Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Simetrileri ve Çözümleri

Sait San

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Ocak 2011

Symmetries and Solutions of Partial Differential Equations

Sait San

MASTER DISSERTATION
Department of Mathematics
January 2011

Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Simetrileri ve Çözümleri

Sait San

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans üstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

UygulamalıMatematik Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER

Ocak 2011

ONAY

Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Sait San' ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Simetrileri ve Çözümleri**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER

Üye : Yard. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

Üye : Doç. Dr. Ahmet BEKİR

Üye : Doç. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

Üye : Doç. Dr. Abdullah ALĞIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu yüksek lisans tez çalışmasında; Lie nokta simetri metoduyla ilgili temel tanım ve teoremler verildi. Lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin verilen Lie grup dönüşümleri altında uzatımları (prolongasyonları) hesaplanarak sonsuz küçük simetri üreteçleri bulundu. Bulunan bu sonsuz küçük simetri üreteçlerinin Lie cebiri yapısı oluşturup oluşturmadığına bakıldı.

Daha sonra alınan (1+1)-boyutlu kısmi diferensiyel denklemler, sonsuz küçük simetri üreteci yardımıyla adi diferensiyel denklemlere indirgemeleri yapılarak çözüldü. (2+1)-boyutlu kısmi diferensiyel denklemler ise sonsuz küçük simetri üreteçlerinin oluşturduğu iki-boyutlu altcebirler yardımıyla ilk önce (1+1)-boyutlu kısmi diferensiyel denklemlere indirgendi, daha sonra sonsuz küçük simetri üreteci yardımıyla da adi diferensiyel denklemlere indirgenerek tam çözümleri bulundu.

Sonuç olarak Lie nokta simetri metodu bağlamında incelenen ısı iletim denklemi, Burger denklemi, Hanging Chain denklemi, Bond Pricing denklemi ve lineer olmayan dalga denklemi kısmi diferensiyel denklemlerin uygulamada sıkça karşılaşılan örnekleri üzerinde duruldu.

Anahtar Kelimeler: Kısmi diferensiyel denklemler, Bir-parametreli Lie grupları, Değişmez denklemler, Sonsuz küçük simetri üreteci, Lie cebiri, İki boyutlu altcebir

SUMMARY

In this master thesis, the method of Lie point symmetry were considered . Basic definitions and theorems were given for the application of this method. Prolongations of any given partial differential equations were calculated and infinitesimal symmetry generator were found. The infinitesimal symmetry generators were checked it whether compose Lie algebra structure. Using these symmetry generators, (1+1)-dimensional partial differential equations were reduced into ordinary differential equations and solutions of ordinary differential equations were found.

(2+1)-dimensional partial differential equations firstly were reduced (1+1)- dimensional partial differential equations with the help of two-dimensional subalgebra which consist of infinitesimal symmerty generators. Then with the help of infinitesimal symmetry generators reduced (1+1)-dimensional partial differential equations were again reduced to ordinary differential equations. After that the exact solution of these reduced ordinary differential equations were found.

As a result, frequently encountered in practice examples of the heat equation, the Burger equation, the Hanging Chain equation, the Bond Pricing equation, and non-linear wave equation are investigated in terms of Lie point symmetry method were studied.

Keywords: Partial differential equations, One-parameter Lie groups, Invariant equations, Infinitesimal symmetry generator, Lie algebra, Two-dimensional subalgebra.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmam süresince bilgileriyle beni aydınlatan, değerli görüşlerinden faydalandığım, ilgisini ve desteğini esirgemeyen Hocalarım, Sayın,

Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER ve Yard. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN'a

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışma süresince bana gösterdiği sevgi, sadakat, destek ve hoşgörü anlayışından dolayı sevgili eşime, aileme ve desteğini her zaman yanımda hissettiğim büyük babama teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 0

GİRİŞ

Lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin tam veya analitik çözümlerini bulmak uygulamalı matematiğin en önemli konularından biridir. Lie nokta simetri metodu kısmi diferensiyel denklemlerin Lie nokta dönüşümleri altında denklemin değişmezliğini koruduğu için oldukça kullanışlı bir metot olup geniş bir alanda uygulanabildiğinden birçok araştırmacının yoğun ilgisini çekmiştir (Özceylan, 2007).

Bilim dallarında karşılaşılan problemlerin çözümlerine ulaşabilmek için problemin özelliklerini taşıyan matematiksel modellerin kurulmasına ihtiyaç duyulmuştur (Özer ve Eser,1996). Çoğu zaman fiziksel problemlerin matematiksel modelleri diferensiyel denklemlerden oluşmuştur. Bu denklemlerin çözümüne dair çok sayıda teknikler geliştirilmiştir. Etkin teknikler geliştirilmesine rağmen yine de açık problemler bulunmaktadır (Hydon, 2000).

Diferensiyel denklemler konusunda yapılan ilk çalışmalar, 17. yüzyılın ikinci yarısında, diferensiyel ve integral hesabın keşfinden hemen sonra, İngiliz doğa bilimci Isaac Newton (1643-1727) ve Alman filozof Leibnitz (1646-1716) ile başlar. 18. yüzyılın sonlarına kadar adi diferensiyel denklemlerin çözümü için birçok basit metotlar kesfedilmistir. 19. yüzyılda ise kuvvet serileri tabanlı çözüm yöntemleri ile varlık-teklik teoremi gibi konular ilgi odağı olmuştur. Belli tip diferensiyel denklemlerin, belli şartlar altında bir çözümlerinin varlığının ispatı, diferensiyel denklemler teorisinde varlık teoremi konusunu teşkil etmekte olup, bu da ilk olarak 1820 ile 1830 yılları arasında, Fransız matematikçi A.L. Cauchy tarafından kurulmuş ve bazı bilim adamları tarafından geliştirilmiştir. Bu yüzyılın sonlarına doğru değişmezlik(invaryant) teorisi en gözde araştırma sahalarından olmuştur. Sophus Lie (1842–1899), Felix Klein (1849–1925), David Hilbert, Elie Cartan (1869–1951) gibi birçok ünlü matematikçinin konunun gelişmesine büyük katkıları olmuştur (Özceylan, 2007).

Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından diferensiyel denklemlerin integrasyon metotları üzerindeki çalışmaları sonucu diferensiyel denklemlerin simetri analizi, Lie grubu adı verilen dönüşümlerin denklemlerin tanımlandığı manifoldu değişmez bırakan yerel dönüşüm gruplarını bularak diferensiyel denklemlerin çözümlerini algoritmik metotlarla elde etmiştir. Lie'nin çalışmalarının faydası uzun süre anlaşılamamış ve Lie teorisinin diferensiyel denklemlere uygulanışı 1950 li yıllarda ancak başlayabilmiştir (Bluman and Anco, 2002; Ovsyannikov, 1982).

L.V. Ovsiannikov'un çalışmaları da bu alanda olmuştur ve modern uygulamalı grup analizi kitabı uzun süre temel kaynak olmuştur. Daha sonra bu alana ilginin artmasıyla önemli ilerlemeler kaydedilmiştir. Bluman, Cole, Kumei, İbragimov ve Olver tarafından çeşitli uygulamalar oluşturuldu. Lie teorisinin fizikte; özellikle hidrodinamikte, mekanikte, elektodinamikte, kuantum teorisinde, sicim teorisinde ve tanecik fiziği, vb. gibi alanlarda uygulamaları vardır (Kiraz, 2007; Gilmore 1974, 2008).

Günümüzde simetri analizi, tamamen algoritmik bir yolla diferensiyel denklemlerin çözümlerinin türetilebildiği nadir teorilerden biridir ve ters saçılım teori, Hirota tekniği gibi diğer çözüm metotları arasında seçkin bir yeri vardır (Cantwell, 2002). Birçok metotun uygulanabilmesi için integrallenebilme şartı veya bazı kısıtlamalar getirilmektedir. Lie teorisi ise, diferensiyel denklemlerin hemen hemen tümüne uygulanabilmesi yönüyle güçlü ve çok yönlüdür. Simetri grupları yardımıyla, adi diferensiyel denklemlerin mertebesinin düşürülmesi, kısmi diferensiyel denklemlerin bağımsız değişken sayısının azaltılması ve adi diferensiyel denkleme indirgenmesi sağlanır.

Son yıllarda çeşitli tiplerde Lie simetri üretecinin katsayılarına bağlı olarak Lie simetri dönüşümleri; nokta, temas, Bäcklund ve yerel olmayan simetriler olarak gruplandırılmıştır.

Simetri üretecinin katsayıları m bağımsız ve n bağımlı değişken içeren ve hiçbir türevli terim içermeyen dönüşümlere Lie nokta simetrileri denir. Nokta simetrilere örnek olarak ötelemeler ve dönmeler verilebilir. Eğer simetri üretecinin katsayıları m bağımsız değişken ve n bağımlı değişkenin yanı sıra birinci mertebeden türevlerini de içeriyorsa bu dönüşümlere Lie temas simetrileri adı verilir. Simetri üretecinin katsayıları yüksek mertebeden türevler içeriyorsa bu dönüşümlere de Lie Bäcklund simetrileri denir. Eğer dönüşüm çözümsüz integraller içeriyorsa bunlara da yerel olmayan simetriler denir.

Bu çalışma da ise Lie grup üreteçlerinin katsayılarının sadece bağımsız ve bağımlı değişkene bağlı olan ve türevli terimler içermeyen Lie nokta simetrileri ele alınacaktır. Ayrıca Lie nokta simetrisi ifadesi yerine sadece Lie simetrisi ifadesi kullanılacaktır.

BÖLÜM 1

KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

1.1 Giriş

Yüzyıllar boyunca yapılan çalışmalar neticesinde içinde yaşadığımız kainatta meydana gelen hiçbir fiziksel olayın rastgele cereyan etmediğini (edemediğini) ve her bir olayın bilinen veya bilinmeyen kanunlara bağlı kaldığı bilinmektedir. Bir toz zerresinden tutun da dünyanın, diğer gezegenlerin hareketleri yada bir elektromanyetik dalganın yayılması hep açık bir şekilde ifade edilmiş kanunlara tabi kalmaktadır. Bu kanunların matematiksel modeli ortaya çıkarılırken öncelikle fiziksel olayı ve buna ilişkin değişkenleri tanımlamak gerekir. Bundan sonra her bir olay üzerinde yapılan dikkatli gözlemler ve doğru akıl yürütmeler, bu değişmeyen kanunların matematiksel formlarını ortaya çıkarır. Bu matematiksel formlar değişkenleri olduğu gibi bunların türevlerini de içerebilmektedir.

Günlük hayatta ve özellikle mühendislik ve fizik alanında karşılaşılan olaylar modellenirken hep bu kanunlar esas alınır. Çeşitli basitleştirici kabuller altında yapılan bu tür modellemeler çoğunlukla diferensiyel denklemler adını verdiğimiz denklemlerle sonuçlanır. Bu arada sadece eşyanın davranışıyla ilgili modeller değil, biyoloji, tıp, sosyal bilimler vb. çok sayıdaki olay da matematiksel denklemler cinsinden ifade edildiklerinde yine çözülmesi gerekli diferensiyel denklemler ortaya çıkar (Pala, 2006).

Bu bölümde ilerleyen bölümlerde kullanılacak kısmi diferensiyel denklemlere ilişkin bazı temel tanım ve kavramlar verilecektir.

1.2 Temel Kavramlar

Tanım 1.1 Fonksiyon veya fonksiyonların bir veya birden çok değişkene göre türevlerini içeren denklemlere diferensiyel denklemler denir (Özer ve Eser, 1996).

Tanım 1.2 İçerisinde bir bağımlı ve bir bağımsız değişken bulunduran ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini bulunduran denklemlere adi diferensiyel denklem denir (Özer ve Eser, 1996).

Tanım 1.3 İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli mertebeden kısmi türevlerini kapsayan eşitliklere kısmi diferensiyel denklem denir. z bağımlı; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere, bir kısmi diferensiyel denklem genel olarak,

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots$$

alınarak

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy,\ldots}) = 0 \tag{1.1}$$

şeklinde gösterilir (Koca, 2008).

Tanım 1.4 Bir diferensiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesine diferensiyel denklemin mertebesi denir (Özer ve Eser, 1996).

Tanım 1.5 Bilinmeyen fonksiyon ve türevleri polinom formunda olmak üzere bir diferensiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin kuvvetine diferensiyel denklemin derecesi denir (Özer ve Eser, 1996). Örneğin;

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - 3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = x$$

denklemi 2. mertebeden 1. dereceden adi diferensiyel denklemdir.

$$\left[1 + u_t^2\right]^{\frac{3}{2}} = ku_{xx}$$

denklemi ise 2. mertebeden 2. dereceden bir kısmi diferensiyel denklemdir.

Tanım 1.6 Bir kısmi diferensiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre kapsamayan bir fonksiyona bu kısmi diferensiyel denklemin bir özel çözümü denir. Diğer taraftan bir kısmi diferensiyel denklemin mertebesi kadar kendi aralarında lineer bağımsız olan keyfi fonksiyonları kapsayan ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine kısmi diferensiyel denklemin genel çözümü denir (Koca, 2008).

Tanım 1.7 $p = z_x,\ q = z_y$ olmak üzere

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1.2}$$

birinci basamaktan genel kısmi diferensiyel denklemi ele alalım. Burada F nin p ve q ya göre lineer olması gerekmemektedir.

$$G(x, y, z, a, b) = 0 \tag{1.3}$$

iki parametreli bir yüzey ailesi, birinci basmaktan (1.2) denklemini sağlıyorsa bu yüzey ailesine (1.2) denkleminin tam integrali (tam çözümü) denir (Koca, 2008).

Tanım 1.8 Bir kısmi türevli denklemdeki bağımlı değişken (birden fazla bağımlı değişken olması halinde bağımlı değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineerdir denir. Aksi halde lineer olmayan denklem adı verilir. Birinci mertebeden lineer kısmi türevli denklemin genel şekli,

$$A(x,y)z_x + B(x,y)z_y + C(x,y)z = G(x,y) \tag{1.4}$$

formundadır (Koca, 2008).

Örnek 1.1 $U_t - k(U_{xx} + U_{yy}) = 0$ (k sabit) iki boyutlu ısı denklemi ikinci mertebeden lineer bir denklemdir. Diğer taraftan,

$$zz_{xy} - z_x z_y = 0,$$

$$z_{xy} z_{xx} - 3z_{yy} - 6xz_y + xyz = 0$$

lineer olmayan denklemlerdir (Koca, 2008).

Tanım 1.9 Bir kısmi diferensiyel denklem, denklemde bulunan en yüksek mertebeden kısmi türevlere göre (denklemdeki düşük basamaklı ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinden bağımsız olarak) lineer ise bu denklem yarı lineer (kuasi-lineer) adını alır.

$$z_z z_{xx} + xzz_y = \sin y,$$

$$z_{xy} + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(z_x^2 + z\right) - 6xz^3 \sin y = 0,$$

$$A(x,y,u_x,u_{xy})u_{xyy} + B(x,y,u,u_{yy})u_{yyy} + 2u(u_{xy})^2 - f(x,y)u = 0$$

denklemlerinin tümü yarı-lineer denklemlerdir (Koca, 2008).

Tanım 1.10 Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen-hemen lineerdir denir.

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = t + 1$$

$$3xu_{xx} + 4xyu_{yy} + 5xz^3 u_{zz} + 2zu_{xy} - 4u_{yz} + u^2 u_x - u_y + xye^z = 0$$

denklemleri hemen-hemen lineerdir.

Tanım 1.11 (1.4) denklemindeki G(x,y)=0 ise denkleme homojen denklem denir. Homojen denklemlerden bazıları şunlardır:

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \qquad Korteweg - de\,Vries\ Denklemi$$

$$u_t - ku_{xx} = 0 \qquad Isı\ Denklemi$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + 2\beta u_t + \alpha u = 0 \qquad Telgraf\ Denklemi$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad Laplace\ Denklemi$$

Homojen olmayan denklemlere örnek olarak da;

$$u_{xx} + u_{tt} = u_t$$

$$uu_t + 2txu = \sin(tx)$$

verilebilir.

1.3 Lagrange Yardımcı Sistemleri

$x_1, x_2, ..., x_n$ bağımsız değişkenler ve z bağımlı değişken olmak üzere birinci basamaktan

$$P_1(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + ... + P_n(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, ..., x_n, z)$$

yarı-lineer denklemi verilsin. Bu denkleme ilişkin Lagrange yardımcı sistemi

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = ... = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}$$

şeklinde tanımlanır. Bu sistemden elde edilecek n tane fonksiyonel bağımsız çözüm (ilk integral)

$$u_i = u_i(x_1, x_2, ..., x_n, z) = c_i \text{ , (i=1,2,...,n)}$$

olmak üzere, verilen denklemin genel çözümü

$$F(u_1, u_2, ..., u_n) = 0 \text{ , F} \in C^1[D]$$

şeklinde olacaktır (Koca, 2008).

Örnek 1.2 $xu_x + (z+u)u_y + (y+u)u_z = y+z$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Bu denklemin Lagrange yardımcı sistemi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z+u} = \frac{dz}{y+u} = \frac{du}{y+z}$$

olup buradan,

$$\frac{dy-dz}{z-y} = \frac{dz-du}{u-z} \text{ veya } \frac{dz-dy}{z-y} = \frac{du-dz}{u-z}$$

yazılabilir. Bunun yeniden düzenlenmesiyle

$$d[\ln(z-y)] = d[\ln(u-z)]$$

olur. Böylece ilk karakteristik

$$u_1 = u_1(x,y,z,u) = \frac{z-y}{u-z} = c_1$$

olarak bulunur. İkinci karakteristik ise

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy-dz}{z-y} = -\frac{dz-dy}{z-y}$$

den

$$u_2 = x(z-y) = c_2$$

olarak elde edilir. Üçüncü karakteristiği

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz-du}{u-z} = -\frac{du-dz}{u-z}$$

yardımcı denklemlerinden

$$u_3 = x(u-z) = c_3$$

olduğundan genel çözüm

$$F(\frac{z-y}{u-z}, x(z-y), x(u-z)) = 0 \text{ , F} \in \mathrm{C}^1[D]$$

formundadır (Koca, 2008).

1.4 Charpit Yöntemi

Tanım 1.12 Her noktasında, $G(x,y,z,a,b) = 0$ iki parametreli yüzey ailesindeki herbir yüzeye teğet olan diğer bir yüzeye (1.3) ile verilen yüzey ailesinin bir zarfı denir.

Zarf yüzeyi (1.3) yüzey ailesinin sağladığı denklemi sağlar. Dolayısıyla zarf yüzeyi (1.2) denkleminin bir çözümüdür. Zarf yüzeyi (1.3) denklemindeki a ve b parametrelerine özel değerler verilerek elde edilmez.

Şimdi a ve b parametreleri arasında $b = \Psi(a)$ şeklinde bir fonksiyonel bağıntının olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$G(x,y,z,a,\Psi(a)) = 0 \tag{1.5}$$

bir parametreli yüzey ailesini elde ederiz. (1.5) ailesinin bir zarfını bulabilirsek bu zarf da (1.2) denklemini sağlar. (1.5) ailesindeki Ψ fonksiyonu keyfi olduğundan (1.5) fonksiyonuna (1.2) denkleminin genel integrali denir. (1.5) ailesinin bir zarfı

$$G(x,y,z,a,\Psi(a)) = 0$$
$$\frac{\partial G(x,y,z,a,\Psi(a))}{\partial a} = 0$$

denklemleri arasında a parametresinin yok edilmesiyle bulunur. İki parametreli (1.3) yüzey ailesinin bir zarfını bulabilmek için

$$G(x,y,z,a,b) = 0$$
$$\frac{\partial G(x,y,z,a,b)}{\partial a} = 0$$
$$\frac{\partial G(x,y,z,a,b)}{\partial b} = 0$$

denklemleri arasında a ve b parametreleri yok edilir. Bu şekilde elde edilen zarfa verilen denklem için bir singüler integral veya singüler çözüm adı verilir (Koca, 2008).

