Taksi ve Çin Dama Düzlemlerinde Fermat Noktası Üzerine

Barış Tözen

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos 2019

On Fermat Point in Taxicab and Chinese Checkers Planes

Barış Tözen

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

August 2019

Taksi ve Çin Dama Düzlemlerinde Fermat Noktası Üzerine

Barış Tözen

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ziya Akça

Ağustos 2019

ONAY

Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Barış Tözen'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Taksi ve Çin Dama Düzlemlerinde Fermat Noktası Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ziya Akça

İkinci Danışman :--

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ziya Akça

Üye : Prof. Dr. Ayşe Bayar

Üye : Prof. Dr. Mine Turan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ziya Akça danışmalığında hazırlamış olduğum "Taksi ve Çin Dama Düzlemlerinde Fermat Noktası Üzerine" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 16/08/2019

Barış Tözen

ÖZET

Bu çalışmada, Öklid, Taksi ve Çin dama düzlemlerinde bir üçgende Fermat noktası incelenmiştir. Öklidyen olmayan düzlem geometrilerde temel kavramlar verilmiştir. Öklid, Taksi ve Çin daması metrikleri ile donatılmış düzlemlerde bir üçgenin Fermat noktası ile ilgili özellikler incelenmiş ve örnekler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Öklidyen Düzlem Geometri, Taksi Düzlem Geometri, Çin Dama Düzlem Geometri .

SUMMARY

In this work, Fermat point in the triangle in the Euclidean, taxicab and Chinese checkers planes is examined. Basic concepts are given in non-Euclidean plane geometries. The properties related to Fermat point of a triangle in the planes equipped with Euclidian, taxi and Chinese checkers metrics are examined and examples are presented

Keywords: Euclidean plane, Taxicab plane, Chinese Checkers plane

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında deneyimlerini, bilimsel katkılarını ve desteklerini esirgemeyen değerli danışmanım

Prof. Dr. Ziya AKÇA,

Her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini benden esirgemeyen sayın hocalarım

Prof. Dr. Ayşe BAYAR ve Prof. Dr. Süheyka EKMEKÇİ

Bu süreçte her zaman yanımda olup maddi ve manevi destek olan sevgili

AİLEME

en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2019
Barış TÖZEN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
d_E	Öklidyen metrik
d_T	Taksi metrik
d_c	Çin Dama metrik
$\Re$	Reel sayılar kümesi

Kısaltmalar	**Açıklama**
CC	ÇinDama
q	$\sqrt{2}-1$

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Bu çalışmada, Öklidyen, Taksi ve Çin Daması metrikleriyle donatılmış düzlemlerde bir üçgenin Fermat noktası incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, çalışmayı diğer kaynaklara başvurmadan anlaşılır kılmak için Öklidyen, Taksi ve Çin Dama düzlem geometrileri ve Fermat (Toriçelli) noktası ile ilgili bilinen bazı kavramlar özetlenmiştir.

Dördüncü bölümde, Öklidyen düzlemde verilen bir üçgenin Fermat noktası ile ilgili teorem ve ispatı verilmiş ve örnekler sunulmuştur.

Beşinci bölümde, Taksi metriği ile verilen düzlemde Fermat noktası, Hanson 'ın (2016) izlediği yolla araştırılarak, bir teorem verilmiş ve ispatlanmıştır. Bölüm örneklerle zenginleştirilmiştir. Bu bölümde genel üçgenlerle birlikte Taksi ikizkenar, Taksi eşkenar ve kenarları yataysal veya dikeysel doğru üzerinde olan üçgenlerin Fermat noktalarına örnekler verilmiştir. Taksi metriği ile donatılmış düzlemde verilen bir üçgenin Fermat noktası, üçgenin köşelerinden geçen yatay ve dikey doğruların üçgenin içinde veya üzerinde kesiştiği nokta olarak bulunmuştur.

Altıncı bölümde, metrik olarak Çin Dama metriği kullanılarak üçgenin Fermat noktası araştırılmış, ilgili teorem verilmiş ve ispatlanmıştır. Bölüm örneklerle zenginleştirilmiştir. Çin Dama metriği ile donatılmış düzlemdeki bir üçgenin Fermat noktası, üçgenin köşelerinden geçen Çin dama yollarının kesiştiği nokta olarak bulunmuştur.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Fransız matematikçi Pierre de Fermat' ın "Bir üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı en az olan nokta neresidir?" sorusunu İtalyan fizik ve matematik bilgini Evangelista Torricelli ye sormuştur. İkili, yaptığı çalışmalar sonucu bir üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamının en az üçgenin çevre uzunluğunun yarısı ve en fazla da çevre uzunluğu kadar olduğunu bulmuşlardır. Fermat(Toriçelli) noktası Simpson (1750) tarafından da araştırılmıştır. Sonraki yıllarda Fermat noktası ile ilgili en basit açıklamayı Jacob Krarup ve Kees Roos yapmıştır.

Taksi ve Çin Dama gibi Öklidyen olmayan metriklerin bulunması ve geliştirilmesiyle beraber Fermat noktası ile ilgili çalışmalar bu yönde ilerlemiş ve Taksi, Çin Dama metrikleriyle donatılmış düzlemlerde Fermat noktası araştırılmıştır. H. Minkowski (1967) taksi metriğini ve Menger (1952) Taksi düzlemi tanımlamıştır.E.F. Krause (1965), Öklidyen metrikteki kavramların Taksi metriğindeki karşılıklarını araştırdığı bir kitap yayınlamıştır. Sonraki yıllarda Taksi düzlem ve Taksi uzay ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları (Akça ve Kaya, 1997), (Akça ve Kaya, 2004a), (Akça ve Kaya,2004b), (Bayarvd,2008), (Kayavd.,2000), (Kaya,2004), (Laatsch,1982), (Özcan vd., 2002), (Özcan ve Kaya, 2002), (Reynolds, 1980), (Schattschneider,1984), (SoandAl-Maskari,1995), (So,2002) olarak verilebilir.

Taksi metriği ile verilen düzlemdeki üçgenin Fermat noktasının, üçgenin köşelerinden çizilen yatay ve dikey doğruların üçgenin iç bölgesinde kesiştiği nokta olduğunu Hanson(2014) belirtmiştir.

3.TEMEL KAVRAMLAR

Taksi ve Çin dama düzlemleri Öklidyen analitik düzlemin nokta ve doğruları ile aynıdır. Açılar da aynı şekilde ölçülürken, uzaklık fonksiyonları farklıdır.

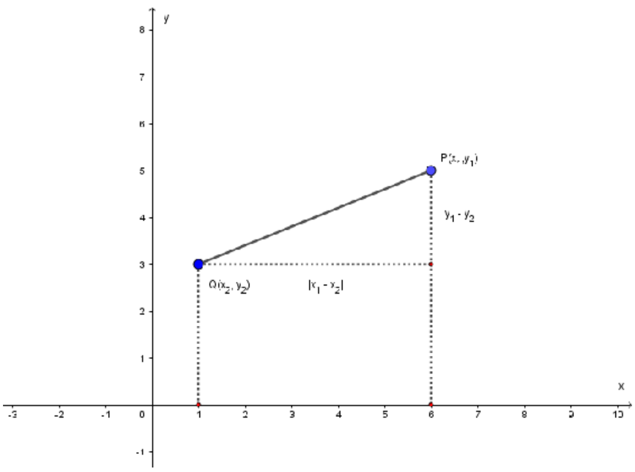
Bu bölümde Öklidyen, Taksi ve Çin Dama düzlemlerindeki uzaklık fonksiyonları ile ilgili bilgiler verilmiştir.

3.1 Öklidyen Düzlem

TANIM 3.1.1 Analitik düzlemde alınan P = (x_1, y_1) ve Q = (x_2, y_2) noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ile tanımlanır. Şekil 3.1. de Öklidyen uzaklığın geometrik yorumu verildi.



Şekil 3.1. Öklidyen Uzaklık

Tanım 3.1.2 X boş olmayan bir küme olmak üzere, d: X x $X \to \Re$ fonksiyonu aşağıda verilen I ve II koşullarını sağlarsa, d ye uzaklık fonksiyonu; I, II ve III koşullarını sağlarsa, d ye metrik denir.

I) $\forall$ P, Q $\in X$ için d(P,Q) $\geq$ 0 ve d(P,Q) = 0 $\Leftrightarrow$ P = Q dur.

II) $\forall$ P, Q $\in X$ için d(P,Q) = d(Q,P) dir.

III) $\forall$ P, Q, R $\in X$ için d(P,Q) $\leq$ d(P,R) + d(R,Q) dur.

3.1 Taksi Düzlem

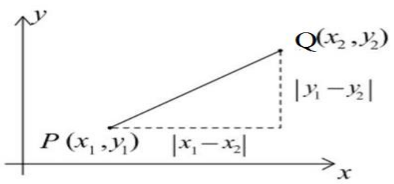
20. yüzyılın başlarında H. Minkowski Taksi metriğini tanımladı. (Minkowski 1967). Daha sonra K. Menger analitik düzlemde Öklidyen metrik yerine Taksi metriğini kullanarak Taksi düzlem terimini kullandı(Menger, 1952). Daha sonra E. F. Krause düzlem Taksi geometrideki temel kavramları incelediği bir kitap yayınladı (Krause, 1965). 20. Yüzyılın son çeyreğinde Taksi geometri ile ilgili çeşitli yönlerde çalışmalar yapılarak geliştirildi. Bunlardan bazıları (Akça ve Kaya, 1997), (Akça ve Kaya, 2004a), (Akça ve Kaya,2004b), (Bayarvd,2008), (HoandLiu,1996), (Kayavd.,2000),(Kaya,2004),(Laatsch,1982), (Özcan vd., 2002), (Özcan ve Kaya, 2002), (Reynolds, 1980), (Schattschneider,1984), (So and Al-Maskari,1995), (,2002) dır.

Tanım 3.2.1. P = (x_1, y_1) ve Q = (x_2, y_2) analitik düzlemde alınan iki nokta olsun

$$d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

ile Menger ve Krause tarafından tanımlanan d_T fonksiyonuna P ve Q noktaları arasındaki Taksi uzaklık fonksiyonu denir.

P ve Q noktaları arasındaki d_T Taksi uzaklığı bulunurken, P ve Q noktalarından x ve y eksenlerine paralel olan doğru parçalarının uzunluklarından oluşmaktadır. Şekil 3.2. de P ve Q noktaları arasındaki yatay ve dikey gösterildi.



Şekil 3.2. Taksi uzaklık

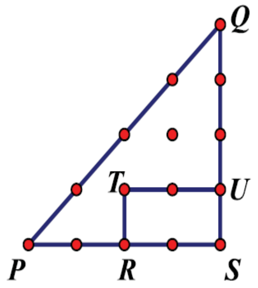
Örnek 3.2.1 Öklidyen düzlemde verilen A(4, 7) ve B(3, 5) noktaları arasındaki Öklidyen uzaklığı ve Taksi uzaklığını hesaplayınız.

$d_E(A,B) = \sqrt{(3-4)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$d_T(A,B) = |3 - 4| + |5 - 7| = 3$

olup $d_T(A,B) \geq d_E(A,B)$ olur.

Örnek 1.2.1 de iki noktanın Taksi uzaklığının Öklidyen uzaklığından büyük olduğu görülür. Verilen iki nokta aynı yatay veya dikey bir doğru üzerinde ise Taksi ve Öklidyen uzaklıkların birbirine eşit olarak bulunur. Şekil 3.3. te iki nokta arasındaki Taksi uzaklığın birden fazla yolla hesaplanabileceği gösterildi.



