FUZZY PROJEKTİF DÜZLEM GEOMETRİ ÜZERİNE

Şule GÜRKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK Anabilim Dalı

Aralık 2006

ON THE GEOMETRY OF FUZZY PROJECTİVE PLANE

Şule GÜRKAN

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

December 2006

FUZZY PROJEKTİF GEOMETRİ ÜZERİNE

Şule GÜRKAN

Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ziya AKÇA

Aralık 2006

Şule GÜRKAN' ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "FUZZY DÜZLEM PROJEKTİF GEOMETRİ ÜZERİNE" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ziya AKÇA

Üye : Doç. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ayşe BAYAR

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

FUZZY DÜZLEM PROJEKTİF GEOMETRİ ÜZERİNE

Şule GÜRKAN

ÖZET

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, Kaya R. [2] den ve Erkekbaş S. [3] den alınan temel kavram, tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde, Gupta K.C. ve Ray S. [1] den alınan Fuzzy Düzlem Projektif Geometrinin tanımı ve Fuzzy Düzlem Projektif Geometriyle ilgili bazı teoremler verilmiştir ve L. Kuijken, H. Van Maldeghem [4]'in Gupta ve Ray tarafından verilen fuzzy projektif düzlemin tanımı üzerine yorumlarından bahsedilmiştir.

ON THE GEOMETRY OF FUZZY PROJEKTİF PLANE

Şule GÜRKAN

SUMMARY

This thesis consists of two sections. In the first section, we give the basic consepts, definitions and the theorems taken from Kaya R. [2] and Erkekbaş S. [3]. In the second section, the definition of the Fuzzy Plane Projective Geometry and some theorems related to Fuzzy Plane Projective Geometry taken from Gupta K.C and Ray S. [1] have been given and we discuss interpretations on the Fuzzy Plane Projective Geometry taken from L. Kuijken, H. Van Maldeghem [4].

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Ziya AKÇA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren sevgili anneme, babama ve eşime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Bölüm 1

Bazı Temel Kavramlar

Önce Projektif geometrinin, bu çalışmada geçen, bazı temel kavramlarını kısaca verelim. Bu bölümde verilecek olan tanım, teorem ve ispatlar Kaya R, (2005) ve Erkekbaş S, (1995) den alınmıştır.

Tanım 1.0.1 *$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırasıyla noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ olsun. o da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde bir üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere aşağıdaki $P1$, $P2$, $P3$ aksiyomlarını sağlayan $P = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ sistemine projektif düzlem denir.*
$P1)$ Her $A, B \in \mathcal{N}$, $A \neq B$ için Aod ve Bod olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.
$P2)$ Her $c, d \in \mathcal{D}$ için Aoc ve Aod olacak şekilde en az bir $A \in \mathcal{N}$ noktası vardır.
$P3)$ Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Projektif düzlemlerde $P2$ aksiyomundan daha kuvvetli ve kesin bir önerme geçerlidir.

Teorem 1.0.2 *Bir $\boldsymbol{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ projektif düzleminde farklı iki doğru bir tek noktada kesişirler.*

1.1 Projektif Düzlem Modeli Örnekleri

1.1.1 Reel Projektif Düzlem

Teorem 1.1.1 *Verilen bir $\mathbb{R}$ cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla belirlenen bir projektif düzlem vardır. Bu projektif düzlem $P_2\mathbb{R}$ ile gösterilir.*

İspat:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &= \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_i \in \mathbb{R},\ \exists x_i \neq 0,\ i=1,2,3, (x_1,x_2,x_3) \equiv \lambda\,(x_1,x_2,x_3)\,,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0\} \\
\mathcal{D} &= \{[a_1,a_2,a_3] \mid a_i \in \mathbb{R},\ \exists a_i \neq 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ [a_1,a_2,a_3] \equiv \lambda\,[a_1,a_2,a_3]\,,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0\} \\
\circ &: (x_1,x_2,x_3)\, o\, [a_1,a_2,a_3] \Longleftrightarrow a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = 0
\end{aligned}$$

alalım.

$P1$) Farklı iki noktadan bir doğru geçer.

$N_1 = (x_1,x_2,x_3)\,,\ N_2 = (y_1,y_2,y_3)$ ve $N_1 \neq N_2$ noktalarını alalım.

$N_1N_2 = [a_1,a_2,a_3]$ doğrusunun tek olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
N_1 o\,[a_1,a_2,a_3] &\Longleftrightarrow a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = 0 \\
N_2 o\,[a_1,a_2,a_3] &\Longleftrightarrow a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3 = 0
\end{aligned}$$

$\exists x_i \neq 0$ olduğundan $x_1 \neq 0$ alalım.

$$a_1 = (-a_2x_2-a_3x_3)x_1^{-1} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
(-a_2x_2-a_3x_3)x_1^{-1}y_1+a_2y_2+a_3y_3 &= 0 \\
a_2(\underbrace{y_2-x_1^{-1}y_1x_1}_{k})+a_3(\underbrace{y_3-x_1^{-1}y_1x_3}_{h}) &= 0 \\
a_2k+a_3h = 0
\end{aligned}$$

olur. h ve k nın ikisi birden sıfır olamaz.

Olsaydı,

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1^{-1} y_1 x_1 \\ y_2 = x_1^{-1} y_1 x_2 \\ y_3 = x_1^{-1} y_1 x_3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y_1 = \lambda x_1 \\ y_2 = \lambda x_2 \\ y_3 = \lambda x_3 \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0 \text{ olduğundan } N_1 = N_2 \text{ bulunur.}$$

Bu da $N_1 \neq N_2$ ile çelişir.

Yani $\exists h,\ k \neq 0$ bulunur.

$k \neq 0 = h$ olsun.

$$a_2 k + a_3 h = 0 \Longrightarrow a_2 k = 0 \Longrightarrow a_2 = 0,\ \ a_3 \text{ keyfi}$$

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, a_3] &\equiv [-a_3 x_3 x_1^{-1}, 0, a_3] \\ &\equiv a_3[-x_3 x_1^{-1}, 0, 1] \\ &\equiv [-x_3 x_1^{-1}, 0, 1] \end{aligned}$$

hepsi $\mathbb{R}$ nin elemanı olduğundan doğru tektir.

$k = 0 \neq h$ olsun.

$$a_2 k + a_3 h = 0 \Longrightarrow a_3 h = 0 \Longrightarrow a_3 = 0,\ \ a_2 \text{ keyfi}$$

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, a_3] &\equiv [-a_2 x_2 x_1^{-1}, a_2, 0] \\ &\equiv a_2[-x_2 x_1^{-1}, 1, 0] \\ &\equiv [-x_2 x_1^{-1}, 1, 0] \end{aligned}$$

hepsi $\mathbb{R}$ nin elemanı olduğundan doğru tektir.

$k \neq 0 \neq h$ olsun.

$$a_2 k + a_3 h = 0 \Longrightarrow a_2 = -a_3 h k^{-1} \Longrightarrow a_3 = a_3 \text{ keyfi}$$

$$\begin{aligned} [a_1, a_2, a_3] &\equiv \left[a_3\left(-hk^{-1}x_2 - x_3\right)x_1^{-1}, -a_3 h k^{-1}, a_3\right] \\ &\equiv a_3 h k^{-1}\left[x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1\right] \\ &\equiv \left[x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1\right] \end{aligned}$$

doğrusu tektir.

$$(x_1,x_2,x_3)\vee(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3)\vee(y_1,y_2,y_3) &= (x_2y_3-y_2x_3)\underbrace{e_1}_{(1,0,0)}-(x_1y_3-y_1x_3)\underbrace{e_2}_{(0,1,0)}+(x_1y_2-y_1x_2)\underbrace{e_3}_{(0,0,1)} \\ &= [x_2y_3-y_2x_3,x_1y_3-y_1x_3,x_1y_2-y_1x_2]\end{aligned}$$

bulunur.

$P1$ aksiyomu sağlanır.

$P2$) İki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

$d_1=[a_1,a_2,a_3]$, $d_2=[b_1,b_2,b_3]$ ve $d_1\neq d_2$ doğrularını alalım.

$d_1d_2=(x_1,x_2,x_3)$ noktasının tek olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3)\,od_1 &\iff a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \\ (x_1,x_2,x_3)\,od_2 &\iff b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0\end{aligned}$$

$\exists a_i\neq 0$ olduğundan $a_1\neq 0$ alalım.

$x_1=(-a_2x_2-a_3x_3)\,a_1^{-1}$ olur.

$$\begin{aligned}b_1(-a_2x_2-a_3x_3)\,a_1^{-1}+b_2x_2+b_3x_3 &=0 \\ -b_1a_2a_1^{-1}x_2-b_1a_3a_1^{-1}x_3+b_2x_2+b_3x_3 &=0 \\ x_2\underbrace{\left(b_2-b_1a_2a_1^{-1}\right)}_{m}+x_3\underbrace{\left(b_3-b_1a_3a_1^{-1}\right)}_{n} &=0 \\ x_2m+x_3n &=0\end{aligned}$$

bulunur. m ve n aynı anda sıfır olamaz.

$m=0\neq n$ alalım.

$$\begin{aligned}x_2m+x_3n &= 0\Longrightarrow x_3n=0\Longrightarrow x_3=0,\ x_2 \text{ keyfi} \\ a_1x_1+a_2x_2+\underbrace{a_3x_3}_{0} &= 0\Longrightarrow x_1=-a_2x_2a_1^{-1}\end{aligned}$$

$$(x_1,x_2,x_3)\equiv\left(-a_2x_2a_1^{-1},x_2,0\right)\equiv\left(-a_2a_1^{-1},1,0\right)$$

hepsi $\mathbb{R}$ nin elemanı olduğundan (x_1,x_2,x_3) noktası tektir.

$m\neq 0=n$ alalım.

$$\begin{aligned} x_2m+x_3n &= 0\Longrightarrow x_2m=0\Longrightarrow x_2=0,\ x_3 \text{ keyfi olsun.} \\ a_1x_1+\underbrace{a_2x_2}_{0}+a_3x_3 &= 0\Longrightarrow x_1=-a_3x_3a_1^{-1} \end{aligned}$$

$$(x_1,x_2,x_3)\equiv\left(-a_3x_3a_1^{-1},0,x_3\right)\equiv\left(-a_3a_1^{-1},0,1\right)$$

hepsi $\mathbb{R}$ nin elemanı olduğundan (x_1,x_2,x_3) noktası tektir.

$m\neq 0\neq n$ alalım.

$$\begin{aligned} x_2m+x_3n &= 0\Longrightarrow x_2=-x_3nm^{-1},x_3=x_3 \text{ keyfi olsun.} \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 &= 0\Longrightarrow x_1=\left(a_2x_3nm^{-1}-a_3x_3\right)a_1^{-1} \end{aligned}$$

$$(x_1,x_2,x_3)=(a_2b_3-b_2a_3,a_3b_1-b_3a_1,a_1b_2-b_1a_2)$$

noktası tektir.

$$(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

bulunur. $P2$ aksiyomu sağlanır.

$P3$) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

$(1,0,-1)\,,\,(3,2,1)\,,\,(0,2,1)\,,\,(5,3,0)$ noktalarını alalım.

$$\begin{aligned} (1,0,-1)\vee(3,2,1) &= [1,-2,1] \\ (1,0,-1)\vee(0,2,1) &= [-2,1,-2] \\ (3,2,1)\vee(0,2,1) &= [0,1,1] \end{aligned}$$

$(5,3,0)$ noktası $[1,-2,1]$ doğrusu üzerinde değildir.

$(5,3,0)$ noktası $[-2,1,-2]$ doğrusu üzerinde değildir.

$(5,3,0)$ noktası $[0,1,1]$ doğrusu üzerinde değildir.

Dolayısıyla herhangi üçü doğrudaş olmayan 4 nokta vardır. $P3$ aksiyomu sağlanır.

$P1$, $P2$, $P3$ aksiyomları sağlandığından $\boldsymbol{P}_2\mathbb{R}$ projektif düzlemdir. □

1.1.2 Moulton Düzlemi

Tanım 1.1.2 *Gerçel afin düzlemi (Öklid Düzlemini) göz önüne alalım. Moulton düzleminin noktaları bu düzlemin tüm noktalarından ibarettir. Gerçel afin düzlemdeki yatay, dikey ve negatif eğimli doğrular Moulton düzleminde de doğrulardır.*

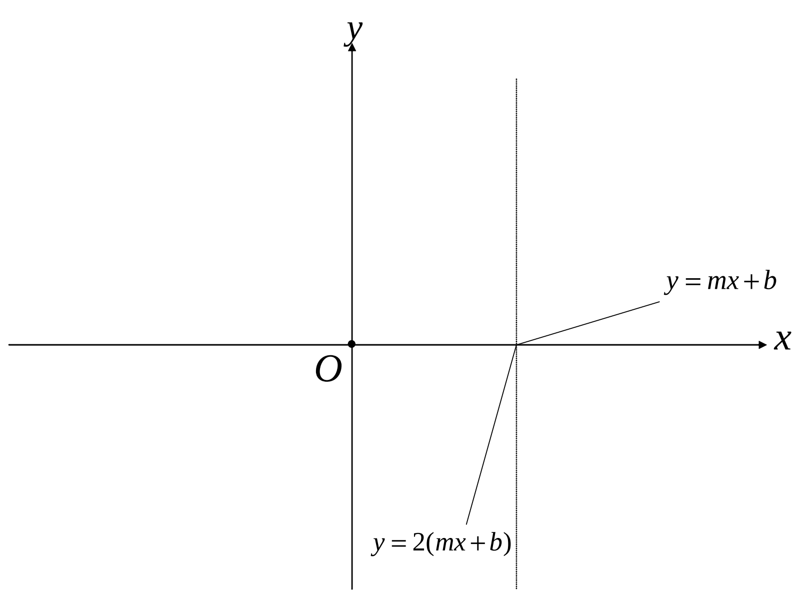
Gerçel afin düzlemin

$$y = mx + b,\ m > 0$$

denklemiyle gösterilen pozitif eğimli doğruları yerine Moulton düzleminde

$$y = \begin{cases} mx + b, & x \geq -bm^{-1} \\ 2\left(mx + b\right), & x < -bm^{-1} \end{cases}$$

denklemiyle verilen kırık çizgiler "doğru" olarak alınır.