1.5 Bağdaşabilir Sistemler

Tanım 1.13 Birinci basamaktan

$$F(x,y,z,p,q) = 0, \quad \Phi(x,y,z,p,q) = 0$$

denklemlerini ele alalım. $F(x,y,z,p,q) = 0$ denkleminin her çözümü aynı zamanda $\Phi(x,y,z,p,q) = 0$ denkleminin de çözümü oluyorsa bu iki denkleme bağdaşabilirdir denir (Koca, 2008).

Teorem 1.14 $F(x,y,z,p,q) = 0$, $\Phi(x,y,z,p,q) = 0$ denklemleri bağdaşabilirdir ancak ve ancak,

$$[F,\Phi] := \frac{\partial F}{\partial p}\frac{d\Phi}{dx} - \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{dF}{dx} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{d\Phi}{dy} - \frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{dF}{dy} = 0$$

dır. Bir sistem için bağdaşabilme koşulu bazen sistemin çözülebilme koşulu olarak da isimlendirilir (Koca, 2008).

1.6 Lagrange-Charpit Yöntemi

Birinci basamaktan lineer olmayan (1.2) denklemini ele alalım. Bağdaşabilen bir başka denklem, a sabit olmak üzere

$$\Phi(x,y,z,p,q) = a$$

olsun. Bu durumda iki denklemde aynı çözüme sahiptir. Bu denklemler için bağdaşabilme koşulunu uygularsak,

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \left(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0$$

beş bağımsız değişkenli, Φ ye göre lineer homojen diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin Lagrange yardımcı sistemini yazarsak,

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z} = \frac{d\Phi}{0} \tag{1.6}$$

dır. Son denklemden $\Phi = a$ olduğu açıktır. (1.6) sisteminden $\Phi(x,y,z,p,q) = a$ ara integrali Lagrange yöntemi ile bulunabilir. Bu ara integralle $F(x,y,z,p,q) = 0$ denklemi arasında $p = f(x,y,z),\ q = g(x,y,z)$ şeklinde p ve q değerleri çözülüp

$$dz = pdx + qdy$$

tam diferensiyel denklemde yerine yazılır ve bunun da integrallenmesiyle

$$G(x,y,z,a,b) = 0$$

iki parametreli bir tam integral (tam çözüm) elde edilir. Burada

$$\frac{\partial(F,\Phi)}{\partial(p,q)} \neq 0$$

olmalıdır. (1.6) sistemi genellikle Lagrange-Charpit sistemi olarak bilinir (Koca, 2008).

1.7 Denklem Tipleri

İkinci mertebeden lineer kısmi diferensiyel denklemlerin genel formu

$$A(x,t)u_{xx} + 2B(x,t)u_{xt} + C(x,t)u_{tt} + D(x,t)u_x + E(x,t)u_t + F(x,t)u = G(x,t)$$

dır. İkinci mertebeden türevlerin katsayıları A,B,C alınarak kdd nin tipi eliptik,parabolik hiperbolik olarak belirlenir.

Buna göre;

1) $AC = B^2$ ise parabolik denklem olup

$$u_{tt} + H(x,t,u,u_x,u_t) = 0$$

veya

$$u_{xx} + H(x,t,u,u_x,u_t) = 0$$

normal forma sahiptir.

2) $AC > B^2$ ise eliptik denklem olup

$$u_{xx} + u_{tt} + H(x,t,u,u_x,u_t) = 0$$

normal forma sahiptir.

3) $AC < B^2$ ise hiperbolik denklem olup

$$u_{xt} + H(x,t,u,u_x,u_t) = 0$$

normal forma sahiptir.

Eliptik denklemlere Poisson ve Laplace denklemleri, hiperbolik denklemlere Dalga ve Telgraf denklemleri, parabolik denkleme de Isı iletimi denklemi örnek olarak verilebilir (Koca, 2008).

BÖLÜM 2

LIE SİMETRİ METODU

2.1 Giriş

Verilen bir kısmi diferensiyel denklem, Lie grup dönüşümleri altında değişmez kalıyorsa bu gruba kısmi diferensiyel denklemlerin Lie simetri grubu ya da Lie simetrisi denir. Bir Lie simetrisi, tüm bağımlı ve bağımsız değişkenlere bağlı olarak verilen dönüşümler altında diferensiyel denklemi değişmez (invaryant) bırakan bir sonsuz küçük üreteçle tanımlanır. Bu sonsuz küçük üreteç, kısmi diferensiyel denklemlerin Lie grubuna karşılık gelen Lie cebirini üreten bir bazının lineer kombinasyonudur. Bu baz kullanılarak bulunan benzerlik dönüşümlerinden grup-değişmez çözümleri elde edilir (Kiraz , 2007).

Lie simetri metodu adi diferensiyel denklemlerin çözümünde kullandığımız integral çarpanı, ayrılabilir denklem, homojen denklem, mertebenin indirgenmesi, belirsiz katsayılar gibi çok güçlü bir çözüm yöntemidir. Lie gruplar uzayda nokta dönüşümleri, bağımlı ve bağımsız değişkenler ve türevler içerir. Dönme ve ötelemeler, ölçüm grupları Lie grupların yaygın örnekleridir. Nokta dönüşümlerin bir-parametreli Lie gruba uygulanmasıyla diferensiyel denklem değişmez kalır, adi diferensiyel denklemin mertebesi indirgenir, kısmi diferensiyel denklemin bağımsız değişken sayısı bire indirgenir (Ahmad, 2005).

Bu bölümde Lie simetri metodunun uygulanabilmesi için Lie grup teorisine ait temel kavramlar ve teoremler verilecektir. İlk olarak grup yapısı ve Lie grup yapılarından ve özelliklerinden bahsedilecektir. Daha sonra Lie grup dönüşümüne ait sonsuz küçük üreteçlerin tanımı ve elde edilişi verilecektir. Lie grup dönüşümü altında değişmezlik (invaryantlık) kavramları verilecektir. Daha sonra sonsuz küçük simetri üreteçlerinin oluşturduğu Lie cebiri yapısı ve son olarakta sonsuz küçük simetri üretecinin uzatım (prolongasyon) formülleri verilecektir.

2.2 GRUP

Tanım 2.1 G boş olmayan bir küme ve ”* ” sembolü de G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(G,*)$ yapısına bir grup denir.

1)Kapalılık özelliği:

Her $a,b \in G$ için $a*b \in G$ dir.

2)Birleşme özelliği:

Her $a,b,c \in G$ için $(a*b)*c = a*(b*c)$ dir.

3)Birim eleman özelliği:

Her $a \in G$ için $a*e = e*a = a$ dır.

4)Ters eleman özelliği:

Her $a \in G$ için $a*b = b*a = e$ olacak şekilde bir tek $b \in G$ vardır.

3. şarttaki ”e” elemanına grubun birim elemanı denir. Ayrıca ”b” elemanına ”a” nın tersi denir ve $b = a^{-1}$ ile gösterilir. Bu şartlara ilave olarak da;

5)Değişme özelliği:

Her $a \in G$ için $a*b = b*a$ ise bu guruba Abelyan(değişmeli) grup denir (Taşçı, 2007).

2.2.1 Altgrup

Tanım 2.2 H; G nin alt kümesi olsun. Eğer H; (G,*) grubunun tüm şartlarını sağlıyorsa H ya G nin altgrubu denir.

Örnek 2.1 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi ”+” işlemine göre bir gruptur. $(\mathbb{Z},+)$ grubunun birim elemanı sıfırdır ve her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için $-\alpha \in \mathbb{Z}$ olduğundan her elemanın tersi vardır. Her $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ için $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ olduğundan $(\mathbb{Z},+)$ abelyan gruptur.

Örnek 2.2 $(\mathbb{R},+)$ reel sayıların oluşturduğu grubun birim elemanı sıfırdır ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $-\alpha \in \mathbb{R}$ dir. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ olduğundan $(\mathbb{Z},+)$ grubu $(\mathbb{R},+)$ nın altgrubudur (Bilgic¸, H).

2.3 LIE GRUPLAR

2.3.1 Dönüşüm Grupları

Tanım 2.3 G, dönüşümlerin bir kümesi olsun. $G_i \in G$ öyle ki,

$$G_i : \alpha \rightarrow \alpha^*(\alpha;\varepsilon)$$

dönüşümü tanımlansın. $\alpha \in S$, $\alpha^* \in S$, $S \subset R^n$ ve $\varepsilon,\delta \in A \subset R$ olmak üzere M düzgün bir manifold ve; U, GxM de açık bir küme olsun $\Psi : U \rightarrow M$ olarak tanımlansın. $\Psi(\varepsilon,\delta)$ ikili işlem fonksiyonu A bölgesindeki ε,δ parametreleri ile tanımlıdır. Bu dönüşüm S bölgesinde aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, dönüşüme grup dönüşümü denir. $\Psi(\varepsilon,\delta)$ her ε için $\delta \in A$ dır ve aşağıdaki şartlar sağlanır.

1) Her $\varepsilon \in A$ için G_i birebir bir dönüşümdür.

2) (A,Ψ) bir gruptur.

3) (A,Ψ) grubunun birim elemanı e ise ;

$$\alpha^* = \alpha$$

dir. Yani $G_i(\alpha,e) = \alpha$ dır.

4) Eğer $\alpha^* = G_i(\alpha,\varepsilon)$ ise $(\alpha^*)^* = G_i(\alpha^*,\delta) = G_i(\alpha,\Psi(\varepsilon,\delta))$ dır (Bluman and Kumei, 1989).

2.3.2 Bir Parametreli Lie Grup Dönüşümleri

Tanım 2.4 Dönüşüm gruplarında verilen aksiyomlara ek olarak aşağıdaki aksiyomlar da sağlanırsa bu dönüşüme bir- parametreli Lie grup dönüşümü denir.

5) ε sürekli bir parametre ve $\varepsilon \in A \subset R$

6) G grubunun her bir G_i elemanı sonsuz defa diferensiyellenebilir.

7) $\varepsilon,\delta \in A$ olmak üzere $\Psi(\varepsilon,\delta)$, ε ve δ nın analitik fonksiyonudur (Bluman and Kumei, 1989).

2.3.3 Sonsuz Küçük Dönüşümler

$$\alpha^* = G_i(\alpha, \varepsilon) \tag{2.1}$$

Bir parametreli Lie grup dönüşümünü ele alalım. $\varepsilon_0 = 0$ noktasında seriye açarsak;

$$\begin{aligned}\alpha^* &= G_i(\alpha, \varepsilon) + (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{\partial G_i(\alpha, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + O(\varepsilon^2) \\ &= \alpha + \varepsilon \frac{\partial \alpha^*}{\partial \varepsilon} \mid_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

buluruz. Burada

$$\xi(\alpha) = \frac{\partial \alpha^*}{\partial \varepsilon} \mid_{\varepsilon=0}$$

olarak alalım. Buna göre

$$x^* = x + \varepsilon \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon} \mid_{\varepsilon=0} + \ldots$$

$$y^* = y + \varepsilon \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon} \mid_{\varepsilon=0} + \ldots;$$

dönüşümlerinde

$$\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon} \mid_{\varepsilon=0} = \xi(x, y)$$

ve

$$\frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon} \mid_{\varepsilon=0} = \eta(x, y)$$

olarak alınırsa,

$$x^* = x + \varepsilon \xi(x, y) + \ldots$$

$$y^* = y + \varepsilon \eta(x, y) + \ldots$$

olur. Bu sonsuz küçük dönüşümün bileşenleri olan $\xi(x, y)$ ve $\eta(x, y)$ fonksiyonlarına (2.1) dönüşümün sonsuz küçükleri denir. (2.1) dönüşümü $\xi(\alpha)$ nın $\alpha^* \mid_{\varepsilon=0} = G_i \mid_{\varepsilon=0} = \alpha$ başlangıç şartlarıyla integralinin alınmasıyla elde edilebilir (Bluman and Anco, 2002).

Yardımcı Teorem 2.5 $\alpha^* = G_i(\alpha, \varepsilon)$ bir-parametreli Lie grubu için aşağıdaki eşitlik sağlanır (Bluman and Anco, 2002).

$$G_i(\alpha, \varepsilon + \Delta\varepsilon) = G_i(G_i(\alpha, \varepsilon); \Psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon))$$

İspat.

$$\begin{aligned}G_i(\alpha, \varepsilon + \Delta\varepsilon) = G_i(G_i(\alpha, \varepsilon); \Psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon)) &= G_i(\alpha; \Psi(\varepsilon, \Psi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \Delta\varepsilon))) \\ &= G_i(\alpha; \Psi(\Psi(\varepsilon, \varepsilon^{-1}), \varepsilon + \Delta\varepsilon)) \\ &= G_i(\alpha; \Psi(0, \varepsilon + \Delta\varepsilon)) \\ &= G_i(\alpha; \varepsilon + \Delta\varepsilon)\end{aligned}$$

□

Teorem 2.6 Lie Birinci Temel Teoremi

$\alpha^* = G_i(\alpha,\varepsilon)$ Bir parametreli Lie grup dönüşümü olmak üzere,

$$\frac{\partial x^*}{\partial \tau} = \xi(x^*),\ \tau = 0 \Rightarrow x^* = x$$

biçimindeki birinci mertebeden denklem sistemleri için başlangıç değer probleminin çözümü,

$$\alpha^* = G_i(\alpha,\varepsilon)$$

Lie grup dönüşümlerine eşdeğer olacak şekilde $\tau(\varepsilon)$ parametrizasyonu ile yapılır.

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \Gamma(\varepsilon')d\varepsilon'$$

$$\Gamma(\varepsilon) = (\frac{\partial}{\partial b}\Psi(a,b)\mid_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)})$$
$$\Gamma(0) = 1$$

İspat: $\alpha^* = G(\alpha;\varepsilon)$ olmak üzere yardımcı teorem (1.1) den dolayı;

$$G_i(\alpha,\varepsilon+\Delta\varepsilon) = G_i(G_i(\alpha,\varepsilon);\Psi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon))$$

idi. $G_i(\alpha;\varepsilon+\Delta\varepsilon)$ ifadesini $\Delta\varepsilon = 0$ civarında seriye açılırsa;

$$\begin{aligned} G_i(\alpha,\varepsilon+\Delta\varepsilon) &= G_i(\alpha,\varepsilon) + (\frac{\partial}{\partial(\varepsilon+\Delta\varepsilon)}G_i(\alpha,\varepsilon+\Delta\varepsilon)\mid_{\Delta\varepsilon=0})\Delta\varepsilon + ... \\ &= \alpha^* + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}G_i(\alpha,\varepsilon)\Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2) \end{aligned}$$

ve $\Psi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon)$ ifadesini $\Delta\varepsilon = 0$ civarında seriye açılırsa;

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon) &= \Psi(\varepsilon^{-1},\varepsilon) + (\frac{\partial}{\partial(\varepsilon+\Delta\varepsilon)}\Psi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon)\mid_{\Delta\varepsilon=0})\Delta\varepsilon + ... \\ &= \Psi(\varepsilon^{-1},\varepsilon) + \Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2) \\ &= \Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2) \end{aligned}$$

olur, diğer taraftan;

$$\begin{aligned} G_i(\alpha,\varepsilon+\Delta\varepsilon) = G_i(G_i(\alpha,\varepsilon);\Psi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon)) &= G_i(\alpha^*;\Psi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\Delta\varepsilon) \\ &= G_i(\alpha^*;\Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon + O((\Delta\varepsilon)^2) \\ &= G_i(\alpha^*,0) + \Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon(\frac{\partial}{\partial\delta}G_i(\alpha^*;\delta)\mathop{\mid}_{\delta=0}) + O((\Delta\varepsilon)^2) \\ &= \alpha^* + \Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon\xi(\alpha^*) + O((\Delta\varepsilon)^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadelerden;

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}G_i(\alpha;\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon)\xi(\alpha^*)$$

$$\frac{\partial\alpha^*}{\partial\varepsilon} = \Gamma(\varepsilon)\xi(\alpha^*)\ ;\ \varepsilon = 0\ \Rightarrow\ \alpha^* = \alpha$$

olur (Bluman and Anco, 2002).

Örnek 2.3

$$\begin{aligned} x^* &= x+\varepsilon \\ y^* &= y \end{aligned}$$

grup dönüşümleri için

$$\Psi(a,b) = a+b \quad \text{ve} \quad \varepsilon^{-1} = -\varepsilon$$

olsun.

$$\left(\frac{\partial}{\partial b}\Psi(a,b)\right)_{(-\varepsilon,\varepsilon)} = 1$$

$$\Gamma(\varepsilon) = 1$$

olur.

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}X(x,\varepsilon)\right)_{\varepsilon=0} = (1,0) \;\text{ ise }\; \xi(x) = (1,0)$$

ve

$$\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon} = \Gamma(\varepsilon)\xi(x^*) = 1$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon} = \Gamma(\varepsilon)\xi(y^*) = 0$$

$$\varepsilon = 0,\; \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon} = 1$$

$$x^* = x\;,\;\; y^* = y$$

olur (Bluman and Anco, 2002).

Örnek 2.4

$$\begin{aligned} x^* &= (1+\varepsilon)x \\ y^* &= (1+\varepsilon)^2 y, \end{aligned}$$

$-1 < \varepsilon < \infty$ grup dönüşümleri için

$$\Psi(a,b) = a+b+ab,\; \varepsilon^{-1} = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

olsun. Bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial b}\Psi(a,b) = 1+a$$

ve

$$\Gamma(\varepsilon) = \left(\frac{\partial}{\partial b}\Psi(a,b)\right)_{(\varepsilon^{-1},\varepsilon)} = 1+\varepsilon^{-1} = \frac{1}{1+\varepsilon}$$

olur.

$$x = (x,y)$$

olsun.

$$X(x,\varepsilon) = ((1+\varepsilon)x,\; (1+\varepsilon)^2 y)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}X(x,\varepsilon) = (x, 2(1+\varepsilon)y)$$

ve

$$\xi(x) = \frac{\partial}{\partial x} X(x,\varepsilon)\mid_{\varepsilon=0} = (x,2y)$$

sonuç olarakta,

$$\frac{dx^*}{d\varepsilon} = \frac{x^*}{1+\varepsilon}, \ \frac{dy^*}{d\varepsilon} = \frac{2y^*}{1+\varepsilon}$$

ve

$$\varepsilon = 0 \text{ da } x^* = x \ , \ y^* = y$$

olur. Parametrizasyonda

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \Gamma(\varepsilon')d\varepsilon' = \int_0^\varepsilon \frac{1}{1+\varepsilon'}d\varepsilon' = \log(1+\varepsilon)$$

olur. Baştaki grup dönüşümleri de

$$x^* = e^\tau x$$

$$y^* = e^{2\tau} y, \ -\infty < \tau < \infty$$

olur ve

$$\Psi(\tau_1,\tau_2) = \tau_1 + \tau_2$$

dır (Bluman and Anco, 2002).

