Asosyatif Olmayan Cebirlerin Sınıflandırılması

Elis Soylu Yılmaz

DOKTORA TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Mart 2019

Classification of Nonassociative Algebras

Elis Soylu Yılmaz

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics - Computer Science

March 2019

Asosyatif Olmayan Cebirlerin Sınıflandırılması

Elis Soylu Yılmaz

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Bilgisayar Bilimleri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Alper Odabaş

Bu Tez ESOGÜ BAP tarafından“2015-763” no’lu proje çerçevesinde ve TÜBİTAK/2211-A
Yurtiçi Doktora Burs programı kapsamında desteklenmiştir

Mart 2019

ONAY

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı DOKTORA öğrencisi Elis Soylu Yılmaz'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "**Asosyatif Olmayan Cebirlerin Sınıflandırılması**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca oybirliğiyle değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Alper Odabaş

İkinci Danışman : -

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Alper Odabaş

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye : Prof. Dr. Erdal ULUALAN

Üye : Doç. Dr. Ahmet BOZ

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ahmet Faruk ASLAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Alper Odabaş danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Asosyatif Olmayan Cebirlerin Sınıflandırılması**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 05/03/2019

Elis Soylu Yılmaz

ÖZET

Bir grubun kendi üzerine etkisi (veya kısaca grup ile etki) kavramı T. Datuashvili tarafından, J. L. Loday'in yaptığı çalışmalarda "coquecigrues" adı verilen cebirsel objeleri Lie cebirlerinde olduğu gibi Leibniz cebirleri içinde oluşturmak amacıyla ortaya koyduğu problemin çözümü olarak tanımlanmıştır. Sonlu gruplar üzerinde tanımlanan grup ile etkilerin özellikleri incelemek ilginç sonuçlar verecektir.

Cebirin bir bilgisayar uygulaması olan GAP (Group, Algorithm and Programming), yeni matematiksel yapıların bilgisayar ortamına aktarılmasında birçok avantajları olan güçlü bir programlama dilidir. Almanya, Aachen RWTH ve İngiltere, St. Andrews de geliştirilen GAP, oldukça gelişmiş, anlaşılması kolay ve grup teoride çok güçlü kütüphanelere sahip açık kaynak kodlu bir programlama dilidir.

Whitehead tarafından tanımlanan çaprazlanmış modül kavramı ise bir cebirsel sistemdir. Çaprazlanmış modül bazı fiziksel problemlerin çözümünde iki boyutlu gruplar olarak düşünülebilir. Gruplar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüllerin GAP ortak paketi XMod, ilk olarak Wensley ve Alp tarafından oluşturulmuştur. Çaprazlanmış modüller değişmeli cebirlerde ve fizikteki Quantum alan teorisinde de kullanılır. Değişmeli cebirler üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüllerin GAP ortak paketi XModAlg adıyla Arvasi ve Odabaş tarafından geliştirilmiştir.

Bu tez çalışmasında 2-boyutlu grup ile etki olarak düşünülebilecek grup ile etki çaprazlanmış modülü kavramı tanımlanmış ve çeşitli kategoriksel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu yapıyı bilgisayar ortamına aktararak sınıflandırılmasına olanak sağlayacak olan XModGwA isimli bir GAP paketi geliştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Grup ile etki, sınıflandırma, çaprazlanmış modül, internal kategori , GAP

SUMMARY

An action on group itself (or shortly group with action) has been defined with a problem solution on Leibniz algebras like composing the algebraic objects on Lie algebras named as “coquecigrues” by T.Datuashvili. Examining properties on a group with action on finite groups will be yield interesting results.

GAP (Group, Algorithm and Programming), a computer application on algebra, is a strong programming language that has a lot of advantages to transfer new mathematical structures. GAP is advanced, easy to understand and has a powerful libraries with open source coding programming language that developed in Aachen RWTH, Germany and St. Andrews, England.

Crossed modules is a algebraic system defined by Whitehead. Crossed modules can be thought as two dimensional group solving some physical problems. XMod, common package on crossed modules with groups was introduced by Wensley and Alp. Crossed modules is used by commutative algebras and Quantum theory on pyhsics. Crossed modules on commutative algebras named with common GAP package XModAlg was developed by Arvasi and Odabaş.

In this thesis, group with action crossed modules as 2- dimensional group with action was defined and investigated some categorical properties. In addition, GAP package named with XModGwA was improved to providing the classification to adapt computer workspace.

Keywords: Group with action, classification, crossed module, internal category, GAP

TEŞEKKÜR

Bu doktora tez çalışmasında yardımlarını esirgemeyen, yönlendirmeleriyle bana yardımcı olan sayın **Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ**'ye ve danışmanım sayın **Doç.Dr. Alper ODABAŞ**'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez 2211-A Genel Yurt içi Doktora Burs programı tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez ESOGÜ BAP tarafından"2015-763" no'lu proje çerçevesinde desteklenmiştir. ESOGÜ BAP'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmanın her aşamasında her türlü desteği ve yardımını hissettiğim, her zaman yanımda olan

sevgili eşim ve değerli aileme

en içten ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Elis SOYLU YILMAZ

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER(devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Grup ile etki tanımı ilk olarak J. -L. Loday'in T. Datuashvili için verdiği bir probleme çözüm olarak ortaya çıkmıştır. Bu problemler Leibniz cebirleri ile alakalıdır. Leibniz cebirleri ilk olarak Loday tarafından 1989 yılında tanımlanmıştır. Lie cebirlerinin asosyatif olmayan karşılığı olarak düşünülmüştür. 1937 yılında E. Witt'in inşaası ile

$$F : \mathfrak{Gr} \longrightarrow \mathfrak{Lie}$$

funktoru bilineer dönüşümler ve merkez serileri yardımıyla tanımlanmıştır. Burada $\mathfrak{Gr}$, gruplar kategorisini $\mathfrak{Lie}$, Lie cebirleri kategorisini ifade etmektedir.

J.-L. Loday tanımlanan F funktorunun Leibniz cebirlerine uyarlanmasını da içeren üç problemi T. Datuashvili'ye vermiştir. Gruplara karşılık gelen Lie cebirleri yapısına benzer şekilde Leibniz cebirleri için de hangi yapının karşılık geleceği 'coquecigrue' olarak adlandırılan cebirsel yapının tanımlanmasıyla çözülebilmektedir. $\mathfrak{Leibniz}$, Leibniz cebirler kategorisini göstermek üzere, Datuashvili bu cebirsel yapı için

$$? \longrightarrow \mathfrak{Leibniz}$$

funktorunu tanımlamak üzere '?' ile belirtilen kategorinin grup ile etki kategorisi olduğunu belirtmiştir. Bu kategori kısaca $\mathfrak{Gr}^{\bullet}$ (veya GwA) ile gösterilir. Bu funktor ile elde edilecek kategoriksel denklik için $\mathfrak{Gr}^{\bullet}$ kategorisinin ek bir şartı sağlaması gerekir. Bu şart 'Şart 1' ismiyle

$$x - x^{(z^x)} + x^{(y+z^x)} - x + x^z - x^{(z+y^z)} = 0$$

şeklinde ifade edilir. Bu şartı sağlayan kategori $\mathfrak{Gr}^C$ ile gösterilir. $\mathfrak{LL}$, Lie - Leibniz kategorisini göstermek üzere

$$\mathfrak{Gr}^C \longrightarrow \mathfrak{LL} \longrightarrow \mathfrak{Leibniz}$$

funktorları yardımıyla bir grup ile etki ve bir Leibniz cebiri arasında bağlantı kurulmuş olur (Bkz Datuashvili, 2006).

Grup ile etki yapısı: $(G, +)$ bir grup ve ϵ, G üzerinde g, h elemanları için $\epsilon(g, h) = g^h$ şeklinde tanımlanan bir ikili işlem olsun.

$$\begin{aligned}
\varepsilon(g, g' + g'') &= \varepsilon(\varepsilon(g, g'), g'') \\
\varepsilon(g, 0) &= g \\
\varepsilon(g' + g'', g) &= \varepsilon(g', g) + \varepsilon(g'', g) \\
\varepsilon(0, g) &= 0
\end{aligned}$$

şartlarını sağlıyorsa $G^{\bullet} = (G, \epsilon)$ ikilisine grup ile etki denir.

Örnek: G bir grup ve kendi üzerinde tanımlanan sağ konjuge etki ile $G^{\bullet}$ bir grup ile etkisi oluşur.

Örnek: G bir grup ve elemanları $\mathbb{Z}$ tamsayılarından oluşan abelyan grup ile $x^y = (-1)^y x$ etkisi tanımlansın. G grubu x^y etkisi ile bir $G^{\bullet}$ oluşur.

(G, ε_G) ve (G', ε'_G) iki grup ile etkisi tanımlansın. $\phi : G \longrightarrow G'$ grup homomorfizmi olmak üzere $g, h \in G$ için

$$\phi(g^h) = \phi(g)^{\phi(h)}$$

eşitliği sağlanıyorsa $(G, \varepsilon_G) \longrightarrow (G', \varepsilon'_G)$ grup ile etki homomorfizmi tanımlanır.

A, G nin boş kümeden farklı alt kümesi olmak üzere $a \in A, g \in G$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $A^{\bullet}$, $G^{\bullet}$ nin bir ideali olarak adlandırılır.

i) A, G nin bir normal alt grubu,

ii) $a^g \in A$,

iii) $-g + g^a \in A$

$G \in \mathfrak{Gr}^{\bullet}$ olmak üzere

$$G = G_1 \supset G_2 \supset ... \supset G_n \supset G_{n+1} \supset ...$$

azalan merkez serisi tanımı ile

$$G_n = [G_1, G_{n-1}] + [G_2, G_{n-2}] + ... + [G_{n-1}, G_1]$$

toplamı G nin bir ideali olur.

$G \in \mathfrak{Gr}^{\bullet}$ olsun. $g, h \in G$ için

$$\begin{array}{rccl} [,]: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g,h) & \longmapsto & [g,h] = -g + g^h \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm yardımıyla $G^{[\,]}$ yapısı elde edilir. Böylece $[,]$ dönüşümü ile $\mathfrak{Gr}^{[\,]}$ kategorisi oluşur. $G^{[\,]}$ üzerinde

$$g^h = g + [g, h]$$

etkisi tanımlanarak $G^{\bullet}$ ile $G^{[\,]}$ birbirlerine denk kategoriler oluşturulur (Datuashvili, 2006).

$\mathfrak{Gr}^{C}$ kategorisinden funktorlar yardımıyla bir Leibniz cebiri elde edilir. Dolayısıyla şart 1'i sağlayan grup ile etki yapılarından bir Leibniz cebiri elde edilmiş olur.

$IntGwA$, internal gruplar kategorisi ve $GwASimp_{\leq 1}$, simplisel grup ile etki kategorisini göstermek üzere

$$GwASimp_{\leq 1} \rightleftarrows GwA \rightleftarrows IntGwA$$

diyagramı ile bu kategoriler arasındaki funktorlar yardımıyla denkliklerini görmek mümkündür. Tezin 4.7. ve 5. bölümlerinde bu denklikler kategoriksel olarak ispat edilmiştir. Bu denkliklerin gösterilebilmesi için $G^{\bullet}$, $H^{\bullet}$ grup ile etkileri olmak üzere

$$G^{\bullet} \rtimes H^{\bullet}$$

yarı-direkt çarpımının bir grup ile etki yapısında olmasını sağlayacak olan etki tanımı bulunarak gerekli şartları sağladığı ispatlanmıştır. Grup ile etki üzerinde çaprazlanmış modül ve internal kategori tanımları yapılarak aralarındaki denklik bu tezde gösterilmiştir.

Grup ile etki kavramı GAP (Group, Algorithm and Programming) programlama dili kullanılarak A. Odabaş vd. tarafından yazılan GwA paketi ile bilgisayar ortamına aktarılmıştır. GwA paketinde yer alan fonksiyonlar yardımıyla herhangi bir grup üzerinde oluşan tüm grup ile etki yapıları elde edilebilir. Şart 1'in sağlanıp sağlanmaması, ideallik, merkez serileri, nilpotentlik, komütatör ve singülerlik gibi cebirsel özellikler yine GwA paketiyle birlikte bilgisayar ortamına aktarılmıştır. GwA paketi kullanılarak grup ile etkiler üzerinde sınıflandırmalar yapılmış ve şart 1'i sağlayan yapılar bulunarak E. Uslu vd. 2017 çalışmasında yayınlanmıştır.

Bu tez çalışması kapsamında XModGwA isimli bir GAP paketi hazırlanacaktır. XModGwA ile ilk olarak grup ile etki kavramı üzerinde tanımlanan morfizm ve etkiler bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Verilen herhangi grup ile etki yapısı arasında tanımlanan tüm etki ve morfizmlerin bulunabileceği fonksiyonlar yazılmıştır. Daha sonra grup ile etki üzerinde çaprazlanmış modül yapısını oluşturacak `PreXModGwAObj(bdy,act)` fonksiyonu yazılmıştır. Elde edilen yapının gerekli şartları sağlayıp sağlamadığını kontrol eden `IsPreXModGwA` ve `IsXModGwA` fonksiyonları geliştirilmiştir.

Herhangi bir grup ile etki ve ideali kullanılarak çaprazlanmış modül elde etmek için `IdealXModGwA` fonksiyonu yazılmıştır. Ayrıca `IsXModGwAC1` fonksiyonu ile çaprazlanmış modülün şart 1'i sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmektedir. Bu özelliğin sağlandığı grup ile etkiler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin doğal olarak Leibniz cebirler üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüllere denk olduğu düşünülmektedir.

`AllXModGwAType1()` fonksiyonu iki grup ile etki arasındaki tanımlanabilir tüm çaprazlanmış modülleri bulmak için geliştirilmiştir. Bununla birlikte `AllXModGwAType2` fonksiyonu ile verilen iki grup arasında tanımlanabilen tüm grup ile etki çaprazlanmış modülleri oluşturulabilir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Tanım 2.0.1 *(Bir grubun herhangi bir grup üzerine etkisi)*

C ve G birer grup,

$$C \times G \longrightarrow C$$

$$(c, g) \mapsto c^g$$

fonksiyonu her $c_1, c_2 \in C$ ve $g_1, g_2 \in G$ için

i) $c^{g_1 g_2} = (c^{g_1})^{g_2}$

ii) $(c_1 c_2)^g = c_1^g c_2^g$

iii) $c^{1_G} = c$

*eşitliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona G nin C üzerine **sağ etkisi** adı verilir. C grubuna ise G-küme denir. Herhangi bir kategoride etki split tam dizi yardımıyla elde edilebilir. Etki yardımıyla C üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlanır. Bu tanıma denk olarak $Aut(C)$, C nin otomorfizm grubu olmak üzere $\alpha : G \longrightarrow Aut(C)$ biçimindeki her α grup homomorfizmi kullanılarak*

$$(c, g) \mapsto c^g = \alpha(g) : \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C \\ c & \longmapsto & \alpha(g)(c) \end{array}$$

etkisi tanımlanabilir.

Tanım 2.0.2 *G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Her $h \in H$ ve $g \in G$ için $(g, h) \mapsto g^h = h^{-1}gh$ tanımlanan H nın G üzerine kuralıyla etkisine eşlenik etki denir. H yerine G alınarak bir grubun kendi üzerine eşlenik etkisi tanımlanır.*

Tanım 2.0.3 *C ve T iki $G-$küme olsun. Yani*

$$C \times G \longrightarrow C \text{ ve } T \times G \longrightarrow T$$

etkileri varken bir $f : C \longrightarrow T$ *fonksiyonu her* $c \in C$ *için*

$$f(c^g) = f(c)^g$$

şartını sağlıyor ise f *ye* $G-$*equivariant fonksiyon denir.*

Tanım 2.0.4 *(Yarıdirekt çarpım)*

G ve H birer grup, $G \times H$ bu grupların kartezyen çarpımı olsun. Her $g_1, g_2 \in G$ ve $h_1, h_2 \in H$ için $G \times H$ üzerinde

$$\begin{array}{rlcl} * : & (G \times H) \times (G \times H) & \longrightarrow & G \times H \\ & ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) & \longmapsto & (g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 g_2, g_1^{h_2} g_2) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan G ve H ın ***yarıdirekt çarpımı*** *denir ve $G \rtimes H$ ile ifade edilir.*

$G \times H$ üzerinde tanımlanan $*$ işlemi ile $(G \times H, *)$ bir grup yapısı belirtir. Grubun birim elemanı $1_{G \rtimes H} = (1_G, 1_H)$ ve ters elemanı da $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, (g^{-1})^{h^{-1}})$ olarak bulunur (Rose, 1994).

Tanım 2.0.5 *(Kategori)*

$\mathcal{C} = (Ob(\mathcal{C}), Mor(\mathcal{C}), Mor(\mathcal{C}) \times Mor(\mathcal{C}) \longrightarrow Mor(\mathcal{C}); Aksiyomlar)$ biçiminde verilen bir sistem için,

i) $Ob(\mathcal{C})$, bir sınıftır.Bu sınıfın elemanlarına obje denir.

ii) $Mor(\mathcal{C})$ bir kümedir. Bu kümenin elemanları morfizm(veya ok) denir. Buradan her A ve B objeleri için,

$$Mor_{\mathcal{C}}(A, B)(\textit{veya } \mathcal{C}(A, B))$$

kümesi, A dan B ye giden tüm morfizmlerin kümesidir. iii) Her objeye karşılık bir morfizm var olmalıdır. Yani A objesi için,

$$1_A : A \longrightarrow A$$

morfizmi vardır. Bu morfizme birim morfizm denir.

iv) $f : A \longrightarrow B$ ve $g : B \longrightarrow C$ morfizm çifti için bir tek

$$gf = g \circ f : A \longrightarrow C$$

morfizmi vardır. Bu morfizme f ve g nin kompozisyonu denir. Yani kompozisyon

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}(A,B)\times\mathcal{C}(B,C) & \stackrel{\circ}{\longrightarrow} & \mathcal{C}(A,C) \\ (f,g) & \mapsto & \circ(f,g)=gf=g\circ f \end{array}$$

şeklinde bir fonksiyondur. Bu durumda $\mathcal{C}$ sistemi aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa $\mathcal{C}$ ye bir kategori denir.

K1)(Asosyatiflik) $f: A \longrightarrow B, g: B \longrightarrow C$ ve $h: C \longrightarrow D$ morfizmleri için

$$h(gf) = (hg)f$$

dir. Yani

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h(gf)=(hg)f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "gf"] & D \\ B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "hg"] & C \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Şekil 2.1: Kategori K1 Aksiyomu

şekil 1.1 diyagramının değişmeli olmalıdır.

K2)(Birimlilik Aksiyomu) $f: A \longrightarrow B$ bir morfizm olmak üzere,

$$f.1_A = 1_B.f = f$$

dir.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f1_A=f=1_Bf"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, "f1_A"] & B \\ A \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "1_Bf"] & B \arrow[u, "1_B"'] \end{tikzcd}$$

(Arvasi, 2013).

Tanım 2.0.6 *(Küçük Kategori)*

$Ob(\mathcal{C})$ sınıfı küme ise $\mathcal{C}$ ye bir ***küçük kategori*** *denir. $\mathcal{C}$ küçük kategorisinin ayrıntılarına bakalım.*

$$Ob(\mathcal{C}) = O\&Mor(\mathcal{C}) = A$$

obje ve morfizm kümeleri verilsin.

$$A \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} O$$

fonksiyonları tanımlayalım. $a \in A$ *ise*

s(a) & t(a)∈O

dır. O halde $a \in A$ *morfizmi olmak üzere*

$$s(a) \xrightarrow{a} t(a)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki s *ve t fonksiyonlarına sırasıyla*

kaynak(source) & hedef (target)

fonksiyonları denir.

$$O \xrightarrow{e} A$$

fonksiyonunu tanımlayalım.Bu durumda her $x \in O$ *objesi için*

$$e(x) = 1_x : x \longrightarrow x$$

şeklinde birim morfizm vardır. Yani

$$\begin{tikzcd} \cdot x \arrow[loop above, "e(x)=e_x"] \end{tikzcd} = s(e_x) = t(e_x)$$

vardır.

$$\begin{array}{rcl} \bullet : A \times A & \longrightarrow & A \\ (a,b) & \longmapsto & \bullet(a,b) = b \bullet a \end{array}$$

fonksiyonunun tanımlı olması için

$$t(a) = s(b)$$

olmalıdır. Çünkü

$$\begin{tikzcd} s(a) \arrow[r, "a"] \arrow[rr, bend right, "ba"'] & t(a) = s(b) \arrow[r, "b"] & t(b) \end{tikzcd}$$

dır. Ayrıca

$$s(ba) = s(a) \xrightarrow{ba} t(b) = t(ba)$$

dır. O halde kompozisyon

$$A \times_{\circ} A = \{(a,b) | t(a) = s(b)\} \subseteq A \times A$$

şeklinde fiber çarpım olur (Arvasi, 2013).