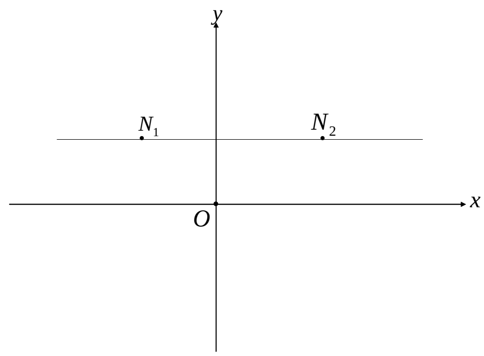
Şekil 1.1

Teorem 1.1.3 *Moulton düzlemi bir afin düzlemdir.*

İspat: *A*1) *Farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.*

$N_1(x_1, y_1),\ N_2(x_2, y_2) \in \mathcal{N}$ *noktalarını alalım.*

(*i*) $x_1 \neq x_2,\ y_1 = y_2$ *iken;* $N_1 \vee N_2 = [m, b]$ *doğrusu tek midir?*

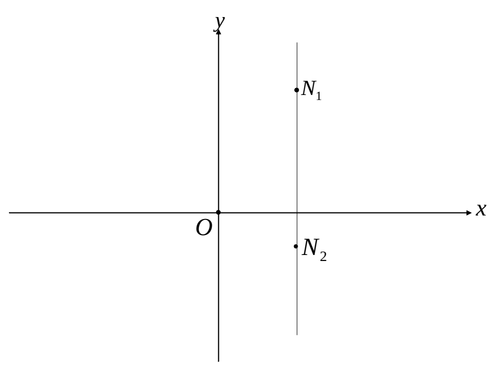


Şekil 1.2

$$N_1(x_1, y_1) o\, [m, b] \iff y_1 = mx_1 + b$$
$$N_2(x_2, y_2) o\, [m, b] \iff y_1 = mx_2 + b$$

$N_1 \vee N_2 = [m, b] = [0, y_1]$ *doğrusu vardır ve tektir.*

(*ii*) $x_1 = x_2,\ y_1 \neq y_2$ *iken;*



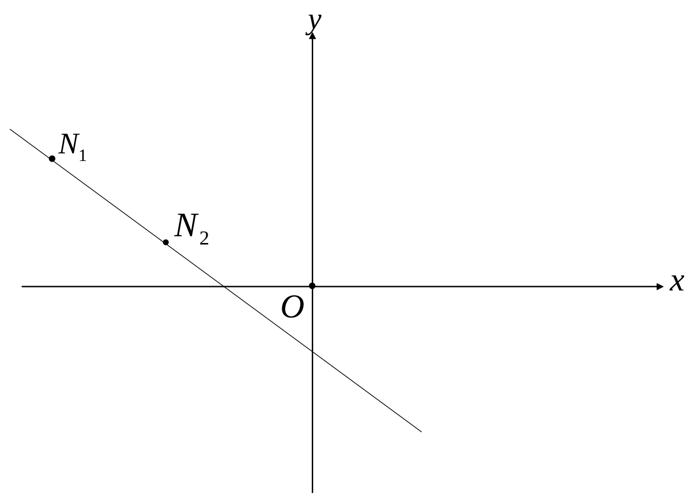
Şekil 1.3

$N_1 \vee N_2 = [a] \Longrightarrow$

$$N_1(x_1, y_1) o\,[a] \iff a = x_1$$
$$N_1(x_1, y_2) o\,[a] \iff a = x_1$$

bulunur. $[x_1]$ *doğrusu tektir.*

(*iii*) $x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2,\ m < 0$ *olsun.*
$\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} < 0$ *olur.*



Şekil 1.4

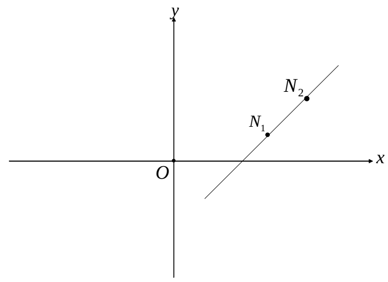
$$N_1(x_1, y_1) o\,[m, b] \iff y_1 = m x_1 + b$$
$$N_2(x_2, y_2) o\,[m, b] \iff y_2 = m x_2 + b$$
$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \in \mathbb{R},\ b = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 \in \mathbb{R}$$

olur. $N_1 \vee N_2 = [m, b] = \left[\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1\right]$ *doğrusu vardır ve tektir.*

(*iv*) $x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2, m > 0$ *olsun.*

1. Durum

$y_1 > 0,\ y_2 > 0$ *alalım.*



Şekil 1.5

$N_1 \vee N_2 = [m, b] \Longrightarrow$

$$N_1(x_1, y_1) o\, [m, b] \iff y_1 = mx_1 + b$$

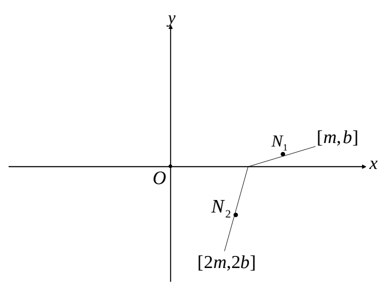
$$N_2(x_2, y_2) o\, [m, b] \iff y_2 = mx_2 + b$$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \in \mathbb{R},\ b = y_2 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_2 \in \mathbb{R}$$

olur. $N_1 \vee N_2 = [m, b] = \left[\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, y_2 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_2\right]$ *doğrusu vardır ve tektir.*

2. Durum

$y_1 > 0,\ y_2 < 0$ *alalım.*



Şekil 1.6

$$N_1(x_1, y_1) o\, [m, b] \iff y_1 = mx_1 + b$$

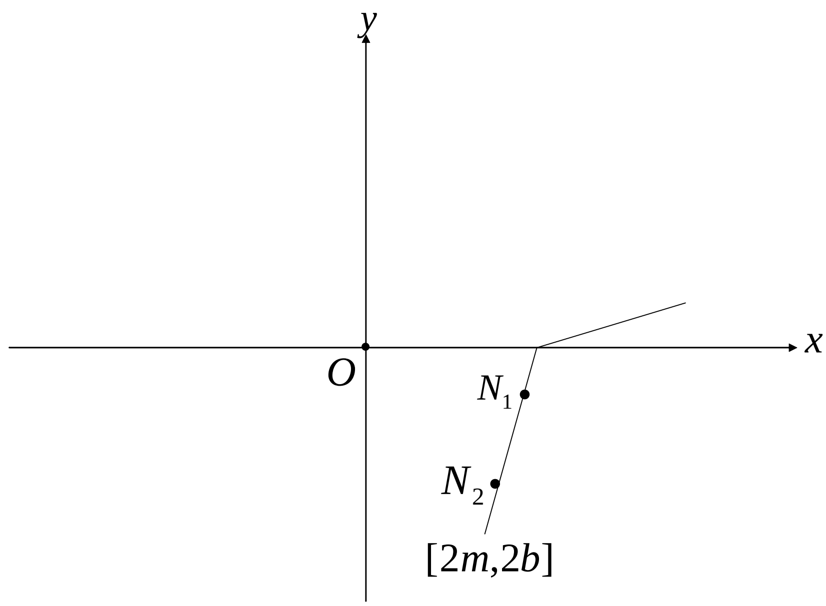
$$N_2(x_2, y_2) o\, [2m, 2b] \iff y_2 = 2mx_2 + 2b$$

$$m = \frac{y_2 - 2y_1}{2(x_2 - x_1)} \in \mathbb{R},\ b = y_1 - \frac{2y_2 - y_1}{2(x_2 - x_1)} x_1 \in \mathbb{R}$$

olur. $N_1 \vee N_2 = [m, b] = \left[\frac{y_2 - 2y_1}{2(x_2 - x_1)}, y_1 - \frac{2y_2 - y_1}{2(x_2 - x_1)} x_1\right]$ *doğrusu vardır ve tektir.*

3. Durum

$y_1 < 0,\ y_2 < 0$ *alalım.*



Şekil 1.7

$$N_1(x_1, y_1) o\, [2m, 2b] \iff y_1 = 2mx_1 + 2b$$

$$N_2(x_2, y_2) o\, [2m, 2b] \iff y_2 = 2mx_2 + 2b$$

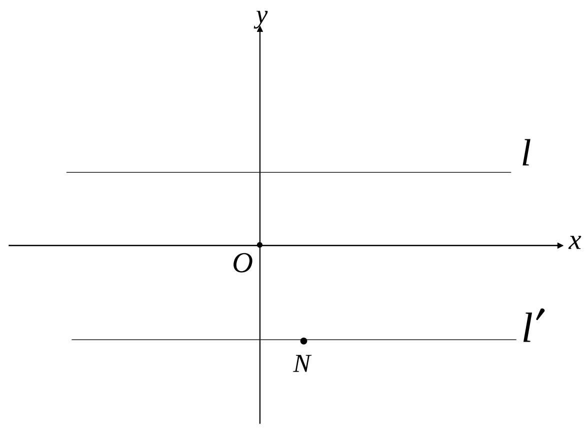
$$m = \frac{y_1 - y_2}{2(x_1 - x_2)} \in \mathbb{R}, b = \frac{1}{2}\left(y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) \in \mathbb{R}$$

olur. $N_1 \vee N_2 = [m, b] = \left[\frac{y_1 - y_2}{2(x_1 - x_2)}, \frac{1}{2}\left(y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)\right]$ *doğrusu vardır ve tektir.*

O halde A1 aksiyomu sağlanır.

A2) Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir.

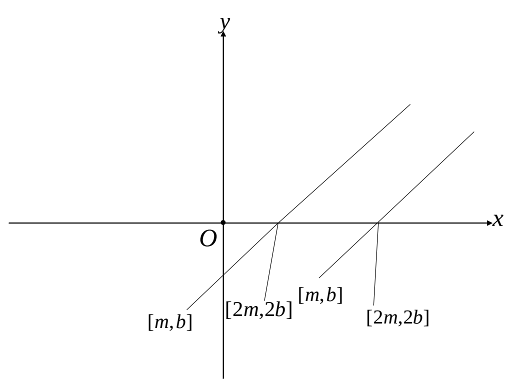
l, yatay bir doğru ise, bu aynı zamanda öklid düzleminin doğrusu olduğundan *bu doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel çizilir.*



Şekil 1.8

l, *dikey bir doğru veya negatif eğimli bir doğru ise, yine bir noktadan bir tek paralel çizilebilir.*

l, *pozitif eğimli bir doğru ise,*



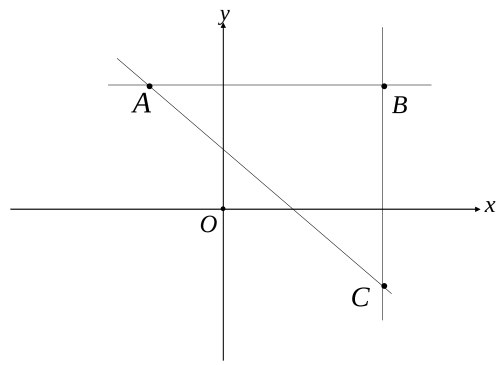
Şekil 1.9

$l \in D$ *olsun.* l, *pozitif eğimli iken* l *için* x*-ekseninin üst kısmında kalan kısmın eğimi* m *iken, bu doğruya dışındaki* N *noktasından bir tek* l' *paraleli çizilebilir.*

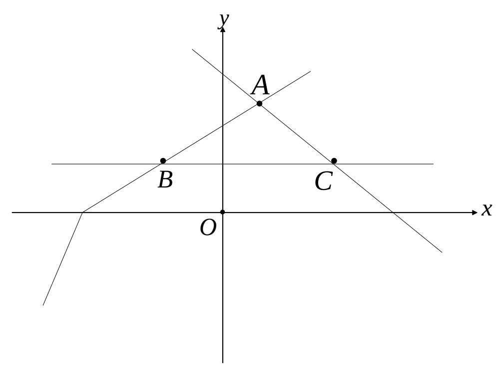
l *nin eğimi* x*-ekseninin altında* $2m$ *iken* l' *nün eğimi de* $2m$ *olacaktır.*

O halde $A2$ *aksiyomu sağlanır.*

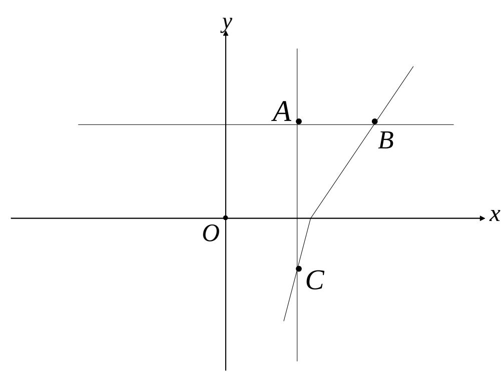
A3) Aynı doğru üzerinde olmayan üç nokta vardır.



Şeikl 1.10



Şekil 1.11



Şekil 1.12

A3 aksiyomu sağlanır.

Dolayısıyla Moulton düzlemi bir afin düzlemdir.

Moulton Afin Düzleminin tamamlanmışı bir projektif düzlemdir. □

1.1.3 Küresel Projektif Düzlem Modeli

Tanım 1.1.4 *$\mathcal{K}$, merkezi $(0,0,0)$ ve yarı çapı r olan bir küre olsun. Burada $r>0$ şartı sağlanmalıdır. $\mathcal{K}$ üzerinde noktalar kümesi $\mathcal{N}$, doğrular kümesi $\mathcal{D}$ ve üzerinde bulunma bağıntısı "o" olan $(\mathcal{N},\mathcal{D},o)$ geometrik yapısını şu şekilde tanımlayalım:*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N} = \ & \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=r^2,\ z\geq 0\}\setminus\{\{(x,y,0) : x^2+y^2=r^2,\ x<0\}\cup\{(0,-r,0) : r>
\\
\mathcal{D} = \ & \{d \mid d=\{(x,y,z)\in N : x^2+y^2+z^2=r^2 \ \mathit{ve}\ ax+by+cz=0,\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\}\}
\\
o : \ & \textit{Bilinen noktanın yarı küre ve düzlem üzerinde bulunması}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{K}$ yardımıyla tanımlanan $(\mathcal{N},\mathcal{D},o)$ geometrik yapısına ***Küresel Projektif Düzlem Modeli*** *denir ve* $\boldsymbol{P}_2\mathcal{K}$ *ile gösterilir.*

Şimdi yukarıda tanımladığımız $(\mathcal{N},\mathcal{D},o)$ geometrik yapısının bir projektif düzlem olduğunu gösteren teoremi verelim.

Teorem 1.1.5 *Yukarıda tanımlanan $\mathcal{K}$ yardımıyla oluşturulan $(\mathcal{N},\mathcal{D},o)$ geometrik yapısı bir projektif düzlem belirtir.*

İspat: *İspat S. Erkekbaş (1995) te verilmiştir.* □

Teorem 1.1.6 $\boldsymbol{P}\,(\mathcal{N},\mathcal{D},o)$ *projektif düzleminde:*

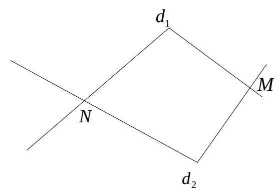
1) *Farklı iki doğru en çok bir noktada kesişir.*

2) *Herhangi üçü aynı noktadan geçmeyen dört farklı doğru vardır.*

3) *Her noktadan en az üç doğru geçer.*

4) *Her doğru üzerinde en az üç farklı nokta vardır.*

İspat: 1)



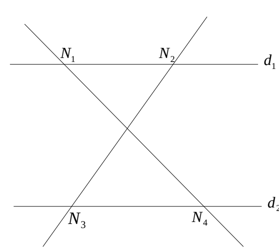
Şekil 1.13

$d_1,\ d_2 \in \mathcal{D}$ ve $d_1 \neq d_2$ olsun. $P2$ gereğince iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır. Dolayısıyla Nod_1 ve Nod_2 olacak şekilde bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır. $M\ o\ d_1$ ve $M\ o\ d_2$ olacak şekilde bir başka $M \in \mathcal{N}$ noktasının bulunduğunu varsayalım. Bu durumda;

$$\begin{aligned} Nod_1 \text{ ve } Mod_1 \text{ olduğundan } MN &= d_1 \text{ ve} \\ Nod_2 \text{ ve } Mod_2 \text{ olduğundan } MN &= d_2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buradan $MN = d_1 = d_2$ bulunur. Bu ise $d_1 \neq d_2$ kabulümüzle çelişir. O halde farklı iki doğru bir tek noktada kesişir.

2) $N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4$; $P3$ gereğince herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta olsun.



Şekil 1.14

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= N_1N_2 \\ d_2 &= N_2N_3 \\ d_3 &= N_3N_4 \\ d_4 &= N_1N_4 \end{aligned}\right\} \text{doğrularının herhangi üçü noktadaş olamaz.}$$

Yani herhangi üçü aynı noktadan geçmeyen dört farklı doğru vardır.

3, 4) Bir projektif düzlemde $n \geq 2$ için;

Her doğru üzerinde $n+1$ nokta vardır.

Her noktadan geçen $n+1$ doğru vardır.

