SERBEST YÜZEN UZAY ROBOTLARININ EKLEMLİ KÜTLE MODELİ KULLANILARAK MODELLENMESİ

SERCAN ERVURAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELEKTRİK – ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

NİSAN 2006

ARTICULATED BODY MODELING
OF
FREE FLOATING SPACE ROBOTS

Sercan Ervural

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Electrical and Electronics Engineering

APRIL 2006

SERBEST YÜZEN UZAY ROBOTLARININ EKLEMLİ KÜTLE MODELİ KULLANILARAK MODELLENMESİ

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Elektrik – Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı
Kontrol ve Kumanda Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Osman PARLAKTUNA

Nisan 2006

Sercan ERVURAL' ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "SERBEST YÜZEN UZAY ROBOTLARININ EKLEMLİ KÜTLE MODELİ KULLANILARAK MODELLENMESİ" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye (Danışman): Doç. Dr. Osman PARLAKTUNA

Üye : Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hakan KORUL

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmada serbest yüzen uzay robotlarının eklemli kütle modeli kullanılarak modellenmesi yapılmıştır. Öncelikle literatürde bulunan üç değişik yöntemden söz edilmiştir. Daha sonra uzaysal kinematik ve dinamik denklemler tanıtılmıştır. Arkasından uzayda çalışacağı varsayılan iki eklemli üç linkli bir robot kol için uzaysal kinematik ve uzaysal dinamik yaklaşımları kullanılarak denklemler türetilmiştir.

ABSTRACT

In this thesis, an articulated body model for a free-floating space robot is introduced. First, three different modeling methods about free floating space robots are explained. Afterwards by spatial algebra, kinematics and dynamics equations of a two-joint three-link free floating space robot are defined..

TEŞEKKÜR

Görüş ve önerileriyle çalışmama yön veren değerli hocalarım Doç. Dr. Osman PARLAKTUNA' ya ve Yrd. Doç. Dr. Hakan KORUL' a ve her zaman yanımda olduklarını bildiğim canım aileme teşekkür ediyorum.

Sercan ERVURAL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET v
ABSTRACT vi
TEŞEKKÜR vii
İÇİNDEKİLER viii
ŞEKİLLER DİZİNİ x

1. GİRİŞ VE AMAÇ 1

2. UZAYSAL KİNEMATİK 4
2.1. Eklemler ve Linkler 5
2.2. Uzay Robotlarının Kinematiği 5
2.2.1. Uzaysal Hız 6
2.3. Çizgi Vektörleri ve Serbest Vektörler 7
2.3.1. Uzaysal Vektörlerin Çizgi Vektörü ve Serbest Vektör Bileşenleri 10
2.3.2. Eklem Eksenlerinin Gösterimi 11
2.3.3. Kuvvetlerin Gösterimi 12
2.4. Uzaysal Vektörler 12
2.4.1. Uzaysal Vektör İşlemleri 13
2.5. Katı Cisim Koordinat Dönüşümleri 14
2.6. Hareketli Koordinat Sistemlerinde Türev Alma 17
2.7. Uzaysal İvme 20

3. UZAYSAL DİNAMİK 23
3.1. Giriş 23
3.2. Uzaysal Katı Cisim Momentumu 23
3.3. Uzaysal Katı Cisim Eylemsizliği 24
3.3.1. Uzaysal Katı Cisim Eylemsizliklerinin Özellikleri 25
3.4. Hareket Denklemleri 27
3.5. Ters Eylemsizlik 28

3.6. Eklemli Kütle Eylemsizlikleri 29
3.6.1. Eklemli Kütle Eylemsizliklerinin Özellikleri 30
3.6.2. Eklemli Kütle Eylemsizliklerinin Hesaplanması 32
3.7. Uzaysal Skalar Çarpım 32
3.8. Uzaysal Transpoze Operatörü 33
3.9. Uzaysal Vektör Analizi 35
3.9.1. Koordinatlar, Tabanlar ve Alt-Uzaylar 35

4. İLERİ DİNAMİK – EKLEMLİ KÜTLE MODELİ 37
4.1. Eklemli Kütle Eylemsizlikleri 37
4.2. Eklemli Kütle Metot Taslağı 37
4.3. Eklemli Kütle Eylemsizliklerinin Hesaplanması 41
4.3.1. Hızların ve Aktif Eklem Kuvvetlerinin Etkileri 46
4.4. Eklemli Kütle Dinamik Algoritması........ 47

SONUÇ ve ÖNERİLER 53

KAYNAKLAR DİZİNİ 54

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

2.1 Katı Bir Cismin Hızı 6
2.2 Bir Çizgi Vektörün Tanımı 8
2.3 Katı Bir Cismin İvmesi 21
2.4 Sabit Açısal Hızlı Bir Nesnenin İvmesi 22
3.1 Katı Bir Cismin Uzaysal Momentumu 23
3.2 Yönsel Görünür Kütleli Eklemli Kütle 31
4.1 Hareketli Tabana Sahip Tek-Eklemli Robot 38
4.2 Hareketli Tabana Sahip İki-Eklemli Robot 39
4.3 Basit Eklemli Kütle 42
4.4 İki Eklemli Kütle 44
4.5 Eklemli Kütle *i* 48

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Gelecekte, robotların uzay çalışmalarında çok önemli görevler üstleneceği düşünülmektedir. Dolayısıyla halihazırda genel olarak büyük önem taşıyan kontrol sistemlerinin özelde uzayda kullanılan robotların kontrolünde önemlerinin artacağı şüphesizdir. Uzay aracı ile aracı yönlendirecek robotun etkileşimi konusunda bazı sorunlar yaşanabilmektedir. Bu sorunların ortadan kaldırılabilmesi için bazı teknikler önerilmektedir. Bu teknikler üç farklı kategoriye ayrılabilirler (Papadopoulos, 1991).

Birinci kategoride, tepki jetleri, uzay aracına etki eden robotun dinamik kuvvetlerini kompanse ederek, uzay aracının pozisyonunu ve yönlenmesini kontrol ederler. Bu durumda, yer-tabanlı robotlar için geliştirilmiş kontrol yöntemleri uzay robotlarının kontrolünde kullanılabilir, fakat robot hareketleri tepki jeti sistemini doyuma götürmesi robotların faydasını sınırlandırır. Tepki jetleri göreceli olarak çok büyük miktarlarda yakıt tüketirler ve sistemin ömrünü sınırlandırırlar. Bu sebeplerden dolayı bu metodun kullanılması dezavantajlıdır.

İkinci kategoride, tepki tekerlekleri ya da jetleri uzay aracının pozisyonunu değil yalnızca yönlenmesini kontrol ederler. Bu sistemlerin kontrolü ilk kategoridekilere göre, daha karmaşıktır (Papadopoulos, 1991). Bu konudaki çalışmalara bir örnek sanal robot metodudur (Vafa, Dubowsky).

Üçüncü kategoride, elektrik enerjisini ya da yakıtı daha az kullanmak için serbest yüzen sistemler önerilmektedir. Bu sistemlerde uzay aracının pozisyon ve yönlenmesi kontrol edilmemekte ve robotun hareketlerine serbestçe tepki vermesine izin verilmektedir. Sisteme dışarıdan bir kuvvet ya da tork etki etmediği ve toplam momentumun korunduğu varsayılmaktadır.

Serbest yüzen robotlar sanal robot modeli kullanılarak modellenebilir. Uzay aracının kinematik veya dinamiğini yok sayan bu tür sistemlerin algoritmalarında sorunlar tespit edilmiştir. Bu sorunlar yer sınırlı robotlarda bulunmayan dinamik tekilliklerden kaynaklanmaktadır (Papadopoulos, 1991).

Bu çalışmada serbest yüzen robotların kontrolü üzerinde çalışılacağından üçüncü kategori üzerinde daha ayrıntılı olarak durulacaktır.

Serbest yüzen uzay robotlarının kontrolü, bilinmeyen eylemsizlik özelliklerine sahip nesnelerin kontrolünü gerektirmektedir. Örneğin, robotun tutucusu ile kavradığı cismi hangi yönden kavradığı ve o cismin kütlesi bilinmeyebilir. Sonuç olarak tutucunun ve yükün birleşik eylemsizlik parametreleri birbirlerinden ayrı olarak tanımlanamaz. Bu sorun, uzay robotları için daha fazla uyarlamalı kontrol strateji araştırmalarının yapılmasına sebep olmaktadır. Kolaylık olması açısından uzay aracı robotlara taban sağlayan manevra kabiliyeti olan katı bir cisim ile temsil edilir. Robot ise, dönüşsel veya doğrusal eklemlerle birbirine bağlanmış katı elemanlardan oluşur. Bu eklemler yüksek torklu elektrik motorları tarafından hareket ettirilir. Uzay tabanlı sistemlerin ilginç bir karakteristiği de uzay aracı ve robot arasında dinamik bir bağlantının olmasıdır. Uzay aracı robotun hareketlerine bağlı olarak hareket etmektedir.

Lagrange denklemlerine dayanarak, hareket kontrol problemini formüle eden özel sonuçlar elde edilmiştir (Wee, Walker, McClamroch, 1997). Eylemsizlik parametreleri hakkında kesin bilgiye sahip olunan sistemlerin hareket kontrol kuralları yer tabanlı robotlarla aynı şekilde oluşturulabilir.

Buna karşın, eylemsizlik parametreleri ile ilgili kesin bilgi bulunmadığı durumlarda uyarlamalı kontrol stratejileri geliştirilmelidir. Tabanın yönelme kontrolü için kullanılan tepki tekerlekli robot sistemleri için, sistemin eylemsizlik parametreleri kullanılarak elde edilen dinamik model kullanılabilir. Uzay robotlarının uyarlamalı kontrolü, bu yaklaşım kullanarak eklem uzay kontrolüne başarılı bir şekilde uygulanabilir (Wee, Walker, McClamroch, 1997). Eylemsizlik kontrolüne bu sonucun doğrudan uzantısı mümkün değildir. Çünkü, eklem uzayından eylemsizlik uzayına geçiş denklemleri, kinematik ve eylemsizlik parametrelerinin bir fonksiyonu olan dinamik Jacobian matrisinin tersini gerektirmektedir. Sonuç olarak, önceki araştırmacılar tarafından kullanılan eylemsizlik uzay modeli eylemsizlik parametreleri cinsinden doğrusal olarak ifade edilemez.

Bu çalışmada, eklemli kütle modeli kullanılarak serbest yüzen uzay robotlarının dinamik modelinin türetilmesi gerçeklenmiştir. Bölüm 2'de uzaysal kinematik, bölüm 3 'te ise uzaysal dinamik konuları açıklanmıştır. Dördüncü bölümde ileri dinamik ve eklemli kütle modeli anlatılarak iki eklemli ve üç linkli bir serbest yüzen uzay robotunun modellenmesi yapılmıştır. Son bölüm ise sonuç ve öneriler kısmıdır.

2. UZAYSAL KİNEMATİK

Robot kolları, harekete geçirici mekanizmalar ile sürülen döner ya da prizmatik eklemlerle seri olarak bağlanmış, birkaç katı nesnenin, oluşturduğu yapılardır. Robot teknolojisi, ismini Çek oyun yazarı Karel Capek' in , "Rossum'un Evrensel Robotları (1921)" oyununa borçludur[1]. Yazar, angarya, zorunlu iş anlamındaki "robata" kelimesi ile işçi anlamına gelen "robotnik" kelimelerini birleştirerek, "Robotic" kelimesini türetmiştir. Bir robot sınırlı da olsa dış dünyadan bazı algılar yapabilmelidir. Bu algılamalar, kimyasal, konum, renk, ışık, şekil gibi geniş bir yelpazede yer alır. Daha sonra elde ettiği bu verileri, otonom olarak yorumlayabilmeli, algıya ne gibi tepkide bulunacağına karar vermelidir. Son olarak da verdiği bu kararını uygulamaya koyabilmelidir. Kısaca robot üç ana kısımdan oluşur[2];

1. Çevre hakkında gerçek-zamanlı bilgi elde etmek için kullanılan alıcılar,
2. Karar vermeyi ve kontrolü sağlayan elektronik beyin,
3. Verilen kararların uygulamasını sağlayan eyleyiciler ve hareket sistemleri

Yer tabanlı robotlarda, sabit bir koordinat sistemine göre pozisyon ve yönlenme yapılabilir, bununla birlikte uzay robotlarının bir ucu, tabanı oluşturan serbest hareketli uzay aracına bağlı iken, diğer ucu serbesttir. Genellikle, bu serbest uca, nesneleri taşımak ya da çeşitli montaj görevlerini gerçekleştirmek üzere, bir alet monte edilir. Eklemlerde gerçekleştirilen hareket, linklerin hareketleri ile sonuçlanır. Robotun istenen görevleri gerçekleştirebilmesi için, uç noktasının pozisyon ve yönlenmesinin bütün eklem hareketleri cinsinden tanımlanabilmesi gerekmektedir. Bu bölümde öncelikle, eklem ve link kavramları açıklanmaya çalışılacaktır. Daha sonra uzay kinematiği üzerinde durulmaya çalışılacaktır.

---

[1] http://robot.metu.edu.tr/dosya/robot_nedir.pdf (19.03.2006) - Odtü Robot Topluluğu
[2] http://robot.metu.edu.tr/dosya/robot_nedir.pdf (19.03.2006) - Odtü Robot Topluluğu

2.1. Eklemler ve Linkler

Eklemler, robot kol sisteminde hareketi sağlayan kısımlardır. Genellikle, robotlarda döner ve prizmatik olmak üzere iki çeşit eklem bulunmaktadır. İnsan kollarının aksine, robotlardaki eklemler, kolun mekaniği, kinematiği ve kontrolünü kolaylaştırmak üzere bir serbestlik derecesine sahiptir. Döner eklemler, bir dönme serbestlik derecesi sağlarken, prizmatik eklemler bir yönlü yer değiştirme serbestlik derecesi sağlamaktadır. Bu çalışmada, sadece döner eklemli uzay robotları incelenecektir.

Linkler, iki eklemi bağlayan katı mekanik nesnelerdir (Özkan, 2000). Bir linkin asıl amacı, uçlarındaki eklemler arasında sabit bir ilişkiyi korumaktır. Linklerin uzunlukları, robot kolunun çalışma uzayının geniş olmasında rol oynar. Robot kollarında sonuncu link bir ucundan bir önceki linke bağlıyken diğer ucunda eklem bulunmamaktadır. Bu uç noktada, robotun gerçekleştireceği göreve uygun alet bulunur. Örneğin, bu lehim yapacak bir robot için, havya olabilir.

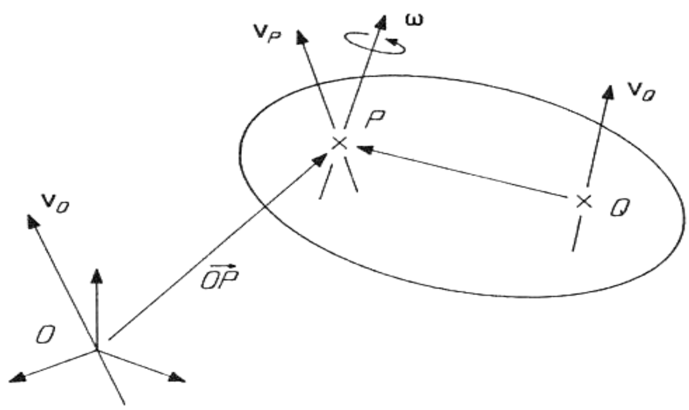
2.2. Uzay Robotlarının Kinematiği

Bir uzaysal vektör 6 boyutludur ve katı cisim dinamiklerinde yer alan fiziksel niceliklerin bileşik doğrusal ve açısal bileşenlerini göstermek için kullanılır (Featherstone, 1987). Uzaysal vektörlerin kullanışlılığı katı cisimlerin analizlerini basite indirgeme güçlerinden ileri gelmektedir. Tek bir uzaysal vektör, başka türlü en az iki tane 3 boyutlu bir vektör ile gösterilebilecek bilgiyi tek başına barındırır. Sonuç olarak katı cisim sistemleri daha az eşitlikle tanımlanabilir ve bu eşitlikler genellikle 3 boyutlu benzerlerinden daha kısadır.

Uzaysal cebirin tam olarak anlaşılması için, doğrusal ve açısal hız gibi değişik fiziksel niceliklerin tek bir varlığın bileşenleri gibi birleştirilebileceğinin kabul edilmesi gereklidir.

