# 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Paralel Regle Weingarten Yüzeyler Üzerine

Yasin ÜNLÜTÜRK

**DOKTORA TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos 2011

On the Parallel Ruled Weingarten Surfaces in 3-Dimensional Minkowski Space

Yasin ÜNLÜTÜRK

**DOCTORAL DISSERTATION**

Department of Mathematics

August 2011

# 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Paralel Regle Weingarten Yüzeyler Üzerine

Yasin Ünlütürk

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Cumali Ekici

Ağustos 2011

## ONAY

Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Yasin Ünlütürk'ün DOKTORA tezi olarak hazırladığı "3-Boyutlu Minkowski Uzayında Paralel Regle Weingarten Yüzeyler Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**Danışman** **:** Doç. Dr. Cumali EKİCİ

**İkinci Danışman** **: -**

**Doktora Tez Savunma Jürisi:**

**Üye :** Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

**Üye :** Doç. Dr. Cumali EKİCİ

**Üye :** Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

**Üye :** Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM

**Üye :** Yrd. Doç. Dr. Mustafa DEDE

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ............................ tarih ve ........................ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

# ÖZET

Bu çalışmanın amacı 3-boyutlu Minkowski uzayında regle Weingarten yüzeylerin paralel yüzeylerini incelemektir. Çalışmanın ‘Giriş’ bölümünde, 3-boyutlu Minkowski uzayında regle yüzeyler, paralel yüzeyler ve Weingarten yüzeylerin tarihsel gelişimi ile çalışmamızın teorik yapısı açıklanmıştır.

İkinci bölümde, gerek 3- boyutlu Öklid uzayı gerekse 3-boyutlu Minkowski uzayında regle yüzeyler, paralel yüzeyler, Weingarten yüzeyler ve regle Weingarten yüzeylerle ilgili literatürde mevcut bazı önemli tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında paralel yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri, yüzeyin spacelike ve timelike yüzey oluşuna göre, asıl yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri cinsinden verilmiştir. 3-boyutlu Minkowski uzayında paralel regle yüzeylerin, esas yüzeyin büyüklüklerine bağlı olarak cebirsel değişmezleri incelenip, spacelike regle yüzey ile spacelike ve timelike doğrultmanlı timelike regle yüzeylere paralel olan regle yüzeylere dair bazı teoremler verilmiştir.

Son olarak dördüncü bölümde ise, 3-boyutlu Minkowski uzayında paralel regle yüzeyin Weingarten yüzey olma şartı verilip, çeşitli özellikleri incelenmiş ve bunlarla ilgili teoremler verilmiştir. Bölümün sonunda, paralel regle Weingarten yüzeylere örnekler verilip, belirli parametreler altında maple yazılım programı kullanılarak yüzeylerin şekilleri çizdirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Paralel yüzey, eğrilikler, Weingarten yüzey, regle Weingarten yüzey.

**SUMMARY**

The aim of this study is to study paralel surfaces of ruled Weingarten surfaces in 3-dimensional Minkowski space. In the introduction of the study, the historical development of ruled surfaces, parallel surfaces and Weingarten surfaces in 3-dimensional Minkowski space has been explained together with theoretical structure of the study.

In the second chapter, some important definitions and theorems about the ruled surfaces, parallel surfaces, Weingarten surfaces and ruled Weingarten surfaces have been given in terms of both 3-dimensional Euclid and Minkowski space.

In the third chapter, Gaussian and mean curvatures of parallel surfaces have been locally computed in terms of original surface's Gauss and mean curvatures. These computations have become different according to spacelike and timelike surface. Algebraic invariants of parallel ruled surfaces have been studied depending upon magnitudes of original surface. Some theorems of parallel surfaces- are ruled ones-to spacelike ruled surfaces and timelike ruled surfaces with spacelike generator and timelike generator have been given.

In the fourth chapter as a conclusion, conditions which make parallel surfaces of ruled surfaces Weingarten surfaces have been studied and some theorems related to these surfaces have been given in 3-dimensional Minkowski space. At the end of the chapter, examples for parallel ruled Weingarten surfaces have been given and graphs of those surfaces have been plotted by using Maple software under specific values.

Key Words: Parallel surface, curvatures, Weingarten surface, ruled Weingarten surface.

**TEŞEKKÜR**

3-Boyutlu Minkowski Uzayında Paralel Regle Weingarten Yüzeyleri Üzerine adlı çalışmamda, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Sayın

Doç. Dr. Cumali EKİCİ

hocama teşekkür ederim.

Çalışmalarım esnasında bana maddi ve manevi her türlü desteği veren muhterem annem Halise ve babam Ali Ünlütürk ile sevgili eşim Arzu Ünlütürk'e teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir 2011 Yasin ÜNLÜTÜRK

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

**İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)**

**Sayfa**

# ŞEKİLLER DİZİNİ

# SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| **Simge** | **Anlamı** |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar cümlesi |
| $\mathbb{R}^3$ | 3 – boyutlu Reel uzay |
| $\mathbb{E}^3$ | 3 – boyutlu Öklid uzayı |
| $\mathbb{E}_1^3$ | 3 – boyutlu Minkowski uzay |
| $\chi(M)$ | Tanjant vektör alanlarının uzayı |
| $M^r$ | $M$ Yüzeyinin paralel yüzeyi |
| $E, F, G$ | Birinci temel form katsayıları |
| $e, f, g$ | İkinci temel form katsayıları |
| $K$ | Yüzeyin Gauss eğriliği |
| $H$ | Yüzeyin ortalama eğriliği |
| $K^r$ | Paralel yüzeyin Gauss eğriliği |
| $H^r$ | Paralel yüzeyin ortalama eğriliği |
| $E^r, F^r, G^r$ | Paralel yüzeye ait birinci temel form katsayıları |
| $e^r, f^r, g^r$ | Paralel yüzeye ait ikinci temel form katsayıları |
| $I^r$ | Paralel yüzeyin birinci temel formu |
| $II^r$ | Paralel yüzeyin ikinci temel formu |
| $III^r$ | Paralel yüzeyin üçüncü temel formu |
| $\varphi^r$ | Paralel yüzeyin parametrik gösterimi |
| $f_*(X)$ | Paralel regle yüzeye ait doğrultman vektörü |
| $S^r$ | Paralel yüzeye ait şekil operatörü |
| $D^r$ | Paralel yüzeye ait koneksiyon |
| $X^r$ | Paralel regle yüzeye ait vektör alanı |

# BÖLÜM 1
# GİRİŞ

1854 yılının 10 Haziran günü Göttingen Üniversitesinde, "Über die hypthesen, welche der geometrie zu grunde liegen" başlıklı açılış konuşmasını yapan Georg Friederich Bernhard Riemann'ın diferensiyel geometriye yaptığı katkı, Gauss'un Theorema Egregium'da ilerisi için öne sürdüğü planı gerçekleştirmek ve Öklid uzayında konumlandırılamayan nesnelere yönelik diferensiyel geometriyi geliştirmekti. Riemann, tanjant vektör uzunluklarının belirlenmesinde tek tip bir yöntem ortaya koymayı amaçlamıştı. O, her bir tanjant uzayındaki $f$ uzunluk fonksiyonunun sürekli ve ayrıca pozitif homojen olduğunu düşünmüştü. Riemann en iyi ihtimalle, ikinci mertebeden kısmi türevlerin matrisinin, pozitif definit olduğunu varsaymıştı. Günümüzde bu matrisin pozitif yarı-definit olduğu bilinmektedir. Bir $M$ manifoldu üzerindeki Riemann metriği, her bir tanjant uzayı belirleyen pozitif yarı-definit bir iç çarpımdır. Riemann metriği ile inşa edilen geometriye, Riemann geometrisi denir. Eğer diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde Riemann metriği indefinitse, yarı-Riemann manifoldu elde edilir. İndefinit metrik ile inşa edilen geometriye, yarı-Riemann geometri denir.

$\mathbb{E}_1^n$ Minkowski uzayı yani indeksi 1 olan $g$ metrik tensörüyle donatılan, $\mathbb{R}^n$ manifoldu, çok önemli bir yarı-Riemann manifolddur. Eğer $n = 4$ alınırsa, görelilik kuramına dayalı uzay-zamanın en basit örneği elde edilir. Minkowski uzay-zaman geometrisi, özel göreliliğin incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Klasik Newton fiziğindeki sıkıntıları, Lorentz, Poincare ve Einstein incelediler. Einstein'a ait matematiksel yapılar, uzay-zaman koordinatlarını değiştirmede, yeni bir metoddu. 1908 yılında, Herrman Minkowski'nin $\mathbb{E}^3$

uzayı ile $\mathbb{E}$ zamanını, tek bir $\mathbb{E}_1^4$ uzay-zamanda birleştirmesiyle, tüm değişimler kendiliğinden ortaya çıkmıştı. Minkowski bunu şu cümlelerle ifade etmiştir: "Bundan böyle uzay ve zaman boyutlarının ayrı düşünülmesi her iki uzayın anlamını kaybetmesi demektir. Gerçek iki uzayın birlikte düşünülmesi ile ortaya çıkar."

$\mathbb{E}_1^3$ de regle yüzey $\varphi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$ parametrizasyonuyla ifade edilir. $\alpha(u)$ regüler bir eğrinin bağlantılı parçası, $X(u)$ ise bu eğri boyunca hiçbir yerde yok olmayan bir vektör alanıdır. Regle yüzeyler, açılabilir ve açılabilir olmayan şeklinde ikiye ayrılırlar. Açılabilir regle yüzey, ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı olan regle yüzeydir. Diferensiyel geometrideki klasik bir sonuç, açılabilir regle yüzeylerin açık ve yoğun altkümelerinin elemanlarını silindir, koni ve tanjant yüzeyleri olarak ifade eder. Bu durum, hem Öklid hem de Minkowski uzayları için geçerlidir. Doğal olarak dejenere tanjant düzlemleri bunun dışındadır. Genel olarak Minkowski uzayındaki bir yüzey için 1. temel formun non-dejenere olması gerekir. Eğer 1. temel form, pozitif tanımlı ise, spacelike yüzey elde edilir, eğer 1. temel form indefinit ise timelike yüzey elde edilir. $K$ Gauss eğriliği ile $H$ ortalama eğriliklerinden birinin ya da her ikisinin sabit olduğu eğrilik durumlarına uyan yüzeyler, farklı çalışmalarda incelenmiştir (Delaunay, 1841; Hano and Nomizu, 1984; Nitshe, 1989; Lopez, 1999a; Lopez, 1999b; Lopez, 2000; Lopez, 2001; Lopez, 2003). Van de Woestyne, Kobayashi, Kim ve Yang gibi matematikçiler Minkowski uzayındaki minimal ya da maximal yüzeyleri incelemişlerdir (Van de Woestyne, 1990; Kobayashi, 1983; Kim and Yang, 2006). Öklid geometrisindeki klasik sonuçların çoğunun, Minkowski uzayında bir karşılığı vardır. Dillen ve Kühnel, Minkowski uzayında, Öklid uzayından daha fazla minimal yüzey olduğu gerçeğine bağlı olarak, regle Weingarten yüzeyleri incelemişlerdir (Dillen and Kühnel, 1999).

Weingarten yüzeylerin incelenmesine ilk olarak Almanya'da dünyaya gelen Julius Weingarten tarafından başlanmıştır. Weingarten, fakir bir aileden geliyordu. Doktorasını tamamlamak için finansal desteğe sahip değildi. Bundan ötürü bir yandan tezini hazırlarken öte yandan Berlin'deki çeşitli okullarda öğretmenlik yapıyordu. İlginçtir ki Weingarten, bu olumsuz şartlara rağmen yüzeyler teorisi üzerine olan çalışmasında ciddi sonuçlar elde etmişti. 1857 yılında doktora tezinin bir bölümü olan bir yüzeyin eğrilik çizgileri husundaki çalışmalarından ötürü ödül aldı. 1873'den 1903'e kadar Berlin-Charlottenburg Technische Hochshule'de profesördü. İlk çalışmaları olan "Über eine klasse auf einander abwickelbarer flächen" ve "Über eine flächen, derer normalen eine gegebene fläche-berühren" ile W-yüzeyler diye geçen teorisini geliştirmiştir (Weingarten, 1861; Weingarten, 1863). Bu teori, asli eğrilik yarıçapları arasında bir bağıntının olmasına dayanıyordu. Weingarten'in çalışmalarından önce yalnızca açılabilir yüzeyler biliniyordu. 3 boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında bir yüzeyin Weingarten yüzey ya da W-yüzey olması, bu yüzeye ait olan asli eğriliklerin ya da yüzeye ait $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğriliklerinin birbirine lineer bağımlı olması demektir. Diğer bir deyişle $\Phi(k_1, k_2) = 0$ ya da $\Phi(K, H) = 0$ şeklindeki fonksiyonel bağıntının bu yüzey üzerinde özdeş olarak sağlanması gerekir. Bu bağıntıyla özdeş olarak $K$ ile $H$ eğriliklerinin yüzeyin değişkenleri cinsinden kısmi türevleri arasındaki $K_u H_v - K_v H_u = 0$ bağıntısını sağlaması da aynı anlama gelmektedir. Lokal olarak, Weingarten yüzeyler aşağıdaki beş ana sınıfa ayrılırlar:

1. Dönel yüzeyler,
2. Asli eğriliklerinden biri sabit olan bir eğrinin kanal yüzeyleri,
3. Helikoidsel yüzeyler,
4. Sabit Gauss eğrilikli yüzeyler,
5. Sabit ortalama eğrilikli yüzeyler (Kühnel and Steller, 2005).

Altmanifoldlara dair çalışmalarda, farklı eğrilik durumlarını incelemek yaygındır. Matematikçiler arasında, böylesi bir şartı sağlayan bütün altmanifoldları belirleme isteği söz konusudur. Öklidyen yahut yarı Öklidyen uzayda hiperyüzeyleri incelemek için kullanılan ilginç bir eğrilik özelliği de; asli eğrilikler arasındaki çözümü hiç de kolay olmayan fonksiyonel bir bağıntının söz konusu olmasıdır. Bu sonuca uyan hiperyüzeyler, Weingarten hiperyüzeyler olarak adlandırılır. Bu bağıntı, Öklid ve Minkowski uzaylarındaki yüzeylere uygulandığında, Weingarten yüzeyler elde edilmiş olur. Diğer bir deyişle, Weingarten yüzeyler, Gauss eğriliği ile ortalama eğrilik arasındaki fonksiyonel bağıntının varlığı ile tanımlanır.

Weingarten'in başlattığı W-yüzeylerin incelenmesine, sırasıyla, (Beltrami, 1865), (Darboux, 1894), (Dini, 1865) ve (Lie, 1880) çalışmalarıyla katkıda bulunulmuştur. Örneğin; Beltrami ve Dini, 3-boyutlu Öklid uzayında, açılabilir olmayan yegane regle Weingarten yüzeyin, helikoidsel regle yüzey olduğunu ispatlamışlardır (Beltrami, 1865; Dini, 1865). Bu sonuç, Öklid uzayında $K$ Gauss eğriliği ile $H$ ortalama eğriliği arasındaki bağıntı çerçevesinde, Weingarten yüzeyleri net bir şekilde sınıflandırmıştır. Tarihsel süreç içerisinde, Chern, özel Weingarten yüzey nosyonunu tanıtmıştır (Chern, 1945). Hopf, (Chern, 1945) çalışmasında verilen özel Weingarten yüzeyin belli şartlar altında küreye özdeş olmasıyla ilgili teoremi ifade ve ispat etmiştir (Hopf, 1951). Chern, (Hopf, 1951) çalışmasındaki teoremin daha basit bir ispatını vermiştir (Chern, 1955). Hartmann ve Winter, (Hopf, 1951) çalışmasında verilen teoremden analitik olma varsayımını kaldırarak teoremi yeniden ifade ve ispat etmişlerdir (Hartmann and Winter, 1954). Milnor, soyut Weingarten yüzeyleri incelemiştir (Milnor, 1980). Kühnel, 3-boyutlu Öklid uzayında Weingarten yüzey olma şartına bağlı olarak regle yüzeyin belirlenmesinde kullanılan $Q, J, F$ büyüklüklerinin sabit olması şeklindeki Weingarten yüzeyi olma şartını ve $K_{II}$ ikinci Gauss eğriliği ile $H$ ortalama eğrili ği arasındaki bağıntıyı vererek Weingarten yüzeylerin sınıflandırmasını bir adım öteye taşımıştır (Kühnel, 1994). Brunt, ilk olarak Weingarten yüzeylerin tasarımını incelemiştir (Brunt, 1994). Sonrasında, Grant ile birlikte (Grant and van Brunt, 1996) çalışmalarında, Weingarten yüzeylerin potansiyel bilgisayar destekli grafik tasarımına dair uygulamalarını incelemişlerdir. Koch, tamamen farklı bir yöntemle, en az

$C^2$ sınıfından olmak kaydıyla Weingarten yüzey olma şartını sağlayan bütün regle yüzeyleri belirlemeye çalışmıştır (Koch, 1993). Stamou, 3-boyutlu Öklid uzayında Weingarten yüzeylerin sınıflandırmasını yapmıştır (Stamou, 1999). Dillen ve Kühnel, 3-boyutlu Minkowski uzayında regle Weingarten yüzeyleri incelemişlerdir (Dillen and Kühnel, 1999). Bu çalışmanın sonucu olarak, Minkowski 3-uzayında null doğrultmanlılar dışındaki herhangi bir açılabilir olmayan regle Weingarten yüzeyin, bir helikoidsel regle yüzey parçası olduğunu ve bunun yanısıra, null doğrultmanlı bütün regle yüzeylerin, Weingarten yüzeyi olduğunu göstermişlerdir (Dillen and Kühnel, 1999). Sodsiri, doktora tezinde ve daha sonra tezinden çıkarttığı makalelerinde, Minkowski 3-uzayında regle Weingarten yüzeylerin ve regle lineer Weingarten yüzeylerin, $K$, $H$, $K_{II}$, $H_{II}$ eğrilikleri kullanılarak sınıflandırmasını yapmıştır (Sodsiri, 2005; Dillen and Sodsiri, 2005a; Dillen and Sodsiri, 2005b). Yoon, 3-boyutlu Minkowski uzayında Weingarten tip polinom öteleme yüzeylerini incelemiştir (Yoon, 2010). Kim ve Yoon,
3-boyutlu Öklid uzayında kuvadrik Weingarten yüzeyleri incelemişlerdir (Kim and Yoon, 2010). Kalkan, doktora tezinde 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında, lineer Weingarten yüzeyleri ve bunların özel halleri olan cylic yüzeylerini incelemiştir (Kalkan, 2010). Goemann, doktora tezinde, 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında Weingarten öteleme yüzeylerinin sınıflandırmasını yapmıştır (Goeman, 2010).

Yüzeyler teorisinde; regle yüzeyler, minimal yüzeyler, sabit eğrilikli yüzeyler gibi matematikçilerin ilgilendiği özel yüzeyler vardır. Bunlar içerisinde, paralel yüzeyler birçok incelemeye konu olmuş özel yüzeylerdendir. 1883 yılında Craig elipsoidin paralel yüzeyini araştırmıştır (Craig, 1883). 1909 yılında Eisenhart, paralel yüzeyleri de içeren A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces isimli kitabını yayınlamıştır. Nizamoğlu, paralel regle yüzeyleri birim dual küre üzerindeki bir parametreye bağlı dual eğriler olarak düşünmüştür (Nizamoğlu, 1986). Park ve Kim tarafından 3-boyutlu Öklid uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin regle yüzey olmadığı, ancak açılabilir bir regle yüzeyin paralel yüzeyinin açılabilir bir regle yüzey olduğu ifade edilmiştir (Park and Kim, 1998). Minkowski uzayında ise Çöken ve arkadaşları, iki paralel regle yüzeyin geometrik invaryantları arasındaki bağıntıları elde etmişlerdir (Çöken et al., 2008).

Bu çalışmada, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında paralel yüzeylerin spacelike ve timelike yüzey olmasına bağlı olarak bazı teoremler verilmiştir. Minkowski 3-uzayında regle yüzeye paralel olan yüzey ifade edilmiş ardından bu paralel yüzeyin, regle yüzey olma şartı verilmiştir. Regle yüzey olma özelliğini sağlayan paralel yüzey, paralel regle yüzey olarak adlandırılmıştır. Spacelike ve timelike paralel regle yüzey olmasına göre bazı teoremler ifade edilmiştir. Son olarak, regle yüzeye paralel yüzeyin, Weingarten olma şartı incelenmiş ve bu yüzeylerle ilgili bazı teoremler verilmiştir. Burada belirtilmesi gereken şöyle bir husus var: lightlike yüzeyler için özelde ise lightlike regle yüzeyler için ortalama eğrilik tanımlı bir kavram değildir (Kühnel, 2005). Bu nedenle, bu yüzeyler çalışmamızda incelenmemiştir.

# BÖLÜM 2
# TEMEL KAVRAMLAR

## 2.1 Öklid Uzayı

Bu kısımda, çalışmada sıkca kullanılan temel kavramlara yer verilmiştir.

**Tanım 2.1.1:** Boş olmayan bir $A$ cümlesi ve bir $K$ cismi üstünde bir vektör uzayı $V$ olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \longrightarrow V$$

fonksiyonu varsa $A$ ya $V$ ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

(1) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

(2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 2.1.2:** $\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayını ele alalım. $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olsun. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

biçiminde tanımlanırsa böylece $\mathbb{R}^3$ afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir.

Bir reel afin uzayda tanımlanabilen bütün kavramlar, bir Öklid uzayında anlam kazanırlar. Bununla beraber reel afin uzaylar ile Öklid uzayları farklıdırlar. Çünkü, bir $V$ reel vektör uzayı ile birleşen $A$ afin uzaydaki metrik özellikler $V$ de seçilecek olan iç çarpımdan doğarlar; bu nedenle Öklid uzayındaki özelliklerle diğer afin uzaylardakiler farklı olurlar (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 2.1.3:** $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{E}^3$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} d: & \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow & d(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3} (y_i - x_i)^2} \end{array}$$

olarak tanımlanan $d$ fonksiyonuna Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in \mathbb{E}^3$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 2.1.4:**

$$\begin{array}{rccl} d: & \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow & d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| \end{array}$$

biçiminde tanımlanan $d$ fonksiyonuna $\mathbb{E}^3$ de Öklid metriği denir (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 2.1.5:** $\forall x, y, z \in \mathbb{E}^3$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{yx}, \overrightarrow{yz} \rangle}{\|\overrightarrow{yx}\| \, \|\overrightarrow{yz}\|}$$

den hesaplanan $\theta$ reel sayısıdır (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 2.1.6:** $\mathbb{E}^3$ de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dörtlüsüne, $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\}$ vektör üçlüsü, $\mathbb{R}^3$ için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ sistemine $\mathbb{E}^3$ ün bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir (Hacısalihoğlu, 2000).

**Sonuç 2.1.7:** $\mathbb{E}^3$ de $E_0 = (0, 0, 0)$, $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$ ve $E_3 = (0, 0, 1)$ noktaları bir dik çatı oluştururlar. $\left\langle \overrightarrow{E_0E_i}, \overrightarrow{E_0E_j} \right\rangle = \delta_{ij}$ olduğundan, $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı için $\{\overrightarrow{E_0E_1}, \overrightarrow{E_0E_2}, \overrightarrow{E_0E_3}\}$ sistemi bir ortonormal bazdır (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 2.1.8:** $\mathbb{E}^3$ deki $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$ çatısına standart Öklid çatısı denir (Hacısalihoğlu, 2000).

## 2.2 Riemann Manifoldu ve Hiperyüzey

Bu kısımda, manifold üzerinde koneksiyon ve bazı dönüşümler ifade edilmiştir.

**Tanım 2.2.1:** $M$ bir topolojik uzay olsun. $M$ için aşağıdaki önermeler doğru ise $M$ bir $n-$boyutlu topolojik manifold veya $n-$manifolddur denir:

(1) $M$ bir Hausdorff uzayıdır.

(2) $M$ $n-$boyutlu lokal Öklidyendir.

(3) $M$ açık cümlelerin sayılabilir bir tabanına sahiptir (Boothby, 1986).

**Tanım 2.2.2:** $M$ bir $n-$boyutlu topolojik manifold olsun. $M$ üzerinde $C^k$ sınıfından diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse $M$ ye $C^k$ sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir (Boothby, 1986).

**Tanım 2.2.3:** $M$ bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $P \in M$ üzerinde bir vektör alanı diye

$$X : \quad M \to \bigcup_{P \in M} T_M(P)$$

birebir ve örten olarak tanımlanan $X$ fonksiyonuna denir ve $M$ üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 2.2.4:** $M$ bir $C^\infty$ manifold olsun. $M$ üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli $C^\infty$ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\langle \ , \ \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise $M$ ye bir Riemann manifoldu denir. Burada, $\langle , \rangle$ işlemine $M$ üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 2.2.5:** $M$ bir $C^\infty$ manifold olsun. $M$ üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} D : & \chi(M) \times \chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X, Y) & \to & D(X, Y) = D_X Y \end{array}$$

fonksiyonu için $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} i) \quad & D_{fX+gY}Z = fD_XZ + gD_YZ, \\ ii) \quad & D_X(fY) = fD_XY + (Xf)Y, \end{aligned}$$

özellikleri sağlanıyorsa $D$ ye $M$ manifoldu üstünde bir afin koneksiyon ve $D_X$ e de $X$ e göre kovaryant türev operatörü denir (O'Neill, 1966; Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

**Tanım 2.2.6:** $M$ yarı-Riemann manifoldu olsun. $M$ üstünde bir $D$ afin koneksiyonu

(1) $D$, $C^{\infty}$ sınıfındandır.

(2) $M$ nin bir $A$ bölgesi üzerinde, $C^{\infty}$ olan $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$D_XY - D_YX = [X, Y]$$

dir.

(3) $M$ nin bir $A$ bölgesi üzerinde, $C^{\infty}$ olan $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall P \in A$ için

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \langle D_XY, Z \rangle|_P + \langle Y, D_XZ \rangle|_P$$

özelliklerini sağlanıyorsa, $D$ koneksiyonuna, $M$ üstünde bir Riemann koneksiyonu ve $D_X$ e de $X$ e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir (O'Neill, 1966; Do Carmo, 1992).

**Tanım 2.2.7:** $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ topolojik uzaylar olmak üzere, $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ fonksiyonu verilsin. $\mathbf{Y}$ uzayının her açık alt kümesinin $F$ fonksiyonundaki ters görüntüsü, $\mathbf{X}$ uzayının açık bir alt kümesi ise, $F$ fonksiyonu süreklidir denir. $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ fonksiyonu birebir, örten ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $F^{-1} : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ fonksiyonu da sürekli ise, $F$ fonksiyonu $\mathbf{X}$ uzayından $\mathbf{Y}$ uzayına bir homeomorfizmdir, denir (Sabuncuoğlu, 2004).

$C^2$ yüzeyi, bu $F$ dönüşümünün $C^2$ sınıfından bir diffeomorfizm olmasıdır. Eğer bu $F$ analitik, holomorfik ya da bir seri fonksiyonu ise, bu durumda da yüzey analitik olarak isimlendirilir (Warner, 1983).

**Tanım 2.2.8:** $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında $(n-1)-$boyutlu bir hiperyüzey diye $\mathbb{E}^n$ deki boş olmayan bir $M$ cümlesine denir, öyle ki bu $M$ cümlesi

$$M = \left\{ x \in U \subset \mathbb{E}^n \middle| \begin{array}{lccl} f: & U & \overset{dif.bilir}{\longrightarrow} & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(x) = c \end{array}, \; U \text{ açık}, \; c = \text{sbt} \right\}$$

olmak üzere, $\nabla f|_P \neq 0$, her $P \in M$ biçiminde tanımlanır. Her $X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı $S$ dönüşümüne $M$ üzerinde şekil operatörü veya $M$ nin Weingarten dönüşümü denir (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 2.2.9:** $\mathbb{E}^n$ $n-$boyutlu Öklid uzayının bir $M$ hiperyüzeyi üzerinde, $q-$yuncu temel form diye, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere

$$\begin{array}{rlcl} I^q: & \chi(M) \times \chi(M) & \rightarrow & C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ & (X, Y) & \rightarrow & I^q(X, Y) = < S^{q-1}(X), Y > \end{array}$$

şeklinde tanımlı $I^q$ fonksiyonuna denir (Hacısalihoğlu, 1994).

**Tanım 2.2.10:** $\mathbb{E}^n$ $n-$boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey $M$ olsun. $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} K: & M & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \rightarrow & K(P) \;\; = \det S(P) \end{array}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $M$ nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de $M$ nin $P$ noktasındaki Gauss eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 2.2.11:** $\mathbb{E}^n$ $n-$boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey $M$ olsun. $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} H: & M & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \rightarrow & H(P) \;\; = iz\,(S(P)) \end{array}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $M$ nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de $M$ nin $P$ noktasındaki ortalama eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 2000).

**Tanım 2.2.12:** $\mathbb{E}^n$ de bir hiperyüzey $M$ ve $M$ üzerinde bir eğri $\alpha$ olsun. $\alpha$ nın teğet vektör alanı $T$ ve $M$ nin şekil operatörü $S$ olsun. Eğer $T$ vektör alanı $\alpha$ eğrisi boyunca $S$ nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa $\alpha$ eğrisine $M$ üzerinde bir eğrilik çizgisidir denir. (Hacısalihoğlu, 2000).

Bu tanıma göre $M$ üzerindeki eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemi, $\lambda \neq 0$ bir skalar olmak üzere, $S(T) = \lambda T$ dir. Ayrıca $S(T) = \lambda T$ ile

$$\begin{vmatrix} -dv^2 & dudv & du^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

aynı anlamdadır (Hacısalihoğlu, 2000; O'Neill, 1966).

**Teorem 2.2.13:** Parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olmasının gerek ve yeter şartı $F = f = 0$ olmasıdır (Shifrin, 2010; Vaisman, 1984).

**Teorem 2.2.14:** $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ yüzeyine ait $u_0$ ve $v_0$ alındığında elde edilen $\varphi(u_0, v)$ ve $\varphi(u, v_0)$ eğrileri, asli eğri ise, $\varphi(u, v)$ yüzeyine asli yüzey denir (Gray, 1993).

**Yardımcı teorem 2.2.15:** $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ yüzeyinin asli yüzey olmasının gerek ve yeter şartı $F = f = 0$ olmasıdır (Gray, 1993; Pressley, 2010).

## 2.3 Yarı-Riemann Manifoldları

Bu kısımda yarı-Riemann manifodlarına dair temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

**Tanım 2.3.1:** $M$ diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $M$ üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli $(0, 2)$-tipinden $g$ tensör alanına bir metrik tensör denir (O'Neill, 1983; Beem, et al., 1996).

Başka bir deyişle $g$, $M$ manifoldunun her $P$ noktasına $T_P M$ tanjant uzayı üzerinde bir $g_P$ skalar çarpım karşılık getirir ve $g$ skalar çarpımın indeksi her $P \in M$ için aynıdır.

**Tanım 2.3.2:** $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde her $P \in \mathbb{R}^n$ ve $v_P, w_P \in T_P\mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\langle v_P, w_P \rangle = \sum_{i=1}^{n-\upsilon} v_i w_i - \sum_{i=n-\upsilon+1}^{n} v_i w_i$$

eşitliğiyle verilen $\upsilon$-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya yarı-Öklidyen uzay denir ve $\mathbb{R}^n_\upsilon$ ile gösterilir. Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, sırasıyla, $v_i$ ve $w_i$ ler $v_P$ ve $w_P$ tanjant vektörlerin bileşenidir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.3:** $\mathbb{R}^n_\upsilon$ yarı-Öklidyen uzayında $\upsilon = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{R}^n_1$ yarı-Öklidyen uzayına Minkowski n-uzay denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.4:** $M$ diferensiyellenebilir bir manifold ve $g$ de $M$ üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere $(M, g)$ ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir (O'Neill, 1983; Beem, et al., 1996).

Bundan sonraki kullanımlarda $(M, g)$ yarı-Riemann manifoldunu, kısaca $M$ ile göstereceğiz.

**Tanım 2.3.5:** $M$ bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $g$ nin sabit indeksine $M$ yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.6:** $M$ bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $boyM \geq 2$ ve $M$ nin indeksi 1 ise $M$ ye bir Lorentz manifoldu denir.

Bu tanıma göre bir $M$ Lorentz manifoldu için

$$g_P(v_P, w_P) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i w_i - v_n w_n,\ P \in M,\ v_P, w_P \in T_P M$$

dir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.7:** $M$ bir Lorentz manifoldu ve $\alpha :\ I \subset \mathbb{R} \to M$ bir eğri olsun. $\alpha$ eğrisinin teğet vektör alanı $T$ olmak üzere,

**i**) $g(T,\ T) > 0$ ise $\alpha$ eğrisine spacelike eğri,

**ii**) $g(T,\ T) < 0$ ise $\alpha$ eğrisine timelike eğri,

**iii**) $g(T,\ T) = 0$ ve $T \neq 0$ ise $\alpha$ eğrisine null eğri denir (O'Neill, 1983).

Eğrinin özel bir hali olan doğru gözönüne alınırs. Doğrunun doğrultman vektörü spacelike ise doğru spacelike doğru, doğrultman vektörü timelike ise doğru timelike doğru, doğrultman vektörü null ise doğru null doğru olarak adlandırılır.

**Tanım 2.3.8:** $M$ bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}$, $M$ nin bir alt manifoldu olsun. $j : \overline{M} \to M$ inclusion dönüşümü olmak üzere her $P \in \overline{M}$ için

$$(j^*(g))(P) = g(j(P))$$

şeklinde tanımlı $j^*(g)$ dönüşümü $\overline{M}$ üzerinde bir metrik tensör ise $\overline{M}$ ye $M$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu denir.

Bundan sonraki gösterimlerde $\overline{M}$ üzerindeki metrik tensör ile $M$ üzerindeki metrik tensör $g$ ile gösterilecektir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.9:** $\overline{M}$, $M$ nin bir yarı Riemann altmanifoldu ve $M$ üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu $D$ olsun.

$$D : \chi(\overline{M}) \times \overline{\chi}(\overline{M}) \to \overline{\chi}(\overline{M})$$

indirgenmiş fonksiyonu $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifoldu üzerine indirgenmiş koneksiyon denir. Burada $\overline{\chi}(\ \overline{M}\ )$ ile $\overline{M}$ nin her bir $P$ noktasına $T_P M$ de bir tanjant vektör karşılık getiren vektör alanlarının $\Im(\overline{M})$ modülü gösterilmektedir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.10:** $\overline{M}$, $M$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve $M$ üzerinde Levi-Civita koneksiyonu $D$ olsun. Her $V$, $W \in \chi(\overline{M})$ için

$$\overline{D}_V W = \tan D_V W$$

şeklinde tanımlı $\overline{D}$ fonksiyonu $\overline{M}$ üzerinde bir Levi-Civita koneksiyonudur (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.11:** $\overline{M}$, $M$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{II} : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) & \to & \chi(\overline{M})^{\perp} \\ (V, W) & \to & \mathrm{II}(V, W) = nor D_V W \end{array}$$

şeklinde tanımlı $\Im(\overline{M})$-bilineer ve simetrik fonksiyonuna $\overline{M}$ nin şekil tensörü (veya ikinci temel form tensörü) denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.12:** $n$-boyutlu bir $M$ yarı-Riemann manifoldunun ($n$-1)-boyutlu bir $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifolduna $M$ nin yarı-Riemann hiperyüzeyi denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.13:** $M$ nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin birim normal vektör alanı $N$ olsun. Her $V$, $W \in \chi(\overline{M})$ için

$$g(S(V), W) = g(II(V, W), N)$$

şeklindeki (1,1)-tipinden tensör alanı $S$ ye $\overline{M}$ nin $N$ den elde edilen şekil operatörü denir. Diğer bir ifadeyle, $S$ şekil operatörü $\overline{M}$ nin her $P$ noktasında

$$S : T_P(\overline{M}) \to T_P(\overline{M})$$

bir lineer operatördür (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.14:** $M$ nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve $S$, $\overline{M}$ nin normali olan $N$ den elde edilen şekil operatörü olsun. Bu durumda $V \in \chi(\overline{M})$ için

$$S(V) = -D_V N$$

dir ve ayrıca $S$ şekil operatörü self-adjointdir.

