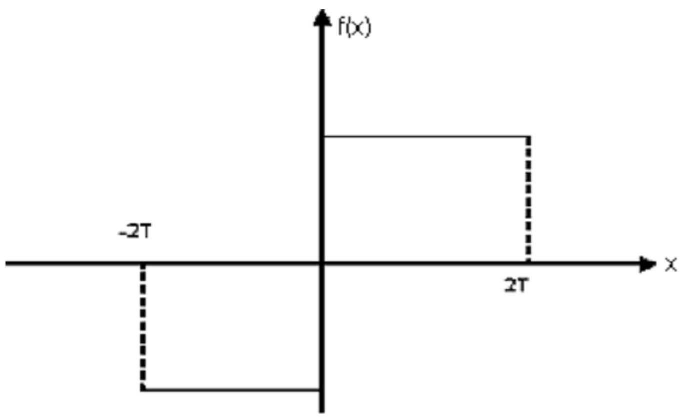


Şekil 2.5. F(α) nın Grafiği

Örnek 2.8:

$$
f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 2T \\ -1 & -2T < x < 0 \end{cases}
$$

ile tanımlanmış olan çift dikdörtgen puls, bir tek fonksiyondur. $f(t)$ nin tek olması nedeni ile $F(\alpha)$ imajinerdir.

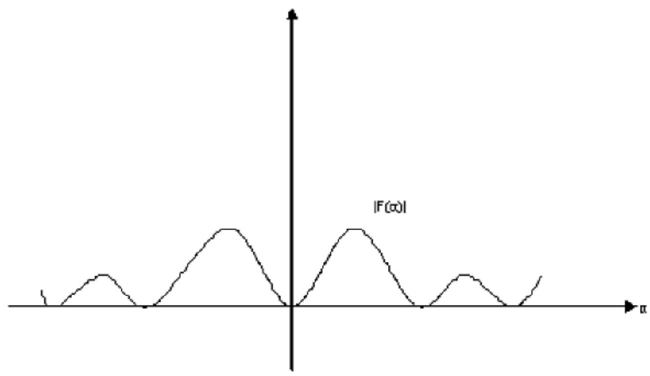


Şekil 2.6. Çift Dikdörtgen Puls'un Grafiği

$$
\begin{aligned}
X(\alpha) &= \mathcal{F}\left[f(x)\right] = -2\int_0^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx \\
&= -2\int_0^{2T} 1.\sin\alpha x dx \\
&= +\frac{2}{\alpha}(\cos 2\alpha T - 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(\alpha) &= ix(\alpha) \\
&= -4i\frac{\sin^2\alpha T}{\alpha}
\end{aligned}
$$

bulunur. (Yarasa, 1976)



Şekil 2.7. |F(α)| nın Grafiği

Örnek 2.9:

$$f(x) = e^{-ax}u(x)\ ,\ (a > 0)$$

Burada $u(x)$,

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan "Birim Basamak Fonksiyonu" (Heaviside) dir. (Debnath, 1995)

$f(x)$ in Fourier transformasyonu:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax} e^{-i\alpha x} dx \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\alpha)x} dx \\ &= \frac{1}{a+i\alpha} \end{aligned}$$

veya

$$F(\alpha) = \frac{a}{a^2+\alpha^2} - i\frac{\alpha}{a^2+\alpha^2}$$

elde edilir.

Örnek 2.10:

$$f(x) = e^{ax}u(-x) \quad , \quad (0 < a)$$

fonksiyonunun Fourier transformasyonu

$$F(\alpha) = \frac{1}{a-i\alpha} = F(\alpha) = \frac{a}{a^2+\alpha^2} + i\frac{\alpha}{a^2+\alpha^2}$$

olarak bulunur.

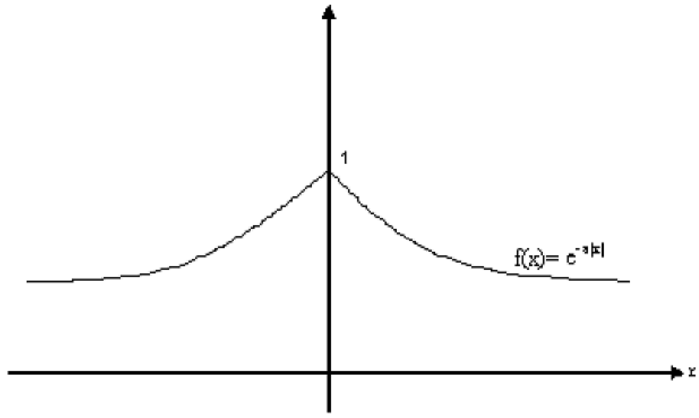
Örnek 2.11:

$$f(x) = e^{-a|x|} \quad , \quad (a > 0)$$

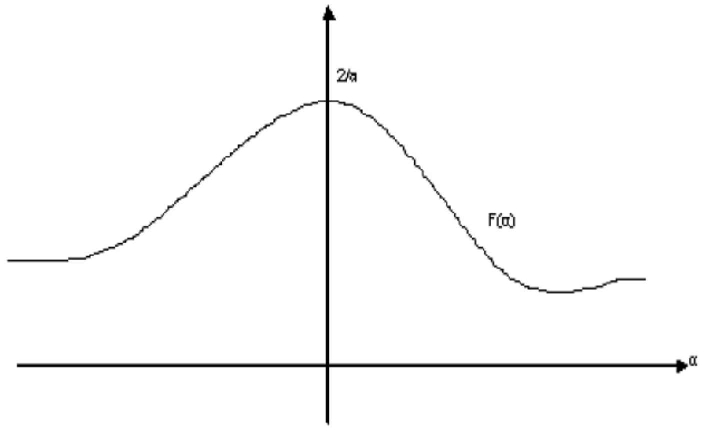
$f(x)$ fonksiyonu bir çift fonksiyon olup Fourier transformasyonu Örnek (2.9) da bulunan $F(\alpha)$ nın reel kısmıdır. O halde

$$F(\alpha) = \frac{2a}{a^2+\alpha^2}$$

olur.



Şekil 2.8. f(x) in Grafiği



Şekil 2.9. F(α) nın Grafiği

Örnek 2.12:

$$f(x) = e^{-ax}u(x) - e^{ax}u(-x) \quad , \quad (a > 0)$$

$f(x)$ Örnek (2.9) ve (2.10) daki fonksiyonlarla tanımlandığına göre $f(x)$ bir tek fonksiyondur. Örnek (2.9) da hesaplanan $F(\alpha)$ nın imajiner kısmına eşittir.

$$F(\alpha) = -2i\frac{\alpha}{a^2 + \alpha^2}$$

olur.

Örnek 2.13:

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad , \quad (a > 0)$$

olarak tanımlanan Gauss fonksiyonunun Fourier transformasyonu:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x - ax^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2 + i\alpha x/a)} dx \end{aligned}$$

dir. İntegrantı

$$(e^{-\alpha^2/4a}/e^{\alpha^2/4a})$$

ile çarparsak

$$F(\alpha) = e^{-\alpha^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+\frac{i\alpha}{2a})^2} dx$$

elde ederiz. Burada $\sqrt{a}(x + \dfrac{i\alpha}{2a}) = y$ dersek

$$F(\alpha) = e^{-\alpha^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy/\sqrt{a}$$

Euler integrali elde edilir. Bu integralin değeri $\sqrt{\pi}$ dir.