2.2.1. Uzaysal Hız

Öncelikle katı cismin hızının uzaysal vektör olarak nasıl ifade edildiğine bakılmasında yarar vardır. Bir katı cisim 6 serbestlik derecesine sahiptir; 3 tanesi prizmatik ve 3 tanesi de döneldir. Bu şekilde katı bir cismin pozisyonu, yer değiştirmesi veya hızı 6 tane sayıyla tanımlanabilir. Geleneksel olarak, katı bir cismin hızı doğrusal ve açısal hız vektörleriyle tanımlanır. Cevaplanması gereken soru, bu vektörlerin uzaysal forma nasıl uyarlanacağıdır.



Şekil 2.1: Katı Bir Cismin Hızı

Katı bir cismin anlık hızı, katı cisim içindeki bir P noktasının v_p ile gösterilen doğrusal hızı ve ω ile gösterilen açısal hızı ile tanımlanabilir. ω cismin tüm noktalarında aynıdır ve seçilen P noktasından bağımsızdır, buna karşın v_p sadece seçilen P noktası için geçerlidir. Katı cismin içindeki diğer bir nokta olan Q'nun anlık hızı olan v_Q , ω ve v_p cinsinden ifade edilebilir.

$$v_Q = v_p + \overrightarrow{QP} \times \omega \quad (2.1)$$

Katı cismin anlık hızı belirlenmiş P noktasındaki vektör çiftleriyle (ω, v_p) ile tanımlanır. Cismin P noktasından geçen eksenin etrafında ω açısal hızıyla ve aynı anda v_p doğrusal hızıyla hareket ettiği düşünülebilir.

P noktasının seçimi keyfidir ve bu noktanın katı cisimle aynı harekete sahip olmak koşuluyla, cismin üzerinde olma zorunluluğu yoktur. Zaten aynı noktayı cisme bağlı olarak seçmek zorunluluğu da yoktur. O halde, katı cisimle birlikte hareket eden ama katı cisme göre başlangıç noktası anlık rastlantısal olan ve katı cismin hızını (ω, v_o) çifti ile temsil eden bir nokta seçilebilir. v_o, noktanın başlangıç noktasındaki hızıdır ve

$$v_o = v_p + \overrightarrow{OP} \times \omega \qquad (2.2)$$

ile tanımlanır.

Cismin, başlangıç noktasından geçen eksenin etrafında dönerken aynı zamanda v_o doğrusal hızıyla ötelendiği düşünülebilir. Bu durumda (ω, v_o) çifti katı cismin uzaysal hızını tanımlar.

Uzaysal vektör niceliklerini, 6 elemanlı sütun vektörüyle gösterebiliriz. Uzaysal gösterimde $\hat{v}$ katı cismin hızını gösterir.

$$\hat{v} = \left[w_x w_y w_z v_{ox} v_{oy} v_{oz} \right]^T \qquad (2.3)$$

Bu ifade genelde

$$\hat{v} = \left[w^T v_o^{\,T} \right]^T \qquad (2.4)$$

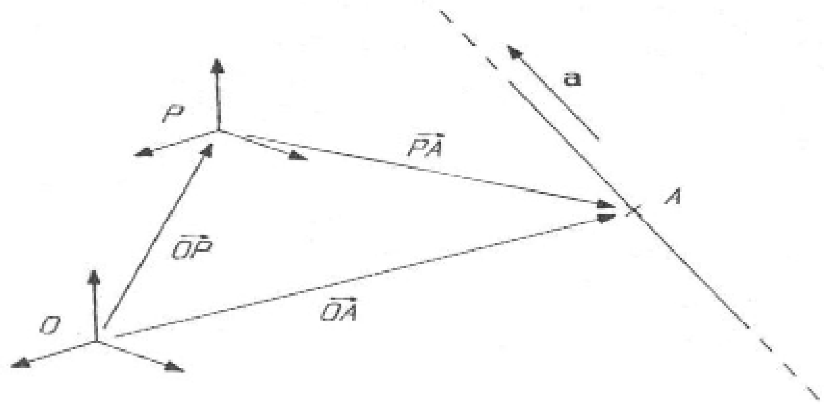
şeklinde kısaltılmış olarak gösterilir.

2.3. Çizgi Vektörleri ve Serbest Vektörler

Sıradan bir 3 boyutlu vektörün büyüklüğü ve yönü vardır fakat bir vektör temsil ettiği matematiksel ya da fiziksel varlığın yapısına uygun olarak pozisyon özelliklerini de barındırabilir. Özel olarak, katı cisim dinamiğinde iki vektör bulunur: çizgi vektörleri ve serbest vektörler.

Bir çizgi vektörünün büyüklüğü, yönü ve belirli bir hattı vardır. Çizgi vektörleri açısal hız gibi nicelikleri temsil etmekte kullanılırlar. Açısal hızı temsil edebilmek için, belirli bir dönüş ekseninin olması ve belirli bir hattının herhangi bir noktasında katı cisme etki eden ve hat hareketi oluşturan kuvvetlerin bulunması gereklidir.

Bir serbest vektör ise sadece büyüklüğe ve yöne sahiptir. Bu vektörler doğrusal hız gibi belirli bir hattı veya ekseni olmayan nicelikler için kullanılır.



Şekil 2.2: Bir Çizgi Vektörünün Tanımı

Bir çizgi vektörünü şu şekilde göstermek mümkündür. **a** vektörünün hareket hattının şekil 2.2 de gösterildiği gibi bir A noktasından geçtiğini düşünelim. Hattın yönü çizgi vektörünün yönüyle aynı olduğundan, vektörün büyüklüğü ve hareket hattı vardır diyebiliriz. Hattın büyüklüğü **a**'nın büyüklüğüdür ve hat hareketi aşağıdaki eşitlikle gösterilebilir.

$$(r-\overrightarrow{OA})\times \mathrm{a}=0 \qquad (2.5)$$

Bu eşitlikteki **r,** hat üzerindeki herhangi bir noktanın pozisyonudur. Bu eşitlik aşağıdaki şekilde de gösterilebilir.

$$r \times a = a_O \qquad (2.6)$$

Bu eşitlikte $a_O = \overrightarrow{OA} \times a$ olarak bulunur. **a** ve a_O hattın *Plücker vektörleri* olarak bilinirler ve hattı tam olarak belirlerler. **a** sonuç vektörü, a_O ise moment vektörü olarak adlandırılırlar. 6 tane rakam açıkça belirtilmesine rağmen, **a .** a_O = 0 olduğu için sadece 5 tanesi bağımsızdır; ve vektörler sadece hattı temsil ederlerse, λ**a** ve λ a_O **a** ve a_O aynı çizgi vektörünü olmasa bile aynı hattı temsil ettiği için bu durumda rakamlardan bir tanesi rasgele seçilmiştir.

a_O, orijinin seçimine bağlıdır. orijin O noktasından P noktasına alınırsa, bu durumda yeni Plücker vektörleri, $a_P = \overrightarrow{PA} \times a$ olduğu durumda, **a** ve a_P olacaktır.

Bu durumda, uzaysal hız için öteleme formülü ile aynı olan aşağıdaki eşitliği elde etmiş oluruz.

$$a_O = a_P + \overrightarrow{OP} \times a \qquad (2.7)$$

Uzaysal vektör ile çizgi vektörü arasındaki tek fark $\left[w^T v_o^{\ T}\right]^T$ eşitliğindeki w . v_o çarpımının sıfıra eşit olması zorunluluğunun olmamasıdır. Bir çizgi vektörü $\widehat{a} = [a^T a_O^{\ T}]^T$ şeklindeki bir uzaysal vektör gibi ifade edilebilir. **a** . a_O = 0 eşitliğini sağlayan herhangi bir uzaysal vektör aslında bir çizgi vektörüdür.

Büyüklüğü ve yönü **b** vektörü ile gösterilebilen bir serbest vektörün, **b** vektörü ile temsil edilmesi yeterlidir. Serbest vektörlerin $\widehat{b} = [0^T b^T]^T$ formunda gösterilmesiyle, çizgi vektörleri ile aynı cebirsel temelde ifade edilebilmesi mümkündür. Ancak bu ifadedeki niceliklerin $a_O = a_P + \overrightarrow{OP} \times a$ denklemindeki öteleme formülüne uyması gereklidir ve orijinin seçiminden bağımsızdır.

2.3.1. Uzaysal Vektörlerin Çizgi Vektörü ve Serbest Vektör Bileşenleri

Genel bir uzaysal vektör, bir çizgi vektörü ile bir serbest vektörün toplamından oluşur. Uzaysal bir vektörü, bir çizgi vektörü ile bir serbest vektörün toplamından elde etmenin sayısız yolu vardır ama bir çizgi vektörünün belirlenmiş bir noktadan geçmesinin zorunlu hale getirilmesi durumunda, uzaysal vektörün çizgi vektörü ve serbest vektör bileşenleri benzersiz bir şekilde belirlenebilir. Eğer çizgi vektörünün orijinden geçmesi zorunlu hale getirilirse, çizgi ve serbest vektör bileşenleri sırasıyla aşağıdaki gibi olur:

$\hat{a} = [a^T a_O{}^T]^T$ → uzaysal vektör

$[a^T 0^T]^T$ → çizgi vektörü , $[0^T a_O{}^T]^T$ → serbest vektör

$\hat{a} = [a^T a_O{}^T]^T$ şeklindeki bir uzaysal vektörü, bir çizgi vektörü ve paralel bir serbest vektörünün toplamı olarak ifade edebildiğimiz takdirde bu uzaysal vektör bir vida vektörünün eşitidir.

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ a'_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho a \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

$$\left(a'_O = a_O - \rho a \text{ ve } \rho = \frac{a.a_O}{a.a} \right)$$

Bu şekildeki bir nicelik, vida vektörü olarak bilinir ki vidayı bir eksen etrafında döndürür ve o eksene paralel bir şekilde öteler. $[a^T a'_O{}^T]^T$ vektörünün hareket çizgisi vida ekseni olarak adlandırılır ve ρ parametresi yalpalama olarak adlandırılır. Vida ekseni ve yalpalama parametresi değişmeyen nicelikleridir.

2.3.2. Eklem Eksenlerinin Gösterimi

Bir eklem için gerekli özellik, bağladığı iki cismin arasında ilişkili bir hareket derecesine izin vermesidir. Bir serbestlik derecesinin olduğu durumlarda, bağlanmış iki cismin birbirleriyle göreceli pozisyonu, eklem değişkeni denen bir skaların fonksiyonudur ve iki cismin göreceli (relative) hızı, eklem değişkeninin türevi ile ifade edilebilir. Eklem ekseni eklem tarafından izin verilen hareketin yönünü ve yapısını tanımlayan uzaysal bir vektördür. Bağlanmış iki cismin göreceli hızını elde etmek için eklem eksenini ve eklem hızını çarpmak gereklidir.

Döner bir eklem her iki cisimdeki sabit bir eksen etrafında dönüşü sağlar. Döner bir eklem, eksenin pozisyonunu ve hareketin dönüşsel yapısını tanımlayan bir birim çizgi vektörü ile gösterilebilir (açısal hızın bir çizgi vektör olması). Bir çizgi vektörünün, birim eklem hızının iki cisim arasındaki göreceli birim açısal hıza karşılık gelmesi için, birim büyüklüğe sahip olması gereklidir.

Prizmatik eklemler, belirli bir yönde iki cisim arasındaki ötelenmeye izin verirler ve sadece hareketin izin verilen yönünde tanımlanırlar; bu yüzden eklem ekseninin, bir birim serbest vektörü ile temsil edilmesi uygundur.

Bir vida eklemi, belirli bir eksen etrafındaki dönüşü ve eksen boyunca olan ötelenmeyi birleştirir. Bu yüzden, bir çizgi vektörünün ve paralel bir serbest vektörün toplamı şeklinde ifade edilebilir. Vidanın yalpalanması çizgi ve serbest vektörün büyüklüğünün oranlarını belirler. Bir birim vida ekseni birim çizgi vektörüne sahip olması ile tanımlanır.

Eklem ekseni uzaysal bir vektör olarak tanımlanırsa, eklem tarafından izin verilen hareketin tipi önemsiz hale gelir. Her değişik tipteki eklem için ayrı denklemlerle uğraşmak zorunluluğu ortadan kalkar.

2.3.3. Kuvvetlerin Gösterimi

Katı bir cisme etki eden bir kuvvetin büyüklüğü ve hareket çizgisi vardır. bu yüzden bir çizgi vektörü ile temsil edilebilir. Büyüklüğü ve yönü olan, P noktasından geçen bir çizgi boyunca etki eden bir **f** kuvveti

$$\widehat{f} = [\, f^T \, (\overrightarrow{OP} \times f)^T \,]^T \qquad (2.9)$$

ile gösterilir. Moment vektörü bir çiftin fiziksel yönlerine sahiptir ve bir çiftin eklenmesiyle, bir kuvvetin hareket çizgisinin ötelenmesine ilişkin kurallara karşılık gelen öteleyen çizgi vektörlerininkiyle aynıdır. Saf bir çift sadece büyüklüğe ve yöne sahiptir ve bu yüzden bir serbest vektör ile temsil edilebilir. Genel bir uzaysal kuvvet saf bir kuvvetin ve bir çiftin toplamından oluşur ve orijine etki eden bir kuvvete ve bir çifte ayrıştırılabilir. Eğer bir cisme bir dizi kuvvet etki ediyorsa, bunların bileşkesi tek bir uzaysal kuvvettir.

2.4. Uzaysal Vektörler

Bir uzaysal vektör gerçek rakamlar kümesinde tanımlı 6 boyutlu vektör uzayının bir üyesidir. Uzay vektörleriyle 3 boyutlu Öklit uzayının vektörleri arasındaki uygunluğu oluşturmak için, uzaysal vektörler çizgi vektörleri ve serbest vektörler tarafından tanımlanırlar. Açık, net uygunluğu elde etmek için, 3 boyutlu uzaya bir Kartezyen koordinat sistemi yerleştirilir ve uzaysal vektör uzayında standart bir taban tanımlanır. $\{\widehat{e_i}\}$ ile gösterilen bu taban, $\widehat{e_1}....\widehat{e_6}$ ile gösterilen 6 vektörden oluşur. $\widehat{e_1}..\widehat{e_3}$ vektörleri Kartezyen koordinat sistemindeki x,y,z eksenlerinin birim çizgi vektörleri ve $\widehat{e_4}..\widehat{e_6}$ vektörleri ise x,y ve z eksenlerine paralel birim serbest vektörleridir. 3 boyutlu uzayda, her Kartezyen koordinat sistemi için benzeri olmayan standart bir taban vardır.Genel bir uzaysal vektör $\widehat{a}$, $\widehat{e_1}....\widehat{e_6}$ vektörleri cinsinden ifade edilebilir.

$$\widehat{a} = \sum_{i=1}^{6} a_i \widehat{e_i} \qquad (2.10)$$

Bu denklemdeki skalar a_i'ler $\widehat{a}$ vektörünün $\{\widehat{e_i}\}$ tabanındaki koordinatlarıdır. $\widehat{a}$, $\{\widehat{e_i}\}$'de $[a_1....a_6]^T$ şeklinde koordinatları olan 6×1 lik bir matris ile temsil edilebilir. Şu ana kadar üzerinde durulan tüm uzaysal vektörler, standart bir tabandaki koordinatları ile ifade edilmiştir.

Uzaysal vektörün kendisi ile matris gösteriminin birbirine karışmasını önlemek amacıyla, matris gösterimi aşağıdaki gibi uzatma işareti ($\sim$) kullanılarak yapılacaktır.

$$\tilde{\widehat{a}} = [a_1 ... a_6]^T$$

$\widehat{a}$, ilkel bir varlıktır fakat $\tilde{\widehat{a}}$, $\widehat{a}$'nın özel bir koordinat sistemindeki gösterim şeklidir. $\widehat{a}+\widehat{b}$ herhangi bir koordinat sisteminden bağımsızdır. $\tilde{\widehat{a}}+\tilde{\widehat{b}}$, sadece $\widehat{a}$ ve $\widehat{b}$ ile aynı koordinat sisteminde gösterildiklerinde anlam kazanırlar. Bundan sonra çoğu zaman, gösterimdeki ayrım göz ardı edilecek ve $\widehat{a}$ hem vektör hem de matris gösteriminde kullanılacaktır.

2.4.1 Uzaysal Vektör İşlemleri

Uzaysal nicelikleri içeren ifadelerin fiziksel anlamlarının olabilmesi için, matematiksel işlemlerinin de açıklanması gereklidir. Matematiksel işlemin açıklaması, işlemin ne olduğuna ve o işlemin operantlarının ne olduğuna bağlıdır. Buna göre;

- Toplama işlemi, aynı cisme etki eden ve toplam kuvvetin bileşke kuvvet olduğu uzaysal kuvvetler için tanımlıdır.
- Toplama işlemi, A'nın B'ye göre ve B'nin C'ye göre ve toplamda A'nın C'ye göre hızının temsil edildiği uzaysal hızlar için tanımlıdır.