Tanım 2.0.7 *(Funktor)*

$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun.

$$F : Mor(\mathcal{C}) \longrightarrow Mor(\mathcal{D})$$

fonksiyonu,

F1) $\mathcal{C}$ nin herhangi bir A objesi için

$$F(id_A) = id_{F(A)}$$

F2) $g \circ f$, $\mathcal{C}$ kategorisinde bir kompozisyon olmak üzere

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

şartlarını sağlıyorsa F ye $\mathcal{C}$ kategorisinden $\mathcal{D}$ kategorisine bir ***funktor*** *denir ve*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}(\textit{veya } (\mathcal{C}, F, \mathcal{D}))$$

ile gösterilir (Arvasi, 2013).

Tanım 2.0.8 *(Denk Kategoriler)*

$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olsun.

$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ve $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktorları olmak üzere

$$\eta : GF \implies I_{\mathcal{C}}$$

ve

$$\zeta : FG \implies I_{\mathcal{D}}$$

doğal transformasyonları ise $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorilerine ***denk kategoriler*** *denir (Arvasi, 2013).*

Tanım: (Leibniz Cebirleri)

k, bir değişmeli halka olmak üzere L **k** halkası üzerinde tanımlanmış bir modül olsun. $\forall x, y, z \in L$ için

$$[\_,\_] : L \times L \longrightarrow L$$

şeklinde tanımlanan bilineer dönüşümü yardımıyla

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

Leibniz özdeşiğini sağlasın. Bu durumda $(L, [\ ])$ yapısına **Leibniz cebiri** denir (Loday, Pirashvili, 1993).

3. GRUP İLE ETKİ YAPISI

3.1 Giriş

Lie cebirler kategorisi ile gruplar kategorisi arasındaki funktor tanımı ilk olarak E.Witt tarafından verilmiştir. Witt tarafından oluşturulan funktor yapısına benzer olarak Leibniz cebirler kategorisine karşılık gelen 'Grup ile Etki' kavramı T. Datuashvili tarafından uyarlanmıştır. Yani Datuashvili Leibniz cebirler kategorisinden grup ile etki kategorisine bir funktor tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir (Datuashvili, 2017).

Ayrıntılar için T. Datuashvili'nin "Categorical, Homological and Homotopical Properties of Algebraic Objects" isimli tezine bakılabilir (Datuashvili, 2017).

GAP uygulamalarında gerekli olan komutlar için bu bölümde grup ile etki tanımına yer verilerek, özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1.1 *G bir toplamsal grup ve*

$$\begin{array}{rrcl} \varepsilon: & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (g,h) & \longmapsto & \varepsilon(g,h)=g^h \end{array}$$

etkisi verilsin.

Her $g, g', g'' \in G$ için ε fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \varepsilon(g, g'+g'') &= \varepsilon(\varepsilon(g,g'),g'') \\ \varepsilon(g,0) &= g \\ \varepsilon(g'+g'',g) &= \varepsilon(g',g)+\varepsilon(g'',g) \\ \varepsilon(0,g) &= 0 \end{aligned}$$

şartlarını sağlıyorsa (G,ε_G) yapısına ***grup ile etki*** *(group with action) adı verilir. Kısaca $G^\bullet=(G,\varepsilon_G)$ ile gösterilir. $\varepsilon(g,h)=g^h$ ile ifade edilir.*

3.1.1 Grup ile Etki Homomorfizması

(G,ε_G) ve (G',ε'_G) iki grup ile etki ve $\phi : G \longrightarrow G'$ grup homomorfizmi olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "(\varphi,\varphi)"'] & G \arrow[d, "\varphi"] \\ G' \times G' \arrow[r, "\varepsilon'"] & G' \end{tikzcd}$$

Şekil 3.1: Homomorfizm

diyagramı değişmeli ise

$$(G,\varepsilon_G) \longrightarrow (G',\varepsilon'_G)$$

dönüşümü bir grup ile etki homomorfizmi olarak adlandırılır. Ayrıca $g,h \in G$ için diyagramın değişmeliliğinden

$$\phi(g^h) = \phi(g)^{\phi(h)}$$

eşitliği sağlanır. G grubu üzerindeki etki yapısı,

$$\varphi : G \longrightarrow AutG$$

bir grup homomorfizmi olarak düşünülebilir. Dolayısıyla iki grup ile etki arasındaki homomorfizm, bu yaklaşım ile

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "v"] \arrow[dd, "\varphi"'] & AutG \subset Hom(G,G) \arrow[d, "Hom(G,\varphi)"] \\ & Hom(G,G') \\ G' \arrow[r, "v'"] & AutG' \subset Hom(G',G') \arrow[u, "Hom(\varphi,G')"'] \end{tikzcd}$$

Şekil 3.2: Grup ile Etki Homomorfizmi

diyagramının değişmeli olmasına karşılık gelir. $h \in G$ olmak üzere

$$\phi.(\varphi(h)) = \varphi'(\phi(h)).\phi$$

eşitliği iki grup ile etki arasındaki homomorfizme karşılık gelir. G bir grup, $G^\bullet = (G,\varepsilon_G)$ grup ile etki ve iki grup ile etki arasındaki homomorfizm yapıları ile birlikte **Grup ile Etki Kategorisi** oluşur. Bu kategori $\mathfrak{Gr}^\bullet$ ile gösterilir.

Örnek 1 *Abelyan grup ile etki kategorisi $\mathfrak{Ab}^\bullet$ ile ifade edilir. Gruplar kategorisi ile bu kategoriler arasındaki ilişki funktorlar ile incelenebilir. $G \in \mathfrak{Gr}^\bullet$ olmak üzere*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Ab}^\bullet \arrow[r, shift left, "E"] & \mathfrak{Gr}^\bullet \arrow[l, shift left, "A"] \arrow[r, shift left=4.5, "Q_1"] \arrow[r, shift right=1.5, "Q_2"] & \mathfrak{Gr} \arrow[l, shift right=1.5, "T"'] \arrow[l, shift left=4.5, "C"]
\end{tikzcd}$$

Şekil 3.3: Funktorlar

*diyagramındaki **A** funktoru, (G, G) komütatörü tarafından ideale karşılık gelmek üzere $A(G) = G/(G, G)$ abelyanlaştırma funktoru olarak adlandırılır. Her bir $\mathfrak{Ab}^\bullet$ objesi $\mathfrak{Gr}^\bullet$ olarak düşünülebilir. Bu funktor **E** funktorunu ifade eder. Aşikar etki ile oluşan bölüm grubu Q_1 funktoru ile, $g^h \sim -h + g + h$ etkisi ile oluşan bölüm grubu Q_2 funktoru ile oluşturulur. Her grup sırasıyla aşikar etki ve konjuge etki ile T ve C funktorları yardımıyla grup ile etki yapısına dönüştürülür. Ayrıca Q_1, Q_2 ve A funktorları T, C ve E funktorlarının sol ekidir.*

Önerme 1 *$G \in \mathfrak{Gr}^\bullet$ olsun. $g, h \in G$ olmak üzere*

$$\begin{array}{rccl}
[,]: & G \times G & \longrightarrow & G \\
 & (g, h) & \longmapsto & [g, h] = -g + g^h
\end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm
i) $[g, h_1 + h_2] = [g, h_1] + [g + [g, h_1], h_2]$
ii) $[g + g', h] = -g' + [g, h] + g' + [g', h]$
iii) $[g, 0] = [0, g] = 0$

özellikleri sağlar (Datuashvili, 2002).

İspat 1 *Her $g, g', h, h_1, h_2 \in G$ için*
i)

$$\begin{aligned}
[g, h_1] + [g + [g, h_1], h_2] &= [g, h_1] + [g + (-g + g^{h_1}), h_2] \\
&= [g, h_1] + [g^{h_1}, h_2] \\
&= -g + g^{h_1} + [g^{h_1}, h_2] \\
&= -g + (g^{h_1})^{h_2} \\
&= [g, h_1 + h_2]
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
[g+g',h] &= -(g+g')+(g+g')^h \\
&= -g'-g+g^h+(g')^h \\
&= -g'+[g,h]-[g,h]-g+g^h+(g')^h \\
&= -g'+[g,h]+g'+[g',h]
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
[g,0] &= -g+g^0=-g+g=0 \\
[0,g] &= -0+0^g=0
\end{aligned}$$

Sonuç 1 *Her $g,h\in G$ için*

$$\begin{aligned}
[g^h,-h] &= -[g,h] \\
[-g,h] &= g-[g,h]-g
\end{aligned}$$

dır.

Önerme 3 deki şartlarını sağlayan $[,]$ dönüşümü ile birlikte aralarındaki yapıyı koruyan grup homomorfizmleri düşünülürse $\mathfrak{Gr}^{[\,]}$ kategorisi oluşur. $\mathfrak{Gr}^{[\,]}$ kategorisinin objeleri $G^{[\,]}$ ile ifade edilir. $G^{[\,]}$ yapısı bir grup ile işlem (group with operation) yapısına karışılık gelmektedir.

Önerme 2 *$G^{[\,]}\in\mathfrak{Gr}^{[\,]}$ olmak üzere, $G^{[\,]}$ üzerinde*

$$g^h=g+[g,h]$$

etkisi tanımlanabilir. Dolayısıyla $Gr^{\bullet}$ ile $Gr^{[\,]}$ denk kategorileri karşılıklı olarak oluşturulur.

İspat 2 *Bu önermenin ispatına Datuashvili, 2017 dan bakınız.*

3.1.2 İdeal ve Komütator tanımları

Tanım 3.1.2 *$G^\bullet \in \mathfrak{Gr}^\bullet$ ve A, G nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Her*

i) A, G nin bir normal alt grubu,

ii) $a \in A, g \in G$ için $a^g \in A$,

iii) $a \in A, g \in G$ için $-g + g^a \in A$

*şartlarını sağlıyorsa $A^\bullet, G^\bullet$ grup ile etkisinin bir **idealidir** denir.*

$\mathfrak{Gr}^\bullet$ kategorisinde $G^\bullet$ nin bir ideali, $G^\bullet$ grup ile etkisinin bir alt objesidir. Böylece $G^\bullet$ kendisi ve aşikar altobjesi $G^\bullet$ nin bir idealidir.

Önerme 3 *$G^\bullet \in \mathfrak{Gr}^\bullet$ ve $A^\bullet, G^\bullet$ nin bir ideali olsun. $a_1, a_2 \in A$ ve $g_1, g_2 \in G$ olmak üzere*

$$(a_1 + g_1)^{a_2+g_2} \in g_1^{g_2} + A$$

sağlanır (Datuashvili, 2002).

İspat 3 *$a_1', a_2' \in A$ ve A, G nin ideali olduğundan*

$$\begin{aligned} a_1 + g_1 &= g_1 + a_1' \\ a_2 + g_2 &= g_2 + a_2' \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned} (a_1 + g_1)^{a_2+g_2} &= (g_1 + a_1')^{g_2+a_2'} \\ &= (g_1^{g_2})^{a_2'} + (a_1')^{g_2+a_2'} \\ &= g_1^{g_2} - g_1^{g_2} + (g_1^{g_2})^{a_2'} + (a_1')^{g_2+a_2'} \in g_1^{g_2} + A(\because -g_1^{g_2} + (g_1^{g_2})^{a_2'} \in A) \end{aligned}$$

dır.

$A^\bullet$ ve $B^\bullet, G^\bullet$ grup ile etkisinin alt objeleri olsun.

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \subseteq G$$

olmak üzere $A^\bullet$ ve $B^\bullet$ tarafından üretilen $G^\bullet$ nin alt objesini $\{A, B\}$ ile gösterelim.

Önerme 4 *$A^\bullet, G^\bullet$ nin bir ideali ve $B^\bullet, G^\bullet$ nin bir alt objesi olmak üzere*

$$\{A, B\} = A + B$$

elde edilir.

İspat 4 *Açıkça $A+B \subset \{A, B\}$ dir. $A^\bullet$ bir ideal olduğundan, $A+B, G$ nin bir altgrubudur. Bir önceki önermeden;*

$$(a_1 + b_1)^{a_2+b_2} \in b_1^{b_2} + A$$

sağlanır. B, G nin altobjesi olduğundan

$$b_1^{b_2} \in B$$

ve A, G nin alt objesi olduğundan

$$b_1^{b_2} + A = A + b_1^{b_2} \in A + B$$

sağlanır. Böylece $\{A, B\} \subset A + B$ olduğu görülür (Datuashvili, 2002).

Önerme 5 *A ve B, G nin idealleri ise $A + B$ de G nin ideali olur.*

İspat 5 *Her $g \in G, a \in A, b \in B$ için*

$$\begin{aligned} g + (a + b) &= (a' + g) + b \\ &= a' + b' + g \in A + B + g \end{aligned}$$

eşitliği bazı $a' \in A$ ve $b' \in B$ için sağlanır. Böylece

$$g + (A + B) \subset (A + B) + g$$

elde edilir.

Tersine,

$$(a + b)^g \in A + B$$

olduğu açıktır. $-g + g^a \in A$ ve $-g^a + (g^a)^b$ olduğundan

$$-g + g^{a+b} = -g + g^a - g^a + (g^a)^b \in A + B$$

elde edilir. Böylece $(A + B) + g \subset g + (A + B)$ sağlandığından,

$$g + (A + B) = (A + B) + g$$

ile $A + B$ nin ideal olduğu görülür (Datuashvili, 2002).

$G \in \mathfrak{Gr}^\bullet$ ve $g, g' \in G$ için $[g, g']$, G nin $-g + g^{g'}$ elemanlarından, (g, g') komütatorü ise $-g - g' + g + g'$ elemanlarından oluşur.

Tanım 3.1.3 *$A^\bullet$ ve $B^\bullet$, $G^\bullet$ nin alt objeleri olsun. $A^\bullet$ ve $B^\bullet$ nin bir $[A, B]$ komütatorü*

$$\{[a, b], [b, a], (a, b) : a \in A, b \in B\}$$

elemanları tarafından üretilen $\{A, B\}$ nin bir idealidir.

3.1.3 Merkez Serileri

$G \in \mathfrak{Gr}^\bullet$ olsun.

Tanım 3.1.4 *Merkezi serisi (azalan)*

$$G = G_1 \supset G_2 \supset ... \supset G_n \supset G_{n+1} \supset ...$$

şeklinde tanımlanan ve

$$G_n = [G_1, G_{n-1}] + [G_2, G_{n-2}] + ... + [G_{n-1}, G_1]$$

tümevarımsal tanımı ile G nin bir idealidir.

Önerme 6 *Her $n \geq 1$, G_{n+1}, G_n nin bir idealidir.*

İspat 6 *Tanım gereği $G_2 = [G_1, G_2]$, G_1 grubunun idealidir. Böylece*

$$G_3 = [G_1, G_2] + [G_2, G_1]$$

dır. G_1, G_2 G nin altgrupları olmak üzere

$$[G_1, G_2] = [G_2, G_1]$$

sağlanır.

$$[G_1, G_2] \subset [G_1, G_1] = G_2 \subset \{G_1, G_2\}$$

ve $[G_1, G_2], \{G_1, G_2\}$ nin ideali olduğundan $[G_1, G_2]$ G_2 nin bir ideali olur ve G_3, G_2 nin ideali olduğu elde edilir.

$$G_{n+1} = [G_1, G_n] + [G_2, G_{n-1}] + ... + [G_n, G_1]$$

tanımlıdır. $1 \leq k \leq n$ *için;* $[G_k, G_{n-k+1}]$, $\{G_k, G_{n-k+1}\}$ *nın bir idealidir.* $G_n \subseteq G_k$ *olduğundan* $G_n \subseteq \{G_k, G_{n-k+1}\}$ *elde edilir.*

$$[G_k, G_{n-k+1}] \subset [G_k, G_{n-k}] \subset G_n$$

sağlanır. Böylece $[G_k, G_{n-k+1}]$, G_n *nin bir idealidir. Sonuç olarak* G_{n+1}, G_n *nin bir ideali olur (Datuashvili, 2002).*

ŞART 1: $\forall x, y, z \in G$ ve $G \in \mathfrak{Gr}^\bullet$ için

$$x - x^{(z^x)} + x^{y+z^x} - x + x^z - x^{z+y^z} = 0$$

şartı sağlanır. Şart 1 ' i sağlayan grup ile etki kategorisi $\mathfrak{Gr}^C$ ile gösterilir.

Örnek 2 *G bir grup ve $G^\bullet$ kendi üzerinde sağ konjuge etkiyle tanımlanmış bir grup ile etki olsun. $G^\bullet$ Şart 1 eşitliğini sağlar.*

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & g_1^{g_2} = -g_2 + g_1 + g_2 \end{array}$$

sağ konjuge etkisi olsun. Her $g_1, g_2, g_3 \in G$ *için*

$$\begin{aligned} g_1 - g_1^{(g_3^{g_1})} + g_1^{g_2+g_3^{g_1}} - g_1 + g_1^{g_3} - g_1^{g_3+g_2^{g_3}} &= g_1 - g_1^{(-g_1+g_3+g_1)} - g_1 - g_3 + g_1 + g_3 - g_1^{g_3-g_3+g_2+g_3} \\ &= g_1 - (-g_1 - g_3 + g_1 + g_1 - g_1 + g_3 + g_1) \\ &\quad +(-g_1 - g_3 + g_1 - g_2 + g_1 + g_2 - g_1 + g_3 + g_1) \\ &\quad -g_1 - g_3 + g_1 + g_3 - (-g_3 - g_2 + g_1 + g_2 + g_3) \\ &= g_1 - g_1 - g_3 - g_1 + g_3 + g_1 - g_1 - g_3 + g_1 - g_2 \\ &\quad +g_1 + g_2 - g_1 + g_3 + g_1 - g_1 - g_3 + g_1 + g_3 \\ &\quad -g_1 - g_2 - g_1 + g_2 + g_3 \\ &= -g_3 - g_2 + g_1 + g_2 - g_2 - g_1 + g_2 + g_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3 *Aşikar etki ile tanımlanmış her grup ile etki Şart 1 i sağlar.*

Örnek 4 *$G^\bullet$ grup ile etkisi, elemanları $\mathbb{Z}^\bullet$ tamsayılarından oluşan abelyan grup ile*
$x^y = (-1)^y x$ etkisi ile tanımlanmış olsun. $G^\bullet$, şart 1 i sağlar.
y tek tamsayısı için,

$$[x, y] = -x + x^y = -x + (-1)^y x = -2x$$

y çift tamsayısı için

$$[x,y] = -x + x^y = -x + (-1)^{2k}x = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $G^\bullet, \mathbb{Z}^\bullet$ üzerindeki x^y etkisi ile şart 1 i sağlar.

3.1.4 Merkez ve Nilpotentlik

Tanım 3.1.5 $G^\bullet \in \mathfrak{Gr}^\bullet$ *olsun. O halde*

$$Z(G^\bullet) = \{g \in G : g + h = h + g,\ g = g^h,\ h = h^g,\ \textit{her } h \in G\}$$

*kümesine $G^\bullet$ nin **merkezi** denir ve $Z(G^\bullet)$ ile gösterilir.*

Önerme 7 $G^\bullet \in \mathfrak{Gr}^\bullet$ *olsun. $Z(G^\bullet)$, $G^\bullet$ nin bir idealidir.*

İspat 7 *$g, g' \in Z(G^\bullet)$ olsun. $\forall h \in G^\bullet$,*

$$\begin{aligned}
(g-g')+h &= g - g\prime + h \\
&= g - (-h + g') \\
&= g - (g' - h) \\
&= g + h - g' \\
&= h + (h - g\prime),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g - g' &= g^h - g'^h \\
&= (g-g')^h,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h^{(g-g')} &= h^{-(g'-g)} \\
&= (-h)^{g'-g} \\
&= -(h^{g'-g}) \\
&= ((h^{g'})^{-g}) \\
&= -(h^{-g}) \\
&= h^g \\
&= h
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından $Z(G^\bullet)$, $G^\bullet$ nin alt objesidir. Diğer yandan, $\forall g \in Z(G^\bullet), h \in G^\bullet$ için

$$h + g - h = g$$

olduğundan $Z(G^\bullet), G^\bullet$ nin normal altgrubu olur. $g^h = g$ ve $-h + h^g = 0$ olduğundan $g^h \in Z(G^\bullet)$ ve $\forall g \in Z(G^\bullet), h \in G^\bullet$ için

$$-h + h^g \in Z(G^\bullet)$$

olur. Dolayısıyla $Z(G^\bullet), G^\bullet$ nin ideali olduğu elde edilir (Odabaş vd., 2015).

Tanım 3.1.6 *$\beta_1 : B_1 \longrightarrow A$, $\beta_1 : B_2 \longrightarrow A$ iki başlangıç morfizmi ve Γ_i , $i = 1, 2$ direkt çarpımın morfizmini temsil etmek üzere*

$$
\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "\Gamma_1"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & B_1 \times B_2 \arrow[d, "\beta_1 \circ \beta_2"] & B_2 \arrow[l, "\Gamma_2"'] \arrow[dl, "\beta_2"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 3.4: Direkt Çarpım

şekil 2.7 diyagramı değişmeli olmak üzere

$$\beta_1 \circ \beta_2 : B_1 \times B_2 \longrightarrow A$$

morfizmi var olduğunda β_1 ve β_1 morfizmleri değişmelidir denir.