$M$ nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ nin $N$ normalinden elde edilen şekil operatörü $S$ olmak üzere, her $V$, $W \in \chi(\overline{M})$ için

$$\mathrm{II}(V, W) = \varepsilon g(S(V), W)N$$

ve burada $\varepsilon = g(N, N)$ dir. Yarı-Riemann hiperyüzeyleri için Gauss denklemi; her $V$, $W \in \chi(\overline{M})$ olmak üzere

$$D_V W = \overline{D}_V W + \varepsilon g(S(V), W)N$$

şeklinde verilir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.15:** $M$ nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ nin normali olan $N$ den elde edilen şekil operatörü $S$ ve $\alpha : I \to \overline{M}$ eğrisinin teğet vektör alanı $T$ olmak üzere

$$g(S(T), T) = 0$$

ise $\alpha$ eğrisine asimptotik çizgi (eğri) denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.16:** $M$ nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ üzerindeki koneksiyon $\overline{D}$ ve $\alpha : I \to \overline{M}$ eğrisinin teğet vektör alanı $T$ olmak üzere

$$\overline{D}_T T = 0$$

ise $\alpha$ eğrisine $\overline{M}$ üzerinde bir jeodezik eğri denir (O'Neill, 1983).

### 2.3.1 Lorentz uzayı

Bu kısımda Lorentz uzayına dair temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

**Tanım 2.3.17:** $V$ bir vektör uzayı olsun. $V$ üzerinde tanımlı

$$g \ : \ V \times V \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve nondejenere ise $g$ ye $V$ üzerinde bir skalar çarpım, bu durumda $V$ vektör uzayına da bir skalar çarpım uzayı denir Ayrıca,

**i**) $\forall \ v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g\,(v, v) > 0$ ise, $g$ simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

**ii**) $\forall \ v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g\,(v, v) < 0$ ise, $g$ simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

**iii**) $\forall \ v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g\,(v, v) \geq 0$ ise bu durumda $g$ simetrik bilineer formuna yarı-pozitif tanımlı,

**iv**) $\forall \ v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g\,(v, v) \leq 0$ ise bu durumda $g$ simetrik bilineer formuna yarı-negatif tanımlıdır denir.

Bundan başka,

*a*) $g$ nin nondejenere olması için gerek ve yeter koşul $g\,(v, w) = 0$ ve $\forall \ w \in V$ için $v = 0$ olmasıdır.

*b*) $g$ nin dejenere olması için gerek ve yeter koşul $g\,(v, w) = 0$ ve $\forall \ w \in V$ için $v \neq 0$ olmasıdır (O'Neill, 1983; Duggal and Bejancu, 1996).

**Tanım 2.3.18:** $V$ bir skalar çarpım uzayı, $W$ alt cümlesi de üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde $V$ nin en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda $W$ nin boyutuna $g$ skalar çarpımın indeksi denir. $g$ skalar çarpımın indeksi $\nu$ ise $0 \leq \nu \leq boyV$ dir. Ayrıca $V$ skalar çarpım uzayının indeksi, $g$ skalar çarpımın indeksi olarak tanımlanır (O'Neill, 1983).

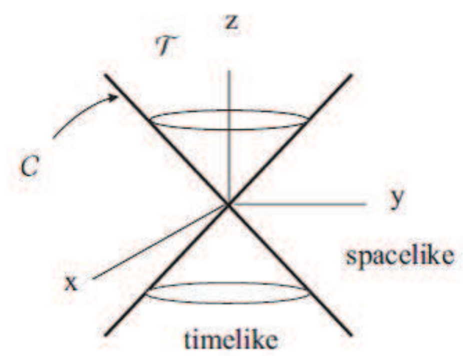
**Tanım 2.3.19:** $V$ bir Lorentz uzayı olsun. $v \in V$ için

**i)** $g(v,v) > 0$ veya $v = 0$ ise $v$ ye spacelike vektör,

**ii)** $g(v,v) < 0$ ise $v$ ye timelike vektör,

**iii)** $g(v,v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise $v$ ye null (lightlike) vektör

ve $\|v\| = |g(v,v)|^{1/2}$ reel sayısına $v$ vektörünün normu denir. $V$ Lorentz uzayında tüm timelike vektörlerin cümlesi $\Gamma$ olsun.




Şekil 2.1

$u \in \Gamma$ için

$$C(u) = \{v \in \Gamma \mid g(v,u) < 0\}$$

kümesine $u$ vektörünü kapsayan $V$ Lorentz uzayının time-konisi denir. Minkowski uzayında vektörlerin kausal karakterinin grafiğidir Şekil 2.1 ile verilmiştir (O'Neill, 1983; Duggal and Bejancu, 1996; Weinstein, 1995).

**Teorem 2.3.20:** $V$ bir Lorentz uzayı ve $v$, $\omega$ iki timelike vektör olsun. Bu durumda

**i)** $|g(v,w)| \geq \|v\| . \|w\|$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart $v$ ve $w$ vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.

**ii**) $v,\ w$ timelike vektörleri aynı time-konide ise

$$g\left(v,w\right)=-\left\|v\right\|.\left\|w\right\|ch\varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi\geq 0$ sayısı vardır. Bu $\varphi$ sayısına $v$ ve $w$ timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir.

Burada $v$ ve $w$ vektörleri aynı time-konide değilseler o zaman

$$\left|g\left(v,w\right)\right|=\left\|v\right\|.\left\|w\right\|ch\varphi$$

dir.

$V$ Lorentz uzayında spacelike vektörler $v$ ve $w$ olmak üzere

$$\cos\theta=\frac{g(v,w)}{\left\|v\right\|.\left\|w\right\|}$$

olacak şekilde bir tek $0\leq\theta\leq\pi$ sayısı vardır. Bu sayıya $v$ ve $w$ spacelike vektörler arasındaki açı denir. $v$ ve $w$ spacelike vektörler için

$$g\left(v,w\right)\leq\left\|v\right\|.\left\|w\right\|$$

eşitsizliği vardır.

**Tanım 2.3.21:** $V$ bir Lorentz uzayı ve $W$, $V$ nin bir altuzayı olsun. Bu durumda

$g|_w$ pozitif tanımlı ise $W$ ya spacelike altuzay,

$g|_w$ nondejenere ve indeksi 1 ise $W$ ya timelike altuzay ve

$g|_w$ dejenere ise $W$ ya lightlike altuzay denir (O'Neill, 1983; Duggal and Bejancu, 1996).

**Teorem 2.3.22:** $V$ bir Lorentz uzayı, $V$ nin bir altuzayı $W$ ve $boyW\geq 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler birbirine denktirler:

**i**) $W$ timelike uzay ise $W$ bir Lorentz vektör uzayıdır.

**ii**) $W$ uzayı iki tane lineer bağımsız null vektör içerir.

**iii**) $W$ uzayı bir tane timelike vektör içerir (O'Neill, 1983; Duggal and Bejancu, 1996).

## $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayı üzerinde vektörel çarpım

**Tanım 2.3.23:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör $v$ ve $\omega$ olsun. $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ olmak üzere

$$(v_3\omega_2 - v_2\omega_3, \quad v_1\omega_3 - v_3\omega_1, \quad v_1\omega_2 - v_2\omega_1)$$

vektörüne $v$ ve $\omega$ nin vektörel çarpımı (veya dış çarpım) denir. $v \times \omega$ veya $v \wedge \omega$ şeklinde gösterilir (Akutagawa and Nishikawa, 1990).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \quad ise \\ 0, & i \neq j \quad ise \end{cases} \quad \text{ve} \quad e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$v \wedge \omega = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$v \wedge \omega = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Burada

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = -e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = -e_2$$

dir. Saat yönünün ters yönü pozitif yön olarak alınmıştır. Saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilecek olursa

$$e_1 \wedge e_2 = -e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

şeklinde olur. Bu durumda

$$v \wedge \omega = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

**Tanım 2.3.24:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında üç vektör $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{lll} \textbf{i)} & \langle u \wedge v, \omega \rangle & = -\det(u, v, \omega) \\ \textbf{ii)} & (u \wedge v) \wedge \omega & = -\langle u, \omega \rangle v + \langle v, \omega \rangle u \\ \textbf{iii)} & \langle u \wedge v, u \rangle & = 0 \ \text{ ve } \ \langle u \wedge v, v \rangle = 0 \\ \textbf{iv)} & \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle & = -\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + (\langle u, v \rangle)^2 \end{array}$$

dir (Ryan, 1986).

**Tanım 2.3.25:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $a$, $b$, $c$, $d$ vektörleri için

$$\langle (a \times b), (c \times d) \rangle = -\langle a, c \rangle \langle b, d \rangle + \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$$

özdeşliği geçerlidir (Kaya, 2002; Sodsiri, 2005).

**Teorem 2.3.26:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında iki vektör $u$ ve $v$ olsun.

**i**) $u$ ve $v$ spacelike vektör ise $u \wedge v$ bir timelike vektördür.

**ii**) $u$ spacelike ve $v$ timelike vektör ise $u \wedge v$ bir spacelike vektördür.

**iii**) $u$ spacelike ve $v$ null vektör olmak üzere $< u, v >= 0$ ise $u \wedge v$ null vektör, eğer $< u, v > \neq 0$ ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

**iv**) $u$ ve $v$ null vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

**v**) $u$ timelike ve $v$ null vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

**vi**) $u$ ve $v$ timelike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür (Ryan, 1986).

**Yardımcı Teorem 2.3.27:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında, aşağıdaki özellikler sağlanır:

**i**) İki timelike vektör asla ortogonal olamaz.

**ii**) Bir timelike vektör, bir null vektöre asla ortogonal olamaz.

**iii**) İki null vektör ortogonaldir ancak ve ancak bu vektörler lineer bağımlıdır (Greub, 1981).

### 2.3.2 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında spacelike ve timelike yüzeyler

$M$, $\mathbb{E}_1^3$ de bir yüzey ve $\varphi : M \to \mathbb{E}_1^3$ bir immersiyon olsun. Yani $\varphi$, diferensiyellenebilir dönüşüm ve $\forall P \in M$ için $d\varphi_P : T_P(M) \to T_{\varphi(P)}(\mathbb{E}_1^3)$ birebirdir. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\langle , \rangle_P$ Lorentz metriğinin $\varphi$ ile geri getirilmişi $g_P$ olsun. Buna göre $g_P = \varphi^*(\langle , \rangle_P)$ olduğundan $\forall u, v \in T_P(M)$ olmak üzere

$$g_P(u, v) = \langle u, v \rangle_P = \langle d\varphi_P(u), d\varphi_P(v) \rangle$$

olur. Burada $T_P(M)$ uzayı üç tipte olabilir:

**i**) $g_P$ pozitif tanımlı ise $T_P M$ spacelike düzlemdir.

**ii**) $g_P$ metriğinin indeksi 1 ise $T_P M$ timelike düzlemdir.

**iii**) $g_P$ dejenere metrik ise $T_P M$ lightlike düzlemdir.

**Tanım 2.3.28:** Teğet düzlemleri spacelike (veya timelike, lightlike) olan immersiyona spacelike (veya timelike, lightlike) denir (Lopez, 2008).

$M$ yüzeyi içinde $\varphi(U)$ diferensiyellenebilir yüzeyi için $Q \in U$ ve $\varphi(Q) = P$ olmak üzere

$$\varphi_u(Q) = \varphi_* \left( \frac{\partial}{\partial u}(Q) \right), \qquad \varphi_v(Q) = \varphi_* \left( \frac{\partial}{\partial v}(Q) \right)$$

olarak tanımlanır. $\{\varphi_u(Q), \varphi_v(Q)\}$ kümesi $T_P M$ uzayının bir tabanıdır.

$$\{\varphi_u(Q), \varphi_v(Q)\}$$

tabanının denklik sınıfını, $T_P M$ vektör uzayının pozitif yönü olarak alacağız. Böylece $\varphi(U)$ basit yüzeyinin her bir $P$ noktasındaki teğet düzlemi yönlendirilmiş olur. $\varphi(U)$ basit yüzeyinin her bir $P$ noktasında $\{\varphi_u(Q), \varphi_v(Q), N(P)\}$ kümesi $T_P\mathbb{R}^3$ uzayının pozitif yönlü bir tabanı olacak biçimde $\varphi(U)$ üstünde, $N$ birim normal vektör alanı tek olarak belirlidir ve

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

dir. Bu $N$ vektör alanına $\varphi(U)$ basit yüzeyinin pozitif yönlü birim normal vektör alanı diyeceğiz.

$N$, $\varphi(U)$ basit yüzeyinin pozitif yönlü birim normal vektör alanı ise,

$$\{\varphi_u(Q), \varphi_v(Q), -N(P)\}$$

kümesi $T_P\mathbb{R}^3$ uzayının negatif yönlü bir çatı alanı olur. $-N$ vektör alanına, $\varphi(U)$ basit yüzeyinin negatif yönlü birim normal vektör alanı denir.

$\mathbb{R}^3$ uzayında bir $M$ yüzeyini gözönüne alalım. $P \in M$ olsun, $P$ noktasını içeren en az bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunduğunu biliyoruz. Buna göre, $P$ noktasında $\varphi(U)$ basit yüzeyinden elde edilen pozitif yönlü bir $N(P)$ birim normal vektörü vardır. $P$ noktasında, $P$ noktasını içeren başka bir $\varphi^*(H)$ basit yüzeyine göre de pozitif yönlü $Y(P)$ birim normal vektör alanı vardır.

$$Y(P) = N(P) \qquad \text{veya} \qquad Y(P) = -N(P)$$

olduğu açıktır (Lopez, 2008).

**Tanım 2.3.29:** $M$ bir yüzey $\mathbb{E}_1^3$ üzerindeki doğal koneksiyon $D$, $M$ üzerindeki koneksiyon $\nabla$ olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için Gauss eşitliği

$$D_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y)$$

şeklindedir. Burada $\nabla_X Y \in \chi(M)$ ve $II(X, Y) \in \chi(M)^{\perp}$ dir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.30:** $M$ bir yüzey olsun. $u_P, v_P \in T_P M$ olmak üzere $M$ nin her bir $P$ noktasını

$$I_P = \langle , \rangle_P : T_P M \times T_P M \to \mathbb{R}, \qquad I_P(u_P, v_P) = \langle u_P, v_P \rangle \tag{2.1}$$

fonksiyonuna karşılık getiren $I_P$ fonksiyonuna, $M$ üzerinde birinci temel form denir. $M$ nin her bir $P$ noktasına

$$II_P = \langle , \rangle_P : T_P M \times T_P M \to \mathbb{R}, \qquad II_P(u_P, v_P) = \langle S(u_P), v_P \rangle \tag{2.2}$$

fonksiyonunu karşılık getiren $II_P$ fonksiyonuna, $M$ üzerinde ikinci temel form denir (Lopez, 2008).

**Tanım 2.3.31:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. Her $P \in \overline{M}$ ve her $\omega_P \in T_P\overline{M}$, $v_P \in T_P\overline{M}$ için

$$< v_P, \omega_P >= 0 \Rightarrow v_P = 0$$

önermesi sağlanıyorsa $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ uzayında bir nondejenere yüzey denir (Beem, et al., 1996). $\overline{M}$ yüzey üzerindeki metriğin matris formu

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

dir. $\overline{M}$ yüzeyi üzerindeki metriğinin nondejenere olması için gerek ve yeter şart

$$det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \neq 0$$

olmasıdır.

Bir başka ifadeyle, $\overline{M}$ yüzeyinin nondejenere yüzey olması için gerek ve yeter şart, yüzeyin normalinin null vektör alanı olmamasıdır (Turgut, 1995).

**Tanım 2.3.32:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzey üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\overline{M}$ ye $\mathbb{R}_1^3$ de bir spacelike yüzey denir (Beem, et al., 1996).

**Teorem 2.3.33:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $\overline{M}$ yüzeyinin spacelike bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzey normalinin timelike bir vektör alanı, yani $\langle N, N \rangle < 0$ olmasıdır (Turgut, 1995).

**Tanım 2.3.34:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz Metriği ise $\overline{M}$ ye timelike yüzey denir (Beem, et al., 1996).

**Teorem 2.3.35:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $\overline{M}$ yüzeyinin timelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzey normalinin spacelike bir vektör alanı, yani $\langle N, N \rangle > 0$ olmasıdır (Turgut, 1995).

**Tanım 2.3.36:** $M$, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir yüzey ve bu yüzeyin birim normal vektör alanı $N$ olsun. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayının koneksiyonu $D$ olmak üzere,

$\forall X \in \chi(M)$ için

$$\begin{array}{rcccl} S & : & \chi(M) & \to & \chi(M) \\ & & X & \to & S(X) \;= D_X N \end{array} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlı, $S$ dönüşümüne $M$ üzerinde şekil operatörü veya $M$ nin Weingarten dönüşümü denir (Görgülü and Çöken, 1994).

**Tanım 2.3.37:** $M$ yüzeyi $\mathbb{E}_1^3$ de bir yüzey ve $M$ nin birim normal vektör alanı $N$ ve şekil operatörü $S$ olsun. $P \in M$ ve $\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} K & : & M & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \to & K(P) \;= \varepsilon \det S_P \end{array} \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $M$ nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de $M$ nin $P$ noktasındaki Gauss eğriliği denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.38:** $M$ yüzeyi $\mathbb{E}_1^3$ de bir yüzey ve $M$ nin birim normal vektör alanı $N$ ve şekil operatörü $S$ olsun. $P \in M$ ve $\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} H & : & M & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \to & H(P) \;= \dfrac{\varepsilon}{2} iz S_P \end{array} \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $M$ nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de $P$ noktasındaki ortalama eğriliği denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.3.39:** $M$ yüzeyinin parametrik denklemi $X = X(u, v)$ olsun. Her bir noktada teğet düzlemin tabanı $B = \{X_u, X_v\}$ olmak üzere

$$E = \langle X_u, X_u \rangle\,, \qquad F = \langle X_u, X_v \rangle\,, \qquad G = \langle X_v, X_v \rangle \tag{2.6}$$

$E, F, G : U \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlarına birinci temel formun katsayıları denir. Bu takdirde birinci temel form

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} e &= -\langle X_u, N_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle \\ f &= -\langle X_u, N_v \rangle = -\langle X_v, N_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle \\ g &= -\langle X_v, N_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle \end{aligned} \tag{2.7}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonlarına da ikinci temel formun katsayıları denir. Bu takdirde ikinci temel form

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilir. $\mathcal{F}_I$ ve $\mathcal{F}_{II}$, $2 \times 2$ simetrik matrisleri

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}, \mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $M$ yüzeyinin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği, sırasıyla,

$$H = \varepsilon \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \tag{2.10}$$

$$K = \varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{2.11}$$

şeklindedir (Lopez, 2008; Pressley, 2010).

**Teorem 2.3.40:** $\varphi(u, v)$, $\mathbb{E}_1^3$ de bir yüzey ve $\varphi$ nin birim normal vektör alanı $N$ ve şekil operatörü $S$ olsun. $\varphi$ ye ait $S$ şekil operatörünün $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ tabanı cinsinden eşitleri

$$-S(\varphi_u) = N_u = \frac{fF - eG}{EG - F^2}\varphi_u + \frac{eF - fE}{EG - F^2}\varphi_v \tag{2.12}$$

$$-S(\varphi_v) = N_v = \frac{gF - fG}{EG - F^2}\varphi_u + \frac{fF - gE}{EG - F^2}\varphi_v \tag{2.13}$$

dir (Sodsiri, 2005)

**Yardımcı Teorem 2.3.41:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $M$ yüzeyi üzerindeki bir $P$ noktasının umbilik olmasının gerek ve yeter şartı

$$\frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g} \tag{2.14}$$

dir (Gray, 1993; Hou and Ji, 2007).

### 2.3.3 Regle yüzeyler

Bu kısımda regle yüzeylere ait bazı kavramların $\mathbb{E}_1^3$ 3-Boyutlu Minkowski uzayındaki karşılıkları verilmiştir.

**Tanım 2.3.42:** $M \subset \mathbb{E}_1^3$ yüzeyi verilsin. her $P \in M$ noktasında, $\mathbb{E}_1^3$ ün $M$ de kalan bir doğrusu var ise $M$ ye bir regle yüzey denir ve $P \in M$ noktasından geçen ve $M$ de kalan doğruya da $M$ nin bir doğrultmanı denir (Turgut, 1995).

$\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında verilen bir $l$ doğrusunun, verilen bir $\alpha$ eğrisi boyunca hareket ettirilmesiyle elde edilen yüzeye 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzey denir. Bu durumda verilen $l$ doğrusuna, regle yüzeyin bir anadoğrusu ve verilen $\alpha$ eğrisine, regle yüzeyin dayanak eğrisi denir (Turgut, 1995; Prakash, 1981).

**Sonuç 2.3.43:** $\mathbb{E}_1^3$, 3−boyutlu Minkowski uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\begin{aligned} \alpha: \quad & I \rightarrow \mathbb{E}_1^3 \\ & t \rightarrow \alpha(u) = \left(\alpha_1\left(u\right), \alpha_2\left(u\right), \alpha_3\left(u\right)\right) \end{aligned}$$

olsun. Her $u \in I$ için $\alpha(u)$ noktasındaki $T_{\alpha(u)}$ teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$\begin{aligned} l: \quad & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3 \\ & v \rightarrow l(v) = (\alpha_1(u) + vX_1(u), \alpha_2(u) + vX_2(u), \alpha_3(u) + vX_3(u)) \end{aligned}$$

doğrusunu seçelim. Burada $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $X_i(u) \in \mathbb{R}$ skalarları $\alpha(u)$ noktasındaki doğrultman vektörünün bileşenleridir. $l$ doğrusunun $\alpha$ eğrisi boyunca hareket etmesiyle, $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen

$$\begin{aligned} \varphi: \quad I \times \mathbb{R} \quad & \rightarrow \quad \mathbb{E}_1^3 \\ (u, v) \quad & \rightarrow \quad \varphi(u, v) = (\alpha_1(u)+vX_1(u), \alpha_2(u)+vX_2(u), \alpha_3(u)+vX_3(u)) \end{aligned}$$

$\varphi\left(u, v\right) = \overrightarrow{\alpha}\left(u\right) + v\overrightarrow{X}\left(u\right)$ olacak şekilde bir regle yüzey elde edilir (Turgut, 1995).

**Tanım 2.3.44:** Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir.

$$P_X = \frac{\det(T, X, X')}{\left\|X'\right\|^2} \tag{2.15}$$

şeklinde ifade edilir (Turgut, 1995).

**Tanım 2.3.45:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir (Turgut, 1995).

**Tanım 2.3.46:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey verilsin. Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusunun ortak dikmesi varsa, bu dikmenin esas anadoğrusu üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası denir (Turgut, 1995).

**Tanım 2.3.47:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzeyin anadoğrusunun, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine, regle yüzeyin boğaz çizgisi (striksiyon eğrisi) denir (Turgut, 1995).

**Tanım 2.3.48:** Bir $\varphi(u,v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının $\bar{\alpha}$ yervektörü, dayanak eğrisinin $\vec{\alpha}(u)$ yervektörü, $X(u)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan $\bar{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\bar{\alpha}(u,\bar{u}) = \alpha(u) + \bar{u}X(u)$$

şeklinde ifade edilir. $\bar{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yervektörü ve doğrultmanı cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi

$$X(u) \text{ ve } X(u) + dX(u)$$

olan komşu üç anadoğrusunu seçelim. Burada $P$ ve $Q$ farklı iki boğaz noktası olmak üzere,

$$\bar{\alpha}(u,\bar{u}) = \alpha(u) - \frac{< \dfrac{dX}{ds}, T >}{\left\| \dfrac{dX}{ds} \right\|^2} X(u), \quad \alpha'(u) = T$$

bulunur (Turgut, 1995).

**Tanım 2.3.49:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin anadoğrularının her birini dik olarak kesen bir eğri varsa, bu eğriye regle yüzeyin bir ortogonal yörüngesi denir (Turgut, 1995).

**Spacelike regle yüzey**

$M$ spacelike regle yüzeyin ortonormal çatısı $\{T,\ X,\ N\}$ olsun. Bu durumda

$$< T,T >=< X,X >= 1, \quad < N,N >= -1 \text{ ve } < D_T N,N >= 0 \qquad (2.16)$$

dır. $\{T,\ X,\ N\}$ çatısının türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T X \\ D_T N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ N \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

dir (Turgut, 1995).

**Teorem 2.3.50:** $M$ spacelike bir regle yüzey olsun. $M$ nin dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı $T$, anadoğrusunun birim teğet vektör alanı (doğrultman vektörü) $X$ ve yüzeyin birim normal vektör alanı $N$ olmak üzere

$$T \wedge X = N, \ T \wedge N = X, \ X \wedge N = -T \qquad (2.18)$$

dir (Turgut, 1995).

**Timelike regle yüzey**

Dayanak eğrisi spacelike ve anadoğruları timelike olan $M$ timelike regle yüzeyinin ortonormal çatısı $\{T,\ X,\ N\}$ olsun. Bu durumda

$$< T,T >=< X,X >= -1, \ < N,N >= 1 \text{ ve } < D_T N,N >= 0 \qquad (2.19)$$

ve $\{T,\ X,\ N\}$ çatısının türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T X \\ D_T N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ -b & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ N \end{bmatrix} \qquad (2.20)$$

dir (Turgut, 1995).

**Teorem 2.3.51:** $M$ timelike bir regle yüzey olsun. $M$ nin dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı $T$, anadoğrunun birim teğet vektör alanı $X$ ve yüzeyin birim normal vektör alanı $N$ olmak üzere

$$T \wedge X = N,\ T \wedge N = X,\ X \wedge N = T \tag{2.21}$$

dir (Turgut, 1995).

Dayanak eğrisi timelike ve anadoğruları spacelike $M$ timelike regle yüzeyinin ortonormal çatısı $\{T,\ X,\ N\}$ olsun. Bu durumda

$$< T, T >= -1,\ \ < X, X >= 1,\ < N, N >= 1 \tag{2.22}$$

dir ve $\{T,\ X,\ N\}$ çatısının türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T X \\ D_T N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ N \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

dir (Turgut, 1995).

**Teorem 2.3.52:** $M$ timelike bir regle yüzey olsun. $M$ nin dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı $T$, anadoğrunun birim teğet vektör alanı $X$ ve yüzeyin birim normal vektör alanı $N$ olmak üzere

$$T \wedge X = N,\ T \wedge N = -X,\ X \wedge N = -T \tag{2.24}$$

dir (Turgut, 1995).

### 2.3.4 Paralel yüzeyler

Bu kısımda paralel yüzeylerle ilgili $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında var olan bazı kavramlar verilmiştir.

**Tanım 2.3.53:** $M_1$ ve $M_2$, $\mathbb{E}_1^3$ ün iki hiperyüzeyi ve $M_1$ in birim normal vektör alanı

$$N_1 \ = \ \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad a_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olsun. Eğer bir $r \in \mathbb{R}$ sabit sayısı ve her $P \in M_1$ için

$$f(P) = (P_1 + ra_1(P), P_2 + ra_2(P), .., P_n + ra_n(P))$$

olacak şekilde bir

$$f : M_1 \to M_2$$

fonksiyonu bulunabiliyorsa, $M_2$ ye $M_1$ in paralel hiperyüzeyi denir (Görgülü and Çöken, 1994).

Bundan sonra, $\mathbb{E}_1^3$ ün $M$ hiperyüzeyine paralel olan hiperyüzeyi $M^r$ ile göstereceğiz. Buradaki $r$ indisi $r \in \mathbb{R}$ sabit sayısını belirtir. $M$ nin birim normal vektör alanını $N$, şekil operetörünü $S$ ve $M^r$ nin birim normal vektör alanını $N^r$, şekil operatörünü de $S^r$ ile göstereceğiz. O halde $N^r = N_1$ yani

$$N^r = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \overline{a}_i\left(f(P)\right) = a_i(P)$$

olacaktır (Görgülü and Çöken, 1994).

**Tanım 2.3.54:** $\mathbb{E}_1^3$ ün $M$ hiperyüzeyine paralel $M^r$ hiperyüzeyi verilsin. $\mathbb{E}^n$ öklid uzayının $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre; $X \in \chi(M)$, $\overline{X} \in \chi(M^r)$ vektör alanları

$$X = \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \overline{X} = \sum_{i=1}^{3} \overline{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

öyleki, her $P \in M$ için $b_i(P) = \overline{b}_i(f(P))$, $1 \leq i \leq n$, özelliği ile verilsin. O zaman

$$1) \quad f_*(X) = X + rS(X)$$

$$2) \quad S^r\left(f_*(X)\right) = S(X)$$

dir (Görgülü and Çöken, 1994).

**Teorem 2.3.55:** $f : M \to M^r$ olmak üzere, $M$ nin bir paralel hiperyüzeyi $M^r$ olsun. O zaman

**(1)** $f$ üçüncü temel form olma özelliğini korur.

**(2)** $f$ umbilik nokta olma özelliğini korur.

**(3)** $f$ asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.

**(4)** $M$ nin temel formları, sırasıyla, $I, II, III$ ile gösterilmek üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall P \in M$ için

$$\langle f_*(X), f_*(Y)\rangle|_{f(P)} \;=\; I(X_P, Y_P) + 2rII(X_P, Y_P) + r^2 III(X_P, Y_P)$$

dir (Görgülü and Çöken, 1994).

**Tanım 2.3.56:** $M$, $\overline{M}$ nin $\mathbb{E}_1^3$ de bir hiperyüzeyi ve $M^r$ de $M$ nin paralel hiperyüzeyi olsun. Eğer $\sigma$ eğrisi, $M$ deki bir $P$ noktasından geçer ve $T$ de $M$ üzerindeki $\sigma$ nın teğet vektör alanı olursa, bu durumda $\sigma^r = f \circ \sigma$ $M^r$ üzerindeki $f(P)$ noktasından geçen bir eğridir ve $f_*(T) \in T_{f(P)}M^r$, $f(P)$ noktasında $\sigma^r$ nin teğetidir. $D^r$, $M$ nin paralel hiperyüzeyine ait koneksiyon ve $N^r$ vektörü $\langle N^r, N^r\rangle = \varepsilon = \pm 1$ olacak şekilde $M^r$ yüzeyinin birim normal vektörü olsun, bu durumda Gauss denklemi,

$$\overline{D}_{f_*(T)} f_*(T) = D^r_{f_*(T)} f_*(T) - \varepsilon \left\langle S^r(f_*(T)), f_*(T)\right\rangle N^r \tag{2.25}$$

dir (Güneş, 1996; O'Neill, 1966).

### 2.3.5 Weingarten yüzeyler

Bu kısımda Weingarten yüzey tanımı ve Weingarten yüzey olma şartı verilmiştir.

**Tanım 2.3.57:** $M \subset \mathbb{E}_1^3$ yüzeyinin Weingarten yüzeyi olması için yüzeyin $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğrilikleri arasında

$$\Phi(K, H) = 0 \tag{2.26}$$

olacak şekilde fonksiyonel bir $\Phi$ bağıntısının var olması veya bununla özdeş olarak, $H$ ve $K$ eğriliklerinin türevleri lineer bağımsız ise $M$ yüzeyine Weingarten yüzey denir (Sodsiri, 2005).

**Teorem 2.3.58:** $M \subset \mathbb{E}_1^3$ bir yüzey olsun. Bu yüzeyin Gauss eğriliği $K$ ve ortalama eğriliği $H$ olmak üzere,

$$K_u H_v - K_v H_u = 0 \tag{2.27}$$

eşitliği sağlanıyorsa $M$ yüzeyi, Weingarten yüzeydir (Dillen and Kühnel, 1999).

## 2.4 Regle Weingarten Yüzeyler

Bu kısımda $\mathbb{E}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayı ile $\mathbb{E}^3_1$ 3-boyutlu Minkowski uzayındaki regle Weingarten yüzeyleri, (Kühnel, 1994) ile (Dillen and Kühnel, 1999) çalışmaları çerçevesinde ele alınmış, adı geçen ikinci çalışmadaki durumlar özel durum olarak, spacelike regle Weingarten, timelike doğrultmanlı timelike regle Weingarten, spacelike doğrultmanlı timelike regle Weingarten ve null doğrultmanlı timelike regle Weingarten yüzeyler olarak dört ayrı durumda incelenmiştir.

### 2.4.1 $\mathbb{E}^3$ 3- boyutlu Öklid uzayında regle Weingarten yüzeyler

$\mathbb{E}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında regle Weingarten yüzeyler cümlesi, helikoidsel regle yüzeyler cümlesine karşılık gelir (Beltrami, 1865; Dini, 1865). Bu çerçevede helikoidsel yüzeylerle ilgili genel bir bilgi verelim:

Bir eğrinin helisel bir hareket sonucu oluşturacağı yüzeye helikoid denir. Bir noktanın helisel hareketi, sabit bir doğru etrafında dönerken, bu doğrunun doğrultusunda, dönme açısı ile orantılı olarak ötelenmesi sonucu oluşan harekettir. Sabit doğruya, helisel hareketin ekseni, ötelenme miktarının dönme açısına oranı olan "$a$" sabitine helisel hareketin "parametresi" denir (Uras, 1992).

Eğer $a = 0$ ise -ötelenme olmayacağından- sadece dönme hareketi elde edilir. Bu şekilde elde edilen yüzeylere dönel yüzey denir ve eksenden geçen her düzlemle yüzeyin arakesit eğrisi daima aynı eğri olur. Bu eğriye yüzeyin meridyeni denir. Bir helikoidin ekseninden geçen her düzlemle arakesitinin aynı eğri olacağı doğaldır. O halde herbir helikoid, düzlemsel bir eğrinin helisel hareketi ile elde edilebilir. Bu eğriyede helikoidin meridyeni denir.

Genel bir helikoidin parametrik denklemi şöyle elde edilir; helisin ekseni $Oz$ koordinat ekseni olarak alınır ve bir $O\alpha z$ meridyen düzlemi içinde meridyenin denkleminin $z = f(\alpha)$ şeklinde verildiğini varsayalım. Buna göre, dönel yüzeylerdeki gibi hareket ettirilerek, bir genel helikoidin parametrik denklemi;

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u) + av)$$

şeklinde yazılabilecektir. $f(u) = sbt.$ olması özel halinde, eksene dik bir doğrunun helisel hareketi ile oluşan ve dik helikoid olarak adlandırılan yüzey elde edilmiş olur (Uras, 1992).

**Teorem 2.4.1:** Açılabilir olmayan bir $\varphi$ regle yüzeyi için, aşağıdaki koşullar özdeştir;

(**i**) $\varphi$ bir Weingarten yüzeydir.

(**ii**) $Q, J, F$ büyüklükleri sabittirler.

(**iii**) $Q, J, F$ sabitleri için; $2H\sqrt{\pm Q} = \sqrt[4]{-K}(J \pm F\sqrt{-K})$ dir. Bu ifadenin işareti, $Q$ nun işaretidir.

(**iv**) $\varphi$ bir doğrunun helikoidsel hareketiyle tanımlanan klasik bir helikoid yüzeyidir (Kühnel, 1994).

$J = 0$ veya $F = 0$ olduğu durumlarda, Teorem 2.4.1 in (iii) ifadesinden

$$J = 0 \quad \Rightarrow \quad 2H\sqrt[4]{Q^2} = -\frac{QF}{|Q|}\sqrt{-K}\sqrt[4]{-K}$$

$$\Rightarrow \quad -K^3 = \frac{16H^4Q^2}{F^4}$$

veya

$$F = 0 \quad \Rightarrow \quad 2H\sqrt[4]{Q^2} = J\sqrt[4]{-K}$$

$$\Rightarrow \quad -K = 16\frac{Q^2}{J^4}H^4$$

basit denklemlerini elde ederiz. $J = F = 0$ olduğu durumda, $H = 0$ olur. Bu da sağ helikoiddir. Sağ helikoid, $H = 0$ olan tek regle minimal yüzeydir.

### 2.4.2 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında regle Weingarten yüzeyler

Bu kısımda $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayındaki regle Weingarten yüzeyine dair temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

**$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında helikoidsel regle yüzeyler**

Bu kısımda, helikoidsel regle yüzey, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında ele alınmıştır.

**Önerme 2.4.2:** $\mathbb{E}_1^3$ uzayındaki basit (trivial) olmayan Lorentz hareketinin bir parametreli bütün durumları:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & \sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} hs \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ hs \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1+\frac{s^2}{2} & -\frac{s^2}{2} & s \\ \frac{s^2}{2} & 1-\frac{s^2}{2} & s \\ s & -s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{s^3}{3}+s \\ \frac{s^3}{3}-s \\ s^2 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir (Dillen and Kühnel, 1999).