- Bir eklem eksenini temsil eden bir uzaysal vektörün bir eklem hızını temsil eden bir skalar ile çarpımı, eklemle bağlanmış olan iki linkin göreceli hızlarını temsil eden uzaysal vektörü verir.

2.5. Katı Cisim Koordinat Dönüşümleri

3 boyutlu Öklit uzayındaki katı cisim dönüşümlerine karşılık gelen uzaysal vektör dönüşümlerini inceleyelim. Bir katı cisim dönüşümü veya Öklit yer değiştirmesi, sabit iki nokta arasındaki mesafeyi belirler. Katı bir cismin dönüşümü 3 boyutta her biri 3 serbestlik derecesine sahip dönüş ve ötelenmeden oluşur. Bir Kartezyen koordinat sisteminin, bir katı cisim dönüşümü altındaki görüntüsü başka bir Kartezyen koordinat sistemidir.

$\{\frown{e_i}\}$ ve $\{\frown{f_i}\}$ O ve P'de Kartezyen koordinat sistemlerine karşılık gelen standart tabanlar olsunlar. Bu durumda $\frown{Y} : \frown{e_i} \rightarrow \frown{f_i}$, O koordinatlarını P koordinatlarına haritalayan katı cisim dönüşümüne karşılık gelir. $\frown{Y}$, uzaysal katı cisim dönüşümü olarak kullanılacaktır.

Matris gösterimlerinde yine uzatma işaretleri kullanılacaktır. Bir $\frown{a}$ vektörünün , $\{\frown{e_i}\}$ standart tabanında $\tilde{\tilde{a}}_O = [a_{O1} ... a_{O6}]^T$ ve $\{\frown{f_i}\}$ standart tabanında $\tilde{\tilde{a}}_P = [a_{P1} ... a_P]^T$ ile temsil edildiğini düşünürsek, bu durumda

$$\frown{a} = \sum a_{Oi}\frown{e_i} = \sum a_{Pi}\frown{f_i} \qquad (2.11)$$

eşitliğini elde edebiliriz.

$\tilde{\tilde{X}} : \tilde{\tilde{a}}_O \rightarrow \tilde{\tilde{a}}_P$, $\frown{Y}$ tarafından elde edilen uzaysal katı cisim koordinat dönüşümüdür. Eğer $\frown{Y}$' bir tabanın vektörlerine uygulanırsa, $\tilde{\tilde{X}}$'in de yeni tabandaki gösteriminin elde edilmesi için, o tabanda gösterilen vektörün koordinat matrisine uygulanması gereklidir. $\tilde{\tilde{X}}$ pasif bir dönüşümdür. Uzaysal bir vektörün gösterimini değiştirir. Buna karşın $\widehat{Y}$ aktif bir dönüşümdür. Bir vektörü değişik bir vektöre (görüntüsüne) dönüştürür. $\tilde{\tilde{X}}$, $\widehat{Y}$ tarafından elde edilen doğrusal koordinat dönüşümüdür. Bu yüzden 6×6 boyutlarında bir matris olarak ifade edilebilir.

Koordinatların orijinlerini O'dan P'ye çevirmek için, denkelm 2.7'nin öteleme formülü kullanılır ve

$$\widehat{a}_P = \begin{bmatrix} a \\ a_O + \overrightarrow{PO}\times a \end{bmatrix} \quad \text{elde edilir.} \qquad (2.12)$$

Burada $\widehat{a}_O = \begin{bmatrix} a \\ a_O \end{bmatrix}$ dir. Bu eşitlik $\widehat{a}_P$ 'yi 6×6 'lık bir matrisle $\widehat{a}_O$ 'nın çarpımı olarak ifade etmek için aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir

$$\widehat{a}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \overrightarrow{PO}\times & 1 \end{bmatrix} \widehat{a}_O \qquad (2.13)$$

Bu eşitlikteki **0** 3×3'lük bir sıfır matrisi, **1** 3×3'lük bir özdeşlik (identity) matrisi ve $\overrightarrow{PO}\times$ de $\overrightarrow{PO}$ 'ya çarpı operatörü $\times$'in uygulanmasıyla elde edilen simetrik olmayan matristir. Çarpı operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\times = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & z & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

a$\times$ vektörüyle **b** vektörünün çarpımı, $a\times b$ ye eşittir. $\times$ operatörü doğrusal bir operatördür ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$\lambda(a\times) = (\lambda a)\times, \quad (\lambda \text{ bir skalardır}) \qquad (2.15)$$

$$a\times + b\times = (a+b)\times \qquad (2.16)$$

$$(a\times)^T = -a\times \qquad (2.17)$$

$$(a\times)b = -(b\times)a \qquad (2.18)$$

$$(Ea)\times = Ea\times E^{-1}, \quad \text{(E, } 3\times 3\text{'lük ortogonal bir matristir)} \qquad (2.19)$$

$$(a\times b)\times = a\times b\times - b\times a\times \qquad (2.20)$$

O dan O' ne yapılan koordinat dönüşünü etkinleştirmek için, uzaysal **a** vektörünü orijinden geçen bir çizgi vektörü ile bir serbest vektörün toplamı olarak ele alınabilir.

$$\frown{a} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_O \end{bmatrix}$$

$\frown{a}$ ‘nın döndürülmüş koordinat sistemindeki gösterimi, çizgi vektörünün ve serbest vektörün döndürülmüş gösterimlerinin toplamına eşittir.

E, 3×3 boyutunda bir ortogonal, koordinat dönüşümü yapan döndürücü (rotation) bir matris olsun. Bu durumda orijinden geçerek etki eden çizgi vektörünün döndürülmüş koordinat sistemdeki gösterimi $[(Ea)^T\ 0^T]^T$ şeklinde olur. Serbest vektörün gösterimi ise $[0^T\ \ (E a_O)^T]^T$ şeklinde olur. Bu yüzden, eğer $\frown{a}_O$ O'da gösterilen bir uzaysal vektör ise ve $\frown{a}_{O'}$ de O' daki aynı vektörse bu durumda koordinat dönüşümü

$$\frown{a}_{O'} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \frown{a}_O \qquad (2.21)$$

şeklinde olur.

${}_O\widehat{X}_P$ uzaysal bir dönüşümdür. P koordinat sisteminde gösterilen bir vektörde işlem yapar ve aşağıdaki formüle göre aynı vektörün O koordinat sistemindeki gösterimini üretir.

$$\widehat{V}_O = {}_O\widehat{X}_P \widehat{V}_P \qquad (2.22)$$

Uzaysal koordinat dönüşümleri matris çarpımı ile birleştirilebilir. Bu yüzden

$${}_O\widehat{X}_P \; {}_P\widehat{X}_Q = {}_O\widehat{X}_Q \qquad (2.23)$$

eşitliği yazılabilir. Dönüşü ve ötelemeyi içeren genel uzaysal dönüşüm formu 2.13 ve 2.21 eşitliklerinin çarpımıyla elde edilebilir. Orijini önce O ‘dan P’ye ötelemeye sonra da P etrafında döndürmeye yarayan uzaysal dönüşüm

$${}_P\widehat{X}_O = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r\times^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ Er\times^T & E \end{bmatrix}, \qquad r = \overrightarrow{OP} \qquad (2.24)$$

Ters dönüşüm ise;

$${}_O\widehat{X}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r\times & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^{-1} & 0 \\ 0 & E^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{-1} & 0 \\ r\times E^{-1} & E^{-1} \end{bmatrix} \qquad (2.25)$$

olarak ifade edilebilir.

Bu ifade ${}_P\widehat{X}_O$ ‘nın transpozesi değildir. Bu yüzden 3×3’lük döndürücü matrislerden farklı olarak, genel uzaysal dönüşüm matrisleri ortogonal değildir.

2.6. Hareketli Koordinat Sistemlerinde Türev Alma

$\{\widehat{e}_i\}$ koordinat sisteminde gösterilen uzaysal vektör $\widehat{a}$ ‘nın kesin (absolute) zamana göre türevi

$$\frac{d}{dt}\widehat{a} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{6} a_i \widehat{e}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{6} ((\frac{d}{dt} a_i)\widehat{e_i} + a_i (\frac{d}{dt}\widehat{e_i})) \qquad (2.26)$$

şeklinde yazılır. Eğer koordinat sistemi durağan ise $\frac{d}{dt}\widehat{e_i} = \widehat{0}$ ‘dır ve $\widehat{a}$ ‘nın kesin türevi sadece elemanların türevine eşittir.

Vektörü durağan bir koordinat sistemine dönüştürüp, yeni koordinat sisteminde türevini almak ve türevi tekrar hareket eden koordinat sistemine dönüştürmek daha kolaydır. Bu durum, uzaysal bir vektörün türevinin uzaysal vektör gibi dönüştürülebildiğini gösterir.

P nin hareket eden bir koordinat sistemi, O nun da durağan bir koordinat sistemi ve ${}_O\widehat{X}_P$ ile ${}_P\widehat{X}_O$ nın da iki koordinat sistemi arasındaki dönüşümler olduğunu düşünelim. $\frac{d}{dt}$ yi kesin türev için ve $\frac{d'}{dt}$ yi de görünür türev için kullanıldığını düşünürsek, P koordinat sisteminde gösterilen $\widehat{a}$ vektörünün kesin türevi

$$\frac{d}{dt}\widehat{a} = {}_P\widehat{X}_O \frac{d'}{dt}({}_O\widehat{X}_P\ \widehat{a})$$

$$= \frac{d'}{dt}\widehat{a} + {}_P\widehat{X}_O (\frac{d'}{dt}\, {}_O\widehat{X}_P)\widehat{a} \qquad (2.27)$$

olur. Buradaki sorun ${}_P\widehat{X}_O(\frac{d'}{dt}\, {}_O\widehat{X}_P)$ ifadesini elde etmek olacaktır. O dan P ye yapılan dönüşüm r öteleme vektörü ve 3×3 lük ortogonal $\mathbf{E}^{-1}$ matrisi ile gerçekleştirilirse

$${}_O\widehat{X}_P = \begin{bmatrix} E & 0 \\ r \times E & E \end{bmatrix}$$

$$\frac{d'}{dt}\,{}_O\widehat{X}_P = \begin{bmatrix} \frac{d'}{dt}E & 0 \\ (\frac{d'}{dt}r)\times E + r\times\frac{d'}{dt}E & \frac{d'}{dt}E \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

ifadesi elde edilebilir. P koordinatlarının $\widehat{v}$ ile temsil edilen hızının olduğunu ve O koordinatlarında $\widehat{v_O} = [w^T v_O{}^T]^T$ ile belirtildiğini düşünürsek, bu durumda $\frac{d'}{dt}r = v_P = v_O - r\times w$ ve $\frac{d'}{dt}E = w\times E$ olur. Bu yüzden,

$$\frac{d'}{dt}\,{}_O\widehat{X}_P = \begin{bmatrix} w\times E & 0 \\ (v_O - r\times w)\times E + r\times(w\times E) & w\times E \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} w\times E & 0 \\ v_O\times E + w\times r\times E & w\times E \end{bmatrix} \; ($$

$$= \begin{bmatrix} w\times & 0 \\ v_O\times & w\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ r\times E & E \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} w\times & 0 \\ v_O\times & w\times \end{bmatrix} {}_O\widehat{X}_P \quad (2.29)$$

ifadesi elde edilebilir. Uzaysal çarpım operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır ve daha önce bahsedilen × operatörü ile aynı özelliklere sahiptir:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \widehat{\times} = \begin{bmatrix} a\times & 0 \\ b\times & a\times \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Bu durumda denklem 2.29 aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir.

$$\frac{d'}{dt}\,{}_O\widehat{X}_P = \widehat{v}_O \;\widehat{\times}\; {}_O\widehat{X}_P \quad (2.31)$$

P koordinatlarında gösterilen, P koordinatlarının hız vektörü

$$\hat{v}_P = {}_P\hat{X}_O\, \hat{v}_O \text{ ise,}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{a} = \frac{d'}{dt}\hat{a} + \hat{v}_P \times \hat{a} \qquad (2.32)$$

denklemi elde edilir. Bu yüzden, hareket eden bir koordinat sisteminde gösterilen bir mutlak türev vektörü, görünür türevle, koordinat sisteminin kesin hızıyla türevi alınan vektörün vektörel çarpımının toplamına eşittir. Bu kural, dönen bir koordinat sistemindeki vektörün türevinin alınmasına ilişkin kurala oldukça benzerdir.

$\hat{a}$ vektörü durağan O koordinat sisteminde gösterilsin ve $\hat{v}$ hızıyla hareket ediyor olsun. P koordinat sistemi de $\hat{v}$ hızıyla hareket ediyor olsun. Bu durumda $\hat{a}$, P koordinat sisteminde durağandır. Öyleyse;

$$\frac{d}{dt}\hat{a} = {}_O\hat{X}_P\left(\frac{d'}{dt}\hat{a}_P + \hat{v}_P \times \hat{a}_P\right)$$

$$= {}_O\hat{X}_P\,(\hat{v}_P \times \hat{a}_P)$$

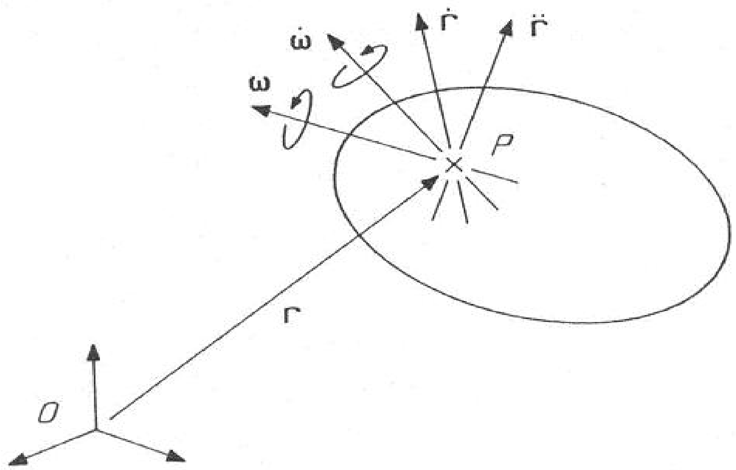
$$= \hat{v} \times \hat{a} \qquad (2.33)$$

O, hareketli bir koordinat sistemi ve $\hat{v}$ ’de $\hat{a}$ ’nın O’daki görünür hızıysa, denklem 2.33 $\hat{a}$ ’nın O ‘daki görünür türevini verir.

2.7. Uzaysal İvme

Katı bir cismin kesin ivmesi, onun kesin hızının türevidir. Bununla birlikte, katı bir cismin uzaysal ivmesi geleneksel ivmesinden biraz değişiklik gösterir.

Şekil 2.3’te gösterilen katı cismin w açısal hızı ve cismin üzerindeki P noktasının $\dot{r}$ doğrusal hızı vardır. r ise, P’nin pozisyon vektörüdür. Cismin durağan O koordinat sistemindeki uzaysal hızı



Şekil 2.3: Katı Bir Cismin İvmesi

$$\widehat{v}_O = \begin{bmatrix} w \\ \dot{r} + r \times w \end{bmatrix} \qquad (2.34)$$

ve kesin uzaysal ivmesi ise hızın elemanlarının türevidir.

$$\widehat{a}_O = \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \ddot{r} + \dot{r} \times w + r \times \dot{w} \end{bmatrix} \qquad (2.35)$$

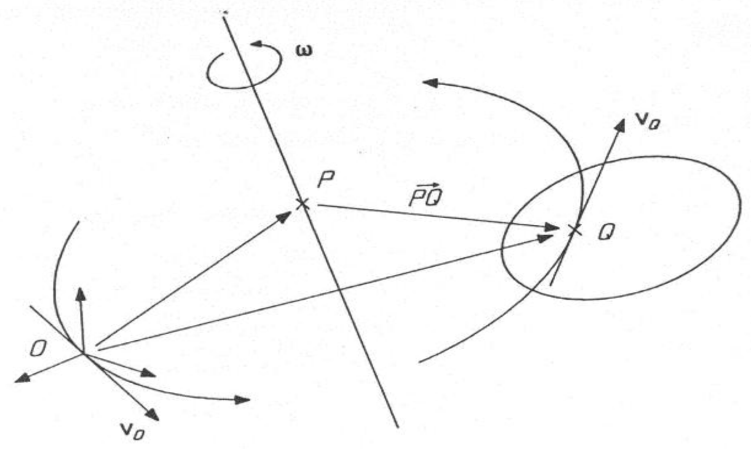
Uzaysal ivmenin açısal bileşeni, cismin açısal ivmesidir fakat doğrusal bileşen ise cisimdeki herhangi bir noktanın orijinden geçerken oluşan hızının zamana göre değişim oranıdır. Cismin orijindeki sabit noktasının bilinen ivmesi

$$\alpha_O = \frac{d^2}{dt^2}(r - r')$$

$$= \frac{d}{dt}(\dot{r} - w \times r')$$

$$= \ddot{r} - \dot{w} \times r - w \times w \times r$$

olarak gösterilir. r', anlık olarak r ’ye eşit olan cisim-sabit vektörüdür.