$\alpha : B \longrightarrow A$ morfizminin merkezinin var olabilmesi için A üzerindeki birim morfizm ile α morfizmi değişmeli olmalıdır. Diğer bir deyişle

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr, equal, "1_A"'] & A \times B \arrow[d] & B \arrow[l] \arrow[dl, "\alpha"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 3.5: Merkez

şekil 2.8 diyagramı değişmeli olmalıdır. Ayrıca $\alpha : B \longrightarrow A$ monomorfizmi varsa, B A nın merkezî alt objesi olur.

Tanım 3.1.7 *Bir objenin merkezi, monomorfizmlerin kümesi üzerinde var olan sıralama bağıntısına bağlı olarak* ***en büyük merkezî alt objeleri*** *olarak tanımlanır.*

Önerme 8 *$G^\bullet \in \mathfrak{Gr}^\bullet$ olsun. O halde $Z(G^\bullet), G^\bullet$ nin en büyük merkezî alt objesidir.*

İspat 8 *$H^\bullet, G^\bullet$ nın merkezî altobjesi olsun. O halde $\alpha : H^\bullet \longrightarrow G^\bullet$ monomorfizmi vardır. $\beta : G^\bullet \times H^\bullet \longrightarrow G^\bullet$ homomorfizmi için*

$$
\begin{tikzcd}
G^\bullet \arrow[r] \arrow[dr, equal] & G^\bullet \times H^\bullet \arrow[d, "\beta"] & H^\bullet \arrow[l] \arrow[dl, "\alpha"] \\
& G^\bullet &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 3.6: Merkezi Altobje

şekil 2.9 değişmeli diyagramını verir. Böylece $\forall g \in G$ için

$$\beta(g, 0) = g$$

ve $\forall h \in H$ için

$$\beta(0, h) = \alpha(h)$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\beta(g, h) = g + \alpha(h)$ ile α homomorfizmi ile bir grup ile etki oluşur. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
\alpha(h + h') &= \beta(0, h + h') \\
&= \beta((0, h) + (0, h')) \\
&= \beta(0, h) + \beta(0, h') \\
&= \alpha(h) + \alpha(h')
\end{aligned}
$$

ve $\alpha \circ \varepsilon_H = \varepsilon_G \circ (\alpha, \alpha)$ elde edilir. Şimdi $\alpha(H^\bullet) \subseteq Z(G^\bullet)$ oldğunu göstermek için,

$$
\begin{aligned}
\alpha(h) + g &= \beta(0, h) + \beta(g, 0) \\
&= \beta(g, h) \\
&= \beta((g, 0) + (0, h)) \\
&= \beta(g, 0) + \beta(0, h) \\
&= g + \alpha(h),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g^{\alpha(h)} &= (\beta(g, 0))^{\beta(0,h)} \\
&= \beta((g, 0)^{(0,h)}) \\
&= \beta(g^0, 0^h) \\
&= \beta(g, 0) \\
&= g
\end{aligned}
$$

ve $g \in G$, $h \in H$ için

$$(\alpha(h))^g = \alpha(h)$$

elde edilir. Böylece $Z(G^\bullet)$ en büyük merkezî alt obje olarak bulunur (Odabaş vd., 2015).

Sonuç 2 *$Z(G^\bullet), \mathfrak{Gr}^\bullet$ de $G^\bullet$ nin bir en büyük merkezî alt objesidir.*

$G^\bullet \in \mathfrak{Gr}^\bullet$ olsun. $Z(G^\bullet)Z(G)$ nin bir normal altgrubudur. Ayrıca, H üzerinde konjuge etki yardımıyla $H^\bullet$ grup ile etkisi oluşturulabilir. Böylece $Z(H)$ ve $Z(H^\bullet)$ yapıları denk hale gelir.

Tanım 3.1.8 *Merkezi kendisine eşit olan grup ile etki yapısına* ***singüler grup ile etki*** *denir.*

Önerme 9 *Bir $G^\bullet$ grup ile etkisinin singüler olması için gerek ve yeter şart*

$$[G^\bullet, G^\bullet] = 0$$

olmasıdır.

Tanım 3.1.9 *$G^\bullet$ bir grup ile etki olsun. $G^\bullet$ nin (azalan) merkezî serilerinin bazı n pozitif tamsayıları için $G^\bullet_n = 0$ ise $G^\bullet$ grup ile etkisi* ***nilpotent*** *olarak adlandırılır. $G^\bullet_n = 0$ eşitliğini sağlayan en küçük $n-1$ sayısına $G^\bullet$ nin* ***nilpotentlik sınıfı*** *denir.*

Sonuç 3 *$G^\bullet \in \mathfrak{Gr}^\bullet$ olsun. $G^\bullet$ singüler ise $G^\bullet$ nilpotentlik sınıfı 1 dir.*

Önerme 10 *$G^\bullet$ bir nilpotent grup ile etki olsun. $G^\bullet$ nin nilpotentlik sınıfı 1 veya 2 ise $G^\bullet$ şart 1 eşitliğini sağlar.*

Teorem 1 *$G^\bullet$ grup derecesi 32 den küçük olan bir grup ile etki olsun. $G^\bullet$ nilpotent ise nilpotentlik sınıfı 1 veya 2 olur.*

Örnek 5 *Nilpotent olmayıp şart 1 i sağlayan grup ile etkiler de mevcuttur.*

$$Q_8 = \langle a, b, c \rangle = \{e, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$$

8.dereceden kuaterniyon grubu olsun. Şart 1 i sağlayan etki tablosu aşağıdaki gibidir (Odabaş vd., 2015).

ε	e	a	b	c	ab	ac	bc	abc
e	e	a	b	c	ab	ac	bc	abc
a	e	a	b	c	ab	ac	bc	abc
b	e	ac	abc	c	bc	a	ab	b
c	e	a	b	c	ab	ac	bc	abc
ab	e	ac	abc	c	bc	a	ab	b
ac	e	a	b	c	ab	ac	bc	abc
bc	e	ac	abc	c	bc	a	ab	b
abc	e	ac	abc	c	bc	a	ab	b

Grup ile etki yapısından şart 1 eşitliği ile bir Leibniz cebiri elde edilebilir. Bunu elde etmek için aşağıdaki teorem kullanılır. $x, y, z \in G$ için şart 1 eşitliği

$$x - x^{(z^x)} + x^{y+z^x} - x + x^z - x^{z+y^z} = 0$$

şeklindedir. $[g, h] = -g + g^h$ işlemi ile $G^\bullet \approx G^{[\,]}$ denkliği sağlanır. Buna göre şart 1 eşitliği $[\,,\,]$ işlemi ile

$$[x^y, [y, z]] = [[x, y], z^x] + [-[x, z], y^z]$$

Şart 1' eşitliğine dönüşür.

G bir grup ve bu grup üzerindeki etki sağ konjuge etkisi olsun. Yani

$$g^{g'} = -g' + g + g'$$

şeklindedir. G grubu bu etki ile şart 1 eşitliğini sağlar. Şart 1' de Witt-Hall özdeşliğine denk olur. Benzer şekilde $g^{g'} = g$ aşikar etkisi de şart 1 eşitliğini sağlar. $\mathfrak{F}_X$, X keyfi kümesi tarafından üretilen serbest grup olsun. $\mathfrak{F}_X/\sim$ şart 1'i sağlayan grupların denklik sınıfını belirtir. $\mathfrak{Gr}^{\mathfrak{C}}$ şart 1'i sağlayan grup ile etki kategorisini ifade eder.Benzer şekilde abelyan kategoriler için de $\mathfrak{Ab}^{\mathfrak{C}}$ kategorisi tanımlanır. $\mathfrak{F}_X/\sim$, $\mathfrak{Gr}^{\mathfrak{C}}$ kategorisinde bir serbest obje olsun. Üzerindeki etki aşikar veya sağ konjuge etkisi olmasın. $G \in \mathfrak{Gr}^{\mathfrak{C}}$ için

$$\overline{G_m} = G_m/G_{m+1}$$

ise

$$LL_G = \sum_{m \geq 1} \overline{G_m}$$

elde edilir.

$$x \in G_m \implies \overline{x} \in \overline{G_m} = G_m/G_{m+1}$$

olacağı açıktır.

Teorem 2 *$G^\bullet$ bir grup ile etki olsun ve şart 1 i sağlasın.*

a) $x \in G_m, y \in G_n$ için $\overline{x^y} = \overline{x}, \overline{-y+x+y} = \overline{x}$ dır.

b)

$$(,)_{mn}, [,]_{mn} : G_m \times G_n \longrightarrow G_{m+n}$$

dönüşümlerinden

$$\alpha_{mn}, \beta_{mn} : \overline{G_m} \times \overline{G_n} \longrightarrow \overline{G_{m+n}}$$

bilineer dönüşümleri oluşur.

c) $m, n \geq 1$ için α_{mn}, β_{mn} dönüşümlerinden

$$(,), [,] : LL_G \times LL_G \longrightarrow LL_G$$

üzerinde Lie-Leibniz yapısı oluşur.

İspat 9 *a) $x \in G_m, y \in G_n$ ve $m, n \geq 1$ olsun.*

$$[x, y] = -x + x^y \in G_{m+n} \subset G_m$$

ve $x \in G_m$ olduğundan

$$x^y \in G_m$$

dir. $\overline{G_m}$ de

$$\overline{[x, y]} = -\overline{x} + \overline{x^y}$$

sağlanır. Fakat $[x, y] \in G_{m+n} \subset G_{m+1}$ ve $\overline{G_m}$ kümesinde $\overline{[x, y]} = 0$ olduğundan

$$\overline{x} = \overline{x^y}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\overline{-y+x+y} = \overline{x}$ konjuge etkisi ile ifade edilir.

b) $(,)$ braketi için ispat gösterilip benzer şekilde $[,]$ için de gösterilir. Öncelikle

$$\beta_{mn} : \overline{G_m} \times \overline{G_n} \longrightarrow \overline{G_{m+n}}$$

dönüşümü tanımlanır. $\overline{x} \in \overline{G_m}, \overline{y} \in \overline{G_n}$ olsun. O halde $x \in G_m$ ve $y \in G_n$ olur. Tanımdan $\beta_{mn}(\overline{x}, \overline{y}) = [\overline{x}, \overline{y}] = \overline{[x, y]}$, $[x, y] \in G_{m+n}$ elde edilir.

$x' \in G_m$ için $\overline{x} = \overline{x'}$ olsun.

$$x - x' \in G_{m+1}$$

elde edilir.

Basit olarak gösterilirse

$$x - x' \in [G_{i+1}, G_{m-i}] \subset G_{m+1}$$

olur. O halde $x = [a,b] + x'$*,* $a \in G_{i+1}, b \in G_{m-i}$ *için*

$$\begin{aligned}\overline{[x,y]} &= \overline{[[a,b]+x',y]}\\ &= \overline{-x' + [[a,b],y] + x' + [x',y]}\\ &= \overline{-x' + [[a,b],y] + x'} + \overline{[x'+y]}\end{aligned}$$

$[[a,b],y] \in G_{m+n+1} \subset G_{m+n}$ *ve* $\overline{G_{m+n}}$ *de*

$$\overline{-x' + [[a,b],y] + x'} = \overline{[[a,b],y]} = 0$$

$$\Longrightarrow \overline{[x,y]} = \overline{[x',y']}$$

elde edilir. $x - x' = (a,b) \in [G_{i+1}, G_{m-i}] \subset G_{m+1}$ *ise*

$$\begin{aligned}\overline{[x,y]} &= \overline{[x'+(a,b),y]} = \overline{-x' + [[a,b],y] + x'} + \overline{[x',y]}\\ &= \overline{[(a,b),y]} + \overline{[x',y]} = \overline{[x',y]} (\because \overline{G_{m+n}} \text{ de } \overline{[(a,b),y]} = 0)\end{aligned}$$

β_{mn} *fonksiyonunun 2. bileşeni için doğruluğu da benzer şekilde gösterilir.* β_{mn} *fonksiyonunun bilineer olduğunu gösterelim.*

$\overline{x_1}, \overline{x_2} \in \overline{G_m}$ *ve* $\overline{y} \in \overline{G_n}$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}[\overline{x_1} + \overline{x_2}, \overline{y}] &= \overline{[x_1 + x_2, y]}\\ &= \overline{-x_2 + [x_1,y] + x_2} + \overline{[x_2,y]}\\ &= \overline{[x_1,y]} + \overline{[x_2,y]}\end{aligned}$$

gösterilir.

$\overline{x} \in \overline{G_m}$ *ve* $\overline{y_1}, \overline{y_2} \in \overline{G_n}$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}[\overline{x}, \overline{y_1} + \overline{y_2}] &= \overline{[x, y_1 + y_2]}\\ &= \overline{[x,y_1] + [x^{y_1}, y_2]}\\ &= \overline{[x,y_1]} + \overline{[x^{y_1}, y_2]}\\ &= [\overline{x}, \overline{y_1}] + [\overline{x^{y_1}}, \overline{y_2}]\\ &= [\overline{x}, \overline{y_1}] + [\overline{x}, \overline{y_2}] (\because \text{ a şıkkından})\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece β_{mn} bilineer fonksiyondur.

c)

$$LL_G \times LL_G \underset{(,)}{\overset{[,]}{\rightrightarrows}} LL_G$$

bilineer dönüşümleri yardımıyla α_{mn}, β_{mn} dönüşümleri lineer olarak oluşturulur.

$(,)$ *dönüşümü Jacobi özdeşliğini ve $(l,l) = 0$ eşitliğini sağlar. Witt teoremi yardımıyla her $l \in LL_G$ için gösterilir.*

$[\ ,\ ]$ *braketi için Leibniz özdeşliği sağlanmalıdır.*

$\overline{x} \in \overline{G_m}, \overline{y} \in \overline{G_n}, \overline{z} \in \overline{G_t}$ *olmak üzere teoremin (a) ve (b) şıkları kullanılarak,*

$$\begin{aligned}
[\overline{x}, [\overline{y}, \overline{z}]] &= [\overline{x^y}, [y, z]] = \overline{[x^y, [y, z]]} \\
[[\overline{x}, \overline{y}], \overline{z}] &= [[\overline{x}, \overline{y}], \overline{z^x}] = \overline{[[x, y], z^x]} \\
-[[\overline{x}, \overline{z}], \overline{y}] &= [-[\overline{x}, \overline{z}], \overline{y^z}] = \overline{[-[x, z], y^z]}
\end{aligned}$$

şart 1' yardımıyla

$$[\overline{x}, [\overline{y}, \overline{z}]] = [[\overline{x}, \overline{y}], \overline{z}] - [[\overline{x}, \overline{z}], \overline{y}]$$

G_{m+n+t} de sağlanır (Datuashvili, 2017).

4. GRUP İLE ETKİ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLÜ

4.1 Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak (Whitehead, 1949) tarafından verilmiştir. “Combinatorial Homotopy Theory II” isimli çalışmasıyla homotopi gruplarının cebirsel yapılarını incelemiştir . Bu bölümde, gruplar üzerinde çaprazlanmış modül tanımı verilerek, bununla ilgili örnekler incelenecektir. Bu tanımların ve önermelerin açık ifadeleri (Ege, 1998) den alınmıştır. Gruplar üzerinde internal kategori yapısının tanımı yapılarak çaprazlanmış modül ile denkliği gösterilecektir.

4.2 Giriş

Tanım 4.2.1 *G ve C birer grup, $\partial : C \longrightarrow G$ grup homomorfizmi ve $(c, g) \mapsto c^g$ G nin C üzerine sağ etkisi ile birlikte,*
CM1) ∂, $G-$ equivariant, yani G nin kendi üzerine bir eşlenik etkisi ile $g \in G$ ve $c \in C$ için

$$\partial(c^g) = g^{-1}\partial(c)g$$

CM2) Peiffer özdeşliği, yani $c, c' \in C$ için

$$c'^{\partial c} = c^{-1}c'c$$

*sağlanıyorsa ∂ homomorfizmine bir **çaprazlanmış modül** adı verilir. $\partial : C \longrightarrow G$ veya (C, G, ∂) ile gösterilir.*

∂ homomorfizmi çaprazlanmış modülün sınır (boundary) dönüşümü olarak isimlendirilir. Ayrıca yalnızca CM1 şartının sağlandığı $(\partial : C \longrightarrow G)$ cebirsel yapısı **ön çaprazlanmış modül** olarak adlandırılır.

Örnekler

1) $N \trianglelefteq G$ normal alt grubu verildiğinde

$$\begin{array}{rcccrcl} \partial : N & \overset{i}{\hookrightarrow} & G & \text{ve} & G \times N & \longrightarrow & N \\ n & \mapsto & n & & (g,n) & \mapsto & gng^{-1} \end{array}$$

(C, G, ∂) bir çaprazlanmış modüldür.

Tersine (C, G, ∂) herhangi bir bir çaprazlanmış modülü verildiğinde $\partial(C) \trianglelefteq G$ elde edilir. Burada çok önemli bir nokta ise elemanter cebirde genel olarak $\partial(C) \ntrianglelefteq G$ olmasına rağmen çaprazlanmış modüllerde bu durum her zaman sağlanır.

2) M herhangi bir $G-$ modülü verildiğinde

$$\begin{array}{rcccrcl} \partial : M & \longrightarrow & G & \text{ve} & G \times M & \longrightarrow & M \\ m & \mapsto & 1_G & & (g,m) & \mapsto & g^m \end{array}$$

işlemleriyle (M, G, ∂) bir çaprazlanmış modüldür.

3) $Aut(C), C$ nin otomorfizm grubu ve $R, Aut(C)$ nin altgrubu olmak üzere $c \mapsto \alpha(c), \alpha \in Aut(C)$ şeklindeki ∂ homomorfizmleri ile bir çaprazlanmış modüldür.

4) $c \in C, r \in R$ için $\partial : C \longrightarrow R$ homomorfizmi $c^r = c$ şeklinde bir çaprazlanmış modüldür.

5) $C_1 \times C_2$ bir çaprazlanmış modülün tanım kümesi, $R_1 \times R_2$ görüntü kümesi olmak üzere R_1, R_2 sırasıyla C_1, C_2 üzerine aşikar etkisiyle bir çaprazlanmış modüldür.

Tersine her $c \in C$ için $\partial(c) = 1_G$ özelliğinde bir (C, G, ∂) çaprazlanmış modülü verildiğinde Çek (∂) bir $G-$modüldür. Buradan aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd} \text{Çek }(\partial) \arrow[r, hook] \arrow[d, "0"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & \partial(C) \arrow[d, hook, "i"] \\ G \arrow[r] & G \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

Yani çaprazlanmış modüller normal alt gruplar ile $G-$ modüller arasında bir yerdedir.

(C, R, ∂) ve (C', R', ∂') birer çaprazlanmış modül olsun.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\psi"'] & R' \end{tikzcd}$$

diyagramının değişmeli olmasını sağlayan

$$\partial'(\theta(c)) = \psi(\partial(c))$$

eşitliği varsa ve $r \in R, c \in C$ için

$$\theta(c^r) = \theta(c)^{\psi(r)}$$

sağlanıyorsa (θ, ψ) grup homomorfizm çiftine çaprazlanmış modül morfizmi denir.

Dolayısıyla kolaylıkla **XMod** kategorisi oluşturulur.

4.3 Cebirsel Özellikler

Önerme 11 *C ve G birer grup,*

$$\begin{array}{rccc} \partial: & C & \longrightarrow & G \\ & c & \longmapsto & \partial c = g \end{array}$$

grupların bir çaprazlanmış modülü olsun.

i) ∂ homomorfizminin çekirdeği Çek $\partial = \{a \in C | \partial(a) = 1_G\}$, C grubunun merkezi olarak tanımlanan $Z(C) = \{x \in C|$ her $y \in C$ için $xy = yx\}$ nın bir alt grubudur.

ii) G nin C üzerine etkisi $c^g \in C$ ve

$$g\partial(c)g^{-1} = \partial(c^g) \in \partial(C)$$

olup ∂C, G grubunun bir normal alt grubudur.

Önerme 12 *C ve G birer grup ve $\partial : C \longrightarrow G$ çaprazlanmış modül ise Çek ∂ $(g + \partial C, a) \mapsto a^{g+\partial C} = a^g$ etkisiyle birlikte bir $G/\partial C$- modül yapısı oluşturur.*

Tanım 4.3.1 *(C,G,∂) bir çaprazlanmış modül olmak üzere,*

i) $S \leq C$ ve $H \leq G$

ii) $\partial' = \partial|_S$, ∂ nın S ye kısıtlanmışı ve

iii) H nin S üzerine etkisi, G nin C üzerine etkisi tarafından indirgenir

ise (S,H,∂') ye, (C,G,∂) nın bir ***alt çaprazlanmış modülü*** *denir ve*

$$(S,H,\partial') \leq (C,G,\partial)$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 6 *N, G grubunun bir normal alt grubu, i*

$$\begin{array}{rccc} i = id_G|_N : & N & \hookrightarrow & G \\ & n & \longmapsto & n \end{array}$$

içine fonksiyonu olmak üzere (N,G,i) , (G,G,i) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü olur.

Tanım 4.3.2 *(S,H,∂') , (C,G,∂) nın bir alt çaprazlanmış modülü olsun.*

i) H, G nin bir normal alt grubu,

ii) Her $g \in G, s \in S$ için $s^g \in S$,

iii) Her $h \in H, c \in C$ için $c^h c^{-1} \in S$

şartları sağlanıyorsa (S,H,∂') , (C,G,∂) nın ***normal alt çaprazlanmış modülü*** *olur ve*

$$(S,H,\partial') \trianglelefteq (C,G,\partial)$$

ile gösterilir.