**Tanım 2.4.3:** $M$, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında helikoidsel bir yüzey, bir parametreli Lorentziyen vida hareketlerinin grubu altındaki, $X = X(u)$ düzlem eğrisinin yörüngesidir. Eğer $X$ düzlem eğrisi, bir doğruysa, bu durumda $M$ yüzeyine helikoidsel regle yüzey denir (Sodsiri, 2005).

**Teorem 2.4.4:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $\varphi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$ parametrizasyonuyla verilen regle yüzeyin $Q$, $J$, $F$ parametreleri şu şekilde tanımlanır:

$$Q = \det(\alpha', X, X') \tag{2.28}$$

$$J = \det(X'', X', X) \tag{2.29}$$

$$F = \langle \alpha', X \rangle \tag{2.30}$$

(Kühnel, 2002; Dillen and Kühnel, 1999).

**Teorem 2.4.5:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $\varphi$ regle yüzeyinin Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter şart $Q, J, F$ invaryantlarının sabit olmasıdır (Sodsiri, 2005).

**1. Durum:** 1. tip helikoid, spacelike eksen etrafındaki vida hareketi sonucu oluşan yüzeydir. Bu yüzey Öklid uzayındaki sağ helikoidle aynı denkleme sahiptir.

**2. Durum:** 2. ve 3. çeşit helikoid olarak adlandırılan yüzeydir. Bu yüzeyler, doğrultmanın durumuna (spacelike ya da timelike ) bağlıdır.

3. tip helikoid, timelike yüzeydir, diğer iki helikoid ise, spacelike ve timelike bir yüzey parçasına sahiptirler.

Helikoidsel regle yüzeyler ile bu yüzeylerin spacelike ya da timelike yüzey olma şartları aşağıdaki örneklerde incelenmiştir.

**Örnek 2.4.6 (1. Çeşit helikoid):** Spacelike eksen etrafındaki vida hareketi sonucu oluşan, $a \neq 0$ için, $M$ yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında

$$\varphi(u, v) = (au,\ v\cos u,\ v\sin u).$$

parametrizasyonuyla verilsin. Bu yüzey, $v \in (-\infty, -a) \cup (+a, +\infty)$ için spacelike yüzey, $v \in (-a, +a)$ içinse timelike yüzeydir.

**Örnek 2.4.7 (2. Çeşit helikoid):** Timelike eksen etrafındaki vida hareketi sonucu oluşan, spacelike doğrultmanlı $a \neq 0$ için, $M$ yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında

$$\varphi(u, v) = (v\sinh u,\ v\cosh u,\ au).$$

parametrizasyonuyla verilsin. Bu yüzey, $v \in (-a, +a)$ için spacelike yüzey, $v \in (-\infty, -a) \cup (+a, +\infty)$ içinse timelike yüzeydir.

**Örnek 2.4.8 (3. Çeşit helikoid):** Timelike eksen etrafındaki vida hareketi sonucu oluşan, timelike doğrultmanlı $a \neq 0$ için, $M$ yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında

$$\varphi(u, v) = (v \cosh u,\ v \sinh u,\ au).$$

parametrizasyonuyla verilsin. Bu yüzey, $detI = EG - F^2 = -a^2 - v^2 < 0$ olduğundan timelike bir yüzeydir.

Bu yüzeyler, Lorentziyen helikoidler, ya da sağ Lorentziyen helikoidler olarak adlandırılır. 2. ve 3. tip helikoidler bazen hiperbolik helikoidler olarak adlandırılır.

**Örnek 2.4.9 (2. Çeşit Enneper yüzeyinin eşleniği):** Null eksen etrafındaki vida hareketi sonucu oluşan $a \neq 0$ için, $M$ yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında

$$\varphi(u, v) = (a(\frac{u^3}{3} + u) + vu,\ a(\frac{u^3}{3} - u) + vu, au^2 + v).$$

parametrizasyonuyla verilsin. Bu yüzey, $v \in (0, -\infty)$ için spacelike yüzey, $v \in (0, +\infty)$ içinse timelike yüzeydir. Bu yüzey aynı zamanda 3. dereceden Cayley-Lie minimal regle yüzeyi olarak da adlandırılır.

## $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında regle Weingarten yüzeyler

$\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında açılabilir olmayan minimal regle yüzeyler, Lorentziyen helikoidler ile 2. çeşit Enneper yüzeyinin eşleniğidir. Bu yüzeylerin hepsi yukarıda da belirtildiği üzere helikoidsel regle yüzeydir. Lorentziyen vida hareketi eksene ortogonal olmayan ya da ekseni kesmeyen bir doğruya uygulandığı zaman, Weingarten yüzey elde edilir, çünkü bütün eğrilikler $v$ ($u$ ya değil) parametresine bağlıdır. Helikoidsel regle yüzey, bir parametreli Lorentziyen vida hareketi altında bir doğrunun yörüngesidir.

Helikoidsel yüzey (regle olması şart değil) Weingarten yüzeyidir, çünkü bütün eğrilikleri yani, $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğrilikleri yalnızca $v$ parametresine bağlıdır (Sodsiri, 2005).

Burada ele alınan spacelike regle yüzey, aksi belirtilmedikçe spacelike dayanak eğrili ve spacelike anadoğrulu bir yüzeydir. Timelike regle yüzey ise, spacelike dayanak eğrili ve timelike doğrultmanlı, timelike dayanak eğrili ve spacelike doğrultmanlı ve null doğrultmanlı olarak üç kısımda incelenmiştir. Spacelike doğrultmanlı timelike regle yüzey bahsinde bu yüzeye ait anadoğruların türevlerinin iç çarpımı $\varepsilon = \pm 1$ ile gösterilmiştir.

**Teorem 2.4.10:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $\varphi$ spacelike regle yüzeyinin $Q, J, F, D$ parametrelerine bağlı $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğrilikleri

$$K = \frac{Q^2}{D^4} \tag{2.31}$$

$$H = \frac{1}{2D^3}[QF - Q^2 J - vQ' - v^2 J] \tag{2.32}$$

şeklindedir. Bu yüzey için $D = \sqrt{-\varepsilon Q^2 + \varepsilon v^2}$ olur (Dillen and Kühnel, 1999).

**Sonuç 2.4.11:** $H = 0$ olması için gerek ve yeter şart $J = F = Q' = 0$ olasıdır (Dillen and Kühnel, 1999).

**Yardımcı Teorem 2.4.12:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $\varphi$ spacelike regle yüzeyine ait $Q$, $J$, $F$ büyüklüklerinin sabit olması için gerek ve yeter şart,

$$2HQ^{\frac{1}{2}} = FK^{\frac{3}{4}} - 3QJK^{\frac{3}{4}} \pm \varepsilon JK^{\frac{1}{4}}$$

olmasıdır. Bu $C^2$ sınıfından yüzeylerin Weingarten yüzeyi olma şartıdır. Bu ifadeyle $K$ Gauss eğriliği ile $H$ ortalama eğriliği arasındaki bağıntı verilmiştir (Dillen and Kühnel, 1999).

**Sonuç 2.4.13:** $J = 0$ ise $K^3 = \dfrac{16H^4Q^2}{F^4}$.

**Sonuç 2.4.14:** $F = 0$ ise $2HQ^{\frac{1}{2}} = -3QJK^{\frac{3}{4}} \pm \varepsilon JK^{\frac{1}{4}}$.

**Teorem 2.4.15:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultmanlı $\varphi$ timelike regle yüzeyinin $Q, J, F, D$ parametrelerine bağlı, sırasıyla, $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğrilikleri

$$K = -\frac{Q^2}{D^4} \tag{2.33}$$

$$H = \frac{1}{2D^3}(-QF + Q^2J + vQ' + v^2J) \tag{2.34}$$

dir. Burada $D = \sqrt{-\varepsilon Q^2 + \varepsilon v^2}$ dir (Dillen and Kühnel, 1999).

**Sonuç 2.4.16:** $H = 0$ olması için gerek ve yeter şart $J = F = Q' = 0$ olmasıdır.

**Yardımcı Teorem 2.4.17:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultmanlı $\varphi$ timelike regle yüzeyine ait $Q, J, F$ büyüklüklerinin sabit olması için gerek ve yeter şart,

$$2HQ^{\frac{1}{2}} = (2QJ - F)(-K)^{\frac{3}{4}} \pm \varepsilon J (-K)^{\frac{1}{4}}$$

dür. Bu $C^2$ sınıfından yüzeylerin Weingarten yüzeyi olma şartıdır. Bu ifadeyle $K$ Gauss eğriliği ile $H$ ortalama eğriliği arasındaki bağıntı verilmiştir.

**Sonuç 2.4.18:** $J = 0$ ise $K^3 = -\dfrac{16H^4Q^2}{F^4}$.

**Sonuç 2.4.19:** $F = 0$ ise $2HQ^{\frac{1}{2}} = 2QJ(-K)^{\frac{3}{4}} \pm \varepsilon J (-K)^{\frac{1}{4}}$.

**Teorem 2.4.20:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında, timelike doğrultmanlı $\varphi$ timelike regle yüzeyinin $Q, J, F, D$ parametrelerine bağlı, sırasıyla, $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğrilikleri

$$K = -\frac{Q^2}{D^4} \tag{2.35}$$

$$H = \frac{1}{2D^3}(-QF - Q^2J - Jv^2 + vQ') \tag{2.36}$$

dür. Burada $D = \sqrt{-Q^2 - v^2}$ dir (Dillen and Kühnel, 1999).

**Sonuç 2.4.21:** $H = 0$ olması için gerek ve yeter şart $J = F = Q' = 0$ olmasıdır.

**Yardımcı Teorem 2.4.22:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultmanlı $\varphi$ timelike regle yüzeyine ait $Q, J, F$ büyüklüklerinin sabit olması için gerek ve yeter şart,

$$2HQ^{\frac{1}{2}} = -F(-K)^{\frac{3}{4}} \mp (-K)^{\frac{1}{4}} J$$

dır. Bu $C^2$ sınıfından yüzeylerin Weingarten yüzeyi olma şartıdır. Bu ifadeyle $K$ Gauss eğriliği ile $H$ ortalama eğriliği arasındaki bağıntı verilmiştir (Dillen and Kühnel, 1999).

**Teorem 2.4.23:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında regle yüzey

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

parametrizasyonuyla verilsin. Bu durumda $X$ vektör alanının hiçbir yerde null olmaması şartıyla, açılabilir olmayan regle Weingarten yüzey, helikoidsel regle yüzeyin bir parçasıdır (Dillen and Kühnel, 1999).

**Teorem 2.4.24:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında regle yüzey

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

parametrizasyonuyla verilsin. Bu durumda açılabilir olmayan ve minimal regle yüzey, ya Cayley regle yüzeyinin bir parçasıdır ya da 3 sağ Lorentziyen helikoidden birinin parçasıdır (Dillen and Kühnel, 1999).

**Teorem 2.4.25:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında regle yüzey

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

parametrizasyonuyla verilsin. Bu durumda null doğrultmanlı herhangi bir regle yüzey, $H^2 = K$ denklemini sağlayan bir Weingarten yüzeydir (Dillen and Kühnel, 1999).

# BÖLÜM 3
# MİNKOWSKİ UZAYINDA PARALEL REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike paralel yüzeylere ait bazı özellikler verilmiştir. Teorem 3.1.7 ile Teorem 3.1.15 de ifadeleri ve ispatları verilen teoremler (Patriciu, 2010) çalışmasında ifade edilmiş fakat ispatı verilmemiştir. Sağlam ve Kalkan'ın (Sağlam and Kalkan, 2010) çalışmalarında ise bahsedilen teoremlerin ifade ve ispatları mevcuttur. Bizim verdiğimiz ifade ve ispatta bazı farklılıklar olduğundan, bu kısımda bahsetmek uygun görülmüştür. Paralel yüzeylerin temel tanım ve teoremleri çerçevesinde, spacelike ve timelike regle yüzeylere paralel olan yüzeyler incelenmiştir. İncelediğimiz paralel yüzeylerin regle yüzey olma koşulu verildikten sonra regle yüzey olan paralel yüzey, paralel regle yüzey şeklinde adlandırılmış ve bu yüzeyle ilgili bazı teoremler verilmiştir. Burada konu edinilen yüzeyler; spacelike regle yüzeye paralel yüzeyler ile timelike regle yüzeye paralel yüzeylerdir. Spacelike paralel regle yüzey; spacelike doğrultmanlı spacelike dayanak eğrili spacelike regle yüzeye paralel olan yüzeydir. Timelike paralel regle yüzeyler ise; spacelike doğrultmanlı timelike dayanak eğrili timelike regle yüzeye paralel olan yüzeyler ile timelike doğrultmanlı spacelike dayanak eğrili timelike regle yüzeye paralel olan yüzeylerdir.

## 3.1 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski Uzayında Paralel Yüzeylerin Geometrisi

Bir $M$ yüzeyine paralel olan sonsuz sayıda yüzey vardır. Bu paralel yüzeyler, $M$ yüzeyine ait normal vektörünü $r$ keyfi büyüklüğünce ötelemek suretiyle elde edilir. Paralel yüzeylerin incelenmesindeki amaç, paralel yüzeye ait cebirsel invaryantları, esas yüzeyin cebirsel invaryantları cinsinden bulmaktır.

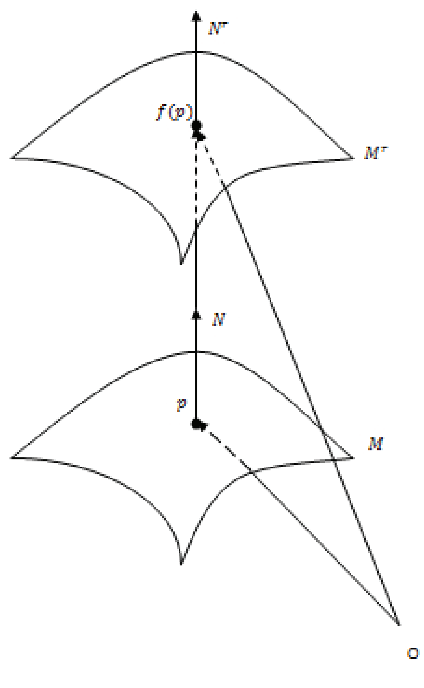
Paralel yüzeyler şöyle de ifade edilebilir; $a_i$ fonksiyonları $C^\infty$ sınıfından reel değerli fonksiyonlar ve $-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \pm 1$ olmak üzere bir $M$ yüzeyinin birim normal vektör alanı $N = (a_1, a_2, a_3)$ olsun. $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$M^r = \{P + rN_P : P \in M\}$$

olsun. $P = (P_1, P_2, P_3) \in M$ ise

$$f(P) = P + rN_P = (P_1 + ra_1(P), P_2 + ra_2(P), P_3 + ra_3(P))$$

ile $M^r$ yüzeyi tanımlanır.




Şekil 3.1

Böylece $M$ den $M^r$ yüzeyine tanımlanan $f$ fonksiyonu örten ise $M^r$, $M$ ye paralel bir yüzeydir. Ayrıca $M^r$ yüzeyinin de birim normali $N$ dir. $\forall P \in M$ noktası için $N^r_{f(P)} = N_P$ dir. Şekil 3.1 deki grafik paralel yüzeyi göstermektedir.

$M$**,** $\mathbb{E}^3_1$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey, $M^r$ bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. $M^r$ yüzeyi, $\varphi^r = \varphi^r(u,v)$ parametrik denklemiyle verilsin. $M^r$ yüzeyine ait birinci, ikinci ve üçüncü esas formlar, sırasıyla, $I^r$, $II^r$, $III^r$ ile gösterilmek üzere; $I^r$ paralel yüzeyin birinci temel formu

$$\begin{aligned} I^r &= \langle d\varphi^r, d\varphi^r \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \varphi^r}{\partial u}, \frac{\partial \varphi^r}{\partial u} \right\rangle (du)^2 + 2 \left\langle \frac{\partial \varphi^r}{\partial u}, \frac{\partial \varphi^r}{\partial v} \right\rangle dudv + \left\langle \frac{\partial \varphi^r}{\partial v}, \frac{\partial \varphi^r}{\partial v} \right\rangle (dv)^2 \\ &= E^r (du)^2 + 2F^r dudv + G^r (dv)^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. $II^r$ paralel yüzeyin ikinci temel formu

$$\begin{aligned} II^r &= \langle -d\varphi^r, dN \rangle \\ &= -\left\langle \frac{\partial \varphi^r}{\partial u}, \frac{\partial N^r}{\partial u} \right\rangle (du)^2 - 2 \left\langle \frac{\partial \varphi^r}{\partial u}, \frac{\partial N^r}{\partial v} \right\rangle dudv - \left\langle \frac{\partial \varphi^r}{\partial v}, \frac{\partial N^r}{\partial v} \right\rangle (dv)^2 \\ &= e^r (du)^2 + 2f^r dudv + g^r (dv)^2 \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. $III^r$ paralel yüzeyin üçüncü temel formu

$$\begin{aligned} III^r &= \langle dN^r, dN^r \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial N^r}{\partial u}, \frac{\partial N^r}{\partial u} \right\rangle (du)^2 + 2 \left\langle \frac{\partial N^r}{\partial u}, \frac{\partial N^r}{\partial v} \right\rangle dudv + \left\langle \frac{\partial N^r}{\partial v}, \frac{\partial N^r}{\partial v} \right\rangle (dv)^2 \end{aligned}$$

olur, uygun işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} III^r &= p^r (du)^2 + 2r^r dudv + s^r (dv)^2 \\ &= p^r (du)^2 + 2r^r dudv + s^r (dv)^2 \\ &= \langle dN, dN \rangle \\ &= III \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $III^r = III$ ifadesi üçüncü temel formun paralel yüzeyde korunduğu sonucunu verir. $M^r$ paralel yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları, sırasıyla,

$$E^r (du)^2 + 2F^r dudv + G^r (dv)^2 \text{ ve } e^r (du)^2 + 2f^r dudv + g^r (dv)^2$$

dir. $\mathcal{F}_{I^r}$ ve $\mathcal{F}_{II^r}$, $2 \times 2$ simetrik matrisleri

$$\mathcal{F}_{I^r} = \begin{bmatrix} E^r & F^r \\ F^r & G^r \end{bmatrix}, \mathcal{F}_{II^r} = \begin{bmatrix} e^r & f^r \\ f^r & g^r \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

$M^r$ paralel yüzeyine ait $I^r$ ve $II^r$ temel formların katsayılarının, $M$ yüzeyine ait $I$ ve $II$ temel formların katsayıları cinsinden eşitleri; $E^r$ katsayısı

$$\begin{aligned} E^r &= \left\langle \frac{\partial \varphi^r}{\partial u}, \frac{\partial \varphi^r}{\partial u} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial(\varphi + rN)}{\partial u}, \frac{\partial(\varphi + rN)}{\partial u} \right\rangle \\ &= \langle \varphi_u + rN_u, \varphi_u + rN_u \rangle \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + 2r \langle \varphi_u, N_u \rangle + r^2 \langle N_u, N_u \rangle \end{aligned}$$

veya

$$E^r = E - 2re + r^2 \langle N_u, N_u \rangle \tag{3.1}$$

olur. $F^r$ katsayısı

$$\begin{aligned}
F^r &= \left\langle \frac{\partial \varphi^r}{\partial u}, \frac{\partial \varphi^r}{\partial v} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial(\varphi + rN)}{\partial u}, \frac{\partial(\varphi + rN)}{\partial v} \right\rangle \\
&= \langle \varphi_u + rN_u, \varphi_v + rN_v \rangle \\
&= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + r \langle \varphi_u, N_v \rangle + r \langle N_u, \varphi_v \rangle + r^2 \langle N_u, N_v \rangle \\
&= F - 2rf + r^2 \langle N_u, N_v \rangle \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

olur. $G^r$ katsayısı

$$\begin{aligned}
G^r &= \left\langle \frac{\partial \varphi^r}{\partial v}, \frac{\partial \varphi^r}{\partial v} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial(\varphi + rN)}{\partial v}, \frac{\partial(\varphi + rN)}{\partial v} \right\rangle \\
&= \langle \varphi_v + rN_v, \varphi_v + rN_v \rangle \\
&= \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle + 2r \langle \varphi_v, N_v \rangle + r^2 \langle N_v, N_v \rangle \\
&= G - 2rg + r^2 \langle N_v, N_v \rangle \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $e^r$ katsayısı

$$\begin{aligned}
e^r &= -\left\langle \frac{\partial \varphi^r}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle \\
&= -\langle \varphi_u + rN_u, N_u \rangle \\
&= -\langle \varphi_u, N_u \rangle - \langle N_u, N_u \rangle \\
&= e - r \langle N_u, N_u \rangle \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

şeklindedir. $f^r$ katsayısı

$$\begin{aligned} f^r &= -\left\langle \frac{\partial \varphi^r}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle \\ &= -\langle \varphi_u + rN_u, N_v \rangle \\ &= -\langle \varphi_u, N_v \rangle - \langle N_u, N_v \rangle \\ &= f - r\langle N_u, N_v \rangle \end{aligned} \tag{3.5}$$

olur. $g^r$ katsayısı

$$\begin{aligned} g^r &= -\left\langle \frac{\partial \varphi^r}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle \\ &= -\langle \varphi_v + rN_v, N_v \rangle \\ &= -\langle \varphi_v, N_v \rangle - \langle N_v, N_v \rangle \\ &= g - r\langle N_v, N_v \rangle \end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde elde edilir.

### 3.1.1 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında spacelike paralel yüzeyler

Bu kısımda $M$ spacelike yüzeyine paralel olan $M^r$ spacelike paralel yüzeyi ele alınmıştır.

**Tanım 3.1.1:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $\varphi(u,v)$ spacelike yüzeyinin paraleli olan $\varphi^r(u,v)$ yüzeyi,

$$\varphi^r(u,v) = \varphi(u,v) + rN(u,v) \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $N$ vektörü $\langle N, N \rangle = -1$ olacak şekilde $\varphi(u,v)$ yüzeyinin birim normal vektörü ve $r$ ise reel katsayıdır.

**Yardımcı Teorem 3.1.2:** $\mathbb{E}_1^3$ de $M$ spacelike yüzey ve $M^r$, bu yüzeye paralel yüzey olsun. $M$ yüzeyi spacelike yüzeydir ancak ve ancak $M^r$ spacelike paralel yüzeydir.

**İspat:** ($\Rightarrow$): $M$ spacelike yüzey ise, bu durumda $M$ nin birim normal vektörü $N$ için, Teorem 2.3.33 gereğince

$$\langle N_P, N_P \rangle < 0 \tag{3.8}$$

olmalıdır. $M^r$ paralel yüzeyinin birim normal vektörü ile $M$ yüzeyinin birim normal vektörleri

$$N_P = N^r_{f(P)} \tag{3.9}$$

dir. (3.8) ifadesinde, (3.9) yerine yazılırsa

$$\left\langle N^r_{f(P)}, N^r_{f(P)} \right\rangle < 0 \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.10) eşitliği, Teorem 2.3.33 gereğince, $M^r$ paralel yüzeyinin spacelike bir yüzey olduğunu ifade eder.

($\Leftarrow$): $M^r$ spacelike paralel yüzeyse, Teorem 2.3.33 gereğince

$$\left\langle N^r_{f(P)}, N^r_{f(P)} \right\rangle < 0 \tag{3.11}$$

dır. (3.9) eşitliği, (3.11) de yerine yazılırsa

$$\langle N_P, N_P \rangle < 0 \tag{3.12}$$

olduğu görülür. (3.12) eşitliği, Teorem 2.3.33 gereğince, $M$ yüzeyinin spacelike yüzey olduğunu ifade eder.

**Tanım 3.1.3:** $M$ ve $M^r$, $\mathbb{E}^3_1$ 3-boyutlu Minkowski uzayında iki yüzey olsun. $M$ yüzeyi spacelike yüzey ve birim normal vektör alanı $N$ olsun. $M$ den $M^r$ ye

$$\begin{array}{rccl} f: & M & \rightarrow & M^r \\ & P & \rightarrow & f(P) \;\; = P + rN_P \end{array}$$

olacak şekilde örten bir $f$ fonksiyonu varsa, $M^r$ yüzeyine $M$ nin spacelike bir paralel yüzeyi denir.

**Tanım 3.1.4:** $M$, $\mathbb{E}^3_1$ 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir yüzey ve $M^r$ de bu yüzeye paralel yüzey olsun. $M^r$ nin birim normal vektör alanı

$N^r$ ve şekil operatörü $S^r$ olsun. $P \in M,\ f(P) \in M^r$ ve $\langle N, N\rangle = -1$ olmak üzere

$$\begin{array}{rclcl} K^r & : & M^r & \to & \mathbb{R} \\ & & f(P) & \to & K^r(f(P)) \quad = -\det S^r_{f(P)} \end{array} \tag{3.13}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $M^r$ nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K^r(f(P))$ değerine de $M^r$ nin $f(P)$ noktasındaki Gauss eğriliği denir.

**Tanım 3.1.5:** $M$, $\mathbb{E}^3_1$ 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir yüzey ve $M^r$ de bu yüzeye paralel yüzey olsun. $M^r$ nin birim normal vektör alanı $N^r$ ve şekil operatörü $S^r$ olsun. $P \in M,\ f(P) \in M^r$ ve $\langle N, N\rangle = -1$ olmak üzere

$$\begin{array}{rclcl} H^r & : & M^r & \to & \mathbb{R} \\ & & f(P) & \to & H^r(f(P)) \quad = -\frac{1}{2}\, iz S^r_{f(P)} \end{array} \tag{3.14}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $M^r$ nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H^r(f(P))$ değerine de $M^r$ nin $f(P)$ noktasındaki ortalama eğriliği denir.

**Teorem 3.1.6:** $M$, $\mathbb{E}^3_1$ 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir yüzey ve $M^r$ de bu yüzeye paralel yüzey olsun. $M^r$ nin birim normal vektör alanı $N^r$ ve şekil operatörü $S^r$ olsun. $P \in M,\ f(P) \in M^r$ ve $\langle N, N\rangle = -1$ olmak üzere, $M^r$ paralel yüzeyine ait $I^r$ ve $II^r$ temel form katsayıları cinsinden $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğrilikleri

$$K^r = -\frac{e^r g^r - f^{r2}}{E^r G^r - F^{r2}} \tag{3.15}$$

$$H^r = -\frac{e^r G^r - 2f^r F^r + g^r E^r}{2(E^r G^r - F^{r2})} \tag{3.16}$$

şeklindedir.

**İspat:** Tanım 3.1.4 den, $K^r$ Gauss eğriliğinin karşılığı için $\mathcal{F}_{I^r}$ ve $\mathcal{F}_{II^r}$ matrisleri kullanılırsa

$$K^r = -\det(\mathcal{F}_{I^r}^{-1}\mathcal{F}_{II^r}) = -\frac{\det \mathcal{F}_{II^r}}{\det \mathcal{F}_{I^r}} = -\frac{e^r g^r - f^{r2}}{E^r G^r - F^{r2}}$$

dır. $H^r$ ortalama eğriliği için, önce $\mathcal{F}_{I^r}^{-1}\mathcal{F}_{II^r}$ matrisi

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{I^r}^{-1}\mathcal{F}_{II^r} &= \frac{1}{E^rG^r - F^{r2}}\begin{bmatrix} G^r & -F^r \\ -F^r & E^r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^r & f^r \\ f^r & g^r \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{E^rG^r - F^{r2}}\begin{bmatrix} e^rG^r - f^rF^r & f^rG^r - g^rF^r \\ f^rE^r - e^rF^r & g^rE^r - f^rF^r \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Tanım 3.1.5 den

$$H^r = -\frac{1}{2}iz(\mathcal{F}_{I^r}^{-1}\mathcal{F}_{II^r}) = -\frac{e^rG^r - 2f^rF^r + g^rE^r}{2(E^rG^r - F^{r2})}$$

bulunur.

**Teorem 3.1.7:** $M$, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir yüzey, $M^r$ de bu yüzeye ait spacelike paralel yüzey olsun. $P \in M$ noktasında, $M$ ye ait Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla, $K$ ve $H$; $f(P) \in M^r$ noktasında, $M^r$ ye ait Gauss ve ortalama eğrilikleri de, sırasıyla, $K^r$ ve $H^r$ olsun. Bu durumda;

$$K^r = \frac{K}{1 - 2rH - r^2K} \tag{3.17}$$

$$H^r = \frac{H + rK}{1 - 2rH - r^2K} \tag{3.18}$$

dır.

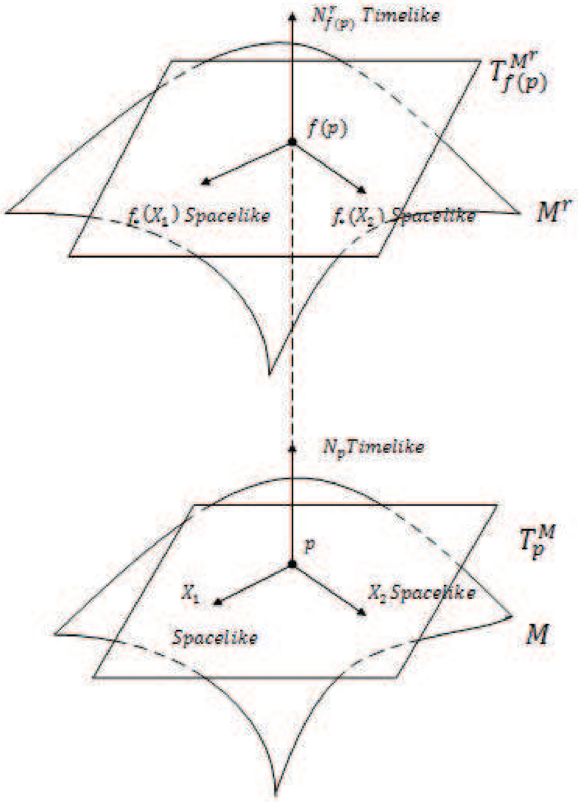
**İspat:** $M$ spacelike bir yüzey olduğuna göre, Teorem 2.3.33 den, normal vektörü $N$, $\langle N, N\rangle = -1$ olduğundan timelike bir vektördür. Şekil 3.2 de gösterildiği gibi $P \in M$ noktasında $M$ nin asli eğrilikleri $k_1$, $k_2$ ve bunlara karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları da sırasıyla $X_1$, $X_2$ olsun. $1 \leq i \leq 2$ olmak üzere asli eğrilik tanımına göre

$$S(X_i) = k_iX_i, \qquad 1 \leq i \leq 2$$

dir. $N^r\big|_{f(P)} = N_P$ olduğundan $M^r$ yüzeyinin birim normal vektör alanı $N^r$ için

$$\langle N^r, N^r\rangle\big|_{f(P)} = \left\langle N^r\,|_{f(P)}, N^r\,|_{f(P)}\right\rangle = \langle N_P, N_P\rangle = -1$$

dir. $N^r$ timelike birim normal vektördür, dolayısıyla $M^r$ de spacelike paralel yüzeydir.




Şekil 3.2

$N$ timelike birim normal vektör olduğu için $\{X_1, X_2\}$ tabanına ait vektörler, Yardımcı Teorem 2.3.27 gereğince spacelike vektörler olmak zorundadır. Bu tabana göre $M$ yüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. Tanım 2.3.37 ve Tanım 2.3.38 den

$$K = -\ k_1 k_2$$

ve

$$H = -\frac{k_1 + k_2}{2}.$$

elde edilir. Diğer taraftan Teorem 2.3.55 deki (3) ifadesinden $1 \leq i \leq 2$ olmak üzere $f_*(X_i)$, $M^r$ yüzeyi için bir asli doğrultudur. $M$ yüzeyine ait $\{X_1, X_2\}$ tabanındaki asli doğrultuların $M^r$ üzerine taşınabildiklerini ve bu taşınma sonucu asli doğrultularını koruduklarını biliyoruz fakat Teorem 2.3.55, asli doğrultuların, spacelike ya da timelike vektörler olması hususunda bir bilgi vermez. Dolayısıyla $M^r$ yüzeyinin $\{f_*(X_1), f_*(X_2)\}$ tabanındaki vektörler, $N^r$ timelike olduğu için Yardımcı Teorem 2.3.27 den bahsi geçen vektörlerin istisnasız spacelike olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Bu tabana göre şekil operatörü matrisi

$$S^r = \begin{bmatrix} \dfrac{k_1}{1+rk_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{k_2}{1+rk_2} \end{bmatrix}$$

olur. $\langle N^r, N^r \rangle = -1$ olduğundan

$$\begin{aligned} K^r &= \varepsilon \det S^r \\ &= -\left(\frac{k_1}{1+rk_1}\right)\left(\frac{k_2}{1+rk_2}\right) \\ &= -\frac{k_1 k_2}{(1+rk_1)(1+rk_2)} \\ &= \frac{K}{1-2rH-r^2K} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} H^r &= \varepsilon \frac{1}{2} iz S^r \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{1+rk_1} + \frac{k_2}{1+rk_2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{(k_1+k_2)+2rk_1k_2}{1+r(k_1+k_2)+r^2k_1k_2}\right) \\ &= \frac{H+rK}{1-2rH-r^2K} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Sonuç 3.1.8:** $\varphi$ ve $\varphi^r$, 3 boyutlu $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, sırasıyla, spacelike yüzey ve spacelike paralel yüzey olsun, $\varphi$ nin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla, $K$ ve $H$ nın, $\varphi^r$ nin Gauss ve ortalama eğriliklerinin, sırasıyla, $K^r$ ve $H^r$ cinsinden eşitleri

$$K = \frac{K^r}{1 + 2rH^r - r^2K^r} \tag{3.19}$$

$$H = \frac{H^r - rK^r}{1 + 2rH^r - r^2K^r} \tag{3.20}$$

şeklinde bulunur.

**İspat:** Bu sonucun ispatı Teorem 3.1.7 de elde edilen $K^r$ ve $H^r$ eğriliklerine ait ifadelerden görülebilir, şöyle ki; Teorem 3.1.7 deki (3.17) eşitliğinden

$$\begin{aligned} K - 2rHK^r - r^2KK^r &= K \\ K(1 + r^2K^r) &= K^r - 2rHK^r \end{aligned}$$

veya

$$K = \frac{K^r - 2rHK^r}{1 + r^2K^r} \tag{3.21}$$

bulunur. (3.18) eşitliğinde, (3.21) eşitliği yerine yazılırsa,

$$K = \frac{K^r}{1 + r^2K^r} - \frac{2rHK^r}{1 + r^2K^r}$$

$$K = \frac{K^r}{1 + r^2K^r} - \frac{H^r - r^2KH^r - 2rK}{1 + rH^r} . \frac{2K^r}{1 + r^2K^r} .r$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$K = \frac{K^r}{1 + 2rH^r - r^2K^r}$$

elde edilir. $H$ nın karşılığı da benzer düşünceyle bulunur; (3.18) eşitliğinden

$$H = \frac{H^r - r^2KH^r - rK}{1 + 2rH^r} \tag{3.22}$$

olur. (3.17) ve (3.22) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} H(1 + 2rH^r) &= H^r - r^2KH^r - rK \\ &= H^r - K(r + r^2H^r) \\ &= H^r - \frac{K^r - 2rHK^r}{1 + r^2K^r}(r + r^2H^r) \end{aligned} \tag{3.23}$$

bulunur. (3.23) eşitliğinden

$$H = \frac{H^r - rK^r}{1 + 2rH^r - r^2K^r}$$

elde edilir.

**Teorem 3.1.9:** $M$, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir yüzey, $M^r$ $M$ yüzeyinin spacelike paralel yüzeyi olsun. $M$ spacelike yüzeyi üzerindeki eğrilik çizgilerine, $M^r$ yüzeyi üzerinde karşılık gelen eğriler de eğrilik çizgileridir.