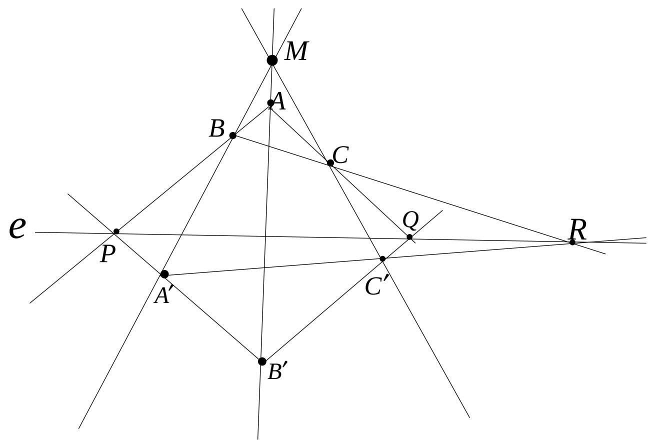
Teorem 2.3.2 nin [2] ispatında $d_1 = N_1N_2$ ve $d_3 = N_3N_4$ doğruları üzerinde N_1, N_2, N_3, N_4 den başka d_1d_2 noktasınında bulunduğu görülür. Bu ikisi birleştirilirse şu önemli sonuç elde edilir. Bir projektif düzlemde her noktadan geçen en az üç doğru ve her doğru üzerinde en az üç nokta vardır. Yani bir projektif düzlemin mertebesi en az iki olmalıdır. □

1.2 Dezarg Düzlemleri

Tanım 1.2.1 *A, B, C, $A^{'}$, $B^{'}$, $C^{'}$ bir geometrik yapının herhangi altı noktası olsun. Eğer A, B, C doğrudaş değilse ABC ye bir üçgen denir. ABC ve $A^{'}B^{'}C^{'}$ herhangi iki üçgen olsun. A, $A^{'}$; B, $B^{'}$; C, $C^{'}$ ikililerine üçgenlerin karşılıklı köşeleri adı verilir. ABC ve $A^{'}B^{'}C^{'}$ üçgenlerinin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular bir M noktasında noktadaş iseler bu üçgenlere M* ***den perspektiftir*** *denir. M noktasına* ***perspektiflik merkezi*** *denir. AB, $A^{'}B^{'}$; AC, $A^{'}C^{'}$; BC, $B^{'}C^{'}$ doğru ikililerine üçgenlerin karşılıklı kenarları adı verilir. Bu üçgenlerin karşılıklı kenarlarının*

$$P = AB \wedge A^{'}B^{'},\ \ Q = AC \wedge A^{'}C^{'},\ \ R = BC \wedge B^{'}C^{'}$$

arakesit noktaları bir e doğrusu üzerinde ise bu üçgenlere e ***doğrusundan perspektiftir*** *denir.*



Şekil 1.15 Dezarg Teoremi

$$AA',\ BB',\ CC' o M$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \wedge A'B' = P \\ AC \wedge A'C' = Q \\ BC \wedge B'C' = R \end{array}\right\} P,\ Q,\ R\ o\ e$$

Teorem 1.2.2 ***(Dezarg Teoremi)*** *Bir noktadan perspektif olan iki üçgen, bir doğrudan da perspektiftir.*

$P1$, $P2$, $P3$ aksiyomlarını sağlayan ama Dezarg Teoremini sağlamayan projektif düzlemler vardır.

Teorem 1.2.3 *Moulton Afin düzleminin tamamlanmışı olan projektif düzlem Dezarg Teoremini sağlamaz. Yani, bu projektif düzlemde bir merkezden perspektif olan iki üçgen bir eksenden perspektif olamaz.*

İspat: ABC ve $A'B'C'$, M_∞ noktasında perspektif iki üçgendir. Şekil 1.15 deki üçgenler Moulton Düzlemi gözönüne alınırsa pozitif eğimli olan $A'C'$

doğrusu değişikliğe uğrayacak ve $A'C' \wedge AC$ noktası Q den farklı bir nokta olan Q' noktası olarak belirlenecektir. Diğer doğrular pozitif eğimli olmadığı için değişmezler. $\boldsymbol{P}_2\mathbb{R}$ düzlemi Dezargsel olduğu için P, Q, R noktaları doğrudaştır. Buna göre P, Q', R noktaları doğrudaş olamaz. Dolayısıyla Moulton Düzlemi Dezarg teoremini sağlamaz. □

Teorem 1.2.4 *Küresel Projektif Düzlem Modeli* $(\boldsymbol{P}_2\mathcal{K})$ *dezargseldir.*

İspat: İspat S. Erkekbaş [4] te verilmiştir. □

Şimdi Dezarg teoreminin $P1$, $P2$, $P3$ aksiyomlarından elde edilemeyeceğini yani bu aksiyomlardan bağımsız olduğunu gösteren bir teorem verelim.

Teorem 1.2.5 $\mathcal{K}_0$ *farklı dört noktadan oluşan ve hiçbir doğrusu bulunmayan bir konfigürasyon,* $\mathcal{K}$ *da* $\mathcal{K}_0$ *dan üretilen serbest bir projektif düzlem olsun.* $\mathcal{K}$ *düzlemi Dezarg teoremini sağlamaz.*

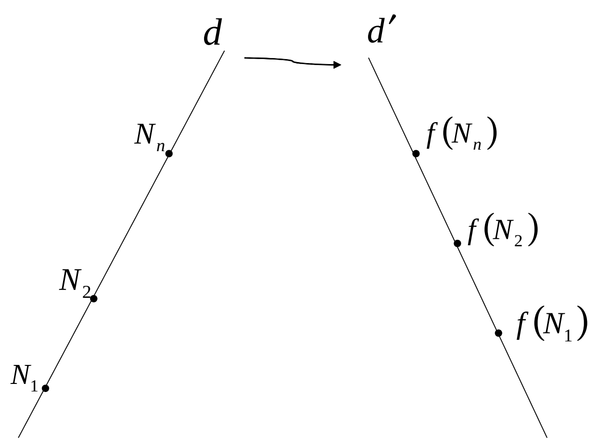
İspat: Teorem 2.5.3 ün [2] bir sonucu olarak $\mathcal{K}$ sonlu değildir. Bu nedenle $\mathcal{K}$ nın her doğrusu üzerinde sonsuz sayıda nokta vardır. Dolayısıyla $\mathcal{K}$ da herhangi üçü doğrudaş olmayan M, A, B, C gibi dört nokta ve MA üzerinde A', MB üzerinde B', MC üzerinde C' olacak biçimde doğrudaş omayan A', B', C' noktaları seçilebilir.

Bunlara $P = AB \wedge A'B'$, $Q = AC \wedge A'C'$, $R = BC \wedge B'C'$ noktaları da katılarak toplam nokta sayısı 10 olan bir alt konfigürasyan elde edilir. Eğer Dezarg teoremi, $\mathcal{K}$ da geçerli olsa P, Q, R doğrudaş olur. Dolayısıyla 10 nokta ve 10 doğrudan oluşan kısıtlı bir konfigürasyon elde edilir. Oysa Teorem 2.5.4 [2] gereğince bu kısıtlı konfigürasyonun $\mathcal{K}_0$ da bulunması gerekir. Bu ise mümkün değildir. Çünkü hipotez gereğince $\mathcal{K}_0$ da yalnız dört nokta bulunur. O halde P, Q, R doğrudaş olamaz. Bu da Dezarg teoreminin $\mathcal{K}$ da geçerli olmadığını gösterir. □

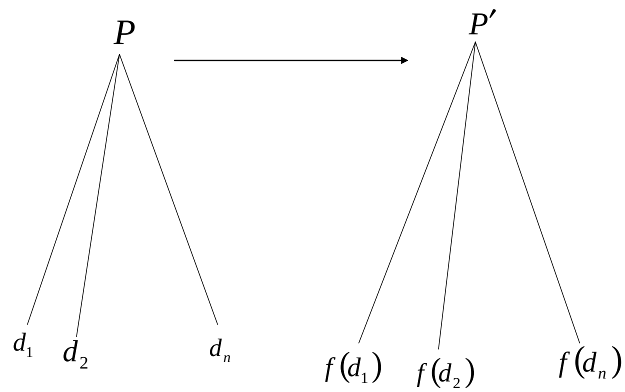
Sonuç olarak $P1$, $P2$, $P3$ aksiyomlarını sağlayan ama Dezarg Teoremini sağlamayan projektif düzlemler vardır.

Teorem 1.2.6 ***(Küçük Dezarg Teoremi)*** *X o x özelliğindeki her X noktası ile her x doğrusu için X noktasından perspektif ABC ve $A'B'C'$ üçgenleri için $AB \wedge A'B' = P$ o x, $AC \wedge A'C' = Q$ o x ise $BC \wedge B'C' = R$ o x dir.*

Tanım 1.2.7 $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ *ve* $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', o')$ *herhangi iki geometrik yapı olsun.*
$f : \mathcal{N} \cup \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{N}' \cup \mathcal{D}'$ *fonksiyonu*
1) $f(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}'$
2) $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}'$
3) $\forall N \in \mathcal{N}$ *ve* $\forall d \in \mathcal{D}$ *ve* N o $d \Longrightarrow f(N)$ o' $f(d)$
koşullarını sağlıyorsa f *ye* $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ *dan* $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', o')$ *ye bir* ***homomorfizm*** *denir.* $1-1$ *ve örten özelliği olan homomofizme* ***izomorfizm*** *denir. Bir geometrik yapıyı kendisine dönüştüren izomorfizme* ***kolinasyon*** *ya da* ***otomorfizm*** *denir.*



Şekil 1.16



Şekil 1.17

Homomorfizmler noktaları noktalara, doğruları doğrulara dönüştüren ve üzerinde bulunma bağıntısını koruyan dönüşümlerdir.

İzomorfizm ise nokta ve doğruları birebir örten şekilde eşler. İzomorf iki geometrik yapı bir tek geometrik yapının iki farklı şekilde gösterilmişleri olarak düşünülebilir. Yani izomorf geometrik yapılara bir tek yapıymış gibi bakılır.

Tanım 1.2.8 $\boldsymbol{P}$ *bir projektif düzlem,* f, $\boldsymbol{P}$ *nin bir kolinasyonu olsun.*

$\boldsymbol{P}$ *nin bir* M *noktasından geçen her* x *doğrusu* f *altında sabitse (*$f(x) = x$ *ise),* M *ye* f *nin merkezi denir.*

$\boldsymbol{P}$ *nin bir* e *doğrusu üzerindeki her* X *noktası* f *altında sabitse (*$f(X) = X$ *ise),* e *ye* f *nin ekseni denir.*

Tanım 1.2.9 *Bir* $\boldsymbol{P}$ *projektif düzleminin bütün kolinasyonları fonksiyon bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grup* $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{P})$ *ile gösterilir ve buna* ***kolinasyonlar grubu*** *denir.*

Tanım 1.2.10 $\boldsymbol{P}$ *bir projektif düzlem ve* f *de* $\boldsymbol{P}$ *nin bir kolinasyonu olsun. Eğer* $\boldsymbol{P}$ *deki bir* N *noktası için* $f(N) = N$ *ise* N *ye* f *nin bir sabit noktası* *denir.*

Tanım 1.2.11 *$\boldsymbol{P}$ bir projektif düzlem ve f de $\boldsymbol{P}$ nin bir kolinasyonu olsun. Eğer $\boldsymbol{P}$ nin bir d doğrusu için $f(d) = d$ ise d ye f nin bir sabit doğrusu denir.*

Tanım 1.2.12 *$\forall X$ o d için $f(X) = X$ ise yani d nin her noktası f altında sabit ise f, d yi nokta-nokta değişmez bırakır denir.*

Tanım 1.2.13 *$\boldsymbol{P}$ nin her noktası f altında değişmez kalıyorsa f kolinasyonuna birim kolinasyon denir.*

Teorem 1.2.14 *$\boldsymbol{P}$ bir projektif düzlem, f $\boldsymbol{P}$ nin birimden farklı bir kolinasyonu olsun. f nin en çok bir merkezi ve en çok bir ekseni vardır.*

İspat: f nin M_1 ve M_2 gibi iki merkezi olsun.
X noktası M_1M_2 üzerinde değilse,

$$\begin{aligned} X = XM_1 \wedge XM_2 \Longrightarrow \quad f(X) &= f(XM_1 \wedge XM_2) \\ &= f(XM_1) \wedge f(XM_2) \\ &= X \text{ dir.} \end{aligned}$$

Y, M_1M_2 üzerinde bir noktaysa, Y den geçen ve M_1M_2 den farklı bir d doğrusu düşünelim. d üzerinde Y den başka N_1 ve N_2 noktalarını alalım. Buradan,

$$Y = M_1M_2 \wedge N_1N_2$$

dolayısıyla da

$$f(Y) = f((M_1M_2) \wedge f(N_1N_2)) = (M_1M_2) \wedge (N_1N_2) = Y$$

bulunur. Sonuç olarak f, projektif düzlemdeki her noktayı değişmez bırakır, yani f birim kolinasyon olur. Bu da hipotezle çeliştiği için iki merkez var olamaz. Dolayısıyla f nin en çok bir merkezi vardır.
Dualiyle en çok bir ekseni olduğu gösterilir. $\square$

Bölüm 2

Fuzzy Düzlem Projektif Geometri

K. C. Gupta ve Suryansu Ray [1] Fuzzy Düzlem Projektif Geometrinin tanımını verdiler ve Düzlem Projektif Geometri ile Fuzzy Düzlem Projektif Geometri arasındaki farklılıkları vurguladılar. Bu bölümde Fuzzy Düzlem Projektif Geometri ile ilgili bazı tanım, teorem ve ispatlar vereceğiz. Bu bölümde verilenler K. C. Gupta, Suryansu Ray (1993) ve L. Kuijken, H. Van. Maldeghem (2002) den alınmıştır.

Tanım 2.0.15 *$\mathcal{S}$ boş olmayan bir küme olsun. $\mathcal{S}$ nin bir (x, λ) fuzzy noktası,*

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longrightarrow \lambda \\ y &\longrightarrow 0,\ x \neq y,\ \forall y \in \mathcal{S} \text{ için} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bir fuzzy kümesidir.
Her $x \in \mathcal{S}$ için $(x, \lambda) \in \Pi$ olacak şekilde $0 < \lambda \leq 1$ varsa $\mathcal{S}$ nin fuzzy noktalarının bir Π kolleksiyonuna tamdır denir.
Eğer bir $x \in \mathcal{S}$ noktası için,

$$(x, \alpha),\ \ (x, \beta) \in \Pi \text{ olacak şekilde } \alpha,\ \beta,\ 0 < \alpha < \beta \leq 1 \ varsa,$$

(x,α) ve (x,β) fuzzy noktalarına Π de fuzzy dikey noktalar denir. Eğer $x \neq y$ ve $(x,\alpha)\,,\,(y,\beta) \in \Pi$ ise, (x,α) ve (y,β) fuzzy noktalarına Π de fuzzy farklıdır denir.

Tanım 2.0.16

$$\begin{aligned} l: \ \mathcal{S} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longrightarrow l\,(x) > 0, \ \forall x \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fuzzy kümesine Π de bir fuzzy doğru denir. Bu küme $(x, l\,(x)) \in \Pi$ fuzzy noktalarının kümesi olarak düşünülebilir ve Λ ile gösterilir.

Eğer $l\,(x) = \lambda$ ise l fuzzy doğrusu bir (x,λ) fuzzy noktasını içerir ya da (x,λ) fuzzy noktası l fuzzy doğrusu üzerindedir denir.