Şekil 2.4: Sabit Açısal Hızlı Bir Nesnenin İvmesi

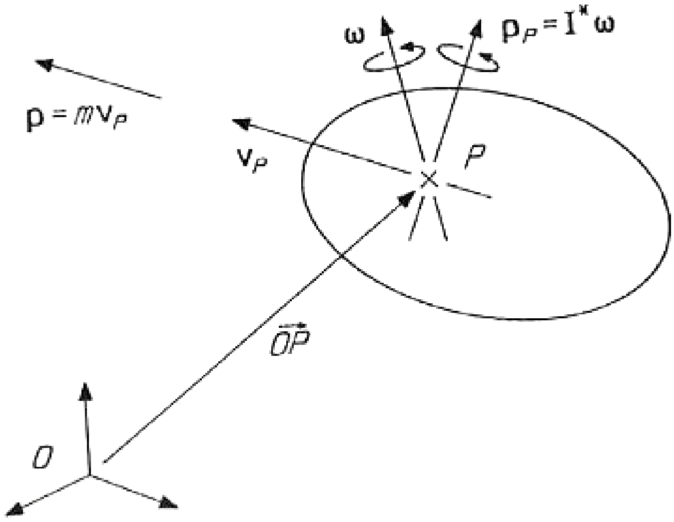
Şekil 2.4 ‘te gösterilen, sabit bir eksen etrafında sabit bir açısal hızla dönen katı cismi düşünelim. Cisim sabit uzaysal hıza sahiptir. Dolayısıyla uzaysal ivmesi sıfırdır. Cisimdeki dönme ekseni üzerinde olmayan her nokta dairesel bir yol izlemektedir ve bu yüzden sıfırdan farklı bir geleneksel ivmeye sahiptir. Fakat orijinden geçen nokta(lar) v_O hızına sahiptir ve bu hız sabittir. Bu yüzden, uzaysal ivmenin doğrusal kısmı (v_o ‘nun türevidir) sıfıra eşittir.

3. UZAYSAL DİNAMİK

3.1. Giriş

Bu bölümde, uzaysal momentum, uzaysal eylemsizlik gibi kavramlardan bahsedilmiş ve hareket denklemleri verilmeye çalışılmıştır.

3.2 Uzaysal Katı Cisim Momentumu



Şekil 3.1: Katı Bir Cismin Uzaysal Momentumu

Şekil 3.1'deki katı cismin kütlesi m, kütle merkezi P'de ve kütle merkezi etrafındaki dönüşsel eylemsizliği I^* ile gösterilmektedir. Bu cismin uzaysal hızı $\widehat{v_O} = [w^T v_O{}^T]^T$ ve kütle merkezinin doğrusal hızı da $v_P = v_O + \overrightarrow{PO} \times w$ denklemleri ile gösterilir. Katı cismin doğrusal momentumu, büyüklüğü ve yönü ile bir çizgi vektördür;

$$P = m v_P$$

Hareket hattı, cismin kütle merkezinden geçer ve $\widehat{P}_O = [P^T (\overrightarrow{OP} \times P)^T]^T$ uzaysal vektörü ile ifade edilebilir, $\overrightarrow{OP} \times P$ vektörü cismin orijin etrafındaki momentum momentidir. Cisim aslında, $I^* w$ ile gösterilen ve çizgi vektörü gibi davrananaçısal momentuma da sahiptir. Bu momentum uzaysal olarak $\widehat{P}^* = [0^T (I^* w)^T]^T$ ile gösterilebilir. Cismin toplam momentumu doğrusal ve açısal momentumlarının toplamına eşittir;

$$
\begin{aligned}
\widehat{P} &= \begin{bmatrix} m v_P \\ \overrightarrow{OP} \times m v_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I^* w \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m(v_O + \overrightarrow{PO} \times w) \\ I^* w + \overrightarrow{OP} \times m(v_O + \overrightarrow{PO} \times w) \end{bmatrix} \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

3.3. Uzaysal Katı Cisim Eylemsizliği

Katı cismin uzaysal hızını uzaysal momentumuna dönüştüren uzaysal eylemsizliği $\widehat{P} = \widehat{I}\,\widehat{v}$ formundaki doğrusal bir eşitliktir. Bu eşitlikteki $\widehat{I}$, 6×6 boyutunda bir matrisle gösterilen uzaysal eylemsizliktir. Denklem 3.1den

$$
\begin{aligned}
\widehat{P} &= \begin{bmatrix} m\overrightarrow{PO} \times w + m v_O \\ (I^* + \overrightarrow{OP} \times m\overrightarrow{PO}\times) w + \overrightarrow{OP} \times m v_O \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m\overrightarrow{PO}\times & m1 \\ I^* + \overrightarrow{OP} \times m\,\overrightarrow{PO}\times & \overrightarrow{OP} \times m \end{bmatrix} \widehat{v}_O \\
&= \widehat{I}_O \widehat{v}_O \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu yüzden uzaysal eylemsizlik;

$$
\widehat{I}_O = \begin{bmatrix} m\overrightarrow{PO}\times & m1 \\ I^* + \overrightarrow{OP} \times m\,\overrightarrow{PO}\times & \overrightarrow{OP} \times m \end{bmatrix} \qquad (3.3)
$$

olarak bulunur. Bu matrisi daha özlü bir şekilde ifade etmek mümkündür. 3×3 boyutunda matrislerin $M = m1,\ H = \overrightarrow{OP} \times m\ ve\ \ I = I^* + \overrightarrow{OP} \times m\,\overrightarrow{PO}\times$ tanıtılmasıyla

$$\widehat{I}_O = \begin{bmatrix} H^T & M \\ I & H \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

olarak yazılır. M, H ve I katı cismin orijin etrafındaki sıfırıncı, birinci ve ikinci momentleridir. Sıfırıncı moment sadece kütledir. Birinci moment $h = m\overrightarrow{OP}$ ve $H = h\times$ dır. İkinci moment ise paralel eksenler teoreminden ($\overrightarrow{OP} \times m\,\overrightarrow{PO} \times$ m kütlesinin P 'deki orijin etrafındaki dönüşsel eylemsizliği) dolayı I 'ya eşit olan cismin orijin etrafındaki dönüşsel eylemsizliğidir. M ve I simetriktir.

Eğer koordinat sisteminin orijini, cismin kütle merkeziyle aynıysa $\overrightarrow{OP} = 0$ olur ve uzaysal eylemsizliğin yeni hali

$$\widehat{I}_O = \begin{bmatrix} 0 & M \\ I^* & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

3.3.1. Uzaysal Katı Cisim Eylemsizliklerinin Özellikleri

Dönüşsel eylemsizlikten farklı olarak, uzaysal eylemsizliği gösteren matris geleneksel anlamda ne simetriktir ne de pozitif-tanımlıdır. Bununla birlikte uzaysal transpoze operatörü tanıtıldığında, o operatöre göre uzaysal eylemsizlik matrisi simetrik ve pozitif-tanımlı olarak bulunacaktır.

Katı cisim eylemsizlik matrisi hiçbir zaman tekil değildir. Eğer tekil olsaydı, sıfırdan farklı hızlar için katı cisim sıfır momentuma sahip olurdu.

Uzaysal eylemsizliğin koordinat dönüşüm kuralı uzaysal vektörlerin doğrusal haritalayıcı olması tanımından belirlenir. Eğer $\widehat{P}_P, \widehat{I}_P$ ve $\widehat{v}_P$ katı cismin, P koordinatlarında gösterilen momentumu, eylemsizliği ve hızı ise ve $\widehat{P}_O, \widehat{I}_O$ ve $\widehat{v}_O$ da O koordinatlarındaki momentum, eylemsizlik ve hız ise bu durumda $\hat{P}_P = \hat{I}_P \hat{v}_P$ ve $\hat{P}_O = \hat{I}_O \hat{v}_O$ olur. $\hat{P}_P = {}_P\hat{X}_O\ \hat{P}_O$ ve $\hat{v}_O = {}_O\hat{X}_P\ \hat{v}_P$ olarak yazılır. Buradaki ${}_P\hat{X}_O$ ve ${}_O\hat{X}_P$ olağan vektör dönüşüm matrisleridir. Bu yüzden

$$\hat{I}_P \hat{v}_P = \hat{P}_P = {}_P\hat{X}_O\ \hat{P}_O = {}_P\hat{X}_O\ \hat{I}_O \hat{v}_O$$
$$= {}_P\hat{X}_O\ \hat{I}_O\ {}_O\hat{X}_P\ \hat{v}_P$$

ve

$$\hat{I}_P = {}_P\hat{X}_O\ \hat{I}_O\ {}_O\hat{X}_P \qquad (3.5)$$

olur.

Durağan bir koordinat sisteminde gösterilen uzaysal eylemsizliğin zamana göre türevi, elemanlarının türevine eşittir. Eğer P, $\hat{v}$ hızıyla hareket eden hareketli bir koordinat sistemiyse ve O da durağansa eylemsizlik $\hat{I}$ nın türevini veren formül;

$$\frac{d}{dt}\hat{I}_P = {}_P\hat{X}_O \frac{d'}{dt}\hat{I}_O\ {}_O\hat{X}_P$$

olur. Fakat;

$$\frac{d}{dt}\hat{I}_O = \frac{d'}{dt}({}_O\hat{X}_P\ \hat{I}_P\ {}_P\hat{X}_O)$$
$$= {}_O\hat{X}_P\ \hat{v}_P \hat{\times} \hat{I}_P\ {}_P\hat{X}_O + {}_O\hat{X}_P \frac{d'}{dt}\hat{I}_P\ {}_P\hat{X}_O - {}_O\hat{X}_P\ \hat{I}_P\ \hat{v}_P \hat{\times}\ {}_P\hat{X}_O$$

(denklemler 2.31 ve 2.19 ‘un uzaysal çarpıma ($\hat{\times}$) uygulanmasıyla)

$$\frac{d}{dt}\hat{I}_P = \frac{d'}{dt}\hat{I}_P + \hat{v}_P \hat{\times} \hat{I}_P - \hat{I}_P \hat{v}_P \hat{\times} \qquad (3.6)$$

elde edilir. Eğer katı bir cismin $\widehat{I}$ eylemsizliği varsa ve $\widehat{v}$ hızıyla hareket ediyorsa, $\widehat{I}$ nın mutlak türevi;

$$\frac{d}{dt}\widehat{I} = \widehat{v}\widehat{\times}\widehat{I} - \widehat{I}\,\widehat{v}\widehat{\times} \qquad (3.7)$$

olur. Bir çok parçadan oluşan bileşik bir katı cismin eylemsizliği, bileşenlerinin eylemsizliklerini toplamına eşittir. Eğer bir b bileşik katı cismi b_i katı cisimlerinden oluşuyorsa $\widehat{I}$ toplam eylemsizlik, bileşenlerin eylemsizlikleri - $\widehat{I}_i$ - toplamına eşittir.

$$\widehat{I} = \sum_i \widehat{I}_i \qquad (3.8)$$

Bu basit uzaysal denklem, geleneksel yaklaşımdaki üç tane denklemin yerini alır. Bunlardan ilki bileşik kütlenin hesaplanması, ikincisi bileşik kütle merkezinin hesaplanması ve üçüncüsü de yeni kütle merkezinin etrafındaki dönüşsel eylemsizliğin hesaplanması içindir.

3.4. Hareket Denklemleri

Uygulanan bir kuvvet olmadığında, katı bir cismin momentumu korunur. Bu yüzden $\widehat{I}\,\widehat{v} = sabittir$ (3.9).

Eğer bir kuvvet uygulanırsa momentumun değişme oranı uygulanan net kuvvete eşittir.

$$\widehat{f} = \frac{d}{dt}(\widehat{I}\,\widehat{v})$$

$$= \widehat{I}\,\widehat{a} + \widehat{v}\,\widehat{\times}\widehat{I}\,\widehat{v} \qquad (3.10)$$

Bu eşitlikte $\widehat{a}$ katı cismin uzaysal ivmesidir. Denklem 3.10'a homojen olmayan doğrusal denklem olarak bakmak kullanışlı olacaktır;

$$\widehat{f} = \widehat{I}\widehat{a} + \widehat{p} \qquad (3.11)$$

Bu eşitlikteki $\widehat{p}$ bias kuvveti olarak adlandırılan ve sıfır uzaysal ivme üretmek için katı cisme uygulanması zorunlu olan kuvvettir. Denklem 3.9 doğrusal ve açısal momentumun korunumu yasalarını birleştirirken, denklem 3.10 Newton'un ve Euler'in katı cismin doğrusal ve açısal hızlarına ilişkin denklemlerini birleştirir.

3.5. Ters Eylemsizlik

Katı bir cismin ters eylemsizliği, momentumu hızla ilişkilendirir. Eğer $\widehat{P} = \widehat{I}\,\widehat{v}$ ise katı cismin ters eylemsizliği $\widehat{\phi} = \widehat{I}^{-1}$ olmak koşuluyla $\widehat{v} = \widehat{\phi}\,\widehat{P}$ dir. Ters eylemsizliklerin dönüşüm ve türevleri eylemsizliklerle aynı kurallara uyarlar, fakat bileşik bir kütle ters eylemsizliği harmonik toplamla bulunur. Bu yüzden;

$$\widehat{\phi} = (\sum_i \widehat{\phi}_i^{\,-1})^{-1} \qquad (3.12)$$

$\widehat{a}$ ivmesini üreten bir $\widehat{f}$ kuvveti, hareketi belirli yönlerde kısıtlı olan bir kütleye uygulanırsa, ivme;

$$\widehat{a} = \widehat{\phi}\,\widehat{f} + \widehat{b} \qquad (3.13)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu eşitlikteki $\widehat{\phi}$ cismin görünüşteki ters eylemsizliği ve $\widehat{b}$ bias ivmesi ise hıza ve hareket kısıtlarına bağlı olan vektördür.

Ters eylemsizlikleri kullanmanın esas avantajı 6 dereceden daha az serbestliğe sahip olan kısıtlandırılmış cisimlerin hareketinin analizine olanak vermesidir. Böyle bir cisim için $\widehat{\phi}\,\widehat{f} = 0$ denkleminin aşikar olmayan çözümleri vardır. Bu durumda $\widehat{\phi}$ tekil olur ve $\widehat{I}$ var olmaz. Aslında ters eylemsizliğin rankı cismin hareket serbestlik derecesine eşittir ve $\widehat{\phi}\widehat{f}=0$ eşitliğinin çözümü hareket zorunlulukları tarafından üretilen tepki kuvvetler uzayını düzenler. Ters eylemsizliklerin ana dezavantajı birleştirme kuralına uygunsuzluğudur: özellikle bazı matrisler tekilse, harmonik toplamı bulmak zordur.

m kütleli, P noktasında kütle merkezi bulunan ve merkezi eylemsizlik tensörü I* olan kısıtlandırılmamış katı cisim ters eylemsizlik formu;

$$\widehat{\phi}=\begin{bmatrix} I^{*\,-1}\,\overrightarrow{PO}\times & I^{*\,-1} \\ 1/m1\;+\overrightarrow{OP}\times I^{*\,-1}\,\overrightarrow{PO}\times & \overrightarrow{OP}\times I^{*\,-1} \end{bmatrix} \qquad (3.14)$$

Bu denklem 3.2 deki denklemle özdeştir. 1/m1 yerine $\widehat{I}^{*}$ ve $I^{*\,-1}$ yerine de m1 gelmiştir.