Tanım 4.3.3 *(S,H,∂') , (C,G,∂) nın bir normal alt çaprazlanmış modülü olsun.*

$$\overline{\partial} : C/S \longrightarrow G/H$$

indirgenmiş fonksiyonu ile

$$\begin{aligned} G/H \times C/S &\longrightarrow C/S \\ (gH, cS) &\mapsto (c^g)S \end{aligned}$$

etki fonksiyonu tanımlansın. (C, G, ∂) *bir çaprazlanmış modül olduğundan* G/H *nin* C/S *üzerine etki fonksiyonu iyi tanımlı olur.* $(C/S, G/S, \overline{\partial})$ *bir çaprazlanmış modül oluşturur.*

Bu çaprazlanmış modüle ***çaprazlanmış bölüm modülü*** *adı verilir ve*

$$\frac{(C, G, \partial)}{(S, H, \partial')}$$

ile gösterilir.

4.4 İnternal Kategori

İnternal kategori literatürde $G-$grupoid, 2-grup olarak da bilinmektedir. Bu tanım ilk olarak 1976 yılında Brown ve Spencer tarafından oluşturulmuştur. Yayınladıkları makale ile çaprazlanmış modüller kategorisi ve internal kategorinin doğal denkliğini ifade etmişlerdir. İnternal kategori tanımına denk olacak şekilde Baez ve Lauda yeni bir tanım oluşturmuş, Brown ve Wensley ise çaprazlanmış modüllerle bu yapının doğal denkliğini göstermişlerdir. Böylece çaprazlanmış modüller kategorisindeki bazı özellikler internal kategori yapısı ve özellikleri yardımıyla daha genelleştirilmiş hali ile kolaylıkla gösterilmiş olur.

Tanım 4.4.1 $\mathfrak{Gr}$ *bir grup kategorisi olsun. Bir kategorinin* $\mathfrak{Gr}$ *kategorisine internal olması aşağıdaki öğelerden oluşur.*

i) C_0 *grup ile etki objelerinin objesi,*

ii) C_1 *morfizmlerin kümesi*

ile birlikte

$$s : C_1 \longrightarrow C_0$$

ve

$$t : C_1 \longrightarrow C_0$$

kaynak ve hedef grup ile etki homomorfizmleri ile

$$e : C_0 \longrightarrow C_1$$

birim grup ile etki homomorfizmini göstermek üzere

$$m : C_1 \times C_1 \longrightarrow C_1$$

kompozisyonu ifade eder. İnternal kategori bu yapıyla birlikte aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

1)

$$se = te = id$$

2) Kompozisyonların kaynak ve hedef grup ile etki homomorfizmleri için

$$\begin{tikzcd} C_1 \times C_1 \arrow[r, "m"] \arrow[d, "p_1"'] & C_1 \arrow[d, "s"] \\ C_1 \arrow[r, "s"'] & C_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_1 \times C_1 \arrow[r, "m"] \arrow[d, "p_2"'] & C_1 \arrow[d, "t"] \\ C_1 \arrow[r, "t"'] & C_0 \end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli olmalıdır.

3) Grup ile etki homomorfizmlerinin kompozisyonu için birleşme özelliği sağlanmalıdır.

$$\begin{tikzcd} C_1 \times C_1 \times C_1 \arrow[r, "m \times id"] \arrow[d, "id \times m"'] & C_1 \times C_1 \arrow[d, "m"] \\ C_1 \times C_1 \arrow[r, "m"'] & C_1 \end{tikzcd}$$

4) Grup ile etki homomorfizmlerinin kompozisyonu için sol ve sağ birim özelliği sağlanmalıdır.

$$\begin{tikzcd} C_0 \times C_1 \arrow[r, "e \times Id"] \arrow[dr, "p"'] & C_1 \times C_1 \arrow[d, "m"] & C_1 \times C_0 \arrow[l, "Id \times e"'] \arrow[dl, "q"] \\ & C_1 & \end{tikzcd}$$

Lemma 1 $(C_1, C_0, s, t, e, \circ)$ *bir internal kategori olmak üzere*

$$C_1 \cong \text{\textit{Çek}}\ s \rtimes C_0$$

sağlanır.

İspat 10 *$\forall a \in C_1$ için*

$$s : C_1 \longrightarrow C_0$$

dönüşümü için $k = a(es(a))^{-1} \in$ Çek s olmak üzere

$$a = ke(x), x = s(a)$$

olarak ifade edilebilir. $a' = k'e(x')$ olsun.

$$\begin{aligned} aa' &= ke(x)k'e(x') \\ &= ke(x)k'(e(x))^{-1}e(x)e(x') \end{aligned}$$

Çek s üzerinde C_0 grubunun etkisi

$${}^{x}k := e(x)ke(xx')$$

olarak belirlenirse,

$$aa' = k^{x}k'e(xx')$$

elde edilir.

$$\begin{array}{rccc} \phi : & C_1 & \longrightarrow & \text{\textit{Çek}}\ s \rtimes C_0 \\ & ke(x) & \longmapsto & (k, x) \end{array}$$

dönüşümü tanımlansın.

$$\begin{aligned} \phi(aa') &= \phi(k^{x}k'e(xx')) \\ &= (k^{x}k', xx') \\ &= (k, x)(k', x') \\ &= \phi(a)\phi(a') \end{aligned}$$

olduğundan ϕ bir homomorfizmdir. Tersine,

$$\begin{array}{rccc} \phi^{-1} : & \text{\textit{Çek}}\ s \rtimes C_0 & \longrightarrow & C_1 \\ & (k, x) & \longmapsto & ke(x) \end{array}$$

dönüşümü de bir homomorfizm olur. Dolayısıyla ϕ bir izomorfizm olduğundan

$$C_1 \cong \text{\textit{Çek}}\ s \rtimes C_0$$

elde edilir (Forrester-Barker, 2002).

Teorem 3 *Gruplar için çaprazlanmış modüller kategorisi ile internal kategori doğal denktir.*

İspat 11 (C, G, ∂) *bir çaprazlanmış modül olsun. G grubunun C üzerine etkisinden dolayı* $C \rtimes G$ *şu şekilde tanımlanır.*

$$\begin{array}{rccc} s: & C \rtimes G & \longrightarrow & G \\ & (c,g) & \longmapsto & g \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} t: & C \rtimes G & \longrightarrow & G \\ & (c,g) & \longmapsto & \partial cg \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} e: & G & \longrightarrow & C \rtimes G \\ & g & \longmapsto & (1_C, g) \end{array}$$

dönüşümleri yardımıyla s, t, e *birer homomorfizmdir. Her* $g \in G$ *için*

$$\begin{aligned} se(g) &= s(1_C, g) = g = id_G(g) \\ te(g) &= t(1_C, g) = \partial(1_C)g = g \end{aligned}$$

olduğundan

$$se = te = id_G$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{tikzcd} C \rtimes G \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & G \arrow[l, bend left=50, "e"] \end{tikzcd}$$

internal kategorisi oluşturulur.

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "{(c,g)}"] \arrow[rr, bend right=15, "{(c'c,g)}"'] & \partial cg \arrow[r, "{(c',g')}"] & \partial c' \partial cg \end{tikzcd}$$

Şekil 4.1: Kompozisyon

Şekil 2.3 deki kompozisyon tanımlanır. Tanımlanan bu yapılarla internal kategori olabilmesi için değiştokuş kuralını sağlaması gerekir. $(c, g), (h, d) \in C \times G$ *için,*

$$((c', \partial cg) \bullet (h', \partial hd)) \circ ((c, g) \bullet (h, d)) = ((c', \partial cg) \circ (c, g)) \bullet ((h', \partial hd) \circ (h, d))$$

eşitliğine bakılırsa sol tarafı için,

$$\begin{aligned} &= (c'^{\partial cg} h', \partial cg \partial hd) \circ (c^g h, gd) \\ &= (c' c^g h' c^{-1} c^g h, gd) \\ &= (c' c^g h'^g h, gd) \\ &= (c' c^g (h'h), gd) \end{aligned}$$

ve sağ tarafı için

$$= (c'c, g) \bullet (h'h, d) = (c'c^g(h'h), gd)$$

eşitlikleri ile kural sağlanır ve internal kategori elde edilir.

Tersine $(C_1, C_0, s, t, e, \circ)$ *bir internal kategori olsun.*

$$C = \textit{Çek } s, R = C_0, \partial = t_{|\textit{Çek } s}$$

alınırsa t *homomorfizm olduğundan dolayı* ∂ *da homomorfizm olur.*

Herhangi $k \in$ *Çek* $s, x \in C_0$ *için*

$$\partial({}^x k) = t({}^x k) = t(e(x)ke(x^{-1}))$$

t *homomorfizm olduğundan*

$$\begin{aligned} te(x)tkte(x^{-1}) &= xt(k)x^{-1} (\because te = id) \\ &= x\partial k x^{-1} \end{aligned}$$

ile çaprazlanmış modül şartlarının birincisi sağlanır. Peiffer eşitliği gösterilmelidir. Kompozisyon işlemi bir morfizm olduğundan ve Çek $s \rtimes C_0$ *üzerindeki işlem değiştokuş kuralını sağladığından*

$$((k', \partial(k)x) \bullet (l', \partial(l)y)) \circ ((k, x) \bullet (l, y)) = ((k', \partial(k)x) \circ (k, x)) \bullet ((l', \partial(l)y) \circ (l, y))$$

eşitliğine bakılmalıdır. Eşitliğin sol tarafı

$$\begin{aligned} &= (k'^{\partial kx} l', \partial kx\partial ly) \circ (k^x l, xy) \\ &= (k'^{\partial kx} l' k^x l, xy) \end{aligned}$$

ve sağ tarafı için

$$= (k'k, x) \bullet (l'l, y) = (k'k^x(l'l), xy)$$

elde edilir. Eşitlik halinde;

$$\begin{aligned} k'^{\partial kx} l' k^x l &= k'^{\partial k}({}^x l') k^x l \\ &= k'k^x(l'l) \\ &= k'k^x l'^x l \\ &= k'k^x l' k^{-1} k^x l \end{aligned}$$

sadeleştirmeler yapılıp $m =^x l' \in$ *Çek s yazılırsa*

$${}^{\partial k} m = kmk^{-1}$$

Peiffer eşitliği bulunur. Dolayısıyla (Çek s, C_0, ∂*) bir çaprazlanmış modülü elde edilir (Forrester-Barker, 2002).*

Grup ile etki çaprazlanmış modül kavramını tanımlayabilmek için ilk olarak $G^\bullet$ grup ile etkisinin $C^\bullet$ grup ile etkisi üzerine etkisi kavramını tanımlamamız gerekir. Bunun için bir grubun diğer bir grup üzerine etkisi ve kısa tam dizi kavramlarını kullanalım.

$$\begin{array}{ccc} C \times G & \longrightarrow & C \\ (c,g) & \mapsto & c^g \end{array}$$

etkisi

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "i"] & K \arrow[r, "j"] & G \arrow[l, bend left, "s"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Şekil 4.2: Etki

kısa tam dizisinin diyagramı şeklinde $js = 1_G$ koşulunu sağlayan s fonksiyonunun varlığı ile ifade edilir. Burada G grubunun C üzerine etkisi, herhangi $c \in C, g \in G$ için
$c^g = -s(g) + i(c) + s(g)$ eşitliği ile gösterilir.

$$\begin{aligned} i) \quad c^{(g_1+g_2)} &= -s(g_1+g_2) + i(c) + s(g_1+g_2) \\ &= -s(g_2) - s(g_1) + i(c) + s(g_1) + s(g_2) \\ &= (c^{g_1})^{g_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad (c_1+c_2)^g &= -s(g) + i(c_1+c_2) + s(g) \\ &= -s(g) + i(c_1) + s(g) - s(g) + i(c_2) + s(g) \\ &= c_1^g + c_2^g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii) \quad c^{1_G} &= -s(1_G) + i(c) + s(1_G) \\ &= -id + i(c) + id \\ &= c \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^\bullet \arrow[r, "i"] & K^\bullet \arrow[r, "j"] & G^\bullet \arrow[l, bend left, "s"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i_C"'] & A \arrow[r, "j"] \arrow[dd, equal, "id"] & G \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[d, "i_G"] \\ B \arrow[d, "j_C"'] & & D \arrow[d, "j_G"'] \\ C \arrow[r, "i"'] \arrow[u, bend right, "s_C"'] & A \arrow[r, "j"'] & G \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[u, bend right, "s_G"'] \end{tikzcd}$$

Şekil 4.3: Etki Şartı

Şekil 4.3 deki etki şartı diyagramı yardımıyla

1)

$$\begin{aligned}
c^{(g_1^{g_2})} &= -s(g_1^{g_2}) + i(c) + s(g_1^{g_2}) \\
&= -(1_A s j^G i^G)(g_1^{g_2}) + i(c) + (1_A s j^G i^G)(g_1^{g_2}) \\
&= -(s j^G)(g_1^{g_2}) + i(c) + (s j^G)(g_1^{g_2}) \\
&= -(s j^G)(-s^G(g_2) + i^G(g_1) + s^G(g_2)) + i(c) + (s j^G)(-s^G(g_2) + i^G(g_1) + s^G(g_2)) \\
&= -s(-g_2 + j^G i^G(g_1) + g_2) + i(c) + s(-g_2 + j^G i^G(g_1) + g_2) \\
&= -s(-g_2 + (j 1_A s)(g_1) + g_2) + i(c) + s(-g_2 + (j 1_A s)(g_1) + g_2) \\
&= -s(-g_2 + g_1 + g_2) + i(c) + s(-g_2 + g_1 + g_2) \\
&= c^{(-g_2+g_1+g_2)} \\
&= ((c^{(-g_2)})^{g_1})^{g_2}
\end{aligned}$$

2)

$$(c_1^{c_2})^g = (c_1^g)^{(c_2^g)}$$

eşitliği, bir grup ile etki homomorfizması olduğundan elde edilir.

Tanım 4.4.2 *$C^\bullet$ ve $G^\bullet$ iki grup ile etki olsun. $c, c_1, c_2 \in C$ ve $g, g_1, g_2 \in G$ olmak üzere C grubu üzerindeki etkiyi,*

$$\begin{array}{ccc} C \times C & \longrightarrow & C \\ (c_1, c_2) & \mapsto & c_1^{c_2} \end{array}$$

G grubu üzerindeki etkiyi,

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g_1, g_2) & \mapsto & g_1^{g_2} \end{array}$$

$G^\bullet$ grubunun $C^\bullet$ üzerindeki sağ etkisini

$$\begin{array}{ccc} C \times G & \longrightarrow & C \\ (c, g) & \mapsto & c^g \end{array}$$

şeklinde gösterelim.

Bu etkinin şartları grup etki şartlarına ek olarak,

$i)$ $c^{(g_1^{g_2})} = ((c^{-g_2})^{g_1})^{g_2}$

$ii)$ $(c_1^{c_2})^g = (c_1^g)^{(c_2^g)}$

*şeklinde iki şart ile birlikte $G^\bullet$ grup ile etkisinin $C^\bullet$ grup ile etkisine **etki şartları** denir.*

Tanım 4.4.3 *$C^\bullet, G^\bullet$ birer grup ile etki olmak üzere $\partial : C^\bullet \longrightarrow G^\bullet$ bir grup ile etki homomorfizmi, sağ etki tanımları ve $\forall c, c' \in C, \forall g, g' \in G$ için*

CM1) $\partial(c^g) = -g + \partial(c) + g$

CM2) $c^{\partial(c')} = -c' + c + c'$

şartlarını sağlıyorsa $(C^\bullet, G^\bullet, \partial)$ yapısına bir ***grup ile etki çaprazlanmış modulü*** *denir.*

Örnek: V_4 Klein 4-grubu olsun.

$$V_4 =< a, b | a^2 = b^2 = (ab)^2 = e >$$

olmak üzere $V_4 = \{e, a, b, ab\}$ elde edilir.
C_2 2.dereceden devirli grubu için $C_2 \trianglelefteq V_4$ olduğunu biliyoruz. C_2 ve V_4 gruplarının işlem tablosu ve kendi üzerine bir etkileri aşağıda verilmiştir.

C_2 için

$+$	e	a
e	e	a
a	a	e

$\bullet$	e	a
e	e	a
a	e	a

V_4 için

$+$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

$\bullet$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	e	a	b	ab
b	e	a	ab	b
ab	e	a	ab	b

Bu etkilerle birlikte $C_2^\bullet$ ve $V_4^\bullet$ grup ile etkileri tanımlanır. Açıkça etkiyi koruduğundan $i : C_2 \longrightarrow V_4$ içine dönüşümü

$$\partial : C_2^\bullet \xhookrightarrow{\quad i \quad} V_4^\bullet$$

grup ile etki homomorfizmi tanımlanır.

$$\begin{array}{ccc} C_2 \times V_4 & \longrightarrow & C_2 \\ (c, v) & \longmapsto & c^v = -v + c + v \end{array}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

$\forall c, c_1, c_2 \in C_2$ ve $\forall v, v_1, v_2 \in V_4$ için

1)

$$\begin{aligned} c^{(v_1+v_2)} &= -(v_1+v_2)+c+(v_1+v_2) \\ &= -v_2-v_1+c+v_1+v_2 \\ &= -v_2+(c^{v_1})+v_2 \\ &= (c^{v_1})^{v_2} \end{aligned}$$

2)

$$c^{1_{V_4}} = -1_{V_4}+c+1_{V_4} = c$$

3)

$$\begin{aligned} (c_1+c_2)^v &= -v+(c_1+c_2)+v \\ &= -v+c_1+v-v+c_2+v \\ &= c_1^v+c_2^v \end{aligned}$$

şartları sağlandığından tanımlanan dönüşüm bir V_4 ün C_2 üzerine sağ etkisidir. Şimdi V_4 ve C_2 grup ile etkilerini göz önüne alalım.

1) $\forall c \in C_2$ ve $\forall v_1, v_2 \in V_4$ için

$$(c^{v_1})^{v_2} = ((c^{-v_2})^{v_1})^{v_2}$$

eşitliği $c = a, v_1 = a, v_2 = b$ için

$$(a^a)^b = (-a+a+a)^b = a^b = -b+a+b = ab+b = a$$

ve

$$((a^{-b})^a)^b = ((b+a-b)^a)^b = (a^a)^b = (-a+a+a)^b = a$$

örneğindeki gibi diğer değerler için de sağlanır.

2) $\forall c_1, c_2 \in C_2$ ve $\forall v \in V_4$ için

$$(c_1^{c_2})^v = (c_1^v)^{(c_2^v)}$$

olup $c_1 = e, c_2 = a, v = b$ değerleri için

$$(e^a)^b = e^b = -b + e + b = e$$

ve

$$(e^b)^{(a^b)} = (e^b)^{(-b+a+b)} = (e^b)^a = e$$

örneğinde olduğu gibi diğer değerler için de sağlanıp $C_2^\bullet \times V_4^\bullet \longrightarrow C_2^\bullet$ **grup ile etki etkisi** tanımlanır.

$\forall c, d \in C_2$ ve $v \in V_4$için

CM1)

$$\partial(c^v) = i(c^v) = c^v = -v + i(c) + v = -v + c + v$$

CM2)

$$c^{\partial d} = c^{i(d)} = c^d = -d + c + d$$

şartları sağlandığından $(C_2^\bullet, V_4^\bullet, i)$ bir grup ile etki çaprazlanmış modülüdür.

Örnek: $G^\bullet$ bir grup ile etki ve M, N birer sağ G-modül olsun. $\theta : M \longrightarrow N$ morfizmi ve $G \ltimes N$ yarı-direkt çarpımı verilsin.

$$\begin{array}{ccl} M \times (G \ltimes N) & \longrightarrow & M \\ (m, (g, n)) & \mapsto & m^{(g,n)} = m^g \end{array}$$

izdüşüm dönüşümü yardımıyla etki tanımlanırsa

$$\begin{array}{ccc} \partial : M & \longrightarrow & G \ltimes N \\ m & \mapsto & (\theta(m), 1_G) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan morfizm ile $(M, G \ltimes N, \partial)$ bir grup ile etki çaprazlanmış modülü elde edilir.