Böylece Gauss fonksiyonunun transformasyonu $a = \frac{1}{2}$ için

$$\mathcal{F}\left\{e^{-x^2/2}\right\} = \sqrt{2\pi} e^{-\alpha^2/2}$$

olur. Böylece $\sqrt{2\pi}$ çarpanı ayrıklığı ile $e^{-x^2/2}$ Gauss fonksiyonunun Fourier transformasyonunun yine kendisi olduğu görülür. Böyle bir fonksiyona Fourier dönüşümü altında kendine-karşıt fonksiyonlar denir. (Debnath, 1995)

1920'de Dirac aşağıdaki özelliklere sahip $\delta(x)$, delta fonksiyonunu tanımladı.

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \ , \ x \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1 \end{aligned}$$

Klasik matematikte hiçbir fonksiyon bu özelliği sağlamaz. Dolayısıyla delta fonksiyonu klasik anlamda bir fonksiyon değildir. Bununla beraber, genel anlamda bir fonksiyon olarak değerlendirilebilir ve aslında $\delta(x)$ e genelleştirilmiş fonksiyon yada dağılım (distribution) fonksiyonu denir. Delta fonksiyonunun konsepti modern matematikte basit ve açıktır. Fizik ve mühendislikte çok kullanışlıdır. Fiziksel olarak delta fonksiyonu nokta kütleyi gösterir ki bu, toplam kütlenin orjinde konumlanmış parçasıdır. Bu bakımdan toplam-yoğunluk fonksiyonu olarak adlandırılır. $\delta(x)$ klasik anlamda bir fonksiyon olmamasına rağmen klasik fonksiyonların bir serisi olarak ifade edilebilir. (Debnath, 1995) Örnek olarak şu seriyi düşünebiliriz.

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} \quad , \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{2.42}$$

Herhangi $x \neq 0$ için $n \to \infty$ için $\delta_n(x) \to 0$ ve $n \to \infty$ olur. Ayrıca tüm $n = 1, 2, 3, ...$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{2.43}$$

ve beklenildiği gibi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{2.44}$$

elde edilir.

Bazen delta fonksiyonu $\delta(x)$ in temel özelliği ile

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta(x-a) dx = f(a) \tag{2.45}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f(x), x = a$ yı ihtiva eden herhangi aralıkta süreklidir. Açıkça sonuç,

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(y) dy = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = u(x) \tag{2.46}$$

gösterir ki

$$\frac{d}{dx} u(x) = \delta(x) \tag{2.47}$$

Dirac delta fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\{\delta(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \delta(x) dx = 1 \tag{2.48}$$

olup, bundan dolayı

$$\delta(x) = \mathcal{F}^{-1}\{1\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} d\alpha \tag{2.49}$$

dir. Delta fonksiyonunun bu integral gösterimi en çok kuantum mekaniğinde kullanılır. Ayrıca (2.48)

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}dx \tag{2.50}$$

olarak tekrar yazılabilir.

Fourier dönüşümlerinde etken olacak başka bir fonksiyon $sgn(x)$ i tanımlayabiliriz. Şöyle ki;

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \tag{2.51}$$

Açıkça $u(x)$ birim basamak fonksiyonu olmak üzere

$$u(x) = \frac{1}{2}\left[1 + sgn(x)\right] \tag{2.52}$$

veya

$$\begin{aligned} sgn(x) &= 2u(x) - 1 && (2.53) \\ \frac{d}{dx}\left[sgn(x)\right] &= 2u'(x) = 2\delta(x) && (2.54) \\ \mathcal{F}\left\{sgn'(x)\right\} &= 2\mathcal{F}\left[\delta(x)\right] && (2.55) \\ i\alpha F(\alpha) &= 2 \end{aligned}$$

buradan da

$$F(\alpha) = \frac{2}{i\alpha} \tag{2.56}$$

bulunur. Diğer taraftan birim basamak fonksiyonu $u(x)$ (2.52) den

$$u(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(x)$$

idi. Her iki tarafa Fourier transformasyonunu uygularsak

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{u(x)\right\} &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{1\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{sgn(x)\right\} && (2.57) \\ F(\alpha) &= \frac{1}{2}.2\pi\delta(\alpha) + \frac{1}{2}.\frac{2}{i\alpha} && (2.58) \\ F(\alpha) &= \frac{1}{i\alpha} + \pi\delta(\alpha) && (2.59) \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 2.14:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

fonksiyonunun Fourier transformasyonunu bulalım.

$$\mathcal{F}\left\{sgn(x)\right\} = \frac{2}{i\alpha}$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\frac{2}{ix}\right\} &= 2\pi sgn(-\alpha) = -2\pi sgn\alpha \\ \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t}\right\} &= -\pi isgn\alpha\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 2.15:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < T \\ 0 & |x| > T \end{cases}$$

fonksiyonuna Parseval teoremini uygulayalım.

$f(x)$ in Fourier transformasyonu

$$F(\alpha) = \mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = \frac{2\sin T\alpha}{\alpha}$$

dır. Parseval teoremi

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [F(\alpha)]^2\, d\alpha$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} 1dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\sin^2 T\alpha}{\alpha^2}d\alpha \\ 2T &= \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 T\alpha}{\alpha^2}d\alpha\end{aligned}$$

ve

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 T\alpha}{\alpha^2}d\alpha = \frac{\pi T}{2}$$

bulunur.

$$T\alpha = u \quad \text{dersek}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}$$

integralinin değeri elde edilir.

Örnek 2.16: $u(x-1)$ ötelenmiş birim basamak fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulalım. $u(x)$ in Fourier dönüşümü (2.59) a göre

$$\mathcal{F}\{u(x)\} = \pi\delta(\alpha) + \frac{1}{i\alpha}$$

idi ve öteleme özelliğine göre

$$\mathcal{F}\{u(x-1)\} = \pi\delta(\alpha) + \frac{e^{i\alpha}}{i\alpha}$$

olur.

2.8 Fourier Dönüşümünün Bazı Uygulamaları

2.8.1 Adi diferensiyel denklemlere uygulanması

Örnek 2.17:

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 3\delta(t)$$

diferensiyel denklemini çözelim.

$x(t)$ nin Fourier dönüşümü $X(\alpha)$ olmak üzere verilen denkleme Fourier dönüşümünün uygulayalım.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x''(t)] + 3\mathcal{F}[x'(t)] + 2\mathcal{F}[x(t)] &= 3\mathcal{F}[\delta(t)] \\ \mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right] &= (i\alpha)^n \mathcal{F}(\alpha) \ ve\ \mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (i\alpha)^2 X(\alpha) + 3(i\alpha)X(\alpha) + 2X(\alpha) &= 3 \\ X(\alpha)\left[(i\alpha)^2 + 3i\alpha + 2\right] &= 3 \\ X(\alpha)(i\alpha+1)(i\alpha+2) &= 3 \\ X(\alpha) &= \left[\frac{3}{(i\alpha+1)(i\alpha+2)}\right] \end{aligned}$$

buradan ters dönüşüme geçerek

$$x(t) = 3\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{i\alpha+1} - \frac{1}{i\alpha+2}\right]$$

$$x(t) = 3(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

bulunur.

Örnek 2.18: Fourier dönüşümü metoduyla

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + a^2u = f(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

adi diferensiyel denkleminin çözümünü bulalım.

Verilen denklemde

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k) \ \ ve \ \ \mathcal{F}\{u(x)\} = U(k)$$

olacak şekilde Fourier dönüşümünü uygularsak

$$U(k) = \frac{F(k)}{k^2 + a^2}$$

bulunur. Bu denklem konvolüsyon teoremi ile kolayca dönüştürülerek

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)g(x-\alpha)d\alpha$$

elde edilir.