**İspat:** $M$ üzerindeki eğrilik çizgileri, parametre eğrileri olarak seçilirse, Teorem 2.2.13 gereğince

$$F = f = 0 \tag{3.24}$$

olur. $M^r$ üzerindeki karşılık gelen eğrilerin, eğrilik çizgisi olduklarını görmek için $F^r = f^r = 0$ olduğunu görmek yeterlidir. $M^r$ nin parametrik gösterimi (3.7) nolu ifadede belirtildiği üzere

$$\varphi^r(u, v) = \varphi(u, v) + rN$$

dir. (2.12) ve (2.13) Weingarten denklemlerinde, (3.24) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} N_u &= -\frac{e}{E}\varphi_u && (3.25)\\ N_v &= -\frac{g}{G}\varphi_v && (3.26) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) ve (3.5) eşitliklerinde verilen $F^r$ ve $f^r$ katsayılarının eşitliklerinde (3.24), (3.25) ve (3.26) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} F^r &= F - 2rf + r^2 \langle N_u, N_v \rangle \\ &= r^2 \langle N_u, N_v \rangle \\ &= r^2 \left\langle -\frac{e}{E}\varphi_u, -\frac{g}{G}\varphi_v \right\rangle \\ &= r^2 \frac{eg}{EG} \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \\ &= r^2 \frac{eg}{EG} F \\ &= 0 && (3.27) \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
f^r &= f - r\langle N_u, N_v\rangle \\
&= -r\langle N_u, N_v\rangle \\
&= -r\left\langle -\frac{e}{E}\varphi_u, -\frac{g}{G}\varphi_v\right\rangle \\
&= -r\frac{eg}{EG}F \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

elde edilir. (3.27) ve (3.28) eşitliklerinden $F^r = f^r = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $M^r$ üzerinde eğrilik çizgileri korunur.

### 3.1.2 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında timelike paralel yüzeyler

Bu kısımda $M$ timelike yüzeyine paralel olan $M^r$ timelike paralel yüzeyi ele alınmıştır.

**Tanım 3.1.10:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir $\varphi(u,v)$ timelike yüzeyinin paraleli olan $\varphi^r(u,v)$ yüzeyi,

$$\varphi^r(u,v) = \varphi(u,v) + rN(u,v) \tag{3.29}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $N$ vektörü $\langle N, N\rangle = 1$ olacak şekilde $\varphi(u,v)$ yüzeyinin birim normal vektörü ve $r$ ise reel katsayıdır.

**Yardımcı Teorem 3.1.11:** $M$ timelike yüzey ve $M^r$, bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. $M$ yüzeyi timelike yüzeydir ancak ve ancak $M^r$ timelike paralel yüzeydir.

**İspat:** ($\Rightarrow$): $M$ timelike yüzey ise, bu durumda $M$ nin birim normal vektörü $N$ için, Teorem 2.3.35 gereğince

$$\langle N_P, N_P\rangle > 0 \tag{3.30}$$

olmalıdır. $M^r$ paralel yüzeyinin birim normal vektörü ile M yüzeyini birim normal vektörleri

$$N_P = N^r_{f(P)} \tag{3.31}$$

dir. (3.30) ifadesinde, (3.31) yerine yazılırsa

$$\left\langle N^r_{f(P)}, N^r_{f(P)} \right\rangle > 0 \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.32) ifadesi, Teorem 2.3.35 gereğince, $M^r$ paralel yüzeyinin timelike bir yüzey olduğu sonucunu verir.

($\Leftarrow$): $M^r$ timelike paralel yüzeyse, Teorem 2.3.35 gereğince

$$\left\langle N^r_{f(P)}, N^r_{f(P)} \right\rangle > 0 \tag{3.33}$$

dır. (3.31) eşitliği, (3.33) de yerine yazılırsa

$$\langle N_P, N_P \rangle > 0 \tag{3.34}$$

olduğu görülür. (3.34) ifadesi, Teorem 2.3.35 gereğince, $M$ yüzeyinin timelike yüzey olduğunu ifade eder.

**Tanım 3.1.12:** $M$ ve $M^r$, $\mathbb{E}^3_1$ 3-boyutlu Minkowski uzayında iki yüzey olsun. $M$ yüzeyi timelike yüzey ve birim normal vektör alanı $N$ olsun. $M$ den $M^r$ ye

$$\begin{aligned} f: \quad M &\rightarrow M^r \\ P &\rightarrow f(P) \quad = P + rN_P \end{aligned}$$

olacak şekilde örten bir $f$ fonksiyonu varsa $M^r$ yüzeyine $M$ nin bir timelike paralel yüzeyi denir.

**Tanım 3.1.13:** $M$, $\mathbb{E}^3_1$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir timelike yüzey ve $M^r$ de bu yüzeye paralel yüzey olsun. $M^r$ nin birim normal vektör alanı $N^r$ ve şekil operatörü $S^r$ olsun. $P \in M$, $f(P) \in M^r$ ve $\langle N, N \rangle = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K^r: \quad M^r &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(P) &\rightarrow K^r(f(P)) \quad = \det S^r_{f(P)} \end{aligned} \tag{3.35}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $M^r$ nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K^r(f(P))$ değerine de $M^r$ nin $f(P)$ noktasındaki Gauss eğriliği denir.

**Tanım 3.1.14:** $M$, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir timelike yüzey ve $M^r$ de bu yüzeye paralel yüzey olsun. $M^r$ nin birim normal vektör alanı $N^r$ ve şekil operatörü $S^r$ olsun. $P \in M$, $f(P) \in M^r$ ve $\langle N, N \rangle = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H^r : \ M^r & \to \mathbb{R} \\ f(P) & \to H^r(f(P)) = \tfrac{1}{2}\, iz S^r_{f(P)} \end{aligned} \tag{3.36}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $M^r$ nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H^r(f(P))$ değerine de $M^r$ nin $f(P)$ noktasındaki ortalama eğriliği denir.

**Teorem 3.1.15:** $M$, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir timelike yüzey ve $M^r$ de bu yüzeye paralel yüzey olsun. $M^r$ nin birim normal vektör alanı $N^r$ ve şekil operatörü $S^r$ olsun. $P \in M$, $f(P) \in M^r$ ve $\langle N, N \rangle = 1$ olmak üzere, $M^r$ paralel yüzeyine ait I ve II temel form katsayıları cinsinden $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğrilikleri

$$K^r = \frac{e^r g^r - f^{r2}}{E^r G^r - F^{r2}} \tag{3.37}$$

$$H^r = \frac{e^r G^r - 2 f^r F^r + g^r E^r}{2(E^r G^r - F^{r2})} \tag{3.38}$$

şeklindedir.

**İspat:** Tanım 3.1.13 den, $K^r$ Gauss eğriliğinin karşılığı için $\mathcal{F}_{I^r}$ ve $\mathcal{F}_{II^r}$ matrisleri kullanılırsa

$$K^r = \det(\mathcal{F}_{I^r}^{-1} \mathcal{F}_{II^r}) = \frac{\det \mathcal{F}_{II^r}}{\det \mathcal{F}_{I^r}} = \frac{e^r g^r - f^{r2}}{E^r G^r - F^{r2}}$$

dır. $H^r$ ortalama eğriliği için, önce $\mathcal{F}_{I^r}^{-1} \mathcal{F}_{II^r}$ matrisi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{I^r}^{-1} \mathcal{F}_{II^r} &= \frac{1}{E^r G^r - F^{r2}} \begin{bmatrix} G^r & -F^r \\ -F^r & E^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^r & f^r \\ f^r & g^r \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{E^r G^r - F^{r2}} \begin{bmatrix} e^r G^r - f^r F^r & f^r G^r - g^r F^r \\ f^r E^r - e^r F^r & g^r E^r - f^r F^r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Tanım 3.1.14 den

$$H^r = \frac{1}{2} iz(\mathcal{F}_{I^r}^{-1} \mathcal{F}_{II^r}) = \frac{e^r G^r - 2f^r F^r + g^r E^r}{2(E^r G^r - F^{r2})}$$

bulunur.

**Teorem 3.1.16:** $M$, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir yüzey, $M^r$ de bu yüzeye ait timelike paralel yüzey olsun. $P \in M$ noktasında, $M$ ye ait Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla, $K$ ve $H$; $f(P) \in M^r$ noktasında, $M^r$ ye ait Gauss ve ortalama eğrilikleri de, sırasıyla, $K^r$ ve $H^r$ olsun. Bu durumda;

$$K^r = \frac{K}{1 + 2rH + r^2 K} \tag{3.39}$$

$$H^r = \frac{H + rK}{1 + 2rH + r^2 K} \tag{3.40}$$

şeklindedir.

**İspat:** $M$ timelike bir yüzey olduğuna göre, Teorem 2.3.35 gereğince, $N$ normal vektörü $\langle N, N \rangle = 1$ olduğundan spacelike bir vektördür. Şekil 3.3 de gösterildi ği gibi $P \in M$ noktasında $M$ nin asli eğrilikleri $k_1, k_2$ ve bunlara karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları da sırasıyla $X_1$, $X_2$ olsun. $1 \leq i \leq 2$ olmak üzere asli eğrilik tanımına göre

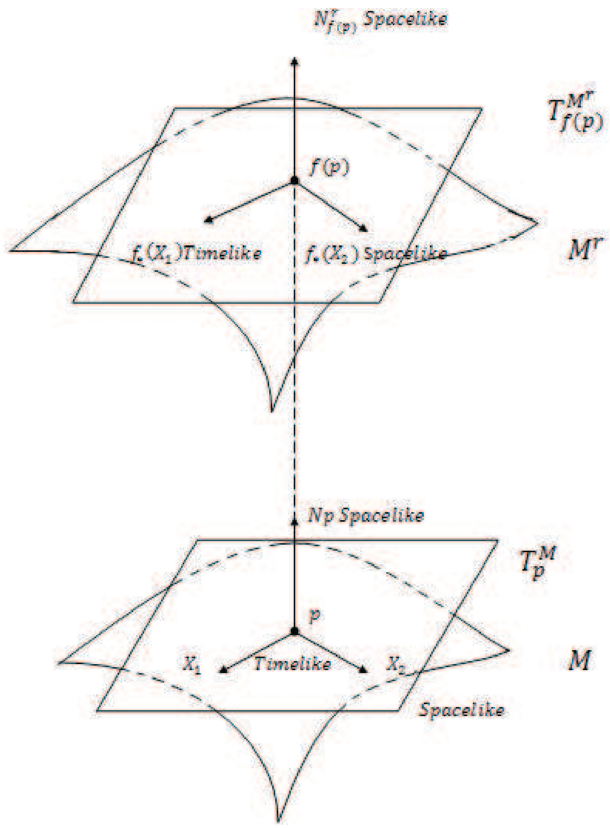
$$S(X_i) = k_i X_i, \qquad 1 \leq i \leq 2$$

dir. $N^r \big|_{f(P)} = N_P$ olduğundan $M^r$ yüzeyinin birim normal vektör alanı $N^r$ için

$$\langle N^r, N^r \rangle \big|_{f(P)} = \left\langle N^r \,|_{f(P)}, N^r \,|_{f(P)} \right\rangle = \langle N_P, N_P \rangle = 1$$

olur. $N^r$ spacelike birim normal vektördür, dolayısıyla $M^r$ de timelike yüzeydir. $N$ spacelike vektör olduğu için Yardımcı Teorem 2.3.27 gereğince $\{X_1, X_2\}$

tabanına ait vektörlerden biri spacelike ve diğeri de timelike olmak zorundadır.




Şekil 3.3

Bu tabana göre $M$ yüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. Tanım 2.3.37 ve Tanım 2.3.38 den

$$K = k_1 k_2$$

ve

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

elde edilir. Teorem 2.3.55 deki (3) ifadesinden $1 \leq i \leq 2$ olmak üzere $f_*(X_i)$, $M^r$ yüzeyi için birer asli doğrultudur. Teorem 3.1.7 nin ispatında ifade edilen $M^r$ yüzeyinin $\{f_*(X_1), f_*(X_2)\}$ tabanındaki vektörlerin, $N^r$ spacelike birim normal vektör olduğu için Yardımcı Teorem 2.3.27 gereğince biri spacelike vektör, diğeri ise timelike vektör olmalıdır. Bu tabana göre şekil operatörü matrisi

$$S^r = \begin{bmatrix} \dfrac{k_1}{1+rk_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{k_2}{1+rk_2} \end{bmatrix}$$

dir. $\langle N^r, N^r \rangle = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} K^r &= \varepsilon \det S_r \\ &= \left(\frac{k_1}{1+rk_1}\right)\left(\frac{k_2}{1+rk_2}\right) \\ &= \frac{k_1k_2}{(1+rk_1)(1+rk_2)} \\ &= \frac{K}{1+2rH+r^2K} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} H^r &= \varepsilon\frac{1}{2} iz S_r \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{1+rk_1} + \frac{k_2}{1+rk_2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(k_1+k_2)+2r(k_1k_2)}{1+r(k_1+k_2)+r^2k_1k_2}\right) \\ &= \frac{H+rK}{1+2rH+r^2K} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

**Sonuç 3.1.17:** $\varphi$ ve $\varphi^r$, 3 boyutlu $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, sırasıyla timelike yüzey ve timelike paralel yüzey olsun. $\varphi$ nin sırasıyla Gauss ve ortalama eğrilikleri olan $K$ ve $H$ nın, $\varphi^r$ nin sırasıyla Gauss ve ortalama eğrilikleri olan $K^r$ ve $H^r$ cinsinden eşitlikleri

$$K = \frac{K^r}{1-2rH^r+r^2K^r} \tag{3.41}$$

$$H = \frac{H^r-rK^r}{1-2rH^r+r^2K^r}. \tag{3.42}$$

şeklinde bulunur.

**İspat:** Bu sonucun ispatı Teorem 3.1.16 daki ifadelerden görülebilir, (3.39) eşitliğinde $K$ yalnız bırakılırsa,

$$\begin{aligned} K^r + 2rHK^r + r^2KK^r &= K \\ K(1 - r^2K^r) &= K^r + 2rHK^r \end{aligned}$$

$$K = \frac{K^r + 2rHK^r}{1 - r^2K^r} \tag{3.43}$$

bulunur. (3.40) eşitliğinden $H$ çekilir ve (3.43) de yerine yazılırsa

$$H^r + 2rHH^r + r^2KH^r = H + rK$$

$$H = \frac{H^r + r^2KH^r - rK}{1 - 2rH^r} \tag{3.44}$$

ve sonra (3.44) eşitliği, (3.43) de kullanılırsa,

$$K = \frac{K^r}{1 - r^2K^r} - \frac{H^r + r^2KH^r - rK}{1 - 2rH^r} . \frac{2K^r}{1 - r^2K^r} .r$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$K = \frac{K^r}{1 - 2rH^r + r^2K^r}$$

bulunur. $H$ nın karşılığı benzer düşünceyle bulunur. (3.39) eşitliğinden

$$H = \frac{H^r + r^2KH^r - rK}{1 - 2rH^r} \tag{3.45}$$

elde edilir. (3.43) eşitliği, (3.45) de kullanılırsa:

$$\begin{aligned} H(1 - 2rH^r) &= H^r + r^2KH^r - rK \\ &= H^r - K(r - r^2H^r) \\ &= H^r - \frac{K^r + 2rHK^r}{1 - r^2K^r}(r + r^2H^r) \end{aligned} \tag{3.46}$$

olur. (3.46) eşitliği düzenlenirse

$$H = \frac{H^r - rK^r}{1 - 2rH^r + r^2K^r}$$

elde edilir.

**Teorem 3.1.18:** $M$, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir yüzey ve $M^r$ $M$ yüzeyinin timelike paralel yüzeyi olsun. $M$ timelike yüzeyi üzerindeki eğrilik çizgilerine, $M^r$ yüzeyi üzerinde karşılık gelen eğriler de eğrilik çizgileridir.

**İspat:** Teorem 3.1.9 un ispatına benzer yöntemle görülür.

## 3.2 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski Uzayında Paralel Regle Yüzeyler

$\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında regle yüzey

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

parametrizasyonuyla verilsin. $\varphi(u,v)$ yüzeyinin kısmi türevleri

$$\varphi_u = \alpha' + vX' \quad \text{ve} \quad \varphi_v = X$$

olmak üzere, bu yüzeyin normal vektörü

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{\alpha' \wedge X + vX' \wedge X}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

dir. $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $\varphi(u,v)$ regle yüzeyinin paralel yüzeyi

$$\varphi^r(u,v) = \varphi(u,v) + rN(u,v) \tag{3.47}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımlamaya göre, regle yüzeye paralel olan yüzeyin parametrizasyonu

$$\begin{aligned} \varphi^r(u,v) &= \varphi(u,v) + rN(u,v) \\ &= \alpha(u) + vX(u) + r\frac{\alpha'(u) \wedge X(u) + vX'(u) \wedge X(u)}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

### 3.2.1 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında spacelike paralel regle yüzeyler

Bu kısımda, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında dayanak eğrisi spacelike bir eğri, anadoğrusu spacelike bir doğru olan spacelike $M$ regle yüzeyine paralel olan $M^r$ yüzeyinin özellikleri incelenmiştir.

**Teorem 3.2.1:** $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $M$ spacelike regle yüzey, $M^r$ bu yüzeye paralel yüzey olsun. Bu durumda, $M$ spacelike regle yüzeyi, açılabilir yüzey ise $M^r$ paralel yüzeyi, açılabilir regle yüzeydir.

**İspat:** $M$, spacelike regle yüzeyinin parametrik ifadesi, $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$, $\langle X, X \rangle = 1$, $\langle X', X' \rangle = \varepsilon$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$$

şeklindedir. Açılabilir regle yüzeyin normal vektörü bir doğrultman boyunca sabit ve $v$ parametresinden bağımsızdır. $\varphi(u, v)$ açılabilir spacelike regle yüzeyin normal vektörü,

$$N = \alpha' \wedge X + vX' \wedge X \tag{3.48}$$

dir. Regle yüzey açılabilir yüzey olduğundan, $\alpha' \wedge X$ vektörü ile $X' \wedge X$ vektörü lineer bağımlıdır. Böylece, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha' \wedge X = \lambda X' \wedge X \tag{3.49}$$

dir. (3.48) denkleminden yüzey normali,

$$N = (\lambda + v)X' \wedge X \tag{3.50}$$

olur. Yüzeyin birim normali,

$$\mathbf{N} = X' \wedge X \tag{3.51}$$

bulunur. $\varphi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$ regle yüzeyin (3.47) denklemi ile verilen paralel yüzeyi

$$\varphi^r(u, v) = \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) + vX(u) \tag{3.52}$$

dir. Bu yüzeyi paralel regle yüzey olarak adlandıracağız. Paralel regle yüzeyin doğrultmanı

$$\begin{aligned} f_*(X) &= f_*(T) \wedge N^r \\ &= (T + rS(T)) \wedge N \\ &= (T + rbT) \wedge N \\ &= (1 + rb)X \end{aligned}$$

veya

$$f_*(X) = (1 + rb)X \tag{3.53}$$

dir.

$$f \circ \alpha(u) = \alpha(u) + rN(u) = \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) \tag{3.54}$$

bulunur. Yüzeye ait ikinci temel formun $g^r$ katsayısı

$$g^r = -\langle \varphi_v^r, \mathbf{N}_v \rangle = -\langle X, 0 \rangle = 0$$

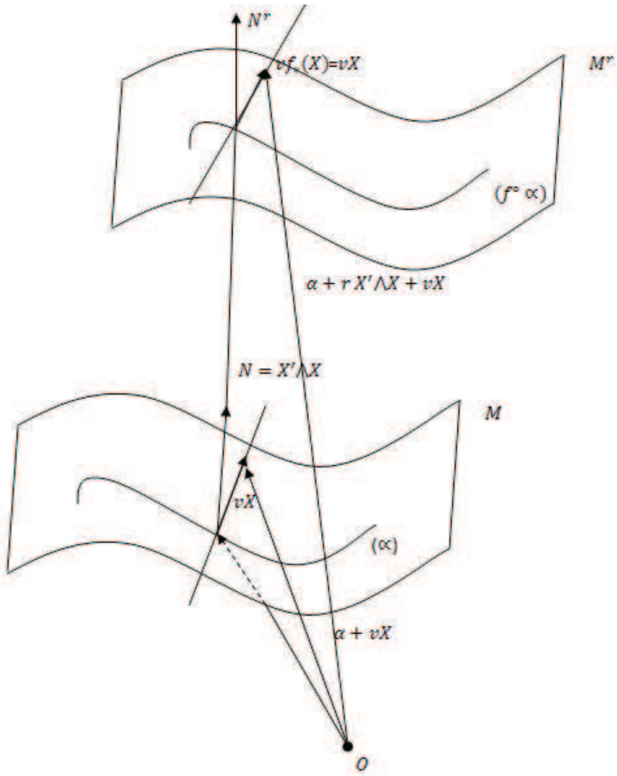
dır. Bu (3.52) yüzeyinin bir regle yüzey olduğu anlamına gelir. Regle yüzeyin açılabilir olup olmadığına bakalım: Tanım 2.3.44 deki (2.15) eşitliğinden paralel regle yüzeye ait dağılma parametresi

$$P^r = < \frac{df \circ \alpha}{du}, f_*'(X) \wedge f_*(X) > \tag{3.55}$$

dir. (3.55) eşitliğinden

$$\begin{aligned} P^r &= \left\langle \alpha' + rX'' \wedge X, (1 + rb)^2 X' \wedge X \right\rangle \\ &= (1 + rb)^2 \langle \alpha' + rX'' \wedge X, X' \wedge X \rangle \\ &= (1 + rb)^2 \left( \langle \alpha', X' \wedge X \rangle + r \langle X'' \wedge X, X' \wedge X \rangle \right) \\ &= (1 + rb)^2 \left(0 + r\{\langle X'', X \rangle \langle X, X' \rangle - \langle X'', X' \rangle \langle X, X \rangle\}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. (3.52) paralel regle yüzeyi, açılabilir regle yüzeydir. Şekil 3.4 paralel regle yüzeyimize ait grafiktir.




Şekil 3.4

Spacelike paralel regle yüzeyin birinci ve ikinci temel form katsayıları şöyledir: spacelike regle yüzeye ait parametrik denklemi

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + vX(u), \;\; \langle \alpha', \alpha' \rangle = \langle X, X \rangle = 1 \text{ ve } \langle X', X' \rangle = \varepsilon, \;\; \varepsilon = \pm 1$$

biçimindedir. Spacelike paralel regle yüzeyin parametrik denklemi (3.52) eşitliğiyle verilir. Spacelike paralel regle yüzeye ait birinci temel formun katsayıları;

$$\begin{aligned} E^r &= \langle \varphi_u^r, \varphi_u^r \rangle \\ &= \langle \alpha' + rX'' \wedge X + vX', \alpha' + rX'' \wedge X + vX' \rangle \\ &= \langle \alpha', \alpha' \rangle + 2r \langle \alpha', X'' \wedge X \rangle + 2v \langle \alpha', X' \rangle \\ &\quad + r^2 \langle X'' \wedge X, X'' \wedge X \rangle + 2rv \langle X', X'' \wedge X \rangle + v^2 \langle X', X' \rangle \end{aligned} \tag{3.56}$$

olur. $\langle X', X' \rangle = 1$ ve $\langle X'', X' \rangle = 0$ olduğundan $X''$ vektörü $X$ ile $X' \wedge X$ vektörlerinin gerdiği düzlemdedir, bu nedenle $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$X'' = mX + nX' \wedge X \tag{3.57}$$

olarak yazılır. (3.57) ifadesi kullanılırsa

$$X'' \wedge X = (mX + nX' \wedge X) \wedge X = (nX' \wedge X) \wedge X = nX' \tag{3.58}$$

bulunur. (3.56) eşitliğinde (3.58) denklemi kullanılırsa, $E^r$ katsayısı

$$E^r = 1 + \varepsilon r^2 n^2 + 2\varepsilon rvn + \varepsilon v^2 = 1 + \varepsilon (rn + v)^2$$

olur. $F^r$ katsayısı

$$F^r = \langle \varphi_u^r, \varphi_v^r \rangle = \langle \alpha' + rX'' \wedge X + vX', X \rangle = \langle \alpha', X \rangle$$

dir. $G^r$ katsayısı

$$G^r = \langle \varphi_v^r, \varphi_v^r \rangle = \langle X, X \rangle = 1$$

elde edilir. Ayrıca

$$N^r = N = \varphi_u \wedge \varphi_v = \alpha' \wedge X + vX' \wedge X$$

yüzey normalidir. İkinci temel formun katsayılarından, $e^r$ katsayısı

$$\begin{aligned} e^r &= -\langle \varphi_u^r, N_u^r \rangle \\ &= -\langle \alpha' + rX'' \wedge X + vX', \alpha'' \wedge X + \alpha' \wedge X' + vX'' \wedge X \rangle \\ &= -\langle \alpha', \alpha'' \wedge X \rangle - \langle rX'' \wedge X, \alpha'' \wedge X \rangle - rv \langle X'' \wedge X, X'' \wedge X \rangle \\ &\quad -v \langle X', \alpha'' \wedge X \rangle - v^2 \langle X', X'' \wedge X \rangle \\ &= -\langle \alpha', \alpha'' \wedge X \rangle - \langle X', \alpha'' \wedge X \rangle (rn + v) - \varepsilon v^2 n - \varepsilon rvn^2 \end{aligned}$$

dir. $f^r$ katsayısı

$$\begin{aligned} f^r &= -\langle \varphi_u^r, N_v^r \rangle \\ &= -\langle \alpha' + rX'' \wedge X + vX', X' \wedge X \rangle \\ &= -\langle \alpha', X' \wedge X \rangle \end{aligned}$$

olur. $g^r$ katsayısı

$$g^r = -\langle \varphi_v^r, N_v^r \rangle = -\langle X, X' \wedge X \rangle = 0$$

olarak elde edilir.

**Sonuç 3.2.2:** $M$ spacelike regle yüzeye paralel olan, $M^r$ spacelike paralel regle yüzeyinin doğrultmanı spacelike vektördür. Dayanak eğrisi, anadoğruya ait teğet vektörün spacelike olması durumunda spacelike eğri; anadoğruya ait teğet vektörün timelike olması durumunda ise

**i**) $rn = \pm 1$ iken null eğri

**ii**) $-1 < rn < 1$ iken spacelike eğri

**iii**) $rn < -1$ veya $rn > 1$ iken timelike eğri

dir.

**İspat:** $M^r$ spacelike regle yüzeyinin parametrik ifadesi,

$$\varphi^r(u,v) = \alpha(u) + rX' \wedge X + vX(u) \tag{3.59}$$

şeklindedir. (3.59) yüzeyine ait doğrultman,

$$\langle X, X \rangle = 1$$

olduğundan spacelikedır. Dayanak eğrisi,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{df \circ \alpha(u)}{du}, \frac{df \circ \alpha(u)}{du} \right\rangle &= \langle \alpha' + rX'' \wedge X, \alpha' + rX'' \wedge X \rangle \\
&= \langle \alpha', \alpha' \rangle + 2r \langle \alpha', X'' \wedge X \rangle \\
&\quad + r^2 \langle X'' \wedge X, X'' \wedge X \rangle \\
&= 1 + 2r \langle \alpha', X'' \wedge X \rangle + r^2 \{ \langle X'', X \rangle^2 \\
&\quad - \langle X'', X'' \rangle \langle X, X \rangle \}.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

(3.60) ifadesini biraz daha basitleştirmek amacıyla şöyle düşünülür;

$$\langle X', X' \rangle = \varepsilon$$

olduğu için $\langle X', X'' \rangle = 0$ olacaktır. Dolayısıyla, (3.57) eşitliği (3.60) da kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{df \circ \alpha(u)}{du}, \frac{df \circ \alpha(u)}{du} \right\rangle &= \langle \alpha' + rX'' \wedge X, \alpha' + rX'' \wedge X \rangle \\
&= 1 + 2r \langle \alpha', (mX + nX' \wedge X) \wedge X \rangle \\
&\quad + r^2 \{ \langle (mX + nX' \wedge X), X \rangle^2 \\
&\quad - \langle mX + nX' \wedge X, mX \\
&\quad + nX' \wedge X \rangle \langle X, X \rangle \} \\
&= 1 + \varepsilon r^2 n^2 \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

elde edilir. Paralel regle yüzeye ait dayanak eğrisinin (3.61) de elde ettiğimiz eşitliği, anadoğruya ait teğet vektörün spacelike olması durumunda spacelike eğri, timelike olması durumunda ise, (3.61) deki $1 - r^2 n^2$ den sonucun ifadesi elde edilir.

**Teorem 3.2.3:** $M$ açılabilir spacelike regle yüzey, $M^r$ bu yüzeye paralel regle yüzey olsun. $M^r$ ye ait dayanak eğrisinin teğet vektör alanı $f_*(T)$, anadoğrusunun teğet vektör alanı $f_*(X)$ ve yüzeyin normal vektör alanı $N^r$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
f_*(T) \wedge N^r &= (1 + rb) f_*(X) \\
f_*(T) \wedge f_*(X) &= (1 + rb) N^r \\
f_*(X) \wedge N^r &= -\frac{1}{1 + rb} f_*(T)
\end{aligned}$$

dir.

**İspat:** Açılabilir spacelike regle yüzeye ait Frenet denklemleri (2.17) matrisinde $c = 0$ alınarak elde edilir. $M$ açılabilir spacelike regle yüzeyine ait, $T$, $X$, $N$ birim vektörlerinin sonuçları Teorem 2.3.50 deki (2.18) eşitliğiyle ifade edilmiştir. Bu bilgiler yardımıyla

$$\begin{aligned}
f_*(T) \wedge N^r &= (T + rS(T)) \wedge N \\
&= (T + rbT) \wedge N \\
&= (1 + rb) X
\end{aligned}$$

ifadesinden

$$f_*(T) \wedge N^r = (1+rb)f_*(X)$$

ve

$$\begin{aligned} f_*(T) \wedge f_*(X) &= (T + rS(T)) \wedge X \\ &= (T + rbT) \wedge X \\ &= (1+rb)N \end{aligned}$$

ifadesinden

$$f_*(T) \wedge f_*(X) = (1+rb)N^r$$

ve

$$f_*(X) \wedge N^r = X \wedge N = -T$$

ifadesinden

$$(1+rb)f_*(X) \wedge N^r = -f_*(T)$$

elde edilir.

**Teorem 3.2.4:** $M$ açılabilir spacelike regle yüzeye ait, $T$, $X$, $N$ birim vektörleri, sırasıyla, spacelike, spacelike ve timelike vektörler iken $M^r$ paralel regle yüzeye ait $f_*(T)$, $f_*(T) \wedge N^r = (1+rb)f_*(X)$ ve $N^r$ vektörleri, sırasıyla, spacelike, spacelike ve timelike vektörlerdir.

**İspat:** $M^r$ paralel regle yüzeye ait normal vektör,

$$\langle N^r, N^r \rangle = \langle N, N \rangle = -1$$

eşitliğinden timelike bir vektördür. Dayanak eğrisine ait teğet vektör alanı,

$$\begin{aligned} \langle f_*(T), f_*(T) \rangle &= \langle T + rS(T), T + rS(T) \rangle \\ &= \langle T + rD_T N, T + rD_T N \rangle \\ &= \langle T + rbT, T + rbT \rangle \\ &= (1+rb)^2 > 0 \end{aligned}$$

olduğundan spacelike bir vektördür. $f_*(T) \wedge N^r = (1+rb)f_*(X)$ bir ortonormal çatı oluşturacak şekilde verilen $f_*(X)$ vektörü de

$$\begin{aligned} \langle f_*(X), f_*(X) \rangle &= \left\langle \frac{f_*(T) \wedge N^r}{1+rb}, \frac{f_*(T) \wedge N^r}{1+rb} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{(1+rb)T \wedge N}{1+rb}, \frac{(1+rb)T \wedge N}{1+rb} \right\rangle \\ &= \langle X, X \rangle = 1 \end{aligned}$$

gereğince spacelike vektör olmalıdır.

**Teorem 3.2.5:** $M \subset \mathbb{E}_1^3$ spacelike regle yüzey olsun. $M^r$, $M$ ye paralel regle yüzey olsun. $M^r$ nin doğrultmanları, $M^r$ de hem asimptotik hem de geodezik çizgilerdir.

**İspat:** $\overline{D} \in \chi(\mathbb{E}_1^3)$, $D \in \chi(M)$ ve $D^r \in \chi(M^r)$ iken, $f_*(X) \in \chi(M^r)$, $M^r$ nin bir doğrultmanının teğet vektör alanı olsun. Herbir doğrultman bir doğru olduğundan, $\mathbb{E}_1^3$ de geodeziktir.

$$\overline{D}_{f_*(X)} f_*(X) = 0 \tag{3.62}$$

elde edilir. Bu ise, (2.25) ifadesindeki paralel hiperyüzeyler için verilen Gauss denkleminde $\varepsilon = \langle N^r, N^r \rangle = -1$ alındığında

$$\overline{D}_{f_*(X)} f_*(X) = D^r{}_{f_*(X)} f_*(X) + \langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle .N^r$$

dir. Burada, $\overline{D}$, $M^r$ spacelike paralel regle yüzey üzerindeki indirgenmiş koneksiyondur. (3.62) eşitliğinden

$$D^r{}_{f_*(X)} f_*(X) = - \langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle N^r$$

olur. $D^r{}_{f_*(X)} f_*(X) \in \chi(M^r)$, ve $\langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle N^r \in \chi^{\perp}(M^r)$ olduğundan

$$D^r{}_{f_*(X)} f_*(X) = 0 \text{ veya } \langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle N^r = 0$$

dır. Ayrıca $N^r$ yüzeyin normali,

$$\chi(\mathbb{E}_1^3) = \chi(M^r) \oplus \chi^{\perp}(M^r) \text{ ve } \chi(M^r) \cap \chi^{\perp}(M^r) = \{0\}$$

olup,

$$D^r{}_{f_*(X)} f_*(X) = 0 \text{ ve } \langle S^r(f_*(X)), f_*(X)\rangle = 0$$

elde edilir. $M^r$ spacelike paralel regle yüzeyin anadoğruları asimptotik ve jeodezik çizgi anlamına gelir.

**Teorem 3.2.6:** $M \subset \mathbb{E}_1^3$ spacelike regle yüzey ve $M^r$, $M$ ye paralel regle yüzey olsun. $M^r$ nin Gauss eğriliği $K^r$ olmak üzere $\forall f(P) \in M^r$ için

$$K^r \geq 0$$

dır.

**İspat:** $f(P) \in M^r$ noktasındaki anadoğrunun teğet vektör alanı $f_*(X)$ olsun. $\chi(M^r)$ nin $\{f_*(X), f_*(Y)\}$ ortonormal bazını elde edelim. $f_*(X)$ ve $f_*(Y)$ spacelike vektör alanlarıdır. $M^r$ nin, $S^r$ şekil operatörü, ortonormal bazlar cinsinden

$$S^r(f_*(X)) = af_*(X) + bf_*(Y)$$
$$S^r(f_*(Y)) = cf_*(X) + df_*(Y)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda $S^r$ şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$\begin{aligned} S^r &= \begin{bmatrix} \langle S^r(f_*(X)), f_*(X)\rangle & \langle S^r(f_*(Y)), f_*(X)\rangle \\ \langle S^r(f_*(X)), f_*(Y)\rangle & \langle S^r(f_*(Y)), f_*(Y)\rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle S(X), X\rangle & \langle S^r(f_*(Y)), f_*(X)\rangle \\ \langle S^r(f_*(X)), f_*(Y)\rangle & \langle S(Y), f_*(Y)\rangle \end{bmatrix} \end{aligned}$$

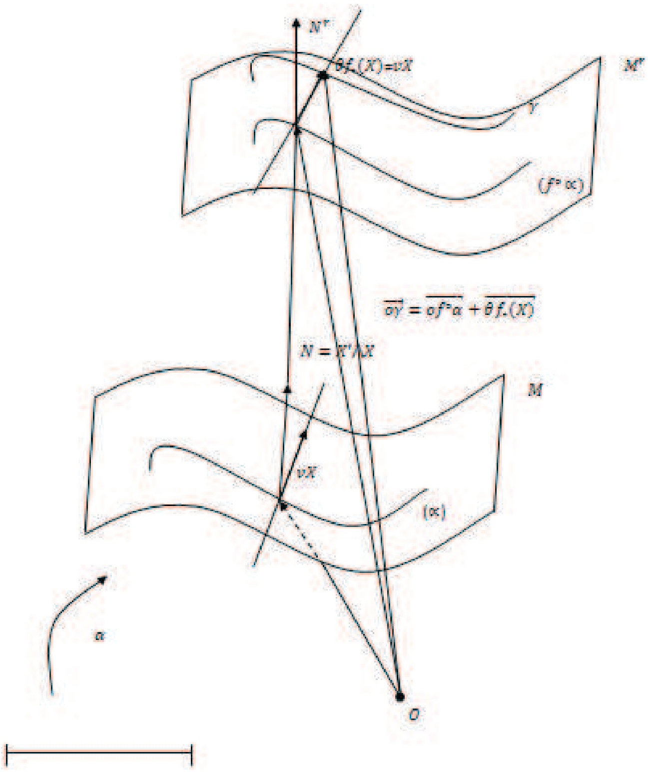
olur. Teorem 3.2.5 den $\langle S^r(f_*(X)), f_*(X)\rangle = \langle S(X), X\rangle = 0$ bulunur. Tanım 3.1.4 gereğince

$$\begin{aligned} K^r &= -\det S^r \\ &= -\langle S^r(f_*(X)), f_*(Y)\rangle \langle S^r(f_*(Y)), f_*(X)\rangle \\ &= \langle S^r(f_*(Y)), f_*(X)\rangle^2 \\ &= \langle S(Y), X\rangle^2 \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

**Spacelike paralel regle yüzeye ait boğaz noktasının yervektörü**

Spacelike paralel regle yüzeyin boğaz çizgisini, asıl yüzeye ait büyüklükler cinsinden ifade edelim.