Tanım 4.4.4 ***Grup ile Etki Otomorfizmi***

$C^\bullet$ kendi üzerinde bir grup ile etki yapısı olsun. Kendi üzerindeki etkisi

$$\begin{array}{ccc} C \times C & \longrightarrow & C \\ (c_1, c_2) & \mapsto & c_1^{c_2} \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. $(Aut(C), \circ, \varepsilon)$ ise otomorfizm grup ile etki olarak tanımlansın.

$$Aut(C^\bullet) = \{f : C^\bullet \longrightarrow C^\bullet | f \sim \textit{grup ile etki izomorfizmi}\}$$

$$\begin{aligned} \circ : Aut(C) \times Aut(C) &\longrightarrow Aut(C) \\ (f,h) &\longmapsto f \circ h \end{aligned}$$

bileşke işlemi ve

$$\begin{aligned} \varepsilon : Aut(C) \times Aut(C) &\longrightarrow Aut(C) \\ (f,h) &\longmapsto \varepsilon(f,h) = h^{-1} \circ f \circ h \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. ($Aut(C), \circ, \varepsilon$) yapısının bir grup ile etki belirttiğini gösterelim.
$\forall x \in C$ olmak üzere öncelikle $(Aut(C), \circ)$ bir grup yapısı belirtir.
i)

$$\begin{aligned} \varepsilon(f, h \circ g)(x) &= (h \circ g)^{-1} \circ f \circ (h \circ g) \\ &= g^{-1} \circ h^{-1} \circ f \circ h \circ g \\ &= g^{-1} \circ \varepsilon(f,h) \circ g \\ &= \varepsilon(\varepsilon(f,h), g)(x) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \varepsilon(g, id)(x) &= (id^{-1} \circ g \circ id)(x) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \varepsilon(g \circ h, f)(x) &= (f^{-1} \circ (g \circ h) \circ f)(x) \\ &= (f^{-1} \circ g \circ f) \circ (f^{-1} \circ h \circ f)(x) \\ &= \varepsilon(g,f) \circ \varepsilon(h,f)(x) \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \varepsilon(id, g)(x) &= (g^{-1} \circ id \circ g)(x) \\ &= id(x) \end{aligned}$$

eşitlikleriyle ε, $Aut(G)$ üzerinde bir etkidir.

Örnek: $C^\bullet$ ve $AutC^\bullet \sim (AutC, \circ, \varepsilon)$ birer grup ile etki olarak tanımlansın. $(C^\bullet, AutC^\bullet, \partial)$ bir grup ile etki çaprazlanmış modülüdür.

$$\begin{aligned} \partial \;:\; C &\longrightarrow AutC \\ g &\longmapsto \quad \partial_g : C \longrightarrow C \\ &\qquad\qquad c' \longmapsto \quad \partial_c(c') = (c')^c \end{aligned}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} C \times AutC & \longrightarrow & C \\ (g,f) & \mapsto & f(g) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon : Aut(C) \times Aut(C) &\longrightarrow Aut(C) \\ (f,h) &\longmapsto \varepsilon(f,h) = h^{-1} \circ f \circ h \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa

CM1) $\partial(c^f) = f^{-1} \circ \partial(c) \circ f$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \partial(c^f)(x) &= \partial_{f(c)}(x) \\ &= x^{f(c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ \partial(c) \circ f)(x) &= (f^{-1} \circ \partial(c))(f(x)) \\ &= f^{-1} \circ \partial_c(f(x)) \\ &= f^{-1} \circ (f(x)^c) \\ &= x^{f(c)} \end{aligned}$$

eşitlik sağlanır.

CM2) $c^{\partial(c')} = -c' + c + c'$ olduğunu gösterelim.

$$c^{\partial(c')} = \partial_{c'}(c) = c^{c'} = -c' + c + c'$$

sağlanır.

Örnek 1) G, C grup ile etki olsunlar. C, G nin ideali olsun.

$$i : C^{\bullet} \hookrightarrow G^{\bullet}$$

içine dönüşümü ve $(c,g) \longmapsto c^g = -g + c + g$ dönüşümü yardımıyla $C^{\bullet} \times G^{\bullet} \longrightarrow C^{\bullet}$ grup ile etkisi tanımlanır. Buradan

CM1) $c \in C, g \in G$ için

$$\begin{aligned} \partial(c^g) &= i(c^g) = -g + c + g \\ &= -g + i(c) + g \\ &= -g + \partial(c) + g \end{aligned}$$

CM2) $c_1, c_2 \in C$ için

$$c_1^{\partial(c_2)} = c_1^{i(c_2)} = -c_2 + c_1 + c_2$$

dir.

Örnek 2) $C^{\bullet}$, bir grup ile etki ve M, bir sağ $C-$modül olsun.

$$\begin{aligned} 0 : M &\longrightarrow C \\ m &\longmapsto e_C \end{aligned}$$

dönüşümü ile $(M, C^{\bullet}, 0)$ bir grup ile etki çaprazlanmış modül olur.

İspat:

$$\begin{aligned} \partial = 0 : M &\longrightarrow C \\ m &\longmapsto e_C \end{aligned}$$

olmak üzere

CM1) $c \in C, m \in M$ için

$$\begin{array}{rcl} M \times C & \longrightarrow & M \\ (m, c) & \longmapsto & m^c \end{array}$$

bir grup ile etkisiyle,

$$\begin{aligned} \partial(m^c) &= e_C \\ &= -c + e_C + c \\ &= -c + \partial(m) + c \end{aligned}$$

olur.

CM2) $m_1, m_2 \in M$ için

$$\begin{aligned} m_1^{\partial(m_2)} &= m_1^{e_C} \\ &= m_1 - m_2 + m_2 \\ &= -m_2 + m_1 + m_2 (\because M, \text{sağ C-modül}) \end{aligned}$$

$$m_1^{\partial(m_2)} = -m_2 + m_1 + m_2$$

dir.

4.5 Grup ile etkinin yarı-direkt çarpımı

$C^\bullet, G^\bullet$ birer grup ile etki olsun. $C^\bullet$ ve $G^\bullet$ yapılarının yarı-direkt çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(G^\bullet \ltimes C^\bullet) \sim (G \times C, *, \varepsilon)$$

olmak üzere $(G \times C, *)$ bir grup yapısı belirtir. $G^\bullet$ grup ile etki yapısının $C^\bullet$ grup ile etki yapısı üzerine etkisi ile birlikte,

$$\begin{aligned} * \ : \ & (G \times C) \times (G \times C) \longrightarrow G \times C \\ & ((g_1, c_1), (g_2, c_2)) \mapsto (g_1 + g_2, c_1^{g_2} + c_2) \end{aligned}$$

işlemiyle $G \ltimes C$ grubu elde edilir. ε ile $G \times C$ çarpımının kendi üzerine sağ etkisi olarak tanımlanır.

$$\varepsilon : (G \times C) \times (G \times C) \longrightarrow G \times C$$

etkisinin grup ile etki yapısının etki şartlarını sağlaması gerekir.

$$\varepsilon((g_1, c_1), (g_2, c_2)) = (g_1^{g_2}, -c_2^{(g_1^{g_2})} + c_1^{g_2} + c_2)$$

$G \times C$ üzerinde $*$ işlemi $e = (0, 0)$ birim elemanı ve $(g, c) \in G \times C$ olmak üzere $(g, c)^{-1} = (g^{-1}, c^{-1g^{-1}})$ şeklinde elde ters elemanı ile bir grup yapısı belirtir. ε dönüşümünün etki şartlarını sağladığını göstermek için, $\forall c, c_1, c_2 \in C, g, g_1, g_2 \in G$ olmak üzere

i)

$$\begin{aligned} \varepsilon((g_1, c_1), (g_2, c_2) * (g_3, c_3)) &= \varepsilon((g_1, c_1), (g_2 + g_3, c_2^{g_3} + c_3)) \\ &= (g_1^{(g_2+c_3)}, -(c_2^{g_3} + c_3)^{(g_1^{(g_2+g_3)})} \\ &\quad + c_1^{(g_2+g_3)} + c_2^{g_3} + c_3) \\ &= ((g_1^{g_2})^{g_3}, -c_3^{((g_1^{g_2})^{g_3})} - (c_2^{g_3})^{((g_1^{g_2})^{g_3})} \\ &\quad + (c_1^{g_2})^{g_3} + c_2^{g_3} + c_3) \\ &= ((g_1^{g_2})^{g_3}, -c_3^{((g_1^{g_2})^{g_3})} - (c_2^{g_3})^{((-g_3)^{(g_1^{g_2})})^{g_3}} \\ &\quad + (c_1^{g_2})^{g_3} + c_2^{g_3} + c_3) \\ &= ((g_1^{g_2})^{g_3}, -c_3^{((g_1^{g_2})^{g_3})} + (-c_2^{(g_1^{g_2})} \\ &\quad + c_1^{g_2} + c_2)^{g_3} + c_3) \\ &= \varepsilon(\varepsilon((g_1, c_1), (g_2, c_2)), (g_3, c_3)) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \varepsilon((g, c), (0, 0)) &= (g^0, -0^{(g^0)} + c^0 + 0) \\ &= (g, c) \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\varepsilon((g_2,c_2)*(g_3,c_3),(g_1,c_1)) &= \varepsilon((g_2+g_3,c_2^{g_3}+c_3),(g_1,c_1)) \\
&= ((g_2+g_3)^{g_1}, -c_1^{((g_2+g_3)^{g_1})} \\
&\quad +(c_2^{g_3}+c_3)^{g_1}+c_1) \\
&= (g_2^{g_1}+g_3^{g_1}, (-c_1^{(g_2^{g_1})^{(g_3^{g_1})}})+(c_2^{g_1})^{(g_3^{g_1})} \\
&\quad +c_1^{(g_3^{g_1})}-c_1^{(g_3^{g_1})}+c_3^{g_1}+c_1) \\
&= \varepsilon((g_2,c_2),(g_1,c_1))*\varepsilon((g_3,c_3),(g_1,c_1))
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
\varepsilon((0,0),(g,c)) &= (0^g, -c^{(0^g)}+0^g+c) \\
&= (0,0)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.6 Grup ile etki üzerinde internal kategori

$\mathfrak{Gr}^\bullet$ bir grup ile etki kategorisi olsun. Bir kategorinin $\mathfrak{Gr}^\bullet$ kategorisine internal olması aşağıdaki öğelerden oluşur.

i) C_0 grup ile etki objelerinin objesi,

ii) C_1 morfizmlerin kümesi

ile birlikte

$$s : C_1 \longrightarrow C_0$$

ve

$$t : C_1 \longrightarrow C_0$$

kaynak ve hedef grup ile etki homomorfizmleri ile

$$e : C_0 \longrightarrow C_1$$

birim grup ile etki homomorfizmini göstermek üzere

$$m : C_1 \times C_1 \longrightarrow C_1$$

kompozisyonu ifade eder. İnternal kategori bu yapıyla birlikte aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

1)

$$se = te = id$$

2) Kompozisyonların kaynak ve hedef grup ile etki homomorfizmleri için

$$\begin{tikzcd} C_1 \times C_1 \arrow[r, "m"] \arrow[d, "p_1"'] & C_1 \arrow[d, "s"] \\ C_1 \arrow[r, "s"'] & C_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_1 \times C_1 \arrow[r, "m"] \arrow[d, "p_2"'] & C_1 \arrow[d, "t"] \\ C_1 \arrow[r, "t"'] & C_0 \end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli olmalıdır.

3) Grup ile etki homomorfizmlerinin kompozisyonu için birleşme özelliği sağlanmalıdır.

$$\begin{tikzcd} C_1 \times C_1 \times C_1 \arrow[r, "m \times id"] \arrow[d, "id \times m"'] & C_1 \times C_1 \arrow[d, "m"] \\ C_1 \times C_1 \arrow[r, "m"'] & C_1 \end{tikzcd}$$

4) Grup ile etki homomorfizmlerinin kompozisyonu için sol ve sağ birim özelliği sağlanmalıdır.

$$\begin{tikzcd} C_0 \times C_1 \arrow[r, "e \times Id"] \arrow[dr, "p"'] & C_1 \times C_1 \arrow[d, "m"] & C_1 \times C_0 \arrow[l, "Id \times e"'] \arrow[dl, "q"] \\ & C_1 & \end{tikzcd}$$

4.7 Grup ile etki çaprazlanmış modülü ve grup ile etki üzerinde internal kategori denkliği

Teorem 4 *$G^\bullet$ yapısı üzerindeki etki sağ konjuge etki olarak tanımlansın. $\partial : C^\bullet \longrightarrow G^\bullet$ çaprazlanmış grup ile etki kategorisi ile grup ile etki üzerinde internal kategorisi birbirlerine doğal denktir.*

İspat 12 *$(C^\bullet, G^\bullet, \partial)$ bir grup ile etki çaprazlanmış modülü olsun.*

$$G^\bullet \ltimes C^\bullet$$

kümesi ile

$$(g, c) * (g', c') = (g + g', c^{g'} + c')$$

işlemi alınarak yarı-direkt çarpımı oluşturulur. Bu grup üzerinde

$$\varepsilon((g,c),(g',c')) = (g^{g'}, -(c')^{(g^{g'})} + c^{g'} + c')$$

etkisi tanımlanarak ($G \ltimes C$)$^\bullet$ grup ile etki yapısı tanımlanır. Böylece

$C_1 = G^\bullet \ltimes C^\bullet, C_0 = G^\bullet$ *ve*

$$\begin{aligned} s(g,c) &= g + \partial c \\ t(g,c) &= g \\ e(g) &= (g,0) \end{aligned}$$

alınarak bir grup ile etki üzerinde internal kategori yapısı oluşturulur.

i)

$$\begin{aligned} se(g) &= s(g,0) = g + 0 = g \\ te(g) &= t(g,0) = g \end{aligned}$$

elde edilir.

ii)

$$g + \partial c \xrightarrow{(g,c)} g = g' + \partial c' \xrightarrow{(g',c')} g'$$

dönüşümleri yardımıyla

$$\begin{aligned} s((g',c') \circ (g,c)) &= s(g', c' + c) \\ &= s(g,c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t((g',c') \circ (g,c)) &= t(g', c' + c) \\ &= g' = t(g',c') \end{aligned}$$

koşulları sağlanarak kompozisyon işlemi yapılır. Benzer şekilde

$$h + \partial d \xrightarrow{(h,d)} h = h' + \partial d' \xrightarrow{(h',d')} h'$$

kompozisyon işleminin bir grup ile etki homomorfizmi belirtmesi ile aşağıdaki değiş-tokuş kuralı incelenir.

$$((g',c') * (h',d')) \circ ((g,c) * (h,d)) = ((g',c') \circ (g,c)) * ((h',d') \circ (h,d))$$

eşitliği yukarıda verilen işlemlere göre kontrol edilir.

$$
\begin{aligned}
((g',c')*(h',d'))\circ((g,c)*(h,d)) &= (g'+h',(c')^{h'}+d')\circ(g+h,c^{h}+d)\\
&= (g'+h',(c')^{h'}+d'+c^{h}+d)\\
&= (g'+h',(c')^{h'}+d'+c^{(h'+\partial d')}+d)\\
&= (g'+h',(c')^{h'}+d'-d'+c^{h'}+d'+d)\\
&= (g'+h',(c')^{h'}+c^{h'}+d'+d)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
((g',c')\circ(g,c))*((h',d')\circ(h,d)) &= (g',c'+c)*(h',d'+d)\\
&= (g'+h',(c'+c)^{h'}+d'+d)\\
&= (g'+h',(c')^{h'}+c^{h'}+d'+d)
\end{aligned}
$$

sonuçları yardımıyla değiş-tokuş kuralındaki eşitlik gösterilir.

iii)

$$(\varepsilon(a,b)\circ\varepsilon(c,d))=\varepsilon((a\circ c),(b\circ d))$$

eşitliğini göstermek için yukarıda verilen $(g,c),(g',c'),(h,d),(h',d')\in G^{\bullet}\ltimes C^{\bullet}$ *yardımıyla*

$$(\varepsilon((g',c'),(h',d'))\circ\varepsilon((g,c),(h,d)))=\varepsilon(((g',c')\circ(g,c)),((h',d')\circ(h,d)))$$

gösterilmelidir.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(((g',c')\circ(g,c)),((h',d')\circ(h,d))) &= \varepsilon((g',c'+c),(h',d'+d))\\
&= ((g')^{h'},-(d'+d)^{(g')^{h'}}\\
&\quad +(c'+c)^{h'}+(d'+d))\\
&= ((g')^{h'},-d^{(g')^{h'}}-(d')^{(g')^{h'}}\\
&\quad +(c')^{g'}+c^{h'}+d'+d)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon((g',c'),(h',d'))\circ\varepsilon((g,c),(h,d)) &= ((g')^{h'},-(d')^{(g')^{h'}}+(c')^{h'}+d')\circ \\
&\quad (g^{h},-d^{(g^{h})}+c^{h}+d) \\
&= ((g')^{h'},-(d')^{(g')^{h'}}+(c')^{h'}+d' \\
&\quad -d^{(g^{h})}+c^{h}+d) \\
&= ((g')^{h'},-(d')^{(g')^{h'}}+(c')^{h'}+d' \\
&\quad -d^{((g+\partial c')^{h'+\partial d'})}+c^{(h'+\partial d')}+d)(\because g=g'+\partial(c')) \\
&= ((g')^{h'},-(d')^{(g')^{h'}}+(c')^{h'}+d' \\
&\quad -d^{(g')^{(h'+\partial d')}+(\partial c')^{(h'+\partial d')}} \\
&\quad +(c^{h'})^{\partial d'}+d)(\because h=h'+\partial(d')) \\
&= ((g')^{h'},-(d')^{(g')^{h'}}+(c')^{h'}+d' \\
&\quad -d^{(g')^{(h'+\partial d')}+(\partial c')^{(h'+\partial d')}} \\
&\quad -d'+c^{h'}+d'+d)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon((g',c'),(h',d'))\circ\varepsilon((g,c),(h,d)) &= ((g')^{h'},-(d')^{(g')^{h'}}+(c')^{h'}+d' \\
&\quad -d^{(-\partial d'+(g')^{h'}+(\partial c')^{h'}+\partial d')}(\because \textit{H etkisi sağ konjuge olduğundan}) \\
&\quad -d'+c^{h'}+d'+d) \\
&= ((g')^{h'},-(d')^{(g')^{h'}}+(c')^{h'} \\
&\quad -((d^{(-\partial d')})^{(g')^{h'}})^{((\partial c')^{h'})} \\
&\quad +c^{h'}+d'+d) \\
&= ((g')^{h'},-(d')^{(g')^{h'}}+(c')^{h'} \\
&\quad +(-c'-(d^{(-\partial d'+(g')^{h'})})^{(-h')+(c'))^{h'}} \\
&\quad +c^{h'}+d'+d) \\
&= ((g')^{h'},-(d')^{(g')^{h'}}+(d'-d-d')^{(g')^{h'}} \\
&\quad +(c')^{h'}+c^{h'}+d'+d) \\
&= ((g')^{h'},(-d-d')^{(g')^{h'}}+(c')^{h'}+c^{h'}+d'+d)
\end{aligned}
$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Böylece

$$F : XMOD_{GWA} \longrightarrow CAT_{GWA}$$

funktoru elde edilir.

Tersine, $(e; s, t : C_1^\bullet \longrightarrow C_0^\bullet)$ *grup ile etki üzerinde internal kategori olsun.*

$$\begin{aligned} C &= \text{\textit{Çek} } s \\ G &= s(C_1) = t(C_1) \\ \partial &= t|_{\text{\textit{Çek} } s} \end{aligned}$$

olmak üzere $(\text{\textit{Çek} } s, C_0^\bullet, \partial)$ *bir çaprazlanmış grup ile etki yapısı olur. Çünkü,*

CM1) $x \in$ *Çek* $s, h \in C_0$ *için,* C_0 *ın Çek* s *kümesi üzerine sağ etkisi*

$$x^h = e(-h) + x + e(h)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial(x^h) &= t(x^h) = t(e(-h) + x + e(h)) \\ &= te(-h) + t(x) + te(h) \\ &= -h + \partial(x) + h \end{aligned}$$

elde edilir.

CM2) $(e; s, t : C_1^\bullet \longrightarrow C_0^\bullet)$ *grup ile etki üzerinde internal kategori olmak üzere değiş-tokuş kuralı sağlanır.*

$$((g', c') * (h', d')) \circ ((g, c) * (h, d)) = ((g', c') \circ (g, c)) * ((h', d') \circ (h, d))$$

eşitliğin her iki tarafı açılıp benzer terimler sadeleştirilerek

$$\begin{aligned} (g' + h', (c')^{h'} + d') \circ (g + h, c^h + d) &= (g', c' + c) * (h', d' + d) \\ (g' + h', (c')^{h'} + d' + c^h + d) &= (g' + h', (c' + c)^{h'} + d' + d) \\ (c')^{h'} + d' + c^h + d &= (c' + c)^{h'} + d' + d \\ (c')^{h'} + d' + c^h + d &= (c')^{h'} + c^{h'} + d' + d \\ d' + c^{(h' + \partial d')} + d &= c^{h'} + d' + d \\ d' + (c^{h'})^{\partial d'} &= c^{h'} + d' \\ (c^{h'})^{\partial d'} &= -d' + c^{h'} + d' \\ &\Longrightarrow c^{\partial d'} = -d' + c + d \end{aligned}$$

Peiffer eşitliği elde edilir.

Böylece

$$G : CAT_{GWA} \longrightarrow XMOD_{GWA}$$

funktoru elde edilir.

5. SİMPLİSEL GRUP İLE ETKİ

$$[n] = \{0 < 1 < 2... < n\}$$

şeklinde tanımlı kümeye **sıralı küme** denir. Herhangi iki sıralı küme arasında sıra koruyan dönüşüme **monoton dönüşüm** denir. Yani

$$f : [n] \longrightarrow [m]$$

dönüşümü için

$$i \leq j \text{ iken } f(i) \leq f(j)$$

özelliğine sahiptir. Bu dönüşümlere **operatör** adı verilir.