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{k^2 + a^2}\right\} = \frac{1}{2a}e^{-a|x|}$$

yazılabilir. Böylece son çözüm

$$u(x) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)e^{-a|x-\alpha|}d\alpha$$

elde edilir.

2.8.2 İntegral denklemlere uygulanması

Fourier dönüşümü metoduyla konvolüsyon tipli basit integral denklemleri de çözülebilir.

Örnek 2.19:

Fredholm integral denklemini konvolüsyonu esas alarak çözelim.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt + \lambda f(x) = u(x)$$

Buradaki Fredholm integral denkleminde $u(x)$ ve $g(x)$ verilmiş fonksiyonlar, λ bilinen bir parametredir. Fourier dönüşümünü uygulayarak

$$F(k)G(k) + \lambda F(k) = U(k)$$

veya

$$F(k) = \frac{U(k)}{G(k)+\lambda}$$

elde edilir. Ters Fourier dönüşümü ile

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(k)e^{ikx}dk}{G(k)+\lambda}$$

bulunur.

Örnek 2.20:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{(x-t)^2+a^2} = \frac{1}{x^2+b^2}$$

integral denklemini çözelim. Fourier dönüşümünü uygularsak

$$F(k)\mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{e^{-b|k|}}{2b}$$

veya

$$F(k).\frac{e^{-a|k|}}{2a} = \frac{e^{-b|k|}}{2b}$$

bulunur. Böylece

$$F(k) = \left(\frac{a}{b}\right)e^{-|k|(b-a)}$$

elde edilir. Burada Ters Fourier dönüşümüne gidilerek

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{2\pi b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-|k|(b-a)}dk \\ f(x) &= \frac{a}{2\pi b}\left[\frac{1}{(b-a)+ix} + \frac{1}{(b-a)-ix}\right] \\ &= (\frac{a}{\pi b})\frac{b-a}{(b-a)^2+x^2} \qquad \text{olur.} \end{aligned}$$

2.8.3 Kısmi diferensiyel denklemlere uygulanması

Fourier dönüşüm metodu çeşitli lineer kısmi diferensiyel denkelmlerinin, başlangıç-değer problemlerinin çözümünde kullanılır.

Örnek 2.21: (Dalga denklemi için Cauchy problemi)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0$$

dalga denklemi için başlangıç-değer probleminin d'Alembert çözümünü

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad u_t(x,0) = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

başlangıç-değer verileriyle elde edelim. $\mathcal{F}\{u(x,t)\} = U(k,t)$ Fourier dönüşümünü bu sisteme uygularsak

$$\frac{d^2U}{dt^2} + c^2k^2U = 0$$

ve

$$U(k,0) = F(k) \quad , \quad \left(\frac{dU}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

elde edilir. Dönüştürülmüş sistemin çözümü

$$U(k,t) = Ae^{ickt} + Be^{-ickt}$$

bulunur. Burada A ve B dönüştürülmüş $A + B = F(k)$ ve $A - B = 0$ verilerinin hesaplanmasıyla elde edilen sabitlerdir. A ve B için çözerek

$$U(k,t) = \frac{1}{2}F(k)(e^{ickt} + e^{-ickt})$$

Böylece $U(k,t)$ nin ters Fourier dönüşümün alarak

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)(e^{ik(x+ct)} + e^{ik(x-ct)})dk\right]$$

çözümüne ulaşılır. Bu çözümün son hali

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right]$$

şeklindedir. Bu dalga denkleminin iyi bilinen d'Alembert çözümüdür (E. Krayszıg, 1988).

Örnek. 2.22: (Yarı düzlemde Dirichlet problemi)

Yarı düzlemde

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad y \geq 0$$

Laplace denkleminin çözümünü

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,y) &\to 0 \ , \ |x| \to \infty \quad \text{ve} \quad |y| \to \infty \quad \text{iken} \end{aligned}$$

sınır koşullarıyla düşünelim. x'e bağlı Fourier dönüşümün yazarsak

$$U(k,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x,y) dx$$

ve sınır değerlerinden dolayı

$$\frac{d^2U}{dy^2} - k^2 U = 0 \quad \text{ve} \quad U(k,0) = F(k) \quad , \quad U(k,y) \to 0 \quad , \quad y \to \infty$$

halini alır. Böylece dönüştürülmüş bu sistemin çözümü

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon) g(x-\varepsilon) d\varepsilon$$

çözümünü verir. Buradan da

$$g(x) = \mathcal{F}\left\{e^{-|k|y}\right\} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

olduğundan çözüm

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{(x-\varepsilon)^2 + y^2} \quad , \quad y > 0$$

halini alır. Bu iyi bilinen yarı düzlemde Poisson integral formülüdür. Ayrıca

$$\begin{aligned} \lim_{y \to 0^+} u(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon) \left[\lim_{y \to 0^+} \frac{y}{\pi} \frac{1}{(x-\varepsilon)^2 + y^2} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon) \delta(x-\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned}$$

dir. Burada delta fonksiyonunun Cauchy tanımı kullanılmıştır. Özel olarak $f(x) = \delta(x)$ alınırsa

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\varepsilon)d\varepsilon}{(x-\varepsilon)^2 + y^2} = u(x,y) = \frac{y}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2}$$

elde edilir. (Debnath, 1995).

Örnek 2.23: (Yarı düzlemde lineer sıcaklık akımı denklemi)

Yarı düzlemde

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

denklemini

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \quad , \quad 0 \leq x < \infty \\ u(t,0) &= 0 \quad , \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

sınır koşullarıyla Fourier sinüs dönüşümünü uygulayarak çözelim.

$\mathcal{F}_s\{u(x,t)\} = U_s(k,t)$ olmak koşuluyla

$$\mathcal{F}_s(u_t) = \frac{\partial U_s}{\partial t} = c^2\mathcal{F}(u_{xx}) = -c^2k^2\mathcal{F}_s(u) = -c^2k^2U_s(k,t)$$

Bu diferensiyel denklemin çözümü

$$U_s(k,t) = C(k)e^{-c^2k^2t}$$

dir. $u(x,0) = f(x)$ ise $U_s(k,0) = \mathcal{F}_s(k) = C(k)$ olur ve $U_s(k,t) = \mathcal{F}_s(k)e^{-c^2k^2t}$ olur.

Fourier sinüs dönüşümünün ters dönüşümün alarak

$$f_s(k) = k\int_0^{\infty} f(p)\sin kp dp$$

ve buradan

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(p)\sin kpe^{-c^2k^2t}\sin kx dp dx$$

integrali ile aranılan sonuca ulaşılır.

Örnek 2.24: (Nötronların yavaşlaması)

Sonsuz ortamda nötronların yavaşlaması probleminin denklem olarak ifadesi

$$u_t = u_{xx} + \delta(x)\delta(t) \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \delta(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,t) &\to \infty \quad , \quad |x| \to \infty \quad , \quad t > 0 \quad \text{için} \end{aligned}$$

sınır-değer koşullarıyla çözelim.

Kaynak fonksiyonunun t'ye bağlı değişimini $\delta(x)\delta(t)$ ile ifade edelim. Burada $u(x,t)$ nötron sayısının, birim zaman ve birim hacim ifadesidir.

Verilen denkleme Fourier dönüşümün uygularsak

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} + k^2 U &= 1.\delta(t) \\ U(k,0) &= 1 \end{aligned}$$

Bu dönüşüm sisteminin sonucu

$$U(k,t) = e^{-k^2 t}$$

dir. Verilen ifadenin ters dönüşümü alınırsa

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - k^2 t} dk = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-k^2}t\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4t}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.25: (Bir boyutlu dalga denklemi)

Bir boyutlu dalga denkleminin sonucunu elde edelim.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) \quad , \quad u_t(x,0) &= \delta(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

koşullarıyla çözelim.