Şekil 3.5

Şekil 3.5 spacelike paralel regle yüzeye ait boğaz çizgisinin asıl yüzey ile olan irtibatını göstermektedir.

Şekil 3.5 den paralel regle yüzeye ait striksion çizgisinin yer vektörü

$$\overrightarrow{O\gamma} = \overrightarrow{Of \circ \alpha} + \overrightarrow{\theta f_*(X)}$$

şeklinde yazılır. Burada $f_*(X) = X^r$ alınırsa

$$\gamma(u) = f \circ \alpha(u) + \theta X^r(u) \text{ ve } \theta = \theta(u) \tag{3.63}$$

olur. (3.63) ifadesinin türevi hesaplanırsa

$$\gamma' = \frac{df \circ \alpha}{du} + \theta' X^r + \theta \frac{dX^r}{du} \tag{3.64}$$

elde edilir. (3.64) ifadesinde eşitliğin her iki tarafını $\dfrac{dX^r}{du}$ ile iç çarpılırsa,

$$\left\langle \gamma', \frac{dX^r}{du} \right\rangle = \left\langle \frac{df \circ \alpha}{du}, \frac{dX^r}{du} \right\rangle + \left\langle \theta' X^r, \frac{dX^r}{du} \right\rangle + \theta \left\langle \frac{dX^r}{du}, \frac{dX^r}{du} \right\rangle$$

ifadesinden,

$$\theta = -\frac{\left\langle \dfrac{df \circ \alpha}{du}, \dfrac{dX^r}{du} \right\rangle}{\left\langle \dfrac{dX^r}{du}, \dfrac{dX^r}{du} \right\rangle} \tag{3.65}$$

elde edilir.

(3.52) eşitliğinde verilen paralel regle yüzeye ait (3.53) doğrultman vektörü ile dayanak eğrisinin türevleri (3.65) de yerine yazılırsa

$$\theta = -\frac{\langle \alpha' + rX'' \wedge X, (1+rb)X' \rangle}{(1+rb)^2 \langle X', X' \rangle} = -\frac{\langle \alpha', X' \rangle + r \langle X'' \wedge X, X' \rangle}{(1+rb) \langle X', X' \rangle} \tag{3.66}$$

bulunur. (3.63) eşitliğinde (3.53) ve (3.66) kullanılırsa,

$$\gamma(u) = \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) - \frac{\langle \alpha', X' \rangle + r \langle X'' \wedge X, X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X \tag{3.67}$$

olarak boğaz çizgisi elde edilmiş olur. (3.67) eşitliğinde, (2.17) ve (3.58) eşitlikleri kullanılırsa

$$\gamma(u) = \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) + \frac{a - rn\varepsilon}{\varepsilon} X \tag{3.68}$$

bulunur.

**Sonuç 3.2.7:** Spacelike paralel regle yüzeye ait boğaz çizgisinin, dayanak eğrisine eşit olması için $a = rn\varepsilon$ olmalıdır.

**İspat:** (3.68) ifadesindeki $\dfrac{a - rn\varepsilon}{\varepsilon} = 0$ alınarak ispat görülür.

**Sonuç 3.2.8:** Spacelike paralel regle yüzeye ait boğaz çizgisinin, dayanak eğrisine eşit olması için,

$$\langle \alpha', X' \rangle = 0 \text{ ve } \langle X'' \wedge X, X' \rangle = 0$$

olmalıdır.

**İspat:** (3.67) ifadesinden ispat kolayca elde edilir.

**Teorem 3.2.9:** $M^r$ spacelike paralel regle yüzeyinin $\gamma$ boğaz çizgisinin kausal karakteri için

$$\begin{array}{llcl} \textbf{i)} & -1 < F < 1 & \Rightarrow & \gamma \text{ spacelike eğridir.} \\ \textbf{ii)} & F < -1 \wedge F > 1 & \Rightarrow & \gamma \text{ timelike eğridir.} \end{array}$$

**İspat:** $M^r$ spacelike paralel regle yüzeye ait normal vektör alanı;

$$N^r = N = \varphi_u \wedge \varphi_v = \alpha' \wedge X + vX' \wedge X$$

dir. $v = 0$ için

$$N^r(u, 0) = \alpha'(u) \wedge X(u) \tag{3.69}$$

olur. (3.69) ifadesi kendisiyle iç çarpılıp, kausal karakteri belirlenir, yani,

$$\begin{aligned} \langle N^r(u,0), N^r(u,0) \rangle &= \langle \alpha'(u) \wedge X(u), \alpha'(u) \wedge X(u) \rangle \\ &= \langle \alpha', X \rangle^2 - \langle \alpha', \alpha' \rangle \langle X, X \rangle \\ &= F^2 - 1 \end{aligned} \tag{3.70}$$

dir. (3.70) ifadesinden aşağıdaki sonuçlar çıkar:

$$\begin{array}{llcl} (i) & F = 1 \text{ veya } F = -1 & \Rightarrow & N^r \text{ null vektör.} \\ (ii) & -1 < F < 1 & \Rightarrow & N^r \text{ timelike vektör.} \\ (iii) & F < -1 \text{ veya } F > 1 & \Rightarrow & N^r \text{ spacelike vektör.} \end{array}$$

Spacelike paralel regle yüzey üzerinde yer alan boğaz çizgisi için $v = 0$ iken herhangi bir $u$ noktasındaki yüzey normalinin kausal karakterine göre, boğaz çizgisinin kausal karakteri belirlenir. $(ii)$ gereğince, boğaz çizgisi spacelike bir eğri, $(iii)$ gereğince, boğaz çizgisi timelike bir eğridir. $(i)$ gereğince de normal vektör dejeneredir.

**Teorem 3.2.10:** Spacelike paralel regle yüzeye ait boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır.

**İspat:** Spacelike paralel regle yüzeyin farklı iki dayanak eğrisi $f \circ \alpha$ ve $\rho$ olmak üzere, spacelike paralel regle yüzey

$$\varphi^r(u, v) = f \circ \alpha(u) + vX^r(u) \tag{3.71}$$

veya

$$\varphi^r(u,s) = \rho(u) + sX^r(u) \tag{3.72}$$

denklemiyle verilir. Spacelike paralel regle yüzeyin boğaz çizgileri, sırasıyla,

$$\gamma(u) = \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) - \frac{\langle \alpha', X' \rangle + r \langle X'' \wedge X, X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X(u) \tag{3.73}$$

ve

$$\overline{\gamma}(u) = \rho(u) - \frac{\langle \rho', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X(u) \tag{3.74}$$

olur. (3.73) ve (3.74) ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} \gamma(u) - \overline{\gamma}(u) &= \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) - \rho(u) \\ &\quad - \frac{\langle \alpha'(u) + rX''(u) \wedge X(u) - \rho'(u), X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X(u) \end{aligned} \tag{3.75}$$

bulunur. Ayrıca (3.71) ve (3.72) ifadelerinden,

$$\begin{aligned} f \circ \alpha(u) - \rho(u) &= vX^r - sX^r \\ \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) - \rho(u) &= (v-s)X^r \end{aligned} \tag{3.76}$$

elde edilir ve (3.76) ifadesinin $u$ ya göre türevi alınırsa

$$\alpha'(u) + rX''(u) \wedge X(u) - \rho'(u) = (v-s)X^{r\prime} \tag{3.77}$$

olur. (3.76) ve (3.77) ifadeleri ile $f_*(X) = X^r$ alınır ve (3.56) eşitliği kullanılarak, (3.75) ifadesinde yerlerine yazılırsa, $f_*(X) = X^r$ alınır ve (3.56) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \gamma(u) - \overline{\gamma}(u) &= (v-s)X^r - \frac{\langle (v-s)X^{r\prime}, X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X(u) \\ &= (v-s)(1+rb)X(u) - (v-s)(1+rb)\frac{\langle X', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X(u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır.

**Teorem 3.2.11:** $M$ açılabilir spacelike regle yüzeyine paralel olan $M^r$ spacelike paralel regle yüzeyi verilsin. $M^r$ spacelike paralel regle yüzeyinin her noktasından bir tek ortogonal yörünge geçer ve bu ortogonal yörünge, $M$ spacelike regle yüzeyine ait büyüklükler cinsinden

$$\beta(s) = \alpha(s) + rX'(s) \wedge X(s) + g(s)X(s)$$

şeklindedir. Burada $v(1+rb)$ yerine $g(s)$ fonksiyonu alınmıştır.

**İspat:** $M^r$ spacelike paralel regle yüzeyi,

$$\begin{aligned} \varphi^r : \ I \times J &\longrightarrow \mathbb{E}_1^3 \\ (u,v) &\longrightarrow \varphi^r(u,v) = f \circ \alpha(u) + vX^r(u) \end{aligned} \tag{3.78}$$

parametrizasyonuyla verilsin. (3.78) nolu ifadenin parametrik gösterimi, $M$ spacelike regle yüzeyine ait büyüklükler cinsinden

$$\varphi^r(u,v) = \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) + v(1+rb)X$$

şeklindedir. Ortogonal yörünge,

$$\begin{aligned} \beta : \ \widetilde{I} &\longrightarrow M^r \\ s &\longrightarrow \beta(s) = f \circ \alpha(s) + g(s)X^r(s) \end{aligned} \tag{3.79}$$

şeklindedir. $\widetilde{I}$, $I$ nın içinde değilse bir öteleme ile $\widetilde{I}$ yı $I$ nın içine yatırılabilir. Yani $\widetilde{I} \subset I$ olarak alınabilir. $\varphi^r(s_0, v_0) = P_0$ noktasından bir tek ortogonal yörünge geçtiğini gösterelim. (3.79) ifadesi, $M$ spacelike regle yüzeyine ait büyüklükler cinsinden yazılırsa,

$$\beta(s) = \alpha(s) + rX'(s) \wedge X(s) + g(s)X(s) \tag{3.80}$$

elde edilir. (3.80) ifadesinin türevi alınırsa,

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + rX''(s) \wedge X(s) + g(s)'X(s) + g(s)X'(s)$$

elde edilir. Tanım 2.3.49 gereğince, $\beta$ eğrisi $X^r$ ye diktir. Buna göre

$$\begin{aligned} \langle \beta'(s), X^r(s) \rangle &= \langle \beta'(s), X(s) \rangle \\ &= \langle \alpha'(s) + rX''(s) \wedge X(s) + g(s)'X(s) + g(s)X'(s), X \rangle \\ &= \langle \alpha'(s), X(s) \rangle + g'(s) = 0 \end{aligned} \tag{3.81}$$

olur. (3.81) gereğince

$$\begin{aligned}
&g'(s) = -\langle \alpha'(s), X(s)\rangle \\
&\tfrac{dg}{ds} = -\langle \alpha'(s), X(s)\rangle \\
&dg = -\langle \alpha'(s), X(s)\rangle \, ds \\
&g(s) = -\textstyle\int \langle \alpha'(s), X(s)\rangle \, ds + h
\end{aligned}$$

dir. Burada $\langle f_*(X), f_*(X)\rangle = \langle X, X\rangle = 1$ dir.

$$-\int \langle \alpha'(s), X(s)\rangle \, ds = F(s)$$

dersek, $g(s) = F(s) + h$ olur. $h$ keyfi seçildiğinden $\langle \beta', f_*(X)\rangle = 0$ koşulunu sağlayan bir çok eğri vardır. Bu eğrilerden $P_0$ noktasından geçeni bulmak istiyoruz. Buna göre

$$\begin{aligned}
P_0 &= f \circ \alpha(s) + (F(s) + h)X^r \\
&= \alpha(s) + rX'(s) \wedge X(s) + (F(s) + h)X(s)
\end{aligned}$$

olacak biçimde bir $s$ sayısını bulmak istiyoruz. $P_0 = f \circ \alpha(s_0) + v_0 X^r(s_0)$ olduğundan $f \circ \alpha(s_0) + v_0 X^r(s_0) = f \circ \alpha(s) + g(s)X^r(s)$ olur. Buradan

$$f \circ \alpha(s_0) = f \circ \alpha(s)$$

ve

$$\alpha(s_0) + rX'(s_0) \wedge X(s_0) = \alpha(s) + rX'(s) \wedge X(s)$$

dir. Buradan $\alpha(s_0) = \alpha(s)$ , $X'(s_0) \wedge X(s_0) = X'(s) \wedge X(s)$ ve $v_0 = g(s)$ bulunur. $I$ aralığını $f \circ \alpha$ nın bire-bir olduğu bir aralık seçersek, $s = s_0$ bulunur. $v_0 = g(s)$ eşitliğinden $g(s_0) = F(s_0) + h$ ve buradan

$$h = g(s_0) - F(s_0)$$

bulunur. $P_0$ noktasından geçen bir ve yalnız bir ortogonal yörünge vardır. Bu ortogonal yörünge her anadoğruyu keseceğinden $\widetilde{I} = I$ olmak zorundadır.

**Teorem 3.2.12:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, $\varphi(u,v)$ spacelike yüzeyi için $F = f = 0$ olsun. Bu durumda,

$$\varphi^r(u,v) = \varphi(u,v) + rN(u,v)$$

paralel yüzeyine ait $u$ veya $v$ parametrelerinden biri sabit iken diğeri değişken değerler alıyorsa, $\varphi(u,v)$ açılabilir regle yüzey, $\varphi^r(u,v)$ de açılabilir paralel regle yüzey olur.

**İspat:** $u{=}u_0$ olacak şekildeki her yüzey, $v = sabit$ ile verilen doğruların oluşturduğu bir yüzeydir. Bu şartlar altında $\varphi(u,v)$ regle yüzeydir. Bu regle yüzeyin açılabilir olması, $u{=}u_0$ ve $v = sabit$ iken, $\gamma(v) = \varphi(u_0,v)$ ile $v{=}v_0$ ve $u = sabit$ iken, $\gamma(u) = \varphi(u,v_0)$ eğrilerinin eğrilik çizgisi olmalarıdır. $F = f = 0$ iken (2.9) da verilen $F_I$ ve $F_{II}$ matrisleri diagonaldir. Dolayısıyla, $F_I^{-1}F_{II}$, $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ bazına bağlı olarak, Weingarten dönüşümünün matrisidir. Bu, $\varphi_u$ ve $\varphi_v$ lerin asli vektörler yani $u = sabit$ ve $v = sabit$ parametre eğrilerinin, eğrilik çizgileri olduğu anlamına gelir. Bu ise regle yüzeyin açılabilir regle yüzey olması demektir. Teorem 3.2.1 den $\varphi(u,v)$ açılabilir spacelike regle yüzeyse, $\varphi^r(u,v)$ açılabilir spacelike paralel regle yüzeydir.

**Sonuç 3.2.13:** $\varphi$ ve $\varphi^r$, 3-boyutlu $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, sırasıyla, spacelike regle yüzey ve spacelike paralel regle yüzey olsun. $\varphi^r$ spacelike paralel regle yüzeyinin $Q, J, F, D$ parametrelerine bağlı $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğrilikleri

$$K^r = \frac{Q^2}{D^4 - rQFD + rQ^2JD + rvQ'D + rv^2JD - r^2Q^2}$$

$$H^r = \frac{QFD - Q^2JD - vQ'D - v^2JD + 2rQ^2}{2D^4 - 2rQFD + 2rQ^2JD + 2rvQ'D + 2rv^2JD - 2r^2Q^2}$$

dir.

**İspat**: Teorem 3.1.7 deki (3.17) ve (3.18) eşitliklerinde Teorem 2.4.10 daki (2.31) ve (2.32) ifadeleri yerlerine yazılıp, gerekli işlemler yapılarak $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğriliklerinin $Q, J, F, D$ parametrelerine bağlı karşılıkları bulunur.

### 3.2.2 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında timelike paralel regle yüzeyler

Bu kısımda, timelike regle yüzeylere paralel olan yüzeylerin regle yüzey olma koşulu verilmiştir. Regle yüzey olan paralel yüzeyler, paralel regle yüzeyler olarak adlandırılıp, bu yüzeylere dair bazı teoremler verilmiştir.

**Spacelike dayanak eğrili timelike anadoğrulu timelike regle yüzeyin paralel yüzeyi olarak timelike regle yüzeyler**

Bu kısımda spacelike dayanak eğrili timelike anadoğrulu timelike regle yüzeylere paralel olan timelike regle yüzeyler incelenmiş, bu yüzeyler için açılabilirlik, temel form katsayıları ve boğaz çizgisi ile ilgili özellikler verilmiştir.

**Teorem 3.2.14:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $M$ timelike regle yüzey, $M^r$ bu yüzeye paralel yüzey olsun. Bu durumda, $M$ timelike regle yüzeyi, açılabilir yüzey ise $M^r$ paralel yüzeyi, açılabilir regle yüzeydir.

**İspat:** $M$ timelike doğrultmanlı timelike regle yüzeyin parametrik ifadesi,

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + vX(u), \ \ \langle \alpha', \alpha' \rangle = 1, \ \ \langle X, X \rangle = -1, \ \ \langle X', X' \rangle = 1 \quad (3.82)$$

şeklindedir. Açılabilir regle yüzeylerin normalleri bir doğrultman boyunca sabit ve $v$ parametresinden bağımsızdır. (3.48)-(3.51) eşitliklerindeki benzer işlemler yapılarak

$$\varphi^r(u,v) = \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) + vX(u) \quad (3.83)$$

paralel regle yüzeyi elde edilir. Paralel regle yüzeyin doğrultmanı

$$\begin{aligned} f_*(X) &= f_*(T) \wedge N^r \\ &= (T + rS(T)) \wedge N \\ &= (T - rbT) \wedge N \\ &= (1 - rb)X \end{aligned}$$

veya

$$f_*(X) = (1 - rb)X$$

olur.

$$f \circ \alpha(u) = \alpha(u) + rN(u) = \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u)$$

elde edilir. Yüzeye ait ikinci temel formun $g^r$ katsayısı,

$$g^r = -\langle \varphi_v^r, \mathbf{N}_v \rangle = -\langle X, 0 \rangle = 0$$

olarak elde edilir. Bu durumda (3.83) yüzeyi regle yüzeydir. Regle yüzeyin açılabilir olup olmadığı incelenirse, Tanım 2.3.44 deki (2.15) eşitliğinden paralel regle yüzeye ait dağılma parametresi

$$P^r = < \frac{df \circ \alpha}{du}, f'_*(X) \wedge f_*(X) > \tag{3.84}$$

şeklindedir. (3.84) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
P^r &= \left\langle \alpha' + rX'' \wedge X, (1 - rb)^2 X' \wedge X \right\rangle \\
&= (1 - rb)^2 \langle \alpha' + rX'' \wedge X, X' \wedge X \rangle \\
&= (1 - rb)^2 [\langle \alpha', X' \wedge X \rangle + r \langle X'' \wedge X, X' \wedge X \rangle] \\
&= (1 - rb)^2 [0 + r\{\langle X'', X \rangle \langle X, X' \rangle - \langle X'', X' \rangle \langle X, X \rangle\}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (3.83) paralel yüzeyi, açılabilir regle yüzeydir.

Timelike paralel regle yüzeyin birinci ve ikinci temel form katsayıları şöyledir: timelike regle yüzey (3.82) ifadesiyle verilsin. Timelike paralel regle yüzeyin parametrik denklemi (3.83) eşitliğiyle verilir. Timelike paralel regle yüzeye ait birinci temel formun katsayıları;

$$\begin{aligned}
E^r &= \langle \varphi_u^r, \varphi_u^r \rangle \\
&= \langle \alpha' + rX'' \wedge X + vX', \alpha' + rX'' \wedge X + vX' \rangle \\
&= \langle \alpha', \alpha' \rangle + 2r \langle \alpha', X'' \wedge X \rangle + 2v \langle \alpha', X' \rangle + r^2 \langle X'' \wedge X, X'' \wedge X \rangle \\
&\quad + 2rv \langle X', X'' \wedge X \rangle + v^2 \langle X', X' \rangle
\end{aligned} \tag{3.85}$$

olur. (3.57) eşitliği kullanılırsa

$$X'' \wedge X = (mX + nX' \wedge X) \wedge X = (nX' \wedge X) \wedge X = -nX' \qquad (3.86)$$

bulunur. (3.85) eşitliğinde (3.86) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} E^r &= 1 + \varepsilon r^2 n^2 + 2\varepsilon rvn + \varepsilon v^2 \\ &= 1 + r^2 n^2 - 2rnv + v^2 \\ &= 1 + (rn - v)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $F^r$ katsayısı

$$F^r = \langle \varphi_u^r, \varphi_v^r \rangle = \langle \alpha' + rX'' \wedge X + vX', X \rangle = \langle \alpha', X \rangle$$

dır. $G^r$ katsayısı

$$G^r = \langle \varphi_v^r, \varphi_v^r \rangle = \langle X, X \rangle = -1$$

olur. Ayrıca

$$N^r = N = \varphi_u \wedge \varphi_v = \alpha' \wedge X + vX' \wedge X \qquad (3.87)$$

yüzey normalidir. İkinci temel formun katsayılarından, $e^r$ katsayısı

$$\begin{aligned} e^r &= -\langle \varphi_u^r, N_u^r \rangle \\ &= -\langle \alpha' + rX'' \wedge X + vX', \alpha'' \wedge X + \alpha' \wedge X' + vX'' \wedge X \rangle \\ &= -\langle \alpha', \alpha'' \wedge X \rangle - \langle rX'' \wedge X, \alpha'' \wedge X \rangle - rv \langle X'' \wedge X, X'' \wedge X \rangle \\ &\quad -v \langle X', \alpha'' \wedge X \rangle - v^2 \langle X', X'' \wedge X \rangle \\ &= -\langle \alpha', \alpha'' \wedge X \rangle + \langle X', \alpha'' \wedge X \rangle (rn - v) + v^2 n - rvn^2 \end{aligned}$$

dir. $f^r$ katsayısı

$$\begin{aligned} f^r &= -\langle \varphi_u^r, N_v^r \rangle \\ &= -\langle \alpha' + rX'' \wedge X + vX', X' \wedge X \rangle \\ &= -\langle \alpha', X' \wedge X \rangle \end{aligned}$$

olur. $g^r$ katsayısı

$$g^r = -\langle \varphi_v^r, N_v^r \rangle = -\langle X, X' \wedge X \rangle = 0$$

elde edilir.

**Sonuç 3.2.15:** $M$ spacelike dayanak eğrili timelike doğrultmanlı timelike regle yüzeye paralel olan, $M^r$ timelike paralel regle yüzeyinin doğrultmanı timelike vektördür. Dayanak eğrisi ise spacelike eğri olur.

**İspat:** (3.83) ile verilen $M^r$ timelike paralel regle yüzeyine ait doğrultman,

$$\langle X, X \rangle = -1$$

olduğundan spacelikedır. Dayanak eğrisi,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{df \circ \alpha(u)}{du}, \frac{df \circ \alpha(u)}{du} \right\rangle &= \langle \alpha' + rX'' \wedge X, \alpha' + rX'' \wedge X \rangle \\
&= \langle \alpha', \alpha' \rangle + 2r \langle \alpha', X'' \wedge X \rangle \\
&\quad + r^2 \langle X'' \wedge X, X'' \wedge X \rangle \\
&= 1 + 2r \langle \alpha', X'' \wedge X \rangle \\
&\quad + r^2 \{ \langle X'', X \rangle^2 - \langle X'', X'' \rangle \langle X, X \rangle \}. \qquad (3.88)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\langle X', X' \rangle = 1$ ve $\langle X', X'' \rangle = 0$ ile (3.86), (3.88) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{df \circ \alpha(u)}{du}, \frac{df \circ \alpha(u)}{du} \right\rangle &= \langle \alpha' + rX'' \wedge X, \alpha' + rX'' \wedge X \rangle \\
&= 1 + 2r \langle \alpha', (mX + nX' \wedge X) \wedge X \rangle \\
&\quad + r^2 \{ \langle (mX + nX' \wedge X), X \rangle^2 \\
&\quad - \langle mX + nX' \wedge X, mX + nX' \wedge X \rangle \langle X, X \rangle \} \\
&= 1 + 2rm \langle \alpha', X \wedge X \rangle + 2rn \langle \alpha', (X' \wedge X) \wedge X \rangle \\
&\quad - r^2 \langle mX + nX' \wedge X, mX + nX' \wedge X \rangle \\
&= 1 - 2rn \langle \alpha', X' \rangle + r^2 n^2 \langle X', X' \rangle \langle X, X \rangle \\
&= 1 + r^2 n^2
\end{aligned}$$

buradan da,

$$\left\langle \frac{df \circ \alpha(u)}{du}, \frac{df \circ \alpha(u)}{du} \right\rangle = 1 + r^2 n^2 \tag{3.89}$$

elde edilir. Bundan ötürü dayanak eğrisi spacelike eğridir.

**Teorem 3.2.16:** $M$ timelike doğrultmanlı, spacelike dayanak eğrili, açılabilir timelike regle yüzey, $M^r$ bu yüzeye paralel regle yüzey olsun. $M^r$ yüzeyine ait dayanak eğrisinin teğet vektör alanı $f_*(T)$, anadoğrusunun teğet vektör alanı $f_*(X)$ ve yüzeyin normal vektör alanı $N^r$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_*(T) \wedge N^r &= (1 - rb) f_*(X) \\ f_*(T) \wedge f_*(X) &= (1 - rb) N^r \\ f_*(X) \wedge N^r &= \frac{1}{1 - rb} f_*(T) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat:** Timelike doğrultmanlı, spacelike dayanak eğrili, açılabilir timelike regle yüzeye ait Frenet denklemleri (2.20) de $c = 0$ alınarak elde edilir. $M$ timelike regle yüzeyine ait, $T$, $X$, $N$ birim vektörlerinin sonuçları, Teorem 2.3.51 deki (2.21) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} f_*(T) \wedge N^r &= (T + rS(T)) \wedge N \\ &= (T - rbT) \wedge N \\ &= (1 - rb) X \end{aligned}$$

ifadesinden

$$f_*(T) \wedge N^r = (1 - rb) f_*(X)$$

olur.

$$\begin{aligned} f_*(T) \wedge f_*(X) &= (T + rS(T)) \wedge X \\ &= (T - rbT) \wedge X \\ &= (1 - rb) N \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$f_*(T) \wedge f_*(X) = (1 - rb) N^r$$

ve

$$f_*(X) \wedge N^r = X \wedge N = T$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(1 - rb)f_*(X) \wedge N^r = f_*(T)$$

elde edilir.

**Teorem 3.2.17:** $M$ timelike doğrultmanlı, spacelike dayanak eğrili, açılabilir timelike regle yüzeye ait $T$, $N$, $X$ birim vektörleri, sırasıyla, spacelike, spacelike ve timelike vektörler iken $M^r$ paralel regle yüzeye ait $f_*(T)$, $N^r$ ve $f_*(T) \wedge N^r = (1 - rb)f_*(X)$ ve vektörleri, sırasıyla, spacelike, spacelike ve timelike vektörlerdir.

**İspat:** $M^r$ timelike paralel regle yüzeyine ait normal vektör,

$$\langle N^r, N^r \rangle = \langle N, N \rangle = 1$$

eşitliğinden spacelike bir vektördür. Dayanak eğrisine ait teğet vektör alanı,

$$\begin{aligned} \langle f_*(T), f_*(T) \rangle &= \langle T + rS(T), T + rS(T) \rangle \\ &= \langle T + rD_T N, T + rD_T N \rangle \\ &= \langle T - rbT, T - rbT \rangle \\ &= (1 - rb)^2 > 0 \end{aligned}$$

olduğundan spacelike bir vektördür. $f_*(T) \wedge N^r = (1 - rb)f_*(X)$ bir ortonormal çatı oluşturacak şekilde verilen $f_*(X)$ vektörü de

$$\begin{aligned} \langle f_*(X), f_*(X) \rangle &= \left\langle \frac{f_*(T) \wedge N^r}{1 - rb}, \frac{f_*(T) \wedge N^r}{1 - rb} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{(1 - rb)T \wedge N}{1 - rb}, \frac{(1 - rb)T \wedge N}{1 - rb} \right\rangle \\ &= \langle X, X \rangle = -1 \end{aligned}$$

olduğundan timelike bir vektördür.

**Teorem 3.2.18:** $M \subset \mathbb{E}_1^3$ timelike regle yüzey olsun. $M^r$, $M$ ye paralel regle yüzey olsun. $M^r$ nin doğrultmanları, hem asimptotik hem de geodezik çizgilerdir.

**İspat:** $\overline{D}$, $D$ ve $D^r$, sırasıyla, $\chi(\mathbb{E}_1^3)$, $\chi(M)$ ve $\chi(M^r)$ üzerinde koneksiyonlar ve $f_*(X) \in \chi(M^r)$, $M^r$ nin bir doğrultmanının teğet vektör alanı olsun. Herbir doğrultman bir doğru olduğundan, $\mathbb{E}_1^3$ de geodeziktir, yani

$$\overline{D}\ _{f_*(X)} f_*(X) = 0 \tag{3.90}$$

olur. Bu ise, (2.25) ifadesindeki paralel hiperyüzeyler için verilen Gauss denkleminde $\varepsilon = \langle N^r, N^r \rangle = 1$ alındığında

$$\overline{D}\ _{f_*(X)} f_*(X) = D^r{}_{f_*(X)} f_*(X) - \langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle .N^r$$

yazılır. Burada, $\overline{D}$, $M^r$ timelike paralel regle yüzeyi üzerindeki indirgenmiş koneksiyondur. (3.90) eşitliği gereğince

$$D^r{}_{f_*(X)} f_*(X) = \langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle N^r$$

olur. $D^r{}_{f_*(X)}\ f_*(X) \in \chi(M^r)$, ve $\langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle N^r \in \chi^{\perp}(M^r)$ olduğundan

$$D^r{}_{f_*(X)} f_*(X) = 0 \text{ veya } \langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle N^r = 0$$

olması gerekir. Ayrıca $N^r$ yüzeyin normali ve

$$\chi(\mathbb{E}_1^3) = \chi(M^r) \oplus \chi^{\perp}(M^r) \text{ ve } \chi(M^r) \cap \chi^{\perp}(M^r) = \{0\}$$

olup,

$$D^r{}_{f_*(X)} f_*(X) = 0 \text{ ve } \langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle = 0$$

elde edilir. Buna göre $M^r$ timelike paralel regle yüzeyin anadoğruları asimptotik ve jeodezik çizgilerdir.

**Teorem 3.2.19:** $M \subset \mathbb{E}_1^3$ timelike regle yüzey ve $M^r$, $M$ ye paralel regle yüzey olsun. $M^r$ nin Gauss eğriliği $K^r$ olmak üzere her $f(P) \in M^r$ için

$$K^r \geq 0$$

dır.

**İspat:** $f(P) \in M^r$ noktasındaki anadoğrunun teğet vektör alanı $f_*(X)$ ve $\{f_*(X), f_*(Y)\}$, $\chi(M^r)$ nin ortonormal bazı olsun. $f_*(X)$ timelike ve $f_*(Y)$ spacelike vektör alanlarıdır. $M^r$ nin, $S^r$ şekil operatörü, ortonormal bazlar cinsinden

$$S^r(f_*(X)) = af_*(X) + bf_*(Y)$$
$$S^r(f_*(Y)) = cf_*(X) + df_*(Y)$$

şekinde yazılır. Bu durumda $S^r$ şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$\begin{aligned} S^r &= \begin{bmatrix} -\langle S^r(f_*(X)), f_*(X)\rangle & \langle S^r(f_*(X)), f_*(Y)\rangle \\ -\langle S^r(f_*(Y)), f_*(X)\rangle & \langle S^r(f_*(Y)), f_*(Y)\rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\langle S(X), X\rangle & \langle S^r(f_*(X)), f_*(Y)\rangle \\ -\langle S^r(f_*(Y)), f_*(X)\rangle & \langle S(Y), f_*(Y)\rangle \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Teorem 3.2.18 den $\langle S^r(f_*(X)), f_*(X)\rangle = \langle S(X), X\rangle = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} K^r &= \det S^r \\ &= (\langle S^r(f_*(X)), f_*(Y)\rangle)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

## Timelike paralel regle yüzeye ait boğaz noktasının yervektörü

Timelike paralel regle yüzeye ait boğaz çizgisini, asıl yüzeye ait büyüklükler cinsinden ifade edelim. Şekil 3.5 deki grafikle ifade edilen düşüncenin benzeri bir şekilde timelike paralel regle yüzeye ait boğaz çizgisinin yer vektörü

$$\overrightarrow{O\gamma} = \overrightarrow{Of \circ \alpha} + \overrightarrow{\theta X^r}$$

şeklinde yazılır. Burada eğrinin-yay parametresi $u$ alınırsa

$$\gamma(u) = f \circ \alpha(u) + \theta X^r(u) \text{ ve } \theta = \theta(u) \tag{3.91}$$

yazılır. (3.91) ifadesinden

$$\gamma' = \frac{df \circ \alpha}{du} + \theta' X^r + \theta \frac{dX^r}{du} \tag{3.92}$$

elde edilir. (3.92) ifadesinde eşitliğin her iki tarafı $\dfrac{dX^r}{du}$ ile iç çarpılırsa,

$$\left\langle \gamma', \frac{dX^r}{du} \right\rangle = \left\langle \frac{df \circ \alpha}{du}, \frac{dX^r}{du} \right\rangle + \left\langle \theta' X^r, \frac{dX^r}{du} \right\rangle + \theta \left\langle \frac{dX^r}{du}, \frac{dX^r}{du} \right\rangle$$

olur. Buradan,

$$\theta = -\frac{\left\langle \dfrac{df \circ \alpha}{du}, \dfrac{dX^r}{du} \right\rangle}{\left\langle \dfrac{dX^r}{du}, \dfrac{dX^r}{du} \right\rangle} \tag{3.93}$$

bulunur. (3.83) de verilen paralel regle yüzeye ait dayanak eğrisi $f \circ \alpha = \alpha + rX' \wedge X$ ile doğrultmanının $f_*(X) = (1 - rb)X = X^r$ türevleri (3.93) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\theta = -\frac{\langle \alpha' + rX'' \wedge X, (1 - rb)X' \rangle}{(1 - rb)^2 \langle X', X' \rangle} = -\frac{\langle \alpha', X' \rangle + r \langle X'' \wedge X, X' \rangle}{(1 - rb) \langle X', X' \rangle} \tag{3.94}$$

bulunur. (3.94) ifadesi (3.91) de yerlerine yazılırsa,

$$\gamma = \alpha + rX' \wedge X - \frac{\langle \alpha', X' \rangle + r \langle X'' \wedge X, X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X \tag{3.95}$$

şeklinde boğaz çizgisi elde edilmiş olur. (3.91) ifadesinde, (2.20) ve (3.86) eşitlikleri kullanılırsa

$$\gamma = \alpha + rX' \wedge X - (a - rn)X. \tag{3.96}$$

bulunur.

**Sonuç 3.2.20:** Timelike paralel regle yüzeye ait boğaz çizgisinin, dayanak eğrisine eşit olması için $a = rn$ olmalıdır.

**İspat:** (3.96) ifadesindeki $a - rn = 0$ alınarak ispat görülür.

**Sonuç 3.2.21:** Timelike paralel regle yüzeye ait boğaz çizgisinin, dayanak eğrisine eşit olması için

$$\langle \alpha', X' \rangle = 0 \text{ ve } \langle X'' \wedge X, X' \rangle = 0$$

olmalıdır.