3.6. Eklemli Kütle Eylemsizlikleri

Eklemli kütle, eklemlerle birbirine bağlanmış katı cisimlerin toplamıdır. Eklemli kütle ile katı cisim sisteminin geri kalanı arasındaki bütün etkileşimler eklemli kütlenin *sap* adı verilen bir elemanı aracılığıyla oluşmalıdır. Eklemli kütle eylemsizliği, sistemin geri kalan tarafından sapa uygulanan kuvvet ile eklemli kütlenin ivmesi arasındaki ilişkiyi verir. İlişki doğrusaldır ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\widehat{f}=\widehat{I}^{A}\,\widehat{a}+\widehat{p} \qquad (3.15)$$

Bu denklemdeki $\widehat{f}$ test kuvveti olarak da bilinen uygulanan kuvveti, $\widehat{a}$ sapın ivmesini, $\widehat{I}^{A}$ eklemli kütlenin eylemsizliğini ve $\widehat{p}$ de sapın ivmesini sıfır yapmak için sapa uygulanan eklemli kütlenin bileşik bias kuvvetini temsil etmektedir.

Eklemli kütle eylemsizliğinin temel düşüncesi, eklemli kütleyi oluşturan cisimler grubuna sistemin tek bir katı cisim elemanı gibi davranılmasına izin vermesidir. Bu mümkündür çünkü sistemin geri kalanı ile olan tüm etkileşimler sap aracılığıyla gerçekleşir ve denklem 3.15 ‘in şekli, katı cisim hareket denklemi şekliyle (denklem 3.11) aynıdır.

Eklemli kütle eylemsizlikleri görünüşteki eleman sayısını azaltarak katı cisim sisteminin basitleşmesini sağlar. Denklem 3.15 sapın 6 hareket serbestlik derecesine sahip olduğunu öngörür. Eğer durum bu değilse, daha genel bir denklem olarak;

$$\widehat{a} = \widehat{\phi}^{A}\,\widehat{f} + \widehat{b} \qquad (3.16)$$

denklemi gereklidir. Bu denklemde $\widehat{\phi}^{A}$ eklemli kütle ters eylemsizliği ve $\widehat{b}$ de test kuvvetinin yokluğunda sapın ivmesidir.

Eklemli kütle eylemsizlikleri sadece üyelerin katı cisim eylemsizliklerine ve üyeler arasındaki bağlantıların kinematiğine bağlıdır. Hız etkileri ve eklemli kütleye etki eden çeşitli kuvvetler sadece bias kuvvetini etkiler.

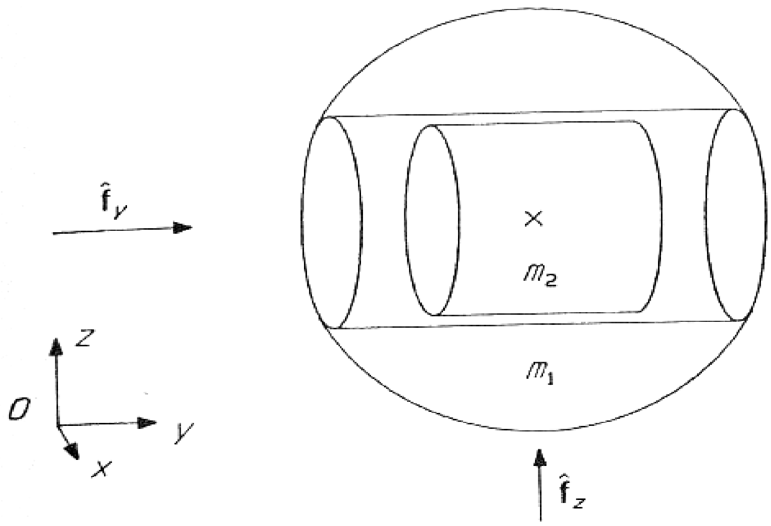
3.6.1 Eklemli Kütle Eylemsizliklerinin Özellikleri

Hızdan momentuma doğrusal haritalama olarak tanımlanan katı cisim eylemsizliklerinden farklı olarak, eklemli kütle eylemsizlikleri kuvvet ve ivme arasındaki doğrusal ilişki bakımından tanımlanırlar. $\widehat{I}^{A}\widehat{v}$ ($\widehat{I}^{A}$: eklemli kütle eylemsizliği, $\widehat{v}$: hız) biçimindeki bir ifade anlamsızdır. Eklemli kütle eylemsizlikleri tensörlerdir ve katı cisimlerin hareketli koordinatlardaki türevlerinin dönüşümüne ait kurallara uyarlar. Katı cisim eylemsizlikleriyle aynı boyutlara sahiptirler.

Eklemli kütle matrisleri, var olduklarında, simetrik ve uzaysal transpozeye göre pozitif – tanımlı matrislerdir. Eklemli kütle ters eylemsizlikleri simetrik, pozitif –

tanımlı veya yarı pozitif – tanımlı, ters çapraz eylemsizlikler ise genellikle simetrik olmayan, tanımsız ve tekil matrislerdir.

Eklemli kütle eylemsizlikleri, özel katı cisim eylemsizlik formuna uymayan simetrik matrislerdir. Fiziksel olarak bu durum eklemli kütle için ortada bir kütle merkezinin olmadığı anlamına gelir ve görünüşteki kütlenin, dönüşsel eylemsizliktekine benzer yönlü özellikleri vardır. Şekil 3.2 de iki cisimden oluşan basit bir eklemli kütle gösterilmiştir. Cisimler: m_1 kütleli küre ve içinde m_2 kütleli kürenin ortasından geçen silindirik şaftla uyumlu, silindirdir. Bu şaft y – eksenine paraleldir ve iki cisim kinematik olarak silindirik eklemle birbirlerine bağlanırlar. Her iki cisim de başlangıçta durağandır ve kütle merkezleri kürenin merkezinde çakışıktır.



Şekil 3.2: Yönsel Görünür Kütleli Eklemli Kütle

Bir $\widehat{f}_z$ kuvveti z – eksenine paralel ve kütle merkezinden geçen bir hat boyunca uygulandığında, her iki cismin de $[0^T \; 1/(m_1+m_2) \; f_z^{\,T}]^T$ ivmesi ile ivmelenmelerini sağlar. Fakat küreye y - yönünde ve kütle merkezinden geçecek şekilde uygulanacak bir $\widehat{f}_y$ kuvveti, sadece kürenin ivmelenmesine neden olur. Bu yüzden ivme $[0^T\ 1/m_1\ \ f_y^{\ T}]^T$ olur. Aslında bu eklemli kütlenin eylemsizliğinin kütle bölümündeki 3×3 boyutundaki matris, küreyi sap olarak varsaymak koşuluyla

$$M = \begin{bmatrix} m_1+m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_1+m_2 \end{bmatrix}$$

olur.

Eğer şaft eksenlerden birine paralel olmasaydı, M köşegen olmazdı fakat hala simetrik olurdu. Doğrusal ivme kazandıran saf bir kuvvet kürenin merkezinden geçen hatta uygulandığında bu eklemli kütle merkezi davranışı sergiler. Fakat silindirik eklemin yerine vida eklemi konulsaydı bu durumda $\widehat{f}_y$ kuvveti kürenin dönmesine neden olurdu ve kütle merkezi varolmazdı.

3.6.2. Eklemli Kütle Eylemsizliklerinin Hesaplanması

Genel durumda, eklemli kütle eylemsizliklerinin (ve çapraz eylemsizliğinin) hesaplanması çok zordur; gerçekte sadece ters eylemsizliklerin varolması garantilidir. Bununla birlikte, eklemli kütlenin zeminle bağlantısı olmadığı ya da kinematik bağlantının olmadığı durumlarda (hareket etmeyen çerçeve) hesaplama göreceli olarak daha kolaydır.

3.7. Uzaysal Skalar Çarpım

Skalar çarpımın iki uzaysal vektörün - skalar bir büyüklük üretecek şekilde - doğrusal ve açısal bileşenlerini birleştirme yeteneği olması gereklidir. Uygun bir seçenek, skaların bir kuvvet tarafından çok küçük yer değiştirme için gerçekleştirilen sanal iş olmasıdır. Çok küçük bir yer değiştirme δ ya etki eden doğrusal bir $\mathbf{f}$ kuvveti çok küçük miktarda (sanal iş) iş üretir ($f.\delta$). Benzer şekilde çok küçük bir açısal yer değiştirme θ üzerine etki eden bir çift τ da çok küçük miktarda iş üretir ($\tau.\theta$). İş skalardır. Bu yüzden doğrusal ve açısal etkilerden oluşan işleri eklemek mümkündür. Uzaysal kuvvet $\widehat{f} = [f^T \; f_O{}^T]^T$ in çok küçük yer değiştirme $\widehat{\delta} = [\delta^T \delta_O{}^T]^T$ ye etki ettiğini düşünelim. f orijine etki eder ve doğrusal yer değiştirmenin orijini δ_O dur. Bu yüzden işin doğrusal bileşeni $f.\delta_O$ olur. Benzer şekilde işin açısal bileşeni $f_O.\delta$ dir. Bu yüzden uzaysal skalar çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\widehat{f} \,\widehat{.}\, \widehat{\delta} = f.\delta_O + f_O.\delta \qquad (3.17)$$

Bu gerçek bir skalardır ve orijinin seçiminden bağımsızdır. Bu skalar çarpım sadece bir kuvvet-tipi vektörle hareket-tipi vektör arasında tanımlıdır[1]. Bu durum, uzaysal skalar çarpımdaki *uygulanabilir sınırlılıktır.* Bir vektörün kendisiyle uzaysal skalar çarpımı tanımlı değildir, bu yüzden uzaysal bir vektör için büyüklüğün normal tanımı kullanılamaz. $\widehat{a} \,\widehat{.}\, \widehat{b} = 0$ koşulunu sağlayan iki vektörün ortogonal olduğu gerçektir.

Skalar çarpımla ilgili önemli bir özellik de pozitif-tanımlı olmamasıdır. Bu özelliğin etkileri, uygulanabilir sınırlılığın etkileri tarafından büyük ölçüde gölgelenir.

3.8. Uzaysal Transpoze Operatörü

Uzaysal çarpım işlemi matris formunda da ifade edilebilir:

$$\widehat{a} \,\widehat{.}\, \widehat{b} = \widehat{a}^{\widehat{T}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \widehat{b}$$

Ortadaki matris uzaysal transpoze operatörü , ^{S} , nin tanıtılmasıyla ortadan kaldırılabilir:

[1] Bir kuvvet-tipi vektör doğrusal bileşeni çizgi vektörü olan, hareket-tipi vektör ise açısal bileşeni çizgi vektör olan vektördür.

$$\hat{a}^S = \begin{bmatrix} a \\ a_O \end{bmatrix}^S = [a_O^T \; a^T] \qquad (3.18)$$

Bu durumda skalar çarpım aşağıdaki gibi de gösterilebilir:

$$\hat{a}\,.\,\hat{b} = \hat{a}^S \hat{b} \qquad (3.19)$$

Uzaysal transpoze operatörü, sıradan transpoze operatörüyle aynı özelliklere sahiptir, bu yüzden $\hat{a}^{SS} = \hat{a}$, $(\hat{a}+\hat{b}+...)^S = \hat{a}^S + \hat{b}^S + ...$ özellikleri geçerlidir. Bir skaların uzaysal transpozesi sadece orijinal skalardır ve tensör $\hat{A}$'nın uzaysal transpozesi aşağıdaki eşitlikteki gibi elde edilir:

$$\hat{a}^S \hat{A}\hat{b} = (\hat{a}^S \hat{A}\hat{b})^S = \hat{b}^S \hat{A}^S \hat{a}$$

Bu eşitlik $\hat{a}^S \hat{A}\hat{b}$ nın skalar olduğu tüm $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ için geçerlidir. Bu aşağıdaki tanımla sonuçlanır:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^S = \begin{bmatrix} D^T & B^T \\ C^T & A^T \end{bmatrix} \qquad (3.20)$$

Uzaysal transpozenin kullanımı, uzaysal cebir ile sıradan vektör cebiri arasındaki bazı anormallikleri ortadan kaldırır. Özellikle, koordinat dönüşüm matrisleri genellikle ortogonaldır. Örneğin, $\hat{X}^{-1} = \hat{X}^S$ $(veya\ {}_P\hat{X}_O^{\,S} = {}_O\hat{X}_P)$ eşitliklerinde olduğu gibi. Uzaysal vektörel (CROSS) çarpım matrisi simetrik değildir. Örneğin, $(\hat{v}\times)^S = -\hat{v}\times$; ve uzaysal katı cisim eylemsizlikleri hem simetriktir hem de pozitif – tanımlıdır. Örneğin; $\hat{I} = \hat{I}^S \;\; ve \;\; \hat{x}^S \hat{I}\hat{x} > 0 (her\ \hat{x} \neq \hat{0}\ için)$

3.9. Uzaysal Vektör Analizi

3.9.1. Koordinatlar, Tabanlar ve Alt-Uzaylar

$\widehat{e}_i$ uzaysal vektörler kümesi tüm a_i ler için $\sum a_i \widehat{e}_i = \widehat{0}$ eşitliği sağlanırsa, doğrusal olarak bağımsızdır. Uzaysal vektör uzayı 6 boyutlu olduğu için doğrusal olarak bağımsız kümede en fazla 6 vektör bulunabilir. r tane doğrusal bağımsız uzaysal vektörden oluşan küme, uzaysal vektör uzayının r-boyutlu alt-uzayını gerer (span) ve o alt-uzay üzerinde bir taban tanımlar. Alt-uzayın herhangi bir üyesi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\widehat{a} = \sum_{i=1}^{r} a_i \widehat{e}_i \qquad (3.21)$$

Bu denklemdeki a_i sayıları her $\widehat{a}$ için benzersizdir ve $\widehat{a}$'nın $\widehat{e}_i$ tabanındaki koordinatlarıdır. Bir tabanın üyeleri, dolayısıyla bir alt-uzayın üyeleri, aynı tipte olmalıdır: hareket ve kuvvet. Standart bir taban, vektörleri çizgi ve serbest vektör olarak verilen fiziksel bir yorum için özeldir. Genel tabanların vektörlerinde hiçbir fiziksel yorum var olmaz. Eğer bir alt-uzay belirtilmiyorsa, bir tabanın tüm uzaysal vektör uzayını gerdiği varsayılır. Denklem 3.21 matris formunda da ifade edilebilir:

$$\widehat{a} = \widehat{E}\, a \qquad (3.22)$$

Bu denklemdeki $\widehat{E}$, i inci sütunu $\widehat{e}_i$ olan $6 \times r$ lik bir matris ve a ise i inci elemanı a_i olan $r \times 1$ lik bir vektördür. $\widehat{E}$, hem vektör alt-uzayını (matrisin sütun uzayı) hem de o alt-uzayı geren özel tabanı $\{\widehat{e}_i\}$ temsil eder. a, sadece alt-uzayın özel bir üyesini tanımlayan katsayılar vektörüdür.

$\widehat{A}\widehat{E}$ matrisi, burada $\widehat{A}$ genel uzaysal dönüşümüdür, r-boyutlu $\{\widehat{A}\,\widehat{e}_i\}$ tarafından gerilen alt-uzayı temsil eder. Herhangi bir $\widehat{E}\,\widehat{A}$, burada $\widehat{A}$ tekil olmayan

$r \times r$ boyutunda bir matristir, değişik taban vektörler kümesiyle aynı vektör alt-uzayını geren $\widehat{E}$ 'ye eşittir. Bir alt-uzay matrisinin uzaysal transpozesi, bir vektörün uzaysal transpozesinin açık bir uzantısıdır ve aşağıdaki gibi verilir:

$$\widehat{E}^S = \begin{bmatrix} E \\ E_O \end{bmatrix}^S = \begin{bmatrix} E_O^{\ T} & E^T \end{bmatrix} \qquad (3.23)$$

Bu denklemdeki E ve E_O $3 \times r$ 'lik matrislerdir. Uzaysal transpozeyi uzaysal olmayan vektör ya da matrise uygulamak için genişletmek uygundur. Böyle bir nicelik için sıradan transpoze gibi işlem tanımlanır. Örneğin;

$$\widehat{a}^S = (\widehat{E}\, a)^S = a^T\, \widehat{E}^S \qquad (3.24)$$

Eğer $\widehat{S}$, uzaysal bir vektör uzayının r-boyutlu bir alt-uzayı ise $\widehat{S}^{\perp}, \widehat{S}$ 'nin bütün elemanlarına ortogonal olan tüm vektörlerin uzayı olarak tanımlanan ve $\widehat{S}$ 'ye ortogonal olan alt-uzaydır. $\widehat{S}^{\perp}$, 6-r boyutludur ve $\widehat{S}$ 'nin ters biçimidir. Eğer $\widehat{S}\alpha$ $\widehat{S}$ 'de ve $\widehat{S}^{\perp}\beta$ da $\widehat{S}^{\perp}$ da bir vektör iseler, bu durumda $(\widehat{S}\alpha)^S\, \widehat{S}^{\perp}\beta = 0$ olur. Bu durum her α ve β için geçerlidir, dolayısıyla aşağıdaki eşitliğin sağlanması gereklidir:

$$\widehat{S}^S\, \widehat{S}^{\perp} = 0 \qquad (3.25)$$

Bu eşitlikteki 0, $r \times (6 - r)$ sıfır matrisidir. Bu eşitliği sağlayan herhangi iki alt-uzay ortogonaldır.