Daha önce çözdüğümüz Örnek 2.21'e benzer şekilde $\mathcal{F}\{u(x,t)\} = U(k,t) \quad F(k) = 0$ ve $\mathcal{F}\{\delta(x)\} = 1$ olarak kabul edelim. Denkleme Fourier dönüşümünü uygularsak

$$U(k,t) = \frac{1}{2c}\left[\frac{e^{c^2k^2t}}{ik} - \frac{e^{-c^2k^2t}}{ik}\right]$$

bulunur. Ters Fourier dönüşümünden

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2c2\pi}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{-c^2k^2t}}{ik} - \frac{e^{-c^2k^2t}}{ik}\right\} \\
&= \frac{1}{2c2\pi}[\pi sgn(x+ct) - sgn(x-ct)] \\
&= \frac{1}{4c}[sgn(x+ct) - sgn(x-ct)] \\
&= \begin{cases} \frac{1-1}{4c} = 0 & |x| > ct > 0 \\ \frac{1+1}{4c} = \frac{1}{2c} & |x| < ct \end{cases}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

BÖLÜM 3

MELLİN DÖNÜŞÜMÜ ve BAZI UYGULAMALARI

Bu bölümde Mellin dönüşümünün teori ve uygulamalarına yer verilmiştir. Öncelikle Mellin dönüşümünün ve tersinin kompleks Fourier dönüşümünden elde edildiği gösterilmiş ardından Mellin dönüşümünün temel işlemsel özellikleri verilmiştir.Mellin dönüşümünün sınır-değer problemleri ve sonsuzluk serileri toplamı ile ilgili uygulamaları gösterilmiştir.

Mellin dönüşümünü tarihsel olarak ilk kez Riemann (1876) asal sayılar üzerine yaptığı ünlü araştırmasında tanımlamıştır. Formülü Cahen (1894) tarafından ortaya konulmuştur. Neredeyse eş zamanlı olarak Mellin (1896,1902), Mellin dönüşümünün genişletilmiş tartışmasını ve iç formülünü vermiştir (Debnath, 1995).

Mellin dönüşümü ve tersi kompleks Fourier dönüşümü ve onun tersinden faydalanılarak yazılabilir. (Davies,1978). Daha önce (2.22) ve (2.23) de değindiğimiz Fourier dönüşümü ve tersi

$$G(\alpha) = \mathcal{F}\{g(u)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\alpha u} du \tag{3.1}$$

$$g(u) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha) e^{i\alpha u} d\alpha \tag{3.2}$$

idi. Mellin dönüşümün oluşturabilmek için (3.1) ve (3.2) sonuçlarında değişken değiştirmesi yapalım. c sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} i\alpha &= c - p \\ x &= e^u \\ f(x) &= g(\ln x) \end{aligned} \tag{3.3}$$

dersek

$$G(ip - ic) = \int_{0}^{\infty} x^{p-c-1} g(\ln x) dx \tag{3.4}$$

$$g(\ln x) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{c-p} G(ip - ic) dp \tag{3.5}$$

elde ederiz. Şimdi $f(x)$ Mellin dönüşümünü ve onun tersini tanımlamak için

$$x^{-c}g(\ln x) = f(x) \quad \text{ve} \quad G(ip - ic) = \widetilde{f}(p)$$

yazarsak

$$\mu\{f(x)\} = \widetilde{f}(p) = \int_0^\infty x^{p-1} f(x)dx \tag{3.6}$$

$$\mu^{-1}\{\widetilde{f}(p)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\alpha}^{c+i\infty} x^{-p}\widetilde{f}(p)dp \tag{3.7}$$

bulunur. Burada f(x), (0,∞) için tanımlı gerçel değerli bir fonksiyondur ve Mellin dönüşüm değişkeni p bir kompleks sayıdır. Bazen $f(x)$ in Mellin dönüşümü $\widetilde{f}(p) = \mu[f(x), p]$ biçiminde de gösterilebilir.

Örnek 3.1:$f(x) = e^{-nx}$, $n > 0$ fonksiyonunun Mellin dönüşümünü bulalım.

$$\mu\{e^{-nx}\} = \widetilde{f}(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-nx}dx$$

olup $nx = t$ yazarak

$$\mu\left\{e^{-nx}\right\} = \frac{1}{n^p}\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(p)}{n^p}$$

bulunur.

Örnek 3.2:$\cos kx$ ve $\sin kx$ in Mellin dönüşümünü bulalım. Örnek (3.1) den

$$\mu\left\{e^{-ikx}\right\} = \frac{\Gamma(p)}{(ik)^p} = \frac{\Gamma(p)}{k^p}\left(\cos\frac{p\pi}{2} - i\sin\frac{p\pi}{2}\right)$$

elde edilip, reel ve imajiner kısımları ayrılarak

$$\begin{aligned}\mu\{\cos kx\} &= k^p\Gamma(p)\cos(\frac{\pi p}{2})\\ \mu\{\sin kx\} &= k^{-p}\Gamma(p)\cos(\frac{\pi p}{2})\end{aligned}$$

bulunur.

3.1 Mellin Dönüşümünün Özellikleri

Eğer $\mu\{f(x)\} = \widetilde{f}(p)$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

1-) Skalerle çarpım özelliği:

$$\mu\{f(ax)\} = a^{-p}\widetilde{f}(p) \quad , \quad a > 0 \tag{3.8}$$

Tanımdan dolayı

$$\mu\{f(ax)\} = \int_0^\infty x^{p-1} f(ax)dx \tag{3.9}$$

olup, $ax = t$ değişken değiştirilmesi yapılırsa

$$\mu\{f(ax)\} = \frac{1}{a^p}\int_0^\infty t^{p-1} f(t)dt = \frac{\widetilde{f}(p)}{a^p} = a^{-p}\widetilde{f}(p)$$

bulunur.

2-) Kaydırma özelliği

$$\mu\{x^a f(x)\} = \widetilde{f}(p+a) \tag{3.10}$$

dır. Tanımdan

$$\begin{aligned}
\mu\{x^a f(x)\} &= \int_0^\infty x^a f(x) x^{p-1} dx = \int_0^\infty f(x) x^{p-1+a} dx \\
&= \int_0^\infty f(x) x^{(p+a)-1} dx = \widetilde{f}(p+a)
\end{aligned}$$

bulunur.

3-)

$$\begin{aligned}
\mu\{f(x^a)\} &= \frac{1}{a}\widetilde{f}\left(\frac{p}{a}\right) \quad , \quad (a > 0) \qquad (3.11) \\
\mu\{f(x^a)\} &= \int_0^\infty f(x^a) x^{p-1} dx
\end{aligned}$$

$x^a = u$ değişken değişimi yapılırsa $ax^{a-1}dx = du$ bulunur.

$$\begin{aligned}\mu\{f(x^a)\} &= \int_0^\infty f(x^a)x^{p-1}dx = \int_0^\infty f(x^a)x^p \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^\infty f(u)u^{\frac{p}{a}}.\frac{du}{u.a} = \int_0^\infty f(u)u^{\frac{p}{a}-1}.\frac{du}{a} \\ &= a^{-1}\widetilde{f}(\frac{p}{a})\end{aligned}$$

olur.