**İspat:** (3.95) ifadesinden ispat kolayca elde edilir.

**Teorem 3.2.22:** Timelike paralel regle yüzeye ait boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır.

**İspat:** Timelike paralel regle yüzeyin farklı dayanak eğrisi $f \circ \alpha$ ve $\rho$ olmak üzere timelike paralel regle yüzey

$$\varphi^r(u,v) = f \circ \alpha + vX^r \tag{3.97}$$

veya

$$\varphi^r(u,s) = \rho + sX^r \tag{3.98}$$

denklemiyle verilir. Timelike paralel regle yüzeyin boğaz eğrileri, sırasıyla,

$$\gamma(u) = \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) - \frac{\langle \alpha', X' \rangle + r \langle X'' \wedge X, X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X(u) \tag{3.99}$$

ve

$$\overline{\gamma}(u) = \rho(u) - \frac{\langle \rho', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X(u) \tag{3.100}$$

şeklindedir. (3.99) ve (3.100) ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa;

$$\begin{aligned} \gamma(u) - \overline{\gamma}(u) &= \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) - \rho(u) \\ &\quad - \frac{\langle \alpha'(u) + rX''(u) \wedge X(u) - \rho'(u), X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X(u) \end{aligned} \tag{3.101}$$

olur. Ayrıca (3.97) ve (3.98) ifadelerinden,

$$\begin{aligned} f \circ \alpha(u) - \rho(u) &= vX^r - sX^r \\ \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) - \rho(u) &= (v-s)X^r \end{aligned} \tag{3.102}$$

elde edilir. (3.102) ifadesinin $u$ ya göre türevi alınırsa

$$\alpha'(u) + rX''(u) \wedge X(u) - \rho'(u) = (v-s)X^{r\prime} \tag{3.103}$$

bulunur. (3.102) ve (3.103) ifadeleri (3.101) de yerlerine yazılır, $f_*(X) = (1-rb)X = X^r$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\gamma(u) - \overline{\gamma}(u) &= (v-s)X^r - \frac{\langle (v-s)X^{r\prime}, X'\rangle}{\langle X', X'\rangle} X(u) \\ &= (v-s)(1-rb)X(u) - (v-s)(1-rb)\frac{\langle X', X'\rangle}{\langle X', X'\rangle} X(u) \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. O halde boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır.

**Teorem 3.2.23:** $M^r$ timelike paralel regle yüzeyine ait $\gamma$ striksiyon eğrisi timelike bir eğridir.

**İspat:** $M^r$ timelike paralel regle yüzeyine ait normal vektör alanı;

$$N^r = N = \varphi_u \wedge \varphi_v = \alpha' \wedge X + vX' \wedge X$$

dir. $v = 0$ için

$$N^r(u,0) = \alpha'(u) \wedge X(u) \tag{3.104}$$

olur. (3.104) ifadesini kendisiyle iç çarparsak

$$\begin{aligned}\langle N^r(u,0), N^r(u,0)\rangle &= \langle \alpha'(u) \wedge X(u), \alpha'(u) \wedge X(u)\rangle \\ &= \langle \alpha', X\rangle^2 - \langle \alpha', \alpha'\rangle \langle X, X\rangle \\ &= F^2 + 1 > 0 \end{aligned} \tag{3.105}$$

elde edilir. (3.105) nolu ifade $v = 0$ noktasındaki yüzey normal vektörünün spacelike vektör olduğu sonucunu verir. Dolayısıyla boğaz çizgisi timelike bir eğridir.

**Teorem 3.2.24:** $M$ açılabilir timelike regle yüzeyine paralel olan $M^r$ timelike paralel regle yüzeyi verilsin. $M^r$ timelike paralel regle yüzeyinin her noktasından bir tek ortogonal yörünge geçer ve bu ortogonal yörünge, $M$ timelike regle yüzeyine ait büyüklükler cinsinden

$$\beta(s) = \alpha(s) + rX'(s) \wedge X(s) + g(s)X(s)$$

şeklindedir. Burada $v(1-rb)$ yerine $g(s)$ fonksiyonu alınmıştır.

**İspat:** $M^r$ timelike paralel regle yüzeyi,

$$\begin{array}{rcll} \varphi^r: & I\times J & \longrightarrow & \mathbb{E}_1^3 \\ & (u,v) & \longrightarrow & \varphi^r(u,v)=f\circ\alpha(u)+vX^r(u) \end{array} \tag{3.106}$$

parametrizasyonuyla verilsin. (3.106) ifadesinin parametrik gösterimi, $M$ timelike regle yüzeyine ait büyüklükler cinsinden,

$$\varphi^r(u,v)=\alpha(u)+rX'(u)\wedge X(u)+v(1-rb)X(u)$$

olur. Ortogonal yörünge,

$$\begin{array}{rcll} \beta: & \widetilde{I} & \longrightarrow & M^r \\ & s & \longrightarrow & \beta(s)=f\circ\alpha(s)+g(s)X^r(s) \end{array} \tag{3.107}$$

olarak alınsın. $\widetilde{I}$, $I$ nın içinde değilse bir öteleme ile $\widetilde{I}$ yı $I$ nın içine yatırılabilir. Yani $\widetilde{I}\subset I$ olarak alabiliriz. Şimdi $\varphi^r(s_0,v_0)=P_0$ noktasından bir tek ortogonal yörünge geçtiğini gösterelim. (3.107) ifadesini $M$ timelike regle yüzeyine ait büyüklükler cinsinden yazılırsa

$$\beta(s)=\alpha(s)+rX'(s)\wedge X(s)+g(s)X(s) \tag{3.108}$$

olur. (3.108) ifadesinin türevi alınırsa

$$\beta'(s)=\alpha'(s)+rX''(s)\wedge X(s)+g(s)'X(s)+g(s)X'(s)$$

elde edilir. Tanım 2.3.49 gereğince, $\beta$ eğrisi $X^r$ vektörüne diktir, yani,

$$\begin{aligned} \langle\beta'(s),X^r(s)\rangle &= \langle\beta'(s),X(s)\rangle \\ &= \langle\alpha'(s)+rX''(s)\wedge X(s)+g(s)'X(s)+g(s)X'(s),X\rangle \\ &= \langle\alpha'(s),X(s)\rangle-g'(s)=0 \end{aligned} \tag{3.109}$$

bulunur. (3.109) dan,

$$\begin{aligned} & g'(s)=\langle\alpha'(s),X(s)\rangle \\ & \frac{dg}{ds}=\langle\alpha'(s),X(s)\rangle \\ & dg=\langle\alpha'(s),X(s)\rangle\,ds \\ & g(s)=\int\langle\alpha'(s),X(s)\rangle\,ds+h \end{aligned}$$

dir. Burada $\langle X^r, X^r \rangle = \langle X, X \rangle = -1$ dir.

$$-\int \langle \alpha'(s), X(s) \rangle \, ds = F(s)$$

dersek, $g(s) = F(s) + h$ olur. $h$ keyfi seçildiğinden $\langle \beta', X^r \rangle = 0$ koşulunu sağlayan bir çok eğri vardır. Bu eğrilerden $P_0$ noktasından geçeni bulmak istiyoruz. Buna göre

$$\begin{aligned} P_0 &= f \circ \alpha(s) + (F(s) + h) X^r(s) \\ &= \alpha(s) + r X'(s) \wedge X(s) + (F(s) + h) X(s) \end{aligned}$$

olacak biçimde bir $s$ sayısını bulmak istiyoruz. $P_0 = f \circ \alpha(s_0) + v_0 X^r(s_0)$ olduğundan $f \circ \alpha(s_0) + v_0 X^r(s_0) = f \circ \alpha(s) + g(s) X^r(s)$ olur. Buradan

$$f \circ \alpha(s_0) = f \circ \alpha(s)$$

ve

$$\alpha(s_0) + r X'(s_0) \wedge X(s_0) = \alpha(s) + r X'(s) \wedge X(s)$$

dir. Buradan $\alpha(s_0) = \alpha(s)$ , $X'(s_0) \wedge X(s_0) = X'(s) \wedge X(s)$ ve $v_0 = g(s)$ bulunur. $I$ aralığını $f \circ \alpha$ nın bire-bir olduğu bir aralık seçersek, $s = s_0$ olur. $v_0 = g(s)$ eşitliğinden $g(s_0) = F(s_0) + h$ ve buradan

$$h = g(s_0) - F(s_0)$$

bulunur. $P_0$ noktasından geçen bir ve yalnız bir ortogonal yörünge vardır. Bu ortogonal yörünge her anadoğruyu keseceğinden $\widetilde{I} = I$ olmak zorundadır.

**Sonuç 3.2.25:** $\varphi$ ve $\varphi^r$, 3-boyutlu $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, sırasıyla, timelike doğrultmanlı timelike regle yüzey ve timelike paralel regle yüzey olsun. $\varphi^r$ timelike paralel regle yüzeyin $Q, J, F, D$ parametrelerine bağlı $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğrilikleri

$$K^r = \frac{-Q^2}{D^4 - rQFD - rQ^2JD + rvQ'D - rv^2JD - r^2Q^2}$$

$$H^r = \frac{-QFD - Q^2JD - v^2JD + vQ'D - 2rQ^2}{2D^4 - 2rQFD - 2rQ^2JD + 2rvQ'D - 2rv^2JD - 2r^2Q^2}$$

dir.

**İspat:** Teorem 3.1.16 daki (3.39) ve (3.40) nolu ifadelerde Teorem 2.4.20 deki (2.35) ve (2.36) ifadeleri yerlerine yazılıp, gerekli işlemler yapılarsa, $K^r$ Gauss eğriliği ile $H^r$ ortalama eğriliğinin $Q, J, F, D$ parametrelerine bağlı karşılıkları bulunur.

**Teorem 3.2.26:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, $\varphi(u,v)$ timelike yüzeyi için $F = f = 0$ olsun. Bu durumda,

$$\varphi^r(u,v) = \varphi(u,v) + rN(u,v)$$

paralel yüzeyine ait $u$ veya $v$ lerden biri sabit iken diğeri değişken değerler alıyorsa, $\varphi(u,v)$ açılabilir regle yüzey, $\varphi^r(u,v)$ de açılabilir paralel regle yüzey olur.

**İspat:** $u$=$u_0$ olacak şekildeki her yüzey, $v = sabit$ ile verilen doğruların oluşturduğu bir yüzeydir. Bu şartlar altında $\varphi(u,v)$ regle yüzeydir. Bu regle yüzeyin açılabilir olması, $u$=$u_0$ ve $v = sabit$ iken, $\gamma(v) = \varphi(u_0, v)$ ile $v$=$v_0$ ve $u = sabit$ iken, $\gamma(u) = \varphi(u, v_0)$ eğrilerinin eğrilik çizgisi olmalarıdır. $F = f = 0$ iken (2.9) gereğince $F_I$ ve $F_{II}$ matrisleri diagonaldir. Dolayısıyla, $F_I^{-1}F_{II}$, $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ bazına bağlı olarak, Weingarten dönüşümünün matrisidir. Bu, $\varphi_u$ ve $\varphi_v$ lerin asli vektörler yani $u = sabit$ ve $v = sabit$ parametre eğrilerinin, eğrilik çizgileri olduğu anlamına gelir. Bu ise regle yüzeyin açılabilir regle yüzey olması demektir. Teorem 3.2.14 den $\varphi(u,v)$ açılabilir timelike regle yüzeyse, $\varphi^r(u,v)$ açılabilir timelike paralel regle yüzeydir.

### Timelike dayanak eğrili spacelike anadoğrulu timelike regle yüzeyin paralel yüzeyi olarak timelike regle yüzeyler

Bu kısımda timelike dayanak eğrili spacelike anadoğrulu timelike regle yüzeylere paralel olan timelike regle yüzeyler incelenmiş, bu yüzeyler için açılabilir olma, temel form katsayıları ve boğaz çizgisi ile ilgili özellikler verilmiştir.

**Teorem 3.2.27:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $M$ spacelike doğrultmanlı timelike regle yüzey, $M^r$ bu yüzeye paralel yüzey olsun. Bu durumda, $M$, timelike regle yüzeyi, açılabilir yüzey ise, $M^r$ paralel yüzeyi, açılabilir regle yüzeydir.

**İspat:** $M$, spacelike doğrultmanlı timelike regle yüzeyinin parametrik ifadesi,

$$\varphi(u,v)=\alpha(u)+vX(u),\ \ \langle\alpha',\alpha'\rangle=-1,\ \ \langle X,X\rangle=1,\ \ \langle X',X'\rangle=-1 \quad (3.110)$$

şeklindedir. Açılabilir regle yüzeyin normal vektörü bir doğrultman boyunca sabit ve $v$ parametresinden bağımsızdır. (3.48)-(3.51) eşitliklerindeki benzer işlemler yapılarak

$$\varphi^r(u,v)=\alpha(u)+rX'(u)\wedge X(u)+vX(u) \quad (3.111)$$

paralel regle yüzeyi elde edilir. Paralel regle yüzeyin doğrultmanı

$$\begin{aligned} f_*(X) &= f_*(T)\wedge N^r \\ &= (T+rS(T))\wedge N \\ &= (T+rD_TN)\wedge N \\ &= (T+rbT)\wedge N \\ &= -(1+rb)X \end{aligned}$$

veya

$$f_*(X)=-(1+rb)X \quad (3.112)$$

olur.

$$f\circ\alpha(u)=\alpha(u)+rN(u)=\alpha(u)+rX'(u)\wedge X(u) \quad (3.113)$$

bulunur. Yüzeye ait ikinci temel formun $g^r$ katsayısı

$$g^r=-\left\langle \varphi_v^r,\mathbf{N}_v\right\rangle=-\left\langle X,0\right\rangle=0$$

olarak elde edilir. (3.111) yüzeyi regle yüzeydir. Regle yüzeyin açılabilir olup olmadığı incelenirse: Tanım 2.3.44 deki (2.15) eşitliğinden paralel regle yüzeye ait dağılma parametresi

$$P^r =< \frac{df \circ \alpha(u)}{du}, f'_*(X) \wedge f_*(X) > \tag{3.114}$$

dir. (3.114) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
P^r &= \left\langle \alpha' + rX'' \wedge X, (1+rb)^2 X' \wedge X \right\rangle \\
&= (1+rb)^2 \left\langle \alpha' + rX'' \wedge X, X' \wedge X \right\rangle \\
&= (1+rb)^2 \left[ \left\langle \alpha', X' \wedge X \right\rangle + r \left\langle X'' \wedge X, X' \wedge X \right\rangle \right] \\
&= (1+rb)^2 \left[ 0 + r\{ \left\langle X'', X \right\rangle \left\langle X, X' \right\rangle - \left\langle X'', X' \right\rangle \left\langle X, X \right\rangle \} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.111) paralel yüzeyi, açılabilir timelike regle yüzeydir.

Timelike paralel regle yüzeyin birinci ve ikinci temel form katsayıları şöyledir: timelike regle yüzey (3.110) ifadesiyle verilsin. Timelike paralel regle yüzeyin parametrik denklemi (3.111) eşitliğiyle verilir. Timelike paralel regle yüzeye ait birinci temel formun katsayıları;

$$\begin{aligned}
E^r &= \left\langle \varphi_u^r, \varphi_u^r \right\rangle \\
&= \left\langle \alpha' + rX'' \wedge X + vX', \alpha' + rX'' \wedge X + vX' \right\rangle \\
&= \left\langle \alpha', \alpha' \right\rangle + 2r \left\langle \alpha', X'' \wedge X \right\rangle + 2v \left\langle \alpha', X' \right\rangle + r^2 \left\langle X'' \wedge X, X'' \wedge X \right\rangle \\
&\quad + 2rv \left\langle X', X'' \wedge X \right\rangle + v^2 \left\langle X', X' \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.115}$$

olur. (3.57) eşitliği kullanılırsa

$$X'' \wedge X = (mX + nX' \wedge X) \wedge X = (nX' \wedge X) \wedge X = nX' \tag{3.116}$$

bulunur. (3.115) eşitliğinde (3.116) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
E^r &= 1 + \varepsilon r^2 n^2 + 2\varepsilon rvn + \varepsilon v^2 \\
&= 1 + r^2 n^2 - 2rnv + v^2 \\
&= -1 - (rn + v)^2
\end{aligned}$$

olur. $F^r$ katsayısı

$$F^r = \langle \varphi_u^r, \varphi_v^r \rangle = \langle \alpha' + rX'' \wedge X + vX', X \rangle = \langle \alpha', X \rangle$$

bulunur. $G^r$ katsayısı

$$G^r = \langle \varphi_v^r, \varphi_v^r \rangle = \langle X, X \rangle = 1$$

elde edilir. Ayrıca paralel yüzey için

$$N^r = N = \varphi_u \wedge \varphi_v = \alpha' \wedge X + vX' \wedge X$$

yüzey normalidir. İkinci temel formun katsayılarıdan, $e^r$ katsayısı

$$\begin{aligned}
e^r &= -\langle \varphi_u^r, N_u^r \rangle \\
&= -\langle \alpha' + rX'' \wedge X + vX', \alpha'' \wedge X + \alpha' \wedge X' + vX'' \wedge X \rangle \\
&= -\langle \alpha', \alpha'' \wedge X \rangle - \langle rX'' \wedge X, \alpha'' \wedge X \rangle - rv \langle X'' \wedge X, X'' \wedge X \rangle \\
&\quad -v \langle X', \alpha'' \wedge X \rangle - v^2 \langle X', X'' \wedge X \rangle \\
&= -\langle \alpha', \alpha'' \wedge X \rangle - \langle X', \alpha'' \wedge X \rangle (rn + v) + v^2 n + rvn^2
\end{aligned}$$

dir. $f^r$ katsayısı

$$\begin{aligned}
f^r &= -\langle \varphi_u^r, N_v^r \rangle \\
&= -\langle \alpha' + rX'' \wedge X + vX', X' \wedge X \rangle \\
&= -\langle \alpha', X' \wedge X \rangle
\end{aligned}$$

olur. Son olarak $g^r$ katsayısı

$$g^r = -\langle \varphi_v^r, N_v^r \rangle = -\langle X, X' \wedge X \rangle = 0$$

elde edilir.

**Sonuç 3.2.28:** $M$ timelike dayanak eğrili spacelike doğrultmanlı, timelike regle yüzeye paralel olan, $M^r$ timelike regle yüzeyin doğrultmanı spacelike vektör, dayanak eğrisi ise, timelike eğridir.

**İspat:** (3.111) eşitliğiyle verilen $M^r$ timelike paralel regle yüzeyin doğrultmanı $\langle X, X\rangle = 1$ olduğundan spacelike bir vektördür. Dayanak eğrisi,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{df\circ\alpha(u)}{du}, \frac{df\circ\alpha(u)}{du}\right\rangle &= \langle \alpha' + rX'' \wedge X, \alpha' + rX'' \wedge X\rangle \\ &= \langle \alpha', \alpha'\rangle + 2r\langle \alpha', X'' \wedge X\rangle \\ &\quad + r^2\langle X'' \wedge X, X'' \wedge X\rangle \\ &= 1 + 2r\langle \alpha', X'' \wedge X\rangle + r^2\{\langle X'', X\rangle^2 \\ &\quad - \langle X'', X''\rangle\langle X, X\rangle\}. \end{aligned} \tag{3.117}$$

olur. $\langle X', X'\rangle = -1$ ve $\langle X', X''\rangle = 0$ olduğu için (3.117) eşitliğinde (3.116) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{df\circ\alpha(u)}{du}, \frac{df\circ\alpha(u)}{du}\right\rangle &= \langle \alpha' + rX'' \wedge X, \alpha' + rX'' \wedge X\rangle \\ &= 1 + 2r\langle \alpha', (mX + nX' \wedge X) \wedge X\rangle \\ &\quad + r^2\{\langle (mX + nX' \wedge X), X\rangle^2 \\ &\quad - \langle mX + nX' \wedge X, mX + nX' \wedge X\rangle . \langle X, X\rangle\} \\ &= -1 + 2rm\langle \alpha', X \wedge X\rangle + 2rn\langle \alpha', (X' \wedge X) \wedge X\rangle \\ &\quad - r^2\langle mX + nX' \wedge X, mX + nX' \wedge X\rangle \\ &= \text{-1} + 2rn\langle \alpha', X'\rangle + r^2n^2\langle X', X'\rangle\langle X, X\rangle\end{aligned}$$

buradan da

$$\left\langle \frac{df\circ\alpha(u)}{du}, \frac{df\circ\alpha(u)}{du}\right\rangle = -1 - r^2n^2 \tag{3.118}$$

elde edilir. (3.118) ifadesi dayanak eğrisinin timelike bir eğri olduğu anlamına gelir.

**Teorem 3.2.29:** $M$ spacelike doğrultmanlı, timelike dayanak eğrili, açılabilir timelike regle yüzey, $M^r$ bu yüzeye paralel regle yüzey olsun. $M^r$ ye ait dayanak eğrisinin teğet vektör alanı $f_*(T)$, anadoğrusunun teğet vektör alanı

$f_*(X)$ ve yüzeyin normal vektör alanı $N^r$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f_*(T) \wedge N^r &= -(1+rb)f_*(X) \\ f_*(T) \wedge f_*(X) &= (1+rb)N^r \\ -(1+rb)f_*(X) \wedge N^r &= f_*(T) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat:** Spacelike doğrultmanlı, timelike dayanak eğrili, açılabilir timelike regle yüzeye ait Frenet denklemleri (2.23) matrisinde $c = 0$ alınarak elde edilir. $M$ açılabilir timelike regle yüzeyine ait, $T$, $X$, $N$ birim vektörlerinin sonuçları, Teorem 2.3.52 deki (2.24) eşitliğiyle göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} f_*(T) \wedge N^r &= (T + rS(T)) \wedge N \\ &= (T + rD_T N) \wedge N \\ &= (T + rbT) \wedge N \\ &= -(1+rb)X \end{aligned}$$

veya

$$f_*(T) \wedge N^r = -(1+rb)f_*(X)$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} f_*(T) \wedge f_*(X) &= (T + rS(T)) \wedge X \\ &= (T + rbT) \wedge X \\ &= (1+rb)N \end{aligned}$$

veya

$$f_*(T) \wedge f_*(X) = (1+rb)N^r$$

olur. Diğer taraftan

$$f_*(X) \wedge N^r = X \wedge N = -T$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-(1+rb)f_*(X) \wedge N^r = f_*(T)$$

elde edilir.

**Teorem 3.2.30:** $M$ spacelike doğrultmanlı, timelike dayanak eğrili, açılabilir timelike regle yüzeye ait $T$, $N$, $X$ birim vektörleri, sırasıyla, timelike, spacelike ve spacelike vektörler iken $M^r$ paralel regle yüzeye ait $f_*(T)$, $N^r$ ve $f_*(T) \wedge N^r = (1-rb)f_*(X)$ vektörleri, sırasıyla, timelike, spacelike ve spacelike vektörlerdir.

**İspat:** $M^r$ paralel regle yüzeye ait normal vektör,

$$\langle N^r, N^r \rangle = \langle N, N \rangle = 1$$

eşitliğinden spacelike bir vektördür. Dayanak eğrisine ait teğet vektör alanı,

$$\begin{aligned}
\langle f_*(T), f_*(T) \rangle &= \langle T + rS(T), T + rS(T) \rangle \\
&= \langle T + rD_T N, T + rD_T N \rangle \\
&= \langle T - rbT, T - rbT \rangle \\
&= -(1-rb)^2 < 0
\end{aligned}$$

olduğundan, timelike bir vektördür. $f_*(T) \wedge N^r = -(1+rb)f_*(X)$ eşitliğiyle bir ortonormal çatı oluşturacak şekilde verilen $f_*(X)$ vektörü de

$$\begin{aligned}
\langle f_*(X), f_*(X) \rangle &= \left\langle \frac{f_*(T) \wedge N^r}{-(1+rb)}, \frac{f_*(T) \wedge N^r}{-(1+rb)} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{(1+rb)T \wedge N}{-(1+rb)}, \frac{(1+rb)T \wedge N}{-(1+rb)} \right\rangle \\
&= \langle X, X \rangle = 1
\end{aligned}$$

den ötürü spacelike vektördür.

**Teorem 3.2.31:** $M \subset \mathbb{E}_1^3$ timelike regle yüzey olsun. $M^r$, $M$ ye paralel regle yüzey olsun. $M^r$ nin doğrultmanları, hem asimptotik hem de geodezik çizgilerdir.

**İspat:** $\overline{D}$, $D$ ve $D^r$, sırasıyla, $\chi(\mathbb{E}_1^3)$, $\chi(M)$ ve $\chi(M^r)$ üzerinde koneksiyonlar ve $f_*(X) \in \chi(M^r)$, $M^r$ nin bir doğrultmanının teğet vektör alanı olsun. Herbir doğrultman bir doğru olduğundan, $\mathbb{E}_1^3$ de geodeziktir. Bu durumda

$$D^r_{f_*(X)} f_*(X) = 0 \tag{3.119}$$

şeklindedir. Bu ise, (2.25) ifadesindeki paralel hiperyüzeyler için verilen Gauss denkleminde $\varepsilon = \langle N^r, N^r \rangle = 1$ alındığında

$$\overline{D}_{\ f_*(X)} f_*(X) = {D^r}_{f_*(X)} f_*(X) - \langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle \, N^r$$

olur. Burada $\overline{D}$, $M^r$ timelike paralel regle yüzey üzerindeki indirgenmiş koneksiyondur. (3.119) eşitliği kullanılırsa

$${D^r}_{f_*(X)} f_*(X) = \langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle \, N^r$$

olur. $\overline{D^r}_{\ f_*(X)} f_*(X) \in \chi(M^r)$ ve $\langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle \, N^r \in \chi^{\perp}(M^r)$ olup,

$$\overline{D}_{\ f_*(X)} f_*(X) = 0 \text{ ve } \langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle \, N^r = 0$$

olarak bulunur. Ayrıca $N^r$ yüzey normali olduğundan

$$\chi(\mathbb{E}_1^3) = \chi(M^r) \oplus \chi^{\perp}(M^r) \text{ ve } \chi(M^r) \cap \chi^{\perp}(M^r) = \{0\}$$

olup,

$$\overline{D^r}_{\ f_*(X)} f_*(X) = 0 \text{ ve } \langle S^r(f_*(X)), f_*(X) \rangle = 0$$

elde edilir. O halde $M^r$ timelike paralel regle yüzeyinin anadoğruları hem asimptotik hemde jeodezik çizgilerdir.

**Teorem 3.2.32:** $M \subset \mathbb{E}_1^3$ timelike regle yüzey; $M^r$, $M$ ye paralel regle yüzey ve $M^r$ nin Gauss eğriliği $K^r$ olmak üzere $\forall f(P) \in M^r$ için

$$K^r \geq 0$$

dır.

**İspat:** $f(P) \in M^r$ noktasındaki anadoğrunun teğet vektör alanı $f_*(X)$ ve $\{f_*(X), f_*(Y)\}$, $\chi(M^r)$ nin ortonormal bazı olsun. $f_*(X)$ timelike ve $f_*(Y)$ spacelike vektör alanlarıdır. $M^r$ nin, $S^r$ şekil operatörü, ortonormal bazlar cinsinden

$$S^r(f_*(X)) = af_*(X) + bf_*(Y)$$
$$S^r(f_*(Y)) = cf_*(X) + df_*(Y)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda $S^r$ şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$\begin{aligned} S^r &= \begin{bmatrix} -\langle S^r(f_*(X)), f_*(X)\rangle & \langle S^r(f_*(X)), f_*(Y)\rangle \\ -\langle S^r(f_*(Y)), f_*(X)\rangle & \langle S^r(f_*(Y)), f_*(Y)\rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\langle S(X), X\rangle & \langle S^r(f_*(X)), f_*(Y)\rangle \\ -\langle S^r(f_*(Y)), f_*(X)\rangle & \langle S(Y), f_*(Y)\rangle \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

olur. Teorem 3.2.31 den $\langle S^r(f_*(X)), f_*(X)\rangle = \langle S(X), X\rangle = 0$ ile Tanım 3.1.13 kullanılırsa

$$K^r = \det S^r = (\langle S(X), Y\rangle)^2 \geq 0$$

elde edilir.

**Timelike paralel regle yüzeye ait boğaz noktasının yervektörü**

$M^r$ timelike paralel regle yüzeyinin boğaz çizgisi, (3.95) ifadesinin benzeri olarak

$$\gamma = \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) - \frac{\langle \alpha', X'\rangle + r\langle X'' \wedge X, X'\rangle}{\langle X', X'\rangle} X \tag{3.120}$$

şeklindedir. (3.120) nolu ifadede, (2.23) ve (3.116) eşitlikleri kullanılırsa

$$\gamma = \alpha(u) + rX'(u) \wedge X(u) - (a - rn)X \tag{3.121}$$

elde edilir.

**Sonuç 3.2.33:** Timelike paralel regle yüzeye ait boğaz çizgisinin dayanak eğrisine eşit olması için $a = rn$ olmalıdır.

**İspat:** (3.121) ifadesindeki $a - rn = 0$ alınarak ispat görülür.

**Sonuç 3.2.34:** Timelike paralel regle yüzeye ait boğaz çizgisinin, dayanak eğrisine eşit olması için

$$\langle \alpha', X'\rangle = 0 \text{ ve } \langle X'' \wedge X, X'\rangle = 0$$

olmalıdır.

**İspat:** (3.120) ifadesinden ispat açıktır.

**Teorem 3.2.35:** Timelike paralel regle yüzeye ait boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır.

**İspat:** Teorem 3.2.22 nin ispatına benzer bir yöntemle elde edilir.

**Teorem 3.2.36:** $M^r$ timelike paralel regle yüzeyine ait $\gamma$ boğaz çizgisi timelike bir eğridir.

**İspat:** Teorem 3.2.23 ün ispatına benzer bir yöntemle elde edilir.

**Teorem 3.2.37:** $M$ açılabilir timelike regle yüzeyine paralel olan $M^r$ timelike paralel regle yüzeyi verilsin. $M^r$ timelike paralel regle yüzeyinin her noktasından bir tek ortogonal yörünge geçer ve bu ortogonal yörünge, $M$ timelike regle yüzeyine ait büyüklükler cinsinden

$$\beta(s) = \alpha(s) + rX'(s) \wedge X(s) + g(s)X(s)$$

şeklindedir. Burada $-v(1+rb)$ yerine $g(s)$ fonksiyonu alınmıştır.

**İspat:** $M^r$ timelike paralel regle yüzeyi,

$$\begin{array}{rccl} \varphi^r: & I \times J & \longrightarrow & \mathbb{E}_1^3 \\ & (u,v) & \longrightarrow & \varphi^r(u,v) = f \circ \alpha(u) + vX^r(u) \end{array} \tag{3.122}$$

parametrizasyonuyla verilsin. (3.132) ile verilen parametrik gösterimli, $M$ timelike regle yüzeyine ait büyüklükler cinsinden (3.111) ifadesiyle verilmiştir. Ortogonal yörünge,

$$\begin{array}{rccl} \beta: & \widetilde{I} & \longrightarrow & M^r \\ & s & \longrightarrow & \beta(s) = f \circ \alpha(s) + g(s)X^r(s) \end{array} \tag{3.123}$$

olarak verilir. $\widetilde{I}$, $I$ nın içinde değilse bir öteleme ile $\widetilde{I}$ yı $I$ nın içine yatırılabilir. Yani $\widetilde{I} \subset I$ olarak alınabilir. $\varphi^r(s_0, v_0) = P_0$ noktasından bir tek ortogonal yörünge geçtiğini gösterelim. (3.123) ifadesi, $M$ timelike regle yüzeyine ait büyüklükler cinsinden yazılırsa

$$\beta(s) = \alpha(s) + rX'(s) \wedge X(s) + g(s)X(s) \tag{3.124}$$

elde edilir. (3.124) ifadesinin türevi alınırsa

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + rX''(s) \wedge X(s) + g(s)'X(s) + g(s)X'(s)$$

olur. Tanım 2.3.49 gereği, $\beta$ eğrisi $X^r$ vektörüne diktir, yani,

$$\begin{aligned}
\langle \beta'(s), X^r(s) \rangle &= \langle \beta'(s), X(s) \rangle \\
&= \langle \alpha'(s) + rX''(s) \wedge X(s) + g(s)'X(s) + g(s)X'(s), X \rangle \\
&= \langle \alpha'(s), X(s) \rangle + g'(s) = 0 \qquad (3.125)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.125) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&g'(s) = -\langle \alpha'(s), X(s) \rangle \\
&\tfrac{dg}{ds} = -\langle \alpha'(s), X(s) \rangle \\
&dg = -\langle \alpha'(s), X(s) \rangle\, ds \\
&g(s) = -\textstyle\int \langle \alpha'(s), X(s) \rangle\, ds + h
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\langle X^r, X^r \rangle = \langle X, X \rangle = 1$ dir. Ayrıca

$$-\int \langle \alpha'(s), X(s) \rangle\, ds = F(s)$$

dersek, $g(s) = F(s) + h$ olur. $h$ keyfi seçildiğinden $\langle \rho', X^r \rangle = 0$ koşulunu sağlayan bir çok eğri vardır. Bu eğrilerden $P_0$ noktasından geçeni bulmak istiyoruz. Buna göre

$$\begin{aligned}
P_0 &= f \circ \alpha(s) + (F(s) + h)X^r \\
&= \alpha(s) + rX'(s) \wedge X(s) + (F(s) + h)X(s)
\end{aligned}$$

olacak biçimde bir $s$ sayısını bulmak istiyoruz. $P_0 = f \circ \alpha(s_0) + v_0 X^r(s_0)$ olduğundan $f \circ \alpha(s_0) + v_0 X^r(s_0) = f \circ \alpha(s) + g(s)X^r(s)$ olur. Buradan

$$f \circ \alpha(s_0) = f \circ \alpha(s)$$

ve

$$\alpha(s_0) + rX'(s_0) \wedge X(s_0) = \alpha(s) + rX'(s) \wedge X(s)$$

dir. Buradan $\alpha(s_0) = \alpha(s)$ , $X'(s_0) \wedge X(s_0) = X'(s) \wedge X(s)$ ve $v_0 = g(s)$ bulunur. $I$ aralığını $f \circ \alpha$ nın bire-bir olduğu bir aralık seçersek, $s = s_0$ olur. $v_0 = g(s)$ eşitliğinden $g(s_0) = F(s_0) + h$ ve buradan

$$h = g(s_0) - F(s_0)$$

bulunur. $P_0$ noktasından geçen bir ve yalnız bir ortogonal yörünge vardır. Bu ortogonal yörünge her anadoğruyu keseceğinden $\widetilde{I} = I$ olmak zorundadır.

**Sonuç 3.2.38:** $\varphi$ ve $\varphi^r$, 3-boyutlu $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, sırasıyla space-like doğrultmanlı timelike regle yüzey ve timelike paralel regle yüzey olsun. $\varphi^r$ timelike paralel regle yüzeyinin $Q, J, F, D$ parametrelerine bağlı $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğrilikleri

$$K^r = \frac{-Q^2}{D^4 - rQFD + rQ^2JD + rvQ'D + rv^2JD - r^2Q^2}$$

$$H^r = \frac{-QFD + Q^2JD + vQ'D + v^2JD - 2rQ^2}{2D^4 - 2rQFD + 2rQ^2JD + 2rvQ'D + 2rv^2JD - 2r^2Q^2}.$$

dir.

**İspat:** Teorem 3.1.16 daki (3.39) ve (3.40) ifadelerinde Teorem 2.4.15 deki (2.33) ve (2.34) eşitlikleri yazılırsa, gerekli işlemler yapıldığında, $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğriliklerinin $Q, J, F, D$ parametrelerine bağlı karşılıkları bulunur.

# BÖLÜM 4
# MİNKOWSKİ UZAYINDA PARALEL REGLE WEİNGARTEN YÜZEYLER

Bu bölümde regle Weingarten yüzeylere paralel olan yüzeylerin Weingarten olma durumu incelenmiştir. Çalışmaya, $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$ metriği ile verilen $\mathbb{E}^3_1 = (\mathbb{R}^3, \langle,\rangle)$ 3-boyutlu Minkowski uzayında devam edilmiştir.

Bir yüzeyin Weingarten yüzey olma şartı, Teorem 2.3.58 de ifade edildiği üzere mevcut yüzeye ait Gauss ve ortalama eğrilikleri arasında kısmi türevler anlamında bir irtibat kurmaktır. Açılabilir regle yüzeyler cümlesi, Weingarten yüzeyler cümlesiyle örtüşmektedir. Bunun sebebi ise, açılabilir regle yüzeylerin $K$ Gauss eğriliğinin sıfıra özdeş olmasıdır. Bu şartlar altında, $K_uH_v - K_vH_u = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Regle yüzeyin açılabilir olması halinde gerek Teorem 3.1.7 deki (3.17) eşitliği gerekse Teorem 3.1.16 daki (3.39) eşitliği kullanılırsa, bu yüzeye ait paralel yüzeyin de açılabilir regle yüzey olduğu bulunur. Çünkü paralel yüzeyinde Gauss eğriliği sıfır olur. Dolayısıyla, $K^r_uH^r_v - K^r_vH^r_u = 0$ eşitliği kolaylıkla elde edilir. Paralel olan yüzeyinde Weingarten yüzey olması anlamına gelir.