2.4 SONSUZ KÜÇÜK ÜRETEÇLER

Tanım 2.7 $x^* = X(x,\varepsilon)$ dönüşümünü ele alalım. $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ ve ∇ operatörü;

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$$

olmak üzere

$$X = \xi(x).\nabla = \sum_{k=1}^{n} \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

şeklinde tanımlanan operatöre bir parametreli grup dönüşümlerinin sonsuz küçük üreteci denir. Ayrıca Lie operatörü, grup operatörü, grup üreteci gibi terimler de bu operatör için kullanılır.

$$\xi^k = \frac{\partial x_k^*}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$$

X_α tanjant vektörlerinin bir bileşenidir. Sabit bir $(x,y) \in R^2$ noktasını alalım. Simetri üreteci,

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

olur.

$$\xi(x,y) = \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$$

ve

$$\eta(x,y) = \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$$

ile hesaplanabilir. Her dönüşüm sonsuz küçük üreteç X in yardımıyla tamamen belirlenebilir.

$$x_k^* |_{\varepsilon=0} = x_k$$

başlangıç şartıyla birlikte

$$\xi^k(x^*) = \frac{\partial x_k^*}{\partial \varepsilon}$$

ların integre edilmesiyle X bulunur (Stephani, H. , 1989).

Teorem 2.8 Bir parametreli Lie grup dönüşümlerinden

$$\begin{aligned} x^* = \quad X(x,\varepsilon) &= e^{\varepsilon X}x \\ &= x + \varepsilon X x + \frac{\varepsilon^2}{2}X^2 x + \ldots \\ &= \left[1 + \varepsilon X + \frac{\varepsilon^2}{2}X^2 + \ldots\right] x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k x \end{aligned}$$

ve

$$X^k = X^k(x) = XX^{k-1} \ , k = 1,2,\ldots$$

dir. $X^k F(x)$ fonksiyonu da X in $X^{k-1}F(x)$ ifadesine uygulanmasıyla elde edilir. $k = 1,2,3,\ldots$ ve

$$X^0 F(x) = F(x)$$

dir. Sonuç olarak da eğer F(x) sonsuz defa diferensiyellenebilir ise

$$F(x^*) = F(e^{\varepsilon X}x) = e^{\varepsilon X}F(x)$$

olur (Bluman and Anco, 2002).

Örnek 2.5 :

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon \\ y^* &= x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon \end{aligned}$$

İki boyutlu dönme simetrisini temsil eden dönüşümler verilsin.

$$\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon} = -x\sin\varepsilon - y\cos\varepsilon$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon} = x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon$$

$$\xi(x,y)=\frac{dx^*}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}=-y$$
$$\eta(x,y)=\frac{dy^*}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}=x$$

Böylece simetri üreteci,

$$X=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$$

olarak elde edilir.

$$(x^*,y^*)=(e^{\varepsilon X}x,e^{\varepsilon X}y)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
Xx= &\quad -y\frac{\partial x}{\partial x}+x\frac{\partial x}{\partial y} &&=-y\\
X^2x=X(Xx)= &\quad -y\frac{\partial(-y)}{\partial x}+x\frac{\partial(-y)}{\partial y} &&=-x\\
X^3x=X^2(Xx)= &\quad -y\frac{\partial(-x)}{\partial x}+x\frac{\partial(-x)}{\partial y} &&=y\\
X^4x=X^3(Xx)= &\quad -y\frac{\partial y}{\partial x}+x\frac{\partial y}{\partial y} &&=x
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$X^{4n}x=x,\ \ X^{4n-1}x=y,\ \ X^{4n-2}x=-x,\ \ X^{4n-3}x=-y,\quad n=1,2,...$$

dır.

$$\begin{aligned}
x^* \ =e^{\varepsilon X}x \ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}X^kx=x-\varepsilon y-\frac{\varepsilon^2}{2!}x+\frac{\varepsilon^3}{3!}y+...\\
&= x\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2!}+\frac{\varepsilon^4}{4!}+...\right)-y\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^3}{3!}+...\right)\\
&= x\cos\varepsilon+y\sin\varepsilon
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde X operatörünü y ye uygularsak;

$$\begin{aligned}
Xy &= -y\frac{\partial y}{\partial x}+x\frac{\partial y}{\partial y} &&=x\\
X^2y=X(Xy) &= -y\frac{\partial x}{\partial x}+x\frac{\partial x}{\partial y} &&=-y\\
X^3y=X^2(Xy) &= -y\frac{\partial(-y)}{\partial x}+x\frac{\partial(-y)}{\partial y} &&=-x\\
X^4y=X^3(Xy) &= -y\frac{\partial(-x)}{\partial x}+x\frac{\partial(-x)}{\partial y} &&=y
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$X^{4n}y=y,\ \ X^{4n-1}y=-x,\ \ X^{4n-2}y=-y,\ \ X^{4n-3}y=x,\quad n=1,2,...$$

dır.

$$\begin{aligned}
y^*= &\quad e^{\varepsilon X}y= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}X^ky=y+\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2!}y-\frac{\varepsilon^3}{3!}x+...\\
&= x\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon^3}{3!}+...\right)+y\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2!}+\frac{\varepsilon^4}{4!}+...\right)\\
y^* &= x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon
\end{aligned}$$

olarak bulunur (Bluman and Anco, 2002).

Örnek 2.6

$$X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

sonsuz küçük üreteci ile verilen x_1^* ve x_2^* dönüşümlerini bulunuz.

$$\begin{aligned}
Xx_1 &= x_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} &&= x_2 \\
X^2 x_1 = X(Xx_1) &= x_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial x_2} &&= -x_1 \\
X^3 x_1 = X^2(Xx_1) &= x_2 \frac{\partial(-x_1)}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial(-x_1)}{\partial x_2} &&= -x_2 \\
X^4 x_1 = X^3(Xx_1) &= x_2 \frac{\partial(-x_2)}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial(-x_2)}{\partial x_2} &&= x_1
\end{aligned}$$

O halde

$$X^{4n} x_1 = x_1,\ \ X^{4n-1} x_1 = -x_2,\ \ X^{4n-2} x_1 = -x_1,\ \ X^{4n-3} x_1 = x_2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

olur.

$$\begin{aligned}
Xx_2 &= x_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial x_2} &&= -x_1 \\
X^2 x_2 = X(Xx_2) &= x_2 \frac{\partial(-x_1)}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial(-x_1)}{\partial x_2} &&= -x_2 \\
X^3 x_2 = X^2(Xx_2) &= x_2 \frac{\partial(-x_2)}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial(-x_2)}{\partial x_2} &&= x_1 \\
X^4 x_2 = X^3(Xx_2) &= x_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} &&= x_2
\end{aligned}$$

O halde

$$X^{4n} x_2 = x_2,\ \ X^{4n-1} x_2 = -x_1,\ \ X^{4n-2} x_2 = -x_2,\ \ X^{4n-3} x_2 = -x_1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

dır. Elde edilen bu ifadelerle,

$$\begin{aligned}
x_1^* = \ e^{\varepsilon X} x_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k x_1 = x_1 + \varepsilon x_2 - x_1 \frac{\varepsilon^2}{2!} - x_2 \frac{\varepsilon^3}{3!} + x_1 \frac{\varepsilon^4}{4!} + \ldots \\
&= x_1 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} + \ldots\right) + x_2 \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \ldots\right) \\
&= x_1 \cos\varepsilon + x_2 \sin\varepsilon
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer işlemleri x_2^* için yapalım.

$$\begin{aligned}
x_2^* = \ e^{\varepsilon X} x_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k x_2 = x_2 - \varepsilon x_1 - x_2 \frac{\varepsilon^2}{2!} + x_1 \frac{\varepsilon^3}{3!} + x_2 \frac{\varepsilon^4}{4!} + \ldots \\
&= -x_1 \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \ldots\right) + x_2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} + \ldots\right) \\
&= -x_1 \sin\varepsilon + x_2 \cos\varepsilon
\end{aligned}$$

olarak bulunur (Bluman and Anco, 2002).

Örnek 2.7

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$$

sonsuz küçük üreteci ile verilen x* ve y* dönüşümlerini bulunuz.

$$x^* = e^{\varepsilon X}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}X^k x = \left(1 + \varepsilon X + \frac{\varepsilon^2}{2!}X^2 + \frac{\varepsilon^3}{3!}X^3 + \frac{\varepsilon^4}{4!}X^4 + ... + \frac{\varepsilon^n}{n!}X^n + ...\right)(x)$$

$$y^* = e^{\varepsilon X}y = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}X^k y = \left(1 + \varepsilon X + \frac{\varepsilon^2}{2!}X^2 + \frac{\varepsilon^3}{3!}X^3 + \frac{\varepsilon^4}{4!}X^4 + ... + \frac{\varepsilon^n}{n!}X^n + ...\right)(y)$$

$$\begin{aligned} Xx &= x^2 \\ X^2x &= 2!x^3 \\ X^3x &= 3!x^4 \\ &. \\ &. \\ &. \\ X^nx &= n!x^{n+1} \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} Xy &= xy \\ X^2y &= 2!yx^2 \\ X^3y &= 3!yx^3 \\ &. \\ &. \\ &. \\ X^ny &= n!yx^n \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $|\ \varepsilon x\ | < 1$ için

$$x^* = e^{\varepsilon X}x = (1 + \varepsilon X + \varepsilon^2X^2 + \varepsilon^3X^3 + \varepsilon^4X^4 + ... + \varepsilon^nX^n)x = \frac{x}{1-\varepsilon}$$

$$y^* = e^{\varepsilon X}y = (1 + \varepsilon X + \varepsilon^2X^2 + \varepsilon^3X^3 + \varepsilon^4X^4 + ... + \varepsilon^nX^n)y = \frac{y}{1-\varepsilon}$$

dönüşümleri elde edilir (Bluman and Anco, 2002).

2.5 ÜRETEÇLERİN DÖNÜŞÜMLERİ

Sonsuz küçük üreteç $X_j = \sum_{i=1}^{n}\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ operatörü; x=x(x_i) lere bağlıdır ve dönüşüm kuralı ile $x_i^{'}$ değişkenine dönüştürülebilir. $x_i^{'} = x_i^{'}(x_i)$ olsun.

$$\left|\frac{\partial x_i^{'}}{\partial x_i}\right| \neq 0$$

zincir kuralından

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i^{'}}.\frac{\partial x_i^{'}}{\partial x_i}$$

elde edilir. X_j sonsuz küçük üretecini tekrar düzenlersek,

$$\begin{aligned} X_j &= \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial x_i'}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i'(x) \frac{\partial}{\partial x_i'} \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\xi_i'(x) = \xi_i(x) \frac{\partial x_i'}{\partial x_i}$$

olmak üzere,

$$X_j x_k = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \xi^k(x)$$

ve;

$$X_j x_k' = \sum_{i=1}^{n} \xi_i'(x) \frac{\partial x_k'}{\partial x_i'} = \xi_k'(x)$$

$1 \leq k \leq n$ için sonsuz küçük üreteçler

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} (X_j x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} (X_j x_i') \frac{\partial}{\partial x_i'} \tag{2.2}$$

olarak yazılabilir. Böylece x_i koordinatlarına göre yazılan X_j üreteci x_i' yeni koordinatlarına göre yazılmış olur (Ahmad, 2005).

Örnek 2.8 $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ olarak verilen simetri üretecinde; v ve u yeni değişkenlerini,

$$u = \frac{y}{x}, v = xy$$

şeklinde tanımlayalım. Sonsuz küçük simetri üreteci X e u ve v değişkenlerine uygularsak,

$$Xu = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$Xv = x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = 2xy = 2v$$

buluruz. Böylece X üreteci yeni koordinatlara göre,

$$X = 2v\frac{\partial}{\partial v}$$

olarak ifade edilir (Ahmad, 2005).

2.6 ÜRETECİN NORMAL FORMU

Denklem (2.2) nin bir sonucu olarak kısmi diferensiyel denklem sistemleri için

$$X\gamma = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x)\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 1 \quad i = 1,2,3,...n$$

$$Xx_k^{'} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x)\frac{\partial x_k^{'}}{\partial x_i} = 0 \; k = 2,3,...n$$

$\left\{\gamma(x_i), x_k^{'}(x_i)\right\}$ olacak şekilde her zaman açık olmayan çözümler vardır. Bu sonuç ile sonsuz küçük simetri üreteci

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

den

$$X = \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

ya indirgenebilir. Bu denkleme de X üretecinin normal formu denir (Stephani, 1989).

Örnek 2.9 Dönme dönüşümleri;

$$x^* = x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon$$

$$y^* = x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon$$

ve simetri üreteci,

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

olarak verilsin. Kutupsal koordinatlarda

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ve} \quad \phi = \arctan\frac{y}{x}$$

olduğundan yeni değişkenler X üretecine uygulanırsa,

$$Xr = -y\frac{\partial r}{\partial x} + x\frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

$$X\phi = -y\frac{\partial \phi}{\partial x} + x\frac{\partial \phi}{\partial y} = 1$$

olacağından X in normal formu $X = \dfrac{\partial}{\partial \phi}$ olarak bulunur (Stephani, 1989).

2.7 LIE GRUP DÖNÜŞÜMLERİNDE DEĞİŞMEZLİK (INVARYANTLIK)

Lie grup dönüşümleri değişmez fonksiyonlara, noktalara, eğrilere ve yüzeylere sahip olabilir. Bu Lie grup teorisinin en temel yapısıdır. Çünkü değişmezlik(invaryantlık) özelliği sayesinde simetri grubunun sonsuz küçük üreteci altında karmaşık lineer olmayan şartlar daha basit lineer şartlara dönüştürülebilir.

2.7.1 Değişmez Fonksiyonlar:

Tanım 2.9 $f(x)$ sürekli ve her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$f(x)$ fonksiyonu değişmez fonksiyondur.$\Leftrightarrow x^* = X(x,\varepsilon)$ dönüşümü için $f(x) = f(x^*)$ dır (Bluman and Anco, 2002).

Teorem 2.10 $f(x), x^* = X(x,\varepsilon)$ Lie grup dönüşümü altında değişmezdir $\Leftrightarrow Xf(x) = 0$ dır (Bluman and Kumei, 1989).

$$(\Rightarrow) \quad \begin{aligned} f(x^*) &= e^{\varepsilon X} f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k f(x) \\ &= f(x) + \varepsilon X f(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} X^2 f(x) + \ldots \end{aligned}$$

$f(x^*) = f(x)$ olması için eşitliğin sağ tarafındaki ilk terimden sonrası sıfır olmalıdır.Yani $Xf(x) = 0$ dır.

$$(\Leftarrow) \qquad \begin{aligned} &Xf(x) = 0 \Rightarrow X^k f(x) = 0 \\ &f(x^*) = f(x) + \varepsilon X f(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} X^2 f(x) + \ldots \end{aligned}$$

olup

$$Xf(x) = X^2 f(x) = \ldots = X^k f(x) = 0$$

olduğundan

$$f(x^*) = f(x)$$

olur.

Teorem 2.11 : $x^* = X(x,\varepsilon)$ Lie grup dönüşümü için,

$$f(x^*) = f(x) + \varepsilon \Leftrightarrow Xf(x) = 1 \qquad dır.$$

İspat:

$$(\Rightarrow) \qquad f(x^*) = e^{\varepsilon X} f(x) = f(x) + \varepsilon X f(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} X^2 f(x) + \ldots$$
$$f(x) + \varepsilon = f(x) + \varepsilon X f(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} X^2 f(x) + \ldots$$

olup eşitliğin sağlanabilmesi için

$$X f(x) = 1$$

ve

$$X^k f(x) = 0, \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

olmalıdır.

$(\Leftarrow)$ $X f(x) = 1$ ise $X^k f(x) = 0$ dır. $\quad k = 2,3,4,\ldots$ ve

$$f(x^*) = e^{\varepsilon X} f(x) = f(x) + \varepsilon X f(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} X^2 f(x) + \ldots$$

olur. Bu durumda

$$f(x^*) = f(x) + \varepsilon$$

olur (Bluman and Anco, 2002).

2.7.2 Değişmez Noktalar

$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ bir nokta olsun ve $x^* = X(x, \varepsilon)$ bir parametreli Lie grup dönüşümü altında değişmezdir(invaryanttır) $\Leftrightarrow x^* = x$ dır (Ahmad, 2005).

2.7.3 Değişmez Eğriler

$f(x) = 0$ n-boyutlu uzayda $(\mathbb{R}^n)$ eğri olsun ve bir parametreli Lie grup dönüşümü $\mathbb{R}^n$ içerisinde

$$x_i^* = x_i + \varepsilon \xi_i(x) + o(\varepsilon^2) \quad i = 1, 2, 3, \ldots n$$

olarak verilsin. Bu dönüşümle ilgili üreteç de,

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olsun. $f(x) = 0$ eğrisi invaryanttır $\Leftrightarrow f(x^*) = 0$ dır (Ahmad, 2005).

2.7.4 Değişmez Yüzeyler

$x \in \mathbb{R}^n$ n-boyutlu uzayda $f(x) = 0$ düzgün bir yüzey olsun ve $x^* = X(x,\varepsilon)$ bir parametreli Lie grup dönüşümü olsun.

$f(x) = 0$ yüzeyi simetri dönüşümü altında invaryanttır$\Leftrightarrow f(x^*) = 0$ dır (Ahmad, 2005).

2.7.5 Kısmi diferensiyel Denklemlerin Değişmezliği

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n tane bağımsız değişken ve u bağımlı değişken olmak üzere k. mertebeden

$$F(x,u,u^{(1)},u^{(2)},...,u^{(k)}) = 0 \tag{2.3}$$

kısmi diferensiyel denklemini ele alalım.

$$x^* = X(x,u;\varepsilon) \tag{2.4-a}$$

$$u^* = U(x,u;\varepsilon) \tag{2.4-b}$$

bir parametreli Lie grup dönüşümü olsun. Buna göre kısmi diferensiyel denklemin verilen Lie grup dönüşümü altında değişmez kalabilmesi için aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.12 (Kısmi diferensiyel denklemlerlerin değişmezliği için sonsuz küçükler kriteri)

(2.4-a,b) dönüşümlerine ait sonsuz küçük simetri üreteci;

$$X = \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

olarak verilsin. Buna göre sonsuz küçük üretecin k. uzatımı;

$$X^{(k)} = \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta^{(1)}(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_i} + ... + \eta^{(k)}(x,u,\partial u,\partial^2 u,...,\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 ... i_k}}$$

olur. Buradaki sonsuz küçükler $\eta_i^{(1)}$ ve $\eta_{i_1 i_2 \dots i_j}^{(j)}$ ler

$$\eta_i^{(1)} = D_i\eta - (D_i\xi_i)u_j, \quad i = 1,2,...,n$$

$$\begin{aligned} \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)} &= D_{i_k}\eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)} - (D_{i_k}\xi_j)u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j} \\ \text{k} &\geq \text{2 ve j=1,2,...,k için } \mathrm{i}_j = 1,2,...,n \end{aligned}$$

formülleriyle hesaplanabilir. $\xi(x,u) = (\xi_1(x,u), \xi_2(x,u), ..., \xi_n(x,u)), \eta(x,u)$ ve total türev operatörü D, (2.8.2) de tanımlanmıştır. (2.4-a,b) bir parametreli Lie grup dönüşümü (2.3) denkleminin bir nokta simetrisidir ancak ve ancak $F(x,u,u^{(1)},u^{(2)},...,u^{(k)}) = 0$ olduğunda $X^{(k)}F(x,u,u^{(1)},u^{(2)},...,u^{(k)}) = 0$ dır (Olver, 1991).