Şekil 3.3. Taksi Uzaklık

P ve Q noktaları arasındaki Taksi uzaklığı

$|PQ| = |PS| + |SQ| = 4 + 4 = 8$ olarak bulunabileceği gibi

$|PQ| = |PR| + |RT| + |TU| + |UQ| = 2 + 1 + 2 + 3 = 8$ yolu izlenerekte bulunabilir.

Önerme 3.2.1 Analitik düzlemde verilen Taksi uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İspat Taksi uzaklık fonksiyonunun bir metrik olduğunu ispatlamak için fonksiyonun pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığı göstermelidir.

$P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde alınan iki nokta olsun. Mutlak değerin tanımından dolayı $|x_1 - x_2| \geq 0$ ve $|y_1 - y_2| \geq 0$olduğu için $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$ dır.

Ya $d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$ dır.

Ayrıca $d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$ olması için $|x_1 - x_2| = 0$ ve $|y_1 - y_2| = 0$ olması gereklidir

Yani, $d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0 \Leftrightarrow P = Q$ dur.

Taksi uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlı bir fonksiyondur.

$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ ve $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ olduğundan dolayı

$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ dir.

Yani, $d_T(P,Q) = d_T(Q,P)$ olur. Bu nedenle Taksi uzaklık fonksiyonu simetrik bir fonksiyondur.

$R = (x_3,y_3)$ olsun. Mutlak değer özelliğinden dolayı

$|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$ ve

$|y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} d_T(P,Q) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\ &= (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) \\ &= d_T(P,R) + d_T(R,Q) \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buna göre R^2 de tanımlanan Taksi uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.

$P = (x_1, y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ olmak üzere R^2 de tanımlı olan

$$d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Taksi uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığı için bir metriktir.

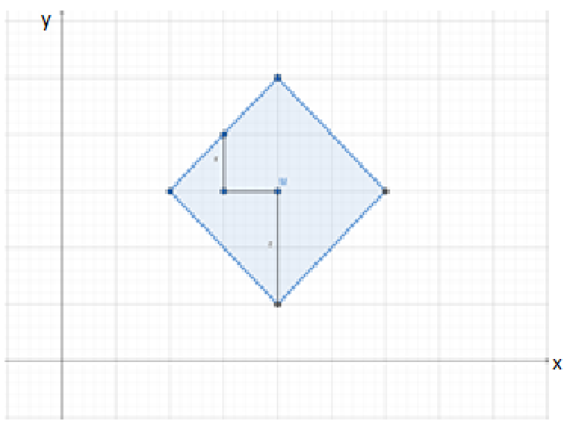
Tanım 3.2.2 Taksi düzlemde bulunan sabit bir noktadan sabit bir taksi uzaklığındaki noktaların geometrik yerine taksi çemberi denir. Taksi düzlemindeki sabit nokta taksi çemberinin merkezini, sabit taksi uzaklığı da taksi çemberinin yarıçap uzunluğunu gösterir.

Analitik düzlemde merkezi $M = (a, b)$ ve yarıçapı r olan taksi çemberi

$$C = \{(x, y) : |x - a| + |y - b| = r;\ x, y \in R\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Şekil 3.4. te olduğu gibi bir kenarının eğimi 1 ya da -1 olan kareler taksi çemberleridir.



Şekil 3.4: Taksi Çemberi

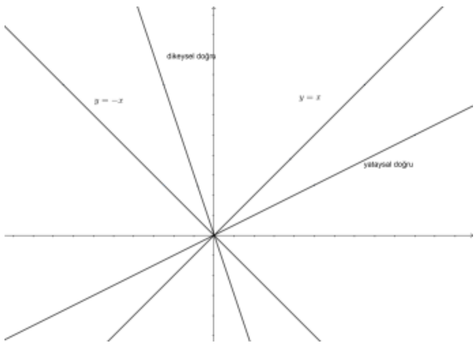
Tanım 3.2.3 Taksi düzlemde ℓ...ax + by + c = 0 doğrusu verilsin. ℓ doğrusuna,

I) $\left|-\frac{a}{b}\right| > 1$ ise dikeysel doğru,

II) $\left|-\frac{a}{b}\right| < 1$ ise yataysal doğru,

III) $\left|-\frac{a}{b}\right| = 1$ ise ayıraç doğru,

denir. Şekil 3.5 te olduğu gibi Taksi düzlemde üç çeşit doğru vardır.



Şekil 3.5. Taksi Düzlemde Doğruların Sınıflandırılması

Tanım 3.2.4 Taksi düzlemde bir Pnoktasının bir ℓ doğrusuna uzaklığı, P'nin ℓ doğrusu üzerindeki noktalara uzaklıklarından en küçüğü olarak tanımlanır.
Bu uzaklık;

$$d_T(P,\ell) = \min_{x\in\ell} d_{T(x,P)}$$

şeklindedir.

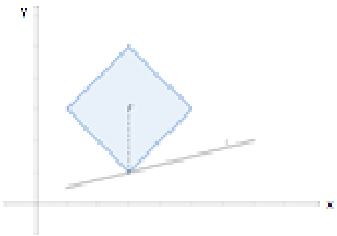
Taksi düzlemde bir P noktasının bir ℓ doğrusuna uzaklığı taksi çemberler kullanılarak da hesaplanabilir. Merkezi P noktası olan bir taksi çemberinin yarıçapını çember doğruya değene kadar büyüterek çember doğruya değdiği anda oluşan çemberin yarıçapı, P noktasının ℓ doğrusuna en kısa taksi uzaklığıdır.

O halde istenilen uzaklığı bulabilmek için verilen doğrunun konumuna gore irdeleme yapılırsa,

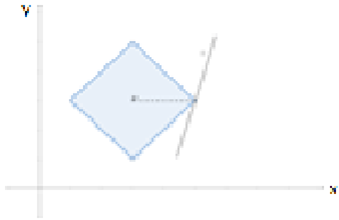
i) ℓ yataysal bir doğru ise P noktasının ℓ doğrusuna olan uzaklığı, P den ℓ ye y−eksenine paralel uzaklıktır. (Şekil 1.6.a)

ii) ℓ dikeysel bir doğru ise Pnoktasının ℓ doğrusuna olan uzaklığı, Pden ℓ ye x−eksenine olan paralel uzaklıktır. (Şekil 1.6.b)

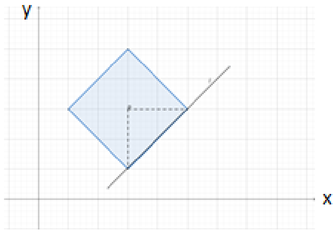
iii) ℓ bir ayıraç doğru ise P noktasının ℓ doğrusuna olan uzaklığı, P den ℓ ye x−eksenine paralel veya y−eksenine paralel uzaklıktır. (Şekil 1.6.c)



a



b



c

Şekil 3.6.a,b,c. Taksi Düzlemde Noktanın Doğruya Uzaklığı

Teorem 3.2.1 Taksi düzlemde herhangi bir P (x_1, y_1) noktasının $\ell ... ax + by + c = 0$ doğrusuna olan taksi uzaklığı

$$d_T(P,\ell) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\max\{|a|,|b|\}}$$

olarak verilmiştir.

Örnek 3.2.2 Taksi düzlemdeki P(3,1) noktasının $x-2y+5=0$ doğrusuna olan taksi uzaklığını hesaplayınız.

$$d_T(P,\ell) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\max\{|a|,|b|\}} = \frac{|3-2+5|}{\max\{|1|,|-2|\}} = \frac{6}{2} = 3$$

olur.

Teorem 3.2.2 Taksi düzlemde herhangi A ve B noktaları için

$$d_T(A, X) + d_T(X, B) = d_T(A, B)$$

özelliğindeki tüm X noktalarının kümesine A ve B noktalarının en kısa uzaklık kümesi denir.

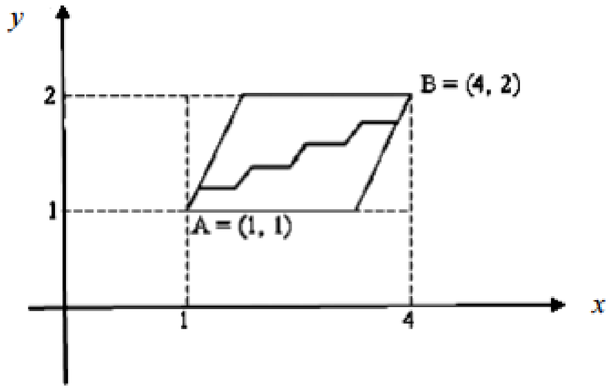
3.3 Çin Dama Düzlemi

Krause, E. F. "Çin Dama oyunundaki hareketlerden yola çıkarak bir metrik geliştirilebilir mi?" sorusunu sormuştur. 1992 yılında Krause nin öğrencisi Chen, G.(1992) Çin Dama metriğinin tanımını vermiştir. Çin Dama geometrisi CC-geometri olarak kısaltılır ve Öklidyen olmayan bir düzlem modelidir. Sonraki yıllarda pek çok matematikçi Çin Dama geometri üzerine çalışmıştır. (Kaya vd.2006), (Turan, 2004), (Uymaz, 2002), (Bayar ve Ekmekçi, 2006) ve (Akça, Bayar ve Ekmekçi, 2007) bu çalışmalardan bazılarıdır.

Tanım 3.3.1. Analitik düzlemde verilen $P=(x_1, y_1)$ ve $Q=(x_2, y_2)$ noktaları arasında

$$d_c(P,Q) = d_l(P,Q) + \left(\sqrt{2}-1\right)d_s(P,Q)$$
$$d_l(P,Q) = \max\{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \}$$
$$d_s(P,Q) = \min \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \}$$

olarak tanımlanan d_c fonksiyonuna P ve Q noktaları arasındaki Çin Dama uzaklık fonksiyonu adı verilir. Şekil 3.7 de iki nokta arasındaki Çin Dama uzaklığı gösterildi.



Şekil 3.7. Çin Dama

Önerme 3.3.1. Analitik düzlemde verilen Çin Dama uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İspat 3.3.1. $P = (x_1 , y_1)$ ve $Q = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde alınan iki nokta olsun. Mutlak değerin tanımından dolayı $|x_1 - x_2 | \geq 0$ ve $|y_1 - y_2 | \geq 0$ ve $\left(\sqrt{2}-1\right) > 0$ olduğundan $d_c(P,Q) \geq 0$ dır.

$$d_c(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow \max \{|x_1 - x_2| , |y_1 - y_2|\} = 0$$

olması için $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ bulunur. Yani $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olduğundan P = Q bulunur.

$$d_c(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0 \Leftrightarrow P = Q \text{ dur.}$$

Çin Dama uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlı bir fonksiyondur.

$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ ve $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ olduğundan dolayı

$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ dir.

Yani, $d_c(P,Q) = d_c(Q,P)$ olur. Bu nedenler Çin Dama uzaklık fonksiyonu simetrik bir fonksiyondur.

$R = (x_3,y_3)$ olsun.

$$\begin{aligned} d_c(P,Q) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|\} + \\ &\quad (\sqrt{2}-1)\min\{|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|\} \\ &\leq \max\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|\} + \\ &\quad (\sqrt{2}-1)\min\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|\} \end{aligned}$$

= k olsun. Burada 4 farklı durum vardır.