4-)

$$\mu\left\{\frac{1}{x}f(\frac{1}{x})\right\} = \widetilde{f}(1-p) \tag{3.12}$$

burada

$$\mu\left\{\frac{1}{x}f(\frac{1}{x})\right\} = \int_0^\infty x^{-1}f(x^{-1})x^{p-1}dx$$

değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned}x^{-1} &= u \quad \rightarrow \quad -x^{-2}dx = du \\ u^{-1} &= x \qquad dx = -dux^2 = -du\ u^{-2} \quad , \quad x^p = u^{-p} \quad , \quad x^{-2} = u^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu\left\{\frac{1}{x}f(\frac{1}{x})\right\} &= \int_0^\infty x^{-1}f(x^{-1})x^{p-1}dx = \int_0^\infty f(u)u^{-p+2}(-du)u^{-2} \\ &= \int_0^\infty f(u)u^{(-p+1)-1}du = \widetilde{f}(-p+1) = \widetilde{f}(1-p)\end{aligned}$$

5-)

$$\mu\{\log x f(x)\} = \frac{d}{dp}\widetilde{f}(p) \tag{3.13}$$

Sonuç 3.13 ü ispatlamak için,

$$\frac{d}{dp}x^{p-1} = (\log x)x^{p-1} \tag{3.14}$$

sonucu kullanılabilir.

6-)Gamma Fonksiyonu

Daha (1.4) ve (1.5) de tanımladığımız Gamma fonksiyonu

$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \qquad p > 0 \quad$ idi.

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^p dx = e^{-x} x^p|_0^\infty + s\int\limits_0^\infty e^{-x} x^p dx = p\Gamma(p)$$

veya

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

$p = 1 \quad$ için $\quad \Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} dx = 1$

$p = n \quad$ için $\quad \Gamma(n+1) = n! \;$ ve $\; \Gamma(p+n+1) = (p+1)(p+2).....(p+n)\Gamma(p+1)$olur.

7-)

$$\mu\left\{\frac{1}{1+x}\right\} = \Gamma(p)\Gamma(1-p) \tag{3.15}$$

$$\mu\left\{\frac{1}{1+x}\right\} = \widetilde{f}(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}\frac{dx}{1+x}$$

$x = \frac{t}{1-t}$ veya $t = \frac{x}{x+1}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$= \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{(1-p)-1} dt = \Gamma(p)\Gamma(1-p)$$

8-)

$$\mu\left\{\frac{1}{(1+x)^n}\right\} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(n-p)}{\Gamma(n)} = \pi\cos(\pi p) \tag{3.16}$$

$$\mu\left\{\frac{1}{(1+x)^n}\right\} = \int\limits_0^\infty x^{p-1}(1+x)^{-n} dx$$

$x = \frac{t}{1-t}$ veya $t = \frac{x}{x+1}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$= \int\limits_0^\infty t^{p-1}(1-t)^{n-p-1} dt$$

$$= \frac{\Gamma(p)\Gamma(n-p)}{\Gamma(n)} = B(p, n-p)$$

dir. Burada $B(p,q)$ standart Beta fonksiyonudur.

$n=1$ iken

$$\begin{aligned}
\mu\left\{(1+x)^{-1}\right\} &= \Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(\pi p)}=\pi\cos ec(\pi p) \quad , \quad 0<\mathrm{Re}(p)<1 \\
\mu\left\{(1+x^{a})^{-1}\right\} &= \frac{\Gamma\left(\frac{p}{a}\right)\Gamma\left(n-\frac{p}{a}\right)}{a\Gamma(n)} \quad , \quad 0<\mathrm{Re}(p)<\mathrm{Re}(an) \\
\mu\left\{(1+x^{a})^{-1}\right\} &= \frac{\pi}{a}\cos ec(\frac{\pi p}{a}) \quad , \quad 0<\mathrm{Re}(p)<\mathrm{Re}(a)
\end{aligned}$$

9-) (Türevlerin Mellin Dönüşümü)

$$\mu\left\{f^{(n)}(x)\right\}=(-1)^{n}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)}\widetilde{f}(p-n) \tag{3.17}$$

$n=1$ için $x\to 0$ da ve $x\to\infty$ iken $[x^{p-1}f(x)]$ varsa

$$\begin{aligned}
\mu\left\{f^{1}(x)\right\} &= \int\limits_{0}^{\infty} f'(x)x^{p-1}dx \quad \text{kısmi integrasyon uygulanırsa} \\
&= \left[f(x)x^{p-1}|_{0}^{\infty}-(p-1)\int\limits_{0}^{\infty} f'(x)x^{p-2}dx\right] \\
\lim_{x\to 0} f(x) &= 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} x^{p-1}f(x)=0 \\
\mu\left\{f'(x)\right\} &= (p-1)\widetilde{f}(p-1)
\end{aligned}$$

olur. Tekrar türev alınırsa

$$\mu\left\{f''(x)\right\}=(p-1)(p-2)\widetilde{f}(p-1)$$

elde edilir. Daha genel olarak $x\to 0$ iken $r=0,1,2,3,...,(n-1)$ için

$$\lim_{x\to\infty} x^{p-r-1}f^{(r)}(x)=0$$

olduğundan

$$\mu\left\{f^{(n)}(x)\right\}=(-1)^{n}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)}\widetilde{f}(p-n)$$

10-)

$$\mu\left\{x^{n}f^{(n)}(x)\right\}=(-1)^{n}\frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}\widetilde{f}(p) \tag{3.18}$$

Eğer $\mu\{f(x)\} = \widetilde{f}(p)$ ise o zaman $x = 0$ da $x^p f(x)$ yok olduğunda ve $x \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} \mu\{xf'(x)\} &= -p\widetilde{f}(p) \\ \mu\left\{x^2 f''(x)\right\} &= (-1)^2 p(p+1)\widetilde{f}(p) \end{aligned}$$

daha genel olarak

$$\mu\{x^n f^n(x)\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}\widetilde{f}(p)$$

olduğunu ispatlayalım.

$$\mu\{xf'(x)\} = \int_0^\infty x^p f'(x)dx$$

dir. Kısmi integrasyon ile

$$\begin{aligned} &= [x^p f(x)]_0^\infty - p\int_0^\infty x^{p-1} f(x)dx \\ &= -p\widetilde{f}(p) \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer tartışmalar (3.18) in ispatı için de kullanılabilir.

11-) (Diferansiyel Operatörlerin Mellin Dönüşümleri)

Eğer $\mu\{f(x)\} = \widetilde{f}(p)$ ise o zaman

$$\mu\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)\right] = \mu\left[x^2 f''(x) + xf'(x)\right] = (-1)^2 p^2 \widetilde{f}(p) \tag{3.19}$$

yazılır. Daha genel olarak

$$\mu\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\right] = (-1)^n p^n \widetilde{f}(p) \tag{3.20}$$

olur. İfadeyi ispatlamak için tanımdan yararlanırsak

$$\begin{aligned} \mu\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)\right] &= \mu\left[x^2 f''(x) + xf'(x)\right] \\ &= \mu\left[x^2 f''(x)\right] + \mu[xf'(x)] \\ &= -p\widetilde{f}(p) + p.(p+1)\widetilde{f}(p) \\ &= (-1)^2 p^2 \widetilde{f}(p) \end{aligned}$$

Benzer şekilde (3.20) nin de ispatı yapılabilir.

12-) (İntegrallerin Mellin Dönüşümü)

$$\mu\left\{\int_0^{\infty} f(t)dt\right\} = -\frac{1}{p}\widetilde{f}(p+1) \tag{3.21}$$

dir. Genel olarak ise

$$\mu\left\{I_n f(x)\right\} = \mu\left\{\int_0^{\infty} I_{n-1}f(t)dt\right\} = (-1)^n\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+n)}\widetilde{f}(p+n) \tag{3.22}$$

olup burada $I_n f(x)$, $f(x)$ in n. kez tekrarlanan integrali,

$$I_n f(x) = \int_0^{\infty} I_{n-1}f(t)dt$$

olarak tanımlanır (Debnath, 1995).