2.8 LIE CEBİR

Bölüm (1.3) de verilen, her bir -parametreli Lie grup, bir X sonsuz küçük simetri üreteci ile belirlenir. n-parametreli sürekli grupların sonsuz küçük üreteçleri n-boyutlu bir Lie cebiri üretir. (Gilmore, 1974, 2008)

Geometrik olarak $x = x(x_1, x_2, ..., x_i)$ noktasının

$$x_i^* = x_i + \varepsilon\xi_i(x)$$

ile verilen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki sonsuz küçük dönüşümleri,

$$\xi(\mathbf{x}) = (\xi_1(\mathbf{x}), \xi_2(\mathbf{x}), ..., \xi_n(\mathbf{x}))$$

tanjant vektörüyle tanımlanır. Böylece $\xi(\mathbf{x})$ e dönüşümlerin bir parametreli Lie grubunun tanjant vektör cismi denir. Tanjant vektör cismi, genellikle $\xi(\mathbf{x})$ ile gösterilir.ve

$$X = \xi(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}$$

birinci mertebeden lineer diferensiyel operatör olarak yazılır (Kiraz, 2007). Şimdi birinci mertebe lineer diferensiyel operatörlerin bir Lie cebirini yani tanjant vektör cisimlerinin vektör uzayını oluşturalım.

Tanım 2.13 n-parametreli Lie grup dönüşümü sonsuz küçük simetri üreteci X_i ve $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_n)$ parametresine bağlı olarak verilsin. Herhangi iki simetri üreteci X_i ve X_j olmak üzere $[,]$ komütatörü

$$\left[X_i, X_j\right] = X_iX_j - X_jX_i$$

$$X_iX_j = \sum_{k=1}^{n} \xi_i^k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\sum_{l=1}^{n}\xi_j^l(x,\varepsilon_i)\frac{\partial}{\partial x_l}\right\}$$

olarak tanımlanır. K bir cisim ve L bu cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. L vektör uzayı yukarıda tanımlı ikili işleme göre kapalı ise n-boyutlu Lie cebiri denir ve L_n ile gösterilir. Buna göre aşağıdaki özelliklerde sağlanır.

1) Anti simetri: $X_j, X_k \in L$ olmak üzere; $[X_j, X_k] = -[X_k, X_j]$

2) Bi-lineer: $c_1, c_2 \in K$ ve $X,\ X_j,\ X_k \in L$ olmak üzere:

$$[X, c_1 X_j + c_2 X_k] = c_1[X, X_j] + c_2[X, X_k]$$

ve

$$[c_1 X_j + c_2 X_k, X] = c_1[X_j, X] + c_2[X_k, X]$$

3) Jakobi özdeşliği: $X_j, X_k, X_l \in L$ olmak üzere,

$$[X_j, [X_k, X_l]] + [X_k, [X_l, X_j]] + [X_l, [X_j, X_k]] = 0$$

sağlanır.

Ayrıca her $X_j \in L$ için

$$[X_j, X_j] = 0$$

eşitliği sağlanır.

$[,]$ komütatörü, cebirin çarpım bağıntısıdır ve Lie çarpım veya Lie parantez denir. Lie parantez genelde birleşmeli değildir. Eğer herhangi bir $v, w \in L_r$ için $[v, w] = 0$ ise Lie cebirine değişmeli(abelyan) denir (Olver, 1991).

Örnek 2.10

$$\begin{aligned} x^* = &\ e^{\varepsilon_4}(x\cos\varepsilon_1 - y\sin\varepsilon_1) + \varepsilon_2 \\ y^* = &\ e^{\varepsilon_4}(x\sin\varepsilon_1 + y\cos\varepsilon_1) + \varepsilon_3 \end{aligned}$$

4 parametreli Lie grup dönüşümü olsun. Sonsuz küçük simetri üreteçleri de,

$$X_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial y}$$

$X_4 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ olarak verilsin. Lie parantez operatörünü kullanarak komütatör tablosunu oluşturunuz (Bluman and Anco, 2002).

$$
\begin{aligned}
[X_1, X_1] &= 0 \\
[X_1, X_2] &= X_1 X_2 - X_2, X_1 \\
&= \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= -y\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + y\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
&= -\frac{\partial}{\partial y} = -X_3 \\
[X_1, X_3] &= \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= -y\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} = X_2 \\
[X_1, X_4] &= \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= -y\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial^2}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial}{\partial y} + xy\frac{\partial^2}{\partial y^2} + xy\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
&\quad -x\frac{\partial}{\partial y} - x^2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - xy\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[X_2, X_1] &= -[X_1, X_2] = X_3 \\
[X_2, X_2] &= 0 \\
[X_2, X_3] &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \\
&= 0 \\
[X_2, X_4] &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial^2}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} = X_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[X_3, X_1] &= -[X_1, X_3] = -X_2 \\
[X_3, X_2] &= -[X_2, X_3] = 0 \\
[X_3, X_3] &= 0 \\
[X_3, X_4] &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= x\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial^2}{\partial y^2} - x\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial y} = X_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[X_4, X_1] &= -[X_1, X_4] = 0 \\
[X_4, X_2] &= -[X_2, X_4] = -X_2 \\
[X_4, X_3] &= -[X_3, X_4] = -X_3 \\
[X_4, X_4] &= 0
\end{aligned}
$$

Şimdi üreteçlerin komütatör tablosunu oluşturalım.

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	$-X_3$	X_2	0
X_2	X_3	0	0	X_2
X_3	$-X_2$	0	0	X_3
X_4	0	$-X_2$	$-X_3$	0

2.9 UZATIM (PROLONGASYON) FORMÜLLERİ

Bu kısımda tam türev operatörü tanımlandı. Bu operatör sayesinde sonsuz küçük simetri üretecinin uzatım formülleri ve uzatımı oluşturan sonsuz küçüklerin formülleri verildi. Özel hallerdeki bağımlı ve bağımsız değişken sayısı için sonsuz küçüklerin uzatımları hesaplandı.

2.9.1 Durum 1: Bir Bağımlı ve Bir Bağımsız Değişken İçin

Tanım 2.14 Tam türev operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + ... + y^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}} + ...$$

$F(x, y, y\prime, y'', ..., y^{(l)}) = 0$ diferensiyellenebilir fonksiyon olsun ve tam türevi;

$$DF = \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + ... + y^{(l+1)} \frac{\partial F}{\partial y^{(l)}} + ...$$

olarak verilir (Bluman and Kumei, 1989).

$$x^* = X(x, y; \varepsilon)$$

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon)$$

olarak verilen bir-parametreli Lie grup dönüşümünün k-ıncı uzatımı tam türev yardımıyla kolayca hesaplanabilir.

$$y_i^* = Y_i(x, y, y_1, ..., y_i; \varepsilon) = \frac{DY_{i-1}(x, y, y_1, ..., y_{i-1}; \varepsilon)}{DX(x, y; \varepsilon)}, \qquad i = 1, 2, ..., k$$

olur ve

$$Y_0 = Y(x, y; \varepsilon)$$

dır (Bluman and Kumei, 1989).

Bir-parametreli Lie grup dönüşümleri,

$$x^* = X(x,y;\varepsilon) = x + \varepsilon\xi(x,y) + O(\varepsilon^2) \tag{2.5}$$

$$y^* = Y(x,y;\varepsilon) = y + \varepsilon\eta(x,y) + O(\varepsilon^2) \tag{2.6}$$

olarak verilsin. (x,y) uzayındaki sonsuz küçükleri,

$$\xi(x,y), \eta(x,y)$$

dir ve sonsuz küçük üreteci de;

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

olarak verilir. (2.5) ve (2.6) nın k. uzatımı

$$x^* = X(x,y;\varepsilon) = x + \varepsilon\xi(x,y) + O(\varepsilon^2)$$

$$y^* = Y(x,y;\varepsilon) = y + \varepsilon\eta(x,y) + O(\varepsilon^2)$$

$$(y')^* = Y'(x,y,y';\varepsilon) = y' + \varepsilon\eta'(x,y,y') + O(\varepsilon^2)$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$(y^{(k)})^* = Y^{(k)}(x,y,y',y'',...,y^{(k)};\varepsilon) = y^{(k)} + \varepsilon\eta^{(k)}(x,y,y',y'',...,y^{(k)}) + O(\varepsilon^2)$$

olarak verilir ve k. uzatımının sonsuz küçükleri,

$$\xi(x,y), \eta(x,y), \eta'(x,y,y'), ..., \eta^{(k)}(x,y,y',y'',...,y^{(k)})$$

olur ve k. uzatımın sonsuz küçük üreteci de,

$$X^{(k)} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta'(x,y,y')\frac{\partial}{\partial y'} + ... + \eta^{(k)}(x,y,y',y'',...,y^{(k)})\frac{\partial}{\partial y^k}$$

olur. k=1,2,3,... için uzatımın sonsuz küçükleri $\eta^{(k)}$ lar aşağıdaki teorem ile bulunur.

Teorem 2.15 Uzatımın sonsuz küçükleri $\eta^{(k)}$ lar aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\eta^{(k)}(x,y,y',y'',...,y^{(k)}) = D\eta^{(k-1)}(x,y,y',y'',...,y^{(k-1)}) - y^{(k)}D\xi, \quad k = 1,2,...$$

$$\eta^{(0)} = \eta$$

olur (Bluman and Anco, 2002).

2.9.2 Durum 2: Bir Bağımlı ve n-Bağımsız Değişken İçin

Tanım 2.16 Bir bağımlı değişken u ve n-bağımsız değişken $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ için n. mertebeden bir diferensiyel denklemi

$$F(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, ..., u^{(n)}) = 0, \tag{2.7}$$

ele alalım. (2.7) denkleminin tam türevi,

$$D_i F = \frac{\partial F}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial F}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_i} + ... + u_{i_1 i_2 ... i_n} \frac{\partial F}{\partial u_{i_1 i_2 ... i_{n-1}}} + ... \quad \text{i=1,2,...,n} \tag{2.8}$$

olarak verilir (Cicogna and Gaeta, 1999).

Bir -parametreli Lie grup dönüşümleri,

$$x_i^* = x_i + \varepsilon \xi_i(x, u) + O(\varepsilon^2)$$

$$u^* = u + \varepsilon \eta(x, u) + O(\varepsilon^2)$$

olarak verilsin. i=1,2,...,n. $(\mathbf{x}, u)$ uzayındaki sonsuz küçük üreteci

$$X = \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

olur. Bir parametreli Lie grubun k. ıncı uzatımı aşağıdaki gibi verilir.

$$x_i^* = X_i(x, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon \xi_i(x, u) + O(\varepsilon^2)$$

$$u^* = U(x, u; \varepsilon) = u + \varepsilon \eta(x, u) + O(\varepsilon^2)$$

$$u_i^* = U_i(x, u, \partial u; \varepsilon) = u_i + \varepsilon \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) + O(\varepsilon^2)$$

$$u_{i_1 i_2 .. i_k}^* = U_{i_1 i_2 .. i_k}(x, u, \partial u, ..., \partial u^k; \varepsilon) = u_{i_1 i_2 .. i_k} + \varepsilon \eta_{i_1 i_2 i_k}^{(k)}(x, u, \partial u, ..., \partial u^k) + O(\varepsilon^2)$$

i=1,2,...,n. k. uzatımın sonsuz küçükleri de

$$\xi(x, u), \eta(x, u), \eta'(x, u, \partial u), ..., \eta^{(k)}(x, u, \partial u, ..., \partial u^k)$$

olur ve k. uzatımın üreteci de

$$X^{(k)} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \eta_i' \frac{\partial}{\partial u_i} + ... + \eta_{i_1 i_2 i_k}^{(k)} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_{2 i_k}}}$$

olur. n. mertebeden diferensiyel denkleme sonsuz küçük üreteci uygulayabilmek için n. uzatıma ihtiyaç vardır. Genel uzatım formülünü tam(total) türev operatörü yardımıyla elde ederiz. Uzatımın sonsuz küçükleri için de aşağıdaki teorem geçerlidir (Olver, 1991).

Teorem 2.17 Uzatımın sonsuz küçükleri aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\eta_i^{(1)} = D_i\eta - u_j D_i \xi_j$$

$$\eta_{i_1 i_2 i_k}^{(k)} = D_{i_k}\eta_{i_1 i_2 i_{k-1}}^{(k-1)} - (D_{i_k}\xi_j)u_{i_1 i_2 .. i_{k-1} j}$$

ile verilir ve simetri üretecinin n. uzatımı

$$X^{(n)} = X + \sum_j \eta_j(x, u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u_j}$$

ile verilir (Bluman and Anco, 2002).

Teoremin bir özel halini bir bağımlı değişken u ve iki tane bağımsız değişken x_1 ve x_2 alınırsa bir parametreli Lie grup dönüşümleri,

$$x_i^* = X_i(x_1, x_2, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon\xi_i(x_1, x_2, u) + O(\varepsilon^2)$$

$$u^* = U(x_1, x_2, u; \varepsilon) = u + \varepsilon\eta(x_1, x_2, u) + O(\varepsilon^2)$$

$$u_i^* = U_i(x_1, x_2, u, u_1, u_2, \varepsilon) = u_i + \varepsilon\eta_i^{(1)}(x_1, x_2, u, u_1, u_2) + O(\varepsilon^2)$$

$$u_{ij}^* = U_{ij}(x_1, x_2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22,}\varepsilon) = u_{ij} + \varepsilon\eta_{ij}^{(2)}(x_1, x_2, u, u_1, u_2, u_{11}, u_{12}, u_{22}) + O(\varepsilon^2) \quad i,, j = 1,2$$

ve sonsuz küçük üreteçleri de;

$$\begin{aligned}
\eta_1^{(1)} &= D_{x_1}\eta - (D_{x_1}\xi_1)u_{x_1} - (D_{x_1}\xi_2)u_{x_2} \\
&= \frac{\partial\eta}{\partial x_1} + \frac{\partial\eta}{\partial u}u_{x_1} - u_{x_1}(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_{x_1}) - u_{x_2}(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_{x_1}) \\
&= \frac{\partial\eta}{\partial x_1} + u_{x_1}(\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}) - u_{x_1}^2\frac{\partial\xi_1}{\partial u} + u_{x_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} - u_{x_1}u_{x_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial u} \\
\eta_2^{(1)} &= D_{x_2}\eta - (D_{x_2}\xi_1)u_{x_1} - (D_{x_2}\xi_2)u_{x_2} \\
&= \frac{\partial\eta}{\partial x_2} + \frac{\partial\eta}{\partial u}u_{x_2} - u_{x_1}(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_{x_2}) - u_{x_2}(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_{x_2}) \\
&= \frac{\partial\eta}{\partial x_2} + u_{x_2}(\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}) - u_{x_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} + u_{x_2}^2\frac{\partial\xi_2}{\partial u} - u_{x_1}u_{x_2}\frac{\partial\xi_1}{\partial u}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{11}^{(2)} &= D_{x_1}\eta^{(1)} - (D_{x_1}\xi_1)u_{x_1x_1} - (D_{x_1}\xi_2)u_{x_1x_2} \\
&= D_{x_1}(\frac{\partial\eta}{\partial x_1} + u_{x_1}(\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}) - u_{x_1}^2\frac{\partial\xi_1}{\partial u} + u_{x_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} - u_{x_1}u_{x_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial u}) - u_{x_1x_1}(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_{x_1}) \\
&\quad - u_{x_1x_2}(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_{x_1}) \\
&= \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial u}u_{x_1} + u_{x_1x_2}(\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}) + u_{x_1}(\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial u} + \frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}u_{x_1} - \frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1\partial u}u_{x_1}) \\
&\quad - u_{x_2}(\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1\partial u}u_{x_1}) - \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}u_{x_2x_1} - u_{x_1}^2(\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1\partial u} + \frac{\partial^2\xi_1}{\partial u^2}u_{x_1}) \\
&\quad - 2\frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_{x_1}u_{x_1x_1} - u_{x_1}u_{x_2}(\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1\partial u} + \frac{\partial^2\xi_2}{\partial u^2}u_{x_1}) - \frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_{x_1x_1}u_{x_2} - \frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_{x_1}u_{x_1x_2} \\
&\quad - u_{x_1x_1}(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_{x_1}) - u_{x_1x_2}(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_{x_1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{12}^{(2)} = \eta_{21}^{(2)} &= D_{x_2}\eta^{(1)} - (D_{x_2}\xi_1)u_{x_1x_1} - (D_{x2}\xi_2)u_{x_1x_2} \\
&= D_{x_2}(\frac{\partial\eta}{\partial x_1} + u_{x_1}(\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}) - u_{x_1}^2\frac{\partial\xi_1}{\partial u} + u_{x_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} - u_{x_1}u_{x_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial u}) \\
&\quad - (D_{x_2}\xi_1)u_{x_1x_1} - (D_{x_2}\xi_2)u_{x_1x_2} \\
&= \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1x_2} + u_{x_2}(\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial u} - \frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1\partial x_2}) + u_{x_1}(\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2\partial u} - \frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1\partial x_2}u_{x_1}) - \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}u_{x_2x_2} \\
&\quad + u_{x_1x_2}(\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}) - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}u_{x_1x_1} - \frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1\partial u}u_{x_2}^2 + u_{x_1x_2}(\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1\partial u} - \frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_2\partial u}) \\
&\quad - \frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_2\partial u}u_{x_1}^2 - \frac{\partial^2\xi_2}{\partial u^2}u_{x_2}^2u_{x_1} - \frac{\partial^2\xi_1}{\partial u^2}u_{x_1}^2u_{x_2} - 2\frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_{x_2}u_{x_1x_2} \\
&\quad - 2\frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_{x_1}u_{x_1x_2} - \frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_{x_2}u_{x_1x_1} - \frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_{x_1}u_{x_2x_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{22}^{(2)} &= \frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2} + u_{x_2}(2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2\partial u} - \frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_2^2}) - u_{x_1}\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_2^2} + u_{x_2x_2}(\frac{\partial\eta}{\partial u} - 2\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}) - 2\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}u_{x_1x_2} \\
&\quad + u_{x_2}^2(\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_2\partial u}) - 2\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_2\partial u}u_{x_1}u_{x_2} - \frac{\partial^2\xi_2}{\partial u^2}u_{x_2}^3 \\
&\quad - \frac{\partial^2\xi_2}{\partial u^2}u_{x_1}u_{x_2}^2 - 3\frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_{x_2}u_{x_2x_2} - 3\frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_{x_1}u_{x_2x_2} - 2\frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_{x_2}u_{x_1x_2}
\end{aligned}
$$

özel olarak bu şekilde bulunur.

2.9.3 Durum 3: m- Bağımlı n- Bağımsız Değişken İçin

$$F(x,u,u^{(1)},u^{(2)},...,u^{(n)}) = 0$$

n. mertebeden diferensiyel denklem m tane bağımlı değişkenler $u=(u^1,u^2,\ldots,u^m)$ ve n tane bağımsız değişkenler $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ olsun. Bir parametreli Lie grup dönüşümleri ve k. ıncı uzatımı aşağıdaki gibi verilir.

$$x_i^*=x_i+\varepsilon\xi_i(x,u)+O(\varepsilon^2)$$

$$(u^\mu)^*=u^\mu+\varepsilon\eta^\mu(x,u)+O(\varepsilon^2)$$

olsun.

$$(u_i^\mu)^*=U_i^\mu(x,u,\partial u;\varepsilon)=u_i^\mu+\varepsilon\eta_i^{(1)\mu}(x,u,\partial u)+O(\varepsilon^2)$$

.

.

.

$$(u_{i_1i_2..i_k}^\mu)^*=U_{i_1i_2..i_k}^\mu(x,u,\partial u,\ldots,\partial u^k;\varepsilon)=u_{i_1i_2..i_k}^\mu+\varepsilon\eta_{i_1i_2i_k}^{(k)\mu}(x,u,\partial u,\ldots,\partial u^k)+O(\varepsilon^2)$$

olur. Tam (total) türev operatörü de

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}+u_i^\mu\frac{\partial}{\partial u^\mu}+u_{ij}^\mu\frac{\partial}{\partial u_j^\mu}+\ldots+u_{i_1i_2\ldots i_n}^\mu\frac{\partial}{\partial u_{i_1i_2\ldots i_n}^\mu}+\ldots\quad k=1,2,\ldots,n\ \text{ ve }\ \mu=1,2,\ldots m$$

olarak tanımlıdır.