I.Durum:

$|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_c(P,Q) \leq k &= |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + (\sqrt{2}-1)(|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= [|x_1 - x_3| + (\sqrt{2}-1)|y_1 - y_3|] + [|x_3 - x_2| + (\sqrt{2}-1)|y_3 - y_2|] \\ &= d_c(P,R) + d_c(R,Q) \end{aligned}$$

olur.

II. Durum:

$|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ olsun. Burada 2 tane alt durum vardır.

Alt Durum 1: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_c(P,Q) \leq k &= |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + (\sqrt{2}-1)(|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= [|x_1 - x_3| + (\sqrt{2}-1)|y_1 - y_3|] + [|x_3 - x_2| + (\sqrt{2}-1)|y_3 - y_2|] \\ &= d_c(P,R) + d_c(R,Q) - (2 - \sqrt{2})((|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3|) \end{aligned}$$

olur. Burada $2 - \sqrt{2} > 0$ ve $|y_3 - y_2| - |x_3 - x_2| \geq 0$ olduğundan

$$d_c(P,Q) \leq d_c(P,R) + d_c(R,Q) \text{ olur.}$$

Alt Durum II: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun.

$d_c(P,Q) \leq k = |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + (\sqrt{2}-1)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|)$

$= [|y_1 - y_3| + (\sqrt{2}-1)|x_1 - x_3|] + [|y_3 - y_2| + (\sqrt{2}-1)|x_3 - x_2|]$

$= d_c(P,R) + d_c(R,Q) - (2 - \sqrt{2})((|x_1 - x_3| - |y_1 - y_3|)$

olup.

Burada $2 - \sqrt{2} > 0$ ve $|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2| \geq 0$ olduğundan

$$d_c(P,Q) \leq d_c(P,R) + d_c(R,Q) \text{ olur.}$$

III. Durum: $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ olsun. Burada II. Duruma benzer iki alt durum söz konusudur.

Alt Durum I: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun. Bu durumda

$d_c(P,Q) \leq k = |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + (\sqrt{2}-1)(|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|)$

$= [|x_1 - x_3| + (\sqrt{2}-1)|y_1 - y_3|] + [|x_3 - x_2| + (\sqrt{2}-1)|y_3 - y_2|]$

$= d_c(P,R) + d_c(R,Q) - (2 - \sqrt{2})((|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3|)$

olur. Burada $2 - \sqrt{2} > 0$ ve $|y_3 - y_2| - |x_3 - x_2| \geq 0$ olduğundan

$$d_c(P,Q) \leq d_c(P,R) + d_c(R,Q) \text{ olur.}$$

Alt Durum II: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ olsun.

$d_c(P,Q) \leq k = |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + (\sqrt{2}-1)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|)$

$= [|y_1 - y_3| + (\sqrt{2}-1)|x_1 - x_3|] + [|y_3 - y_2| + (\sqrt{2}-1)|x_3 - x_2|]$

$= d_c(P,R) + d_c(R,Q) - (2 - \sqrt{2})((|x_1 - x_3| - |y_1 - y_3|)$

olup.

Burada $2 - \sqrt{2} > 0$ ve $|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2| \geq 0$ olduğundan

$$d_c(P,Q) \leq d_c(P,R) + d_c(R,Q) \text{ olur.}$$

IV. Durum: $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ olsun. Buradan

$d_c(P,Q) \leq k = |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + (\sqrt{2}-1)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|)$

$= [|y_1 - y_3| + (\sqrt{2}-1)|x_1 - x_3|] + [|y_3 - y_2| + (\sqrt{2}-1)|x_3 - x_2|]$

$= d_c(P,R) + d_c(R,Q)$ olur.

Tüm durumlar düşünüldüğünde her P, Q, R noktası için

$$d_c(P,Q) \leq d_c(P,R) + d_c(R,Q)$$

olduğu görüldü. Yani her P, Q, R noktası için Çin Daması uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağladı.

Analitik düzlemde tanımlanan Çin Daması metriği pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığı için metriktir.

Tanım 3.3.2 Çin Dama düzleminde sabit bir noktadan sabit bir CC-uzaklıktaki noktaların geometrik yerine Çin Dama (CC) çemberi denir. Sabit noktaya CC-çemberin merkezi, sabit CC-uzaklığa da çemberin yarıçapı adı verilir.

Analitik düzlemde $M = (m_1, m_2)$ noktasına, r birim CC-uzaklığında bulunan bütün noktalar

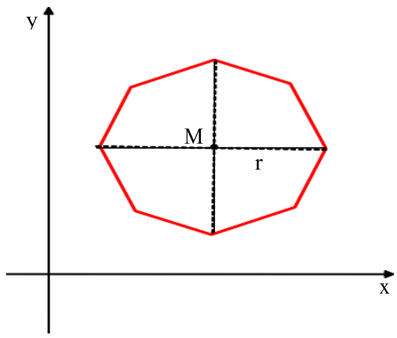
$$C = \{X = (x, y) : d_c(M, X) = r\}$$

kümesidir.

Yani

$$C = \left\{X = (x,y): \max\{|x-m_1|, |y-m_2|\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x-m_1|, |y-m_2|\}\right\} = r$$

kümesi M merkezli, r yarıçaplı CC-çemberidir. Şekil 3.8. de olduğu gibi Çin Dama çemberi bir sekizgendir.



Şekil 3.8. Çin Dama Çemberi

Tanım 3.3.3 Çin Dama düzlemindeki herhangi bir $P = (x_1, y_1)$ noktasının $ax + by + c = 0$ denklemli ℓ doğrusuna Çin dama uzaklığı, $d_c(P,\ell)$:$X \in \ell$ olmak üzere, $d_c(P,X)$ değerinin en küçük olması durumu yani

$$d_c(P,\ell) = \min_{x \in \ell} d_{c(x,P)}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.3.4 Çin Dama düzleminde $\ell \ldots\ ax + by + c = 0$ doğrusu verilsin. ℓ doğrusu ve

$q = \sqrt{2} - 1$

I) $\left|-\frac{a}{b}\right| < 1$ olan doğru, yataysal doğru,

II) $\left|-\frac{a}{b}\right| > 1$ olan doğru, dikeysel doğru,

III) $\left|-\frac{a}{b}\right| = 1$ olan doğru, ayıraç doğru,

IV) $\left|-\frac{a}{b}\right| = q$ olan doğru, q – doğru

V) $\left|-\frac{a}{b}\right| = q + 2$ olan doğru (q + 2) – doğru

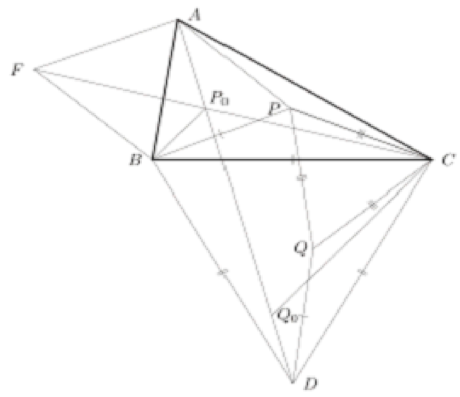
olarak adlandırılır.

3.1 Fermat (Toriçelli) Noktası

Fransız matematikçi Pierre de Fermat 1640 lı yıllarda "Bir ABC üçgeninin köşe noktalarına olan uzaklıkları toplamı en az olan nokta neresidir?" sorusunu sordu. Daha sonra bu sorunun cevabı 1750 li yıllarda Simpson ve diğerleri tarafından da araştırıldı. Bununla birlikte daha sonraki yıllarda Jacob KRARUP ve Kees ROOS bu soruya basit bir çözüm getirmişlerdir.

Hanson(2014), "Büyük bir kentte yolların kuzey-güney, doğu-batı yönünde neredeyse dikdörtgen benzeri bir ağ şeklinde düzenlendiğini varsayalım. Konumları itibariyle her biri bir üçgenin köşesine karşılık gelen üç ayrı merkeze mal taşımak üzere bir depo inşa etmek istesek, depodan merkezlere toplam uzaklığın minimum olduğu nokta neresi olmalıdır?" sorusunun cevabını bulmak için Taksi düzlemde Fermat noktasını araştırmıştır. Hanson(2016), bir üçgenin Fermat noktasını bulmak için bir noktayı yatay ve dikey doğrultuda ötelemiş ve üçgenin köşe noktalarına uzaklıkları toplamlarını hesaplamıştır. Fermat noktasını (P noktası) üçgenin köşeleri ile birleştirildiğinde, şekil 3.9. da olduğu gibi Fermat noktasında oluşan tam açıyı üç eş parçaya böldüğü görüldü.

m($\widehat{APB}$) = m($\widehat{APC}$) = m($\widehat{CPB}$) = 120^0



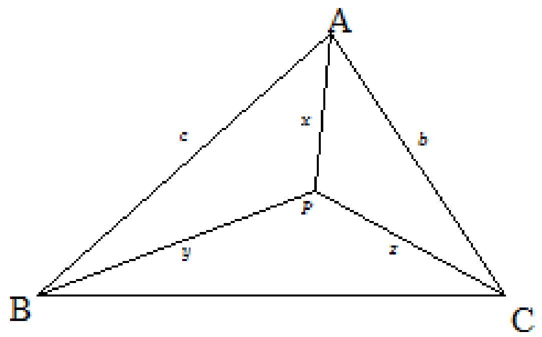
Şekil 3.9. Fermat Noktası

4.ÖKLİDYEN DÜZLEMDE FERMAT NOKTASI

Bu bölümde Öklidyen düzlemde üçgenin Fermat noktası incelendi. Öklidyen düzlemde Fermat noktası ile ilgili teoremler ve örnekler verildi.

Teorem 4.1.1 Bir ABC üçgeninin Fermat noktasının köşelere olan uzaklığı üçgenin çevre uzunluğunun yarısından büyüktür. (Matematik Dünyası, 2004)

İspat Şekil 4.1. de olduğu gibi kenar uzunlukları a, b, c olan ABC üçgenini alındı. Üçgenin çevre uzunluğu da k olsun.



Şekil 4.1. Öklidyen Üçgende Fermat Noktası

Fermat noktası üçgenin iç bölgesinde olacağından üçgenin içinde APB, APC ve BPC üçgenleri oluşur. Bu üçgenlerde, üçgen eşitsizliğini uygulanırsa,

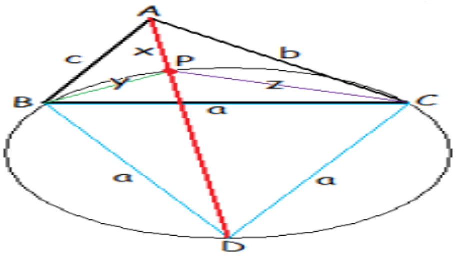
APB üçgeninde x + y > c

APC üçgeninde x + z > b

BPC üçgeninde y + z > a

olur. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa topladığımızda 2x + 2y + 2z > a + b + c bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafı 2 ye bölündüğünde $x + y + z > \frac{a+b+c}{2}$ bulunur.

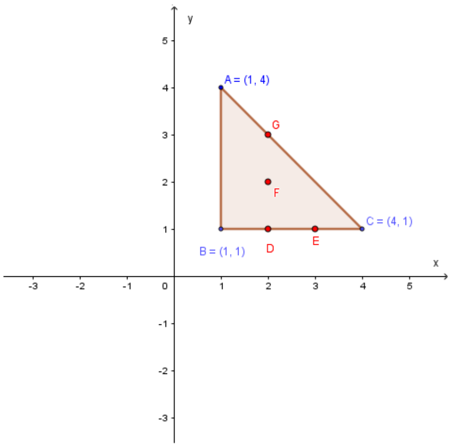
Teorem 4.1.2 Şekil 4.2. deki ABC üçgeninin en uzun kenarına çizilen BCD eşkenar üçgeninin çevrel çemberi ile [AD] doğru parçasının kesiştiği nokta ABC üçgeninin Fermat noktasıdır.