Tanım 5.0.1 *Objeleri $[n]$ sıralı kümeleri ve morfizmleri operatör olan kategoriye $\Delta[n]$* ***kategorisi*** *denir. Morfizmleri ters yönlü olacak şekildeki kategoriye $\Delta^{op}[n]$* ***kategorisi*** *denir.*

$\mathfrak{Gr}^\bullet$ grup ile etki kategorisi olmak üzere

$$E : \Delta^{op}[n] \longrightarrow \mathfrak{Gr}^\bullet$$

şeklinde tanımlanan funktora ***simplisel grup ile etki*** *denir.*

Operatörler içinde iki özel operatör yardımıyla tüm operatörler ifade edilebilir.

$$\delta_i^n : [n-1] \longrightarrow [n], 0 \leq i \leq n$$

$$\delta_i^n(x) = \begin{cases} x, x < i \\ x+1, x \geq i \end{cases}$$

ve

$$\sigma_j^n : [n+1] \longrightarrow [n], 0 \leq j \leq n$$

$$\sigma_j^n(x) = \begin{cases} x, x \leq j \\ x-1, x > j \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

E funktoru yardımıyla

$$E([n]) = E_n, E(\delta_i^n) = d_i^n \text{ ve } E(\sigma_j^n) = s_j^n$$

şeklinde obje ve morfizmleri tanımlanır.

Tanım 5.0.2 *E bir simplisel grup ile etki olsun.*

$$NE_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker d_i^n$$

ve

$$\partial_n : NE_n \longrightarrow NE_{n-1}$$

d_n^n operatörünün kısıtlanışı ile tanımlı olmak üzere

$$(NE, \partial) : ...NE_2 \xrightarrow{\partial_2} NE_1 \xrightarrow{\partial_1} NE_0 = E_0$$

*kompleksine E simplisel grup ile etkisinin **Moore Kompleksi** denir. Burada,*

$$NE_0 = E_0, NE_1 = \ker d_0', NE_2 = \ker d_0^2 \cap \ker d_1^2,$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 5 *Moore kompleksinin boyu ≤ 1 olan simplisel grup ile etki ve grup ile etki çaprazlanmış modülü denktir.*

İspat 13 *$G^{\bullet}$, Moore kompleksinin boyu ≤ 1 olan bir simplisel grup ile etki olsun. Bu durumda,*

$$NG_2 \cap D_2 = 0 \text{ ve } \partial_2(NG_2 \cap D_2) = \partial_2(N_2 \cap D_2) = \{0\}$$

olur. $D_2, G_2^{\bullet}$ içinde dejenere (s_j) operatörü tarafından üretilen alt gruptur.

$$(NE, \partial) : ...NG_2^{\bullet} \xrightarrow{\partial_2} NG_1^{\bullet} \xrightarrow{\partial_1} NG_0^{\bullet}$$

$$NG_1^{\bullet} \longrightarrow NG_0^{\bullet}$$

grup ile etki homomorfizmi olup,

$$\begin{array}{ccc} NG_0^{\bullet} \times NG_1^{\bullet} & \longrightarrow & NG_1^{\bullet} \\ (x, y) & \longrightarrow & y^x = (s_0x)^{-1}y(s_0x) \end{array}$$

şeklinde $NG_0^{\bullet}$ ın $NG_1^{\bullet}$ üzerine etkisi vardır.

$$\begin{aligned} \partial_1(y^x) &= \partial_1((s_0x)^{-1}y(s_0x)) = x^{-1}d_1yx \\ &= x^{-1}\partial_1yx \end{aligned}$$

olup çaprazlanmış modül ilk şartı sağlanır.

Diğer yandan $a, b \in NG_1^\bullet$ *alalım.*

$$b^{\partial_1 a} = s_0 d_1 a^{-1} b s_0 d_1 a$$

olur. $a, b \in NG_1^\bullet$ *için* $NG_2 \cap D_2 = N_2 \cap D_2$ *nın üreteç elemanları*

$$F_{(0)(1)}(a, b) = [s_0 a, s_1 b][s_1 b, s_1 a] \in NG_2 \cap D_2$$

dır.

$$\partial_2(N_2 \cap D_2) = \{0\}$$

ve

$$\begin{aligned} \partial_2(F_{(0)(1)}(a, b)) &= d_2([s_0 a, s_1 b][s_1 b, s_1 a]) \\ &= s_0 d_1 a^{-1} b^{-1} s_0 d_1 a b (b^{-1} a^{-1} b a) \in NG_2 \cap D_2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$s_0 d_1 a^{-1} b s_0 d_1 a = a^{-1} b a$$

o halde,

$$b^{\partial_1 a} = s_0 d_1 a^{-1} b s_0 d_1 a = a^{-1} b a$$

bulunup 2. çaprazlanmış modül şartı sağlanmış olur. Yani

$$\Delta : SimpGr_{\leq 1} \longrightarrow XMOD_{GWA}$$

funktoru tanımlanır.

$$\Delta(G^\bullet) = (\partial_1 : NG_1^\bullet \longrightarrow NG_0^\bullet)$$

elde edilir.

Tersine;

$$\partial : C^\bullet \longrightarrow G^\bullet$$

bir grup ile etki çaprazlanmış modülü olsun.

$G^\bullet$ *nın* $C^\bullet$ *üzerindeki etkisini kullanarak* $C^\bullet \rtimes G^\bullet$ *grubu*

$$(c, g)(c', g') = (c^g + c', g + g')$$

işlemi ile tanımlanır. $C_0^\bullet = G^\bullet$ *ve* $C_1^\bullet = C^\bullet \rtimes G^\bullet$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_1(c, g) &= (\partial_1 c) g \\ d_0(c, g) &= g \\ s_0(g) &= (1, g) \end{aligned}$$

operatörleri birer grup ile etki homomorfizmi olur ve simplisel özdeşlikleri sağlar.

$$\begin{aligned} d_1 s_0(g) &= d_1(1,g) = (\partial_1 1)g = g \\ d_0 s_0(g) &= d_0(1,g) = g \end{aligned}$$

sağlanır.

Böylece $\{C_1^\bullet, C_0^\bullet\} = C'^\bullet$ *şeklinde bir 1-truncated simplisel grup ile etki elde edilir.*

$$\begin{aligned} NC_0'^\bullet &= NC_0^\bullet = C_0^\bullet = N \\ NC_1'^\bullet &= NC_1^\bullet = \ker d_0 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$NC_2'^\bullet = \{1\}$$

dir. Denk olarak $C_2^\bullet = D_2^\bullet$ *olmak üzere*

$$\partial_2(NC_2^\bullet \cap D_2^\bullet) = \partial_2(NC_2^\bullet) = \partial_2(N_2^\bullet) = \{0\}$$

olduğu gösterilirse $C'^\bullet$ *nın Moore kompleksinin boyu* ≤ 1 *olur.* $F_{\alpha,\beta}$ *fonksiyonlarının bir uygulaması olarak*

$$\partial_2(N_2) = [\ker d_0, \ker d_1]$$

dır. Buna göre

$$\begin{aligned} d_0 : C \rtimes G &\longrightarrow G \\ (c,g) &\mapsto g \end{aligned}$$

$$\ker d_0 = \{(c,1) : c \in C\} \cong C$$

$$\begin{aligned} d_1 : C \rtimes G &\longrightarrow G \\ (c,g) &\mapsto (\partial_1 c)g \end{aligned}$$

$$\ker d_1 = \{(c, \partial_1 c^{-1}) : c \in C\}$$

olur. O halde, $(x,1) \in \ker d_0$ *ve* $(c, \partial_1 c^{-1}) \in \ker d_1$ *olmak üzere*

$$[(x,1),(c,\partial_1 c^{-1})] = (1,1)$$

olduğunu gösterelim.

$$(c,g)(c',g') = (c\,{}^g c', gg')$$

olup $(1_C, 1_G)$ *birim elemandır.* $(c,g)(c',g') = (1_C, 1_G)$ *ise*

$$(c,g)^{-1} = ({}^{g^{-1}}c^{-1}, g^{-1})$$

elde edilir. Buna göre;

$$\begin{aligned}
[(x,1),(c,\partial_1 c^{-1})] &= (x,1).(c,\partial_1 c^{-1})(x,1)^{-1}(c,\partial_1 c^{-1})^{-1} \\
&= (xc,\partial_1 c^{-1}).(x^{-1},1).({}^{\partial_1 c}c^{-1},\partial_1 c) \\
&= (xc,\partial_1 c^{-1})((x^{-1})^{\partial_1 c}c^{-1},\partial_1 c) \\
&= (xc^{\partial_1 c^{-1}}((x^{-1})^{\partial_1 c}c^{-1}),\partial_1 c^{-1}\partial_1 c) \\
&= (xc^{\partial_1 c^{-1}}x^{-1}c^{-1},1_G) \\
&= (xcc^{-1}x^{-1}cc^{-1},1_G) \\
&= (1_C,1_G)
\end{aligned}$$

olur. O halde

$$[\ker d_0,\ker d_1] = (1_C,1_G)$$

olup

$$\partial_2(NC_2) = \{1\}$$

olduğundan $C\prime = \{C_1^\bullet, C_0^\bullet\}$ *ın Moore kompleksinin boyu* ≤ 1 *olur.*

Böylece

$$\begin{array}{rcl}
\delta : XMOD_{GWA} & \longrightarrow & SimpGr_{\leq 1} \\
\partial : C^\bullet \longrightarrow G^\bullet & \mapsto & \delta(\partial : C^\bullet \longrightarrow G^\bullet) = \{C^\bullet \rtimes G^\bullet, G^\bullet, d_0, d_1\}
\end{array}$$

bulunur.

$\Delta\circ\delta$ *ile* $I_{XMOD_{GWA}}$ *ve* $\delta\circ\Delta$ *ile* $I_{SimpGr_{\leq 1}}$ *funktorları arasında doğal transformasyon varlığı olduğundan birbirlerine denktir.*

$\partial : C^\bullet \longrightarrow G^\bullet$ *bir grup ile etki çaprazlanmış modülü ise*

$$\delta(\partial : C^\bullet \longrightarrow G^\bullet) = \{C^\bullet \rtimes G^\bullet, G^\bullet, d_0, d_1\}$$

olup

$$d_1 = \Delta\{C^\bullet \rtimes G^\bullet, G^\bullet, d_0, d_1\} : NC_1 \longrightarrow NC_0$$

olacak şekilde

$$\Delta\{C^\bullet \rtimes G^\bullet, \partial_0, \partial_1\} = \partial : C^\bullet \longrightarrow G^\bullet$$

eşitliği sağlanır.

Yine $\{C_1^\bullet, C_0^\bullet\} \in SimpGr_{\leq 1}$ *için*

$$\Delta(\{C_1^\bullet, C_0^\bullet\}) = d_1 : \ker d_0 \longrightarrow C_0^\bullet$$

dır.

$$\delta(d_1 : \ker d_0 \longrightarrow C_0^\bullet) = (\ker d_0 \rtimes s_0C_0, C_0, d_0, d_1)$$

eşitliğinde $\ker d_0 \rtimes s_0C_0 \cong C_1$ *olduğundan*

$$\delta(d_1 : \ker d_0 \longrightarrow C_0^\bullet) = (C_1^\bullet, C_0^\bullet, d_0, d_1) = id_{\{C_1^\bullet, C_0^\bullet\}}$$

elde edilir.

6. UYGULAMA: GAP

6.1 Giriş

Cebirin teorik yapısının programlama yardımıyla bilgisayar ortamında çözümlenmesi için GAP (Group, Algorithm and Programming) paket programı geliştirilmiştir. GAP programı açık kaynak kodlu bir yapıya sahip olup, programı kullanan kişilerin oluşturduğu paketler ile geliştirilir. Geliştirilen paketler kullanımını içeren kılavuz ile GAP merkezine ulaştırılır. Bu merkezdeki hakemler tarafından incelenerek onaylananlar herkesin kullanımına açık olarak paket kütüphanesine eklenir. GAP derleyicisi `LoadPackage("paket_ismi")` komutu ile çalışılmak istenilen paket yükler. GAP merkezinde 60 ın üzerinde paket bulunmaktadır. Bunlardan bazıları ParGAP, XMod, XModAlg, GRAPE, LAGUNA isimli paketlerdir.

Grupların izomorfizm farkıyla birlikte sınıflandırılması fikri cebir alanındaki en temel problemlerden birisi olmuştur. Sembolik hesaplama programlarının ortaya çıkışıyla birlikte matematiksel teoremler bilgisayar ortamına aktarılmış ve grup kütüphaneleri oluşturulmaya başlanmıştır. Sınıflandırmalar için p-grupları kullanma fikri ilk olarak O’Brien, 1990 çalışmasıyla ortaya atıldı. O’Brien, 1991 çalışmasında 256. mertebeye kadar tüm grupların izomorfizm sınıflarını oluşturulmuştur. 512. mertebeye kadar olan sınıflandırma Eick, O’Brien, 1999 çalışmasında gerçekleştirilmiştir. 512. ve 768. mertebeler hariç olmak üzere 1000. mertebeye kadar olan sınıflandırma Besche, Eick, 1999 tarafından gerçekleştirilmiştir. 512 ve 768. mertebelerde hesaplamalar yapabilmek için bilgisayar donanımlarının gelişmesine ihtiyaç duyulmuştur. 2002 yılında milenyum projesi adıyla Besche vd., 2002 tarafından 1 tipten cebirsel model olarak 2000. mertebeye kadar grupların izomorfizm altında sınıflandırılmıştır. Aşağıdaki GAP oturumunda 512. ve 768. mertebeden izomorfizm farkıyla grupların sayısı elde edilmiştir.

```
gap> NumberSmallGroups(512);
10494213
gap> NumberSmallGroups(768);
1090235
```

Ancak 1024. mertebe için sınıflandırılma halen yapılabilmiş değildir. 1024 hariç 2000 mertebeye kadar izomorfizm farkıyla elde edilen yaklaşık 423 milyon (423.164.062) grup SmallGroup kütüphanesi adı altında GAP (Behrends vd., 2016) (Group, Algorithm and Programming) programına aktarılmıştır. Bu sınıflandırma teorik cebir konularına geniş bir uygulama alanı kazandırılmış ve elde edilen birçok yeni örnekler yardımıyla farklı cebirsel yapıların anlaşılması ve geliştirilmesi sağlanmıştır. SmallGroup kütüphanesindeki grupları üretmek için GAP programında `SmallGroup(n,k)` fonksiyonu kullanılır. Buradaki n değişkeni üretilmek istenen grubun mertebesini k değişkeni ise grubun izomorfizm sınıfı içerisindeki numarasını verecektir. Aşağıdaki GAP oturumunda SmallGroup kütüphanesinde yer alan 8. mertebeden 3. grup üretilmiştir. 8. mertebeden izomorfizm farkıyla 5 grup bulunmaktadır.

```
gap> G := SmallGroup(8,3);
<pc group of size 8 with 3 generators>
gap> g := GeneratorsOfGroup(G);
[ f1, f2, f3 ]
gap> Elements(G);
[ <identity> of ..., f1, f2, f3, f1*f2, f1*f3, f2*f3, f1*f2*f3 ]
gap> StructureDescription(G);
"D8"
gap> NumberSmallGroups(8);
5
```

`StructureDescription(G)` fonksiyonu G grubunun hangi izomorfizm sınıfından olduğu hakkında bilgi verir. `GeneratorsOfGroup(G)` fonksiyonu bir grubun üreteçlerini bulmaya yarar. Oluşan grup polycyclic grup (PC group) olarak ifade edilir. Burada f1, f2 ve f3 ifadesi üreteci gösterir. Bununla birlikte sonsuz polycylic gruplardaki hesaplamaları yapabilmek için bir GAP paketi Polycyclic adıyla Eick, Nickel, 2000 tarafından yazılmıştır. Bazı durumlarda polycyclic gruplar yerine permutasyonik çarpım işlemiyle tanımlı gruplar üzerinde işlem yapmak daha anlaşılır olmaktadır. Cayley teoremi gereğince G grubuna izomorf olan bir permütasyonik grup bulmak için aşağıdaki GAP komutları kullanılır.

```
gap> f := IsomorphismPermGroup(G);
<action isomorphism>
gap> H := Range(f);
Group([ (1,2)(3,8)(4,6)(5,7), (1,3)(2,5)(4,7)(6,8), (1,4)(2,6)(3,7)(5,8) ])
gap> Elements(D8);
[ (), (1,2)(3,8)(4,6)(5,7), (1,3)(2,5)(4,7)(6,8), (1,4)(2,6)(3,7)(5,8),
(1,5,4,8)(2,3,6,7), (1,6)(2,4)(3,5)(7,8), (1,7)(2,8)(3,4)(5,6),
```

```
(1,8,4,5)(2,7,6,3) ]
gap> StructureDescription(H);
"D8"
```

`IsomorphismPermGroup(G)` fonksiyonu H bir permütasyonik grup olmak üzere $f : G \longrightarrow H$ şeklinde bir grup izomorfizmi verir. `Range(f)` fonksiyonu ile H permutasyonik grubuna ulaşılır. SmallGroup kütüphanesinin diğer önemli fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

- `SmallGroupsInformation(n);` fonksiyonu n. merteben (izomorfizm farkıyla) gruplar hakkında bilgi verir.
- `NumberSmallGroups(n);` fonksiyonu n. mertebeden kaç farklı (izomorfizm farkıyla) grup olduğunu söyler.
- `AllSmallGroups(n);` fonksiyonu n. mertebeden (izomorfizm farkıyla) tüm grupları verir.

Aşağıdaki GAP oturumunda 16 mertebeden grupların izomorfizm sınıfları içerisinde hangilerinin abelyan olduğu gösterilmektedir.

```
gap> SmallGroupsInformation(16);

There are 14 groups of order 16.
They are sorted by their ranks.
1 is cyclic.
2 - 9 have rank 2.
10 - 13 have rank 3.
14 is elementary abelian.

For the selection functions the values of the following attributes
are precomputed and stored:
IsAbelian, PClassPGroup, RankPGroup, FrattinifactorSize and
FrattinifactorId.

This size belongs to layer 2 of the SmallGroups library.
IdSmallGroup is available for this size.

gap> L := AllSmallGroups(16);;
```

```
gap> List(L, i -> IsAbelian(i));
[ true, true, false, false, true, false, false, false, false, true, false,
false, false, true ]
```

6.1.1 GAP ve Çaprazlanmış Modüller

Alp, Wensley, 2000 çalışmasında, gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramı bilgisayar ortamına aktarılmış ve XMod adı altında bir GAP paketi oluşturulmuştur. XMod paketi ile çaprazlanmış modüller kategorisi üzerinde objeler geliştirilip buna denk olan cat1-gruplar kategorisine geçiş yapılabilir. XMod paketi kullanılarak 2-tipten cebirsel model olarak cat1-grupların sınıflandırılması Alp, Wensley, 2002 tarafından yapılmıştır. Çaprazlanmış modüller için izomorfizmden daha zayıf bir denklik bağıntısı olan izokilinizm altında farklı bir sınıflandırma Odabaş vd., 2016 tarafından tanımlanmış ayrıca gruplar ve çaprazlanmış modüler için izokilinizm sınıfları XMod (2016) paketine eklenerek bilgisayar ortamına aktarılmıştır.

Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı Porter, 1986 çalışmasında tanımlamıştır. Daha sonra yapılan Arvasi, Porter, 1997, Arvasi, Porter, 1996,Arvasi, Porter, 1998 gibi bir çok çalışma ile gruplar üzerinde oluşturulan tüm bu yapıların değişmeli cebir versiyonları tanımlanmıştır. Arvasi, Odabaş, 2015 çalışmasında değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modülleri ve cat1-cebirleri XModAlg paketi adı altında GAP kullanarak bilgisayar ortamına aktarmışlardır. XModAlg paketi kullanılarak cat1-cebirlerin sınıflandırılması Arvasi, Odabaş, 2016 tarafından yapılmıştır.