Teorem 2.18 Tam türev operatörü kullanılarak sonsuz küçükler $\eta_{i_1i_2i_k}^{(k)\mu}$ lar aşağıdaki formüllerle elde edilir.

$$\eta_i^{(1)\mu}=D_i\eta^\mu-(D_i\xi_j)u_j^\mu \tag{2.9}$$

ve

$$\eta_{i_1i_2i_k}^{(k)\mu}=D_{i_k}\eta_{i_1i_2i_{k-1}}^{(k-1)\mu}-(D_{i_k}\xi_j)u_{i_1i_2..i_{k-1}j}^\mu \tag{2.10}$$

k. uzatımın sonsuz küçük üreteci

$$X^{(k)}=\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta^\mu\frac{\partial}{\partial u^\mu}+\eta_i^{(1)\mu}\frac{\partial}{\partial u_i^\mu}+\ldots+\eta_{i_1i_2i_k}^{(k)\mu}\frac{\partial}{\partial u_{i_1i_2\ldots i_k}^\mu},1\le k$$

olur (Bluman and Anco, 2002).

Buna göre özel olarak iki bağımlı değişken u,v olmak üzere ve iki bağımsız değişken x,y alalım. Buna göre x için tam türevi,

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+u_x\frac{\partial}{\partial u}+v_x\frac{\partial}{\partial v}+u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}+u_{xy}\frac{\partial}{\partial u_y}+v_{xx}\frac{\partial}{\partial v_x}+v_{xy}\frac{\partial}{\partial v_y}+\ldots$$

olur. Sonsuz küçük üreteç ise

$$X=\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\eta^1\frac{\partial}{\partial u}+\eta^2\frac{\partial}{\partial v}$$

olarak bulunur. Terimlerin karışmaması için ξ_1 yerine ξ; ξ_2 yerine τ; η^1 yerine η; ve η^2 yerine ϕ alalım. Buna göre üretecin birinci uzatımı

$$X^{(1)}=X+\eta_x^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_x}+\eta_y^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_y}+\phi_x^{(1)}\frac{\partial}{\partial v_x}+\phi_y^{(1)}\frac{\partial}{\partial v_y}$$

olarak bulunur. Denklem (2.9) kullanılarak $\eta_x^{(1)}$ ve $\phi_x^{(1)}$ i bulalım.

$$\begin{aligned}
\eta_x^{(1)} &= D_x(\eta)-u_x(D_x\xi)-u_y(D_x\tau)\\
&= (\eta_x+u_x\eta_u+v_x\eta_v)-u_x(\xi_x+u_x\xi_u+v_x\xi_v)-u_y(\tau_x+u_x\tau_u+v_x\xi_v)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}
\phi_x^{(1)} &= D_x(\phi)-v_x(D_x\xi)-v_y(D_x\tau)\\
&= (\phi_x+u_x\phi_u+v_x\phi_v)-v_x(\xi_x+u_x\xi_u+v_x\xi_v)-v_y(\tau_x+u_x\tau_u+v_x\tau_v)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şimdi de denklem (2.10) kullanılarak $\eta_x^{(2)}$ i hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\eta_x^{(2)} &= D_x(\eta_x^{(1)})-u_{xx}(D_x\xi)-u_{xt}(D_x\tau)\\
&= D_x(\eta_x+u_x\eta_u+v_x\eta_v-u_x\xi_x-u_x^2\xi_u-u_xv_x\xi_v-u_y\tau_x-u_yu_x\tau_u-u_yv_x\xi_v)\\
&\quad -u_{xx}(D_x\xi)-u_{xy}(D_x\tau)\\
&= \eta_{xx}+u_x\eta_{xu}+v_x\eta_{xv}+u_x(\eta_{ux}+u_x\eta_{uu}+v_x\eta_{uv})+\eta_uu_{xx}\\
&\quad +v_x(\eta_{vx}+u_x\eta_{uv}+v_x\eta_{vv})+\eta_vv_{xx}-u_x(\xi_{xx}+u_x\xi_{xu}+v_x\xi_{xv})\\
&\quad -\xi_xu_{xx}-u_x^2(\xi_{ux}+u_x\xi_{uu}+v_x\xi_{uv})-\xi_u(2u_xu_{xx})-\xi_v(v_{xx}u_x+v_xu_{xx})\\
&\quad -v_xu_x(\xi_{vx}+u_x\xi_{vu}+v_x\xi_{vv})-u_y(\tau_{xx}+u_x\tau_{xu}+v_x\tau_{xv})-\tau_xu_{xy}\\
&\quad -u_yu_x(\tau_{ux}+u_x\tau_{uu}+v_x\tau_{uv})-\tau_u(u_{yx}u_x+v_xu_{xx})\\
&\quad -v_xu_y(\tau_{vx}+u_x\tau_{vu}+v_x\tau_{vv})-\tau_v(v_{xx}u_y+v_xu_{xy})\\
&\quad -u_{xx}(\xi_x+u_x\xi_u+v_x\xi_v)-u_{xy}(\tau_x+u_x\tau_u+v_x\tau_v)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

BÖLÜM 3

SİMETRİ ÜRETEÇLERİNİN BULUNMASI ve LIE SİMETRİ METODUNUN UYGULANMASI

3.1 Giriş

Simetri indirgemesi kısmi diferensiyel denklemin bir adi diferansiyel denkleme ya da daha az bağımsız değişken içeren bir kısmi diferensiyel denkleme indirgenmesini sağlar. Benzerlik indirgemesi denklemin değişmezliği ile yakından ilgilidir. Çünkü buradan benzerlik dönüşümlerini elde ederiz. İndirgeme prosedürü denklemin bir benzerlik temsilini oluşturur. Değişken sayısının bir azaltılması orijinal denkleme kıyasla bazı avantajlara sahip bir temsil elde edilmesini sağlar. Bu prosedür lineer yada lineer olmayan denklemin doğasından bağımsız çalışır. Ayrıca denklemin mertebesinden bağımsızdır ve sınır koşullarındaki bilgiye ihtiyaç duymaz. İndirgemenin faydası , analitik ya da nümerik çözümü bulunabilecek basit bir denklem elde edilebilmesidir.

Bu bölümde lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin uzatımlarını bularak simetri üreteçlerini belirleyeceğiz. Bu üreteçler altında simetri indirgemesi yaparak denklemleri adi diferensiyel denklemlere dönüştürerek çözümlerini arayacağız.

3.2 LIE SİMETRİ METODU

Lie simetri metodunu uygulayabilmek için önceki bölümde temel kavramlar verildi. Bu metodun kısmi diferensiyel denklemlere uygulamak için ilk önce bağımlı ve bağımsız değişken sayısına bakılarak sonsuz küçük simetri üreteci yazılır. Daha sonra denklemin mertebesi kadar simetri üretecinin uzatımı bulunur. Bulunan bu uzatıma teorem 2.12 gereği kısmi diferensiyel denklemin değişmezlik kriteri uygulanır.

Simetri üretecinin n. uzatımı $X^{(n)}$ nin η_α^j katsayıları ξ_i ve η_α lar x ve u ya göre kısmi türevleri içerir. Bunun sonucunda ortaya çıkan sonsuz küçüklerin uzatımlarını da denklemin tipine göre teorem 2.15,17,18 kullanılarak hesaplanır. Bulunan bu uzatımlar değişmezlik kriteri sonucunda çıkan denklemde yerine yazılır.

Sonuçta $x,\ u\ ve\ u$ nun x e göre türevleri, $\xi_i(x,u)$ ve $\xi_i(x,u)$ nun kısmi türevleri, $\eta_\alpha(x,u)$ ve $\eta_\alpha(x,u)$ nun kısmi türevlerini içeren bir ifade çıkar. Bu çıkan ifade de u nun kısmi türevlerinin katsayıları karşılaştırılarak çok sayıda kısmi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Bu denklemlere simetri grubunun tanımlayıcı (belirleyici) denklemleri denir. Denklem sistemi çözülerek de sonsuz küçük simetri üretecinin katsayıları ξ_i ve η_α lar bulunur. Böylece sonsuz küçük simetri üreteci elde edilir.

Bundan sonraki bölümlerde ise lineer ve lineer olmayan denklemlere Lie simetri metodu uygulanarak indirgemeler yapılmıştır.

3.3 ISI İLETİM DENKLEMİ

Isı iletim denklemi çeşitli bilimsel alanlarda temel bir öneme sahiptir. Matematikte parabolik kısmi diferensiyel denklemlerin genel bir formudur. Olasılık teorisinde Brown hareketindeki Fokker- Planck denklemiyle ilişkilidir. Finans matematiğinde ise Black-Scholes kısmi diferensiyel denkleminin çözümünde kullanılır.

Fiziksel olarak bakılırsa ısının nesne üzerinde belli bir konumda ve zamanda nasıl dağılacağını tanımlayan diferensiyel denklemdir. t zaman ve x konum olmak üzere bir boyutlu ısı iletim denkleminin genel hali

$$u_t = ku_{xx} \tag{3.1}$$

olarak verilir. Kartezyan koordinat sisteminde (x,y,z) konumu ve t zamanı göstermek üzere üç boyutlu ısı iletim denkleminin genel ifadesi

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

şeklindedir. Burada k sabit ve $u = u(x,y,z,t)$ dir. Şimdi (3.1) denkleminde k=1 alarak birboyutlu ısı denkleminin Lie simetri analizini yapılacaktır (Koca, 2008).

3.3.1 Simetri Üreteci

2 tane bağımsız x ve t ve bir tane bağımlı u değişkenini içerir. Böylece sonsuz küçük simetri üreteci aşağıdaki gibidir.

$$X = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

3.3.2 Uzatım(Prolongasyon)

2. mertebeden bir diferensiyel denklem olduğu için 2. uzatımını hesaplamalıyız. Buna göre;

$$X^{(2)} = X + \eta_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta_{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \eta_{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} \tag{3.2}$$

olur.

3.3.3 Değişmezlik Kriteri

Şimdi de (3.1) denklemine değişmezlik kriterini yani teorem 2.12 yi uygularsak,

$$X^{(2)} \{u_t = u_{xx}\} |_{u_t - u_{xx} = 0} = 0$$

$$\eta_t - \eta_{xx} = 0 \tag{3.3}$$

olur. (3.3) denkleminde η_{xx}, η_t terimleri teorem 2.17 e göre hesaplanıp ve denklemde u_t gördüğümüz yerlere u_{xx} yazdığımız takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\eta_t + (\eta_u - \tau_t) u_{xx} - \xi_t u_x - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 - \eta_{xx} - (2\eta_{xu} - \xi_{xx}) u_x + \tau_{xx} u_{xx}$$

$$-(\eta_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 + 2\tau_{xu} u_x u_{xx} + \xi_{uu} u_x^3 + \tau_{uu} u_x^2 u_{xx} - (\eta_u - 2\xi_x) u_{xx} + 2\tau_x u_{tx}$$

$$+3\xi_u u_x u_{xx} + \tau_u u_{xx}^2 + 2\tau_u u_x u_{xt} = 0$$

3.3.4 Tanımlayıcı Denklemler

u nun kısmi türevlerinin katsayılarının karşılaştırılmasıyla 10 tane tanımlayıcı denklem elde edilir.

$u_x u_{xt}$	$\tau_u = 0$	(3.4)
u_{xt}	$\tau_x = 0$	(3.5)
u_{xx}^2	$\tau_u = \tau_u$	(3.6)
$u_x^2 u_{xx}$	$\tau_{uu} = 0$	(3.7)
$u_x u_{xx}$	$\xi_u = 2\tau_{xu} + 3\xi_u$	(3.8)
u_{xx}	$\tau_t - \eta_u = \tau_{xx} - \eta_u + 2\xi_x$	(3.9)
u_x^3	$\xi_{uu} = 0$	(3.10)
u_x^2	$\eta_{uu} = 2\xi_{xu}$	(3.11)
u_x	$\xi_t = \xi_{xx} - 2\eta_{xu}$	(3.12)
1	$\eta_t = \eta_{xx}$	(3.13)

(3.4) ve (3.5) e bakılırsa τ sadece t ye bağlı bir fonksiyondur.

(3.8) deki

$$\xi_u = 2\tau_{xu} + 3\xi_u$$

denkleminde

$$\tau_{xu} = 0$$

dır. Dolayısıyla

$$2\xi_u = 0$$

olur ve ξ u ya bağlı bir fonksiyon değildir.

(3.9) denkleminde ise

$$\tau_t - \eta_u = \tau_{xx} - \eta_u + 2\xi_x$$

denklemi verilir.

$$\tau_{xx} = 0$$

olur,

$$\tau_t = 2\xi_x$$

dir. Böylece

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t)$$

ve σ sadece t ye bağlı bir fonksiyondur. (3.11) denlemine göre

$$\eta_{uu} - 2\xi_{xu} = 0, \xi_{xu} = 0$$

olur. Buradan da

$$\eta(x,t,u) = \beta(x,t)u + \alpha(x,t)$$

dır. (3.12) denklemine göre de

$$-\xi_t = 2\eta_{xu} - \xi_{xx}$$

(3.9) deki ξ ye bakılırsa

$$\xi_{xx} = 0$$

dır.

$$\xi_t = -2\beta_x$$

sağlanmış olur. Dolayısıyla,

$$\beta = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t(t)x + \rho(t)$$

(3.13) denklemine göre de $\eta_t = \eta_{xx}$, $\alpha_t = \alpha_{xx}$ ve $\beta_t = \beta_{xx}$ her ikisi de ısı iletim denkleminin çözümüdür. β nın bir önceki formuna bakılırsa,

$$\beta_t = \beta_{xx}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t(t) + \rho(t)) = -\frac{1}{4}\tau_{tt}$$
$$\tau_{ttt} = 0, \sigma_{tt} = 0, \rho_t(t) = -\frac{1}{4}\tau_{tt}$$

elde edilir. Bunları ξ, τ ve η da yerine yazılırsa;

$$\xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt$$
$$\tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2$$
$$\eta = (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + \alpha(x,t)$$

olarak elde edilir. $c_1, ..., c_6$ sabit sayılardır. Daha sonra bulunan sonsuz küçükler X simetri üretecinde yerine yazılır ve c_i katsayılarına bağlı olarak X_i simetri üreteçleri belirlenir. (Hydon, 2000; Tang and Lou , 2002). Buna göre her c_i sabitine karşılık gelen X_i üreteci aşağıdaki gibidir.

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_3 = 4\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_6 = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u\frac{\partial}{\partial u}$$

3.3.5 Komütatör Tablosu

Tüm üreteçler arasındaki ilişki aşağıdaki tabloyla verilmiştir.

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	0	0	X_1	$-X_3$	$2X_5$
X_2	0	0	0	$2X_2$	$2X_1$	$4X_4-2X_3$
X_3	0	0	0	0	0	0
X_4	$-X_1$	$-2X_2$	0	0	X_5	$2X_6$
X_5	X_3	$-2X_1$	0	$-X_5$	0	0
X_6	$-2X_5$	$2X_3-4X_4$	0	$-2X_6$	0	0

Burada $\mathrm{X}_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ üreteçleri ikili işleme göre kapalı olduğundan bu taban $L_6 =< X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 >$ Lie cebirini üretir. Her bir üretece karşılık gelen dönüşüm grupları aşağıda verimiştir.

3.3.6 Dönüşüm Grupları

X_i simetri üretecinin dönüşüm grupları,

$$\xi^i(x^*, y^*) = \frac{\partial x_i^*}{\partial \varepsilon}$$

formülüne

$$x_i^* \mid_{\varepsilon=0} = x_i$$

başlangıç şartının uygulanması ile hesaplanır.

$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ üretecini alalım.

1)

$$\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon} = \xi(x^*, t^*, u^*) = 1$$

$$x^* = \varepsilon + c, \quad x^* \mid_{\varepsilon=0} = c$$

$$x^* = x + \varepsilon$$

2)

$$\frac{\partial t^*}{\partial \varepsilon} = \tau(x^*, t^*, u^*) = 0$$

$$t^* = c$$

$$t^* \mid_{\varepsilon=0} = t \ \text{ ve } \ t^* = t$$

3)

$$\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon} = \eta(x^*, t^*, u^*) = 0$$
$$u^* = c$$

$$u^* \mid_{\varepsilon=0} = u$$

ve $u^* = u$ dır.

$G_1 : (x^*, t^*, u^*) = (x + \varepsilon, t, u)$ olarak bulunur.

Benzer şekilde;

$G_2 : (x^*, t^*, u^*) = (x, t + \varepsilon, u)$

$G_3 : (x^*, t^*, u^*) = (x, t, ue^{\varepsilon})$

$G_4 : (x^*, t^*, u^*) = (xe^{\varepsilon/2}, te^{\varepsilon}, u)$

$G_5 : (x^*, t^*, u^*) = (x + \varepsilon t, t, ue^{-(\varepsilon x + \varepsilon^2 t)/2})$

$G_6 : (x^*, t^*, u^*) = (\dfrac{x}{1 - \varepsilon t}, \dfrac{t}{1 - \varepsilon t}, \dfrac{e^{x^2 \varepsilon / 4(1 - \varepsilon t)}}{1 - \varepsilon t})$ olarak elde edilir (Olver, 1991).

3.4 BURGER DENKLEMİ

Burger denklemi yayılma terimini ve lineer olmayan terimi bir arada bulunduran basit denklemlerden biridir ve fiziksel uygulamalarda sıkça kullanılmıştır. Bu denklem türbülans modellenmesi, şok dalga teorisi ve sayılar teorisi gibi alanlarda da kullanılmıştır. Isı denklemine çok benzeyen fakat lineer olmayan bir boyutlu Burger denklemi

$$u_t = u_{xx} + u_x^2$$

olarak verilir (Olver, 1991).

3.4.1 Simetri Üreteci

Burger denklemi iki tane bağımsız değişken x ve t; bir tane bağımlı değişken u ile verilmiştir.

Buna göre sonsuz küçük simetri üreteci,

$$X = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

olur.

3.4.2 Uzatım (Prolongasyon)

2. mertebeden bir difrensiyel denklem olduğu için 2. uzatımını hesaplamalıyız. Buna göre

$$X^{(2)} = X + \eta_x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_t\frac{\partial}{\partial u_t} + \eta_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta_{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \eta_{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

olur.

3.4.3 Değişmezlik Kriteri:

Değişmezlik kriteri Burger denklemine uygulandığı takdirde

$$\eta_t = \eta_{xx} + 2u_x\eta_x$$

olur. Yukarıdaki denklemde $\eta_x, \eta_{xx}, \eta_t$ terimleri teorem 2.17 e göre hesaplanıp ve denklemde u_t gördüğümüz yerlere $u_{xx} + u_x^2$ yazdığımız takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\eta_t - \xi_t u_x + \eta_u u_{xx} + \eta_u u_x^2 - \tau_t u_{xx} - \tau_t u_x^2 - \xi_u u_x u_{xx} - \xi_u u_x^3 - \tau_u u_{xx}^2$$

$$-2\tau_u u_{xx} u_x^2 - \tau_u u_x^4 - \eta_{xx} - 2\eta_{xu} u_x + \xi_{xx} u_x + \tau_{xx} u_{xx} + \tau_{xx} u_x^2 - \eta_{uu} u_x^2 + 2\xi_{xu} u_x^2$$

$$+2\tau_{xu} u_{xx} u_x + 2\tau_{xu} u_x^3 + \xi_{uu} u_x^3 + \tau_{uu} u_x^2 u_{xx} + \tau_{uu} u_x^4 - \eta_u u_{xx} + 2\xi_x u_{xx} + 2\tau_x u_{xt}$$

$$+3\xi_u u_x u_{xx} + \tau_u u_{xx}^2 + \tau_u u_{xx} u_x^2 + 2\tau_u u_x u_{tx} - 2\eta_x u_x - 2\eta_u u_x^2 + 2\xi_x u_x^2 + 2\tau_x u_{xx} u_x$$

$$+2\tau_x u_x^3 + 2\xi_u u_x^3 + 2\tau_u u_{xx} u_x^2 + 2\tau_u u_x^4 = 0$$

olur. u nun kısmi türevlerinin katsayılarının karşılaştırılmasıyla da aşağıdaki tanımlayıcı denklemleri elde ederiz.