Şekil 4.2. Öklidyen Üçgende Fermat Noktası

Örnekler üzerinde Hanson(2016) nın kullandığı yöntemle Öklidyen düzlemde üçgenin Fermat noktası araştırıldı. Bu yöntemde üçgenin iç bölgesinden bir nokta seçip, bu noktayı yatay ve dikey eksenler boyunca öteleyerek belirlenen noktaların üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamları bulunur ve köşelere uzaklıkları toplamı en az olan nokta Fermat noktası olarak alınır .

Örnek 4.1.1 Öklidyen düzlemde köşe noktaları A(1,4), B(1,1) ve C(4,1) olan ABC üçgeninin Öklidyen düzlemde Fermat noktasını bulalım. Bunun için D(2,1) noktası alınır ve bu nokta yatay ve dikey ötelenir.



Şekil 4.3. Öklidyen Üçgende Fermat Noktası

D(2,1) noktası için;

S = |AD| + |BD| + |CD| = $\sqrt{10}$+ 1 + 2 = 3 + $\sqrt{10}$

B(1,1) noktası için;

S = |AB| + |BB| + |CB| = 3 + 0 + 3 = 6

E(3,1) noktası için;

S = |AE| + |BE| + |CE| = 2 + 1 + $\sqrt{13}$ = 3 + $\sqrt{13}$

D, E, F noktalarının üçgenin köşe noktalarına uzaklıkları toplamı en az olan noktayı belirlemek için D noktasının köşeler uzaklıkları toplamından B noktasının köşelere uzaklıkları toplamı çıkarılır.

$$6-(3+\sqrt{10}) = 3-\sqrt{10}<0$$

D noktasının köşelere uzaklıkları toplamından B noktasının köşelere uzaklıkları toplamından çıkardığımızda sonuç negatif olduğundan D noktasının köşelere uzaklıkları toplamının daha küçük olduğu görülür.

Şimdi de D noktasının köşeler uzaklıkları toplamından E noktasının köşelere uzaklıkları toplamı çıkarılır.

$$3+\sqrt{10}-(3+\sqrt{13}) < 0$$

Bulduğumuz sonuç sıfırdan küçük olduğu için D noktasının köşelere uzaklıkları toplamı E noktasının köşelere uzaklıkları toplamından daha küçüktür. Buna göre Fermat noktasının apsisi 2 olarak bulunur.

F(2,2) noktası için;

S = |AF| + BF| + |CF| = $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{5}=\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

G(2,3) noktası için;

S = |AG| + |BG| + |CG| = $\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}+\sqrt{5}$

D, F, G noktalarından üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı en az olan noktayı bulmak için bu noktaların köşelere olan uzaklıkları toplamları birbirinden çıkarılır.

Buna göre;

$+ 2\sqrt{5}) < 0$

$3+\sqrt{10}-3(\sqrt{2}+\sqrt{5}) < 0$

değerleri bulunur.

D, F, G noktalarından üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı en az olan nokta D(2,2) noktası olarak bulunur. Yani ABC üçgeninin Öklidyen düzlemde Fermat noktasının ordinatının 2 olduğu belirlenir.

Fermat noktasının apsisi 2, ordinatı 2 olduğundan Fermat noktası D(2,2) olarak bulunur.

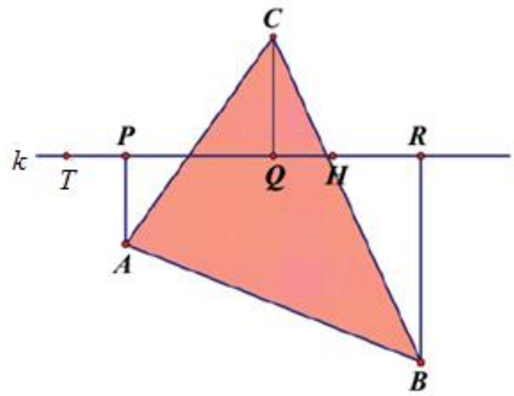
ABC üçgeninin Öklidyen düzlemde Fermat noktası olan D(2,2) noktası ayrıca üçgenin kenar ortaylarının kesiştiği nokta yani ABC üçgenini ağırlık merkezidir.

5. TAKSİ DÜZLEMDE FERMAT NOKTASI

Bu bölümde, üçgenlerin Taksi düzlemdeki Fermat noktası Hanson, 2016 daki yöntemlerle ikizkenar, eşkenar, kenarları yataysal, dikeysel üçgenler gibi farklı üçgen türlerine örnekler verilerek incelendi.

Teorem 5.1.1 Taksi düzlemindeki bir üçgenin Fermat noktası, o üçgenin köşe noktalarından geçen yatay ve dikey doğruların üçgenin iç bölgesinde kesiştiği noktadır. (Hanson 2014)

İspat Taksi düzlemde bir ABC üçgeni verilsin. Bu üçgeni kesen şekil 5.1 deki gibi yatay (k) ve şekil 5.2. deki gibi dikey (m) doğruları alınarak bu doğrular üzerinde Fermat noktasını bulmak için, köşelere uzaklıkları toplamı minimum olan nokta belirlenmelidir.



Şekil 5.1. Taksi Üçgende Fermat Noktası

k doğrusu üzerindeki T noktası için;

s = |AT| + |BT| + |CT| = (|TP| + |PA|) + (|TP| + |PQ| + | QR| + |RB|) + (|TP| + |PQ| + |QC|)

= |TP| + |PA| + 2|TP| + 2|PQ| + | QR| + |RB| + |QC|

Bu doğru üzerindeki P noktası için;

s = |AP| + |BP| + |CP| = |AP| + (|PQ| + |QR| + |RB|) + (|PQ| + |QC|)

= |AP| + 2|PQ| + |QR| + |RB| + |QC|

T noktasından P noktasına kadar üçgenin köşelere olan s uzaklığının 3|TP| kadar kısaldığı görülür.

Bu doğru üzerindeki Q noktası için;

s = |AQ| + |BQ| + |CQ| = (|AP| + |PQ|) + (|QR| + |RB|) + |CQ|

Bu durumda Q noktası için s uzaklığı P noktasına göre |PQ| kadar azalır.

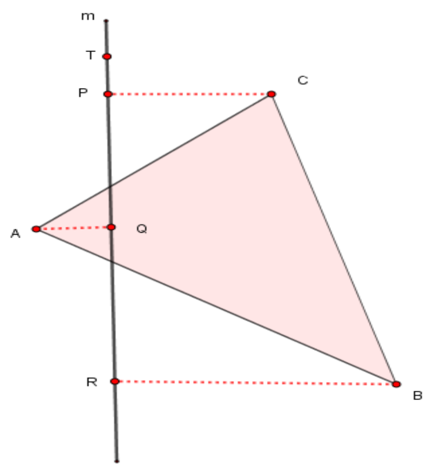
Bu doğru üzerindeki R noktası için;

s = |AR| + |BR| + |CR| = (|RQ| + |QP| + |AP|) + |BR| + (|RQ| + |QC|)

= 2|RQ| + |QP| + |AP| + |BR| + |QC| olduğundan R noktası için s uzaklığı Q noktasına göre |QR| kadar artar.

T noktasından Q noktasına kadar s uzaklığı azalır ve Q noktasından R noktasına kadar s uzaklığı artar. O zaman, k doğrusu üzerinde üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı en az olan nokta Q noktası olarak bulunur.

Benzer şekilde dikey m doğrusu üzerinde köşelere uzaklıkları minimum olan noktayı bulmak için aşağıdaki durumlar incelenir:



Şekil 5.2. Taksi Üçgende Fermat Noktası

Bu doğru üzerindeki T noktası için;

s = |AT| + BT| + |CT| = (|TP| + |PQ| + |QA|) + (|TP| + |PQ| + |QR| + |RB|) + (|TP| + |PC|)

= 3|TP| + 2|PQ| + |QA| + |QR| + |RB| + |PC|

Bu doğru üzerindeki P noktası için;

s = |AP| + |BP| + |CP| = (|PQ| + |QA|) + (|PQ| + |QR| + |RB|) + |CP|

= 2|PQ| + |QA| + |QR| + |RB| + |CP|

Bu durumda P noktası için T noktasına göre s uzaklığı 3|TP| kadar azalır.

Bu doğru üzerindeki Q noktası için;

s = |AQ| + |BQ| + |CQ| = |AQ| + (|QR| + |RB|) + (|QP + |PC|)

= |AQ| + |QR| + |RB| + |QP + |PC|

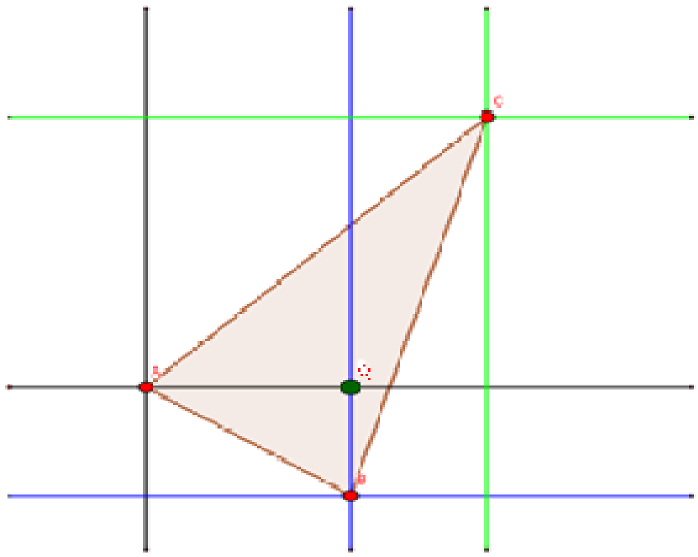
Bu durumda Q noktası için P noktasına göre s uzaklığı 2|PQ| kadar azalır.
Bu doğru üzerindeki R noktası için;

s = |AR| + |BR| + |CR| = (|AQ| + |QR|) + |BR| + (|CP| + |PQ| + |QR|)

= |AQ| + 2|QR| + |BR| + |CP| + |PQ| olduğundan R noktası için Q noktasına göre s uzaklığı |QR| kadar artar.

T noktasından Q noktasına kadar s uzaklığı azalır, Q noktasından R noktasına kadar s uzaklığı arttığından k doğrusu üzerinde üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı en az olan nokta Q noktası olarak bulunur.

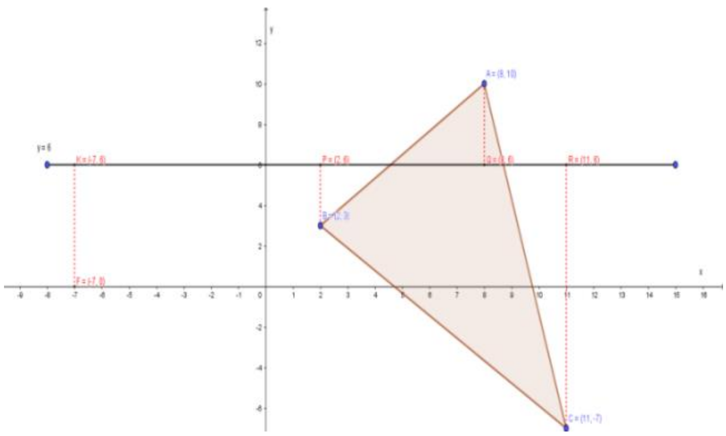
A ’dan geçen yatay k doğrusunun C ’den geçen dikey m doğrusu ile kesiştiği Q noktası ABC üçgeninin Fermat noktası olarak bulunur.