4. İLERİ DİNAMİK – EKLEMLİ KÜTLE MODELİ

4.1. Eklemli Kütle Eylemsizlikleri

Eklemlerle birbirine bağlanmış katı cisimler yığınına eklemli kütle denir. Eklemli kütle eylemsizliğini tanımlamak için, eklemli kütlenin “sap” adı verilen özel bir üyesi tanımlanır. Eklemli kütle eylemsizliği, sapa uygulanan test kuvveti $\widehat{f}$ ile sapın ivmesi $\widehat{a}$ arasındaki ilişki olarak tanımlanır:

$$\widehat{f} = \widehat{I}^{A}\,\widehat{a} + \widehat{p} \qquad (4.1)$$

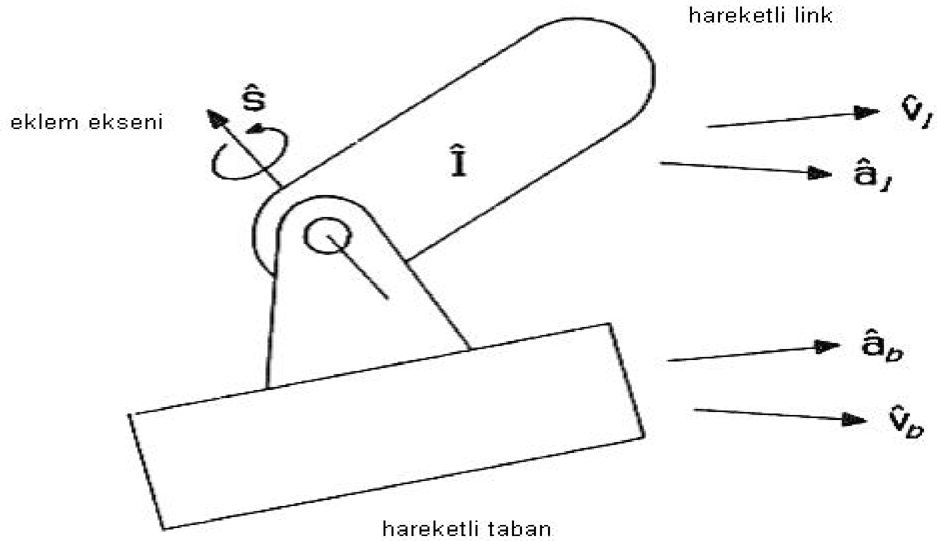
$\widehat{I}^{A}$ eklemli kütle eylemsizliği ve $\widehat{p}$ de sapa sıfır ivme kazandırmak için uygulanması gereken bias kuvvetidir. $\widehat{f}$ ile $\widehat{a}$ arasındaki ilişkiyi her zaman denklem 4.1’deki gibi açıklamak mümkün değildir. Bu ilişkiyi tanımlamak için yeterli şart zeminle kinematik bağlantının olmamasıdır. Eklemli kütle “yüzen” bir sistemdir. Eklemli kütleler, bu şartı sağlayan eklemli kütle metodunda kullanılırlar.

Tekil bir kütlenin hareket denklemi, $\widehat{I}^{A}$ katı cisim eylemsizliği ve $\widehat{p}$ de hız çarpım teriminin yerini aldığı durumda, denklem 4.1’deki gibi yazılabilir. Bu yüzden, hareket denklemlerini etkilemeden katı cisimler sisteminin bir üyesini eklemli kütlenin sapı ile değiştirmek mümkündür. Bu işlem sap, eklemli kütle ile sistem arasındaki tek etkileşim noktası ise işe yarar. Bununla birlikte, eklemli kütle eylemsizliklerinin esas kullanışlılığı birçok üyeye tek bir eklemli kütle gibi davranılmasına ve böylece sistemin görünür üye sayısını azaltılmasına izin vererek katı cisimler sistemlerini basitleştirmesidir.

4.2. Eklemli Kütle Metot Taslağı

Eklemli kütle algoritmasının temel düşüncesi n-eklemli bir robotun hareket eden tek linkinin, robotun geri kalan linklerinden oluşan eklemli kütlenin sapı olduğu tek eklemli bir robot gibi davranmasıdır. İlk eklemin ivmesini bulmak için tek eklemli robot ileri dinamiğinin çözülmesi gereklidir. Eklem 1 için ivme çözülecek olunursa, eklem 1, n-1 eklemden oluşan robotun hareketli tabanı gibi düşünülebilir. Bu işlem eklem 2 için de uygulanabilir ve bu şekilde devam edilebilir.

Bu yüzden eklemli kütle metodunu tamamlamak için iki yeteneğe ihtiyaç vardır:
Eklemli kütle eylemsizliklerini hesaplayabilme yeteneği ve hareketli tabana sahip bir eklemli robotun ileri dinamiğini çözme yeteneği.



Şekil 4.1: Hareketli Tabana Sahip Tek Eklemli Robot

Tek eklemli bir robotun $\hat{v}_b$ hızıyla ve $\hat{a}_b$ ivmesiyle hareket eden bir tabana, $\hat{I}$ eylemsizlikli bir linke ve $\hat{s}$ eksenli bir ekleme sahip olduğunu düşünelim. Şekil 4.1 deki gibi eklem hızı, ivmesi ve kuvveti sırasıyla $\dot{q}$, $\ddot{q}$ ve Q olsun. Linkin hızı ve ivmesi

$$\hat{v}_l = \hat{v}_b + \hat{s}\dot{q} \qquad (4.2)$$

$$\widehat{a}_l = \widehat{a}_b + \widehat{v}_b \times \widehat{s}\dot{q} + \widehat{s}\ddot{q} \qquad (4.3)$$

denklemleriyle verilir. Linkin hareket denklemi ise

$$\widehat{f} = \widehat{I}\,\widehat{a}_l + \widehat{v}_l \times \widehat{I}\,\widehat{v}_l \qquad (4.4)$$

denklemiyle verilir. Bu denklemdeki $\widehat{f}$ linke uygulanan net kuvvettir (yerçekimi yok sayılarak). $\widehat{f}$ eklem aracılığıyla uygulanır, bu yüzden eklem ekseni üzerindeki bileşeni Q'dur. Örneğin;

$$\widehat{s}^S \widehat{f} = Q \qquad (4.5)$$

Denklem 4.3 ve 4.4'ü, 4.5'te yerine konulursa $\ddot{q}$, Q cinsinden elde edilir.

$$\begin{aligned} Q &= \widehat{s}^S (\widehat{I}\,\widehat{a}_l + \widehat{v}_l \times \widehat{I}\,\widehat{v}_l) \\ &= \widehat{s}^S (\widehat{I}(\widehat{a}_b + \widehat{v}_b \times \widehat{s}\dot{q} + \widehat{s}\ddot{q}) + \widehat{v}_l \times \widehat{I}\,\widehat{v}_l) \end{aligned}$$

Buradan hareketle;

$$\ddot{q} = \frac{Q - \widehat{s}^S (\widehat{I}(\widehat{a}_b + \widehat{v}_b \times \widehat{s}\dot{q}) + \widehat{v}_l \times \widehat{I}\,\widehat{v}_l)}{\widehat{s}^S \widehat{I}\,\widehat{s}} \qquad (4.6)$$

denklemi elde edilir. Denklem 4.6 hareketli tabana sahip bir eklemli robotun hareket denklemidir.

Eğer linkin tek bir katı cismini n-eklemli robotun 1….n eklemleriyle yer değiştirirsek -ki burada link 1 sap olur- ve eklemli kütle eylemsizliği $\widehat{I}^A$'yı ve bias kuvveti $\widehat{p}$'yi hesaplayabiliriz. Böylelikle denklem 4.4'ü denklem 4.7 ile yer değiştirebiliriz:

$$\widehat{f} = \widehat{I}^{A}\,\widehat{a}_{l} + \widehat{p} \qquad (4.7)$$

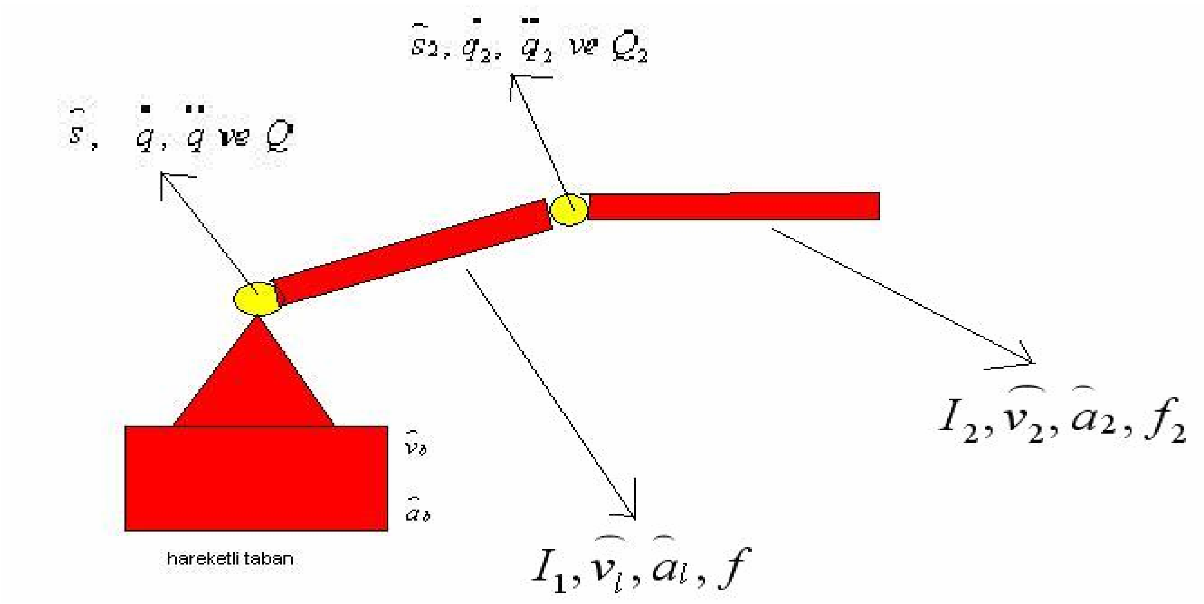
Bu durumda hareket denklemi aşağıdaki biçimi alır:

$$\ddot{q} = \frac{Q - \widehat{s}^{S}\,(\widehat{I}^{A}\,(\widehat{a}_{b} + \widehat{v}_{b} \times \widehat{s}\,\dot{q}) + \widehat{p})}{\widehat{s}^{S}\,\widehat{I}^{A}\,\widehat{s}} \qquad (4.8)$$

Eklemli kütle eylemsizlikleri her zaman pozitif-tanımlıdır, bu yüzden payda her zaman sıfırdan büyüktür.

Denklem 4.8 n eklemli bir robotun ilk ekleminin hareket denklemidir. Robotun geri kalanının hareketini çözmek için, link 1'i n-1 eklemli bir robotun hareket eden tabanı gibi düşünmek gerekir. Hızını ve ivmesini bildiğimiz için tüm işlemleri tekrarlayabiliriz. n adet iterasyon problemin tamamıyla çözülmesini sağlayacaktır.

Örnek 1: İki Eklemli Düzlemsel Serbest Yüzen Uzay Robotu



Şekil 4.2: Hareketli Tabana Sahip İki-Eklemli Robot

Bu çalışmada şekil 4.2’de gösterilen iki eklemli, üç linkli düzlemsel serbest yüzen bir uzay robot sisteminin dinamik denklemleri türetilmiştir. Bu amaçla ikinci eklemin ivmesinin bulunması gereklidir. Buna göre, daha önce birinci eklem için gerçekleştirilen işlemler ikinci eklem için de tekrarlandığında

$$\overset{\frown}{v}_2 = \overset{\frown}{v}_l + \overset{\frown}{s}_2 \dot{q}_2 \qquad (4.9)$$

$$\overset{\frown}{a}_2 = \overset{\frown}{a}_l + \overset{\frown}{v}_l \times \overset{\frown}{s}_2 \dot{q}_2 + \overset{\frown}{s}_2 \ddot{q}_2 \qquad (4.10)$$

$$\overset{\frown}{f}_2 = \overset{\frown}{I}_2 \overset{\frown}{a}_2 + \overset{\frown}{v}_2 \times \overset{\frown}{I}_2 \overset{\frown}{v}_2 \qquad (4.11)$$

$$\overset{\frown}{s}_2^{\,S} \overset{\frown}{f}_2 = Q_2 \qquad (4.12)$$

$$Q_2 = \overset{\frown}{s}_2^{\,S} (\overset{\frown}{I}_2 \overset{\frown}{a}_2 + \overset{\frown}{v}_2 \times \overset{\frown}{I}_2 \overset{\frown}{v}_2) \qquad (4.13)$$

$$= \overset{\frown}{s}_2^{\,S} (\overset{\frown}{I}_2 (\overset{\frown}{a}_l + \overset{\frown}{v}_l \times \overset{\frown}{s}_2 \dot{q}_2 + \overset{\frown}{s}_2 \ddot{q}_2) + \overset{\frown}{v}_2 \times \overset{\frown}{I}_2 \overset{\frown}{v}_2) \qquad (4.14)$$

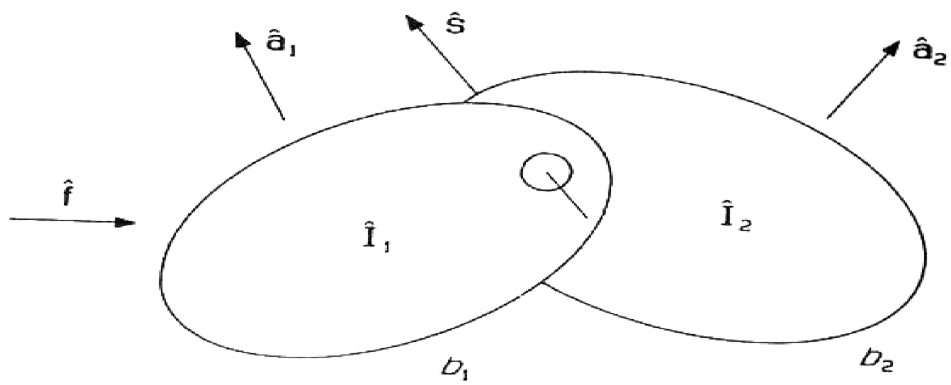
$$\ddot{q}_2 = \frac{Q_2 - \overset{\frown}{s}_2^{\,S} (\overset{\frown}{I}_2 (\overset{\frown}{a}_l + \overset{\frown}{v}_l \times \overset{\frown}{s}_2 \dot{q}_2) + \overset{\frown}{v}_2 \times \overset{\frown}{I}_2 \overset{\frown}{v}_2)}{\overset{\frown}{s}_2^{\,S} \overset{\frown}{I}_2 \overset{\frown}{s}_2} \qquad (4.15)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{Q_2 - \overset{\frown}{s}_2^{\,S} [\overset{\frown}{I}_2 (\overset{\frown}{a}_b + \overset{\frown}{v}_b \times \overset{\frown}{s} \dot{q} + \overset{\frown}{s} \ddot{q}) + ((\overset{\frown}{v}_b + \overset{\frown}{s} \dot{q}) \times \overset{\frown}{s}_2 \dot{q}_2) + ((\overset{\frown}{v}_b + \overset{\frown}{s} \dot{q}) + \overset{\frown}{s}_2 \dot{q}_2) \times \overset{\frown}{I}_2 ((\overset{\frown}{v}_b + \overset{\frown}{s} \dot{q}) + \overset{\frown}{s}_2 \dot{q}_2)]}{\overset{\frown}{s}_2^{\,S} \overset{\frown}{I}_2 \overset{\frown}{s}_2}$$

olarak bulunur.