$u_x u_{xt}$	$2\tau_u = 0$	(3.14)
u_{xt}	$2\tau_x = 0$	(3.15)
$u_x u_{xx}$	$-\xi_u + 2\tau_{xu} + 3\xi_u + 2\tau_x = 0$	(3.16)
u_{xx}	$\eta_u - \tau_t + \tau_{xx} - \eta_u + 2\xi_x = 0$	(3.17)
u_x^2	$\eta_u - \tau_t + \tau_{xx} - \eta_{uu} + 2\xi_{xu} - 2\eta_u + 2\xi_x = 0$	(3.18)
u_x	$-\xi_t - 2\eta_{xu} + \xi_{xx} - 2\eta_x = 0$	(3.19)

(3.14) ve(3.15) denklemlerine bakılırsa τ, u ve x e bağlı değildir, sadece t ye bağlıdır.

(3.16) denklemine göre ξ, u ya bağlı değildir. (3.17) denklemine göre

$$\tau_t = 2\xi_x$$

olur, böylece

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t)$$

olur.

(3.18) denklemine göre,

$$\eta_u - \tau_t = \eta_{uu} + 2\eta_u - 2\xi_x$$

$$\eta_u - \tau_t = \eta_{uu} + 2\eta_u - \tau_t$$

$$\eta_{uu} + \eta_u = 0$$

$$\eta = \alpha(x,t)e^{-u} + \beta(x,t)$$

olur.

(3.19) denklemine göre de

$$\xi_t = -2\eta_{xu} - 2\eta_x = -2\beta_x$$

$$\xi_t = \frac{1}{2}\tau_{tt} x + \sigma_t(t)$$

olur.

$$\frac{1}{2}\tau_{tt} x + \sigma_t(t) = -2\beta_x \Rightarrow \beta = -\frac{1}{8}\tau_{tt} x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + \rho(t)$$

dır. En sonda kalan terimler

$$\eta_t = \eta_{xx}$$

olduğuna göre

$$\eta_t = \alpha_t(x,t)e^{-u} + \beta_t(x,t) = \alpha_{xx}(x,t)e^{-u} - \frac{1}{4}\tau_{tt}$$

$$\beta_t = -\frac{1}{8}\tau_{ttt} x^2 - \frac{1}{2}\sigma_{tt} x + \rho_t(t) = -\frac{1}{4}\tau_{tt}$$

$$\tau_{ttt} = 0, \qquad \sigma_{tt} = 0, \qquad ve \quad \rho_t(t) = -\frac{1}{4}\tau_{tt}$$

dir.Denklem sistemi çözüldüğünde sonsuz küçükler,

$$\xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt$$

$$\tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2$$

$$\eta = \alpha(x,t)e^{-u} + c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2$$

olarak bulunur. Daha sonra bulunan sonsuz küçükler X simetri üretecinde yerine yazılır ve c_i katsayılarına bağlı olarak X_i simetri üreteçleri belirlenir (Hydon, 2000; Tang and Lou , 2002). Buna göre her c_i sabitlerine karşılık gelen X_i üreteçleri aşağıdaki gibidir.

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_6 = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)\frac{\partial}{\partial u}$$

olur.

3.4.4 Komütatör Tablosu

Tüm üreteçler arasındaki ilişki aşağıdaki tabloyla verilmiştir.

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	0	0	X_1	$-X_3$	$2X_5$
X_2	0	0	0	$2X_2$	$2X_1$	$4X_4-2X_3$
X_3	0	0	0	0	0	0
X_4	$-X_1$	$-2X_2$	0	0	X_5	$2X_6$
X_5	X_3	$-2X_1$	0	$-X_5$	0	0
X_6	$-2X_5$	$2X_3-4X_4$	0	$-2X_6$	0	0

Burada $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ üreteçleri ikili işleme göre kapalı olduğundan bu taban $L_6 =< X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 >$ Lie cebirini üretir. Her bir üretece karşılık gelen dönüşüm grupları aşağıda verilmiştir.

3.4.5 Sonsuz Küçük Üretecin Lie Grup Dönüşümü

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \varepsilon} = \xi^i(x^*, t^*, u^*)$$

formülünde $x_i^* |_{\varepsilon=0} = x_i$ başlangıç şartının uygulanmasıyla elde edilir.

$X_6 = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2+2t)\frac{\partial}{\partial u}$ üretecini ele alırsak, grup dönüşümünün bileşenleri;

1-

$$\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon} = \xi(x^*, t^*, u^*) = 4tx$$

$$lnx^* = 4t\varepsilon + c$$

$$x^* |_{\varepsilon=0} = x$$

başlangıç şartı uygulanırsa

$$x^* = e^{4t\varepsilon}x$$

olarak elde edilir.

2-

$$\frac{\partial t^*}{\partial \varepsilon} = \tau(x^*, t^*, u^*) = 4t^2$$

$$-\frac{1}{t^*} = 4\varepsilon + c$$

$$t^* |_{\varepsilon=0} = t$$

başlangıç şartı uygulanırsa

$$t^* = -\frac{1}{4\varepsilon - \frac{1}{t}}$$

olarak elde edilir.

3-

$$\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon} = \eta(x^*, t^*, u^*) = -x^2 + 2t$$

$$u^* = (-x^2 + 2t)\varepsilon + c$$

$$u^* |_{\varepsilon=0} = u$$

başlangıç şartı uygulanırsa

$$u^* = (-x^2 + 2t)\varepsilon + u$$

olarak elde edilir. BöyleceG_6 dönüşüm grubu X_6 üreteci tarafından

$$G_6 : (x^*, t^*, u^*) = (e^{4t\varepsilon}x, -\frac{1}{4\varepsilon - \frac{1}{t}}, (-x^2 + 2t)\varepsilon + u)$$

olacak şekilde üretilir.

Benzer şekilde diğer dönüşüm grupları için de aynı işlemler tekrar edilirse,

$$\begin{aligned}
G_1 : (x^*, t^*, u^*) &= (x + \varepsilon, t, u) \\
G_2 : (x^*, t^*, u^*) &= (x, t + \varepsilon, u) \\
G_3 : (x^*, t^*, u^*) &= (x, t, u + \varepsilon) \\
G_4 : (x^*, t^*, u^*) &= (xe^{\varepsilon}, te^{2\varepsilon}, u) \\
G_5 : (x^*, t^*, u^*) &= (x + 2t\varepsilon, t, u - \varepsilon x - 2t\varepsilon^2) \\
G_6 : (x^*, t^*, u^*) &= (e^{4t\varepsilon}x, -\frac{1}{4\varepsilon - \frac{1}{t}}, (-x^2 + 2t)\varepsilon + u)
\end{aligned}$$

Lie grup dönüşümleri elde edilir.

3.5 HANGING CHAIN DENKLEMİ

Fiziksel sistemler ve uygulamalarında önemli bir role sahip olan değişken katsayılı kısmi diferensiyel denklemlerden bir tanesi olan Hanging Chain denklemi

$$u_{tt} = \alpha x u_{xx} + \alpha u_x \tag{3.20}$$

olarak verilir (Hanze and Jibin and Lei, 2009). Burada $u = u(x,t)$ bilinmeyen fonksiyon, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \neq 0$ dır. $\alpha = g$ yerçekimi ivmesi iken (3.20) denklemi L uzunluğundaki asılı bir zincirin titreşim hareketinin matematiksel bir modelidir. Eğer $0 < x < L$ ise zincir sonludur, eğer $0 < x < \infty$ ise zincir yarı sonludur. Şimdi (3.20) denkleminin Lie simetri analizi yapılarak çözümü aranacaktır.

Bir parametreli Lie grup nokta dönüşümleri

$$x_i^* = x_i + \varepsilon\xi^i(x) + O(\varepsilon^2)$$

olarak verilsin. i=1,2,3 için x$_i$ ler x, t, u ları temsil ederken ξ^i lerde $\xi(x,t,u)$, $\tau(x,t,u)$ ve $\phi(x,t,u)$ ları temsil ederler. (3.20) denkleminin çözümünü bulmak için ilk önce x, t, u ya bağlı olarak simetri üretecini yazarak başlarız.

$$X=\xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

ξ,τ ve ϕ tanjant vektör uzayının bileşenleri ve bağımsız değişkenler x ve t, bağımlı değişken u ya bağlıdırlar. (3.20) denklemi 2. mertebeden bir diferensiyel denklem olduğu için 2. uzatımını hesaplamalıyız.

$$X^{(2)}=X+\phi_x\frac{\partial}{\partial u_x}+\phi_t\frac{\partial}{\partial u_t}+\phi_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+\phi_{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}}+\phi_{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

Olur, kısmi diferensiyel denklemler için değişmezlik kriterince,

$$X^{(2)}\left\{u_{tt}=\alpha x u_{xx}+\alpha u_x\right\}|_{u_{tt}=\alpha x u_{xx}+\alpha u_x=0}=0$$

olmalıdır. Değişmezlik kriteri uygulandığında ,

$$\phi_{tt}-\alpha x\phi_{xx}-\alpha\phi_x-\alpha\xi u_{xx}=0$$

denklemi elde edilir. ϕ^{tt}, ϕ^{x} ve ϕ^{xx} değerleri yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+u_t\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial u}-\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}\right)-u_x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+u_{tt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}-2\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)-2\frac{\partial\xi}{\partial t}u_{xt}+u_t^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2\tau}{\partial t\partial u}\right)$$

$$-2\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial u}u_xu_t-\frac{\partial^2\tau}{\partial u^2}u_t^3-\frac{\partial^2\tau}{\partial u^2}u_xu_t^2-3\frac{\partial\tau}{\partial u}u_tu_{tt}-3\frac{\partial\xi}{\partial u}u_xu_{tt}-2\frac{\partial\xi}{\partial u}u_tu_{xt}$$

$$-\alpha x\{\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial u}u_x+u_{xt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)+u_x\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial u}+\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}u_x-\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial u}u_x\right)$$

$$-u_t\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial u}u_x\right)-\frac{\partial\tau}{\partial x}u_{xt}-u_x^2\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial u}+\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}u_x\right)-2\frac{\partial\xi}{\partial u}u_xu_{xx}$$

$$-u_xu_t\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial u}+\frac{\partial^2\tau}{\partial u^2}u_x\right)-\frac{\partial\tau}{\partial u}u_{xx}u_t-\frac{\partial\tau}{\partial u}u_xu_{xt}-u_{xx}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial u}u_x\right)-u_{xt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial u}u_x\right)\}$$

$$-\alpha\{\frac{\partial\phi}{\partial x}+u_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)-u_x^2\frac{\partial\xi}{\partial u}+u_t\frac{\partial\tau}{\partial x}-u_xu_t\frac{\partial\tau}{\partial u}\}-a\xi u_{xx}=0$$

olur. Yukarıda u_{tt} gördüğümüz yere $\alpha x u_{xx}+\alpha u_x$ yazılıp daha sonra "u" nun kısmi türevli terimlerinin katsayılarını tek tek sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
\xi_u &= 0 \quad , \quad \xi = \xi(x,t)\\
\tau_u &= 0 \quad , \quad \tau = \tau(x,t)\\
\phi_{uu} &= 0 \quad , \quad \phi = r(x,t)u+s(x,t)\\
\alpha x\tau_x &= \xi_t\\
\xi-2x\xi_x+2x\tau_t &= 0 \quad ,\\
\alpha\tau_x+\alpha x\tau_{xx}+2r_t-\tau_{tt} &= 0 \quad ,\\
\alpha\xi_x-2\alpha x r_x+\alpha x\xi_{xx}-2\alpha\tau_t-\xi_{tt} &= 0 \quad ,\\
r_{tt}-\alpha x r_{xx}-\alpha r_x &= 0 \quad ,\\
s_{tt}-\alpha x s_{xx}-\alpha s_x &= 0 \quad ,
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümüyle (3.20) denkleminin simetri üreteçleri,

$$X_1 = 4\alpha xt\frac{\partial}{\partial x} + (4x+\alpha t^2)\frac{\partial}{\partial t} - \alpha tu\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial t} \qquad X_4 = u\frac{\partial}{\partial u}$$

elde edilir. Bu üreteçlerin tablosu da aşağıda verilmiştir.

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	X_1	$2\alpha X_2 - \alpha X_4$	0
X_2	0	0	X_3	0
X_3	$-2\alpha X_2 + \alpha X_4$	$-X_3$	0	0
X_4	0	0	0	0

Burada X_1, X_2, X_3, X_4 üreteçleri ikili işleme göre kapalı olduğundan bu taban

$L_4 =< X_1, X_2, X_3, X_4 >$ Lie cebirini üretir. Her bir üretece karşılık gelen dönüşüm grupları aşağıda verimiştir.

3.5.1 X$_i$ Simetri Üretecinin Dönüşüm Grupları

Dönüşüm grupları

$$\xi^i(x^*, y^*) = \frac{\partial x_i^*}{\partial \varepsilon}$$

ve $x_i^* \mid_{\varepsilon=0} = x_i$ başlangıç şartıyla hesaplanır.

$X_1 = 4\alpha xt\frac{\partial}{\partial x} + (4x+\alpha t^2)\frac{\partial}{\partial t} - \alpha tu\frac{\partial}{\partial u}$ üretecini alalım.

1)

$$\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon} = \xi(x^*, t^*, u^*) = 4\alpha xt$$

$$lnx^* = 4\alpha t\varepsilon + c$$

$$x^* = xe^{4\alpha t\varepsilon}$$

dır.

2)

$$\frac{\partial t^*}{\partial \varepsilon} = \tau(x^*, t^*, u^*) = 4x + \alpha t^2$$

$$t^* = t$$

3)

$$\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon} = \phi(x^*, t^*, u^*) = -\alpha t u$$

$$ln u^* = -\alpha t \varepsilon + c$$

$$u^* = e^{-\alpha t \varepsilon} u$$

dır. Böylece $G_1 : (x^*, t^*, u^*) = (xe^{4\alpha t \varepsilon}, t, e^{-\alpha t \varepsilon} u)$ olarak bulunur.

Benzer şekilde diğer üreteçler için de aynı işlemler yapıldığında dönüşüm grupları,

$$\begin{aligned} G_2 : (x^*, t^*, u^*) &= (xe^{2\varepsilon}, te^{\varepsilon}, u) \\ G_3 : (x^*, t^*, u^*) &= (x, t+\varepsilon, u) \\ G_4 : (x^*, t^*, u^*) &= (x, t, e^{\varepsilon} u) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.5.2 Simetri Üreteci Altında İndirgeme

Her bir simetri üreteci ile (3.20) denklemindeki bağımsız değişken sayısı bire indirilebilir.

Yani adi diferensiyel denkleme dönüştürülebilir.

i) $X_1 = 4\alpha xt \frac{\partial}{\partial x} + (4x + \alpha t^2) \frac{\partial}{\partial t} - \alpha t u \frac{\partial}{\partial u}$ simetri üreteci için karakteristik denklemi

$$\frac{dx}{4\alpha xt} = \frac{dt}{4x + \alpha t^2} = \frac{du}{-\alpha t u}$$

dır.

$$\frac{dx}{4\alpha xt} = \frac{dt}{4x + \alpha t^2}$$

eşitliğine göre

$$\xi = x^{-1/2} t^2 - \frac{4}{\alpha} x^{1/2}$$

$$\frac{dx}{4\alpha xt} = \frac{du}{-\alpha t u}$$

eşitliğine göre

$$w = x^{1/4} u$$

$$u = x^{-\frac{1}{4}} f(x^{-1/2} t^2 - \frac{4}{\alpha} x^{1/2})$$

benzerlik değişkenleri bulunur. Grup invaryant çözümü $w = f(\xi)$ ve $f' = \dfrac{df}{d\xi}$ olmak üzere türevler alınıp (3.20) denkleminde yerine yazılırsa

$$4\xi^2 f'' + 8\xi f' + f = 0$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde bilindiği üzere Euler denklemidir.

$$\xi^2 f'' + 2\xi f' + \frac{1}{4} f = 0$$

denkleminde değişken değiştirildiği takdirde karakteristik denklemi

$$K^2 + K + \frac{1}{4} = 0$$

olur. Buna göre

$$K_1 = K_2 = \frac{-1}{2}$$

olur Böylece genel çözüm

$$f(\xi) = \xi^{-\frac{1}{2}}(c_1 + c_2 \log \mid \xi \mid)$$

olur. ξ değeri de yerine yazılırsa,

$$u(x,t) = x^{-\frac{1}{4}}(x^{-1/2}t^2 - \frac{4}{\alpha}x^{1/2})^{-\frac{1}{2}}(c_1 + c_2 \log \mid x^{-1/2}t^2 - \frac{4}{\alpha}x^{1/2} \mid)$$

c_1, c_2 reel sabitler olmak üzere genel çözüm elde edilir.

ii) $X_2 = 2x\dfrac{\partial}{\partial x} + t\dfrac{\partial}{\partial t}$ simetri üreteci için karakteristik denklem

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{0}$$

dır.

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dt}{t}$$

eşitliğinden

$$\xi = xt^{-2}$$

ve

$$\frac{dt}{t} = \frac{du}{0}$$

eşitliğinden $w = u$ benzerlik değişkenleri bulunur. Grup invaryant çözümü $w = f(\xi)$ ve $f' = \dfrac{df}{d\xi}$ olmak üzere türevler alınıp (3.20) denkleminde yerine yazılırsa

$$4\xi^2 f'' - \alpha\xi f' + 6\xi f' - \alpha f' = 0$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. $f' = y$ alınırsa

$$4\xi^2 y' - \alpha\xi y' + 6\xi y - \alpha y = 0$$

denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü de $\alpha > 0$ için

$$f(\xi) = c_1 \arctan\sqrt{\frac{4}{\alpha}\xi - 1} + c_2$$

bulunur. (3.20) denkleminin genel çözümü ise

$$u(x,t) = c_1 \arctan\sqrt{\frac{4}{\alpha}xt^{-2} - 1 + c_2}$$

olarak bulunur. $\alpha < 0$ ise o zaman

$$f(\xi) = c_1 \log\left|\frac{\xi - \sqrt{-\alpha}}{\xi + \sqrt{-\alpha}}\right| + c_2$$

bulunur ve (3.20) denkleminin genel çözümü c_1, c_2 reel sabitler olmak üzere,

$$u(x,t) = c_1 \log\left|\frac{xt^{-2} - \sqrt{-\alpha}}{xt^{-2} + \sqrt{-\alpha}}\right| + c_2$$

elde edilir.

iii) $X_3 = \dfrac{\partial}{\partial t}$ simetri üreteci için karakteristik denklem,

$$\frac{dx}{0} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0}$$

dır. Benzerlik değişkenleri $\xi = x$ ve $w = u$ dır. Grup invaryant çözümü $w = f(\xi)$ ve $f' = \dfrac{df}{d\xi}$ olmak üzere türevler alınıp (3.20) denkleminde yerine yazılırsa

$$f' + \xi f'' = 0$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. $f' = y$ alınırsa

$$\xi y' + y = 0$$

bulunur ve bu denklemin çözümü

$$f(\xi) = c_1 \log \mid \xi \mid + c_2$$

olur. Buna göre (3.20) denkleminin genel çözümü,

$$u(x,t) = c_1 \log \mid x \mid + c_2$$

olarak bulunur.