Şekil 5.3. Taksi Üçgende Fermat Noktası

Şekil 5.3. de olduğu gibi ABC Taksi üçgeninde Fermat noktası P noktası olarak bulunur.

Örnek 5.1.1 Taksi düzlemde köşe noktaları A(8,10), B(2,3) ve C(11,-7) olan üçgenin Fermat noktasını bulmak için yatay y=6 doğrusu üzerinde A, B, C köşelerine taksi uzaklıkları toplamı minimum olan noktayı belirleyelim.



Şekil 5.4. Taksi Üçgende Fermat Noktası

ABC Taksi üçgenini kesen y = 6 doğrusu çizilir. y = 6 doğrusu üzerinde soldan sağa doğru sırasıyla K, P, Q, H, R noktalarını alınır. Bu noktaların üçgenin köşe noktaları olan A, B, C noktalarına olan Taksi uzaklıkları toplamı bulunur.

Bu doğru üzerindeki K(-7,6) noktası için;

s = |AK| + |BK| +|CK|

= (|KP| + |PQ| +|AQ|) + (|KP| +|PB|) + (|KP| + |PQ| +|QR| + |RC|)

= (9 + 6 + 4) + (9 + 3) + (9 + 6 + 3 + 13)

= 19 + 12 + 31 = 62,

Bu doğru üzerindeki P(2,6) noktası için;

s = |AP| + |BP| + |CP|

= (|PQ| + |QA|) + |BP| + (|PQ| + |QR| + |RC|)

= (6 + 4) + 3 + (6 + 3 + 13)

= 10 + 3 + 22 = 35,

Bu doğru üzerindeki Q(8,6) noktası için;

s = |AQ| + |BQ| + |CQ|

= (|AQ| + |QH|) + ($|BP| + |PH|$) + ($|CR| + |RQ|$)

= 4 + (6 + 3) + (3 + 13)

= 4 + 9 + 16 = 29,

Bu doğru üzerindeki H(10,6) noktası için;

s = |AH| + |BH| + |CH|

= ($|AQ| + |QH|$) + ($|BP| + |PH|$) + ($|CR| + |RH|$)

= (2 + 4) + (8 + 3) + (1 + 13)

= 6 + 11 + 14 = 31,

Bu doğru üzerindeki R(11,6) noktası için;

s = |AH| + |BH| + |CH|

= $(|AQ| + |QH|)$ + $(|BP| + |PH|)$ + $(|CR| + |RH|)$

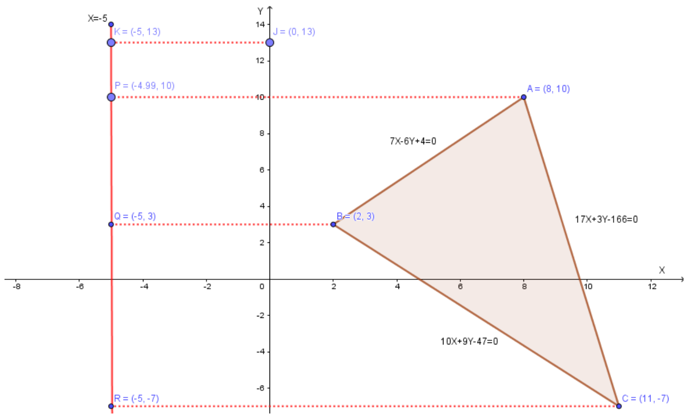
= (2 + 4) + (8 + 3) + (1 + 13)

= 6 + 11 + 14 = 31

bulunur.

Buna göre K noktasından Q noktasına kadar olan noktaların üçgenin köşelerine olan Taksi uzaklıkları toplamının azaldığı; Q noktasından R noktasına kadar olan noktaların üçgenin köşe noktalarına uzaklıkları toplamının arttığı görülür. Buna göre y = 6 doğrusu üzerinde üçgenin köşelerine olan Taksi uzaklıkları toplamı en az olan nokta Q noktası olur. Bu örnekte ABC Taksi üçgeninin Fermat noktasının apsisinin 8 olduğu görülür.

x = 8 doğrusu üzerinde Şekil 5.5. deki gibi noktalar alıp bu noktaların üçgenin köşe noktalarına olan uzaklıkları toplamı,



Şekil 5.5. Taksi Üçgende Fermat Noktası

ABC Taksi üçgenini kesen x = 8 doğrusunu çizilir. x = 8 doğrusu üzerinde soldan sağa doğru sırasıyla P, Q, R noktalarını alınır.

Bu doğru üzerindeki P(8,12) noktası için;

s = |AP| + |BP| + |CP|

= |AP| + $(|BQ| + |QP|)$ + $(|CR| + |RP|)$

= 2 + (6 + 9) + (3 + 19)

= 2 + 15 + 22 = 39,

Bu doğru üzerindeki Q(8,3) noktası için;

s = |AQ| + |BQ| + |CQ|

$= |AQ| + |BQ| + (|CR| + |RQ|)$

$= 7 + 6 + (3 + 10)$

$= 26,$

Bu doğru üzerindeki R(8,-7) noktası için;

$s = |AR| + |BR| + |CR|$

$= |AR| + (|BQ| + |QR|) + |CR|$

$= 17 + (6 + 10) + 3$

$= 36$

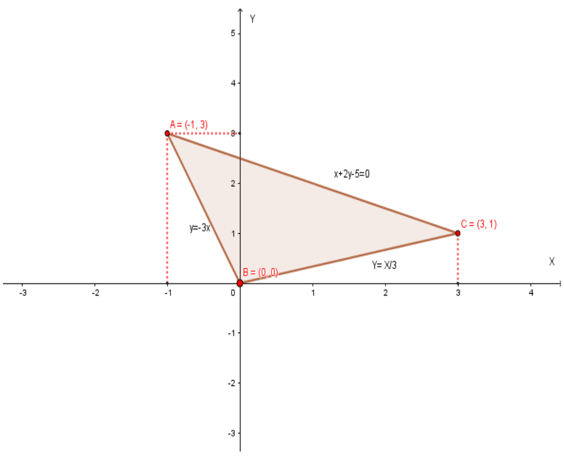
bulunur.

Buna göre P noktasından Q noktasına kadar olan noktaların üçgenin köşelerine olan Taksi uzaklıkları toplamının azaldığı; Q noktasından R noktasına kadar olan noktaların üçgenin köşe noktalarına uzaklıkları toplamının arttığı görülür. Buna göre x = 8 doğrusu üzerinde üçgenin köşelerine olan Taksi uzaklıkları toplamı en az olan nokta Q noktası olur.

Böylece ABC Taksi üçgeninin Fermat noktasının apsisinin 8 olduğunu ve ordinatının 3 olduğu bulunur. Buna göre ABC Taksi üçgeninin Fermat noktasının koordinatları (8,3) dür.

Aşağıdaki örneklerde Taksi ikizkenar ve Taksi eşkenar üçgenler için Fermat noktası araştırılmaktadır.

Örnek 5.2.1 Taksi düzlemde köşe noktaları A(-1, 3) , B(0, 0), C(3, 1) olan Taksi ikizkenar üçgenini ele alalım. ABC Taksi ikizkenar üçgeninin iç bölgesinde bir referans noktası seçip bu noktayı yatay ve dikey öteleyerek yeni noktaların ABC Taksi üçgeninin köşe noktalarına uzaklıkları toplamı hesaplanırsa,



Şekil 5.6. Taksi İkizkenar Üçgende Fermat Noktası

ABC Taksi üçgeninde, K(0,0) noktası dikey olarak ötelenerek ABC ikizkenar Taksi üçgeninin Fermat noktası araştırıldı. Buna göre K, L, M, N noktalarından köşelere uzaklıkları toplamı en az olan nokta L noktası olarak bulunur. ABC ikizkenar Taksi üçgenin Fermat noktasının ordinatı 1 olarak bulunur.

K(0,0) için;

$s = |AK| + |BK| + |CK|$

$= 4 + 0 + 4 = 8$,

L(0,1) için;

$s = |AL| + |BL| + |CL|$

$= 3 + 3 + 1 = 7$,

M(0,2) için;

$s = |AM| + |BM| + |CM|$

$= 2 + 2 + 4 = 8$

N(0,3) için;

$s = |AN| + |BN| + |CN|$

$= 1 + 3 + 5 = 9$

bulunur.

ABC Taksi üçgeninde, L(0,1) noktası yatay olarak ötelenerek ABC ikizkenar Taksi üçgeninin Fermat noktasını araştırıldı. Buna göre L, P, R, T noktalarından köşelere uzaklıkları toplamı en az olan nokta P noktası olarak bulunur. ABC ikizkenar Taksi üçgenini Fermat noktasının apsisi 0 olarak bulunur.

P(1,1) noktası için;

$s = |AP| + |BP| + |CP|$

$= 4 + 2 + 2 = 8$,

R(2,1) noktası için;

$s = |AR| + |BR| + |CR|$

$= 5 + 3 + 1 = 9$,

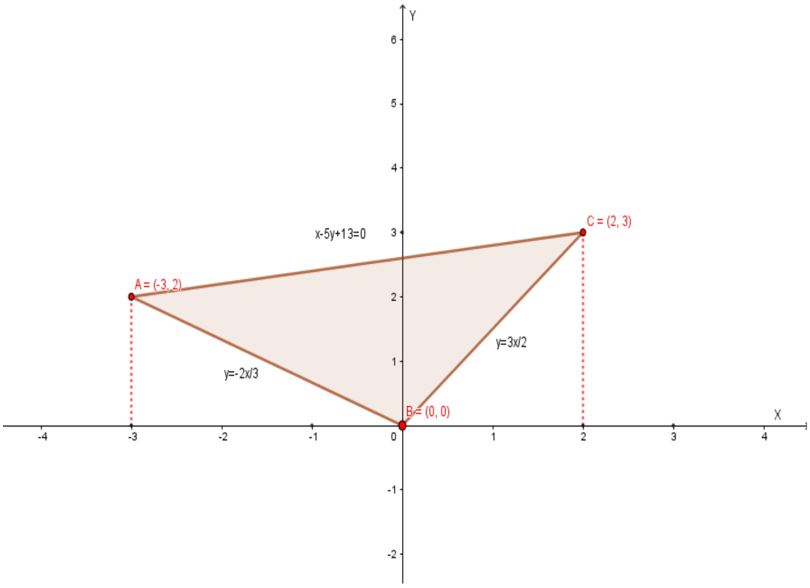
T(3,1) noktası için;

$s = |AT| + |BT| + |CT|$

$= 6 + 4 + 0 = 10$,

. Böylece ABC ikizkenar Taksi üçgeninin Fermat noktasının apsisi 0, ordinatı 1 oldu. Yani L(0,1) noktası ABC ikizkenar Taksi üçgeninin Fermat noktası olarak bulunur.