4.3. Eklemli Kütle Eylemsizliklerinin Hesaplanması

Serbest yüzen uzay robotunun dinamik denklemlerinde eklemli kütle eylemsizliklerinin hesaplanması gerekmektedir. Bu bölümde iki eklemli serbest yüzen uzay robotunun eklemli kütle eylemsizlikleri türetilmiştir. Öncelikle, Şekil 4.3’teki gibi iki üyeden oluşan basit bir eklemli kütle düşünelim. Üyeler b_1 *ve* b_2’nin sırasıyla $\overset{\frown}{I}_1$ *ve* $\overset{\frown}{I}_2$ eylemsizlikleri olsun ve $\overset{\frown}{s}$ eklemiyle birbirlerine bağlı olsunlar. Cisimler başlangıçta durağandır ve test kuvvetinden başka etki eden bir kuvvet yoktur. Bu yüzden bias kuvveti sıfır olacaktır. Test kuvveti $\hat{f}$, sap olarak seçilen b_1'e uygulanır ve b_1 *ve* b_2'nin sırasıyla ivmeleri olan $\hat{a}_1$ *ve* $\hat{a}_2$'yi üretir.



Şekil 4.3: Basit Eklemli Kütle

$\hat{I}_1^A$, b_1 *ve* b_2'den oluşan eklemli kütlenin b_1 üyesinin eylemsizliği olsun. Bu durumda;

$$\hat{f} = \hat{I}_1^A \hat{a}_1 \qquad (4.17)$$

olur.

$\hat{f}$ kuvveti iki bileşenine ayrılabilir: $\hat{f}_1$ ve $\hat{f}_2$. $\hat{f}_1$, b_1'e etki eden net kuvvet ve $\hat{f}_2$ ise eklem üzerinden b_2'ye iletilen kuvvettir. Bireysel cisimlerin hareket denklemleri:

$$\hat{f}_1 = \hat{I}_1 \hat{a}_1 \qquad (4.18)$$

ve

$$\hat{f}_2 = \hat{I}_2 \hat{a}_2 \qquad (4.19)$$

olur. Ayrıca;

$$\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 \qquad (4.20)$$

eşitliği sağlanmaktadır. Eklem $\hat{a}_2$ ve $\hat{f}_2$'yi $\hat{a}_1$ cinsinden ifade etmemizde kısıtlılıklar oluşturmaktadır. Bu da $\hat{f}$'yi $\hat{a}_1$ cinsinden bulmamızı zorlaştırmaktadır.

$$\hat{a}_2 = \hat{a}_1 + \hat{s}\alpha \qquad (4.21)$$

denklemi $\hat{a}_2$'yi verir. Bu denklemdeki α, skalar eklem ivmesidir. $\hat{f}_2$, eklemin hareket yönünde iş yapmaz, bu yüzden;

$$\hat{s}^S \hat{f}_2 = 0 \qquad (4.22)$$

olur. Denklemler 4.19 ve 4.21'i 4.22'de yerine koyarak α'yı $\hat{a}_1$ cinsinden bulabiliriz.

$$\hat{s}^S \hat{I}_2 (\hat{a}_1 + \hat{s}\alpha) = 0$$

$$\alpha = -\frac{\hat{s}^S \hat{I}_2 \hat{a}_1}{\hat{s}^S \hat{I}_2 \hat{s}} \qquad (4.23)$$

α'yı bildiğimiz için, $\hat{f}$'yi $\hat{a}_1$ cinsinden bulabiliriz:

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= \hat{I}_1 \hat{a}_1 + \hat{I}_2 \hat{a}_2 \\
&= \hat{I}_1 \hat{a}_1 + \hat{I}_2 (\hat{a}_1 - \hat{s}\frac{\hat{s}^S \hat{I}_2 \hat{a}_1}{\hat{s}^S \hat{I}_2 \hat{s}}) \\
&= (\hat{I}_1 + \hat{I}_2 - \frac{\hat{I}_2 \hat{s} \hat{s}^S \hat{I}_2}{\hat{s}^S \hat{I}_2 \hat{s}}) \hat{a}_1 \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

Denklem 4.24, denklem 4.17 ile aynı forma sahiptir. Her ikisi de bütün $\hat{f}$'ler için geçerli olduğundan;

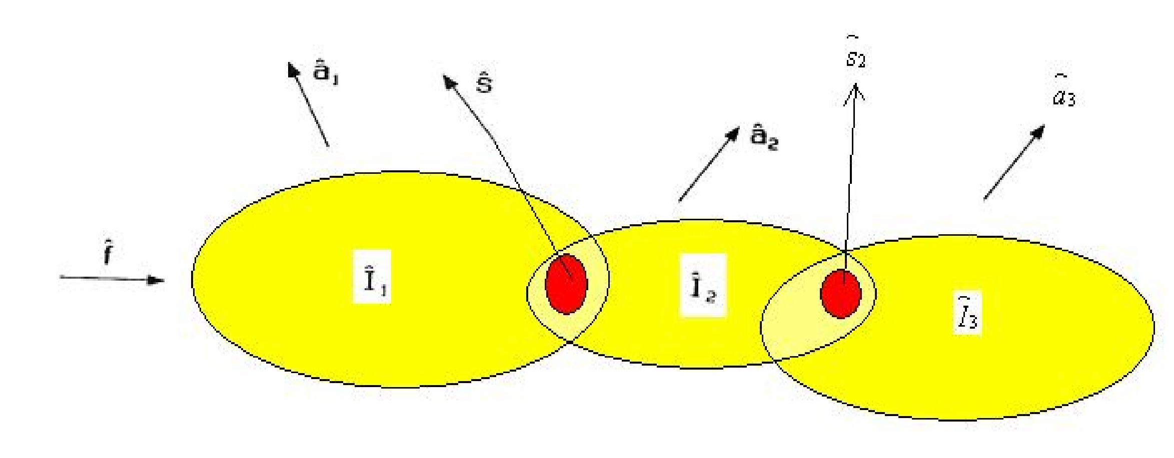
$$\hat{I}_1^A = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 - \frac{\hat{I}_2 \hat{s} \hat{s}^S \hat{I}_2}{\hat{s}^S \hat{I}_2 \hat{s}} \qquad (4.25)$$

eşitliği yazılabilir. $\hat{I}_1$ ve $\hat{I}_2$ simetrik iseler(ki öyleler), $\hat{I}_1^A$ da simetriktir. Ayrıca $\hat{I}_1^A$ var olan herhangi bir $\hat{x}$ vektörü için alttan $\hat{I}_1$ ile üstten ise $\hat{I}_1 + \hat{I}_2$ ile sınırlıdır:

$$\hat{x}^S \hat{I}_1 \hat{x} \le \hat{x}^S \hat{I}_1^A \hat{x} \le \hat{x}^S (\hat{I}_1 + \hat{I}_2) \hat{x}$$

Bu, $\hat{I}_1^A$'nın yalnızca pozitif-tanımlı olduğunu söylemekten daha güçlü bir ifadedir ve $\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$ eşitliğiyle gösterilebilir ($\hat{x}_1 = x_1 \hat{s}$ ve $\hat{x}_2^S \hat{I}_2 \hat{s} = 0$)

Örnek 2: İki Eklemli Üç Linkli Kütlenin Eylemsizliklerinin Hesaplanması



Şekil 4.4: İki Eklemli Kütle

Şekil 4.4'te gösterilen iki eklemli kütle sisteminin eylemsizliklerini hesaplamak için tek eklemli basit kütleden yola çıkılarak sistemin eylemsizliği bulunmaya çalışılmıştır.

$$\hat{f} = \hat{I}_1^A \hat{a}_1 \qquad (4.26)$$

$$\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 + \hat{f}_3 \qquad (4.27)$$

$$\widehat{f}_1 = \widehat{I}_1 \widehat{a}_1 \qquad (4.28)$$

$$\widehat{f}_2 = \widehat{I}_2 \widehat{a}_2 \qquad (4.29)$$

$$\widehat{f}_3 = \widehat{I}_3 \widehat{a}_3 \qquad (4.30)$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{a}_2 = \widehat{a}_1 + \widehat{s}\,\alpha\,, \\ \\ \widehat{a}_3 = \widehat{a}_2 + \widehat{s}_2\,\alpha_2 \end{array}\right\} \rightarrow \widehat{a}_3 = \widehat{a}_1 + \widehat{s}\,\alpha + \widehat{s}_2\,\alpha_2 \qquad (4.31)$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{f}_2 = \widehat{I}_2 \widehat{a}_2 \\ \widehat{s}^{S}\,\widehat{f}_2 = 0 \quad \text{(çünkü } \widehat{f}_2 \text{ direk eklem ekseninden geçiyor)} \end{array}\right\} \rightarrow \widehat{s}^{S}\,\widehat{I}_2\,(\widehat{a}_1 + \widehat{s}\,\alpha) = 0\,,$$

$$\alpha = -\frac{\widehat{s}^{S}\,\widehat{I}_2\,\widehat{a}_1}{\widehat{s}^{S}\,\widehat{I}_2\,\widehat{s}} \qquad (4.32)$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{f}_3 = \widehat{I}_3 \widehat{a}_3 \\ \widehat{s}_2^{\,S}\,\widehat{f}_3 = 0 \quad \text{(çünkü } \widehat{f}_3 \text{ direk eklem ekseninden geçiyor)} \end{array}\right\} \rightarrow \widehat{s}_2^{\,S}\,\widehat{I}_3\,\widehat{a}_3 = 0$$

$$\widehat{s}_2^{\,S}\,\widehat{I}_3\,(\widehat{a}_1 + \widehat{s}\,\alpha + \widehat{s}_2\,\alpha_2) = 0 \qquad (4.34)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\widehat{s}_2^{\,S}\,\widehat{I}_3\,\widehat{a}_1 + \widehat{s}_2^{\,S}\,\widehat{I}_3\,\widehat{s}\,\alpha}{\widehat{s}_2^{\,S}\,\widehat{I}_3\,\widehat{s}_2} \qquad (4.35)$$

$$\widehat{a}_3 = \widehat{a}_1 + \widehat{s}\,\alpha - \widehat{s}_2\,\frac{\widehat{s}_2^{\,S}\,\widehat{I}_3\,\widehat{a}_1 + \widehat{s}_2^{\,S}\,\widehat{I}_3\,\widehat{s}\,\alpha}{\widehat{s}_2^{\,S}\,\widehat{I}_3\,\widehat{s}_2}$$

$$\widehat{a}_3 = \widehat{a}_1 - \widehat{s}\,\frac{\widehat{s}^{S}\,\widehat{I}_2\,\widehat{a}_1}{\widehat{s}^{S}\,\widehat{I}_2\,\widehat{s}} - \widehat{s}_2\,\frac{\widehat{s}_2^{\,S}\,\widehat{I}_3\,\widehat{a}_1 - \widehat{s}_2^{\,S}\,\widehat{I}_3\,\widehat{s}\,\widehat{s}^{S}\,\widehat{I}_2\,\widehat{a}_1}{\widehat{s}_2^{\,S}\,\widehat{I}_3\,\widehat{s}_2\,\widehat{s}^{S}\,\widehat{I}_2\,\widehat{s}} \qquad (4.36)$$

$$\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2 + \widehat{f}_3$$

$$\hat{f} = \hat{I}_1\hat{a}_1 + \hat{I}_2\hat{a}_2 + \hat{I}_3\hat{a}_3$$

$$\hat{f} = \hat{I}_1\hat{a}_1 + \hat{I}_2(\hat{a}_1 - \hat{s}\frac{\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{a}_1}{\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{s}}) + \hat{I}_3\hat{a}_3$$

$$\hat{f} = \hat{I}_1\hat{a}_1 + \hat{I}_2(\hat{a}_1 - \hat{s}\frac{\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{a}_1}{\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{s}}) + \hat{I}_3(\hat{a}_1 - \hat{s}\frac{\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{a}_1}{\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{s}} - \hat{s}_2\frac{\hat{s}_2^S\hat{I}_3\hat{a}_1 - \hat{s}_2^S\hat{I}_3\hat{s}\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{a}_1}{\hat{s}_2^S\hat{I}_3\hat{s}_2\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{s}})$$

$$\hat{f} = [\hat{I}_1 + \hat{I}_2(1 - \hat{s}\frac{\hat{s}^S\hat{I}_2}{\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{s}}) + \hat{I}_3(1 - \hat{s}\frac{\hat{s}^S\hat{I}_2}{\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{s}} - \hat{s}_2\frac{\hat{s}_2^S\hat{I}_3 - \hat{s}_2^S\hat{I}_3\hat{s}\hat{s}^S\hat{I}_2}{\hat{s}_2^S\hat{I}_3\hat{s}_2\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{s}})]\hat{a}_1$$

$$\hat{f} = \hat{I}_1^A\hat{a}_1 \rightarrow$$

$$\hat{I}_1^A = \hat{I}_1 + \hat{I}_2(1 - \hat{s}\frac{\hat{s}^S\hat{I}_2}{\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{s}}) + \hat{I}_3(1 - \hat{s}\frac{\hat{s}^S\hat{I}_2}{\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{s}} - \hat{s}_2\frac{\hat{s}_2^S\hat{I}_3 - \hat{s}_2^S\hat{I}_3\hat{s}\hat{s}^S\hat{I}_2}{\hat{s}_2^S\hat{I}_3\hat{s}_2\hat{s}^S\hat{I}_2\hat{s}}) \qquad (4.37)$$

4.3.1. Hızların ve Aktif Eklem Kuvvetlerinin Etkileri

Cisimlerin hızları sıfırdan farklı olduğunda ve eklemde aktif kuvvet bulunduğunda durum daha değişiktir. Bu durumda, bias kuvveti sıfırdan farklı olacaktır. Dolayısıyla denklem 4.17'yi homojen olmayan şekliyle değiştirmek gerekecektir:

$$\hat{f} = \hat{I}_1^A\hat{a}_1 + \hat{p}_1 \qquad (4.38)$$

b_1 *ve* b_2'nin sırasıyla $\hat{v}_1$ *ve* $\hat{v}_2$ hızlarına sahip olduğunu düşünelim (eklem kısıtlılıklarıyla uyumlu olarak). Bu durumda, hız çarpım terimleri b_1 *ve* b_2'nin hareket denklemlerinde yer alır:

$$\hat{f}_1 = \hat{I}_1\hat{a}_1 + \hat{p}_1^v \qquad (4.39)$$

$$\hat{f}_2 = \hat{I}_2\hat{a}_2 + \hat{p}_2^v \qquad (4.40)$$

$\hat{p}_1^{\,v}$ ve $\hat{p}_2^{\,v}$ hız çarpım etkilerinden dolayı oluşan bias kuvvetleridir ve aşağıdaki gibi gösterilirler:

$$\hat{p}_1^{\,v} = \hat{v}_1 \times \hat{I}_1 \hat{v}_1 \qquad (4.41)$$

$$\hat{p}_2^{\,v} = \hat{v}_2 \times \hat{I}_2 \hat{v}_2 \qquad (4.42)$$

Hız çarpım terimi aynı zamanda denklem 4.21’de de yer alır ve yeni haliyle:

$$\hat{a}_2 = \hat{a}_1 + \hat{v}_1 \times \hat{v}_2 + \hat{s}\,\alpha \qquad (4.43)$$

olarak gösterilir. Eğer Q’yu aktif eklem kuvveti olarak tanımlarsak, bu durumda Q denklem 4.22’de de yer alır ve:

$$\hat{s}^{S} \hat{f}_2 = Q \qquad (4.44)$$

olur.

$$\hat{I}_1^{A} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 - \frac{\hat{I}_2 \hat{s}\hat{s}^{S} \hat{I}_2}{\hat{s}^{S} \hat{I}_2 \hat{s}} \qquad (4.45)$$

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_1^{\,v} + \hat{p}_2^{\,v} + \hat{I}_2 (\hat{v}_1 \times \hat{v}_2 + \hat{s}\, \frac{Q - \hat{s}^{S} (\hat{I}_2 \hat{v}_1 \times \hat{v}_2 + \hat{p}_2^{\,v})}{\hat{s}^{S} \hat{I}_2 \hat{s}}) \qquad (4.46)$$

Denklem 4.45 ile denklem 4.25 eklemli kütle eylemsizliklerinin sistemdeki kuvvetlere dayanmadığını göstermek amacıyla aynıdırlar.