$iv)$ $X_4 = u\dfrac{\partial}{\partial u}$ simetri üreteci için karakteristik denklem,

$$\frac{dx}{0} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{u}$$

dır ve benzerlik değişkenleri $\xi = t$ ve $e^w = u$ dır. Grup invaryant çözümü $w = f(\xi)$ ve $f' = \dfrac{df}{d\xi}$ olmak üzere türevler alınıp (3.20) denkleminde yerine yazılırsa

$$f'' + (f')^2 = 0$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. $f' = y$ alınırsa

$$\frac{1}{y} = t + c_1$$

elde edilir. Buna göre

$$f(\xi) = \ln(\xi + c_1) + c_2$$

olur. Buna göre (3.20) denkleminin genel çözümü,

$$u(x,t) = c_1 \log \mid t \mid + c_2$$

olarak bulunur.

3.6 BOND PRICING DENKLEMİ

Bu bölümde Lie simetri metodunu kullanarak Bond Pricing denkleminin,

$$u_t = \lambda x u_{xx} + \mu u_x, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ ve } \mu\lambda \neq 0 \tag{3.21}$$

simetri indirgemelerini araştırılacaktır (Hanze and Jibin and Lei, 2009) Bir parametreli Lie grup nokta dönüşümleri

$$x_i^* = x_i + \varepsilon \xi^i(x) + O(\varepsilon^2)$$

olarak verilsin. $i = 1,2,3$ için x_i ler x,t,u ları temsil ederken ξ^i lerde $\xi(x,t,u)$, $\tau(x,t,u)$ *ve* $\phi(x,t,u)$ ları temsil ederler. (3.21) denkleminin çözümünü bulmak için ilk önce x,t,u ya bağlı olarak simetri üretecini yazarak başlarız.

$$X = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

ξ, τ ve ϕ tanjant vektör uzayının bileşenleri ve bağımsız değişkenler x ve t, bağımlı değişken u ya bağlıdırlar.

BP denklemi 2. mertebeden bir diferensiyel denklem olduğu için 2. uzatımını hesaplamalıyız.

$$X^{(2)} = X + \phi_x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi_t\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi_{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi_{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

Kısmi diferensiyel denklemler için değişmezlik kriterince,

$$X^{(2)}\{u_t = \lambda x u_{xx} + \mu u_x\}\,|_{u_t-\lambda x u_{xx}-\mu u_x=0} = 0$$

olamlıdır. Değişmezlik kriteri uygulandığında ,

$$\phi_t - \lambda x\phi_{xx} - \mu\phi_x - \lambda\xi u_{xx} = 0$$

denklemi elde edilir. ϕ_t, ϕ_x ve ϕ_{xx} değerleri yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial\eta}{\partial x_2} + u_{x_2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\right) - u_{x_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} + u_{x_2}^2\frac{\partial\xi_2}{\partial u} - u_{x_1}u_{x_2}\frac{\partial\xi_1}{\partial u} - \lambda x\{\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial u}u_{x_1}$$

$$+u_{x_1x_2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\right) + u_{x_1}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\partial u} + \frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}u_{x_1} - \frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1\partial u}u_{x_1}\right) - u_{x_2}\left(\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1\partial u}u_{x_1}\right)$$

$$-\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}u_{x_2x_1} - u_{x_1}^2\left(\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1\partial u} + \frac{\partial^2\xi_1}{\partial u^2}u_{x_1}\right) - 2\frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_{x_1}u_{x_1x_1} - u_{x_1}u_{x_2}\left(\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1\partial u} + \frac{\partial^2\xi_2}{\partial u^2}u_{x_1}\right)$$

$$-\frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_{x_1x_1}u_{x_2} - \frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_{x_1}u_{x_1x_2} - u_{x_1x_1}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_{x_1}\right) - u_{x_1x_2}\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_{x_1}\right)\}$$

$$-\mu\{\frac{\partial\eta}{\partial x_1} + u_{x_1}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\right) - u_{x_1}^2\frac{\partial\xi_1}{\partial u} + u_{x_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} - u_{x_1}u_{x_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial u}\} - \lambda\xi u_{xx} = 0$$

olur. Yukarıda u_t gördüğümüz yere $\lambda x u_{xx} + \mu u_x$ yazılıp daha sonra "u" nun kısmi türevli terimlerinin katsayılarını tek tek sıfıra eşitlenip denklem sistemi çözüldüğünde, (3.21) denkleminin üreteçleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$X_1 = 2\lambda xt\frac{\partial}{\partial x} + \lambda t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x+\mu t)u\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$X_4 = u\frac{\partial}{\partial u}$$

Bu üreteçlerin tablosuda aşağıda verilmiştir.

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	$-X_1$	$-2X_2+\mu X_4$	0
X_2	X_1	0	$-X_3$	0
X_3	$2X_2-\mu X_4$	X_3	0	0
X_4	0	0	0	0

Burada X_1, X_2, X_3, X_4 üreteçleri ikili işleme göre kapalı olduğundan bu taban

$L_4 =< X_1, X_2, X_3, X_4 >$ Lie cebirini üretir. Her bir üretece karşılık gelen dönüşüm grupları aşağıda verilmiştir.

3.6.1 Simetri Üretecinin Dönüşüm Grupları,

Dönüşüm grupları

$$\xi^i(x^*, y^*) = \frac{\partial x_i^*}{\partial \varepsilon}$$

formülü ve $x_i^* \mid_{\varepsilon=0} = x_i$ başlangıç şartıyla hesaplanır.

$X_1 = 2\lambda xt\frac{\partial}{\partial x} + \lambda t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x+\mu t)u\frac{\partial}{\partial u}$ üretecini alalım.

1)

$$\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon} = \xi(x^*, t^*, u^*) = 2\lambda xt$$

$$lnx^* = 2\lambda t\varepsilon + c$$

$$x^* = xe^{2\lambda t\varepsilon}$$

olur.

2)

$$\frac{\partial t^*}{\partial \varepsilon} = \tau(x^*, t^*, u^*) = \lambda t^2$$

$$-\frac{1}{t^*} = \lambda\varepsilon + c$$

$$t^* = \frac{-t}{t\lambda\varepsilon - 1}$$

3)

$$\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon} = \phi(x^*, t^*, u^*) = -(x + \mu t)u$$

$$lnu^* = -(x + \mu t)\varepsilon + c$$

$$u^* = e^{-(x+\mu t)\varepsilon}u$$

olur. Böylece

$$G_1 : (x^*, t^*, u^*) = (xe^{2\lambda t\varepsilon}, \frac{-t}{t\lambda\varepsilon - 1}, e^{-(x+\mu t)\varepsilon}u)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde diğer üreteçler için de aynı işlemler yapıldığında dönüşüm grupları,

$$\begin{aligned} G_2 : (x^*, t^*, u^*) &= (xe^{\varepsilon}, te^{\varepsilon}, u) \\ G_3 : (x^*, t^*, u^*) &= (x, t + \varepsilon, u) \\ G_4 : (x^*, t^*, u^*) &= (x, t, e^{\varepsilon}u) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.6.2 Simetri Üreteci Altında İndirgeme

Her bir simetri üreteci ile (3.21) denklemindeki bağımsız değişken sayısı bire indirilebilir. Yani adi diferensiyel denkleme dönüştürülebilir.

i) $X_1 = 2\lambda xt\frac{\partial}{\partial x} + \lambda t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x + \mu t)u\frac{\partial}{\partial u}$ simetri üreteci için karakteristik denklemi

$$\frac{dx}{2\lambda xt} = \frac{dt}{\lambda t^2} = \frac{du}{-(x + \mu t)u}$$

olur. Buna göre

$$\frac{dx}{2\lambda xt} = \frac{dt}{\lambda t^2}$$

eşitliğine göre

$$\xi = xt^{-2}$$

alınabilir ve

$$\frac{dt}{\lambda t^2} = \frac{du}{-(x + \mu t)u}$$

eşitliğine göre

$$w = t^{\frac{\mu}{\lambda}}e^{\frac{1}{\lambda}xt^{-1}}u$$

benzerlik değişkenleri bulunur. Grup invaryant çözümü $w=f(\xi)$ ve $f'=\dfrac{df}{d\xi}$ olmak üzere

$$u=t^{-\frac{\mu}{\lambda}}e^{-\frac{1}{\lambda}xt^{-1}}f(xt^{-2})$$

olup, türevler alınıp (3.21) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lambda\xi f''+\mu f'=0$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. $f'=y$ alınırsa

$$\lambda\xi y'+\mu y=0$$

denklemi bulunur ve bu denklemin çözümü de

$$f(\xi)=c_1e^{-\frac{\mu}{\lambda}+1}+c_2$$

olarak bulunur. Buna göre (3.21) denkleminin genel çözümü de

$$u(x,t)=t^{-\frac{\mu}{\lambda}}e^{-\frac{1}{\lambda}xt^{-1}}(c_1x^{-\frac{\mu}{\lambda}+1}t^{\frac{2\mu}{\lambda}-2}+c_2)$$

olarak bulunur.

ii) $X_2=x\dfrac{\partial}{\partial x}+t\dfrac{\partial}{\partial t}$ simetri üreteci için karakteristik denklem

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{t}=\frac{du}{0}$$

olur. Buna göre

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{t}$$

eşitliğinden

$$\xi=xt^{-1}$$

ve

$$\frac{dt}{t}=\frac{du}{0}$$

eşitliğinden $w=u$ benzerlik değişkenleri bulunur. Grup invaryant çözümü $w=f(\xi)$ ve $f'=\dfrac{df}{d\xi}$ olmak üzere

$$u=f(xt^{-1})$$

olur. Türevler alınıp (3.21) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lambda\xi f'' + \xi f' + \mu f' = 0$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. $f' = y$ alınırsa

$$\lambda\xi y' + \xi y + \mu f y = 0$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin de genel çözümü

$$f(\xi) = c_1\xi^{-\frac{\mu}{\lambda}} e^{-\frac{1}{\lambda}\xi} d\xi + c_2$$

olarak bulunur.

iii) $X_3 = \dfrac{\partial}{\partial t}$ simetri üreteci için karakteristik denklemi,

$$\frac{dx}{0} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0}$$

olur. Benzerlik değişkenleri $\xi = x$ ve $w = u$ dır. Grup invaryant çözümü $w = f(\xi)$ ve $f' = \dfrac{df}{d\xi}$ olmak üzere

$$u = f(x)$$

olur. Türevler alınıp (3.21) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\mu f' + \lambda\xi f'' = 0$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. $f' = y$ alınırsa

$$\mu y + \lambda\xi y' = 0$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin çözümü de

$$f(\xi) = c_1\xi^{-\frac{\mu}{\lambda}+1} + c_2$$

olarak bulunur. (3.21) denkleminin genel çözümü ise,

$$u(x,t) = c_1 x^{-\frac{\mu}{\lambda}+1} + c_2$$

olur. c_1, c_2 reel sabitlerdir.

iv) $X_4 = u\dfrac{\partial}{\partial u}$ simetri üreteci için karakteristik denklemi,

$$\frac{dx}{0} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{u}$$

olur. Benzerlik değişkenleri $\xi = t$ ve $e^w = u$ dır. Grup invaryant çözümü $w = f(\xi)$ ve $f' = \dfrac{df}{d\xi}$ olmak üzere

$$f' = 0 \qquad ve \qquad f(\xi) = c_1$$

bulunur, buna göre (3.21) denkleminin genel çözümü ise,

$$u(x,t) = c_1$$

olur.

3.7 LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMİ

Matematiğin bilinen operatörlerinden olan $\triangle$ Laplace operatörü

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

olarak tanımlıdır. Bunlara sırasıyla 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu Laplace operatörü denir. Buna göre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \triangle u = 0$$

şeklindeki bir denkleme $\triangle$ nın boyutuna göre sırasıyla 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu homojen lineer dalga denklemi denir. Bu denklemler elektromanyetik, hidrodinamik, ses yayılması, kuantum teorisi gibi konularda kullanılmaktadır. Denklemlerde c pozitif bir reel sabit ve aksi söylenmedikçe t zamanı gösterir. c sabitinin yerine u veya u nun bir fonksiyonu olması halinde ise lineer olmayan dalga denklemi olur. Bu örnekte de (2+1) boyutlu lineer olmayan dalga denkleminin Lie simetri analizini yaparak çözümü araştırılacaktır:

$$u_{tt} = u^n (u_{xx} + u_{yy}) \tag{3.22}$$

denklemi ele alınsın (Ahmad, 2005). Bir-parametreli Lie grup dönüşümü,

$$x_i^* = x_i + \varepsilon \xi^i(x) + O(\varepsilon^2),$$

olarak verilsin. $i = 1,2,3,4$ için x_i ler x, y, t ve u larla temsil edilsin ve ξ^i lerde $\xi(x,y,t,u)$, $\eta(x,y,t,u)$, $\tau(x,y,t,u)$ ve $\phi(x,y,t,u)$ larla temsil edilsin. (3.22) denkleminin çözümünü bulmak için önce x, y, t, u lara bağlı simetri üretecini bulmaktan başlarız.

$$X = \xi(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial y} + \tau(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,y,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

Simetri üretecinin bileşenleri ξ, η, τ ve ϕ dır ve bağımsız değişkenler x, y, t ve bağımlı değişken u ile ifade edilir. (3.22) denklemi 2. mertebeden olduğu için 2. uzatımını hesaplamalıyız. Simetri üretecinin 2. uzatımı aşağıdaki gibi verilir.

$$X^{(2)} = X + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^y \frac{\partial}{\partial u_y} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \phi^{yt} \frac{\partial}{\partial u_{yt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

olur. Kısmi diferensiyel denklemler için değişmezlik kriterince üretecin 2. uzatımına (3.22) denklemi uygulanıp sıfıra eşitlenir.

Buna göre;

$$X^{(2)} \left\{ u_{tt} = u^n (u_{xx} + u_{yy}) \right\} |_{u_{tt}=u^n(u_{xx}+u_{yy})} = 0$$

olur. Böylece

$$\phi^{tt} - n u^{n-1} (u_{xx} + u_{yy}) \phi - u^n (\phi^{xx} + \phi^{yy}) = 0 \tag{3.23}$$

olur.

ϕ^{tt}, ϕ^{xx} ve ϕ^{yy} yi (3.23) denkleminde yerine yazalım ve u_{tt} gördüğümüz yerlere de $u^n(u_{xx} + u_{yy})$ yazalım. Buna göre (3.23) denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{gathered}
\phi_{tt} + (2\phi_{tu} - \tau_{tt}) u_t + (\phi_{uu} - 2\tau_{tu}) u_t^2 + (\phi_u - 2\tau_t) u^n (u_{xx} + u_{yy}) - \tau_{uu} u_t^3 - 3\tau_u u_t u^n (u_{xx} + u_{yy}) \\
-2\eta_t u_{ty} - 2\eta_u u_{ty} u_t - \eta_{tt} u_y - 2\eta_{tu} u_t u_y - \eta_{uu} u_y u_t^2 - \eta_u u_y u^n (u_{xx} + u_{yy}) - 2\xi_t u_{tx} - 2\xi_u u_t u_{tx} \\
-\xi_{tt} u_x - 2\xi_{tu} u_x u_t - \xi_{uu} u_x u_t^2 - \xi_u u_x u^n (u_{xx} + u_{yy}) - n u^{n-1} (u_{xx} + u_{yy}) \phi - u^n (\phi_{xx} + \\
(2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} - \xi_{uu} u_x^3 - 3\xi_u u_x u_{xx} - 2\eta_x u_{xy} - 2\eta_u u_{xy} u_x \\
-\eta_{xx} u_y - 2\eta_{xu} u_y u_x - \eta_{uu} u_y u_x^2 - \eta_u u_y u_{xx} - 2\tau_x u_{tx} - 2\tau_u u_x u_{tx} - \tau_{xx} u_t - 2\tau_{xu} u_x u_t - \tau_{uu} u_t u_x^2 \\
-\tau_u u_{xx} u_t) - u^n (\phi_{yy} + (2\phi_{yu} - \eta_{yy}) u_y + (\phi_{uu} - 2\eta_{yu}) u_y^2 + (\phi_u - 2\eta_y) u_{yy} - \eta_{uu} u_y^3 - 3\eta_u u_y u_{yy} \\
-2\xi_y u_{xy} - 2\xi_u u_{xy} u_y - \xi_{yy} u_x - 2\xi_{yu} u_y u_x - \xi_{uu} u_x u_y^2 - \xi_u u_{yy} u_x - 2\tau_y u_{ty} - 2\tau_u u_y u_{ty} - \tau_{yy} u_t \\
-2\tau_{yu} u_y u_t - \tau_{uu} u_t u_y^2 - \tau_u u_{yy} u_t) = 0
\end{gathered}$$

Buna göre ”u” nun kısmi türevlerinin katsayılarının karşılaştırılmasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$
\begin{array}{lll}
u_{xx} & 2(\xi_x-\tau_t)u^n-2\tau_u u_t u^n-nu^{n-1}\phi+2u^n\xi_u u_x=0 & (3.24)\\
u_{yy} & 2(\eta_y-\tau_t)u^n-2\tau_u u_t u^n-nu^{n-1}\phi+2u^n\eta_u u_y=0 & (3.25)\\
u_{xy} & u^n\eta_x+u^n\eta_u u_x+u^n\xi_y+u^n\xi_u u_y=0 & (3.26)\\
u_{tx} & \xi_t-u^n\tau_x=0 & (3.27)\\
u_{ty} & \eta_t-u^n\tau_y=0 & (3.28)\\
u_t & 2\phi_{tu}-\tau_{tt}+\phi_{uu}u_t+u^n(\tau_{xx}+\tau_{yy})=0 & (3.29)\\
u_y & \eta_{tt}+2u^n\phi_{uy}+\eta_{xx}+\eta_{yy}=0 & (3.30)\\
u_x & \xi_{tt}+2u^n\phi_{ux}+\xi_{xx}+\xi_{yy}=0 & (3.31)\\
 & \phi_{tt}-u^n(\phi_{xx}+\phi_{yy})=0 & (3.32)
\end{array}
$$

Şimdi bu dokuz denklemi çözerek sonsuz küçükler ξ, η, τ ve ϕ yi belirlemeliyiz.

(3.24) denkleminde u_x ve u_t terimlerinin katsayıları gereği

$$\tau_u=\xi_u=0\ (3.31) \qquad (3.33)$$

dır ve ξ ve τ, u ya bağlı değildir.