Örnek 5.2.2 Taksi düzlemde köşe noktaları A(-3,2), B(0,0) ve C(2,3) olan yataysal ve dikeysel doğru parçalarında oluşan ABC ikizkenar dik üçgeninin Fermat noktasının koordinatları,



Şekil 5.7. Taksi İkizkenar Üçgende Fermat Noktası

ABC Taksi üçgeninde, K noktası dikeyde ötelenerek L ve M noktalarının üçgenin köşe noktalarına uzaklıkları toplamı bulunur. Buna göre K noktasından M noktasına kadar olan noktalarda köşelere olan uzaklıkları toplamının azaldığı, M noktasından N noktasına kadar olan noktalarda köşelere olan uzaklıkları toplamının arttığı görülür. K, L, M, N noktalarından köşelere uzaklıkları toplamı en az olan nokta M noktası olarak bulunur. ABC ikizkenar Taksi üçgeninin köşelere uzaklıkları toplamı en az olan noktanın ordinatı 2 olarak bulunur.

K(0,0) noktası için;

$s = |AK| + |BK| + |CK|$

$\quad = 5 + 0 + 5 = 10,$

L(0,1) noktası için;

$S = |AL| + |BL| + |CL|$

$\quad = 4 + 1 + 4 = 9,$

M(0,2) noktası için;

$S = |AM| + |BM| + |CM|$

$\quad = 3 + 2 + 3 = 8,$

N(0,3) noktası için;

S = |AN| + |BN| + |CN|

= 4 + 3 + 2 = 9,

ABC Taksi üçgeninde, M noktası dikey ötelenerek P, R ve T noktalarının üçgenin köşe noktalarına uzaklıkları toplamı bulunur. Buna göre T noktasından M noktasına kadar olan noktalarda köşelere olan uzaklıkları toplamının azaldığı, M noktasından R noktasına kadar olan noktalarda köşelere olan uzaklıkları toplamının arttığı görülür. T, P, M ,R noktalarından köşelere uzaklıkları toplamı en az olan nokta M noktası olarak bulunur. ABC ikizkenar Taksi üçgeninin köşelere uzaklıkları toplamı en az olan noktanın apsisi 0 olarak bulunur.

P(-1,2) noktası için;

S = |AP| + |BP| + |CP|

= 2 + 3 + 4 = 9,

R(1,2) noktası için;

S = |AR| + |BR| + |CR|

= 4 + 3 + 2 = 9,

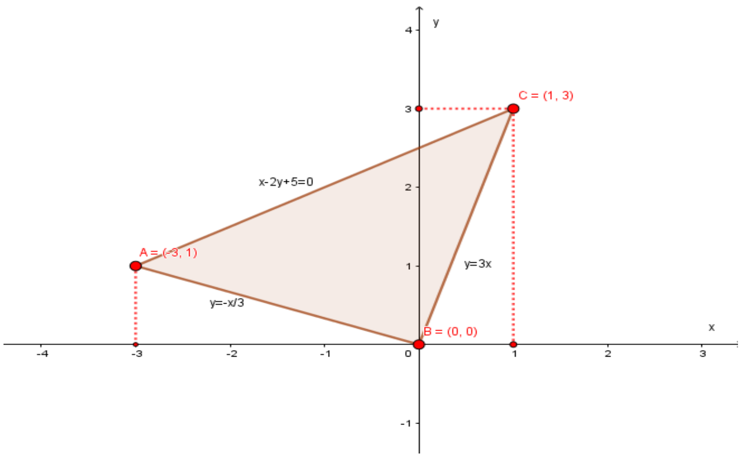
T(-2,2) noktası için;

S = |AT| + |BT| + |CT|

= 1 + 4 + 5 = 10

Böylece ABC Taksi ikizkenar üçgeninin Fermat noktası M(0,2) dır.

Örnek 5.2.3 Taksi düzlemde köşe noktaları A(-3,1), B(0,0) ve C(1,3) olan ve kenarları yataysal ve dikeysel doğru parçalarından oluşan ABC ikizkenar Taksi üçgeninin Fermat noktasının koordinatları,



Şekil 5.8. Taksi İkizkenar Üçgende Fermat Noktası

ABC Taksi üçgeninde, K noktasını dikey ötelenerek L ve M noktalarının üçgenin köşe noktalarına uzaklıkları toplamı bulunur. Buna göre K noktasından L noktasına kadar olan noktalarda köşelere olan uzaklıkları toplamının azaldığı, L noktasından M noktasına kadar olan noktalarda köşelere olan uzaklıkları toplamının arttığı görülür. K, L, M noktalarından köşelere uzaklıkları toplamı en az olan nokta L noktası olarak bulunur. ABC ikizkenar Taksi üçgeninin köşelere uzaklıkları toplamı en az olan noktanın ordinatı 1 olarak bulunur.

K(0,0) noktası için;

S = |AK| + |BK| + |CK|

= 4 + 0 + 4 = 8,

L(0,1) noktası için;

S = |AL| + |BL| + |CL|

= 3 + 1 + 3 = 7,

M(0,2) noktası için;

S = |AM| + |BM| + |CM|

= 4 + 2 + 2 = 8,

ABC Taksi üçgeninde, L(0,1) noktasını yatay ötelenerek bu noktadan uzaklaştıkça noktaların üçgenin köşelerine olan uzaklıkları toplamının arttığını görüldü. Buna göre üçgenin Fermat noktasının apsisinin 0 olduğu bulunur.

N(-1,1) noktası için;

S = |AN| + |BN| + |CN|

= 2 + 2 + 4 = 8,

P(-2,1) noktası için;

S = |AP| + |BP| + |CP|

= 1 + 3 + 5 = 9,

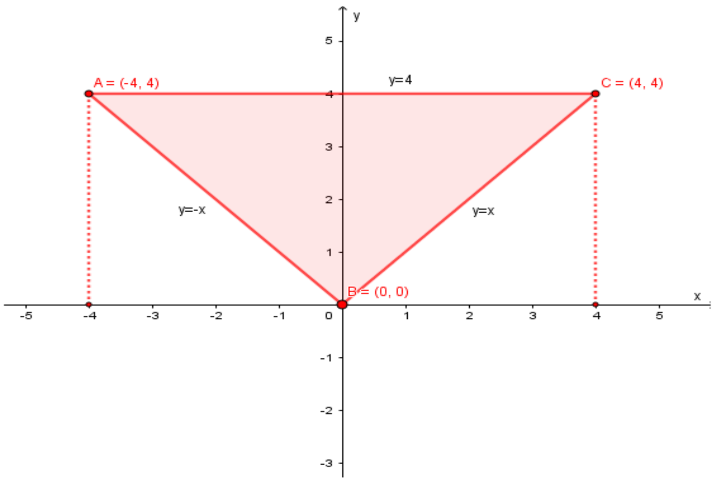
R(-3,1) noktası için;

S = |AR| + |BR| + |CR

= 0 + 4 + 6 = 10,

Buna göre ABC Taksi ikizkenar üçgenin Fermat noktası L(0,1) olarak bulunur.

Örnek 5.3.1 Taksi düzlemde köşe noktaları A(-4,4),B(0,0) ve C(4,4) olan ABC Taksi eşkenar üçgeninin Fermat noktasını bulmak için,



Şekil 5.9. Taksi Eşkenar Üçgende Fermat Noktası

ABC Taksi üçgeninde, K(0,0) noktasını dikey ötelenerek N(0,4) noktasına kadar olan noktaların üçgenin köşelerine olan uzaklıkları toplamının azaldığı görüldü. Buna göre ABC Taksi eşkenar üçgeninin Fermat noktasının ordinatı 4 olarak bulunur.

K(0,0) noktası için;

s = |AK| + |BK| + |CK|

= 8 + 0 + 8 = 16,

L(0,1) noktası için;

s = |AL| + |BL| + |CL|

= 7 + 1 + 7 = 15,

M(0,2) noktası için;

s = |AM| + |BM| + |CM|

= 6 + 2 + 6 = 14,

ABC Taksi üçgeninde, P noktasından N noktasına kadar olan noktalarda üçgenin köşelerine olan uzaklıkları toplamının azaldığı; N noktasından T noktasına kadar olan noktaların üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamının arttığı görüldü. Buna göre ABC eşkenar üçgeninin Fermat noktasının apsisi 0 olarak bulunur.

N(0,4) noktası için;

s = |AN| + |BN| + |CN|

= 4 + 4 + 4 = 12,

P(-2,4) noktası için;

s = |AP| + |BP| + |CP|

= 2 + 6 + 6 = 14,

R(-1,4) noktası için;

s = |AR| + |BR| + |CR|

= 3 + 5 + 5 = 13,

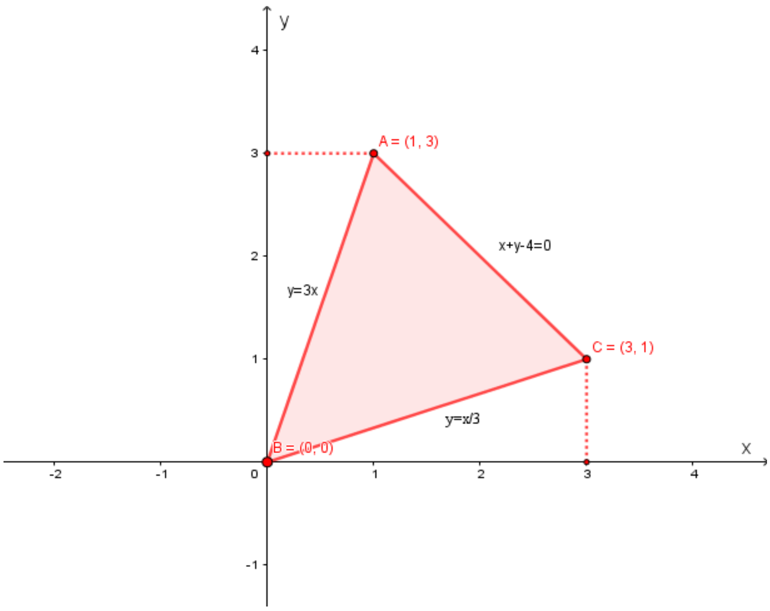
T(1,4) noktası için;

s = |AT| + |BT| + |CT|

= 5 + 5 + 3 = 13,

Buna göre ABC Taksi eşkenar üçgeninin Fermat noktası (0,4) olarak bulunur.

Örnek 5.3.2 Taksi düzlemde köşe noktaları A(1,3), B(0,0) ve C(3,1) olan Taksi eşkenar üçgeninin Fermat noktası araştırılırken,



Şekil 5.10. Taksi Eşkenar Üçgende Fermat Noktası

ABC Taksi üçgeninde, K noktasından L noktasına kadar olan noktaların üçgenin köşelerine olan uzaklıkları toplamının azaldığı; L noktasından N noktasına kadar olan noktaların üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamının arttığı görüldü. Buna göre ABC Taksi eşkenar üçgeninin Fermat noktasının ordinatı 1 olarak bulunur.

K(1,0) noktası için;

s = |AK| + |BK| + |CK|

= 3 + 1 + 3 = 7,

L(1,1) noktası için;

s = |AL| + |BL| + |CL|

= 2 + 2 + 2 = 6,

M(1,2) noktası için;

s = |AM| + |BM| + |CM|

= 1 + 3 + 3 = 7,

N(1,3) noktası için;

s = |AN| + |BN| + |CN|

= 0 + 4 + 4 = 8,

T noktasından L noktasına kadar olan noktaların üçgenin köşelerine olan uzaklıkları toplamının azaldığı; L noktasından E noktasına kadar olan noktaların üçgenin köşelerine olan uzaklıkları toplamının arttığı görüldü. Buna göre ABC Taksi eşkenar üçgeninin Fermat noktasının apsisi 1 olarak bulunur.