4.4. Eklemli Kütle Dinamik Algoritması

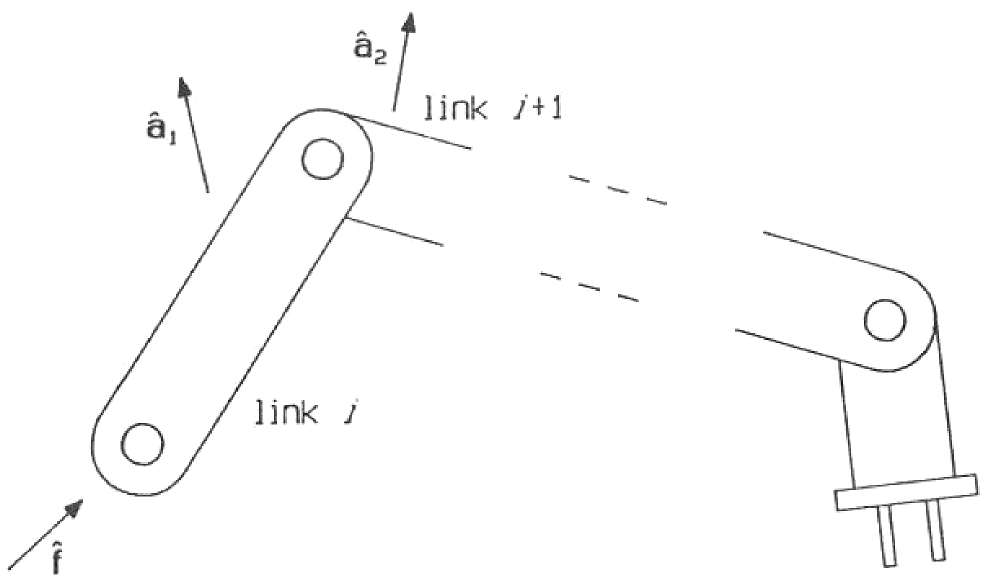
Eklemli kütle modeli kullanılarak serbest yüzen uzay robotunun dinamik denklemleri iki adımlık bir algoritma ile bulunur. Algoritmanın adımları:

1) Her link için eklemli kütle eylemsizliklerinin hesaplanması
2) Hesaplanan bu eylemsizlikleri eklem ivmelerinin hesaplanmasında kullanılması

şeklindedir.

Adım 1: Eklemli kütle eylemsizliklerinin hesaplanması

Eklemli kütle i'yi robotun $i \ldots .n$ linklerinden oluşan eklemli kütle olarak tanımlayalım. Bu linkler $i+1 \ldots .n$ eklemleriyle bağlı olsunlar (şekil 4.5).



Şekil 4.5: Eklemli Kütle i

Eklemli kütle i'nin sapı her zaman i linki olsun. $\widehat{I}_i^A$ ve $\widehat{p}_i$ de eklemli kütle i'nin i linkinin eklemli kütle eylemsizliği ve ilgili bias kuvveti olsunlar. Hedefimiz, bize $\widehat{I}_{i+1}^A$ ve $\widehat{p}_{i+1}$'den $\widehat{I}_i^A$ ve $\widehat{p}_i$'yi hesaplamaya yardım edecek ardışıl ilişkileri bulmak olacaktır.

Hız etkileri $\widehat{p}_i$'de yer aldığı için, her linkin hızlarının ve hız çarpım kuvvetlerinin hesaplanmasıyla başlamak gereklidir. Link i'nin kesin hızı $\widehat{v}_i$ ve hız çarpım kuvvetlerinden dolayı bias kuvveti de $\widehat{p}_i^v$ olsun. Bu durumda;

$$\widehat{v}_i = \widehat{v}_{i-1} + \widehat{s}_i \dot{q}_i \qquad (\widehat{v}_0 = \widehat{0}) \qquad (4.44)$$

$$\widehat{p}_i^{\,v} = \widehat{v}_i \times \widehat{I}_i \widehat{v}_i \qquad (4.45)$$

olur. Link i'ye etki eden dış kuvvetler denklem 4.45'e dahil edilebilir. Bu durumda link i için hareket denkleminin yeni formu:

$$\widehat{f} = \widehat{I}_i \widehat{a} + \widehat{p}_i^{\,v}$$

olur. Eklemli kütle i'nin link i'sine, link i de $\widehat{a}_1$ ivmesi ve link $i+1$'de $\widehat{a}_2$ ivmesi oluşturan test kuvveti $\widehat{f}$ uygulayalım. $\widehat{f}$'yi bileşenleri olan $\widehat{f}_1$ ve $\widehat{f}_2$'ye ayıralım. $\widehat{f}_1$, link i'ye ve $\widehat{f}_2$ de link $i+1$'e geçen kuvvetlerdir. Link $i+1$'e eklemli kütle $i+1$'in sapı gibi davranırsak, aşağıdaki ilişkileri elde ederiz:

$$\widehat{f} = \widehat{I}_i^{\,A} \widehat{a}_1 + \widehat{p}_i \qquad (4.46)$$

$$\widehat{f}_1 = \widehat{I}_i \widehat{a}_1 + \widehat{p}_i^{\,v} \qquad (4.47)$$

$$\widehat{f}_2 = \widehat{I}_{i+1}^{\,A} \widehat{a}_2 + \widehat{p}_{i+1} \qquad (4.48)$$

$$\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2 \qquad (4.49)$$

Eklem $i+1$, $\widehat{a}_2$'yi kısıtlar; $\widehat{a}_1$ ve tek bir bilinmeyen skalar cinsinden tanımlanabilir ve $\widehat{f}_2$ üzerinde bir dereceli kısıtlama yükler. $\widehat{a}_2$ aşağıdaki denklemdeki gibi ifade edilebilir:

$$\widehat{a}_2 = \widehat{a}_1 + \widehat{v}_{i+1} \times \widehat{s}_{i+1} \dot{q}_{i+1} + \widehat{s}_{i+1} \alpha \qquad (4.50)$$

Bu denklemdeki α bilinmeyen eklem ivmesidir ve $\widehat{f}_2$'nin, $i+1$'inci eklem eksenindeki bileşeni Q_{i+1}'dir. Q_{i+1};

$$\hat{s}_{i+1}^{\,S}\,\hat{f}_2 = Q_{i+1} \qquad (4.51)$$

şeklinde yazılır. α'nın $\hat{a}_1$ cinsinden bulunması gereklidir. Denklemler 4.48 ve 4.50, denklem 4.51'de yerine konarak istenen elde edilebilir:

$$\hat{s}_{i+1}^{\,S}(\hat{I}_{i+1}^{\,A}(\hat{a}_1 + \hat{v}_{i+1}\times\hat{s}_{i+1}\,\dot{q}_{i+1} + \hat{s}_{i+1}\,\alpha) + \hat{p}_{i+1}) = Q_{i+1}$$

$$\alpha = \frac{Q_{i+1} - \hat{s}_{i+1}^{\,S}\,(\hat{I}_{i+1}^{\,A}(\hat{a}_1 + \hat{v}_{i+1}\times\hat{s}_{i+1}\,\dot{q}_{i+1}) + \hat{p}_{i+1})}{\hat{s}_{i+1}^{\,S}\,\hat{I}_{i+1}^{\,A}\,\hat{s}_{i+1}} \qquad (4.52)$$

Şimdi α bilinmektedir ve $\hat{a}_2$, $\hat{a}_1$ cinsinden ifade edilebilir ve bu yüzden $\hat{f}$, $\hat{a}_1$ cinsinden ifade edilebilir (denklemler 4.47-4.49).

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= \hat{I}_i\,\hat{a}_1 + \hat{p}_i^{\,v} + \hat{I}_{i+1}^{\,A}\,\hat{a}_2 + \hat{p}_{i+1} \\
&= \hat{I}_i\,\hat{a}_1 + \hat{p}_i^{\,v} + \hat{I}_{i+1}^{\,A}(\hat{a}_1 + \hat{v}_{i+1}\times\hat{s}_{i+1}\,\dot{q}_{i+1} + \hat{s}_{i+1}\,\alpha) + \hat{p}_{i+1} \\
&= \hat{I}_i\,\hat{a}_1 + \hat{p}_i^{\,v} + \hat{p}_{i+1} + \hat{I}_{i+1}^{\,A}(\hat{a}_1 + \hat{v}_{i+1}\times\hat{s}_{i+1}\,\dot{q}_{i+1} \\
&\qquad + \hat{s}_{i+1}\frac{Q_{i+1} - \hat{s}_{i+1}^{\,S}\,(\hat{I}_{i+1}^{\,A}(\hat{a}_1 + \hat{v}_{i+1}\times\hat{s}_{i+1}\,\dot{q}_{i+1}) + \hat{p}_{i+1})}{\hat{s}_{i+1}^{\,S}\,\hat{I}_{i+1}^{\,A}\,\hat{s}_{i+1}}) \\
&= (\hat{I}_i + \hat{I}_{i+1}^{\,A} - \frac{\hat{I}_{i+1}^{\,A}\,\hat{s}_{i+1}\hat{s}_{i+1}^{\,S}\,\hat{I}_{i+1}^{\,A}}{\hat{s}_{i+1}^{\,S}\,\hat{I}_{i+1}^{\,A}\,\hat{s}_{i+1}})\hat{a}_1 + \hat{p}_i^{\,v} + \hat{p}_{i+1} + \hat{I}_{i+1}^{\,A}\,\hat{v}_{i+1}\times\hat{s}_{i+1}\,\dot{q}_{i+1} \\
&\qquad + \frac{\hat{I}_{i+1}^{\,A}\,\hat{s}_{i+1}(Q_{i+1} - \hat{s}_{i+1}^{\,S}\,(\hat{I}_{i+1}^{\,A}\,\hat{v}_{i+1}\times\hat{s}_{i+1}\,\dot{q}_{i+1} + \hat{p}_{i+1}))}{\hat{s}_{i+1}^{\,S}\,\hat{I}_{i+1}^{\,A}\,\hat{s}_{i+1}} \qquad (4.53)
\end{aligned}$$

Denklem 4.53'ü denklem 4.46 ile kıyaslayarak $\hat{I}_i^{\,A}$ ve $\hat{p}_i$ için aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir:

$$\hat{I}_i^{\,A} = \hat{I}_i + \hat{I}_{i+1}^{\,A} - \frac{\hat{I}_{i+1}^{\,A}\,\hat{s}_{i+1}\hat{s}_{i+1}^{\,S}\,\hat{I}_{i+1}^{\,A}}{\hat{s}_{i+1}^{\,S}\,\hat{I}_{i+1}^{\,A}\,\hat{s}_{i+1}} \qquad (4.54)$$

$$\widehat{p}_i = \widehat{p}_i^{\,v} + \widehat{p}_{i+1} + \widehat{I}_{i+1}^{\,A}\, \widehat{v}_{i+1} \times \widehat{s}_{i+1}\, \dot{q}_{i+1}$$

$$+ \frac{\widehat{I}_{i+1}^{\,A}\, \widehat{s}_{i+1} (Q_{i+1} - \widehat{s}_{i+1}^{\,S} (\widehat{I}_{i+1}^{\,A}\, \widehat{v}_{i+1} \times \widehat{s}_{i+1}\, \dot{q}_{i+1} + \widehat{p}_{i+1}))}{\widehat{s}_{i+1}^{\,S}\, \widehat{I}_{i+1}^{\,A}\, \widehat{s}_{i+1}} \qquad (4.55)$$

Eklemli kütle n sadece tekil bir katı cisim olduğundan dolayı, bu ardışıl ilişkiler için başlama değerleri basitçe:

$$\widehat{I}_n^{\,A} = \widehat{I}_n \qquad (4.56)$$

$$\widehat{p}_n = \widehat{p}_n^{\,v} \qquad (4.57)$$

eşitliklerindeki gibidir.

Adım 2: Eklem ivmelerinin hesaplanması

Eklemli kütle eylemsizlikleri bulunduğuna göre, eklem ivmelerinin hesaplanmasına başlanılabilir. Bu hesaplamanın i'inci aşamasında, $i-1$ linki bir- eklemli robotun hareketli tabanı ve eklemli kütle i de onun görünür tek linki olarak ele alınacaktır. Bu yüzden eğer $\widehat{a}_i$ link i'nin mutlak ivmesi ise, $\ddot{q}$, $\widehat{a}_{i-1}$'in bilindiği varsayılarak hesaplanabilir. Aşağıdaki eşitlikte bu durum gösterilmiştir:

$$\widehat{a}_i = \widehat{a}_{i-1} + \widehat{v}_i \times \widehat{s}_i\, \dot{q}_i + \widehat{s}_i\, \ddot{q}_i \qquad (4.58)$$

Eklem i ile iletilen toplam kuvvet $\widehat{f}$'nin $\widehat{a}_i$ ile ilişkisi aşağıdaki denklemde verilmiştir:

$$\widehat{f} = \widehat{I}_i^{\,A}\, \widehat{a}_1 + \widehat{p}_i$$

$$= \widehat{I}_i^{\,A} (\widehat{a}_{i-1} + \widehat{v}_i \times \widehat{s}_i\, \dot{q}_i + \widehat{s}_i\, \ddot{q}_i) + \widehat{p}_i \qquad (4.59)$$

$\widehat{f}$'nin eklem i'nin ekseni üzerindeki bileşeni Q'dur. Bu yüzden;

$$Q_i = \widehat{s}_i^{\,S}\, \widehat{f}$$

$$= \widehat{s}_i^{\,S} (\widehat{I}_i^{\,A} (\widehat{a}_{i-1} + \widehat{v}_i \times \widehat{s}_i\, \dot{q}_i + \widehat{s}_i\, \ddot{q}_i) + \widehat{p}_i)$$

olur. Dolayısıyla;

$$\ddot{q}_i = \frac{Q_i - \widehat{s}_i^{\,S} (\widehat{I}_i^{\,A} (\widehat{a}_{i-1} + \widehat{v}_i \times \widehat{s}_i \dot{q}_i) + \widehat{p}_i)}{\widehat{s}_i^{\,S} \widehat{I}_i^{\,A} \widehat{s}_i} \qquad (4.60)$$

$\ddot{q}_i$ 'yi tekrar denklem 4.58'de yerine koyarak bir dahaki iterasyon için $\widehat{a}_i$ bulunabilir. Denklem 4.58'in başlama değeri

$$\widehat{a}_0 = \widehat{0} \qquad (4.61)$$

olarak düşünülebilir. Yerçekimi, tabana sanal bir ivme $-\widehat{g}$ kazandırmakla sağlanabilir. Bu durumda başlama değeri;

$$\widehat{a}_0 = -\widehat{g} \qquad (4.62)$$

olarak düşünülebilir ($\widehat{g}$, yerçekimi ivme vektörü).

SONUÇ ve ÖNERİLER

Yerçekiminin olmadığı ortamda herhangi bir hareketin kontrol edilmesi incelenmesi gereken bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır. Sözgelimi bir uzay aracına bağlı bir robot kol hareket ettirildiğinde, bağlı bulunduğu araç da harekete geçmektedir. Yörüngenin kalmanın önemli bu durumda bu tür bir hareket istenmeyen sonuçlar doğurabilir. Ters itki motorları ile kontrol edilmesi gereken bu tepki hareketi yakıt maliyetinin artmasına neden olmaktadır.

Bu çalışmada, robot kolun hareketinin, zaman içinde yer değiştiren üzerinde bulunduğu tabanın hareketine, bağlı olmasını sağlayan bir modelleme üzerinde çalışılmıştır. Böylelikle sadece ana gövdenin hareketi ile n eklemli bir yapının en uçtaki elemanının hareketi arasında bağlantı kurmak mümkün olabilmektedir. Uzaysal kinematik ve dinamik yaklaşımlardan hareketle serbest yüzen n eklemli bir yapının pozisyon, hız ve ivme denklemleri bağlı bulunduğunu gövdenin hız ve ivmesine bağlı olarak türetilmiştir.

Bu şekilde türetilmiş hareket denklemlerinin denetlenmesi ile belli bir düzlemde, eklemleri ayrıca hareket ettirmeden, robot kolun ucunda bulunan tutamacın pozisyonu kontrol edilebilir. Yörünge üzerinde kalabilmek üzere hareket ettirilecek ana gövdenin robot kol üzerindeki etkisi hesaplanabilir.

Etkiye karşı oluşan tepkinin daha kritik sonuçlar ortaya çıkardığı uzay ortamında bu ilişkinin bilinmesi önemlidir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Featherstone, R. 1987, Robot dynamics algorithms, Kluwer Academic Publishers Norwell, MA, USA, 211p.

Liang-Boon, W. and Walker, M.W. and McClamroch, N.H., 1997, An articulated-body model for a free-flying robot and its use for adaptive motion control, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol.13 no.2, 14p.

Özkan, Metin. 2000, Serbest yüzen uzay robotlarının kontrolü, T.C. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 102s.

Papadopoulos, E. and Dubowsky, S., 1991, On the nature of control algorithms for free-floating space manipulators, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol.7 no.6, 9p.

ODTÜ Robot Topluluğu, Alındığı tarih: 19 Mart 2006, yer: http://robot.metu.edu.tr/dosya/robot_nedir.pdf