I fuzzy üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere, fuzzy noktalar ve fuzzy doğrular arasındaki simetrik üzerinde bulunma bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$l(x) = \lambda \ \textit{ise} \ l \ I\,(x,\lambda) \ \textit{veya} \ (x,\lambda) \ I \ l$$

Tanım 2.0.17 *Bir fuzzy projektif düzlem (kısaca FPP), boş olmayan bir $\mathcal{S}$ kümesinin fuzzy noktalarının bir Π tam kümesiyle ve Π de fuzzy doğrularının bir Λ kolleksiyonu ile aşağıdaki aksiyomları sağlayan (Π, Λ, I) aksiyomatik yapısıdır.*

(F1a) *Π de iki fuzzy farklı nokta verilsin. Bu iki fuzzy noktayı üzerinde bulunduran Λ de en az bir fuzzy doğru vardır.*

(F1b) *Π de iki fuzzy farklı nokta verilsin. Bu iki fuzzy noktayı üzerinde bulunduran Λ de en çok bir fuzzy doğru vardır.*

(F2) *Λ de iki fuzzy farklı doğru verilsin. Bu iki doğrunun da üzerinde olan Π de en az bir fuzzy nokta vardır.*

(F3) *Π de herhangi üçü Λ nin aynı fuzzy doğrusu üzerinde olmayan en az dört fuzzy farklı nokta vardır.*

2.1 Fuzzy Projektif Düzlem Modeli Örnekleri

2.1.1 Düzgün Doğru Modeli

Tanım 2.1.1 $\mathcal{S} = \mathbb{R} \cup \{ri : 0 \neq r \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$ *alalım.*

Burada $\mathbb{R} =$ *Reel sayıları,* $i =$ *imajiner sayısını,* $\infty =$ *kompleks olmayan bir sayıyı göstermektedir.*

Noktalar kümesi;

$$\Pi = \begin{cases} \{(x,\lambda) : x \in \mathbb{R},\ 0 < \lambda < 1\} \\ \cup \left\{ \left(ri, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(r)\right) : 0 \neq r \in \mathbb{R} \right\} \\ \cup \left\{ \left(\infty, \frac{1}{2}\right) \right\} \end{cases}$$

olsun. $\left(ri, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(r)\right)$ *tipindeki noktaları kısaca* (ri), $\left(\infty, \frac{1}{2}\right)$ *tipindeki noktaları ise kısaca*(∞) *ile göstereceğiz.*

Λ *kümesi açıkça üç tip fuzzy doğrusu içerir.*

1. Tip Fuzzy Doğrular:

$$[m,c]\,(x)\ \text{doğrusu} = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx+c) & ,\ x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m) & ,\ x = mi \\ 0 & ,\ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

(Aslında reel projektif düzlemdeki noktaları $(0,1)$ *aralığına sıkıştırmaya çalışıyoruz.)*

2. Tip Fuzzy Doğrular:

$$[d]\,(x)\ \text{doğrusu} = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d) & ,\ x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} & ,\ x = \infty \\ 0 & ,\ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

(Yatay doğrulardır.)

3. Tip Fuzzy Doğrular:

$$\omega(x) \text{ doğrusu} = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(r) & , \ 0 \neq r \in \mathbb{R}, \ x = ri \\ \frac{1}{2} & , \ x = \infty \\ 0 & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

(∞ doğrusudur. Üzerinde (ri) ve (∞) noktaları vardır.)

I: Fuzzy üzerinde bulunma bağıntısı olsun.

Bu modele ***Düzgün Doğru Modeli*** *denir.*

Teorem 2.1.2 *Düzgün doğru modeli fuzzy projektif düzlemdir.*

İspat: $F1$) İki fuzzy farklı noktadan bir tek fuzzy doğru geçer.

1) $(x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2)$ fuzzy farklı noktalarını alalım. Farklı olmaları için birinci bileşenleri farklı olmalıdır. Yani $x_1 \neq x_2$ olduğu biliniyor.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ olsun.

$$\begin{aligned} (x_1, \lambda_1) \ \mathrm{I} \ [m, c](x) &\iff \lambda_1 = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx_1 + c) \\ (x_2, \lambda_2) \ \mathrm{I} \ [m, c](x) &\iff \lambda_2 = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx_2 + c) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Longrightarrow \cot(\lambda_1\pi) = mx_1 + c \\ &\Longrightarrow \cot(\lambda_2\pi) = mx_2 + c \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{\cot(\lambda_1\pi) - \cot(\lambda_2\pi)}{x_1 - x_2} \\ c &= \frac{x_1\cot(\lambda_2\pi) - x_2\cot(\lambda_1\pi)}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

$$[m, c](x) = \left[\frac{\cot(\lambda_1\pi) - \cot(\lambda_2\pi)}{x_1 - x_2}, \frac{x_1\cot(\lambda_2\pi) - x_2\cot(\lambda_1\pi)}{x_1 - x_2}\right](x)$$

biçiminde bir tek fuzzy doğrusu vardır.

2) $(x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2)$ farklı fuzzy noktalarını alalım. $x_1 \neq x_2$ olur.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ alalım. Yani noktalarımız (x_1, λ), (x_2, λ) olsun.

$$(x_1, \lambda) \ \mathrm{I} \ [m, c](x) \iff \lambda = \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(mx_1 + c)$$
$$(x_2, \lambda) \ \mathrm{I} \ [m, c](x) \iff \lambda = \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(mx_2 + c)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow \cot(\lambda\pi) = mx_1 + c \\ \Longrightarrow \cot(\lambda\pi) = mx_2 + c \end{array}\right\}$$
$$m(x_1 - x_2) = 0$$

$m = 0$ ya da $x_1 - x_2 = 0$ bulunur. Ama $x_1 - x_2 = 0$ olamaz. Çünkü $x_1 \neq x_2$ dır. O halde $c = \cot \lambda\pi$ bulunur.

$$[d](x) = [\cot \lambda\pi](x)$$

biçiminde bir tek fuzzy doğrusu vardır.

3) (x_1, λ_1) ve $\left(ri, \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(r)\right)$ noktalarını alalım.

$$(x_1, \lambda_1) \ \mathrm{I} \ [m, c](x) \iff \lambda_1 = \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(mx_1 + c)$$
$$\left(ri, \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(r)\right) \ \mathrm{I} \ [m, c](x) \iff y = \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(r)$$

Bu durumda $m = r$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} rx_1 + c &= \cot(\lambda_1\pi) \\ c &= \cot(\lambda_1\pi) - rx_1 \end{aligned}$$

olur.

$$[m, c](x) = [r, \cot(\lambda_1\pi) - rx_1](x)$$

olacak biçimde bir tek fuzzy doğrusu vardır.

4) $\left(r_1 i, \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(r_1)\right)$ ve $\left(r_2 i, \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(r_2)\right)$ noktalarını alalım. Bu iki noktadan geçen doğru $[\infty]$ doğrusudur.

5) $\left(\infty, \frac{1}{2}\right)$ ve (x_1, λ_1) noktalarını üzerinde bulunduran doğru, $[d](x) = [\cot(\lambda_1\pi)](x)$

doğrusudur.

6) $\left(\infty, \frac{1}{2}\right)$ ve $\left(ri, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(r)\right)$ noktalarından geçen doğru $[\infty]$ doğrusudur.

$F1$ aksiyomu sağlanır.

$F2$) İki farklı fuzzy doğrusu için, ikisinin de üzerinde bulunan en az bir fuzzy nokta vardır.

1) $[m_1, c_1]$, $[m_2, c_2]$ fuzzy farklı doğrularını alalım. $m_1 \neq m_2$, $c_1 \neq c_2$ olsun.

$$(x,y) \text{ I } [m_1, c_1] \iff y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m_1 x + c_1)$$
$$(x,y) \text{ I } [m_2, c_2] \iff y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m_2 x + c_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 x + c_1 = \cot(\pi y) \\ m_2 x + c_2 = \cot(\pi y) \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2},\ y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{m_1 c_2 - m_2 c_1}{m_1 - m_2}\right)$$

bulunur.

$$(x,y) = \left(\frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{m_1 c_2 - m_2 c_1}{m_1 - m_2}\right)\right)$$

fuzzy noktası tektir.

2) $[m_1, c_1]$, $[m_2, c_2]$ fuzzy farklı doğrularını alalım. $m_1 = m_2 = 0$, $c_1 \neq c_2$ olsun. (Paralel yatay doğrulardır.)

$[m_1, c_1] \wedge [m_2, c_2] = \left(\infty, \frac{1}{2}\right)$ fuzzy noktası tektir.

3) $[m_1, c_1]$, $[m_2, c_2]$ fuzzy farklı doğrularını alalım. $m_1 = m_2 \neq 0$, $c_1 \neq c_2$ olsun. $m_1 = m_2 = m$ alalım.

$$(x,y) \text{ I } [m, c_1] \iff y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx + c_1)$$
$$(x,y) \text{ I } [m, c_2] \iff y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx + c_2)$$

$$x = mi,\ y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m)$$

bulunur.

$$(x,y) = \left(mi, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m)\right)$$

fuzzy noktası tektir.

4) $[m_1, c]$, $[m_2, c]$ fuzzy farklı doğrularını alalım.

$$(x,y)\ \mathrm{I}\ [m_1,c] \iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m_1x+c)$$
$$(x,y)\ \mathrm{I}\ [m_2,c] \iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m_2x+c)$$

$$\left.\begin{aligned} m_1x+c&=\cot(\pi y)\\ m_2x+c&=\cot(\pi y)\end{aligned}\right\}$$
$$x=0,\ y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(c)$$

bulunur.

$$(x,y)=\left(0,\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(c)\right)$$

fuzzy noktası tektir.

5) $[m_1, c_1]$, $[d]$ fuzzy faklı doğrularını alalım. $(m_1 \neq 0)$

$$(x,y)\ \mathrm{I}\ [m_1,c_1] \iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m_1x+c_1)$$
$$(x,y)\ \mathrm{I}\ [d] \iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d)$$
$$x=\frac{d-c_1}{m_1},\ y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d)$$

bulunur.

$$(x,y)=\left(\frac{d-c_1}{m_1},\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d)\right)$$

olacak şekilde bir tek fuzzy nokta vardır.

6) $[m_1, c_1]$, $[\infty]$ fuzzy farklı doğrularını alalım.

$[m_1, c_1] \wedge [\infty] = \left(mi, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m)\right)$ olacak şekilde fuzzy noktası tektir.

7) $[\infty]$, $[d]$ fuzzy farklı doğrularını alalım.

$[\infty] \wedge [d] = \left(\infty, \frac{1}{2}\right)$ fuzzy noktası tektir.

8) $[d_1]$, $[d_2]$ fuzzy farklı doğrularını alalım.

$$(x,y)\ \mathrm{I}\ [d_1] \iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d_1)$$
$$(x,y)\ \mathrm{I}\ [d_2] \iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d_2)$$

olur. Projektif geometriden paralel doğruların ∞ da keşiştiğini biliyoruz. O halde $(x,y)=\left(\infty,\frac{1}{2}\right)$ fuzzy noktası tektir.

$F2$ aksiyomu sağlanır.

$F3$) Herhangi üçü fuzzy doğrudaş olmayan dört fuzzy farklı nokta vardır. $A_1=(1,0.4)\,,\ A_2=(2,0.6)\,,\ A_3=(3,0.4)\,,\ A_4=(5,0.8)$ noktalarını alalım.

$A_1=(1,0.4)\,,\ A_2=(2,0.6)\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} m &= \frac{\cot(0.4\pi)-\cot(0.6\pi)}{1-2}=-0.64984 \\ c &= \frac{1\cot(0.6\pi)-2\cot(0.4\pi)}{1-2}=0.97476 \end{aligned}$$

$$[A_1A_2]=[-0.64984,0.97476]$$

bulunur.

$A_1=(1,0.4)\,,\ A_3=(3,0.4)\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} m &= \frac{\cot(0.4\pi)-\cot(0.4\pi)}{1-3}=0 \\ c &= \frac{1\cot(0.4\pi)-3\cot(0.4\pi)}{1-3}=0.32492 \end{aligned}$$

$$[A_1A_3]=[0,0.32492]$$

bulunur.

$A_2=(2,0.6)\,,\ A_3=(3,0.4)\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} m &= \frac{\cot(0.6\pi)-\cot(0.4\pi)}{2-3}=0.64984 \\ c &= \frac{2\,(0.4\pi)-3\cot(0.6\pi)}{2-3}=-1.6246 \end{aligned}$$

$$[A_2A_3]=[0.64984,-1.6246]$$

bulunur.

A_4 ün $[A_1A_2]$ üzerinde olup olmadığını inceleyelim.

$$\begin{aligned} (5,0.8)\overset{?}{\mathrm{I}} &\quad [-0.64984,0.97476] \\ 0.8\overset{?}{=} &\quad \tfrac{1}{\pi}\cot^{-1}(-0.64984\times 5+0.97476) \\ 0.8\neq &\quad 0.86816 \end{aligned}$$

A_4, $[A_1A_2]$ üzerinde değildir.

A_4 ün $[A_1A_3]$ üzerinde olup olmadığını inceleyelim.

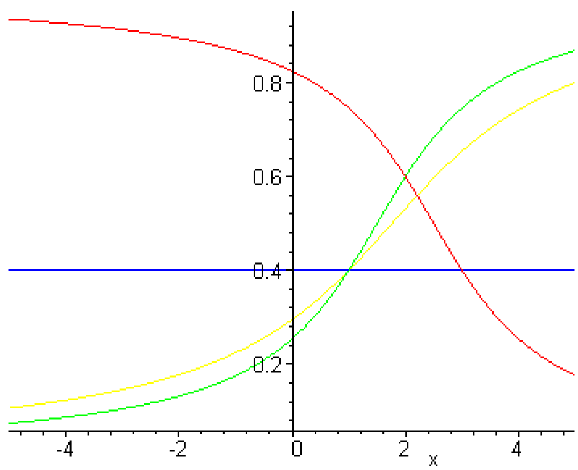
$$\begin{aligned}(5, 0.8) \overset{?}{\mathrm{I}} &\quad [0, 0.32492] \\ 0.8 \overset{?}{=} &\quad \tfrac{1}{\pi}\cot^{-1}(0.32492) \\ 0.8 \neq &\quad 0.39999\end{aligned}$$

A_4, $[A_1A_3]$ üzerinde değildir.

A_4 ün $[A_2A_3]$ üzerinde olup olmadığını inceleyelim.

$$\begin{aligned}(5, 0.8) \overset{?}{\mathrm{I}} &\quad [0.64984, -1.6246] \\ 0.8 \overset{?}{=} &\quad \tfrac{1}{\pi}\cot^{-1}(0.64984 \times 5 - 1.6246) \\ 0.8 \neq &\quad 0.17563\end{aligned}$$

Dolayısıyla A_4, $[A_2A_3]$ üzerinde değildir.



Şekil 2.1

$F3$ aksiyomu sağlanır. Dolayısıyla düzgün doğru modeli fuzzy düzlem projektif geometridir. □

2.1.2 Model M

Tanım 2.1.3

$$\mathcal{S} = \mathbb{R} \cup \{ri : 0 \neq r \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$$

olsun.

Noktalar kümesi:

$$\Pi = \begin{cases} \{(x,\lambda) : x \in \mathbb{R},\ 0 < \lambda < 1\} \\ \cup \left\{ \left(ri, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(r) \right) : 0 \neq r \in \mathbb{R} \right\} \\ \cup \left\{ \left(\infty, \frac{1}{2} \right) \right\} \end{cases}$$

olsun. $\left(ri, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(r) \right)$ *tipindeki noktaları kısaca* (ri), $\left(\infty, \frac{1}{2} \right)$ *tipindeki noktaları ise kısaca* (∞) *ile göstereceğiz.*

Doğrular ise aşağıdaki üç tipte verilsin:

1. Tip Doğrular:

$$[m,c](x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx+c) & , \ m < 0, x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx+c) & , \ m > 0, x < 0 \\ \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2mx+c) & , \ m > 0, x > 0 \\ \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m) & , \ x = mi \\ 0 & , \ diğer\ durumlarda \end{cases}$$

2. Tip Doğrular:

$$[d](x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m) & , \ x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} & , \ x = \infty \\ 0 & , \ diğer\ durumlarda \end{cases}$$

3. Tip Doğrular:

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(r) & , \ 0 \neq r \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} & , \ x = \infty \\ 0 & , \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

olsun.

I: Fuzzy üzerinde bulunma bağıntısı olsun.

(Π, Λ, I) *sistemine **Model M** denir.*

Teorem 2.1.4 *Model M fuzzy projektif düzlemdir.*

İspat: $F1$) İki fuzzy farklı noktadan bir tek fuzzy doğru geçer.

1) (x_1, λ_1) , (x_2, λ_2) fuzzy farklı noktalarını alalım.

$x_1 \neq x_2$ dir. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olsun.