T(0,1) noktası için;

s = |AT| + |BT| + |CT|

= 3 + 1 + 3 = 7,

D(2,1) noktası için;

s = |AD| + |BD| + |CD|

= 3 + 3 +1 = 7,

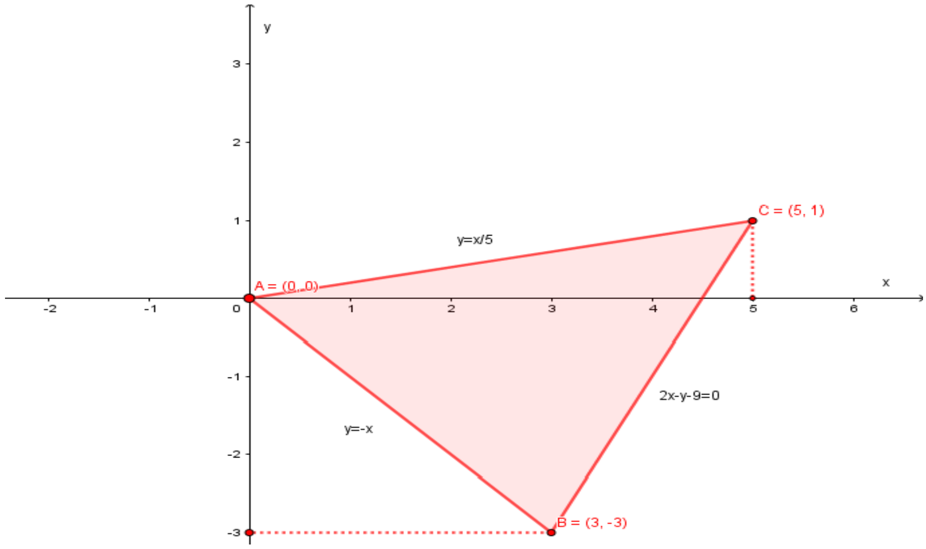
E(3,1) noktası için;

s = |AE| + |BE| + |CE|

= 4 + 4 + 0 = 8,

Buna göre ABC Taksi üçgeninin Fermat noktası (1,1) olarak bulunur.

Örnek 5.3.3 Taksi düzlemde köşe noktaları A(0,0), B(5,1) ve C(3,-3) olan Taksi eşkenar üçgeninin Fermat noktası araştırılırken,



Şekil 5.11. Taksi Eşkenar Üçgende Fermat Noktası

ABC Taksi üçgeninde, K noktasından M noktasına kadar olan noktaların üçgenin köşelerine olan uzaklıkları toplamının azaldığı; M noktasından P noktasına kadar olan noktalarda uzaklıklar toplamının arttığı görüldü. Üçgenin Fermat noktasının apsisi 3 olarak bulunur.

K(3,-2) noktası için;

S = |AK| + |BK| + |CK|

= 5 + 5 + 1 = 11,

L(3,-1) noktası için;

S = |AL| + |BL| + |CL|

= 4 + 4 + 2 = 10,

M(3,0) noktası için;

S = |AM| + |BM| + |CM|

= 3 + 3 + 3 = 9,

P(3,1) noktası için;

S = |AP| + |BP| + |CP|

= 4 + 2 + 4 = 10,

ABC Taksi üçgeninde, R noktasından M noktasına kadar olan noktaların üçgenin köşelerine olan uzaklıkları toplamının azaldığı; M noktasından T noktasına kadar olan noktalarda uzaklıklar toplamının arttığı görüldü. Üçgenin Fermat noktasının ordinatı 0 olarak bulunur.

R(2,0) noktası için;

S = |AR| + |BR| + |CR|

= 2 + 4 + 4 = 10,

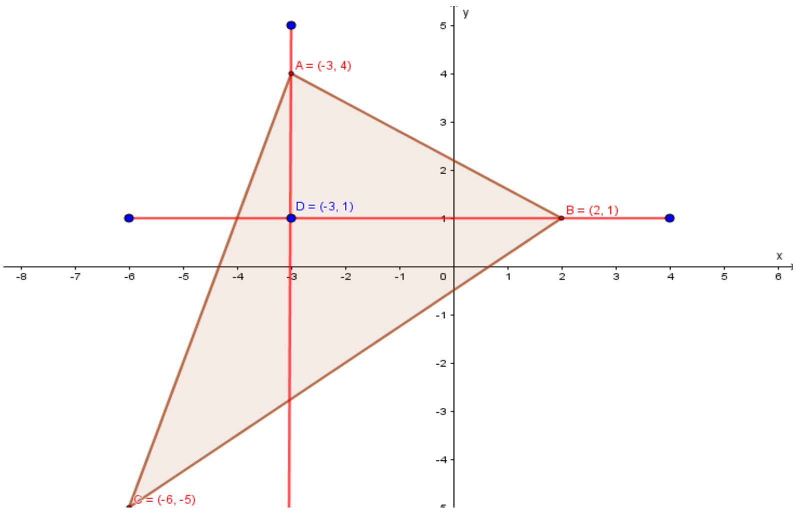
T(4,0) noktası için;

S = |AT| + |BT| + |CT|

= 4 + 2 + 4 = 10,

Böylece ABC Taksi eşkenar üçgeninin Fermat noktası (3,0) olarak bulunur.

Örnek 5.4.1 Üç tane pastanesi olan Murat Bey imalathanesinden pastanelerine ürünleri taşırken zaman ve yakıttan tasarruf etmek için imalathanesini en uygun yere taşımak istiyor. Pastanelerin koordinatları (-3,4), (2,1) ve (-6,-5) olduğuna göre Murat Beyin imalathanesini yapması gereken yerin koordinatlarını bulunuz. Şekil 5.12. de sorunun geometrik yorumu verildi.

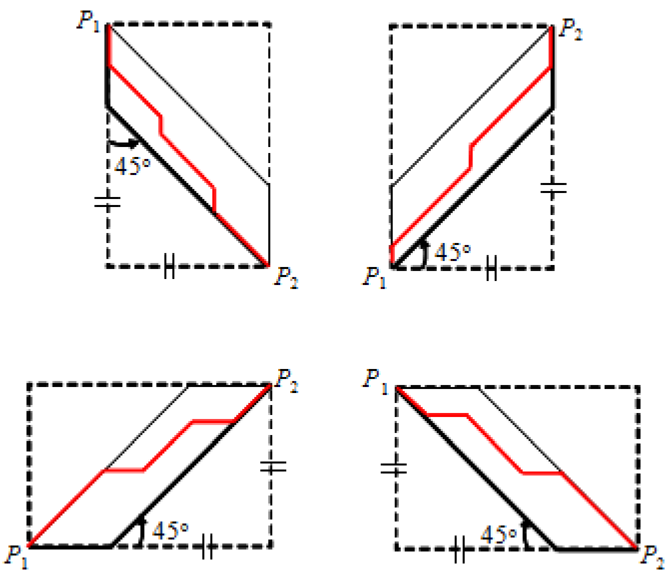


Şekil 5.12. Taksi Üçgende Fermat Noktası

Murat Beyin pastanelerini bir üçgenin köşe noktaları olacak şekilde düşünürsek bulmamız gereken nokta üçgenin Fermat noktasıdır. Üçgenin Fermat noktası köşelerinden geçen yatay ve dikey doğruların yani x = 2, y = 1, x = -3, y = 4, x = -6 ve y = -5 doğrularının üçgen üzerinde veya üçgen içinde kesiştiği noktadır. Bu nokta ise (3,-1) noktasıdır. (3,-1) noktası üçgenin köşe noktalarına uzaklıkları toplamı en az olan noktadır.

6.ÇİN DAMA DÜZLEMDE FERMAT NOKTASI

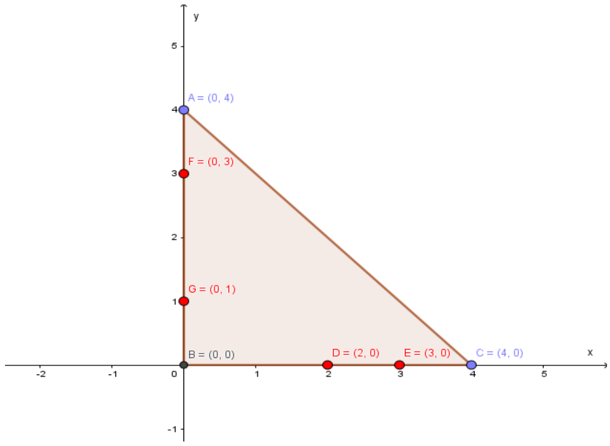
Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki en kısa yol Şekil 6.1. da görüldüğü gibi biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri 1 veya -1 eğimli iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki en kısa uzaklık ifade edilen şekildeki iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. P_1 den P_2 ye olan yolların birleşimi, yani P_1 ile P_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi Şekil 6.1. de görüldüğü gibi bir kenar çifti koordinat eksenlerinden birine paralel, diğer kenar çifti ise diğer koordinat ekseni ile 45^0 lik açı yapan paralelkenardır.



Şekil 6.1 Çin Dama yolları

Bu bölümde örneklerle bir üçgenin Çin daması metriğine göre Fermat noktası incelenmektedir.

Örnek 6.1.1. Çin Dama düzlemde köşe noktaları A(0,4), B(0,0) ve C(4,0) olan ABC üçgeni verilsin.



Şekil 6.2. Çin Dama Üçgeninde Fermat Noktası

ABC üçgeninin Çin dama metriğine göre Fermat noktasını bulmak için üçgen içinde Çin dama yollarının köşelere Çin dama uzaklıkları toplamı en az olan nokta belirlenmelidir. Seçilen D(2,0) noktası için;

$|AD| = 4 + 2(\sqrt{2} - 1) = 2 + 2\sqrt{2}$

$|BD| = 2 + 0(\sqrt{2} - 1) = 2$

$|CD| = 2 + 0(\sqrt{2} - 1) = 2$

$s = |AD| + |BD| + |CD| = 6 + 2\sqrt{2}$,

E(3,0) noktası için;

$|AE| = 4 + 3(\sqrt{2} - 1) = 1 + 3\sqrt{2}$

$|BE| = 3 + 0(\sqrt{2} - 1) = 3$

$|CE| = 1 + 0(\sqrt{2} - 1) = 1$

$s = |AE| + |BE| + |CE| = 5 + 3\sqrt{2}$,

B(0,0) noktası için;

$|AB| = 4 + 0(\sqrt{2} - 1) = 4$

$|BB| = 0$

$|CB| = 4 + 0(\sqrt{2} - 1) = 4$

$s = |AB| + |BB| + |CB| = 8$,

Seçtiğimiz B, D, E noktalarının üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı bulunur.

$6 + 2\sqrt{2}$ - $(5 + 3\sqrt{2}) < 0$ olduğundan D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı E noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamından daha azdır.

$8 - (6 + 2\sqrt{2}) < 0$ olduğundan B noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamından daha azdır.

Buna göre B noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı D ve E noktalarının köşelere olan uzaklıkları toplamından azdır. Dolayısıyla ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasının apsisi 0 dır.