Bir G grubu ve $N \trianglelefteq G$ normal alt grubu verildiğinde bir $\partial : N \to G$ çaprazlanmış modülü elde edilebileceğini biliyoruz. Aşağıdaki GAP oturumunda $Q_{32} = \langle a, b, c : a^8 = b^2 = c^2 = abc \rangle$ biçiminde tanımlanan 32. mertebeden quaternion grubu ve seçilmiş bir normal alt grubu ile XMod paketi kullanılarak oluşturulmuş çaprazlanmış modül gösterilmektedir.

```
gap> F := FreeGroup(3);
<free group on the generators [ f1, f2, f3 ]>
gap> Size(F);
infinity
gap> G := F/[F.1^8 * F.2^(-2), F.2^2 * F.3^(-2), F.1 * F.2 * F.3^(-1)];
<fp group on the generators [ f1, f2, f3 ]>
gap> Size(G);
32
gap> StructureDescription(G);
```

```
"Q32"
gap> tumN := NormalSubgroups(G);;
gap> Length(tumN);
8
gap> N := tumN[6];
Group(<fp, no generators known>)
gap> N = G;
false
gap> XModByNormalSubgroup(G,N);
[Group( [ f2^-2, f1^-4 ] )->Group( [ f1, f2, f3 ] )]
gap> CM := XModByNormalSubgroup(G,N);
[Group( [ f2^-2, f1^-4 ] )->Group( [ f1, f2, f3 ] )]
gap> Display(CM);

Crossed module :-
: Source group has generators:
[ f2^-2, f1^-4 ]
: Range group has generators:
[ f1, f2, f3 ]
: Boundary homomorphism maps source generators to:
[ f2^-2, f1^-4 ]
: Action homomorphism maps range generators to automorphisms:
f1 -->  source gens --> [ f1^-1*f2^-2*f1, f1^-4 ]
f2 -->  source gens --> [ f2^-2, f2^-1*f1^-4*f2 ]
f3 -->  source gens --> [ f3^-1*f2^-2*f3, f3^-1*f1^-4*f3 ]
These 3 automorphisms generate the group of automorphisms.
```

Cat1GroupOfXMod(CM) fonksiyonu verilen bir çaprazlanmış modülden bu yapıya kategoriksel denk olan bir cat^1-grup elde etmek için kullanılır.

```
gap> C1 := Cat1GroupOfXMod(CM);
[..|X..=>Group( [ f1, f2, f3, f4, f5 ] )]
gap> IsCat1Group(C1);
true
gap> Display(C1);

Cat1-group :-
: Source group ..|X.. has generators:
[ f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7 ]
```

```
: Range group has generators:
[ f1, f2, f3, f4, f5 ]
: tail homomorphism maps source generators to:
[ f1, f2, f3, f4, f5, <identity> of ..., <identity> of ... ]
: head homomorphism maps source generators to:
[ f1, f2, f3, f4, f5, f4, f5 ]
: range embedding maps range generators to:
[ f1, f2, f3, f4, f5 ]
: kernel has generators:
[ f6, f7 ]
: boundary homomorphism maps generators of kernel to:
[ f4, f5 ]
: kernel embedding maps generators of kernel to:
[ f6, f7 ]
: associated crossed module is [Group( [ f4, f5 ] ) ->
Group( [ f1, f2, f3, f4, f5 ] )]
```

Bununla birlike XMod paketi cat^1-gruplar üretmek için gruplar üzerindeki endomorfizmler aracılığıyla oluşturulmuş bir kütüphaneye sahiptir. `Cat1Select(m,n,k)` fonksiyonu bu kütüphane içerisinden cat^1-grup seçmek için kullanılır. Buradaki m grubun mertebesini, n izomorfizm sınıfını, k ise seçilecek olan cat^1-grubun sırasını verir. Aşağıdaki GAP oturumunda bu fonksiyonun kullanımına örnek verilmiştir. Yine `XModOfCat1Group(C1)` fonksiyonu verilen C_1 cat^1-grubundan kategoriksel denk olan çaprazlanmış modülü oluşturmak için kullanılır.

```
gap> G := SmallGroup(32,20);
<pc group of size 32 with 5 generators>
gap> StructureDescription(G);
"Q32"
gap> C2 := Cat1Select(32,20,1);
[Q32=>Q32]
gap> IsCat1Group(C2);
true
gap> CM2 := XModOfCat1Group(C2);
[triv->Q32]
gap> IsXMod(CM2);
true
```

Cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller ve cat[1]-cebirler için XModAlg paketinin fonksiyonları kullanılır. GAP içerisinde cebirler için bir kütüphane bulunmadığından grup cebir kavramı kullanılır. Aşağıdaki GAP oturumunda 8. dereceden Galois cismi ve 3. dereceden alterne grubu kulanılarak üretilen GF_8A_3 grup cebirinin agümentasyon ideali yardımıyla cebirler üzerinde bir çaprazlanmış modül elde edilmiştir.

```
gap> A:=GroupRing(GF(8),AlternatingGroup(3));
<algebra-with-one over GF(2^3), with 1 generators>
gap> Size(A);
512
gap> I := AugmentationIdeal(A);
<two-sided ideal in <algebra-with-one of dimension 3 over GF(2^3)>,
(1 generators)>
gap> CM := XModAlgebraByIdeal(A,I);
[ <two-sided ideal in <algebra-with-one of dimension 3 over GF(2^3)>,
(dimension 2 )> -> <algebra-with-one of dimension 3 over GF(2^3)> ]
gap> Size(CM);
[ 64, 512 ]
gap> Boundary(CM);
MappingByFunction( <two-sided ideal in <algebra-with-one of dimension
3 over GF(2^3)>, (dimension 2 )>, <algebra-with-one of dimension 3 over
GF(2^3)>, function( i ) ... end )
gap> Source(CM);
<two-sided ideal in <algebra-with-one of dimension 3 over GF(2^3)>,
(dimension 2)>
gap> Range(CM);
<algebra-with-one of dimension 3 over GF(2^3)>
gap> Display(CM);

Crossed module [..->..] :-
: Source algebra has generators:
[ (Z(2)^0)*()+(Z(2)^0)*(1,2,3) ]
: Range algebra has generators:
[ (Z(2)^0)*(), (Z(2)^0)*(1,2,3) ]
: Boundary homomorphism maps source generators to:
[ (Z(2)^0)*()+(Z(2)^0)*(1,2,3) ]
```

`Cat1AlgebraByXModAlgebra(CM)` fonksiyonu verilen bir çaprazlanmış modülden bu yapıya kategoriksel denk olan bir cat[1]-cebir elde etmek için kullanılır.

```
gap> CA := Cat1AlgebraByXModAlgebra(CM);
[AlgebraWithOne( GF(2^3), [ (Z(2)^0)*(1,2,3) ] ) IX
Algebra( GF(2^3), [ (Z(2)^0)*()+(Z(2)^0)*(1,2,3)
] ) -> AlgebraWithOne( GF(2^3), [ (Z(2)^0)*(1,2,3) ] )]
gap> IsCat1Algebra(CA);
true
```

XMod paketine benzer şekilde XModAlg paketi cat^1-cebirler üretmek için bir kütüphaneye sahiptir. `Cat1AlgebraSelect()` fonksiyonu bü kütüphane içerisinden cat^1-cebir seçmek için kullanılır.

```
gap> CA2 := Cat1AlgebraSelect(4,4,2,1);
[GF(2^2)_k4 -> GF(2^2)_k4]
gap> Display(CA2);

Cat1-algebra [GF(2^2)_k4=>GF(2^2)_k4] :-
: source algebra has generators:
[ (Z(2)^0)*(), (Z(2)^0)*(1,2), (Z(2)^0)*(3,4) ]
:  range algebra has generators:
[ (Z(2)^0)*(), (Z(2)^0)*(1,2), (Z(2)^0)*(3,4) ]
: tail homomorphism maps source generators to:
[ (Z(2)^0)*(), (Z(2)^0)*(1,2), (Z(2)^0)*(3,4) ]
: head homomorphism maps source generators to:
[ (Z(2)^0)*(), (Z(2)^0)*(1,2), (Z(2)^0)*(3,4) ]
: range embedding maps range generators to:
[ (Z(2)^0)*(), (Z(2)^0)*(1,2), (Z(2)^0)*(3,4) ]
: the kernel is trivial.
gap> CM2 := XModAlgebraByCat1Algebra(CA2);
[ <algebra over GF(2^2), with 0 generators> -> GF(2^2)_k4 ]
gap> IsXModAlgebra(CM2);
true
```

6.1.2 GAP ve Grup ile Etki

Odabaş vd., 2015 çalışmasında grup ile etki kavramı bilgisayar ortamına aktarılmış ve `GwA` adı verilen bir giriş paketi yazılmıştır. `GwA` paketinde ilk olarak bir G grubunun kendi üzerine etkilerini bulmak için $\alpha : G \to Aut(G)$ biçimindeki α homomorfizmleri oluşturulmuştur. Daha sonra elde edilen etki ile grubu bir arada tutacak yeni bir obje tanımlanmıştır. Tez kapsamında `GwA` paketinin bazı fonksiyonlarını da içerisine alan `XModGwA` adı altında yeni bir GAP paketi geliştirilmiştir. Bu bölümde `XModGwA` paketi içerisinde yer alan bazı fonksiyonlar tanıtılacaktır. `GwA(G)` fonksiyonu verilen bir gruptan

$$\begin{array}{rcccccc} \iota : & G & \to & Aut(G) & & & \\ & g & \mapsto & \iota(g) & : & G & \to & G \\ & & & & & x & \mapsto & x \end{array}$$

morfizmi yardımıyla bir grup ile etki oluşturmak için kullanılır. Böylelikle herhangi bir gruptan bir grup ile etki elde edilmiş olur. Bu şekilde elde edilen grup ile etkiye aşikar grup ile etki denir. `GwA(G,alpha)` fonksiyonu verilen bir G grubu ve $\alpha : G \to Aut(G)$ morfizmi kullanılarak bir grup ile etki oluşturur. Aşağıdaki GAP oturumunda bu fonksiyonlar kullanılarak grup ile etkiler oluşturulmuştur.

```
gap> S3 := SymmetricGroup(3);
Sym( [ 1 .. 3 ] )
gap> GwA(S3);
GroupWithAction [ SymmetricGroup( [ 1 .. 3 ] ), * ]
gap> tum_morph := AllHomomorphisms(G,AutomorphismGroup(G));
[ [ (1,2,3), (1,2) ] -> [ IdentityMapping( Sym( [ 1 .. 3 ] ) ),
IdentityMapping( Sym( [ 1 .. 3 ] ) ) ],
[ (1,2,3), (1,2) ] -> [ IdentityMapping( Sym( [ 1 .. 3 ] ) ), ^(2,3) ],
[ (1,2,3), (1,2) ] -> [ ^(), ^(1,2) ],
[ (1,2,3), (1,2) ] -> [ ^(), ^(1,3) ],
[ (1,2,3), (1,2) ] -> [ ^(1,3,2), ^(2,3) ],
[ (1,2,3), (1,2) ] -> [ ^(1,2,3), ^(2,3) ],
[ (1,2,3), (1,2) ] -> [ ^(1,3,2), ^(1,2) ],
[ (1,2,3), (1,2) ] -> [ ^(1,2,3), ^(1,2) ],
[ (1,2,3), (1,2) ] -> [ ^(1,2,3), ^(1,3) ],
[ (1,2,3), (1,2) ] -> [ ^(1,3,2), ^(1,3) ] ]
gap> alpha := tum_morph[6];
[ (1,2,3), (1,2) ] -> [ ^(1,2,3), ^(2,3) ]
gap> GwA(S3,alpha);
GroupWithAction [ SymmetricGroup( [ 1 .. 3 ] ), * ]
```

`AllGwAOnGroup(G)` fonksiyonu verilen bir G grubu üzerindeki tüm grup ile etki yapılarını oluşturmak için kullanılır. Aşağıdaki GAP oturumunda $klein$ 4 grubu üzerinde oluşturulan tüm grup ile etkiler elde edilmiştir. Bu grup ile etkilerin 10 tane olduğu görülmektedir.

```
gap> G := SmallGroup(4,2);
<pc group of size 4 with 2 generators>
gap> kl4 := Range(IsomorphismPermGroup(G));
Group([ (1,2), (3,4) ])
gap> tumGwA_kl4 := AllGwAOnGroup(kl4);
[ GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ] ]
gap> Length(tumGwA_kl4);
10
```

`IsGwA(O)` fonksiyonu verilen bir O objesinin grup ile etki olup olmadığı kontrol edilir.

```
gap> IsGwA(kl4);
false
gap> GA := tumGwA_kl4[7];
GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ]
gap> IsGwA(GA);
true
gap> List(tumGwA_kl4, i -> IsGwA(i));
[ true, true, true, true, true, true, true, true, true, true ]
```

GAP programında `MultiplicationTable(G)` fonksiyonu verilen G grubunun işlem tablosu bulmak için kullanılır. GwA paketinin `MultiplicationTableOfGwA(GA)` fonksiyonu ise GA grup ile etkisinin etki tablosunu oluşturur.

```
gap> MultiplicationTable(kl4);
[ [ 1, 2, 3, 4 ],
```

```
[ 2, 1, 4, 3 ],
[ 3, 4, 1, 2 ],
[ 4, 3, 2, 1 ] ]
gap> MultiplicationTableOfGwA(GA);
[ [ (), (3,4), (1,2), (1,2)(3,4) ],
[ (), (1,2), (3,4), (1,2)(3,4) ],
[ (), (3,4), (1,2), (1,2)(3,4) ],
[ (), (1,2), (3,4), (1,2)(3,4) ] ]
```

`IsIdeal(GA,HA)` fonksiyonu tanım 3.1.2 de verilen ideal şartlarını kontrol ederek HA grup ile etkisinin GA grup ile etkisinin bir ideali olup olmadığını kontrol eder. Esasen GAP programında halka teori için yazılmış bir `IsIdeal()` fonksiyonu vardır. Yazılan filtreler sayesinde bu fonksiyona giriş yapılan parametrelerin grup ile etki olması durumunda paketin `IsIdeal()` fonksiyonuna yönlendirme sağlanmıştır. `NrIdealOnGwA(GA)` fonksiyonu GA grup ile etkisinin ideallerinin sayısını `AllIdealOnGwA(GA)` fonksiyonu ise bu ideallerin tamamını verir.

```
gap> AllIdealOnGwA(GA);
[ GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ (1,2)(3,4) ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( () ), * ] ]
gap> HA := last[2];
GroupWithAction [ Group( [ (1,2)(3,4) ] ), * ]
gap> IsIdeal(GA,HA);
true
gap> List(tumGwA_kl4, i -> NrIdealOnGwA(i));
[ 5, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3 ]
```

`CommutatorSubgroup(H,K)` fonksiyonu aynı bir G grubun alt grupları olan H ve K gruplarından komütatör çarpımı yardımıyla yeni bir normal alt grup tanımlar. `Commutator(KA,HA,GA)` fonksiyonu ise KA ve HA grup ile etkileri GA grup ile etkisinin bir ideali olmak üzere tanım 3.1.3 de verilen özellikler kullanılarak komütatör grup ile etki yapısını oluşturur. KA ve HA yardımıyla üretilen kömütatör grup ile etki GA grup ile etkisinin bir ideali olacaktır. Komütatör alt grup tanımında verilen iki alt grupda G nin kendisi olarak alındığında üretilen alt grup G nin kendisine eşit oluyor ise G mükemmel grup denildiğini biliyoruz. Benzer tanımlama kullanılarak `PerfectGwA(GA)` fonksiyonu yazılarak `XModGwA` paketine eklenmiştir. Aşağıdaki GAP oturumunda $klein$ 4 grubunun ve üzerinde tanımlanan grup ile etkilerin mükemmel olmadığı gösterilmiştir.

```
gap> el := Elements(kl4);
[ (), (3,4), (1,2), (1,2)(3,4) ]
gap> H := Subgroup(kl4,[el[3]]);
Group([ (1,2) ])
gap> C := CommutatorSubgroup(kl4,H);
Group(())
gap> IsNormal(kl4,C);
true
gap> CA := Commutator(GA,HA,GA);
GroupWithAction [ Group( [ (), (1,2)(3,4) ] ), * ]
gap> IsIdeal(GA,CA);
true
gap> IsPerfectGroup(kl4);
false
gap> List(tumGwA_kl4, i -> i = IsPerfectGwA(i));
[ false, false, false, false, false, false, false, false, false, false ]
```

Bir G grubunun alt merkez serisi GAP programında `LowerCentralSeries(G)` fonksiyonu yardımıyla bulunur. Bir grup GA grup ile etkisininin alt merkez serisini elde etmek için ise `LowerCentralSeriesOfGwA(GA)` fonksiyonu kullanılır.

```
gap> LowerCentralSeries(kl4);
[ Group([ (1,2), (3,4) ]), Group(()) ]
gap> LowerCentralSeriesOfGwA(GA);
[ GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ (), (1,2)(3,4) ] ), * ] ]
```

Bir grubun alt merkez serisi sonlu bir adımda aşikar alt gruba ulaşıyor ise nilpotent grup olarak adlandırılır. Nilpotent bir grubun alt merkez serisinde aşikar alt grup haricindeki alt grup sayısı grubun nilpotentlik derecesini verir. Grup nilpotent değilse bu derece 0 olarak alınır. GAP programında `IsNilpotent(G)` fonksiyonu bir G grubunun nilpotent olup olmadığı test etmek için `NilpotencyClassOfGroup(G)` ise nilpotenlik derecesini bulmak için kullanılır. `IsNilpotent(GA)` fonksiyonu ise GA grup ile etkisinin nilpotent olup olmadığını `NilpotencyClassOfGwA(GA)` ise nilpotenlik derecesini bulmak için kullanılır. Aşağıdaki GAP oturumunda bir grup nilpotent iken üzerinde tanımlanan grup ile etkinin nilpotent olmak zorunda olmadığı gösterilmiştir.

```
gap> IsNilpotent(kl4);
true
gap> NilpotencyClassOfGroup(kl4);
1
gap> IsNilpotent(GA);
false
gap> NilpotencyClassOfGwA(GA);
0
gap> List(tumGwA_kl4, i -> IsNilpotent(i));
[ true, true, false, false, false, true, false, false, false, true ]
gap> List(tumGwA_kl4, i -> NilpotencyClassOfGwA(i));
[ 1, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2 ]
```

`Center(G)` fonksiyonu GAP programında bir G grubunun merkezini bulmak için kullanılır. Bir GA grup ile etkisinin merkezini bulmak için ise `CenterOfGwA(GA)` fonksiyonu yazılmıştır. Diğer bir fonksiyon olan `IsSingular(GA)` ise GA grup ile etkisinin singülerliğini kontrol etmektedir. Aşağıdaki GAP oturumunda $klein$ 4 grubu abelyan olduğu halde iken üzerinde tanımlı on adet grup ile etkiden yalnızca birisinin singüler olduğu görülmektedir.

```
gap> IsAbelian(kl4);
true
gap> Center(kl4);
Group([ (1,2), (3,4) ])
gap> kl4 = Center(kl4);
true
gap> CenA := CenterOfGwA(GA);
GroupWithAction [ Group( [ () ] ), * ]
gap> IsIdeal(GA,CenA);
true
gap> IsAbelianGwA(GA);
false
gap> IsAbelianGwA(CenA);
true
```

```
gap> List(tumGwA_kl4, i -> IsAbelianGwA(i));
[ true, false, false, false, false, false, false, false, false, false ]
```

Lebiniz cebirler için geçiş koşulu olduğundan şart 1'i sağlayan grup ile etkileri belirlemek çok önemlidir. `IsGwAC1(GA)` fonksiyonu bir GA grup ile etki yapısının şart 1'i sağlayıp sağlamadığını kontrol eder. Aşağıdaki GAP oturumunda $klein$ 4 grubu üzerinde tanımlı on adet grup ile etkiden yalnızca dördünün şart 1'i sağladığı görülmektedir.

```
gap> IsGwAC1(GA);
false
gap> IsGwAC1(tumGwA_kl4[10]);
true
gap> List(tumGwA_kl4, i -> IsGwAC1(i));
[ true, true, false, false, false, true, false, false, false, true ]
```

Klein 4 grubunun işlem tablosu

$+$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

biçimindedir. *Klein* 4 grubu üzerinde şart 1'i sağlayan dört tanesinin etki tablosu `MultiplicationTableOfGwA` fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

ε_1	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	e	a	b	ab
b	e	a	ab	b
ab	e	a	ab	b

ε_2	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	e	a	b	ab
b	e	a	b	ab
ab	e	a	b	ab

ε_3	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	e	ab	b	a
b	e	a	b	ab
ab	e	ab	b	a

ε_4	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	e	b	a	ab
b	e	b	a	ab
ab	e	a	b	ab

Grupların izomorfizm altında sınıflandırılmasına benzer şekilde grup ile etkilerde izomorfizm altında sınıflandırılırlar. Bunun için ilk önce şekil 3.1 kullanılarak grup ile etki morfizmini oluşturan `GwAMorphismObj(GA,HA,phi)` fonksiyonu geliştirilmiştir. Burada $\phi : G \to H$ biçiminde bir grup homomorfizmi olup elde edilen bir yeni m objesini grup ile etki morfizmi şartlarını sağlayıp sağlamadığı ise `IsGwAMorphism(m)` fonksiyonu yardımıyla kontrol edilir. Aşağıdaki GAP oturumda $klein$ 4 ve A_4 alterne gruplarından elde edilen grup ile etkiler arasında bir morfizm oluşturulmuştur.

```
gap> A4 := AlternatingGroup(4);
Alt( [ 1 .. 4 ] )
gap> gen_kl4 := GeneratorsOfGroup(kl4);
[ (1,2), (3,4) ]
gap> gen_A4 := GeneratorsOfGroup(A4);
[ (1,2,3), (2,3,4) ]
gap> el_A4 := Elements(A4);
[ (), (2,3,4), (2,4,3), (1,2)(3,4), (1,2,3), (1,2,4), (1,3,2), (1,3,4),
(1,3)(2,4), (1,4,2), (1,4,3), (1,4)(2,3) ]
gap> f := GroupHomomorphismByImages(kl4,A4,gen_kl4,[el_A4[4],el_A4[4]]);
[ (1,2), (3,4) ] -> [ (1,2)(3,4), (1,2)(3,4) ]
gap> kl4_A := GwA(kl4);
GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ]
gap> A4_A := GwA(A4);
GroupWithAction [ AlternatingGroup( [ 1 .. 4 ] ), * ]
gap> IsGwA(kl4_A); IsGwA(A4_A);
true
true
gap> m := GwAMorphismObj(kl4_A,A4_A,f);
GroupWithAction [ Group( [ (1,2), (3,4) ] ), * ] =>
GroupWithAction [ AlternatingGroup( [ 1 .. 4 ] ), * ]
gap> IsGwAMorphism(m);
true
```

Bir grup ile etki morfizminin izomorfizm olup olmadığını test etmek için `IsIsomorphismGwA(m)` fonksiyonu geliştirilmiştir. Daha sonra iki grup ile etki arasındaki tüm morfizmleri kontrol ederek iki grup ile etkinin izomorf olup olmadığını kontrol edecek `IsIsomorphicGwA(GA,HA)` fonksiyonu geliştirilmiştir. Aşağıdaki GAP oturumunda $klein$ 4 grubu üzerinde oluşturulan on adet grup ile etkiden rastgele seçilen ikilerden bir çiftinin izomorf diğerinin ise izomorf olmadığı görülmektedir.

```
gap> IsIsomorphismGwA(m);
true
gap> IsIsomorphicGwA(kl4_A,A4_A);
false
gap> IsIsomorphicGwA(tumGwA_kl4[4],tumGwA_kl4[5]);
true
gap> IsIsomorphicGwA(tumGwA_kl4[4],tumGwA_kl4[2]);
false
```

Verilen bir grup ile etkinin izomorf olduğu (aynı grup üzerinde) tüm grup ile etkileri belirleyerek bir denklik sınıfı oluşturacak `IsomorphicGwAFamily(aGA,GA)` fonksiyonu geliştirilmiştir. Aşağıdaki GAP oturumunda $klein$ 4 grubu üzerinde oluşturulan on adet grup ile etkinin en genişi altı elemanlı üç farklı izomorfizm ailesi oluşturduğu görülmektedir.

```
gap> IsomorphicGwAFamily(tumGwA_kl4[1],tumGwA_kl4);
1 => [ 1 ]
gap> IsomorphicGwAFamily(tumGwA_kl4[2],tumGwA_kl4);
3 => [ 2, 6, 10 ]
gap> IsomorphicGwAFamily(tumGwA_kl4[3],tumGwA_kl4);
6 => [ 3, 4, 5, 7, 8, 9 ]
```

$klein$ 4 grubu üzerindeki grup ile etkilerin oluşturduğu izomorfizm ailesinin çeşitli özelliklerini içeren tablo aşağıda verilmiştir.