$m = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{x_1 - x_2} < 0$ ise,

$$\begin{aligned}
(x_1, \lambda_1) \ \mathrm{I} \ [m, c] &\iff \lambda_1 = \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(mx_1 + c) \\
(x_2, \lambda_2) \ \mathrm{I} \ [m, c] &\iff \lambda_2 = \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(mx_2 + c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cot(\lambda_1 \pi) &= mx_1 + c \\
\cot(\lambda_2 \pi) &= mx_2 + c
\end{aligned}$$

$$m = \frac{\cot(\lambda_1 \pi) - \cot(\lambda_2 \pi)}{x_1 - x_2}, \ c = \frac{x_1 \cot(\lambda_2 \pi) - x_2 \cot(\lambda_1 \pi)}{x_1 - x_2}$$

bulunur. $[m, c](x) = \left[\frac{\cot(\lambda_1\pi) - \cot(\lambda_2\pi)}{x_1 - x_2}, \frac{x_1 \cot(\lambda_2\pi) - x_2 \cot(\lambda_1\pi)}{x_1 - x_2}\right](x)$ biçiminde bir tek fuzzy doğrusu vardır.

2) (x_1, λ_1) , (x_2, λ_2) fuzzy farklı noktalarını alalım.

$x_1 \neq x_2$ dir. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ olsun.

$m = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{x_1 - x_2} = 0$ olur.

$$\begin{aligned}
(x_1, \lambda) \ \mathrm{I} \ [m, c] &\iff \lambda = \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(mx_1 + c) \\
(x_2, \lambda) \ \mathrm{I} \ [m, c] &\iff \lambda = \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(mx_2 + c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cot(\lambda \pi) &= mx_1 + c \\
\cot(\lambda \pi) &= mx_2 + c
\end{aligned}$$

$$m(x_1 - x_2) = 0$$

bulunur. Bu durumda $m = 0$ ya da $x_1 - x_2 = 0$ dır.

$x_1 - x_2 = 0$ olamaz. Çünkü $x_1 \neq x_2$ kabulümüzle çelişir. O halde,

$$m = 0 \text{ ve } c = \cot(\lambda \pi)$$

bulunur. $[d](x) = [\cot(\lambda\pi)](x)$ biçiminde bir tek fuzzy doğrusu vardır.

3) $(x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2)$ fuzzy farklı noktalarını alalım.

$x_1 \neq x_2$ dir. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olsun.

$m = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{x_1 - x_2} > 0$ ise, üç durum söz konusudur.

1. Durum:

$x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0$ iken;

$$(x_1, \lambda_1)\ \mathrm{I}\ [m, c] \iff \lambda_1 = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx_1 + c)$$
$$(x_2, \lambda_2)\ \mathrm{I}\ [m, c] \iff \lambda_2 = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx_2 + c)$$

$$m = \frac{\cot(\lambda_1\pi) - \cot(\lambda_2\pi)}{x_1 - x_2},\ c = \frac{x_1\cot(\lambda_2\pi) - x_2\cot(\lambda_1\pi)}{x_1 - x_2}$$

bulunur. $[m, c](x) = \left[\frac{\cot(\lambda_1\pi) - \cot(\lambda_2\pi)}{x_1 - x_2}, \frac{x_1\cot(\lambda_2\pi) - x_2\cot(\lambda_1\pi)}{x_1 - x_2}\right]$ biçiminde bir tek fuzzy doğrusu vardır.

2. Durum:

$x_1 > 0,\ x_2 \leq 0$ iken;

$$(x_1, \lambda_1)\ \mathrm{I}\ [2m, c] \iff \lambda_1 = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2mx_1 + c)$$
$$(x_2, \lambda_2)\ \mathrm{I}\ [m, c] \iff \lambda_2 = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx_2 + c)$$

$$m = \frac{\cot(\lambda_1\pi) - \cot(\lambda_2\pi)}{2x_1 - x_2},\ c = \frac{2x_1\cot(\lambda_2\pi) - x_2\cot(\lambda_1\pi)}{2x_1 - x_2}$$

bulunur. $[m, c](x) = \left[\frac{\cot(\lambda_1\pi) - \cot(\lambda_2\pi)}{2x_1 - x_2}, \frac{2x_1\cot(\lambda_2\pi) - x_2\cot(\lambda_1\pi)}{2x_1 - x_2}\right]$ biçiminde bir tek fuzzy doğrusu vardır.

3. Durum:

$x_1 > 0,\ x_2 > 0$ iken;

$$(x_1, \lambda_1)\ \mathrm{I}\ [2m, c] \iff \lambda_1 = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2mx_1 + c)$$
$$(x_2, \lambda_2)\ \mathrm{I}\ [2m, c] \iff \lambda_2 = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2mx_2 + c)$$

$$m = \frac{\cot(\lambda_1\pi) - \cot(\lambda_2\pi)}{2x_1 - 2x_2},\ c = \frac{x_1\cot(\lambda_2\pi) - x_2\cot(\lambda_1\pi)}{x_1 - x_2}$$

bulunur. $[m,c](x)=\left[\frac{\cot(\lambda_1\pi)-\cot(\lambda_2\pi)}{2x_1-2x_2},\frac{x_1\cot(\lambda_2\pi)-x_2\cot(\lambda_1\pi)}{x_1-x_2}\right]$ biçiminde bir tek fuzzy doğrusu vardır.

4) (x_1,λ_1) ve $(mi)=\left(mi,\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m)\right)$ fuzzy farklı noktalarını alalım.

$$\begin{aligned}(x_1,\lambda_1)\ o\ [m,c] &\iff \lambda_1=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx_1+c)\\ (mi)\ o\ [m,c] &\iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot(\lambda_1\pi) &= mx_1+c\\ c &= \cot(\lambda_1\pi)-mx_1\end{aligned}$$

olur. $[m,c](x)=[m,\cot(\lambda_1\pi)-mx_1\ ]$ biçiminde bir tek fuzzy doğrusu vardır.

5) $\left(r_1 i,\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(r_1)\right),\left(r_2 i,\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(r_2)\right)$ fuzzy farklı noktalarını alalım.

Bu noktalardan geçen fuzzy doğrusu $[\infty]$ doğrusudur.

6) $\left(\infty,\frac{1}{2}\right),(x_1,\lambda_1)$ fuzzy farklı noktalarını alalım.

Bu noktalardan geçen $[d](x)=[\cot(\lambda_1\pi)](x)$ biçiminde bir tek fuzzy noktası vardır.

7) $\left(\infty,\frac{1}{2}\right),\left(r_1 i,\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(r_1)\right)$ fuzzy farklı noktaların alalım.

Bu noktalardan geçen fuzzy doğrusu $[\infty]$ doğrusudur.

$F1$ aksiyomu sağlanır.

$F2$) İki farklı fuzzy doğru için, ikisinin de üzerinde bulunan en az bir fuzzy nokta vardır.

1) $[d_1],[d_2]$ doğrularını alalım.

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d_1)\\ y &= \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d_2)\end{aligned}$$

$$d_1\wedge d_2=\left(\infty,\frac{1}{2}\right)$$

olur. Yatay doğrular daima (∞) da kesişir.

2) $[\infty]$ ve $[d]$ doğrularını alalalım.

$$[\infty] \wedge [d] = \left(\infty, \frac{1}{2}\right)$$

olur.

3) $[m,c]$ ve $[\infty]$ doğrularını alalım.

$[\infty]$ doğrusu x in pozitif tarafındadır. Yani bu iki tip doğru kesiştiklerinde $x > 0$ olacaktır.

1. Durum: $m < 0$ (negatif) olsun.

$$[m,c]\,(x) \Longleftrightarrow y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx + c)$$

olduğundan

$$[m,c] \wedge [\infty] = \left(mi, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m)\right)$$

noktası tektir.

2.Durum: $m > 0$ (pozitif) olsun.

$$[m,c]\,(x) \Longleftrightarrow y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2mx + c)$$

olduğundan

$$[m,c] \wedge [\infty] = \left(2mi, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2m)\right)$$

noktası tektir.

4) $[m,c]$ ve $[d]$ doğrularını alalım.

1. Durum: $m < 0$ (negatif) olsun.

$$\begin{aligned}(x,y)\ \mathrm{I}\ [m,c] \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx + c)\\ (x,y)\ \mathrm{I}\ [d] \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot(\pi y) &= mx + c\\ \cot(\pi y) &= d\end{aligned}$$

olur.

$$x = \frac{d-c}{m},\ y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d)$$

bulunur. $(x,y) = \left(\frac{d-c}{m}, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d)\right)$ biçiminde bir tek fuzzy noktası vardır.

2.Durum: $m > 0$ (pozitif) olsun. Bu durumda x in $x \leq 0$ ve $x > 0$ olmak üzere iki durumunu da incelemek gerekir.

$x \leq 0$ **ise;**

$$\begin{aligned} (x,y)\ \mathrm{I}\ [m,c] &\iff y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx+c) \\ (x,y)\ \mathrm{I}\ [d] &\iff y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot(\pi y) &= mx + c \\ \cot(\pi y) &= d \end{aligned}$$

olur.

$$x = \frac{d-c}{m},\ y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d)$$

bulunur. $(x,y) = \left(\frac{d-c}{m}, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d)\right)$ biçiminde bir tek fuzzy noktası vardır.

$x > 0$ **ise;**

$$\begin{aligned} (x,y)\ \mathrm{I}\ [m,c] &\iff y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2mx+c) \\ (x,y)\ \mathrm{I}\ [d] &\iff y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot(\pi y) &= 2mx + c \\ \cot(\pi y) &= d \end{aligned}$$

olur.

$$x = \frac{d-c}{2m},\ y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d)$$

bulunur. $(x,y) = \left(\frac{d-c}{2m}, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(d)\right)$ biçiminde bir tek fuzzy noktası vardır.

5) $[m_1, c_1]$ ve $[m_2, c_2]$ doğrularını alalım.

$m_1 \neq m_2$, $c_1 \neq c_2$ olsun.

1. Durum: $m_1 < 0$, $m_2 < 0$ ise;

$$\begin{aligned}(x,y)\ \mathrm{I}\ [m_1,c_1] &\iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m_1x+c_1)\\(x,y)\ \mathrm{I}\ [m_2,c_2] &\iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m_2x+c_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot(\pi y) &= m_1x+c_1\\\cot(\pi y) &= m_2x+c_2\end{aligned}$$

olur.

$$x=\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2},\ y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{m_1c_2-m_2c_1}{m_1-m_2}\right)$$

bulunur. $(x,y)=\left(\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2},\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{m_1c_2-m_2c_1}{m_1-m_2}\right)\right)$ biçiminde bir tek fuzzy noktası vardır.

2. Durum: $m_1 < 0$, $m_2 > 0$ ise;

$$\begin{aligned}(x,y)\ \mathrm{I}\ [m_1,c_1] &\iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m_1x+c_1)\\(x,y)\ \mathrm{I}\ [m_2,c_2] &\iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2m_2x+c_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot(\pi y) &= m_1x+c_1\\\cot(\pi y) &= 2m_2x+c_2\end{aligned}$$

olur.

$$x=\frac{c_1-c_2}{2m_2-m_1},\ y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{2m_2c_1-m_1c_2}{2m_2-m_1}\right)$$

bulunur. $(x,y)=\left(\frac{c_1-c_2}{2m_2-m_1},\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{2m_2c_1-m_1c_2}{2m_2-m_1}\right)\right)$ biçiminde bir tek fuzzy noktası vardır.

3. Durum: $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ ise;

$$\begin{aligned}(x,y)\ \mathrm{I}\ [m_1,c_1] &\iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2m_1x+c_1)\\(x,y)\ \mathrm{I}\ [m_2,c_2] &\iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2m_2x+c_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot(\pi y) &= 2m_1 x + c_1 \\ \cot(\pi y) &= 2m_2 x + c_2 \end{aligned}$$

olur.

$$x = \frac{c_1 - c_2}{2m_2 - 2m_1},\ y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{m_2 c_1 - m_1 c_2}{m_2 - m_1}\right)$$

bulunur. $(x, y) = \left(\frac{c_1 - c_2}{2m_2 - 2m_1}, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{m_2 c_1 - m_1 c_2}{m_2 - m_1}\right)\right)$ biçiminde bir tek fuzzy noktası vardır.

6) $[m_1, c_1]$ ve $[m_2, c_2]$ doğrularını alalım.

$m_1 = m_2 = 0$, $c_1 \neq c_2$ olsun.

Eğim 0 olunca yatay doğrular olur. Bunlar da projektif geometri gereğince ∞ da kesişir.

$$\begin{aligned} [m_1, c_1] &= [c_1] \\ [m_2, c_2] &= [c_2] \end{aligned}$$

$[c_1] \wedge [c_2] = \left(\infty, \frac{1}{2}\right)$ noktası tektir.

7) $[m_1, c_1]$ ve $[m_2, c_2]$ doğrularını alalım.

$m_1 = m_2 = m \neq 0$, $c_1 \neq c_2$ olsun.

1. Durum: $m > 0$ ise;

$$\begin{aligned} (x, y)\ \mathrm{I}\ [m, c_1] &\iff y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2mx + c_1) \\ (x, y)\ \mathrm{I}\ [m, c_2] &\iff y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2mx + c_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot(\pi y) &= 2mx + c_1 \\ \cot(\pi y) &= 2mx + c_2 \end{aligned}$$

olur.

$$x = 2mi,\ y = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2m)$$

bulunur. $(x,y)=\left(2mi,\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(2m)\right)$ biçiminde bir tek fuzzy noktası vardır.

2. Durum: $m<0$ ise;

$$(x,y)\ \mathrm{I}\ [m,c_1] \iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx+c_1)$$
$$(x,y)\ \mathrm{I}\ [m,c_2] \iff y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(mx+c_2)$$

$$\begin{aligned}\cot(\pi y) &= mx+c_1\\ \cot(\pi y) &= mx+c\end{aligned}$$

olur.

$$x=mi,\ y=\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m)$$

bulunur. $(x,y)=\left(mi,\frac{1}{\pi}\cot^{-1}(m)\right)$ biçiminde bir tek fuzzy noktası vardır.

$F2$ aksiyomu sağlanır.

$F3$) Herhangi üçü fuzzy doğrudaş olmayan dört fuzzy farklı nokta vardır.

$A_1=\left(0,\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right)$

$A_2=\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)\right)$

$A_3=\left(\frac{-1}{4},\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)\right)$

$A_4=\left(1,\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right)$ noktalarını alalım.

$[A_1A_2]\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}m &= \frac{5/8-1/8}{-1/2-0}=-1<0\\ \frac{1}{8} &= -1..0+c\Longrightarrow c=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

$[A_1A_2]=\left[-1,\frac{1}{8}\right]$ doğrusu bulunur.

$[A_1A_3]\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}m &= \frac{7/8-1/8}{-1/4-0}=-3<0\\ \frac{7}{8} &= -3.\left(-\frac{1}{4}\right)+c\Longrightarrow c=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

$[A_1A_3] = \left[-3, \frac{1}{8}\right]$ doğrusu bulunur.

$[A_2A_3] \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} m &= \frac{7/8 - 5/8}{-1/4 - (-1/2)} = 1 > 0 \\ \frac{7}{8} &= 1.\left(-\frac{1}{4}\right) + c \Longrightarrow c = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$[A_2A_3] = \left[1, \frac{9}{8}\right]$ doğrusu bulunur.

A_4 ün $[A_1A_2]$ üzerinde olup olmadığını inceleyelim.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{8} &\stackrel{?}{=} -1.1 + \tfrac{1}{8} \\ \tfrac{1}{8} &\neq -\tfrac{7}{8} \end{aligned}$$

A_4, $[A_1A_2]$ üzerinde değildir.

A_4 ün $[A_1A_3]$ üzerinde olup olmadığını inceleyelim.

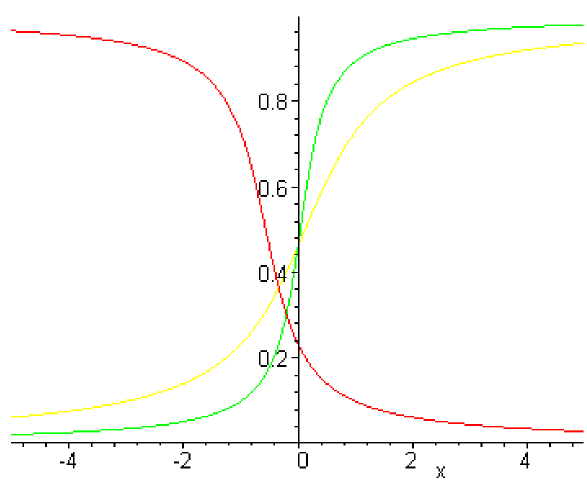
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{8} &\stackrel{?}{=} -3.1 + \tfrac{1}{8} \\ \tfrac{1}{8} &\neq -\tfrac{23}{8} \end{aligned}$$

A_4, $[A_1A_3]$ üzerinde değildir.