## 4.1 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski Uzayında Spacelike Paralel Regle Weingarten Yüzeyler

Bu kısımda açılabilir olmayan spacelike regle Weingarten yüzeylere paralel olan yüzeylerin Weingarten olma durumları incelenmiş ve bu tip yüzeyler için bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

**Tanım 4.1.1:** $M$, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında spacelike bir yüzey, $M^r$ de bu yüzeye paralel olan spacelike yüzey olsun. Bu paralel yüzeyin $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğrilikleri arasında

$$\Phi(K^r, H^r) = 0 \tag{4.1}$$

olacak şekilde fonksiyonel bir $\Phi$ bağıntısının var olması durumunda veya bununla özdeş olarak, paralel yüzeyin $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğriliklerinin kısmi türevleri lineer bağımsız ise, $M^r$ yüzeyine spacelike paralel Weingarten yüzey denir. Diğer bir ifadeyle paralel yüzeyin $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğrilikleri arasında fonksiyonel bir bağıntı olarak Jacobi determinantı sıfıra eşitlendiğinde,

$$\begin{aligned} \Phi(K^r, H^r) &= \det \begin{pmatrix} K_u^r & K_v^r \\ H_u^r & H_v^r \end{pmatrix} \\ &= K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklindeki Weingarten yüzey olma bağıntısı elde edilir.

**Teorem 4.1.2:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $\varphi$ açılabilir spacelike regle yüzeyse, bu yüzeye paralel olan $\varphi^r$ yüzeyi, spacelike paralel regle Weingarten yüzeyidir.

**İspat:** Teorem 3.2.1 gereğince açılabilir spacelike regle yüzeye paralel olan yüzeyin de açılabilir spacelike regle yüzey olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $K = 0$ dır. Teorem 3.1.7 nin (3.17) eşitliğinden $K^r = 0$ olur. Bu ise (4.2) ifadesinin sağlanması ve yüzeyin Weingarten yüzey olması demektir.

**Teorem 4.1.3:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, $\varphi(u,v)$, $F = f = 0$ eşitliğini sağlayan spacelike bir yüzey olsun. Bu durumda,

$$\varphi^r(u,v) = \varphi(u,v) + rN(u,v)$$

paralel yüzeyine ait $u$ veya $v$ lerden biri sabit iken diğeri değişken değerler alıyorsa, $\varphi^r(u,v)$ yüzeyi, paralel regle Weingarten yüzey olur.

**İspat:** Teorem 3.2.12 gereğince $\varphi^r(u,v)$ yüzeyi, açılabilir spacelike paralel regle yüzeydir. Dolayısıyla Teorem 3.1.7 nin (3.17) eşitliğinden $K^r = 0$ olur. Bu ise yüzeyin (4.2) bağıntısını sağlaması ve Weingarten yüzey olması demektir.

**Teorem 4.1.4:** $\mathbb{E}_1^3$ de $\varphi$ spacelike regle yüzeyin Weingarten yüzey olmasının gerek ve yeter şartı $\varphi^r$ paralel yüzeyinin Weingarten yüzey olmasıdır.

**İspat:** ($\Rightarrow$): $\mathbb{E}_1^3$ de $\varphi$ bir spacelike regle Weingarten yüzey olduğunda (2.27) eşitliği kullanılarak, (4.2) gösterilmelidir.

$$\triangle = \frac{1}{(1-2rH-r^2K)^4}$$

alınıp, (3.17) ve (3.18) eşitlikleri (4.2) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r &= \left(\frac{K}{1-2rH-r^2K}\right)_u \left(\frac{H+rK}{1-2rH-r^2K}\right)_v \\
&\quad - \left(\frac{K}{1-2rH-r^2K}\right)_v \left(\frac{H+rK}{1-2rH-r^2K}\right)_u \\
&= \triangle\{[K_u\text{-}2rK_uH + 2rKH_u].[H_v + rK_v\text{-}r^2K_vH + r^2KH_v] \\
&\quad -[K_v\text{-}2rK_vH + 2rKH_v].[H_u + rK_u\text{-}r^2K_uH + r^2KH_u]\}
\end{aligned}$$

veya

$$
\begin{aligned}
K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r \quad = \quad & \triangle\{K_u H_v + rK_u K_v\text{-}r^2 K_u K_v H + r^2 K K_u H_v \\
& -2rHK_u H_v - 2r^2 K_u K_v H + 2r^3 K_u K_v H^2 \\
& -2r^3 KHK_u H_v + 2rKH_u H_v + 2r^2 KK_v H_u \\
& \text{-}2r^3 KHK_v H_u + 2r^3 K^2 H_u H_v + 2rHK_v H_u \\
& +r^2 HK_u K_v\text{-}r^2 KK_v H_u\text{-}K_v H_u\text{-}2r^3 K^2 H_u H_v \\
& +2r^2 HK_u K_v\text{-}2r^3 H^2 K_u K_v + 2r^3 KHK_v H_u \\
& \text{-}2rKH_u H_v\text{-}r^2 KK_u H_v\text{+}2r^3 KHK_u H_v\text{-}rK_u K_v\} \quad (4.3)
\end{aligned}
$$

olur. (4.3) denkleminde gerekli düzenlemelerle

$$
\begin{aligned}
K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r \quad = \quad & \frac{1}{(1-2rH-r^2K)^4}\{[K_u H_v - K_v H_u] \\
& -2r[K_u H_v - K_v H_u] - r^2 K[K_u H_v - K_v H_u]\} \quad (4.4)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.4) eşitliğinde (2.27) eşitliği kullanılırsa,

$$
K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r = 0 \tag{4.5}
$$

bulunur. (4.5) eşitliği, $\varphi^r$ paralel yüzeyinin Weingarten yüzey olması demektir.

($\Leftarrow$): $\varphi^r$ spacelike bir regle yüzeye paralel olan Weingarten yüzey ise (4.2) eşitliği sağlanır. Bu durumda (2.27) eşitliğinin doğruluğu gösterilmelidir. (3.19) ve (3.20) eşitlikleri, $\square = \dfrac{1}{(1+2rH^r - r^2K^r)^4}$ alınıp, (2.27) eşitliğinde kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
K_u H_v - K_v H_u \quad = \quad & \left(\frac{K^r}{1+2rH^r - r^2K^r}\right)_u \left(\frac{H^r - rK^r}{1+2rH^r - r^2K^r}\right)_v \\
& - \left(\frac{K^r}{1+2rH^r - r^2K^r}\right)_v \left(\frac{H^r - rK^r}{1+2rH^r - r^2K^r}\right)_u \\
= \quad & \square\{[K_u^r + 2rK_u^r H^r - 2rK^r H_u^r].[H_v^r\text{-}rK_v^r\text{-}r^2 K_v^r H^r + r^2 K^r H_v^r] \\
& -[K_v^r + 2rK_v^r H^r - 2rK^r H_v^r].[H_u^r\text{-}rK_u^r\text{-}r^2 K_u^r H^r + r^2 K^r H_u^r]\}
\end{aligned}
$$

veya

$$\begin{aligned}
K_uH_v - K_vH_u \;=\; & \Box\{K_u^rH_v^r - rK_u^rK_v^r - r^2H^rK_u^rK_v^r + r^2K^rK_u^rH_v^r \\
& +2rH^rK_u^rH_v^r - 2r^2H^rK_u^rK_v^r - 2r^3(H^r)^2K_u^rK_v^r \\
& +2r^3K^rH^rK_u^rH_v^r - 2rK^rH_u^rH_v^r + 2r^2K^rK_v^rH_u^r \\
& +2r^3K^rH^rK_v^rH_u^r - 2r^3(K^r)^2H_u^rH_v^r - K_v^rH_u^r \\
& +rK_u^rK_v^r + r^2H^rK_u^rK_v^r - r^2K^rK_v^rH_u^r \\
& -2rH^rK_v^rH_u^r + 2r^2H^rK_u^rK_v^r + 2r^3(H^r)^2K_u^rK_v^r \\
& -2r^3K^rH^rK_v^rH_u^r + 2rK^rH_u^rH_v^r - 2r^2K^rK_u^rH_v^r \\
& -2r^3K^rH^rK_u^rH_v^r + 2r^3(K^r)^2H_u^rH_v^r\} \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

olur. (4.6) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
K_uH_v - K_vH_u \;=\; & \frac{1}{(1+2rH^r - r^2K^r)^4}\{(K_u^rH_v^r\text{-}K_v^rH_u^r) + r^2K^r(K_u^rH_v^r\text{-}K_v^rH_u^r) \\
& +2rH^r(K_u^rH_v^r - K_v^rH_u^r) + 2r^2K^r(K_u^rH_v^r - K_v^rH_u^r)\} \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.7) de (4.2) eşitliği kullanılırsa

$$K_uH_v - K_vH_u = 0$$

elde edilir. Bu ise $\varphi$ spacelike regle yüzeyinin Weingarten yüzey olması demektir.

**Sonuç 4.1.5:** $\mathbb{E}_1^3$ de $\varphi$ spacelike regle yüzeyine paralel olan $\varphi^r$ yüzeyinin Weingarten yüzey olması için gerek ve yeter şart $\varphi$ spacelike regle yüzeyini belirleyen $Q$, $J$, $F$ büyüklüklerinin sabit olmasıdır.

**İspat:** $(\Rightarrow)$ : $\varphi^r$ paralel yüzeyi, bir Weingarten yüzey olsun. Teorem 4.1.4 den $\varphi^r$ yüzeyinin asıl yüzeyi $\varphi$ spacelike regle yüzeyinin de bir Weingarten yüzey olduğu açıktır. Bunun bir sonucu olarak Teorem 2.4.5 gereğince $Q$, $J$, $F$ büyüklükleri sabittirler.

$(\Leftarrow)$ : $Q$, $J$, $F$ büyüklükleri sabit olsun. Bu durumda $\varphi$ spacelike regle yüzeyi, Teorem 2.4.5 gereğince Weingarten yüzeydir. Teorem 4.1.4 den

$\varphi$ spacelike regle Weingarten yüzeyine paralel olan $\varphi^r$ yüzeyi de Weingarten yüzeyidir.

**Sonuç 4.1.6:** $\varphi$ ve $\varphi^r$, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, sırasıyla, spacelike regle Weingarten yüzey ve spacelike paralel regle Weingarten yüzey olsun. $\varphi$ spacelike regle Weingarten yüzeyinin $Q, J, F$ sabit büyüklükleri için $\varphi^r$ nin $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğrilikleri ile $\varphi$ nin $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğrilikleri arasında

$$H^r = (r + \frac{H}{K})K^r \tag{4.8}$$

bağıntısı vardır.

**İspat:** (4.8) eşitliğinin ispatı için Sonuç 3.2.13 deki $K^r$ ve $H^r$ eğrilikleri kullanılacaktır.

$$A = D^4 - rQFD + rQ^2JD + rvQ'D + rv^2JD - r^2Q^2 \tag{4.9}$$

olarak alınsın. (4.9) eşitliğini Sonuç 3.2.13 deki $K^r$ ve $H^r$ eşitliklerinde yerine yazarsak

$$A = \frac{Q^2}{K^r} \tag{4.10}$$

veya

$$A = \frac{QFD - Q^2JD - vQ'D - v^2JD + 2rQ^2}{2H^r} \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.10) ve (4.11) ifadeleri eşitlenirse

$$\frac{Q^2}{K^r} = \frac{QFD - Q^2JD - vQ'D - v^2JD + 2rQ^2}{2H^r} \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.12) denklemi düzenlenirse

$$2H^rQ^2 = [(QF - Q^2J - vQ' - v^2J)D + 2rQ^2]K^r \tag{4.13}$$

olur. (4.13) denkleminde $D$ parantezine alınan ifade yerine Teorem 2.4.10 daki (2.32) ifadesi yazılırsa

$$2H^rQ^2 = [2D^4H + 2rQ^2]K^r$$

olur. Buradan,

$$H^r = \frac{2D^4H + 2rQ^2}{2Q^2}.K^r \tag{4.14}$$

bulunur. (4.14) eşitliği düzenlenirse

$$H^r = \left(r + \frac{D^4H}{Q^2}\right).K^r \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) eşitliğinde Teorem 2.4.10 daki (2.31) eşitliği kullanılırsa

$$H^r = (r + \frac{H}{K})K^r$$

elde edilir.

**Yardımcı Teorem 4.1.7:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $\varphi$ açılabilir olmayan spacelike regle Weingarten yüzey, $\varphi^r$ ise açılabilir olmayan spacelike regle Weingarten yüzeye paralel olan yüzey olsun. $\varphi^r$ spacelike paralel Weingarten yüzeyi üzerinde umbilik nokta yoktur.

**İspat:** $\mathbb{E}_1^3$ de spacelike regle Weingarten yüzey, $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + vX(u), \ \ \langle \alpha', \alpha' \rangle = 1, \ \ \langle X, X \rangle = 1, \langle X', X' \rangle = \varepsilon \tag{4.16}$$

parametrizasyonuyla verilsin. Teorem 2.4.5 gereğince regle yüzeyin, Weingarten yüzey olması için $Q$, $J$, $F$ büyüklükleri sabit olmalıdır. Spacelike regle Weingarten yüzey üzerinde umbilik nokta varsa, Yardımcı Teorem 2.3.41 gereğince

$$\frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g} \tag{4.17}$$

olmalıdır. (4.16) ifadesiyle verilen $\varphi(u,v)$ yüzeyinin kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
\varphi_u &= \alpha'(u) + vX'(u) \\
\varphi_v &= X(u) \\
\varphi_{uu} &= \alpha''(u) + vX''(u) \\
\varphi_{uv} &= X'(u) \\
\varphi_{vv} &= 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

olur. Yüzeye ait $I$ temel formun katsayıları (4.16) ve (4.18) nolu ifadelerden yararlanılrsa,

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 + \varepsilon v^2,\ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle \alpha', X' \rangle\ ,\ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1 \quad (4.19)$$

biçiminde bulunur. Normal vektörü $N = \alpha' \wedge X + vX' \wedge X$ dir. Buradan $II$ temel formun katsayıları;

$$e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \langle \alpha'', \alpha' \wedge X \rangle + v \langle \alpha'', X' \wedge X \rangle + v \langle X'', \alpha' \wedge X \rangle + v^2 \langle X'', X' \wedge X \rangle$$

ve

$$f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \langle \alpha', X \wedge X' \rangle \quad (4.20)$$

ve

$$g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = 0. \quad (4.21)$$

olur. (4.19), (4.20) ve (4.21) eşitlikleri (4.17) eşitliğinde kullanılırsa

$$Fg - Gf = -\langle X, X \rangle \langle \alpha', X \wedge X' \rangle \quad (4.22)$$

elde edilir. Spacelike regle yüzey için $\langle X, X \rangle = 1$ alındığında ve Teorem 2.4.4 deki (2.28) eşitliği, (4.22) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$Fg - Gf = -Q \quad (4.23)$$

elde edilir. (4.23) eşitliği (4.17) eşitliği ile çeliştiğinden spacelike regle Weingarten yüzey üzerinde umbilik nokta yoktur. Dolayısıyla Teorem 2.3.55 in (2) nolu özelliğinden spacelike regle Weingarten yüzeye paralel olan Weingarten yüzey üzerinde de umbilik nokta yoktur.

## 4.2 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski Uzayında Timelike Paralel Regle Weingarten Yüzeyler

Bu kısımda açılabilir olmayan timelike regle Weingarten yüzeylere paralel olan yüzeylerin Weingarten olma durumları incelenmiş ve bu tip yüzeyler için bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

**Tanım 4.2.1:** $M$, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında timelike bir yüzey, $M^r$ de bu yüzeye paralel olan timelike yüzey olsun. Bu paralel yüzeyin $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğrilikleri arasında

$$\Phi(K^r, H^r) = 0 \tag{4.24}$$

olacak şekilde fonksiyonel bir $\Phi$ bağıntısının var olması veya bununla özdeş olarak, $K^r$ ve $H^r$ eğriliklerinin kısmi türevleri lineer bağımsız ise $M^r$ yüzeyine timelike paralel Weingarten yüzey denir. Ayrıca bu paralel yüzeyin $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğriliklerinin yüzey değişkenleri cinsinden kısmi türevleri,

$$K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r = 0 \tag{4.25}$$

olur.

**Teorem 4.2.2:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, $\varphi(u, v)$, $F = f = 0$ eşitliğini sağlayan timelike yüzey olsun. Bu durumda,

$$\varphi^r(u, v) = \varphi(u, v) + rN(u, v)$$

paralel yüzeyine ait $u$ veya $v$ lerden biri sabit iken diğeri değişken değerler alıyorsa, $\varphi^r(u, v)$ yüzeyi, paralel regle Weingarten yüzey olur.

**İspat:** Teorem 3.2.26 dan $\varphi^r(u, v)$ yüzeyinin, açılabilir timelike paralel regle yüzey olduğu görülür. Dolayısıyla Teorem 3.1.16 nın (3.39) nolu eşitliğinden $K^r = 0$ olduğu görülür. Bu ise yüzeyin (4.25) bağıntısını sağlaması ve Weingarten yüzey olması demektir.

### 4.2.1 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında spacelike doğrultmanlı timelike regle yüzeye paralel olan Weingarten yüzeyler

Bu kısımda spacelike doğrultmanlı timelike regle Weingarten yüzeye paralel olan Weingarten yüzeylerle ilgili bazı teoremler verilmiştir.

**Teorem 4.2.3:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $\varphi$ spacelike doğrultmanlı açılabilir timelike regle yüzeyse, bu yüzeye paralel olan $\varphi^r$ yüzeyi, timelike paralel regle Weingarten yüzeydir.

**İspat:** Teorem 3.2.27 gereğince spacelike doğrultmanlı açılabilir timelike regle yüzeye paralel olan yüzey, açılabilir timelike regle yüzeydir. Dolayısıyla $K = 0$ dır. Teorem 3.1.16 nın (3.39) nolu eşitliğinden $K^r = 0$ dır. Bu ise, (4.25) eşitliğinin sağlanması ve yüzeyin Weingarten yüzey olması demektir.

**Teorem 4.2.4:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $\varphi$ spacelike doğrutlmanlı timelike regle yüzeyin Weingarten yüzeyi olmasının gerek ve yeter şartı $\varphi^r$ paralel yüzeyinin, Weingarten yüzeyi olmasıdır.

**İspat:** $(\Rightarrow)$ : $\mathbb{E}_1^3$ de $\varphi$ bir timelike regle Weingarten yüzey olduğunda (2.27) eşitliği kullanılarak, (4.25) gösterilmelidir. $\Omega = \dfrac{1}{1+2rH+r^2K}$ alınır, (3.39) ve (3.40) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r &= \left(\frac{K}{1+2rH+r^2K}\right)_u \left(\frac{H+rK}{1+2rH+r^2K}\right)_v \\
&\quad - \left(\frac{K}{1+2rH+r^2K}\right)_v \left(\frac{H+rK}{1+2rH+r^2K}\right)_u \\
&= \Omega\{[K_u + 2rK_uH\text{-}2rKH_u].[H_v + rK_v + r^2K_vH\text{-}r^2KH_v] \\
&\quad -[K_v + 2rK_vH\text{-}2rKH_v].[H_u + rK_u + r^2K_uH\text{-}r^2KH_u]\}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r &= \Omega\{K_uH_v + rK_uK_v + r^2K_uK_vH - r^2KK_uH_v \\
&\quad +2rHK_uH_v + 2r^2K_uK_vH + 2r^3K_uK_vH^2 \\
&\quad -2r^3KHK_uH_v - 2rKH_uH_v - 2r^2KK_vH_u \\
&\quad -2r^3KHK_vH_u + 2r^3K^2H_uH_v - K_vH_u - rK_uK_v \\
&\quad -r^2HK_uK_v + r^2KK_vH_u - 2rHK_vH_u - 2r^2HK_uK_v \\
&\quad -2r^3H^2K_uK_v + 2r^3KHK_vH_u + 2rKH_uH_v \\
&\quad +r^2KK_uH_v + 2r^3KHK_uH_v - 2r^3K^2H_uH_v\} \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa, (4.26) denklemi şu hale gelir:

$$\begin{aligned}
K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r &= \frac{1}{(1+2rH+r^2K)^4}\{[K_uH_v\text{-}K_vH_u] + 2rH[K_uH_v\text{-}K_vH_u] \\
&\quad +2r^3KH[K_uH_v\text{-}K_vH_u] + r^2K[K_uH_v\text{-}K_vH_u]\}. \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

(4.27) eşitliğinde (2.16) eşitliği kullanılarak,

$$K_u^r H_v^r - K_v^r H_u^r = 0$$

elde edilir. Bu ifade, $\varphi^r$ paralel yüzeyinin Weingarten yüzey olduğu anlamına gelir.

($\Leftarrow$) : $\varphi^r$ timelike bir regle yüzeye paralel Weingarten yüzey ise, (4.25) eşitliği sağlanır. Bu durumda (2.27) eşitliğinin doğruluğu gösterilmelidir. $\Gamma = \dfrac{1}{1-2rH^r + r^2K^r}$ alınır, (3.41) ve (3.42) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
K_uH_v - K_vH_u &= \left(\frac{K^r}{1-2rH^r + r^2K^r}\right)_u \left(\frac{H^r - rK^r}{1-2rH^r + r^2K^r}\right)_v \\
&\quad - \left(\frac{K^r}{1-2rH^r + r^2K^r}\right)_v \left(\frac{H^r - rK^r}{1-2rH^r + r^2K^r}\right)_u \\
&= \Gamma\{[K_u^r\text{-}2rK_u^rH^r + 2rK^rH_u^r].[H_v^r\text{-}rK_v^r + r^2K_v^rH^r\text{-}r^2K^rH_v^r] \\
&\quad -[K_v^r\text{-}2rK_v^rH^r + 2rK^rH_v^r].[H_u^r\text{-}rK_u^r + r^2K_u^rH^r\text{-}r^2K^rH_u^r]\}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
K_uH_v - K_vH_u &= \Gamma\{K_u^rH_v^r - rK_u^rK_v^r + r^2H^rK_u^rK_v^r - r^2K^rK_u^rH_v^r \\
&\quad -2rH^rK_u^rH_v^r + 2r^2H^rK_u^rK_v^r - 2r^3(H^r)^2K_u^rK_v^r \\
&\quad +2r^3K^rH^rK_u^rH_v^r + 2rK^rH_u^rH_v^r - 2r^2K^rK_v^rH_u^r \\
&\quad +2r^3K^rH^rK_v^rH_u^r - 2r^3(K^r)^2H_u^rH_v^r - K_v^rH_u^r \\
&\quad +rK_u^rK_v^r - r^2H^rK_u^rK_v^r + r^2K^rK_v^rH_u^r \\
&\quad +2rH^rK_v^rH_u^r - 2r^2H^rK_u^rK_v^r + 2r^3(H^r)^2K_u^rK_v^r \\
&\quad -2r^3K^rH^rK_v^rH_u^r - 2rK^rH_u^rH_v^r + 2r^2K^rK_u^rH_v^r \\
&\quad -2r^3K^rH^rK_u^rH_v^r + 2r^3(K^r)^2H_u^rH_v^r\} \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

olur. (4.28) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
K_uH_v - K_vH_u &= \frac{1}{(1-2rH^r + r^2K^r)^4}\{(K_u^rH_v^r\text{-}K_v^rH_u^r)\text{-}r^2K^r(K_u^rH_v^r\text{-}K_v^rH_u^r) \\
&\quad \text{-}2rH^r(K_u^rH_v^r\text{-}K_v^rH_u^r) + 2r^2K^r(K_u^rH_v^r\text{-}K_v^rH_u^r)\}. \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

olur. (4.29) eşitliğinde (4.25) eşitliği kullanılarak,

$$K_u H_v - K_v H_u = 0$$

elde edilir. Bu ifade $\varphi$ timelike regle yüzeyinin, Weingarten yüzey olduğu anlamına gelir.

**Sonuç 4.2.5:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $\varphi$ spacelike doğrultmanlı timelike regle yüzeyine paralel olan $\varphi^r$ yüzeyinin Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter şart $\varphi$ timelike regle yüzeyini belirleyen $Q, J, F$ büyüklüklerinin sabit olmasıdır.

**İspat:** $(\Rightarrow)$ : $\varphi^r$ paralel yüzeyi, bir Weingarten yüzey olsun. Teorem 4.2.4 gereğince $\varphi^r$ yüzeyinin asıl yüzeyi spacelike doğrultmanlı $\varphi$ timelike regle yüzeyi de bir Weingarten yüzeydir. Bunun bir sonucu olarak Teorem 2.4.5 gereğince $Q$, $J$, $F$ büyüklükleri sabittirler.

$(\Leftarrow)$ : $Q$, $J$, $F$ büyüklükleri sabit olsun. Bu durumda spacelike doğrultmanlı $\varphi$ timelike regle yüzeyi, Teorem 2.4.5 gereğince, Weingarten yüzeydir. Teorem 4.2.4 gereğince spacelike doğrultmanlı $\varphi$ timelike regle Weingarten yüzeyine paralel olan $\varphi^r$ yüzeyi, Weingarten yüzey olur.

**Sonuç 4.2.6:** $\varphi$ ve $\varphi^r$, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, sırasıyla spacelike doğrultmanlı timelike regle yüzey ve timelike paralel regle yüzey olsun. $\varphi^r$ timelike paralel regle yüzeyinin $Q, J, F$ sabit büyüklükleri için $\varphi^r$ nin $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğrilikleri ile $\varphi$ nin $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğrilikleri arasında,

$$H^r = \left(r + \frac{H}{K}\right) K^r \tag{4.30}$$

bağıntısı vardır.

**İspat:** (4.30) eşitliğinin ispatı için Sonuç 3.2.38 deki $K^r$ ve $H^r$ eğriliklerine ait eşitlikleri kullanacağız. Bu eşitliklerin paydaları

$$A = D^4 - rQFD + rQ^2JD + rvQ'D + rv^2JD - r^2Q^2 \tag{4.31}$$

ile gösterilsin. (4.31) eşitliği, Sonuç 3.2.38 deki $K^r$ ve $H^r$ eğriliklerine ait eşitliklerde kullanılırsa

$$A = -\frac{Q^2}{K^r} \tag{4.32}$$

ve

$$A = \frac{-QFD + Q^2JD + vQ'D + v^2JD - 2rQ^2}{2H^r} \tag{4.33}$$

elde edilir. (4.32) ve (4.33) ifadeleri eşitlenirse

$$\frac{Q^2}{K^r} = \frac{QFD - Q^2JD - vQ'D - v^2JD + 2rQ^2}{2H^r} \tag{4.34}$$

elde edilir. (4.34) denklemi

$$2H^rQ^2 = [(QF - Q^2J - vQ' - v^2J)D + 2rQ^2]K^r \tag{4.35}$$

şeklinde yazılır. (4.35) denkleminde, $D$ parantezine alınan ifade yerine Teorem 2.4.15 deki (2.34) eşitliği yazılırsa

$$2H^rQ^2 = [-2D^4H + 2rQ^2]K^r$$

dır. Buradan,

$$H^r = \frac{-2D^4H + 2rQ^2}{2Q^2}.K^r \tag{4.36}$$

dır. (4.36) eşitliği düzenlenirse

$$H^r = \left(r - \frac{D^4H}{Q^2}\right).K^r \tag{4.37}$$

olur. (4.37) eşitliğinde, Teorem 2.4.15 deki (2.33) eşitliği kullanılırsa

$$H^r = (r + \frac{H}{K})K^r$$

elde edilir.

**Yardımcı Teorem 4.2.7:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $\varphi$ açılabilir olmayan spacelike doğrultmanlı timelike regle Weingarten yüzey, $\varphi^r$ ise açılabilir olmayan timelike regle Weingarten yüzeye paralel olan yüzey olsun. $\varphi^r$ timelike paralel Weingarten yüzeyi üzerinde umbilik nokta yoktur.

**İspat:** $\mathbb{E}_1^3$ de açılabilir olmayan spacelike doğrultmanlı timelike regle Weingarten yüzey

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + vX(u), \ \ \langle \alpha', \alpha' \rangle = -1, \ \ \langle X, X \rangle = 1 \text{ ve } \langle X', X' \rangle = -1 \quad (4.38)$$

parametrizasyonuyla verilsin. Teorem 2.4.5 gereğince regle yüzeyin, Weingarten yüzey olması için $Q$, $J$, $F$ büyüklükleri sabit olmalıdır. Timelike regle Weingarten yüzey üzerinde umbilik nokta varsa, Yardımcı Teorem 2.3.41 deki (2.14) sağlanmalıdır. Yüzeye ait $I$ temel formun katsayıları, (4.18) deki eşitlikler ile (4.38) deki bilgiler kullanılarak

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = -1 - v^2, \ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle \alpha', X' \rangle, \ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1 \quad (4.39)$$

bulunur. Normal vektörü $N = \alpha' \wedge X + vX' \wedge X$ dir. Buradan $II$ temel formun katsayıları;

$$e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \langle \alpha'', \alpha' \wedge X \rangle + v \langle \alpha'', X' \wedge X \rangle + v \langle X'', \alpha' \wedge X \rangle + v^2 \langle X'', X' \wedge X \rangle$$

ve

$$f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \langle \alpha', X \wedge X' \rangle \quad (4.40)$$

ve

$$g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = 0 \quad (4.41)$$

dır. (4.39), (4.40) ve (4.41) eşitlikleri (2.14) de kullanılırsa

$$Fg - Gf = -\langle X, X \rangle \langle \alpha', X \wedge X' \rangle \quad (4.42)$$

elde edilir. Timelike regle yüzey için $\langle X, X \rangle = 1$ alınır ve Teorem 2.4.4 deki (2.28) eşitliği (4.42) da yerine yazılırsa

$$Fg - Gf = -Q \quad (4.43)$$

elde edilir. (4.43) eşitliği (2.14) eşitliği ile çeliştiğinden timelike regle Weingarten yüzey üzerinde umbilik nokta yoktur. Dolayısıyla Teorem 2.3.55 in (2) nolu özelliği gereğince timelike regle Weingarten yüzeye paralel olan yüzey üzerinde de umbilik nokta yoktur.

### 4.2.2 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında timelike doğrultmanlı timelike regle yüzeye paralel olan Weingarten yüzeyler

Bu kısımda timelike doğrultmanlı timelike regle Weingarten yüzeye paralel olan Weingarten yüzeylerle ilgili bazı teoremler verilmiştir.

**Teorem 4.2.8:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, $\varphi$ timelike doğrultmanlı açılabilir timelike regle yüzeyse, bu yüzeye paralel olan $\varphi^r$ yüzeyi, timelike paralel regle Weingarten yüzeydir.

**İspat:** Teorem 3.2.14 gereğince timelike doğrultmanlı açılabilir timelike regle yüzeye paralel olan yüzey, açılabilir spacelike regle yüzeydir. Dolayısıyla $K = 0$ dır. Teorem 3.1.16 nın (3.39) eşitliğinden $K^r = 0$ dır. Bu ise (4.25) in sağlanması ve yüzeyin Weingarten yüzey olması demektir.

**Teorem 4.2.9:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, $\varphi$ timelike doğrultmanlı timelike regle yüzeyin Weingarten yüzeyi olmasının gerek ve yeter şartı $\varphi^r$ paralel yüzeyinin, Weingarten yüzey olmasıdır.

**İspat:** Bu teoremin ispatı Teorem 4.2.4 ün ispatına benzer yöntemle görülebilir.

**Sonuç 4.2.10:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, $\varphi$ timelike doğrultmanlı timelike regle yüzeyine paralel olan $\varphi^r$ yüzeyinin Weingarten yüzey olması için gerek ve yeter şart $\varphi$ timelike regle yüzeyini belirleyen $Q, J, F$ büyüklüklerinin sabit olmasıdır.

**İspat:** ($\Rightarrow$): $\varphi^r$ paralel yüzeyi, bir Weingarten yüzey olsun. Teorem 4.2.9 gereğince $\varphi^r$ yüzeyinin asıl yüzeyi timelike doğrultmanlı $\varphi$ timelike regle yüzeyinin de bir Weingarten yüzey olduğu görülür. Teorem 2.4.5 gereğince $Q$, $J$, $F$ büyüklükleri sabittirler.

($\Leftarrow$) : $Q$, $J$, $F$ büyüklükleri sabit olsun. Bu durumda timelike doğrultmanlı $\varphi$ timelike regle yüzeyi, Teorem 2.4.5 den dolayı Weingarten yüzeydir. Teorem 4.2.9 dan timelike doğrultmanlı $\varphi$ timelike regle yüzeyine paralel olan $\varphi^r$ yüzeyinin Weingarten yüzeyi olduğu görülür.

**Sonuç 4.2.11:** $\varphi$ ve $\varphi^r$, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, sırasıyla, timelike doğrultmanlı timelike regle yüzey ve timelike paralel regle yüzey olsun. $\varphi^r$ timelike paralel regle yüzeyinin $Q, J, F$ sabit büyüklükleri için, $\varphi^r$ nin $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğrilikleri ile $\varphi$ nin $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğrilikleri arasında

$$H^r = \left(r + \frac{H}{K}\right) K^r$$

bağıntısı vardır.

**İspat:** Bu eşitliğin ispatı için Sonuç 3.2.25 deki $K^r$ ve $H^r$ eğriliklerine ait eşitlikleri kullanacağız. Bu eşitliklerin paydaları

$$A = D^4 - rQFD - rQ^2JD + rvQ'D - rv^2JD - r^2Q^2 \tag{4.44}$$

ile gösterilsin. (4.44) eşitliği, Sonuç 3.2.25 deki $K^r$ ve $H^r$ eğriliklerine ait eşitliklerde kullanılırsa

$$A = -\frac{Q^2}{K^r} \tag{4.45}$$

ve

$$A = \frac{QFD - Q^2JD - vQ'D - v^2JD + 2rQ^2}{2H^r} \tag{4.46}$$

elde edilir. (4.45) ve (4.46) ifadeleri eşitlenirse

$$\frac{Q^2}{K^r} = \frac{QFD + Q^2JD - vQ'D + v^2JD + 2rQ^2}{2H^r} \tag{4.47}$$

dir. (4.47) denklemi

$$2H^rQ^2 = [(QF + Q^2J - vQ' + v^2J)D + 2rQ^2]K^r \tag{4.48}$$

şeklinde yazılır. (4.48) denkleminde $D$ parantezine alınan ifade yerine Teorem 2.4.20 deki (2.36) eşitliği yazılırsa

$$2H^rQ^2 = [-2D^4H + 2rQ^2]K^r$$

elde edilir. Buradan,

$$H^r = \frac{-2D^4H + 2rQ^2}{2Q^2}.K^r \tag{4.49}$$

dır. (4.49) eşitliği düzenlenirse

$$H^r = \left(r - \frac{D^4 H}{Q^2}\right).K^r \tag{4.50}$$

dir. (4.50) eşitliğinde, Teorem 2.4.20 deki (2.35) eşitliği kullanılırsa

$$H^r = (r + \frac{H}{K})K^r$$

elde edilir.

**Yardımcı Teorem 4.2.12:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $\varphi$ açılabilir olmayan timelike doğrultmanlı timelike regle Weingarten yüzey, $\varphi^r$ ise açılabilir olmayan timelike regle Weingarten yüzeye paralel olan yüzey olsun. $\varphi^r$ timelike paralel Weingarten yüzeyi üzerinde umbilik nokta yoktur.

**İspat:** $\mathbb{E}_1^3$ de açılabilir olmayan timelike doğrultmanlı timelike regle Weingarten yüzey

$$\varphi(u,v) = \alpha(u) + vX(u), \ \langle \alpha', \alpha' \rangle = 1, \ \langle X, X \rangle = -1, \ \langle X', X' \rangle = 1 \tag{4.51}$$

parametrizasyonuyla verilsin. Teorem 2.4.5 gereğince regle yüzeyin, Weingarten yüzey olması için $Q$, $J$, $F$ büyüklükleri sabit olmalıdır. Timelike regle Weingarten yüzey üzerinde umbilik nokta varsa, Yardımcı Teorem 2.3.41 deki (2.14) sağlanmalıdır. Yüzeye ait $I$ temel formun katsayıları, (4.18) deki eşitlikler ile (4.51) deki eşitlik kullanılarak

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1 + v^2, \ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle \alpha', X' \rangle, \ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = -1 \tag{4.52}$$

elde edilir. Normal vektörü $N = \alpha' \wedge X + vX' \wedge X$ dir. Buradan $II$ temel formun katsayıları;

$$e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = \langle \alpha'', \alpha' \wedge X \rangle + v \langle \alpha'', X' \wedge X \rangle + v \langle X'', \alpha' \wedge X \rangle + v^2 \langle X'', X' \wedge X \rangle$$

ve

$$f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \langle \alpha', X \wedge X' \rangle \tag{4.53}$$

ve

$$g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = 0 \tag{4.54}$$

dir. (4.52), (4.53) ve (4.54) eşitlikleri (2.14) de kullanılırsa

$$Fg - Gf = -\langle X, X \rangle \langle \alpha', X \wedge X' \rangle \tag{4.55}$$

elde edilir. Timelike regle yüzey için $\langle X, X \rangle = -1$ alındığında ve Teorem 2.4.4 deki (2.28) eşitliği (4.55) de yerine yazılırsa

$$Fg - Gf = Q \tag{4.56}$$

elde edilir. (4.56) eşitliği (2.14) eşitliğiyle çeliştiğinden timelike regle Weingarten yüzey üzerinde umbilik nokta yoktur. Dolayısıyla Teorem 2.3.55 in (2) nolu özelliğinden timelike regle Weingarten yüzeye paralel olan yüzey üzerinde de umbilik nokta yoktur.