İspatı yapabilmek için $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ yazalım. $F'(x) = f(x)$ ve $F(0) = 0$ olsun. $F(x)$ e (3.17) özelliğini uygularsak

$$\mu\left\{f(x) = F'(x)\right\} = -(p-1)\mu\left\{\int_0^x f(t)dt, p-1\right\}$$

elde edilir. p yerine $p+1$ yazılırsa

$$\mu\left\{\int_0^{\infty} f(t)dt, p\right\} = -\frac{1}{p}\mu\left\{f(x), p+1\right\} = -\frac{1}{p}\widetilde{f}(p+1)$$

bulunur. Benzer ispat tümevarım yöntemiyle (3.22) için de kullanılabilir.

3.2 Mellin Dönüşümü İçin Konvolüsyon Teoremi

Teorem 3.1: Eğer, $\mu\left\{f(x)\right\} = \widetilde{f}(p)$ ve $\mu\left\{g(x)\right\} = \widetilde{g}(p)$ ise, bu durumda

$$\mu\left[f(x) * g(x)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \widetilde{f}(z)\widetilde{g}(p-z)dz = \widetilde{f}(p).\widetilde{g}(p) \tag{3.23}$$

İspat 3.1:

$$\mu\left\{f(x)\right\} = \int_0^{\infty} f(x)x^{p-1}dx = \widetilde{f}(p) \tag{3.24}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widetilde{f}(p)x^{-p}dp \tag{3.25}$$

idi.

$$\begin{aligned}
\mu\left[f(x)*g(x)\right] &= \int_0^\infty g(x).f(x)x^{p-1}dx \\
&= \int_0^\infty g(x)x^{p-1}f(x)dx=\int_0^\infty g(x)x^{p-1}dx\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widetilde{f}(z)x^{-z}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widetilde{f}(z)dz\int_0^\infty g(x)x^{p-z-1}dx \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widetilde{f}(z)\widetilde{g}(p-z)dz
\end{aligned}$$

Böylece

$$\mu\left[f(x)*g(x)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widetilde{f}(z)\widetilde{g}(s-z)dz=\widetilde{f}(p)\widetilde{g}(p)$$

olarak bulunur.

Örnek 3.3:$\mu^{-1}\left\{\widetilde{f}(p)\widetilde{g}(p)\right\}$ nin değerinin neye eşit olduğunu bulalım.

$$\begin{aligned}
\mu^{-1}\left\{\widetilde{f}(p)\widetilde{g}(p)\right\} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widetilde{f}(p)\widetilde{g}(p)x^{-p}dp \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widetilde{f}(p)x^{-p}\int_0^\infty g(u)u^{p-1}du \\
&= \int_0^\infty g(u)\frac{du}{u}.\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widetilde{f}(p)\left(\frac{x}{u}\right)^{-p}dp \\
&= \int_0^\infty f\left(\frac{x}{u}\right)g(u)\frac{du}{u}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 3.4.$\mu^{-1}\left\{\widetilde{f}(1-p).\Gamma(p)\right\}$ nin $f(x)$ in Laplace dönüşümüne eşit olduğunu gösterelim.

$$\mu^{-1}\left\{\widetilde{f}(1-p)\widetilde{g}(p)\right\}=\int_0^\infty g(sx)f(x)dx$$

dir. $g(x)=e^{-x}$ ve $\widetilde{g}(p)=\Gamma(p)$ yazılırsa $f(x)$ in Laplace dönüşümü

$$\mu^{-1}\left\{\widetilde{f}(1-p).\Gamma(p)\right\}=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx=\mathcal{L}\left\{f(x)\right\}=\widetilde{f}(s)$$

olarak bulunur.

3.3 Mellin Dönüşümü İçin Parseval Bağıntısı

Teorem 3.2:Eğer, $\mu\left\{f(x)\right\}=\widetilde{f}(p)$ ve $\mu\left\{g(x)\right\}=\widetilde{g}(p)$ ise bu durumda

$$\mu\left[f(x).g(x)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widetilde{f}(s)\widetilde{g}(p-s)ds$$

veya denk olarak

$$\int_0^\infty x^{p-1}f(x)g(x)dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widetilde{f}(s)\widetilde{g}(p-s)ds$$

yazılır idi. Özel olarak $p=1$ ise Mellin Dönüşümü için Parseval bağıntısı formülü elde edilir. Yani,

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widetilde{f}(s)\widetilde{g}(1-s)ds \tag{3.26}$$

yazılır.

İspat: 3.2: Tanımdan

$$\begin{aligned}\mu\left[f(x).g(x)\right] &= \int_0^\infty x^{p-1}f(x)g(x)dx\\ &= \int_0^\infty x^{p-1}g(x)dx\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}x^{-p}\widetilde{f}(s)ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu\left[f(x).g(x)\right] &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widetilde{f}(s)ds\int_0^\infty x^{p-s-1}g(x)dx\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widetilde{f}(s)\widetilde{g}(p-s)ds\end{aligned}$$

$p = 1$ için (3.26) sonucunu elde ederiz.

3.4 Mellin Dönüşümünün Uygulamaları

Örnek 3.5:

$$x^2 u_{xx} + x u_x + u_{yy} = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \infty \quad , \quad 0 < y < 1 \tag{3.27}$$

$$u(x,0) = 0 \qquad\qquad u(x,1) = \begin{cases} A & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

A bir sabitken, sınır-değer probleminin çözümünü elde edelim (Debnaht, 1995). $u(x,y)$ nin x e bağlı Mellin dönüşümünü uygulayınca

$$\widetilde{u}(p,y) = \int_0^\infty x^{p-1} u(x,y)\,dx$$

sistem

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_{yy} + p^2 \widetilde{u} &= 0 \quad , \quad 0 < y < 1 \\ \widetilde{u}(p,0) &= 0 \quad , \quad \widetilde{u}(p,1) = A \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{A}{p} \end{aligned}$$

haline indirgenir. Dönüştürülmüş sistemin çözümü

$$\widetilde{u}(p,y) = \frac{A \sin py}{p \sin p} \quad , \quad 0 < \mathrm{Re}(p) < 1$$

Ters Mellin dönüşümü ile

$$u(x,y) = \frac{A}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{-p}}{p} \frac{\sin py}{\sin p} dp$$

Burada $\widetilde{u}(p,y)$ dikey $0 < \mathrm{Re}(p) < \pi$ şeridinde analitik ve böylece $0 < c < \pi$ olur. Son yazılan $p = \pi n$, $n = 1, 2, 3, ...$ de basit kutuplara sahiptir ki bu sağ yarı düzlemdeki yarım dairesel çerçeve içinde yatar. Böylece $x > 1$ için

$$u(x,y) = \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n x^{-nx} \sin n\pi y \tag{3.28}$$

bulunur.

Örnek 3.6:

$$\int_0^\infty f(s)k(xs)ds = f(x) \qquad x > 0 \tag{3.29}$$

integral denklemini çözelim.