Sınıf	Eleman Sayısı	Temsilci	Ideal Sayısı	Nilpotenlik Derecesi	Sart 1
1	1	1/10	5	1	✓
2	3	2/10	3	2	✓
3	6	3/10	3	0	✗

klein 4 grubu grup ile etkileri izomorfizm aileleri

Benzer bir tabloyu $C_2 \times C_2 \times C_2$ grubu içinde oluşturalım. Aşağıdaki GAP oturumunda bu grup üzerinde 736 tane grup ile etki oluştuğu görülmektedir.

```
gap> G := SmallGroup(8,5);
<pc group of size 8 with 3 generators>
gap> StructureDescription(G);
"C2 x C2 x C2"
gap> AllGwAOnGroup(G);;
gap> Length(last);
736
```

Yazılan GAP fonksiyonları kullanılarak elde edilen 14 izomorfizm ailesi ve çeşitli özellikleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Bu ailelerden 6 sı şart 1'i sağlamaktadır.

Sınıf	Eleman Sayısı	Temsilci	Ideal Sayısı	Nilpotenlik Derecesi	Sart 1
1	1	1/736	16	1	✓
2	84	2/736	7	0	✗
3	21	4/736	8	2	✓
4	42	9/736	6	2	✓
5	84	65/736	6	0	✗
6	168	67/736	6	0	✗
7	14	71/736	6	2	✓
8	21	81/736	6	2	✓
9	7	101/736	6	2	✓
10	56	107/736	3	0	✗
11	84	108/736	5	0	✗
12	42	110/736	4	0	✗
13	84	112/736	4	0	✗
14	28	122/736	6	0	✗

$C_2 \times C_2 \times C_2$ grubu grup ile etkileri izomorfizm aileleri

Hem $klein$ 4 grubu hemde $C_2 \times C_2 \times C_2$ grubu üzerinde oluşan grup ile etkilerin izomorfizm aileleri tabloları incelendiğinde nilpotent olan grup ile etkilerin şart 1'i sağladıkları görülmüştür. Ancak bu durum genel bir sonuç olarak verilemez. Örneğin $C_4 \times C_4$ grubu üzerinde oluşan 832 adet grup ile etki incelendiğinde oluşan 73 izomorfizm sınıfından 54 tanesinin şart 1'i sağladığı görülmektedir. Ancak bu ailelerden nilpotent olanların sayısı 53 tür. Yani nilpotent olmayan bir aile şart 1'i sağlamaktadır. Ayrıca 33 ailenin 9, 16 ailenin 11, 7 ailenin 5, 6 ailenin 6, 4 ailenin 7, 4 ailenin 4, 2 ailenin 13 ve 1 ailenin 15 adet ideali vardır.

Sınıf	Eleman Sayısı	Temsilci	Ideal Sayısı	Nilpotenlik Derecesi	Sart 1
1	1	1/832	15	1	✓
2	48	2/832	4	0	✗
3	24	3/832	5	0	✗
4	24	14/832	6	0	✗
5	12	15/832	7	0	✓
6	48	26/832	4	0	✗
7	24	27/832	5	0	✗
8	48	38/832	6	0	✗
9	12	39/832	7	0	✗
10	12	44/832	7	2	✓
11	6	50/832	9	2	✓
12	3	51/832	11	2	✓
13	6	53/832	11	2	✓
14	6	54/832	13	2	✓
15	6	55/832	11	2	✓
16	3	59/832	11	2	✓
17	6	60/832	11	2	✓
18	3	61/832	11	2	✓
19	6	63/832	9	2	✓
20	48	89/832	4	0	✗
21	24	93/832	5	0	✗
22	24	185/832	6	0	✗
23	12	188/832	5	0	✗
24	24	197/832	6	0	✗
25	12	200/832	7	0	✗
26	24	209/832	6	0	✗
27	12	212/832	5	0	✗
28	48	293/832	4	0	✗
29	24	297/832	5	0	✗
30	48	377/832	6	0	✗
31	24	380/832	5	0	✗
32	3	503/832	9	2	✓
33	2	504/832	9	2	✓
34	1	508/832	9	2	✓
35	6	509/832	9	2	✓
36	6	510/832	9	2	✓
37	6	511/832	9	2	✓

38	6	512/832	9	2	✓
39	6	513/832	11	2	✓
40	6	514/832	11	2	✓
41	6	515/832	9	2	✓
42	6	516/832	9	2	✓
43	6	517/832	9	2	✓
44	6	518/832	9	2	✓
45	6	519/832	9	2	✓
46	6	520/832	9	2	✓
47	6	527/832	11	2	✓
48	6	528/832	9	2	✓
49	6	529/832	9	2	✓
50	6	530/832	9	2	✓
51	6	531/832	9	2	✓
52	3	532/832	9	2	✓
53	3	533/832	9	2	✓
54	6	575/832	9	2	✓
55	6	576/832	11	2	✓
56	3	577/832	9	2	✓
57	3	579/832	13	2	✓
58	3	587/832	11	2	✓
59	3	588/832	11	2	✓
60	6	589/832	11	2	✓
61	6	590/832	11	2	✓
62	6	599/832	9	2	✓
63	6	600/832	9	2	✓
64	3	602/832	11	2	✓
65	3	604/832	11	2	✓
66	6	623/832	9	2	✓
67	6	624/832	9	2	✓
68	6	645/832	9	2	✓
69	6	626/832	9	2	✓
70	6	627/832	9	2	✓
71	6	628/832	9	2	✓
72	3	703/832	9	2	✓
73	3	704/832	9	2	✓

$C_4 \times C_4$ grubu grup ile etkileri izomorfizm aileleri

Nilpotent olmadığı halde şart 1'i sağlayan 5 nolu ailenin 12 üyesi vardır. Aşağıdaki GAP oturumunda bu ailenin temsilcisi olan grup ile etkinin şart 1'i sağladığı gösterilmektedir.

```
gap> G := SmallGroup(16,2);
<pc group of size 16 with 4 generators>
gap> StructureDescription(G);
"C4 x C4"
gap> allGwA_C4xC4 := AllGwAOnGroup(G);;
gap> Length(allGwA_C4xC4);
832
gap> GA := allGwA_C4xC4[15];
GroupWithAction [ Group( [ f1, f2, f3, f4 ] ), * ]
gap> IsomorphicGwAFamily(GA,allGwA_C4xC4);
12=>[ 15, 18, 19, 24, 161, 163, 169, 172, 176, 179, 180, 182 ]
gap> NrIdealOnGwA(GA);
7
gap> LowerCentralSeriesOfGwA(GA);
[ GroupWithAction [ Group( [ f1, f2, f3, f4 ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ <identity> of ..., f3, f1*f4, f1*f3*f4 ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ <identity> of ..., f3, f3,
<identity> of ... ] ), * ] ]
gap> NilpotencyClassOfGwA(GA);
0
gap> IsNilpotent(GA);
false
gap> IsGwAC1(GA);
true
```

Grup ile etkiler üzerinde çaprazlanmış modül yapısını oluşturmak için ilk olarak tanım 4.4.2 de verilen grup ile etkinin etkisinin bilgisayar ortamına aktarılması gerekir. `IsGwAAction(GA,HA,act)` fonksiyonu yazılarak `XModGwA` paketine eklenmiştir. Burada GA ve HA sırasıyla G ve H grupları üzerinde herhangi grup ile etkidir. $act : H \to Aut(G)$ şeklinde tanımlanan herhangi bir homomorfizm olmak üzere bu üçlüden elde edilen yapının tanım 4.4.3 de verilen şartları sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. `AllXModGwAActions(GA,HA)` fonksiyonu GA grup ile etkisinin HA grup ile etkisi üzerine olan tüm etkileri belirlemek için kullanılır. Fonksiyon iki çıkış parametresi verecek şekilde yazılmıştır. Birinci çıkış parametresi G nin H üzerine etkisi olarak kullanılabilecek act dönüşümlerini ikincisi ise HA grup ile etkisinin GA grup ile etkisi üzerine etkisini tanımlayacak act dönüşümlerini verir. Aşağıdaki GAP oturumunda A grubunun B grubu üzerine etkisi 232 iken bunlardan yalnızca 2 sının aynı gruplar üzerinde tanımlanmış özel grup ile etkiler için etki tanımladığı görülmektedir.

```
gap> G := SmallGroup(8,5);
<pc group of size 8 with 3 generators>
gap> StructureDescription(G);
"C2 x C2 x C2"
gap> H := SmallGroup(8,2);
<pc group of size 8 with 3 generators>
gap> StructureDescription(H);
"C4 x C2"
gap> GAlar := AllGwAOnGroup(G);;
gap> HAlar := AllGwAOnGroup(H);;
gap> Length(GAlar);
736
gap> Length(HAlar);
32
gap> GA := GAlar[2];
GroupWithAction [ Group( [ f1, f2, f3 ] ), * ]
gap> HA := HAlar[3];
GroupWithAction [ Group( [ f1, f2, f3 ] ), * ]
gap> alar := AllXModGwAActions(GA,HA);;
gap> Length(alar[1]);
232
gap> Length(alar[2]);
2
gap> aa := alar[2];
[ [ f2, f1 ] -> [ IdentityMapping( <pc group of size 8 with 3 generators> ),
IdentityMapping( <pc group of size 8 with 3 generators> ) ],
[ f2, f1 ] -> [ Pcgs([ f1, f2, f3 ]) -> [ f1, f2, f3 ],
Pcgs([ f1, f2, f3 ]) -> [ f1*f2, f2, f3 ] ] ]
```

`PreXModGwAObj(bdy,act)` fonksiyonu $\partial : GA \to HA$ grup ile etki homomorfizmi ve act grup ile etki etkisi ile birlikte bir grup ile etki çaprazlanmış modül objesi oluşturmak için yazılmıştır. `IsPreXModGwA` ve `IsXModGwA` fonksiyonları oluşturulan objenin bir (ön) çaprazlanmış modül olup olmadığını kontrol etmek için yazılmıştır. Çaprazlanmış modül objelerini oluşturmak için grup ile etki morfizmlerini belirlemek çok önemlidir. Bu nedenle iki grup ile etki arasındaki tüm morfizmleri bulacak `AllGwAMorphisms(GA,HA)` fonksiyonu yazılarak XModGwA paketine eklenmiştir. Aşağıdaki GAP oturumunda bu fonksiyonlar kullanılarak çaprazlanmış modül elde edilmiştir.

```
gap> f_ler := AllHomomorphisms(G,H);;
gap> Length(f_ler);
64
gap> bdy_ler := AllGwAMorphisms(GA,HA);;
gap> CM1 := PreXModGwAObj(bdy_ler[5],aa[2]);
XModGwAObject
gap> IsXModGwA(CM1);
true
gap> CM1 := PreXModGwAObj(bdy_ler[8],aa[2]);
XModGwAObject
gap> IsXModGwA(CM1);
Condition 1 fail
For g = f1 and h = f1 => f3 <> f2
false
gap> IsPreXModGwA(CM1);
false
```

IdealXModGwA(GA,IA) fonksiyonu örnekte verilen şekliyle bir GA grup ile etkisi ve IA ideali yardımıyla bir grup ile etki çaprazlanmış modülü üretmek için yazılmış ve XModGwA paketine eklenmiştir. IsXModGwAC1(CM) fonksiyonu CM çaprazlanmış modülünün şart 1 i sağlayıp sağlamadığını kontrol etmek için geliştirilmiştir.

```
gap> allIdeal := AllIdealOnGwA(GA);
[ GroupWithAction [ Group( [ f1, f2, f3 ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ f1, f2*f3 ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ f2, f3 ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ f1*f3, f2*f3 ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ f2*f3 ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( [ f2 ] ), * ],
GroupWithAction [ Group( <identity> of ... ), * ] ]
gap> CM2 := IdealXModGwA(GA,allIdeal[3]);
XModGwAObject
gap> IsPreXModGwA(CM2);
true
gap> IsXModGwA(CM2);
```

```
true
gap> IsXModGwAC1(CM2);
true
```

`AllXModGwAType1(GA,HA)` fonksiyonu GA ve HA grup ile etkileri arasında yazılabilecek tüm grup ile etki çaprazlanmış modüllerini bulmak için geliştirilmiştir. Fonksiyon hem ön çaprazlanmış modülleri hemde çaprazlanmış modülleri hesaplamaktadır. Aşağıdaki GAP oturumunda daha önce tanımlanmış olan GA ve HA için ön çaprazlanmış modül ve çaprazlanmış modül sayıları verilmiştir.

```
gap> CM_ler1 := AllXModGwAType1(GA,HA);;
gap> Length(CM_ler1[1]); Length(CM_ler1[2]);
20
20
gap> CM_ler2 := AllXModGwAType1(HA,GA);;
gap> Length(CM_ler2[1]); Length(CM_ler2[2]);
96
48
```

`AllXModGwAType2(x,y,m,n)` fonksiyonu ise `SmallGroup(x,y)` ve `SmallGroup(m,n)` arasında tanımlanabilecek tüm grup ile etki çaprazlanmış modüllerini hesaplar. Fonksiyon hem ön çaprazlanmış modülleri hemde çaprazlanmış modülleri hesaplamaktadır. Aşağıdaki GAP oturumunda farklı gruplar üzerinde hesaplanan grup ile etki çaprazlanmış modülleri verilmiştir.

```
gap> CM_ler3  := AllXModGwAType2(3,1,3,1);;
gap> Length(CM_ler3[1]); Length(CM_ler3[2]);
3
3
gap> CM_ler4 := AllXModGwAType2(4,1,4,2);;
gap> Length(CM_ler4[1]); Length(CM_ler4[2]);
128
104
gap> CM_ler5 := AllXModGwAType2(6,2,8,2);;
gap> Length(CM_ler5[1]); Length(CM_ler5[2]);
640
576
```

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde grup ile etki tanımının 2-boyutlu hali olan grup ile etki çaprazlanmış modülü, etki tanımı ve özellikleri, internal kategori ile etki tanımlarına geniş olarak yer verilmiştir. Grup ile etki yapısının Şart 1 olarak bilinen eşitliği sağlaması halinde bir Leibniz cebiri elde edilir. Benzer bakış açısıyla bir grup ile etki çaprazlanmış modülünde tanımlanan ∂ dönüşümü için $s(\partial)$ ve $t(\partial)$ olarak ifade edilen hedef ve kaynak grup ile etki yapılarının ayrı ayrı şart 1 eşitliğini sağlaması durumunda bir Leibniz çaprazlanmış modülü elde edilmesi mümkündür. Bu tezde elde edilen tanım ve teoremlerin benzeri şekilde şart 1 eşitliği üzerinden Leibniz çaprazlanmış modülüne ilişkin özellikler elde edilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alp, M., Wensley, C. (2002), *Crossed modules and cat1-groups in GAP,version 2.1 Manual for the XMOD share package*.

Alp, M., Wensley, C. D. (2000), Enumeration of cat1-groups of low order, *International Journal of algebra and computation* 10.04, 407–424.

Arvasi, Z. (2013), *Category Theory Lecture Notes*.

Arvasi, Z., Odabaş, A. (2015), *Crossed Modules of Commutative Algebras and Cat1-algebras in GAP, Version 1.12 Manual for the XModAlg share package for GAP4*.

Arvasi, Z., Odabaş, A. (2016), Computing 2-dimensional algebras: Crossed modules and cat1-algebras, *Journal of Algebra and Its Applications* 15.10, 1650185.

Arvasi, Z., Porter, T. (1996), Simplicial and crossed resolutions of commutative algebras, *Journal of Algebra* 181.2, 426–448.

Arvasi, Z., Porter, T. (1998), Freeness conditions for 2-crossed modules of commutative algebras, *Applied Categorical Structures* 6.4, 455–471.

Arvasi, Z., Porter, T. (1997), Higher dimensional Peiffer elements in simplicial commutative algebras, *Theory and Applications of Categories* 3.1, 1–23.

Behrends, R., Hammond, K., Janjic, V., Konovalov, A., Linton, S., Loidl, H.-W., Maier, P., Trinder, P. (2016), HPC-GAP: engineering a 21st-century high-performance computer algebra system, *Concurrency and Computation: Practice and Experience* 28.13, 3606–3636.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Besche, H. U., Eick, B. (1999), The groups of order at most 1000 except 512 and 768, *Journal of Symbolic Computation* 27.4, 405–413.

Besche, H. U., Eick, B., O'Brien, E. A. (2002), A millennium project: constructing small groups, *International Journal of Algebra and Computation* 12.05, 623–644.

Datuashvili, T. (2002), Central series for groups with action and Leibniz algebras, *Georgian Mathematical Journal* 9.4, 671–682.

Datuashvili, T. (2006), Categorical, Homological and Homotopical Properties of Algebraic Objects, phdthesis. A. Razmadze Mathematical Institute of Georgian Academy of Sciences.

Datuashvili, T. (2017), Categorical, homological, and homotopical properties of algebraic objects, *Journal of Mathematical Sciences* 225.3, 383–533.

Ege, U. (1998), *Çaprazlanmış Modüller*.

Eick, B., Nickel, W. (2000), Polycyclic, *A GAP* 4.

Eick, B., O'Brien, E. (1999), The groups of order 512, *Algorithmic algebra and number theory*. Springer, 379–380.

Forrester-Barker, M. (2002), Group objects and internal categories, *arXiv preprint math/0212065*.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Loday, J.-L., Pirashvili, T. (1993), Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co) homology, *Mathematische Annalen* 296.1, 139–158.

O'Brien, E. A. (1990), The p-group generation algorithm, *Journal of Symbolic Computation* 9.5-6, 677–698.

O'Brien, E. A. (1991), The groups of order 256, *Journal of algebra* 143.1, 219–235.

Odabaş, A., Aslan, A. F., Uslu, E. (2015), On groups with action on itself, *Georgian Mathematical Journal*.

Odabaş, A., Uslu, E., Ilgaz, E. (2016), Isoclinism of crossed modules, *Journal of Symbolic Computation* 74, 408–424.

Porter, T. (1986), Homology of commutative algebras and an invariant of Simis and Vasconcelos, *Journal of Algebra* 99.2, 458–465.

Rose, J. S. (1994), *A course on group theory*. Courier Corporation.

Whitehead, J. H. (1949), Combinatorial homotopy. I, *Bulletin of the American Mathematical Society* 55.3, 213–245.

ÖZGEÇMİŞ

Elis Soylu Yılmaz 1986 yılında Bulgaristan'da doğmuştur. 2004 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimine başlamıştır. 2008 yılında lisans öğrenimini bitirmesinin ardından aynı bölümde Fonksiyonel Analiz dalında yüksek lisans öğrenimine başlamıştır. Spektral teori üzerine çalışmalar yapmış olup 2011 yılında yüksek lisansını tamamlamıştır. 2011 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik – Bilgisayar bölümünün Bilgisayar Bilimleri kadrosuna ataması yapılarak ikinci yüksek lisansına başlamıştır. 2013 yılında doktora eğitimine başlamıştır. Halen aynı bölümde çalışmalarına devam etmektedir.