A_4 ün $[A_2A_3]$ üzerinde olup olmadığını inceleyelim.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{8} &\stackrel{?}{=} 2.1.1 + \tfrac{9}{8} \\ \tfrac{1}{8} &\neq -\tfrac{25}{8} \end{aligned}$$

A_4, $[A_2A_3]$ üzerinde değildir.



Şekil 2.2

$F3$ aksiyomu sağlanır. Dolayısıyla Model M fuzzy düzlem projektif geometridir.

$\square$

2.1.3 Küresel Geodezik Model

Tanım 2.1.5 *Bu model için* $\mathcal{S} =]0, \pi[$ *alalım.*
Fuzzy noktalar kümesi $\Pi = \{(x, y) : 0 < x \leq \pi, 0 < y < 1\}$ *olsun.*
Fuzzy doğrular kümesi Λ*,* $y = \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(a \cos x + b \sin x)$, $0 < x \leq \pi$, a, $b \in \mathbb{R}$ *fonksiyonunu sağlayan* $[a, b]$ *lerden oluşsun.*
$[a, b]$ *ile farz edilen değerlerin* $[0, 1]$ *aralığında olduğuna ısrar etmeseydik;* $\Pi = \{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ *alabilirdik ve* $[a, b]$ *ile* $y = \cot^{-1}(a \cos x + b \sin x)$, $0 < x \leq \pi$ *fonksiyonunu kastetmiş olurduk. Bunlar* $\mathcal{S}$ *den* $]0, \pi[$ *ye fonksiyonlardır. Bu değiştirilen modele* ***Genişletilmiş Küresel Geodezik Model*** *(ESG) denir.*

Teorem 2.1.6 *Küresel Geodezik Model bir fuzzy düzlem projektif geometridir.*

İspat: Kolaylık olsun diye;
$\Pi = \{(x, y) \mid 0 < x \leq \pi,\ 0 < y < \pi\}$ noktalarını ve
$y = \cot^{-1}(a \cos x + b \sin x)$, $0 < x \leq \pi$, a, $b \in \mathbb{R}$ ile tanımlanan $[a, b]$ doğrularını içeren Λ den oluşan ESG Modelini kullanacağız.

$F1$) İki fuzzy farklı noktadan bir tek fuzzy doğru geçer.
(x_1, y_1), (x_2, y_2) fuzzy farklı noktalarını alalım.
$x_1 \neq x_2$ dir.

$$\left.\begin{array}{l} X \cos x_1 + Y \sin x_1 = \cot y_1 \\ X \cos x_2 + Y \sin x_2 = \cot y_2 \end{array}\right\} \text{ lineer denklemlerini alalım.}$$

Mümkünse katsayılar determinantını sıfıra eşit kabul edelim.

$$\begin{vmatrix} \cos x_1 & \sin x_1 \\ \cos x_2 & \sin x_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned}\sin x_2 \cos x_1 - \sin x_1 \cos x_2 &= 0\\ \sin(x_2 - x_1) &= 0 \text{ bulunur. } (x_2 - x_1 = 0 + n\pi)\end{aligned}$$

Böylece bazı $n \neq 0$ tamsayıları için $x_2 = x_1 + n\pi$ bulunur.

Ama $x_1,\, x_2 \in \,]0, \pi[$ dir ve hiçbir n için $x_2 = x_1 + n\pi$ sağlanmaz. Sonuç olarak katsayılar matrisi ters çevirebilir.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x_1 & \sin x_1 \\ \cos x_2 & \sin x_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \cot y_1 \\ \cot y_2 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde (X, Y) için bir tek (a, b) çözümü vardır.

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos x_1 \sin x_2 - \cos x_2 \sin x_1} \begin{pmatrix} \sin x_2 & -\sin x_1 \\ -\cos x_2 & \cos x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cot y_1 \\ \cot y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(x_2 - x_1)} \cdot \begin{pmatrix} \sin x_2 \cot y_1 - \sin x_1 \cot y_2 \\ -\cos x_2 \cot y_1 + \cos x_1 \cot y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow a = \frac{\sin x_2 \cot y_1 - \sin x_1 \cot y_2}{\sin(x_2 - x_1)}, \; b = \frac{-\cos x_2 \cot y_1 + \cos x_1 \cot y_2}{\sin(x_2 - x_1)}$$

bulunur. $[a, b]$ fonksiyonu (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) fuzzy noktalarından geçen tek fuzzy doğrusudur.

$F1$ aksiyomu sağlanır.

$F2$) Verilen iki farklı fuzzy doğru için, ikisinin de üzerinde bulunan en az bir fuzzy nokta vardır.

$[a_1, b_1] \neq [a_2, b_2]$ iki fuzzy farklı doğrusu olsun.

1. Durum: $b_1 = b_2$ ise,

$$\begin{aligned}\cot^{-1}\left(a_1 \cos \frac{1}{2}\pi + b_1 \sin \frac{1}{2}\pi\right) &= \cot^{-1}\left(a_2 \cos \frac{1}{2}\pi + b_2 \sin \frac{1}{2}\pi\right)\\ &= \cot^{-1}(b_1)\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden $\left(\frac{1}{2}, \cot^{-1}(b_1)\right)$ fuzzy noktası hem $[a_1, b_1]$, hem de $[a_2, b_2]$ üzerinde olan tek noktadır.

2. Durum: $b_1 \neq b_2$ ise,

$$\frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} = \tan x_0$$

olacak şekilde bir tek $x_0 \in]0, \pi[$ vardır. Bu durumda;

$$\cot^{-1}(a_1 \cos x_0 + b_1 \sin x_0) = \cot^{-1}(a_2 \cos x_0 + b_2 \sin x_0) = y_0$$

olur. Böylece Π de (x_0, y_0) fuzzy noktası $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ üzerinde olur. $F2$ aksiyomu sağlanır.

$F3$) Herhangi üçü fuzzy doğrudaş olmayan dört fuzzy farklı nokta vardır. Dört fuzzy farklı nokta

$$O = (0.5, 1.5),\ B_1 = (2, 0.1),\ B_2 = (2.5, 1),\ B_3 = (1.5, 3)\ \ olsun.$$

$(2.5, 0.11003488)$ ve $(1.5, 0.117908862)$ den geçen doğru

$$OB_1 = [-4.725618925, 8.798103702]\ \text{ olur.}$$

$$\left.\begin{array}{r} O = (0.5, 1.5) \\ B_1 = (2, 0.1) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \cot 1.5 = a \cos 0.5 + b \sin 0.5 \\ \cot 0.1 = a \cos 2 + b \sin 2 \end{array} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} a = -4.725618925 \\ b = 8.798103702 \end{array}\right\} [a, b] = [-4.725618925, 8.798103702]\ \text{ bulunur.}$$

$(2, 0.932588225)$ ve $(1.5, 0.987546828)$ den geçen doğru

$$OB_2 = [-0.29186824, 0.682177513]\ \text{ olur.}$$

$(2, 3.02249044)$ ve $(2.5, 3.011638072)$ den geçen doğru

$$OB_3 = [4.080982566, -7.322272194]\ \text{ olur.}$$

$(0.5, 0.056862931)$ ve $(1.5, 0.059274094)$ den geçen doğru

$$B_1B_2 = [11.22365301, 16.0974085]\ \text{ olur.}$$

$(0.5, 3.11043948)$ ve $(2.5, 0.040779785)$ den geçen doğru

$$B_1B_3 = [-34.04205157, -4.618783157] \text{ olur.}$$

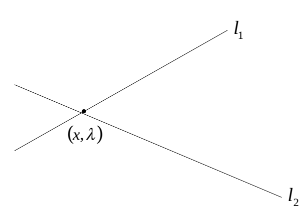
$(0.5, 3.020573955)$ ve $(2, 2.872855059)$ den geçen doğru

$$B_2B_3 = [-5.750545731, -6.625070897] \text{ olur.}$$

Açıkça; O, B_1, B_2, B_3 fuzzy noktalarından herhengi üçü doğrusal değildir. $F3$ aksiyomu sağlanır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. □

Teorem 2.1.7 $\mathcal{F}\boldsymbol{P} = (\Pi, \Lambda, I)$ *fuzzy projektif düzleminde;*
1) İki fuzzy farklı doğru en çok bir fuzzy noktada kesişir.
2) Λ*; herhangi üçü aynı fuzzy noktasından geçmeyen dört fuzzy farklı doğru içerir.*

İspat: 1) $l_1, l_2 \in \Lambda, l_1 \neq l_2$ olsun. $F2$ gereğince Λ de verilen iki fuzzy farklı doğru için ikisininde üzerinde bulunan Π de en bir fuzzy nokta vardır. Dolayısıyla (x, λ) I l_1, (x, λ) I l_2 olacak şekilde bir $(x, \lambda) \in \Pi$ noktası vardır. $(0 < \lambda < 1)$
Yani, $l_1(x) = \lambda$, $l_2(x) = \lambda$ olur.



Şekil 2.3

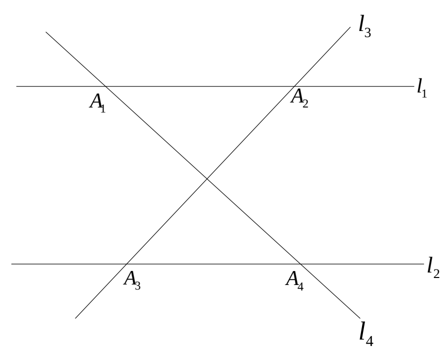
(y, μ) I l_1, (y, μ) I l_2 olacak şekilde bir $(y, \mu) \in \Pi$ noktasının bulunduğunu varsayalım. $(0 < \mu < 1)$

Bu durumda;

$$\begin{aligned}(x,\lambda)\ \mathrm{I}\ l_1 \text{ ve } (y,\mu)\ I\ l_1 \text{ olduğundan } (x,\lambda)\cup(y,\mu) &= l_1 \text{ ve}\\ (x,\lambda)\ \mathrm{I}\ l_2 \text{ ve } (y,\mu)\ I\ l_2 \text{ olduğundan } (x,\lambda)\cup(y,\mu) &= l_2 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Dolayısıyla $(x,\lambda)\cup(y,\mu) = l_1 = l_2$ olur. Bu ise $l_1 \neq l_2$ kabulümüzle çelişir. O halde iki fuzzy farklı doğru en çok bir fuzzy noktasında kesişir.

2) A_1, A_2, A_3, A_4; $F3$ gereğince herhangi üçü Λ nin aynı fuzzy doğrusu üzerinde bulunmayan dört fuzzy farklı nokta olsun.



Şekil 2.4

$$\left.\begin{aligned}A_1A_2 &= l_1\\ A_2A_3 &= l_3\\ A_3A_4 &= l_2\\ A_1A_4 &= l_4\end{aligned}\right\}\text{doğrularının herhangi üçü aynı fuzzy noktasından geçmez.}$$

Yani, herhangi üçü aynı fuzzy noktasından geçmeyen dört fuzzy farklı doğru vardır. □

Kullanım kolaylığı sağlaması açısından aşağıdaki basitleştirmeleri yapacağız.

Tanım 2.1.8 *l, m iki fuzzy farklı doğrusunun kesim noktası, her ikisininde üzerinde olan bir tek fuzzy noktasıdır. Bu nokta $l \cap m$ ile gösterilir.*

Tanım 2.1.9 *A, B iki fuzzy farklı noktasını birleştiren AB doğrusu, her iki noktadan da geçen bir tek fuzzy doğrusudur.*

Tanım 2.1.10 *A_i $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ fuzzy noktalarından ikisi ya da daha fazlası aynı fuzzy doğrusu üzerindeyse, bu noktalara fuzzy doğrudaş denir.*

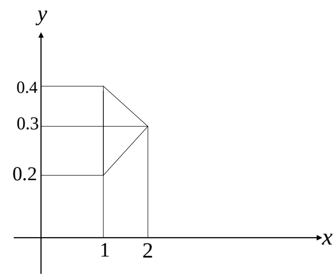
Tanım 2.1.11 *l_i $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ fuzzy doğrularının hepsi aynı fuzzy noktasından geçiyorsa, bu doğrulara fuzzy noktadaş denir.*
$P\ I\ l$ ise $P \in l$ yazılır.

Tanım 2.1.12 *FPPG de bir fuzzy üçgeni;*
A_1, A_2, A_3 üç fuzzy farklı nokta kümesi ve $i \neq k$ için $A_i \in a_k$ ama $A_i \notin a_i$ $(i, k = 1, 2, 3)$ olacak şekilde a_1, a_2, a_3 üç fuzzy doğru kümesinden oluşur. A_i noktalarına fuzzy üçgenin köşeleri, a_i doğrularına fuzzy üçgenin kenarları denir. Fuzzy üçgen $A_1A_2A_3$ ile gösterilir.

2.2 Fuzzy Dezarg Önermesi (FD$_{11}$)

Teorem 2.2.1 *$A_1A_2A_3$ ve $B_1B_2B_3$ iki fuzzy üçgeni verilsin. A_i ve B_i ardışık köşeler, a_i ve b_i ardışık kenarlardır. İki ardışık köşe fuzzy farklı, iki ardışık kenar fuzzy farklı ve ardışık köşeleri birleştiren fuzzy doğruları bir O fuzzy noktasında çakışıyorsa; ardışık kenarlar fuzzy doğrusal ya da fuzzy dikey olan üç fuzzy noktada kesişir.*

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = (1, 0, 2) \\ A_2 = (1, 0, 4) \\ A_3 = (2, 0, 3) \end{array}\right\} \textit{alalım.}$$



Şekil 2.4

Şekildeki üçgen fuzzy üçgeni değildir. Çünkü A_1 ve A_2 fuzzy farklı noktaları değildir. (Farklı fuzzy noktalarının birinci bileşenleri farklı olmalıdır.) Fuzzy farklı noktalarını alırsak fuzzy üçgeni oluşur.

Fuzzy Dezarg Önermesinin Normal Dezarg Önermesinden Farkı

1) Karşılıklı köşelerinin birinci bileşenleri farklı olmalıdır.

2) Karşılıklı kenarlar farklı olmalıdır.

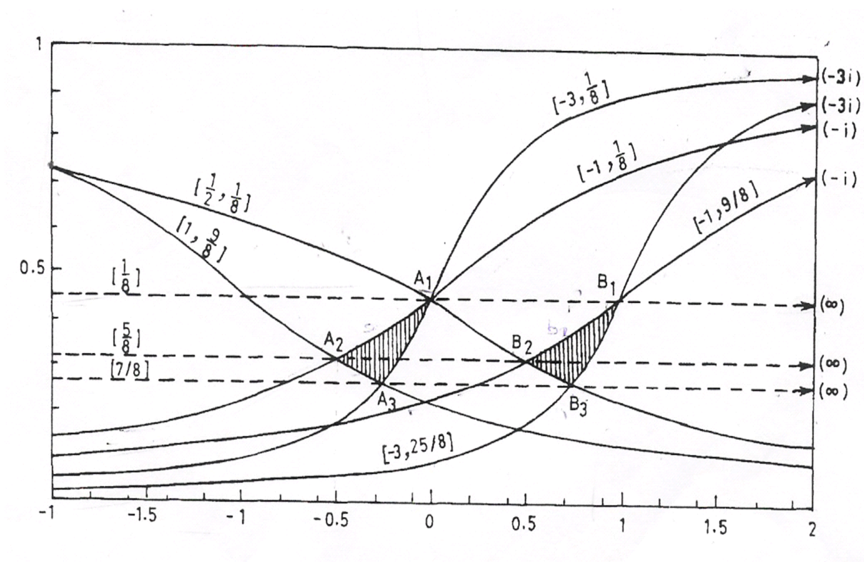
3) Perspektiflik ekseni ya fuzzy doğrudaş ya da fuzzy dikey olmalıdır.