Seçilen F(0,3) noktası için;

$|AF| = 1 + 0(\sqrt{2} - 1) = 1$

$|BF| = 3 + 0(\sqrt{2} - 1) = 3$

$|CF| = 4 + 3(\sqrt{2} - 1) = 1 + 3\sqrt{2}$

$s = |AF| + |BF| + |CF| = 5 + 3\sqrt{2}$,

G(0,1) noktası için;

$|AG| = 3 + 0(\sqrt{2} - 1) = 3$

$|BG| = 1 + 0(\sqrt{2} - 1) = 1$

$|CG| = 4 + 1(\sqrt{2} - 1) = 3 + \sqrt{2}$

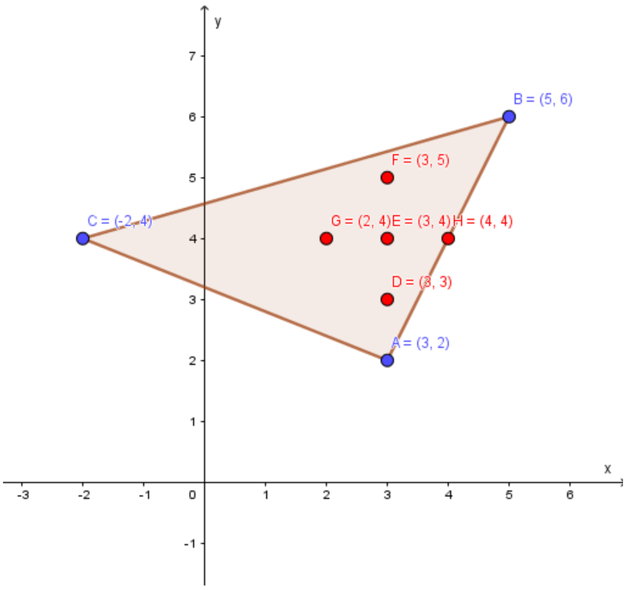
$s = |AG| + |BG| + |CG| = 7 + \sqrt{2}$,

$7 + \sqrt{2} - (5 + 3\sqrt{2}) < 0$ olduğundan G noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamı, F noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamından daha azdır.

$8 - 7 + \sqrt{2} < 0$ olduğundan B noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamı, G noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamından daha azdır.

Buna göre B noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı F ve G noktalarının köşelere olan uzaklıkları toplamından azdır. ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasının ordinatı 0 dır. Fermat noktası B(0,0) olarak bulunur.

Örnek 6.1.2 Çin Dama düzlemde köşe noktaları A(3,2), B(5,6) ve C(-2,4) olan ABC üçgeni verilsin.



Şekil 6.3. Çin Dama Üçgeninde Fermat Noktası

ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasını bulmak için seçtiğimiz nokta köşelere olan Çin dama uzaklıkları toplamı en az olan nokta bulunur.

Seçilen D(3,3) noktası için;

|AD| = 1

|BD| = 3 + $2(\sqrt{2} - 1) = 1 + 2\sqrt{2}$

|CD| = 4 + $\sqrt{2}$

s = |AD| + |BD| + |CD| = 6 + 3$\sqrt{2}$,

E(3,4) noktası için;

|AE| = 2

|BE| = 2 + $2(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$

|CE| = 5

s = |AE| + |BE| + |CE| = 7 + 2$\sqrt{2}$,

F(3,5) noktası için;

|AF| = 3

|BF| = 2 + $\sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$

|CF| = 5 + $\sqrt{2} - 1 = 4 + \sqrt{2}$

s = |AF| + |BF| + |CF| = 8 + 2$\sqrt{2}$, Seçtiğimiz D, E, F noktalarının üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı bulunur.

$7 + 2\sqrt{2}$ - $(6 + 3\sqrt{2}) < 0$ olduğundan E noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamından daha azdır.

$7 + 2\sqrt{2}$ – $(8 + 2\sqrt{2}) < 0$ olduğundan E noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı F noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamından daha azdır.

Buna göre E noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı D ve F noktalarının köşelere olan uzaklıkları toplamından azdır. Dolayısıyla ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasının apsisi 3 tür

G(2,4) noktası için;

$|AG| = 2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$

$|BG| = 3 + 2(\sqrt{2} - 1) = 1 + 2\sqrt{2}$

$|CG| = 4$

$s = |AG| + |BG| + |CG| = 6 + 3\sqrt{2}$,

H(4,4) noktası için;

$|AH| = 2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$

$|BH| = 2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$

$|CH| = 6$

$s = |AH| + |BH| + |CH| = 8 + 2\sqrt{2}$,

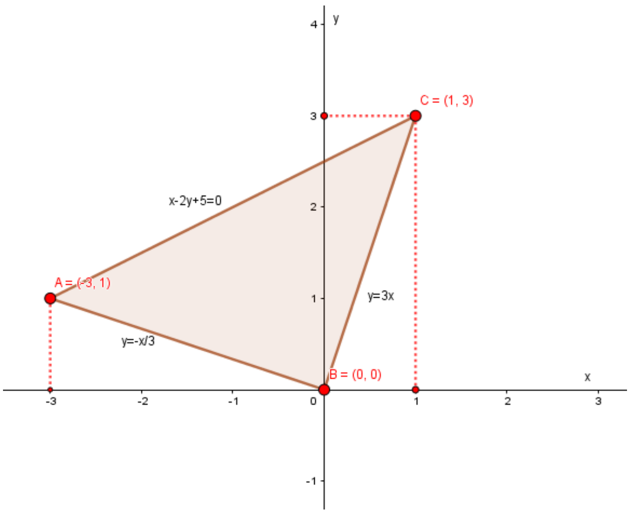
$7 + 2\sqrt{2} - \left(6 + 3\sqrt{2}\right) < 0$ olduğundan E noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamı, G noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamından daha azdır.

$7 + 2\sqrt{2}$ - $8 + 2\sqrt{2} < 0$ olduğundan E noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamı, H noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamından daha azdır.

Buna göre E noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı G ve H noktalarının köşelere olan uzaklıkları toplamından azdır. Dolayısıyla ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasının ordinatı 4 olarak bulunur.

ABC üçgeninin çin daması metriğine göre Fermat noktası E(3,4) noktasıdır.

Örnek 6.1.3 Çin Dama düzlemde köşe noktaları A(-3,1), B(0,0) ve C(1,3) olan ABC üçgeni verilsin.



Şekil 6.4. Çin Dama Üçgeninde Fermat Noktası

ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasını bulmak için seçtiğimiz nokta köşelere olan Çin dama uzaklıkları toplamı en az olan nokta bulunur.

Seçilen B(0,0) noktası için;

$|AB| = 3 + \sqrt{2} - 1 = 2 + \sqrt{2}$

$|BB| = 0$

$|CB| = 3 + \sqrt{2} - 1 = 2 + \sqrt{2}$

$s = |AB| + |BB| + |CB| = 4 + 2\sqrt{2}$,

D(0,1) noktası için;

$|AD| = 3$

$|BD| = 1$

$|CD| = 2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$

$s = |AD| + |BD| + |CD| = 5 + \sqrt{2}$,

E(0,2) noktası için;

$|AE| = 3 + \sqrt{2} - 1 = 2 + \sqrt{2}$

$|BE| = 2$

$|CE| = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$

$s = |AE| + |BE| + |CE| = 4 + \sqrt{2}$,

Seçtiğimiz B, D, E noktalarının üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı bulunur.

$5 + \sqrt{2}$ - $(4 + 2\sqrt{2}) < 0$ olduğundan D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı B noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamından daha azdır.

$5 + \sqrt{2} - (4 + \sqrt{2}) < 0$ olduğundan D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı E noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamından daha azdır.

Buna göre D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı B ve E noktalarının köşelere olan uzaklıkları toplamından azdır. Dolayısıyla ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasının ordinatı 1 dir.

F(-1,1) noktası için;

$|AF| = 2$

$|BF| = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$

$|CF| = 2 + 2(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$

$s = |AF| + |BF| + |CF| = 2 + 3\sqrt{2}$,

G(1,1) noktası için;

$|AG| = 4$

$|BG| = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$

$|CG| = 2$

$s = |AG| + |BG| + |CG| = 6 + \sqrt{2}$,

$5 + \sqrt{2} - \left(2 + 3\sqrt{2}\right) < 0$ olduğundan D noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamı, F noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamından daha azdır.

$5 + \sqrt{2} - (6 + \sqrt{2}) < 0$ olduğundan D noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamı, G noktasının köşe noktalarına uzaklıkları toplamından daha azdır.

Buna göre D noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı F ve G noktalarının köşelere olan uzaklıkları toplamından azdır. Dolayısıyla ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktasının apsisi 0 olarak bulunur.

ABC üçgeninin Çin Daması metriğine göre Fermat noktası D(0,1) noktası olarak bulunur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Öklidyen ve Öklidyen olmayan Taksi ve Çin Dama düzlemlerinde Fermat noktası incelenmiştir. Başka metrikler ile donatılmış düzlemlerde de bir üçgenin Fermat noktası araştırılabilir..

Taksi metriği kullanılan düzlemdeki bir üçgenin Fermat noktası üçgenin köşelerinden geçen yatay ve dikey doğruların üçgenin içinde veya üzerinde kesiştiği nokta olarak bulunmuştur.

Taksi düzlemde Fermat noktasının bir uygulaması olarak verilen günlük hayattan bir örnek diğer metrikler için de düzenlenebilir.

Çin dama metriği kullanılan düzlemdeki bir üçgenin Fermat noktası üçgenin köşelerine Çin dama uzaklıkları toplamı minimum olan nokta bazı özel örneklerde bulunmuştur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça Z., Kaya R.,1997, On the Taxicab Trigonometry, Jour. of Inst. of Math &. Comp Sci. (Math Ser.), 10, 151 – 159

Akça, Z., Kaya, R., 2004, On the Distance Formulae in Three Dimensional Taxicab Space,Hadronic, J., Vol. 27, No.5, 521-532

Bayar, A., Ekmekçi,S. ve Özcan, M., 2008, On Trigonometric Functions and Cosine-Sine Rules in Taxicab Plane, International Electronic Journal of Geometry

Chen, G., 1992, Lines and Circles in Taxicab Geometry, M.S. thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Centered Missouri State University

Hanson, J.,R., 2014, Fermat Point for Taxicab Triangle, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2 – 6

Hanson, J., R., 2016, Fermat Point for A Triangle in Three Dimensions Using The Taxicab Metric, 2

Ho, Y.P. and Liu, U, 1996 Taxicab Geometry, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 2 63 – 72

Laatsch, R.,1982, Pyramidal Sections in Taxicab Geometry, Mitt. Mathematics Magazine, 55, 205 – 212

Kaya, R., Akça, Z., Güanaltılı, İ. Ve Özcan, M., 2000, General Equation for Taxicab Conics and Their Classification, Mitt. Math. Ges. Hamburg, 19, 135 – 148

Krause, E.F., 1975, Taxicab Geometry : An Adventure in Non-Euclidean Geometry Dover Publications, Inc. New York,

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Krause,E.F.,1965, Taxicab Geometry, Addison – Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, p.88.

Menger, K., 1952, You Will Like Geometry, Guildbook of the Illinois Institute of Technology GeometryExhibit, Museum of Science and Industry, Chicago,III,

Minkowski, H., 1967, Gesammelte Abhandlungen, Chelsa Publishing Co. New York, 836p.

Özcan, M. ve Kaya, R., 2002, Area of Triangle in Terms of teh Taxicab Distance,Missouri Journal of Mathematical Sciences, 15, 3, 178-182

Özcan, M., Ekmekçi, S., and Bayar, A., 2002, The Taxicab Lengths Under Rotations The Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 11, No. 7, 381 – 384

Reynolds, B.E.., 1980, Taxicab Geometry, Pi Mu Epsilon Journal,7 , 77 – 88

Schattschneide, D.J., 1984, The Taxicab Group, Amer. Math. Monthly 91, 425-427

Turan. M, 2004, Çin Dama Düzleminde Konikler Üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, s.149.

Uymaz, A.Ç., 2002, Çin Dama Çemberi ve Özellikleri, Yüksek Lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, s.227.