(3.29) denklemine konvolüsyon teoremini uygulayıp x e bağlı olarak Mellin dönüşümünü alırsak

$$\widetilde{f}(1-p)\widetilde{k}(p) = \widetilde{g}(p)$$

elde edilir. p yerine $p-1$ yazarsak

$$\widetilde{f}(p) = \widetilde{g}(1-p)\widetilde{h}(p)$$

olur. Burada

$$\widetilde{h}(p) = \frac{1}{\widetilde{k}(1-p)}$$

bulunur. $h(x) = \mu^{-1}\left\{\widetilde{h}(p)\right\}$ varlığıyla sonuca ulaşılır.

$$f(x) = \mu^{-1}\left\{\widetilde{g}(1-p)\widetilde{h}(p)\right\} = \int_0^\infty g(s)h(xs)ds \tag{3.30}$$

dir. Böylece problem formal olarak çözülmüş olur.

Özel olarak, $\widetilde{h}(p) = \widetilde{k}(p)$ ise o zaman sonuç (3.30)

$$\widetilde{k}(p).\widetilde{k}(p-1) = 1 \quad \text{olduğunda}$$

$$f(x) = \int_0^\infty g(s)k(xs)ds$$

halini alır.

Örnek 3.7:

$$\int_0^\infty f(s)g(\frac{x}{s})\frac{ds}{s} = h(x) \tag{3.31}$$

integral denklemini çözelim.

(3.31) denklemine konvolüsyon teoremi ve x e bağlı Mellin dönüşümünü uygularsak

$$\widetilde{f}(p) = \widetilde{h}(p).\widetilde{k}(p) \quad , \quad \widetilde{k}(p) = \frac{1}{\widetilde{g}(p)}$$

olur. Ters Mellin dönüşümünü ve konvolüsyon özelliğinin sonucundan

$$f(x) = \mu^{-1}\left\{\widetilde{h}(p)\widetilde{k}(p)\right\} = \int_0^\infty h(s)k(\frac{x}{s})\frac{ds}{s} \tag{3.32}$$

bize istediğimiz sonucu verir.

3.5 Seriler Toplamına Mellin Dönüşümünün Uygulanması

Teorem 3.3:Eğer, $\mu\{f(x)\} = \widetilde{f}(p)$ ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \widetilde{f}(p)\zeta(p,a)dp \tag{3.33}$$

dir. Burada $\zeta(p,a)$ Hurwitz zeta fonksiyonudur ve

$$\zeta(p,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p} \quad , \quad 0 \leq a \leq 1 \quad , \quad \mathrm{Re}(p) > 1 \tag{3.34}$$

İspat 3.3:$f(n+a)$ da verilen tüm n değerleri için ters Mellin dönüşümünü uygularsak

$$f(n+a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \widetilde{f}(p)(n+a)^{-p}dp$$

olur. Toplam alırsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \widetilde{f}(p)\zeta(p,a)dp$$

olur ve bu sonuç ispatımızı tamamlar.

Daha önce verdiğimiz skalerle çarpım özelliğinden

$$f(nx) = \mu^{-1}\left\{n^{-p}\widetilde{f}(p)\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p}n^{-p}\widetilde{f}(p)dp$$

Burada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(nx) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p}\widetilde{f}(p)\zeta(p)dp = \mu^{-1}\left\{\widetilde{f}(p)\zeta(p)\right\} \tag{3.35}$$

ve

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$$

Riemann zeta fonksiyonudur.

$x = 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \widetilde{f}(p)\zeta(p)dp \tag{3.36}$$

olarak bulunur. Bu sonuca (3.33) denkleminde a=0 alınarak ulaşılabilir.

Örnek 3.8:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-p} = (1-2^{1-p})\zeta(p) \tag{3.37}$$

olduğunu gösterelim.

Verilen eşitliğin sol tarafındaki toplamı t^n ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-p}.t^n &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}x^{p-1}e^{-ax}dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}x^{p-1}dx\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{-ax}.t^n \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}x^{p-1}\frac{te^{-x}}{1+te^{-x}}dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}x^{p-1}\frac{t}{e^x+t}dx
\end{aligned}$$

$t \to 1$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-p} &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}x^{p-1}\frac{1}{e^x+1}dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\mu\left\{\frac{1}{e^x+1}\right\} \\
&= (1-2^{1-p})\zeta(p)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.9.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin an}{n} = \frac{1}{2}(\pi - a) \qquad 0 < a < 2\pi \tag{3.38}$$

olduğunu gösterelim.

$$f(x) = \frac{\sin ax}{x}$$

fonksiyonuna Mellin dönüşümünü uygularsak

$$\begin{aligned}
\mu\left[\frac{\sin ax}{x}\right] &= \int\limits_0^\infty x^{p-2}\sin ax dx \\
&= F_s\left\{x^{p-2}\right\} \\
&= -\frac{\Gamma(p-1)}{a^{p-1}}.\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right)
\end{aligned}$$

(3.36) da verilen toplam işlemini uygularsak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin an}{n} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(p-1)}{a^{p-1}}\zeta(p)\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right)dp \tag{3.39}$$

$$(2\pi)^p\zeta(1-p) = 2\Gamma(p)\zeta(p).\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right)$$

denklemini (3.39) daki integrand içerisinde kullanırsak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin an}{n} = -\frac{a}{2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^p\frac{\zeta(1-p)}{p-1}dp$$

bulunur. $p = 0$ için bu toplamın sonucu 1 ve $p = 1$ için $-\pi/a$ dır. Bu değerler dışında toplam serisinin sonucu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin an}{n} = \frac{1}{2}(\pi - a)$$

olarak bulunur.

3.6 Genelleştirilmiş Mellin Dönüşümleri

Klasik Mellin dönüşümünün kullanılabilirliği için Naylor (1963), Mellin integral dönüşümü metodunu geliştirmiştir. Genelleştirilmiş Mellin dönüşümü küresel ve silindirik koordinat sisteminin yüzeyleri ile sınırlı bölgelerde sınır-değer problemlerinin çözümünü bulmada kullanışlıdır. Bunlar sınırlı veya sınırsız bölgeler dahilinde sınırlanmış sınır-değer problemlerinin çözümünde kullanılır (Debnaht, 1995).

Genelleştirilmiş Mellin Dönüşümü $0 < r < \infty$ da tanımlı $f(r)$ fonksiyonuyla gösterilir ve

$$\mu_{-}^{-1}\{f(r)\} = F_{-}(p) = \int\limits_0^\infty\left(r^{p-1} - \frac{a^{2p}}{r^{p+1}}\right)f(r)dr \tag{3.40}$$

integraliyle ifade edilir. Ters dönüşüm ise,

$$\mu_{\_}^{-1}\left\{F_{\_}(p)\right\} = f(r) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} r^{-p} f(p)dp \quad , \quad r > a$$

ile verilir. Burada L, $\operatorname{Re}(p) = c$ doğrusu ve $F(p), |\operatorname{Re}(p)| < \gamma$ şeridinde $c < \gamma$ iken analitiktir.

Kısmi integrasyon ile gösterilebilir ki $f(r)$ sonsuzla uygun davranmak koşuluyla

$$\mu_{\_}\left[r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r\frac{\partial f}{\partial r}\right] = p^2 F_{\_}(p) + 2pa^p f(a)$$

Daha kesin olarak,

$$\lim_{r\to\infty}\left[(r^p - a^{2p}r^{-p})rf_r - p(r^p + a^{2p}r^{-p})r\right] = 0$$

dır. Açıkça genelleştirilmiş dönüşüm $f(r), r = a$ daki iç bölgede iken sınır-değer problemlerinin çözümünü bulmada çok kullanılışlıdır.