Teorem 2.2.2 *Model M Fuzzy Dezarg Teoremini sağlamaz.*

İspat: Daha önce tanımlanan Model M yi alalım.

Noktaları aşağıdaki gibi olan $A_1A_2A_3$ ve $B_1B_2B_3$ fuzzy üçgenlerini alalım.

$$\begin{array}{ll} A_1 = \left(0, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right) & B_1 = \left(1, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right) \\ A_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)\right) & B_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)\right) \\ A_3 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)\right) & B_3 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)\right) \end{array}$$



Şekil 2.5

Açıkça; $A_1B_1 = \left[\frac{1}{8}\right]$, $A_2B_2 = \left[\frac{5}{8}\right]$, $A_3B_3 = \left[\frac{7}{8}\right]$ olur.

Bu yatay doğrular ∞ da kesiştiği için bu iki üçgen ∞ dan perspektiftir.

Üçgenlerin kenarları şu şekildedir;

$$A_2A_3 = \left[1, \tfrac{9}{8}\right], \quad A_3A_1 = \left[-3, \tfrac{1}{8}\right], \quad A_1A_2 = \left[-1, \tfrac{1}{8}\right]$$
$$B_2B_3 = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{8}\right], \quad B_3B_1 = \left[-3, \tfrac{25}{8}\right], \quad B_1B_2 = \left[-1, \tfrac{9}{8}\right]$$

Açıkça;

$$\begin{aligned} C_1 &= A_2A_3 \cap B_2B_3 = \left(-2, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(-\frac{7}{8}\right)\right) \\ C_2 &= A_3A_1 \cap B_3B_1 = (-3i) \\ C_3 &= A_1A_2 \cap B_1B_2 = (-i) \end{aligned}$$

bulunur.

$C_2C_3 = \omega$ doğrusu C_1 gerçel fuzzy noktasından geçmez. O halde; ∞ da perspektif olan $A_1A_2A_3$ ve $B_1B_2B_3$ fuzzy üçgenlerinin perspektiflik ekseni yoktur. Dolayısıyla Model M Fuzzy Dezagsel değildir. $\square$

Teorem 2.2.3 *Küresel Geodezik Model fuzzy Dezarg önermesini sağlar.*

İspat: Model SG nin genişletilmiş halini inceleyelim.

$$\Pi = \{(x, y) : 0 < x \leq \pi,\ 0 < y < \pi\}$$
$$\Lambda = \{[a, b] : a,\ b \in \mathbb{R}\}$$

$[a, b]$ fonksiyonu için;

$$y = \cot^{-1}(a \cos x + b \sin x),\ 0 < x \leq \pi$$

olsun. Sonuç olarak Π; x in boylam, y nin enlem olduğu birim yarıçaplı küre üzerinde bütün noktaların kümesidir. Yarıçember üzerindeki $x = 0$ noktaları alınmamıştır. Λ kümesi, uzunlamasına büyük çemberler hariç, bu yarıküredeki bütün büyük çemberlerin kümesidir. Aynı boylam üzerindeki fuzzy noktalar fuzzy dikeydir. FPPG de aşağıdaki formülleri uygulayarak dik kartezyen koordinatlara dönüştüreceğiz.

$$\begin{aligned} X &= \sin y . \cos x \\ Y &= \sin y . \sin x \\ Z &= \cos y \end{aligned}$$

Π veΛ nin düzeltilmiş formları şu şekildedir;

$$\begin{aligned} \Pi &= \left\{(X, Y, Z) : -1 \leq X < 1,\ 0 \leq Y \leq 1,\ \ -1 < Z < 1,\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\right\} \\ \Lambda &= \{[a, b] : a,\ b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$[a, b] \implies \left.\begin{array}{c} Z = aX + bY \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \end{array}\right\} \text{biçiminde tanımlanan büyük çember}$$

Aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

a) $(X, Y, Z) \in \Pi$ ise $(-X, -Y, -Z) \in \Pi$ dir.

b) $A,\ B \in \Pi$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ iken $A = \alpha B$ ise $\alpha = 1$ dir.

c) Model ESG deki fuzzy üçgen Π yarı küresi üzerinde bir küresel üçgendir. $A_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $A_2(X_2, Y_2, Z_2)$, $A_3(X_3, Y_3, Z_3)$ bir üçgen formuysa (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3), $\mathbb{R}^3$ lineer uzayındaki vektörler gibi $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsızdır.

d) $A(X_1, Y_1, Z_1)$, $B(X_2, Y_2, Z_2)$, $C(X_3, Y_3, Z_3)$ bir fuzzy doğru üzerindeyse, bazı $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} aX_1 + bY_1 &= Z_1 \\ aX_2 + bY_2 &= Z_2 \\ aX_3 + bY_3 &= Z_3 \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak;

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

bulunur. Bundan dolayı, sıra vektörleri lineer bağımlıdır ve $\alpha A + \beta B + \gamma C = (0, 0, 0)$ olur. ($\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 0 dan farklı skaler)

Uygun olarak; $A = \beta B + \gamma C$ ($\beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$) ise A, B, C noktaları büyük çember üzerindedir.

Bundan dolayı A, B, C ya fuzzy doğrudaş ya da fuzzy dikeydir.

$A_1A_2A_3$ ve $B_1B_2B_3$ Model ESG de ardışık köşeleri fuzzy farklı ve ardışık kenarları fuzzy farklı olan iki üçgen olsunlar.

A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 fuzzy doğruları Q fuzzy noktasında kesişsin ve $C_i = a_i \cap b_i$, $i = 1,\ 2,\ 3$ olsun. C_1, C_2, C_3 ün doğrudaş ya da dikey olduğunu gösterelim.

18 sayının uygun şekilde seçildiği verilen konfigürasyondan

(1) $Q = \alpha A_1 + \beta B_1$

(2) $Q = \gamma A_2 + \delta B_2$

(3) $Q = \sigma A_3 + \rho B_3$

(4) $C_1 = \lambda_1 A_2 + \mu_1 A_3$

(5) $C_1 = \lambda_2 B_2 + \mu_2 B_3$

(6) $C_2 = \theta_1 A_3 + \phi_1 A_1$

(7) $C_2 = \theta_2 B_3 + \phi_2 B_1$

(8) $C_3 = \xi_1 A_1 + \chi_1 A_2$

(9) $C_3 = \xi_2 B_1 + \chi_2 B_2$ bulunur.

$\alpha = 0$ ise $Q = B_1$ buluruz. Sonra;

$$\begin{aligned} C_3 &= A_1A_2 \cap QB_2 = A_1A_2 \cap A_2B_2 = A_2 \\ C_2 &= A_3A_1 \cap B_3Q = A_3A_1 \cap A_3B_3 = A_3 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece C_1, C_2, C_3 noktaları A_2A_3 üzerinde olur.

$\gamma = 0$ ise $Q = B_2$ bulunur ve C_1, C_2, C_3 noktaları A_3A_1 üzerinde olur.

$\sigma = 0$ ise $Q = B_3$ bulunur ve C_1, C_2, C_3 noktaları A_1A_2 üzerinde olur.

$\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\sigma \neq 0$ olduğunu farz edelim.

$\xi_1 \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $\theta_1 \neq 0$ olduğu bulunur.

$\xi_1 = 0$ alınırsa,

$C_3 = A_2 = A_2B_2 \cap B_1B_2 = B_2$ olur. Ancak bu bir çelişkidir.

Benzer olarak $\lambda_1 \neq 0 \neq \theta_1$ olduğu kolayca görülür.

(1) ve (2) den,

$$A_1 = \frac{\gamma}{\alpha}A_2 - \frac{\beta}{\alpha}B_1 + \frac{\delta}{\alpha}B_2 \qquad *$$

olur.

(8) ve (9) dan,

$$A_1 = \frac{-\chi_1}{\xi_1}A_2 + \frac{\xi_2}{\xi_1}B_1 + \frac{\chi_2}{\xi_1}B_2 \qquad **$$

olur. Sağ tarafları eşitlersek;

$$(\alpha\chi_1 + \gamma\xi_1)\, A_2 = (\alpha\xi_2 - \beta\xi_1)\, B_1 + (\alpha\chi_2 - \delta\xi_1)\, B_2$$

elde edilir.

$\alpha\chi_1 + \gamma\xi_1 \neq 0$ ise $A_2 \in B_1B_2$ dir. Bu da $A_2 = C_3$ olduğunu belirtir.

(8) den

$$\begin{aligned} (1-\chi_1)\, A_2 &= \xi_1 A_1 \Longrightarrow A_1 = \frac{1-\chi_1}{\xi_1}A_2 \\ &\Longrightarrow A_1 = A_2 \end{aligned}$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\alpha\chi_1 + \gamma\xi_1 = 0$ elde edilir.

Bu üç durum matris formunda yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} \chi_1 & \xi_1 & 0 \\ \theta_1 & 0 & \phi_1 \\ 0 & \mu_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

α, β, σ sıfırdan farklı reeller olduğundan, katsayılar matrisinin mertebesi 3 ten küçük olmak zorundadır.

Bundan dolayı,

(10) $\chi_1\mu_1\phi_1 + \xi_1\theta_1\lambda_1 = 0$ bulunur.

Bu sonuçlar C_1, C_2, C_3 ün $\mathbb{R}^3$ te lineer bağımlı vektörler olduğunu gösterir.

$p, q, r \in \mathbb{R}$; $pC_1 + qC_2 + rC_3 = (0, 0, 0)$ olsun.

(4), (6) ve (8) den

$$p\lambda_1 A_2 + p\mu_1 A_3 + q\theta_1 A_3 + q\phi_1 A_1 + r\xi_1 A_1 + r\chi_1 A_2 = (0, 0, 0)$$

olur. A_1, A_2, A_3 yapısı bir fuzzy üçgen olduğundan, bu üçgenler lineer bağımsızdır. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} q\phi_1 + r\xi_1 &= 0 \\ p\lambda_1 + r\chi_1 &= 0 \\ p\mu_1 + q\theta_1 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Matris formu;

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi_1 & \xi_1 \\ \lambda_1 & 0 & \chi_1 \\ \mu_1 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dir. Katsayılar determinantı (10) dan,

$$\lambda_1\theta_1\xi_1 + \mu_1\phi_1\chi_1 = 0 \text{ dır.}$$

Böylece (p, q, r) için sıfırdan farklı bir çözüm bulunur. Sonuçta C_1, C_2, C_3 fuzzy noktaları $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımlıdır. C_1, C_2, C_3 ya fuzzy doğrudaş ya da fuzzy dikeydir. □

Not: Model ESG de $(x, y_1), (x, y_2), (x, y_3), x \neq \frac{1}{2}\pi$ fuzzy dikey noktalarsa bazı $\alpha \in \mathbb{R}$ için sırasıyla,

$$(X_1, \alpha X_1, Z_1), \quad (X_2, \alpha X_2, Z_2), \quad (X_3, \alpha X_3, Z_3)$$

biçiminde kartezyen koordinatlar vardır. Açıkça bu üç vektör $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımlıdır. Bir önceki teoremde sadece C_1, C_2, C_3 ün lineer bağımlı olduğu gösterildi. Bu, noktaların fuzzy dikey olduğunu söylemez.

Aşağıdaki örnek Model ESG nin FD_{11} i sağladığını gösteren sayısal bir örnektir. Bu örneğin tek amacı, Model ESG de nümerik (sayısal) hesaplamaların nasıl yapıldığını göstermektir.

Örnek 2.2.4 *Tanım 2.1.3 teki Model ESG yi ele alalım.*

$$\begin{aligned} A_1 &= (1, 0.2033257) \\ A_2 &= (2, 1.203099152) \\ A_3 &= (2, 3.02249044) \\ B_1 &= (2, 0.1) \\ B_2 &= (2.5, 1) \\ B_3 &= (1.5, 3) \\ O &= (0.5, 1.5) \end{aligned}$$

ile verilen $A_1A_2A_3$ ve $B_1B_2B_3$ fuzzy üçgenlerini ve O fuzzy noktasını alalım. $OB_1 = [a, b]$ olsun.

Teorem 2.1.3

$$a = \frac{\sin x_2 \cot y_1 - \sin x_1 \cot y_2}{\sin(x_2 - x_1)}, b = \frac{-\cos x_2 \cot y_1 + \cos x_1 \cot y_2}{\sin(x_2 - x_1)}$$

formüllerini uygularsak

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sin 2 \cot(1.5) - \sin(0.5)\cot(0.1)}{\sin(2-0.5)} = -4.725618925 \\ b &= \frac{-\cos 2 \cot(1.5) + \cos(0.5)\cot(0.1)}{\sin(2-0.5)} = 8.798103702 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece A_1 *den geçen* OB_1 *in denklemi*

$$y = \cot^{-1}(-4.725618925\cos x + 8.798103702\sin x)$$

olur. O, A_1, B_1 *noktaları fuzzy doğrudaştır.*

Benzer olarak A_2 *den geçen* OB_2 *nin denklemi*

$$y = \cot^{-1}(-0.29186824\cos x + 0.682177513\sin x)$$

olur. O, A_2, B_2 *noktaları fuzzy doğrudaştır.*

A_3 *den geçen* OB_3 *nin denklemi* $y = \cot^{-1}(4.080982566\cos x - 7.322272194\sin x)$ *olur.*

O, A_3, B_3 *noktaları fuzzy doğrudaştır.*

Böylece ardışık köşeleri birleştiren fuzzy doğruları O *da kesişir.*

Benzer yolla aşağıdaki fuzzy doğruları bulunur.

$$\begin{aligned} A_1A_2 &\implies y = \cot^{-1}(0.396235471\cos x + 5.50938802\sin x) \\ B_1B_2 &\implies y = \cot^{-1}(11.22365301\cos x + 16.0974084\sin x) \\ A_2A_3 &\implies y = \cot^{-1}(-1.817689507\cos x - 10.02184398\sin x) \\ B_2B_3 &\implies y = \cot^{-1}(-5.750545731\cos x - 6.625070897\sin x) \\ A_3A_1 &\implies y = \cot^{-1}(13.59743669\cos x - 2.966995026\sin x) \\ B_3B_1 &\implies y = \cot^{-1}(-34.04205157\cos x - 4.618783157\sin x) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} C_3 &= A_1A_2 \cap B_1B_2 \\ C_2 &= A_3A_1 \cap B_3B_2 \\ C_1 &= A_2A_3 \cap B_2B_3 \end{aligned}\right\}$$

olsun. $C_3 = (x_0, y_0)$ *alalım.*

$$\begin{aligned} O &= \left[\frac{1}{2}\pi - \tan^{-1}\left(0.396235471\cos x_0 + 5.509398802\sin x_0\right)\right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{2}\pi - \tan^{-1}\left(11.22365301\cos x_0 + 16.0974085\sin x_0\right)\right] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$(10.82741754)\cos x_0 + (10.5880097)\sin x_0 = 0 \ \textit{ve}$$

$$x_0 = 2.345015732$$

bulunur. Bunu A_1A_2 *ya da* B_1B_2 *de yerine koyarsak;*

$$C_3 = (2.345015732, 0.266575015)$$

buluruz. Aynı yöntemle;

$$\begin{aligned} C_2 &= (1.60545511, 2.858410191) \\ C_1 &= (0.858407354, 3.02809228) \end{aligned}$$

bulunur. C_2C_3 *ün denklemi*

$$y = \cot^{-1}\left(-9.075734919\cos x - 3.753134359\sin x\right)$$

olur. C_2C_3, *gerçekten* C_1 *den geçer.*

Teorem 2.2.5 *Fuzzy Dezarg Önermesi* $F1$, $F2$, $F3$ *ten bağımsızdır.*

İspat: Model M ve Model SG birer fuzzy düzlem projektif geometri olduğu halde, Model SG Fuzzy Dezargsel iken Model M Fuzzy Dezargsel olmadığından yani $F1$, $F2$, $F3$ aksiyomlarını sağlayan ama Fuzzy Dezarg Teoremini sağlamayan örnek olduğundan Fuzzy Dezarg önermesi $F1$, $F2$, $F3$ ten bağımsızdır. $\square$

Teorem 2.2.6 ***Fuzzy Küçük Dezarg Önermesi*** (FD_{10})
$A_1A_2A_3$ ve $B_1B_2B_3$ ardışık köşeleri ve ardışık kenarları fuzzy farklı olan iki fuzzy üçgen olsunlar.

$$C_i = a_i \cap b_i \ \ (i = 1,\ 2,\ 3)$$

olsun. Ardışık köşeleri birleştiren doğrular bir O fuzzy noktasında kesişir. $A_1 \in b_1$ kesişmesi ekstra olarak varsa C_1, C_2, C_3 ya fuzzy doğrudaştır ya da fuzzy dikeydir.