**Null doğrultmanlı timelike regle yüzeye paralel olan Weingarten yüzeyler**

Bu kısımda, null doğrultmanlı timelike regle yüzeye paralel olan yüzeyin Weingarten yüzey olduğu ifade edilmiştir.

**Teorem 4.2.13:** $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında null doğrultmanlı herhangi bir regle yüzeye paralel olan yüzey, Weingarten yüzeydir.

**İspat:** $\mathbb{E}_1^3$ de null doğrultmanlı regle yüzey, $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + vX(u), \ \langle \alpha', \alpha' \rangle = \varepsilon, \ \langle X, X \rangle = 0, \ \langle X', X' \rangle = 1 \tag{4.57}$$

parametrizasyonuyla verilsin. (4.57) ve (4.18) eşitlikleri kullanılarak $I$ temel formun katsayıları

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \varepsilon + v^2, \ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle \alpha', X' \rangle, \ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 0 \tag{4.58}$$

dir. Normal vektörü $N = \alpha' \wedge X + vX' \wedge X$ dir. Yüzeyin $II$ temel form katsayıları

$$\begin{aligned} e &= \langle \varphi_{uu}, N \rangle \\ &= \langle \alpha'' + vX'', \alpha' \wedge X + vX' \wedge X \rangle \\ &= \langle \alpha'', \alpha' \wedge X \rangle + v \langle \alpha'', X' \wedge X \rangle + v \langle X'', \alpha' \wedge X \rangle + v^2 \langle X'', X' \wedge X \rangle \end{aligned}$$

$$f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \langle X', \alpha' \wedge X + vX' \wedge X \rangle = \langle \alpha', X \wedge X' \rangle \tag{4.59}$$

olur. Teorem 2.4.4 deki (2.28) eşitliği, (4.59) da kullanılırsa

$$f = -Q \tag{4.60}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = 0 \tag{4.61}$$

bulunur. (2.10) ve (2.11) eşitliklerinde, (4.58), (4.59), (4.60) ve (4.61) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$K = \frac{Q^2}{F} \tag{4.62}$$

$$H = -\frac{Q}{F} \tag{4.63}$$

olarak bulunur. Bu sonuç aracılığıyla, $K$ ve $H$ eğriliklerinin, tek parametreye bağlı olduğu görülür. Dolayısıyla null doğrultmanlı timelike regle yüzeyi, Weingarten yüzeydir. Paralel yüzeyin Weingarten yüzeyi olup olmayacağı incelenecek olursa, Teorem 3.1.16 daki (3.39) ve (3.40) eşitliklerinde, (4.62) ve (4.63) eşitlikleri yazılırsa

$$K^r = \frac{Q^2}{F - 2rQ + r^2Q^2} \tag{4.64}$$

$$H^r = \frac{-Q + rQ^2}{F - 2rQ + r^2Q^2} \tag{4.65}$$

elde edilir. (4.64) ve (4.65) eşitlikleri tek parametreye bağlı olduğundan null doğrultmanlı timelike regle yüzeye paralel olan yüzey, Weingarten yüzeyidir.

**Sonuç 4.2.14:** $\varphi$, $\mathbb{E}_1^3$ de null doğrultmanlı bir timelike regle yüzey ve $\varphi^r$, $\varphi$ ye paralel olan Weingarten yüzey olsun. Bu durumda paralel Weingarten yüzeyin $K^r$ Gauss eğriliği ile $H^r$ ortalama eğriliği arasında

$$H^{r2} = K^r$$

bağıntısı vardır.

**İspat:** Teorem 2.4.25 gereğince null doğrultmanlı timelike regle yüzeye ait $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğrilikleri arasında

$$H^2 = K \tag{4.66}$$

bağıntısı vardır. (4.66) daki $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğriliklerine ait eşitliklerde Sonuç 3.1.17 deki (3.41) ve (3.42) eşitliklerinin karşılıkları yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{H^r - rK^r}{1 - 2rH^r + r^2K^r}\right)^2 &= \frac{K^r}{1 - 2rH^r + r^2K^r} \\
\frac{(H^r - rK^r)^2}{1 - 2rH^r + r^2K^r} &= K^r \\
H^{r2} - 2rK^rH^r + r^2K^{r2} &= K^r - 2rK^rH^r + r^2K^{r2} \\
H^{r2} &= K^r
\end{aligned}$$

elde edilir.

## 4.3 Örnekler

Bu kısımda, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında regle Weingarten yüzeylere örnekler verilmiştir. Bu yüzeylerin, paralel yüzeyleri için Weingarten olabilme özellikleri incelenmiş ve bu regle yüzeyler maple yazılımı kullanılarak çizdirilmiştir.

**Örnek 4.3.1:** Bir doğru parçasının spacelike eksen etrafındaki helikoidsel hareketinin sonucunda elde edilen 1. çeşit helikoid yüzeyi

$$\varphi(u, v) = (au, v\cos u, v\sin u)$$

parametrizasyonuyla verilsin. Burada $a = 1$ ve $-1 + v^2 > 0$ olmak üzere 1. çeşit helikoid yüzeyin denklemi

$$\varphi(u, v) = (u, 0, 0) + v(0, \cos u, \sin u)$$

dir. Bu yüzeyin belli parametreler için grafiği, maple yazılımı yardımıyla (Şekil 4.1) deki gibidir. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$\alpha(u) = (u, 0, 0) \Rightarrow \alpha'(u) = (1, 0, 0) \Rightarrow \langle c', c' \rangle = -1 < 0$$

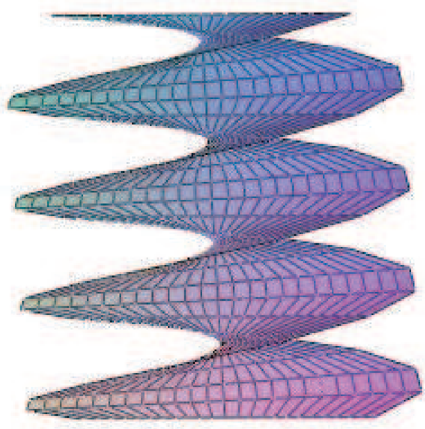
olduğundan timelike bir eğridir. Doğrultmanı

$$X(u) = (0, \cos u, \sin u) \Rightarrow \langle X, X \rangle = 1 > 0$$

olduğundan spacelike bir vektördür. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$E = -1^2 + v^2, \; F = 0, \; G = 1 \tag{4.67}$$

dır. Bu yüzey, $-1 < v < 1$ aralığında timelike bir parçaya sahiptir.



Şekil 4.1

Birim normal vektörü

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}(v, -\sin u, \cos u)$$

dur. $II$ temel formun katsayıları

$$e = 0,\ f = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}},\ g = 0 \tag{4.68}$$

dır. (4.67) ve (4.68) eşitlikleri, (2.10) ve (2.11) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa

$$K = -\frac{1}{(-1+v^2)(1-v^2)} \quad \text{ve } H = 0 \tag{4.69}$$

elde edilir. $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğriliklerinin $u$ ve $v$ değişkenlerine bağlı kısmi türevleri yardımıyla $K_u H_v - K_v H_u = 0$ eşitliği elde edilir. Böylece timelike helikoidsel regle yüzey, Weingarten yüzeyidir. Bu yüzeyin paralel yüzeyi de Weingarten yüzeyidir. Çünkü Teorem 3.1.16 daki (3.39) ve (3.40) nolu ifadelerde (4.69) daki bilgiler kullanılırsa, paralel yüzeyin $K^r$ Gauss eğriliği ile $H^r$ ortalama eğriliği,

$$K^r = -\frac{1}{(-1+v^2)(1-v^2)-r^2} \tag{4.70}$$

$$H^r = -\frac{2r}{(-1+v^2)(1-v^2)-r^2} \tag{4.71}$$

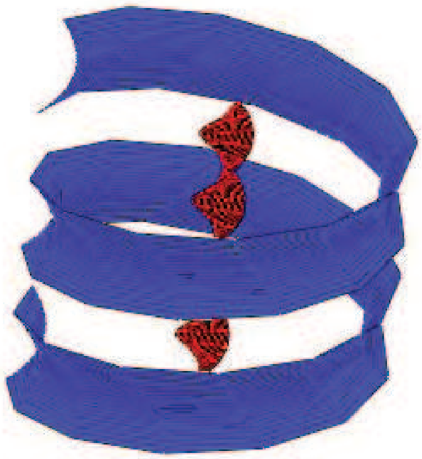
olarak bulunur. Paralel yüzeyin $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğriliklerinin (4.70) ve (4.71) eşitliklerindeki karşılıklarının $u$ değişkenine göre kısmi türevleri 0 olacağından, timelike helikoidsel regle Weingarten yüzeyin paralel yüzeyi de Weingarten yüzeydir. Ayrıca (4.70) ve (4.71) eşitliklerinden $2rK^r = H^r$ biçimindeki paralel yüzeyin Weingarten yüzey olduğu sonucuna ulaşmamızı sağlayan bağıntı elde edilir.

$\varphi(u,v) = (u, v\cos u, v\sin u)$ parametrik denklemi ile verilen timelike helikoidsel regle Weingarten yüzeyin grafiği (Şekil 4.1) de verilmiştir. Bu yüzeyden yola çıkarak timelike helikoidsel regle yüzeye paralel olan Weingarten yüzeyi

$$\varphi^r(u,v) = (au + \frac{vr}{\sqrt{a^2-v^2}}, v\cos u - \frac{ar\sin u}{\sqrt{a^2-v^2}}, v\sin u + \frac{ar\cos u}{\sqrt{a^2-v^2}})$$

parametrizasyonu ile verilir. (Şekil 4.2) deki grafikde, mavi yüzey paralel

Weingarten yüzeyi gösterir.



Şekil 4.2

**Örnek 4.3.2:** Bir doğru parçasının timelike eksen etrafındaki helikoidsel hareketinin sonucunda elde edilen 2. çeşit helikoid yüzeyi

$$\varphi(u, v) = (v \sinh u, v \cosh u, au)$$

parametrizasyonuyla verilen bir regle yüzeydir. $a = 1$ olarak alınırsa

$$\varphi(u, v) = (0, 0, u) + v(\sinh u, \cosh u, 0)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi,

$$\alpha(u) = (0, 0, u) \Rightarrow \alpha'(u) = (0, 0, 1) \Rightarrow \langle \alpha', \alpha' \rangle = 1 > 0$$

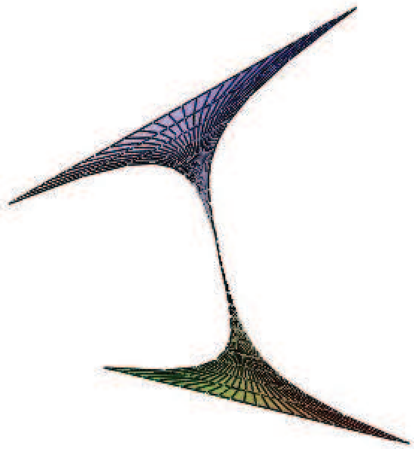
olduğundan spacelike bir eğridir. Doğrultmanı

$$X(u) = (\sinh u, \cosh u, 0) \Rightarrow \langle X, X \rangle = 1 > 0$$

olduğundan spacelike bir vektördür. 2. çeşit helikoid yüzeyi $\varphi$, $-1 < v < 1$ aralığında spacelike bir yüzeydir. Teorem 2.4.4 deki (2.28), (2.29) ve (2.30) eşitliklerinden $Q$, $J$ ve $F$ değerleri hesaplanırsa

$$Q = -1, \ J = 0 \text{ ve } F = 0 \tag{4.72}$$

olur. (4.72) eşitliğindeki $Q$, $J$ ve $F$ büyüklükleri sabittir, Sonuç 4.1.5 gereğince $\varphi^r$ paralel yüzeyi, Weingarten yüzeydir. (Şekil 4.3) de spacelike 2. çeşit helikoidsel regle yüzeyi görülür.



Şekil 4.3

$\varphi$ spacelike 2. çeşit helikoidsel regle yüzeyine paralel olan $\varphi^r$ yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi^r(u,v) = (v\sinh u + \frac{ar\cosh u}{\sqrt{a^2-v^2}}, v\cosh u + \frac{ar\sinh u}{\sqrt{a^2-v^2}}, au + \frac{vr}{\sqrt{a^2-v^2}})$$

dir. (Şekil 4.4) de mavi yüzey paralel yüzeyi, kırmızı yüzey ise asli yüzeyi temsil etmektedir.

Şekil 4.4

**Örnek 4.3.3:** Bir doğru parçasının timelike eksen etrafındaki helikoidsel hareketinin sonucunda elde edilen 3. çeşit helikoid yüzeyi

$$\varphi(u,v) = (v\cosh u, v\sinh u, au)$$

parametrizasyonuyla verilen bir regle yüzeydir. Çünkü, bu yüzey

$$\varphi(u,v) = (0,0,au) + v(\cosh u, \sinh u, 0)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi, ($a = 1$ için)

$$\alpha(u) = (0,0,u) \Rightarrow \alpha'(u) = (0,0,1) \Rightarrow \langle \alpha', \alpha' \rangle = 1^2 > 0$$

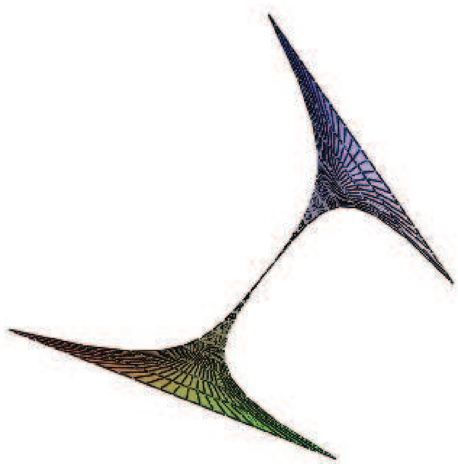
olduğundan spacelike bir eğridir. Doğrultmanı

$$X(u) = (\cosh u, \sinh u, 0) \Rightarrow \langle X, X \rangle = -1 < 0$$

olduğundan timelike bir vektördür. Yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$E = v^2 + 1, \;\; F = 0, \;\; G = -1$$

dir. $\det I = EG - F^2 = -1^2 - v^2 < 0$ dan yüzey, bütünüyle timelike yüzeydir. (Şekil 4.5) de 3. çeşit helikoidsel timelike regle yüzeyi $\varphi$ görülür.



Şekil 4.5

$\varphi$ yüzeyinin birim normal vektörü

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}(\sinh u, \cosh u, -v)$$

dir. $II$ temel form katsayıları

$$e = 0,\ f = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}},\ g = 0$$

dır. Öncelikle (3.1)-(3.6) eşitliklerini kullanarak paralel yüzeye ait $I$ ve $II$ temel form katsayıları

$$E^r = \frac{(1+v^2)-r^2}{1+v^2},\ F^r = \frac{-2r}{\sqrt{1+v^2}},\ G^r = \frac{r^2-(1+v^2)^2}{(1+v^2)^2} \tag{4.73}$$

ve

$$e^r = \frac{r^2}{1+v^2},\ f^r = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}},\ g^r = -\frac{r}{(1+v^2)^2} \tag{4.74}$$

elde edilir.

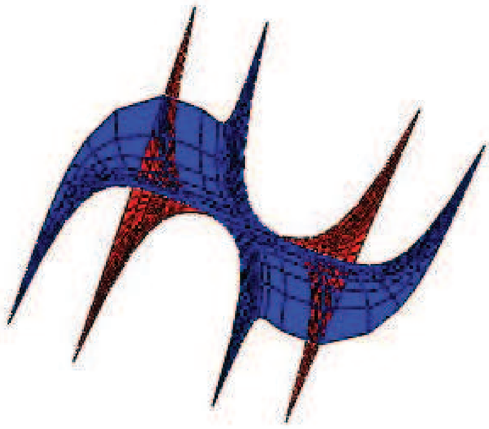
$$\varphi^r(u,v) = (v\cosh u + \frac{r\sinh u}{\sqrt{1+v^2}}, v\sinh u + \frac{r\cosh u}{\sqrt{1+v^2}}, u - \frac{vr}{\sqrt{1+v^2}})$$

parametrizasyonuyla verilen paralel yüzeyin $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğrilikleri (4.73) ve (4.74) deki ifadeler Teorem 3.1.15 deki formüller yardımıyla hesaplanırsa,

$$K^r = \frac{1}{(1+v^2)+r^2}$$

$$H^r = \frac{2r}{(1+v^2)^2+r^2}$$

olarak bulunur. Bu eşitliklerden $2rK^r = H^r$ şeklindeki paralel yüzeyin Weingarten yüzey olduğu sonucuna ulaşmamızı sağlayan bağıntı elde edilir. Ayrıca, paralel yüzeyin $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğriliklerinin $u$ değişkenine göre kısmi türevleri 0 olacağından, timelike helikoidsel regle Weingarten yüzeyin paralel yüzeyi (4.25) eşitliğini sağladığından Weingarten yüzeydir. (Şekil 4.6) asıl yüzey ile paralel yüzeyi temsil edilmektedir.



Şekil 4.6

**Örnek 4.3.4:** İki boyutlu ivor olarak isimlendirilen yüzey

$$\varphi(u,v) = (v\cosh u, v\sinh u, u+v)$$

parametrizasyonuyla verilsin (Schucking and Wang; 1987). Bu yüzey regle yüzeydir:

$$\varphi(u,v) = (0,0,u) + v(\cosh u, \sinh u, 1), \;\; \langle \alpha', \alpha' \rangle = 1, \;\; \langle X, X \rangle = 0.$$

Yüzeye ait $I$ temel form katsayıları

$$E = 1 + v^2, \;\; F = 1, \;\; G = 0 \tag{4.75}$$

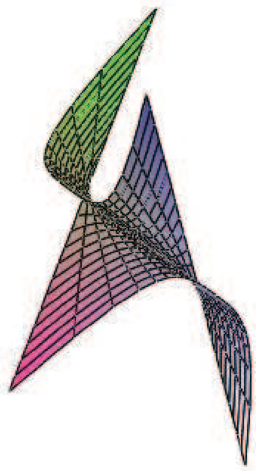
dır. $\det I = EG - F^2 = -1 < 0$ olduğundan yüzey timelike regle yüzeydir. Yüzeyin birim normal vektörü

$$\overrightarrow{N} = (\sinh u - v\cosh u, \cosh u - v\sinh u, -v)$$

dir. $II$ temel form katsayıları

$$e = v^2, \;\; f = 1, \;\; g = 0 \tag{4.76}$$

dır. Bu yüzeyin belli parametreler için grafiği, maple yazılımı yardımıyla (Şekil 4.7) deki gibidir.



Şekil 4.7

Timelike yüzey için (4.75) ve (4.76) eşitlikleri (2.10) ve (2.11) eşitliklerindeki $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğrilik formüllerinde kullanılırsa

$$K = 1 \text{ ve } H = -1$$

elde edilir. $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğriliklerinin $u$ ve $v$ değişkenlerine bağlı kısmi türevleri hesaplanıp $K_u H_v - K_v H_u = 0$ eşitliği elde edilir. Timelike regle yüzeyinin, Weingarten yüzeyi olduğu görülür. Bu yüzeyin paralel yüzeyinin de Weingarten yüzeyi olduğunu gösterelim; Teorem 3.1.16 daki (3.39) ve (3.40) eşitliklerinde yukarıda bulduğumuz $K$ Gauss ve $H$ ortalama eğrilikleri yerlerine yazılarak,

$$K^r = \frac{1}{(1+r)^2} \text{ ve } H^r = \frac{1}{1+r}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden $K^r = H^{r2}$ şeklindeki paralel yüzeyin Weingarten yüzey olduğu sonucuna ulaşmamızı sağlayan bağıntı elde edilir. Ayrıca, paralel yüzeyin $K^r$ Gauss ve $H^r$ ortalama eğriliklerinin $u$ ve $v$ değişkenlerine göre kısmi türevleri 0 olacağından, timelike iki boyutlu ivor Weingarten yüzeyine paralel olan yüzey, (4.25) eşitliğini sağladığından Weingarten yüzeydir. Paralel

Weingarten yüzeyin parametrik denklemi şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\varphi^r(u,v) = (&v\cosh u + r\sinh u - vr\cosh u,\\ &v\sinh u + r\cosh u - vr\sinh u, u+v-rv).\end{aligned} \tag{4.77}$$

(4.77) eşitliğiyle verilen yüzeyin belli parametreler için grafiği, maple yazılımı yardımıyla (Şekil 4.8) deki gibidir.

Şekil 4.8

Son olarak, Weingarten yüzey olmayan bir regle yüzeyi ve paralelini inceleyelim.

**Örnek 4.3.5:** Hiperbolik paraboloid

$$\varphi(u,v) = (u+v, v, 2uv+u^2)$$

parametrizasyonuyla verilsin. Bu yüzey

$$\varphi(u,v) = (u,0,u^2) + v(1,1,2u)$$

şeklinde yazılabildiğinden regle yüzeydir. Bu yüzeye ait dayanak eğrisi ve doğrultmanın iç çarpım sonuçları

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1, \;\; \langle X, X \rangle = 4u^2$$

olur. Teorem 2.4.4 deki (2.28), (2.29) ve (2.30) eşitliklerinden $Q$, $J$ ve $F$ büyüklükleri

$$Q = -2, \;\; J = 0, \;\; F = 4u^2 - 1 \tag{4.78}$$

olarak bulunur. (4.78) eşitliğinden $Q$, $J$ ve $F$ büyüklüklerinden $F$ sabit değildir. Sonuç 4.1.5 den $\varphi^r$ paralel yüzeyi, Weingarten yüzey değildir. $\varphi$ hiperbolik paraboloid yüzeyine paralel olan $\varphi^r$ yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi^r(u,v) = (u + v + \frac{2r(u+v)}{\sqrt{4u^2+8uv-1}}, v + \frac{2rv}{\sqrt{4u^2+8uv-1}},$$
$$2uv + u^2 + \frac{r}{\sqrt{4u^2+8uv-1}})$$

dir. Ayrıca maple yazılımı kullanılarak belli parametreler altında çizdirilen (Şekil 4.9) da spacelike hiperbolik paraboloid görülür. (Şekil 4.10) da mavi yüzey paralel yüzeyi, kırmızı yüzey ise asli yüzeyi temsil etmektedir.

Şekil 4.9

Şekil 4.10

# SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma sırasında, $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında temel kavramlar ve teoremler verildi. $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında paralel yüzeyin spacelike ve timelike oluşuna bağlı olarak Gauss ve ortalama eğriliği hesaplandı. $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında regle yüzeye paralel yüzeyin regle yüzey olma şartı verildi. Spacelike ve timelike paralel regle yüzey ifade edilip, bu yüzeylerle ilgili bazı teoremler verildi. Spacelike ve timelike regle Weingarten yüzeye paralel olan yüzeyin sırasıyla spacelike ve timelike paralel Weingarten yüzey olduğu ispat edildi ve bazı sonuçlar verildi. Bu doktora tezindeki tanımlar ve teoremler yardımıyla, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, Cartan ve null çatılar için paralel yüzeyler, paralel regle yüzeyler ve açılabilir paralel regle yüzeyler üzerine çalışılabilir. Ayrıca bu tezdeki $\mathbb{E}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bulunan sonuçlar $n$-boyutlu Lorentz uzayına genelleştirilebilir.

# KAYNAKLAR DİZİNİ

Akutagawa, K. and Nishigava, S., 1990, The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space, Tohoku Math. J., 42, 67-82.

Aledo, J. A. and Galvez, J. A., 2003, A weierstrass representation for maximal linear Weingarten spacelike surfaces in the Lorentz-Minkowski space, Journal of Math. Analysis and Application, 283, 25–45.

Beem, J. K., Ehrlich, P. E. and Easley, K. E., 1996, Global Lorentzian geometry, Marcel Dekker, New York.

Beltrami, E., 1865, Risoluzione di un problema relativo alla teoria delle superficie gobbe, Ann. Mat. Pura Appl., 7, 139-150.

Boothby, W., 1975, An introduction to differential manifolds and Riemannian geometry, Academic Press Inc., New York.

Brunt, B., 1994, Weingarten surfaces design and application of curves and surfaces, Fisher, R., (Ed.), Mathematics of surfaces V, Oxford Univ. Press.

Brunt, B. and Grant, K., 1996, Potential applications of Weingarten surfaces in CAGD. I: Weingarten surfaces and surface shape investigation, Comput. Aided Geom. Des., 13, 569-582.

Chern, S. S., 1945, Some new characterizations of the Euclidean sphere, Duke Math. J., 12, 279-290.

Chern, S. S., 1955, On special Weingarten surfaces, Proc. Amer. Math. Soc., 6, 783-786.

Craig, T., 1883, Note on parallel surfaces, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (Crelle's journal), 94, 162–170.

Çöken, A. Ç., Çiftci, Ü. and Ekici, C., 2008, On parallel timelike ruled surfaces with timelike rulings, Kuwait Journal of Science & Engineering, 35, 21–31.

Darboux, G., 1894, Le cons sur la theorie general des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal, Vol III, Gauthier-Villars.

Delaunay, C., 1841, Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante, J. Math. Pure Appl., 6, 309-320.

Dillen, F. and Kühnel, W., 1999, Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space, Manuscripta Math., 98, 307–320.

Dillen, F. and Sodsiri, W., 2005a, Ruled surfaces of Weingarten type in Minkowski 3-space, J. Geom., 83, 10-21.

Dillen, F. and Sodsiri, W, 2005b, Ruled surfaces of Weingarten type in Minkowski 3-space-II, J. Geom., 84, 37-44.

Dini, U., 1865, Sulle superficie gobbe nelle quali uno dei due raggidi curvatura principale e una funzione dellaltro, Ann. Mat. Pura Appl., 7, 205-210.

Do Carmo, M. P., 1976, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall Inc., New Jersey.

Do Carmo, M. P., 1992, Riemannian geometry, (Trans. by Francis Flaherty), Birkhäuser, Boston.

Duggal, K. L. and Bejancu, A., 1996, Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Kluwer Academic, Dordrecht and Boston, Mass.

Eisenhart, L.P., 1909, A treatise on the differential geometry of curves and surfaces, Ginn and Company, Boston: New York.

Goemann, W., 2010, Surfaces in 3-dimensional Euclidean and Minkowski space, in particular the study of Weingarten surfaces, PhD. thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.

Görgülü, A. and Çöken, C., 1994, The dupin indicatrix for parallel pseudo-Euclidean hypersurfaces in pseudo-Euclidean space in semi-Euclidean space $\mathbb{R}_1^n$. Journ. Inst. Math. and Comp. Sci. (Math Series), 7(3), 221-225.

Gray, A., 1993, Modern differential geometry of curves and surfaces, CRC Press, Inc.

Greub, W., 1981, Linear algebra, Springer-Verlag, New York-Heidelberg Berlin.

Güneş, R., 1996, On the properties of curves under the parallel map preserving the connection, Erciyes Üniv. Fen Bil. Derg. 12, 1-2, 50-59.

Hacısalihoğlu, H. H. ve Ekmekçi N., 2003, Tensör geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

Hacısalihoğlu, H. H., 2000, Diferensiyel geometri, Cilt I-II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları.

Hacısalihoğlu, H. H., 1998, Diferensiyel geometri, İnönü Üniv. Fen Edebiyat Fak. Yayınları, No. 2.

Hano, J. and Nomizu, K., 1984, Surfaces of revolution with constant mean curvature in Lorentz-Minkowski space, Tohoku Math. J. (2) Volume 36, Number 3, 427-437.

Hartman, P. and Winter, W., 1954, Umbilical points and W-surfaces, Amer. J. Math., 76, 502-508.

Hopf, H., 1951, Über flächen mit einer relation zwischen den hauptkrümmungen, Math. Nachr., 4, 232-249.

Hou, Z. H. and Ji, F., 2007, Helicoidal surfaces with $H^2 = K$ in Minkowski 3-space, J. Math. Anal. Appl. 325, 101–113.

Kalkan, Ö., 2010, Weingarten yüzeyleri üzerine, Doktora tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kaya, R., 2009, Analitik geometri, Bilim Teknik Yayınevi.

Kim, Y. W. and Yang, S. D., 2006, A family of maximal surfaces in Lorentz-Minkowski three-space, Proc. Amer. Math. Soc., 134, 3379-3390.

Kim, M. H. and Yoon, D. W., 2010, Weingarten quadric surfaces in a Euclidean 3-space, Turk. J. Math. 34, 1–7.

Kobayashi, O., 1983, Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space $L^3$, Tokyo J. Math., 6 , 297-303.

Koch, R., 1993, Die Weingarten-regelflächen, J. Geom. 47, 77-85.

Kühnel, W., 1994, Ruled W-surfaces, Arch. Math. (Basel), 62, 475–480.

Kühnel, W., 2002, Differential geometry, curves-surfaces-manifolds, American Mathematical Society.

Kühnel, W. and Steller, M., 2005, On closed Weingarten surfaces, Monatsh. Math., 146, 113-126.

Lie, S., 1880, Über flächen deren krümmungsradien durch eine relation verknüpft sind, Arch. for Math. 4, 507-512.

Lopez, R., 1999a, Constant mean curvature hypersurfaces foliated by spheres, Diff. Geom. App., 11, 245-256.

Lopez, R., 1999b, Constant mean curvature surfaces foliated by cirles in Lorentz-Minkowski space, Geom. Dedicata., 76, 81-95.

Lopez, R., 2000, Timelike surfaces in Lorentz 3-space with constant mean curvature, Tohoku Math. J., 52, 515-532.

Lopez, R., 2001, Cyclic surfaces of constant Gauss curvature, Houston J. Math., 27(4), 799-805.

Lopez, R., 2003, Surfaces of constant Gauss curvature in Lorentz-Minkowski space, Rocky Mountain J. Math., 33, 971-993.

Lopez, R., 2008, Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, Mini-Course taught at the Instituto de Matematica e Estatistica (IME-USP), University of Sao Paulo, Brasil.

Milnor, T. K., 1980, Abstract Weingarten surfaces, J. Differential Geometry, 15, 365-380.

Nitshe, J. C. C., 1989. Cyclic surfaces of constant mean curvature, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II, 1, 1-5.

Nizamoglu, Ş., 1986, Surfaces réglées parallèles, Ege Üniv. Fen Fak. Derg., 9 (Ser. A), 37-48.

O'Neill, B., 1983, Semi Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, Inc. New York.

O'Neill, B., 1966, Elementary differential geometry, Academic Press Inc., New York.

Oprea, J., 1997, Differential geometry and its applications, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

Park, K. R. and Kim, G. I., 1998, Offsets of ruled surfaces, J. Korean Computer Graphics Society, 4, 69-75.

Patriciu, A. M., 2010, On some ${}^{1,3}H_3$-helicoidal surfaces and their parallel surfaces at a certain distance in 3-dimensional Minkowski space, Annals of the University of Craiova, Maths. and Compt.Science Series, V 37 (4), 93-98.

Prakash, N., 1981, Differential geometry an integrated approach, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., New Delhi.

Pressley, A., 2010, Elementary differential geometry, Springer-Verlag London Ltd.

Ru, M., 1999, Lecture on differential geometry Part I., Huston University.

Ryan, P. J., 1986, Euclidean and non-Euclidean geometry, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Sabuncuoğlu, A., 2004, Diferensiyel geometri, Nobel Yayınları.

Sağlam, D. and Kalkan, Ö. B., 2010, Surfaces at a constant distance from the edge of regression on a surface in $\mathbb{E}_1^3$, Differential Geometry- Dynamical Systems, 12, 187-200.

Schucking, E. L. and Wang, J. Z., 1987, "The two-dimensional Ivor", In Gravitation and Geometry, a Volume inHonor of I. Robinson, W. Rindler and A. Trautman, eds., Naples: Bibliopolis, 433.

Shifrin, T., 2010, Differential geometry: a first course in curves and surfaces, Preliminary Version, University of Georgia.

Sipus, Z. M., 2008, Ruled Weingarten surfaces in Galilean space, Periodica Mathematica Hungarica, 56(2), 213–225.

Somasundaram, D., 2005, Differential geometry, a first course, Alpha Science International Ltd., Harrow, U.K.

Sodsiri, W., 2005, Ruled surfaces of Weingarten type in Minkowski 3-space, PhD. thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 2005.

Stamou, G., 1999, Regelflachen vom Weingarten-typ, Colloq. Math. 79, 77-84.

Struik, D. J., 1961, Lectures on classical differential geometry, Dover publications, Inc., New York.

Turgut, A., 1995, 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Uras, F., 1992, Diferensiyel geometri dersleri, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayın Komisyonu.

Warner, F., 1983, Foundations of differentiable manifolds and lie groups, Springer-Verlag, New York.

Weingarten, J., 1861, Über eine klasse auf einander abwickelbarer flächen, J. Reine Angew. Math. 59, 382-393.

Weingarten, J., 1863. Über eine flächen, derer normalen eine gegebene flächeberühren, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 62, 61-63.

Weinstein, T., 1995, An introduction to Lorentz surfaces, de Gruyter expositions in mathematics, Berlin, New York.

Vaisman, I., 1984, A first course in differential geometry, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel.

Van de Woestyne, I., 1990, Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space, Geometry and Topology of Submanifolds II, M. Boyom, J.-M. Morvan, L. Verstraelen (eds), World Scientific Publishing, Singapore, 244-269.

Yoon, D. W., 2010, Polynomial translation surfaces of Weingarten types in Euclidean 3-space, Central European Journal of Mathematics, 8 (3), 430-436.

# ÖZGEÇMİŞ

**Yasin ÜNLÜTÜRK**

e-mail: yasin_unluturk@yahoo.com

**Kişisel Bilgiler**

Doğum tarihi-yeri: 20.06.1980-İstanbul

Medeni durum: Evli

**Eğitim Bilgileri**

Lisans: Kocaeli Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik 2003

Doktora: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bil. Enst., Geometri 2011

Yabancı Dil : İngilizce (KPDS:73, ÜDS:72)

**Bilgisayar Bilgisi**

Programlama: Fortran

Ofis: Word- Excel-Scientific Workplace

**Yayınlar**

1) C. Ekici, Y. Ünlütürk, M. Dede and B. S. Ryuh: "On Motion of Robot End-Effector Using the Curvature Theory of Timelike Ruled Surfaces with Timelike Rulings", Mathematical Problems in Engineering, Volume 2008 (SCI Kapsamında).

2) C. Ekici, Ü.Z. Savcı and Y. Ünlütürk: "The Relations Among Instantaneous Velocities of the Parallel Timelike Ruled Surface" International Journal of Mathematical Analysis, incelemede.

3) Y. Ünlütürk, and C. Ekici: “On Parallel Surfaces of Ruled Surfaces with Null Rulings in Minkowski 3-space” International Mathematical Forum, To appear.

**Bildiriler**

1) C. Ekici, Y. Ünlütürk: "On Motion of Robot End-Effector Using the Curvature Theory of Timelike Ruled Surfaces with Timelike Ruling", II. International Türk Dünyası Matematik Sempozyumu, 4-7 July, Sakarya Üniversitesi, (2007).

2) C. Ekici, Ü.Z. Savcı and Y. Ünlütürk: "The Relations Among Instantaneous Velocities of the Parallel Timelike Ruled Surface", VIII. Geometri sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, 29 Nisan-02 Mayıs 2010.

3) Y. Ünlütürk, and C. Ekici: “On Parallel Surfaces of Ruled Surfaces with Null Rulings in Minkowski 3-space” ICAAA 2011, Yıldız Teknik Üniversitesi, 29 Haziran-2 Temmuz 2011.