Diğer taraftan eğer $f(r)$ nin diferansiyeli $r = a$ da tanımlı ise

$$\mu_{+}\left[f(r)\right] = F_{+}(p) = \int\limits_{a}^{\infty}\left(r^{p-1} + \frac{a^{2p}}{r^{p+1}}\right) f(r)dr \quad , \quad |\operatorname{Re}(p)| < r$$

birleşmiş integral dönüşümüyle tanımlanmaya uygundur ve tersi de

$$\mu_{-}^{-1}\left[F_{+}(p)\right] = f(r) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} r^{-p} F_{+}(p)dp \quad , \quad r > a$$

ile tanımlanır. Bu durumda kısmi türevle gösterebiliriz ki $r = a$ da $f'(r)$ varken

$$\mu_{+}\left[r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r\frac{\partial f}{\partial r}\right] = p^2 F_{+}(p) - 2a^{p+1} f'(a)$$

olur. Eğer integrasyon aralığı sonlu ise o zaman Genelleştirilmiş Mellin dönüşümü $\operatorname{Re}(p) < \gamma$ iken

$$\mu_{\_}^{a}\left\{f(r)\right\} = F_{\_}^{a}(p) = \int\limits_{0}^{a}\left(r^{p-1} - \frac{a^{2p}}{r^{p+1}}\right) f(r)dr$$

olarak tanımlarız. İlişkili ters dönüşüm,

$$f(r) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\left(\frac{r}{a^2}\right)^p F_{\_}^{a}(p)dp \quad , \quad 0 < r < a$$

ile verilir. Benzer şekilde sonlu dönüşüm çifti

$$\begin{aligned}
\mu_{+}^{a}\left\{f(r)\right\} &= F_{+}^{a}(p)=\int_{0}^{a}\left(r^{p-1}+\frac{a^{2p}}{r^{p+1}}\right)f(r)dr \\
f(r) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{L} r^{-p}F_{+}^{a}(p)dp
\end{aligned}$$

dir. Burada $|\operatorname{Re}(p)|<\gamma$ olarak tanımlanır. Bu sonuçta uygulamalarda kullanılışlı olabilir.

BÖLÜM 4

SONUÇLAR

Fizik, mühendislik, matematik gibi bir çok bilim dalında problemlerin çözümleri, diferansiyel denklemlere dayanmaktadır. Bir diferansiyel denklemi daha basit bir cebirsel denkleme dönüştürmemizi sağlayan çözüm metotlarından biride integral dönüşüm metodudur.

İntegral dönüşüm metodunun temel özelliği; herhangi bir integral dönüşümün görüntü uzayında F(s) noktasına karşılık olarak, esas uzayda f(t) noktasını oluşturmaktır. Böylece esas uzay üzerindeki karmaşık biçimdeki işlemler, görüntü uzayında daha basit cebirsel işlemlerle çözülebilmektedir.

Bu tezde ilk olarak integral dönüşüm metodlarından Laplace dönüşümü geniş biçimde incelenmiştir.Laplace dönüşümü ve ters Laplace dönüşümü kullanılarak birçok başlangıç değer ve sınır değer problemi etkili biçimde çözülebilir.Özellikle elektrik devrelerinde, akım ve yüklerin hesaplanmasında, sinyalizasyon problemlerinde, sarkaç problemlerinde, akışkan dinamiğinde, dış güç uygulanan direnç ortamlarında, harmonik sarkaç problemlerinde ve dalga yansıma problemlerinde Laplace dönüşümleri ve özellikleri büyük yararlar sağlamaktadır. Kare dalga fonksiyonların periyodik fonksiyonların Laplace dönüşümleri fiziksel kavramlara açıklık getirmekte ve problemlerin çözümünde özellikleri açıkça ortaya koymaktadır.

İkinci bölümde Fourier dünüşümü, özellikleri, Fourier kosinüs ve Fourier sinüs dönüşümü anlatılmıştır. Bu dönüşümde diferansiyel denklemler ve integral denklemlerin çözümünde önemli rol oynamaktadır.Teknik uygulamalarda karşılaşılan başlangıç ve sınır değer problemlerinin değişik türlerinde uygulanabilmektedir.Özellikle jeofizik mühendisliğin de; fay hatlarının direnç ve mukavemetini ölçmede,matematiksel istatistikte, istatistiksel mekanik problemlerinde, difüzyon, serbest titreşimle ilgili problemlerde, Elastisite teorisi ve uygulamalarında, iki boyutlu dalga denklemi veya Cauchy problemlerinde, integral denkleminin bilinmeyen f(x) fonksiyonlarının çözü münde Fourier dönüşümlerinin etkin biçimde kullanıldığı görülmüştür.

Son bölümde ise sınır değer problemlerinde ve sonsuz toplam serilerinde uygulamasının oldukça çok görüldüğü Mellin dönüşümü ve ters Mellin dönüşümü ile özellikleri incelenmiştir. Fourier dönüşümü ile Mellin dönüşümü arasında bir geçiş olduğu gözlemlenmiştir.Mellin dönüşümü, kompleks Fourier dönüşümden faydalanılarak yazılabilmektedir.Genelleştirilmiş Mellin dönüşümü ile küresel veya silindirik koordinat sistemlerinin doğal koordinat yüzeylerine göre sınırlı bölgelerde sınır değer problemlerinin çözümlenebildiği görülmüştür.

Sonuç olarak Fourier dönüşümleri, Laplace dönüşümleri ve Mellin dönüşümleri arasında kuvvetli bir ilişki vardır. Her üçü de Fourier İntegral Formülü orjinlidir. Tezde integral dönüşüm yöntemleri, bazı diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerin çözümünün bulunmasında uygulanmış ve üzerinde analizler yapılmıştır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aliyev, G.G., 1995, Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler, Milli Eğitim Dizisi, İstanbul

Aliyev, G.G.,1998, Matematiğin Fizik ve Mühendisliğe Uygulamaları, N.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, İstanbul

Brown, J.W., Chuchıll R.V., 1993, Fourier Series and Boundary Value Problems, Fıfth Edition, Mc Graw-Hill Inc.

Davies, B.,1978, Integral Transforms and Their Applications, Springer-Verlag Newyork Inc., Fıfth Edition, Newyork

Debnath, L., 1995, Integral Transforms and Their Applications, CRC Pres Inc.

Dyke, P.P.G., 2001, An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series, Spring-Verlag London Limited

Edwards,C.H. and Penney,D.E., 2006, Diferensiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri, Çeviri Editörü: Ömer Akın, (Person Education , Inc.), Palme Yayıncılık, Ankara

Ergeneli, A., 1984, Elektrikte Laplace Dönüşümü ve Fourier Analizi, Yıldız Üniversitesi, Bakış Ofset, İstanbul

Gonzalez V.-Enrique A.,1995, Fourier Analysis and Boundary Value Problems, Academic Pres Inc.

Kreyszıg, E.,1988, Advanced Engıneerıng Mathematics, John Willey and Sons, Inc, Sıxth Edıtıon

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Özer, M.N. ve Eser D.,2002, Diferensiyel Denklemler (Teori ve Uygulamaları), Osmangazi Üniversitesi, Birlik Ofset, Eskişehir

Selley, R.T., 1966, An Introductıon to Fourier Series and Integrals, W.A. Benjamin,Inc., Brandeis University

Sneddon, I.N., 1972, The Use Of Integral Tranforms, Simson Prefesor Of Matematics, University Of Glasgow

Stuart, R.D., 1961, An İntroduction to Fourier Analysis, Northeastern University, Boston, Mass., U.S.A.

Yarasa, R.,1976, Fourier Analizi, İ.D.M.M.A. Yayınları, Sayı:131, Çağlayan Basımevi, İstanbul

Yaşar, İ.B., 1988, Uygulamalı Matematik (İntegral Dönüşümleri ve Uygulamaları), Gazi Üniversitesi, Yayın No:127, Ankara