Teorem 2.2.7 *FD_{10}, $F1$, $F2$, $F3$ ten bağımsızdır. Yani $F1$, $F2$, $F3$ ten elde edilemez.*

İspat: FFPG nin bir modeli FD_{11} için geçerliyse FD_{10} içinde geçerlidir. FD_{10} un Model SG için geçerli olduğu görülür. Diğer taraftan FD_{11} in Model M için geçerli olmadığını gösteren teorem 2.2.2 yi ele alabiliriz. Bununla beraber örnekte;

$$A_1 = \left(0, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right] = B_2B_3 = b_1$$

alınmıştı. Sonuçta, FD_{10} Model M için geçerli değildir. Bu teoremi ispatlar. □

2.3 Fuzzy Kolinasyon

Tanım 2.3.1 (Π, Λ, I) *bir fuzzy düzlem projektif geometri olsun.* ***Fuzzy kolinasyonu;*** *Λ deki her fuzzy doğrusunun görüntüsünü bir fuzzy doğrusu yapan dönüşüm altında Π yi kendisine eşleyen $1-1$ bir fonksiyondur.*
Açıkça, bir fuzzy kolinasyonu Λ nin kendisine $1-1$ dönüşmesine neden olur. $f\beta$ daki bütün fuzzy kolinasyonların kümesi bileşke altında bir grup oluşturur. Kolinasyon grubu $G(f\beta)$ ile gösterilir. En büyük problem $G(f\beta)$ nin birimden farklı herhangi bir kolinasyon içerip içermediğine karar vermek olacaktır.

φ fuzzy kolinasyonu altında C noktasından geçen her doğru değişmez kalıyorsa, C ye φ nin merkezi denir. Merkezi olan fuzzy kolinasyonuna merkezsel fuzzy kolinasyon denir.

Örnek 2.3.2 *Model ESG yi ele alalım.*

$\Pi = \{(x,y) : 0 < x \leq \pi,\ 0 < y < \pi\}$

$\Lambda = \{[a,b] : a,\ b \in \mathbb{R}\}$

$[a,b]$ fonksiyonu için $y = \cot^{-1}(a\cos x + b\sin x)$ dir.

İlk olarak, $\varkappa : \Pi \longrightarrow \Pi$ eşlemesini alalım.

$\varkappa((x,y)) = (x, \pi - y)$, $0 < x \leq \pi$, $0 < y < \pi$ olsun.

Sonuçta $\varkappa$, Π nin $y = \frac{1}{2}\pi$ yatay yansımasıdır. $\varkappa$ nin bir fuzzy kolinasyon olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $[a,b]$ fuzzy doğrusunu alalım. $D\left(x_0, \frac{1}{2}\pi\right)$, $0 < x_0 \leq \pi$ olacak şekilde vardır ve $y = \cot^{-1}(a\cos x + b\sin x)$ üzerindedir.

$A(x_1, y_1)$, $[a,b]$ üzerinde D den farklı bir nokta olsun. $x_0 \neq x_1$ olur.

$$a\cos x_0 + b\sin x_0 = 0 \qquad (1)$$
$$a\cos x_1 + b\sin x_1 = \cot y_1 \qquad (2)$$

bulunur. Açıkça, $\varkappa(D) = D$ dir. $A' = \varkappa(A) = (x_1, \pi - y_1)$ olsun.

$DA' = [a', b']$ alalım. Küresel geodezik modelden

$$\begin{aligned} a' &= \frac{\sin x_0 \cot y_1}{\sin(x_1 - x_0)} \\ b' &= \frac{-\cos x_0 \cot y_1}{\sin(x_1 - x_0)} \end{aligned}$$

bulunur. a ve b yi (1) ve (2) den çekersek;

$$\begin{aligned} a &= \frac{-\sin x_0 \cot y_1}{\sin(x_1 - x_0)} \\ b &= \frac{\cos x_0 \cot y_1}{\sin(x_1 - x_0)} \end{aligned}$$

buluruz. Böylece $DA' = [-a, -b]$ dir. $A, [a,b]$ üzerinde keyfi bir nokta olduğundan $[a,b]$ nin $\varkappa$ altındaki görüntüsü $[-a,-b]$ olur. Bu $\varkappa$ nin Model

ESG üzerindeki bir fuzzy kolinasyon olduğunu gösterir. Özetlersek;

a) *Sabit noktalar* $\left(x, \frac{1}{2}\pi\right)$, $0 < x \leq \pi$ *dir.*

b) $\varkappa$ *altında* $[a, b] \longrightarrow [-a, -b]$ *olur. Bundan dolayı* $[0, 0]$, $y = \frac{1}{2}\pi$, *tek sabit doğrudur ve sabit noktaların doğrusudur.*

c) $\varkappa$ *nin merkezi yoktur.*

İkinci olarak, $\gamma : \Pi \longrightarrow \Pi$ *eşlemesini alalım.*

$\gamma\left((x, y)\right) = (\pi - x, y)$, $0 < x < \pi$

$\gamma\left((x, y)\right) = (\pi, \pi - y)$, $0 < y < \pi$, $x = \pi$ *olsun.*

Herhangi bir $[a, b]$ *doğrusu alalım.* $E(\frac{1}{2}\pi, y_0) \in [a, b]$ *üzerinde* E *den farklı bir nokta olsun.* $x_1 \neq \frac{1}{2}\pi$ *alalım.*

$$\left.\begin{array}{ll} \cot y_0 = b & (3) \\ a\cos x_1 + b\sin x_1 = \cot y_1 & (4) \end{array}\right\}$$

bulunur. Açıkça E *sabittir.*

$$\begin{aligned} A^{'} = \gamma(A) &= (\pi - x_1, y_1) \quad x_1 \neq \pi \\ &= (\pi, \pi - y_1) \quad x_1 = \pi \end{aligned}$$

olsun.

$EA^{'} = [a^{'}, b^{'}]$ *olsun. Küresel geodezik modelden* $x_1 \neq \frac{1}{2}\pi$ *için,*

$$\begin{aligned} a^{'} &= \frac{\sin x_1 \cot y_0 - \cot y_1}{\cos x_1} \\ b^{'} &= \cot y_0 = b \end{aligned}$$

bulunur. (3) ve (4) ten

$$a = \frac{\cot y_1 - \sin x_1 \cot y_0}{\cos x_1} = -a^{'}$$

bulunur. Böylece $EA^{'} = [-a, b]$ *olur.*

A, $[a, b]$ *üzerinde keyfi bir nokta olduğundan,* $[a, b]$ *nin* γ *altındaki görüntüsü* $[-a, b]$ *olur. Bu* γ *nin Model ESG nin bir fuzzy kolinasyonu olduğunu gösterir. Özetlersek;*

d) *Sabit noktalar* $\left(\frac{1}{2}\pi, y\right), 0 < y < \pi$ *ve* $\left(\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ *dir.*

e) γ *altında* $[a, b] \longrightarrow [-a, b]$ *dir.*

$[0, b]$ *doğruları sabittir ve bu doğrular* $\left(\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ *den geçer.*

f) $\left(\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$, γ *nin merkezidir.*

Üçüncü olarak, bölümlü kolinasyon $\Re$ *yi ele alalım.*

$\Re = \varkappa\gamma = \gamma\varkappa$ *dır.*

$\Re : \Pi \longrightarrow \Pi$

$$\begin{array}{ll} \Re\left((x, y)\right) = (\pi - x, \pi - y) & , \ 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi \\ \Re\left((x, y)\right) = (\pi, y) & , \ 0 < y < \pi \end{array}$$

dir. Aşağıdaki sonuçlar bulunur.

g) *Sabit noktalar* $\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ *ve* $(x, y), 0 < y < \pi$ *dir.*

h) $\Re$ *altında* $[a, b] \longrightarrow [a, -b]$ *dir.* $[a, 0]$ *doğruları sabittir ve bu doğrular* $\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ *noktasından geçer.*

i) $\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$, $\Re$ *nin merkezidir.*

Model ESG nin kolinasyon grubu olan $\{\varphi, \varkappa, \gamma, \Re\}$ *ye* ***Klein 4-grup*** *denir.*

Tanım 2.3.3 Π *de* $x = y$ *ise*$(x, \alpha) \sim (y, \beta)$ *ile tanımlanan dikey* $\sim$ *bağıntısını ele alalım. Bu dikey sınıflar denilen* Π *nin parçalarını meydana getiren denklik bağıntısıdır.* (x, α) *yı içeren dikey sınıfı* $V(x)$ *ile gösterilir ve* x *in* ***dikey sınıfı*** *denir. Fuzzy* A *noktasını içeren dikey sınıf* $V(A)$ *ile gösterilir.*

Örnek 2.3.4 *Model SG nin dikey sınıfları*

$V(x) = \{(x, \lambda) : 0 < \lambda < 1\}, 0 < x \leq \pi$ *ve*

Model SL ve Model M nin dikey sınıfları

$\{(x, \lambda) : 0 < \lambda < 1\}, x \in R$

$$\begin{array}{ll} \{(x, \lambda) : 0 < \lambda < 1\} & , \ x \in \mathbb{R} \\ \left\{\left(r_i, \frac{1}{\pi}\cot^{-1}(r)\right)\right\} & , \ 0 \neq r \in \mathbb{R} \\ \left\{\left(x, \frac{1}{2}\right)\right\} & \end{array}$$

Bir A noktasının ve bir l doğrusunun bir fuzzy kolinasyon altındaki görüntüsü A' ve l' olur.

Teorem 2.3.5 *Fuzzy kolinasyonunun merkezi sabit noktadır.*
İspatı açıktır.

Teorem 2.3.6 *Fuzzy kolinasyonu altında dikey sınıflar dikey sınıflara eşlenir.*

İspat: $V(A)$, A fuzzy noktasını içeren dikey sınıf olsun. $P \neq A$ olacak şekilde $P \in V(A)$ noktasını alalım. Mümkünse, $P' \notin V(A')$ olsun. P' ve A' fuzzy farklı olur. l, $l' = P'A'$ olacak şekilde bir fuzzy doğrusu olsun. $P \in l$ ve $A \in l$ olur. Ama P ve A dikeydir. Buradan $P = A$ bulunur. Çelişki, dolayısıyla $P' \in V(A')$ dır. $V(A)$ nın $V(A')$ ye eşlendiği gösterilir. Diğer taraftan, $Q \in V(A')$ alalım. $P \in \Pi$ iken $P' = Q$ olsun. Mümkünse $P \notin V(A)$ alalım. Buradan P ve A fuzzy farklı olur. Q ve A fuzzy farklı bulunur. Bu bir çelişkidir. $V(A)$ nın $V(A')$ ye eşlendiği ispatlanır. $\square$

Teorem 2.3.7 *C, fuzzy kolinasyonunun merkezi ise, C yi içeren dikey sınıf sabittir.*

İspat: Γ, C yi içeren dikey sınıf ve $\sum = \Gamma'$ olsun. $C' = C$ olduğundan $C \in \sum$ dir. Ama $\sum$ teorem 2.3.2 den dikey sınıftır. Böylece $\sum = \Gamma$ olur. $\square$

Örnek 2.3.8 *Bu örnek, C merkezini içeren Γ dikey sınıfının sabit noktalara ihtiyaç duymadığını gösterir.*
Model SL yi ele alalım.
$0 < a \neq 1$ *için* $\varphi_a : \Pi \longrightarrow \Pi$ *eşlemesini alalım.*
$\varphi_a\left((x, \lambda)\right) = (ax, \lambda_a)\,,\ x \in \mathbb{R},\ 0 < \lambda < 1,$
$\lambda_a = \frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left(a\cot\left(\pi\lambda\right)\right)$ *ve*

$\varphi_a((ri)) = (ri)\,,\ 0 \neq r \in \mathbb{R},$

$\varphi_a((\infty)) = (\infty)$ *olsun.*

φ_a *altında*

$$\begin{array}{rcl} [m,c] & \longrightarrow & [m,ac] \\ [d] & \longrightarrow & [ad] \\ \omega & \longrightarrow & \omega \end{array}$$

olur. Bütün sabit noktalar kümesi

$$\left\{\left(0,\frac{1}{2}\right)\right\} \cup \{(ri) : 0 \neq r \in \mathbb{R}\} \cup \{(\infty)\} \text{ dur.}$$

Sabit fuzzy doğruları $[m,0]$ *ve* $[0]$ *dır. Bu doğrular* φ_a *nın merkezi olan* $C\left(0,\frac{1}{2}\right)$ *den geçer.*

C *yi içeren* Γ *dikey sınıfı* $\{(0,\lambda) : 0 < \lambda < 1\}$ *dir.*

Herhangi $0 < a \neq 1$ *için,*$\left(0,\frac{1}{4}\right) \longrightarrow \left(0,\frac{1}{\pi}\cot^{-1}a\right) \neq \left(0,\frac{1}{4}\right)$ *olur.*

Bu da Γ, Γ *ile eşleşse bile sabit noktalardan oluşmadığını gösterir.*

Teorem 2.3.9 *Sabit noktalardan oluşan farklı iki fuzzy doğrulu bir fuzzy kolinasyonu birim kolinasyondur.*

2.4 Gupta ve Ray Tarafından Verilen Fuzzy Projektif Düzlemin Tanımı Üzerine Yorumlar

L. Kuijken ve H. Van Maldeghem [4] teki çalışmalarında Gupta ve Ray tarafından verilen Fuzzy Projektif Düzlem tanımının tam bir fuzzyleştirme olmadığını gösterdiler. Tanım 2.1.3 te verilen Fuzzy Projektif Düzlem aslında:

1) q>1 olmak üzere fuzzy dikey noktaları olmayan ve her fuzzy doğrusu tam olarak 0 dan farklı q+1 üye derecesine sahip olan q. mertebeden bir projektif düzlem (crisp) olarak görülebilir. Dolayıyla, bu Gupta ve Ray tarafından verilen tanımın (crisp kavramının) tam bir fuzzyleştirme olmadığını gösterir. Çünkü, crisp durumu sıfırdan farklı bütün üye derecelerinin 1 alınmasıdır. Oysa, bir fuzzyleştirme yapılırken sıfırdan farklı bütün üye derecelerinin 1 alınması gerekli değildir.

2) Gupta ve Ray tarafından verilen Fuzzy Projektif Düzlem tanımının bir projektif düzlemin klasik tanımının nasıl fuzzyleştirmesi olduğu tam olarak açık değildir.

3) Fuzzy Projektif Düzlem tanımı [0,1] ararlığının bütün sıralama bağıntılarında kullanılamayacağı ve bu tanımın geliştirilmesi gerektiği gösteriliyor.

4) Bütün sonlu Fuzzy Projektif Düzlemlerin bir crisp projektif düzlemden elde edilebileceği L. Kuijken ve H. Van Maldeghem tarafından [4] te gösteriliyor.

KAYNAKLAR

[1]: Gupta K.C., Ray S.: "Fuzzy Plane Projektive Geometry", Fuzzy Sets and Systems, 54 (1993) 191-206, North-Holland.

[2]: Kaya R.: "Projektif Geometri", Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Yayın No:111, (2005).

[3]: Erkekbaş S.: "Küresel Projektif Düzlem Modelinin İncelinmesi",Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, (1995).

[4]:L. Kuijken, H. Van Maldeghem: "On the definition and some conjectures of fuzzy projektif planes by Gupta and Ray, and a new definition of fuzzy building geometries", Fuzzy Sets and Systems,138 (2003) 667-685.