(3.33) denkelemindeki ifadeler (3.24) denkeleminde yerine yazılırsa,

$$2(\xi_x-\tau_t)=nu^{-1}\phi \qquad (3.34)$$

dır. Benzer şekilde (3.25) denkleminde u_y nin katsayısı gereği

$$\eta_u=0$$

dır. Bu değer (3.25) denkleminde yerine yazılırsa,

$$2(\eta_y-\tau_t)=nu^{-1}\phi$$

dır. (3.33) denklemi (3.26) da kullanılırsa ve (3.27), (3.28) denklemleri de sırasıyla

$$\eta_x=-\xi_y \quad , \quad \xi_t=u^n\tau_x \quad , \quad ve \quad \eta_t=u^n\tau_y \qquad (3.35)$$

olur. (3.29) denklemindeki u_t nin katsayısı gereği

$$\phi=\alpha(x,y,t)u+\beta(x,y,t)$$

ve (3.29) denklemi de

$$2\alpha_t-\tau_{tt}+u^n(\tau_{xx}+\tau_{yy})=0 \qquad (3.36)$$

olur. (3.36); (3.30) ve (3.31) için kullanıldığı zaman;

$$\eta_{tt}+2u^n\alpha_y+\eta_{xx}+\eta_{yy}=0$$

ve

$$\xi_{tt} + 2u^n\alpha_x + \xi_{xx} + \xi_{yy} = 0 \tag{3.37}$$

elde edilir. Kalan terimler u nun herhangi bir türevini içermediği için

$$\phi_{tt} - u^n(\phi_{xx} + \phi_{yy}) = 0 \tag{3.38}$$

dır. Şimdi (3.33)-(3.38) denklemleri çözüldüğü takdirde sonsuz küçükler;

$$\xi = c_0 - c_1 y + c_2 x$$

$$\eta = c_3 + c_1 x + c_2 y$$

$$\tau = (\frac{4c_2}{n+4} - \frac{2nc_4}{n+4})t + c_5$$

$$\phi = (\frac{2c_2}{n+4} + \frac{4c_4}{n+4})u + \beta(x,y,t)$$

olarak bulunur. Daha sonra bulunan sonsuz küçükler X simetri üretecinde yerine yazılır ve c_i katsayılarına bağlı olarak X_i simetri üreteçleri belirlenir (Hydon, 2000; Tang and Lou , 2002). Buna göre her c_i sabitlerine karşılık gelen X_i üreteçleri aşağıdaki gibidir.

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (\frac{4t}{n+4})\frac{\partial}{\partial t} + (\frac{2u}{n+4})\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_4 = -(\frac{2nt}{n+4})\frac{\partial}{\partial t} + (\frac{4u}{n+4})\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial t}$$

Üreteçlerin tablosu da aşağıdaki gibi elde edilir.

$[X_i,X_j]$	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_0	0	X_3	X_0	0	0	0
X_1	$-X_3$	0	0	X_0	0	0
X_2	$-X_0$	0	0	$-X_3$	0	$(\frac{-4}{n+4})X_5$
X_3	0	$-X_0$	X_3	0	0	0
X_4	0	0	0	0	0	$(\frac{-2n}{n+4})X_5$
X_5	0	0	$(\frac{4}{n+4})X_5$	0	$(\frac{2n}{n+4})X_5$	0

Burada X_0,X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 üreteçleri ikili işleme göre kapalı olduğundan bu taban $L_6 =< X_0,X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 >$ Lie cebirini üretir. Her bir üretece karşılık gelen dönüşüm grupları aşağıda verimiştir.

3.7.1 Sonsuz Küçük Üretecin Lie Grup Dönüşümü

Grup dönüşümleri

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \varepsilon} = \xi^i(x^*,y^*,t^*,u^*)$$

formülünde $x_i^* \mid_{\varepsilon=0}= x_i$ başlangıç şartının uygulanmasıyla elde edilir.

$X_4 = -(\frac{2nt}{n+4})\frac{\partial}{\partial t} + (\frac{4u}{n+4})\frac{\partial}{\partial u}$ üretecini ele alırsak,grup dönüşümünün bileşenleri;

1-

$$\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon} = \xi(x^*,y^*,t^*,u^*) = 0$$

$$x^* = c$$

$$x^* \mid_{\varepsilon=0}= x$$

başlangıç şartı uygulanırsa

$$x^* = x$$

olarak elde edilir.

2-

$$\frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon} = \eta(x^*,y^*,t^*,u^*) = 0$$

$$y^* = c$$

$$y^* \mid_{\varepsilon=0} = y$$

başlangıç şartı uygulanırsa

$$y^* = y$$

olarak elde edilir.

3-

$$\frac{\partial t^*}{\partial \varepsilon} = \tau(x^*, y^*, t^*, u^*) = -\frac{2nt}{n+4}$$

$$lnt^* = -\frac{2n\varepsilon}{n+4} + c$$

$$t^* \mid_{\varepsilon=0} = t$$

başlangıç şartı uygulanırsa

$$t^* = te^{-\frac{2n\varepsilon}{n+4}}$$

olarak elde edilir.

4-

$$\frac{\partial u^*}{\partial \varepsilon} = \phi(x^*, y^*, t^*, u^*) = \frac{4u}{n+4}$$

$$lnu^* = \frac{4\varepsilon}{n+4} + c$$

$$u^* \mid_{\varepsilon=0} = u$$

başlangıç şartı uygulanırsa

$$u^* = ue^{\frac{4\varepsilon}{n+4}}$$

olarak elde edilir. Böylece G_4 dönüşüm grubu X_4 üreteci tarafından

$$G_4 : (x^*, y^*, t^*, u^*) = (x, y, te^{-\frac{2n\varepsilon}{n+4}}, ue^{\frac{4\varepsilon}{n+4}})$$

olacak şekilde üretilir. Benzer şekilde diğer dönüşüm grupları için de aynı işlemler tekrar edilirse,

$$\begin{aligned}
G_0 : (x^*, y^*, t^*, u^*) = \quad & (x+\varepsilon, y, t, u) \\
G_1 : (x^*, y^*, t^*, u^*) = \quad & (\frac{x-y\varepsilon}{1+\varepsilon^2}, \frac{x+y\varepsilon}{1+\varepsilon^2}, t, u) \\
G_2 : (x^*, y^*, t^*, u^*) = \quad & (xe^{\varepsilon}, ye^{\varepsilon}, te^{\frac{4\varepsilon}{n+4}}, ue^{\frac{2\varepsilon}{n+4}}) \\
G_3 : (x^*, y^*, t^*, u^*) = \quad & (x, y+\varepsilon, t, u) \\
G_5 : (x^*, y^*, t^*, u^*) = \quad & (x, y, t+\varepsilon, u)
\end{aligned}$$

Lie grup dönüşümleri elde edilir.

3.7.2 Sonsuz Küçük Simetri Üreteci Altında İndirgeme

Sonsuz küçük simetri üreteci ile kısmi diferensiyel denklemlerdeki bağımsız değişken sayısı bire kadar indirilebilir. Bu bölümde sonsuz küçük simetri üreteci altında dalga denklemini indirgeyeceğiz.

$$X_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

üretecini ele alırsak, bu üreteç için karakteristik denklem;

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{0}$$

dir. Şimdi yukarıdaki X_1 üreteci için benzer değişkenleri bulalım.

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x},$$

$$s = x^2 + y^2 = c_1$$

olarak bulunur ve

$$\frac{dt}{0} = \lambda$$

ise

$$r = t = c_2$$

olur.

$$\frac{du}{0} = \lambda$$

ise

$$u = w = c_3$$

olarak bulunur.

$$c_3 = f(c_1, c_2)$$

olarak yazıldığında yeni fonksiyonumuz

$$u = w(r, s)$$

olur. Bulunan yeni değişkenler yardımıyla,

$$u_{xx} = 4w_{ss}x^2 + 2w_s$$

$$u_{yy} = 4w_{ss}y^2 + 2w_s$$

$$u_{tt} = w_{rr}$$

olur. Böylece (3.22) denklemi 2 bağımsız 1 bağımlı değişken içeren

$$w_{rr} = 4w^n(w_s + sw_{ss})$$

denklemine indirgenmiş oldu. Bu şekilde diğer üreteçler yardımıyla da (3.22) denklemi indirgenebilir. İndirgemelerin tamamı aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

Üreteçler	İndirgeme ve benzerlik değişkenleri
$X_0 = \frac{\partial}{\partial x}$	$w_{rr} = w^n w_{ss}$ $s = y,\ r = t,\ w(r,s) = u$
$X_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$	$w_{rr} = 4w^n(w_s + sw_{ss})$ $s = x^2 + y^2,\ r = t,\ w(r,s) = u$
$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} +$ $(\frac{4t}{n+4})\frac{\partial}{\partial t} + (\frac{2u}{n+4})\frac{\partial}{\partial u}$	$-\frac{1}{4} + (\frac{n}{4}+1)^2 r^2 + w_r^2 + (\frac{n}{4}+1)w_r$ $+(\frac{n}{4}+1)^2 r^2 w_{rr} = r^2 e^{nw}(r^2 w_r^2 + (s^2+1)w_s^2$ $+2rsw_s w_r + r^2 w_{rr} + 2srw_{sr} + 2rw_r + (s^2+1)w_{ss} + 2sw_s)$ $s = \frac{y}{x},\ r = \frac{t^{\frac{n}{4}+1}}{x},\ \sqrt{t}w(r,s) = u$
$X_3 = \frac{\partial}{\partial y}$	$w_{rr} = w^n w_{ss}$ $s = x,\ r = t,\ w(r,s) = u$
$X_4 = -(\frac{2nt}{n+4})\frac{\partial}{\partial t} + (\frac{4u}{n+4})\frac{\partial}{\partial u}$	$\frac{2}{n}(\frac{2}{n}+1) = e^{nw}(w_{ss} + w_{rr})$ $s = x,\ r = y,\ u = t^{\frac{-2}{n}} e^{w(r,s)}$
$X_5 = \frac{\partial}{\partial t}$	$w_{ss} + w_{rr} = 0$ $s = x,\ r = y,\ w(r,s) = u$

3.7.3 İki Boyutlu Altcebir Altında İndirgeme

Bu bölümde dalga denkleminin iki boyutlu altcebir altında adi difrensiyel denkleme indirgemesini vereceğiz.

$[X_1, X_5] = 0$ cebirini ele alalım.

$[X_1, X_5] = 0$ olduğundan X_1 ve X_5 abelyan cebirlerdir. Böylece istediğimiz üreteçten indirgemeye başlayabiliriz.

$\mathrm{X}_5 = \dfrac{\partial}{\partial t}$ üretecinden indirgemeye başlayalım.

X_5 üretecinin karakteristik denklemi,

$$\frac{dx}{0} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0}$$

olur.

$$s = x = c_1, \;\; r = y = c_2, \;\; w = u = c_3$$

alınarak.

$$c_3 = f(c_1, c_2)$$

olsun. Buna göre

$$u = w(r, s)$$

olur ve indirgenmiş denklem de

$$w_{rr} + w_{ss} = 0$$

olur. X_1 üreteci yeni değişkenlerine göre,

$$\widetilde{X_1} = -r\frac{\partial}{\partial s} + s\frac{\partial}{\partial r}$$

olur ve karakteristik denklemi,

$$\frac{ds}{-r} = \frac{dr}{s}$$

olur.

$$\alpha = r^2 + s^2 = c_4, \;\; w = \beta = c_5$$

olur.

$$c_5 = f(c_4) \;\Rightarrow w = \beta(\alpha)$$

Buna göre

$$w_{rr} = 4\beta' + 4r^2\beta''$$

$$w_{ss} = 4\beta' + 4s^2\beta''$$

olarak bulunur. Denklemde yerine yazılırsa

$$\beta' + \alpha\beta'' = 0$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözülmesiyle de

$$\beta(\alpha) = -e^{-\alpha}c_1 + c_2$$

bulunur. Buna göre

$$w(r,s) = -e^{-(r^2+s^2)}c_1 + c_2$$

olur ve denklemin genel çözümü

$$u(x,t) = -e^{-(x^2+y^2)}c_1 + c_2$$

olarak bulunur.

X_1 ve X_5 üreteçleri bir abelyan altcebir formunda olduğundan herhangi birisinden indirgemeye başlayabiliriz. Fakat bu her zaman doğru olmaz. Eğer komütatör formunda $[X_1, X_5] \neq 0$ ise sonuçta çıkan üreteçten indirgemeye başlamalıyız.

Örneğin $[X_5, X_2] = c_1 X_5$ üretecini ele alalım. Bu durmda indirgemeye X_5 üretecinden başlamalıyız.

$X_5 = \dfrac{\partial}{\partial t}$ üretecinde

$$s = x = c_1, \;\; r = y = c_2, \;\; w = u = c_3$$

$$c_3 = f(c_1, c_2)$$

olduğuna göre

$$u = w(r,s)$$

alınarak dalga denklemi

$$w_{rr} + w_{ss} = 0 \tag{3.39}$$

olarak bulunur. Yeni değişkenlere göre X_2 üreteci,

$$\widetilde{X_2} = s\frac{\partial}{\partial s} + r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2w}{n+4}\frac{\partial}{\partial w}$$

olur. $\widetilde{X_2}$ üretecinin karakteristik denklemi,

$$\frac{ds}{s} = \frac{dr}{r} = \frac{(n+4)dw}{2w}$$

dır. Böylece yeni değişkenler,

$$\alpha = \frac{r}{s},\ \ s^{\frac{2}{n+4}} e^{\beta(\alpha)} = w$$

olur. Yeni değişkenler yardımıyla (3.39) denklemi

$$\frac{2(n+2)}{(n+4)^2} = \frac{2n+12}{n+4}\alpha\beta' + (\beta')^2 + \beta'' + \alpha^2(\beta')^2 + \alpha^2\beta''$$

adi diferensiyel denklemine indirgenmiş olur.

2 boyutlu altcebirler altında indirgenmiş diğer denklemler tabloda verilmiştir.

2 Boyutlu Cebir	İndirgeme ve Benzerlik değişkenleri
$[X_0, X_3] = 0$	$\beta'' = 0$ $\alpha = r,\ \beta(\alpha) = w$ ve $s = y,\ r = t,\ w(r,s) = u$ $u(x,y,t) = c_1 t + c_2$
$[X_0, X_4] = 0$	$\frac{2}{n}(\frac{2}{n}+1) = e^{n\beta}(\beta'^2 + \beta'')$ $\alpha = s,\ e^{\beta(\alpha)} r^{-\frac{2}{n}} = w$ ve $s = y,\ r = t,\ w(r,s) = u$
$[X_0, X_5] = 0$	$\beta'' = 0$ $\alpha = s,\ \beta(\alpha) = w$ ve $s = y,\ r = t,\ w(r,s) = u$ $u(x,y,t) = c_1 y + c_2$

2 Boyutlu Cebir	İndirgeme ve Benzerlik değişkenleri
$[X_1,X_2]=0$	$-\frac{1}{2}+(\frac{n}{2}+2)^2(\alpha\beta'+\alpha^2\beta')=4\alpha e^{n\beta}(\alpha\beta'+\alpha^2\beta'^2+\alpha^2\beta'')$
	$\alpha=\frac{r^{\frac{n}{2}+2}}{s},\sqrt{r}e^{\beta(\alpha)}=w$ ve s=x$^2+y^2, r=t, w(r,s)=u$
$[X_1,X_4]=0$	$\frac{2}{n}(\frac{2}{n}+1)=4e^{n\beta}(\beta'+\alpha(\beta'^2+\beta''))$
	$\alpha=s,\ e^{\beta(\alpha)}r^{-\frac{2}{n}}=w$ ve s=x$^2+y^2,\ r=t,\ w(r,s)=u$
$[X_1,X_5]=0$	$\beta'+\alpha\beta''=0$
	$\alpha=s^2+r^2,\ \beta(\alpha)=w$ ve $s=x,\ r=t,\ w(r,s)=u$
	$u(x,y,t)=\frac{-c_1}{(x^2+y^2)^2}+c_2$

2 Boyutlu Cebir	İndirgeme ve Benzerlik değişkenleri
$[X_2,X_4]=0$	$\frac{2}{n}(\frac{2}{n}+1)=e^{n\beta}(\beta''-\frac{2}{n}+\alpha^2\beta''+2\alpha\beta')$
	$\alpha=\frac{s}{r},\ \frac{2}{n}\ln r+\beta(\alpha)=w$ ve $s=x,\ r=y,\ w(r,s)=\ln(ut^{\frac{2}{n}})$
$[X_3,X_4]=0$	$\frac{2}{n}(\frac{2}{n}+1)=e^{n\beta}(\beta''+\beta'^2)$
	$\alpha=s,\ e^{\beta(\alpha)}r^{\frac{-2}{n}}=w$ ve $s=x,\ r=t,\ w(r,s)=u$
$[X_3,X_5]=0$	$\beta''=0$
	$\alpha=s,\beta(\alpha)=w$ ve $s=x,r=t,w(r,s)=u$
	$u(x,y,t)=c_1x+c_2$

2 Boyutlu Cebir	İndirgeme ve Benzerlik değişkenleri
$[X_0, X_2] = X_0$	$-\frac{1}{4} + (\frac{n}{4}+1)^2(\alpha\beta' + \alpha^2\beta'^2 + \alpha^2\beta'') = \alpha^2 e^{n\beta}(2\alpha\beta' + \alpha^2\beta'^2 + \alpha^2\beta'')$
	$\alpha = \frac{r^{\frac{n}{4}+1}}{s}, \sqrt{r}e^{\beta(\alpha)} = w$ ve $s = y, r = t, w(r,s) = u$
$[X_3, X_2] = X_3$	$-\frac{1}{4} + (\frac{n}{4}+1)^2(\alpha\beta' + \alpha^2\beta'^2 + \alpha^2\beta'') = \alpha^2 e^{n\beta}(2\alpha\beta' + \alpha^2\beta'^2 + \alpha^2\beta'')$
	$\alpha = \frac{r^{\frac{n}{4}+1}}{s},\ \sqrt{r}e^{\beta(\alpha)} = w$ ve $s = x,\ r = t,\ w(r,s) = u$
$[X_5, X_2] = c_1 X_5$	$\frac{2(n+2)}{(n+4)^2} = (\frac{2n+12}{n+4})\alpha\beta' + \beta'^2 + \beta'' + \alpha^2\beta'^2 + \alpha^2\beta''$
	$\alpha = \frac{r}{s},\ s^{\frac{2}{n+4}}e^{\beta(\alpha)} = w$ ve $s = x,\ r = y,\ w(r,s) = u$

BÖLÜM 4

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, bir-parametreli Lie grup dönüşümleri ele alınmış, sözkonusu parametrenin sürekli olması nedeniyle de dönüşümler sürekli Lie grup dönüşümlerini oluşturmuştur. Bu Lie grubuna ait sürekli dönüşümlerden elde edilen sonsuz küçük simetri operatörünün invaryantlık kavramı ile bütünleşerek kısmi diferensiyel denklemlerin çözümündeki rolü gösterilmeye çalışılmıştır. Lie grup dönüşümleri kullanılarak lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerden; ısı iletim denkleminin, Burger denkleminin, Hanging Chain denkleminin, Bond Pricing denkleminin ve lineer olmayan dalga denkleminin sonsuz küçük simetri üreteçleri verildi. Bu üreteçler altında değişmez kalan prolongasyon formülleri hesaplanarak sonsuz küçükler elde edildi ve simetri üreteçleri bulundu. Bulunan bu üreteçlerin Lie cebiri yapısı oluşturup oluşturmadığına bakıldı ve komütatör tabloları yapıldı. Her bir sonsuz küçük üreteç için grup dönüşümleri hesaplandı. Yine herbir sonsuz küçük simetri üreteci ele alınarak bu üreteç altında veya iki boyutlu alt-cebir altında adi diferensiyel denklemlere indirgemeleri yapıldı ve bu adi diferensiyel denklemlerin çözümleri arandı. Böylece verilen lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler daha basit forma indirgenerek çözümleri bulundu.

Kısmi diferensiyel denklemlerin Lie grup dönüşümleri altında gösterdikleri simetri özellikleri, o hareket denkleminin tanımlandığı fiziksel sistem ve onun özellikleri ile ilgili önemli ipuçları sunar. Örneğin 2.4 altbölümde incelendiği gibi, sistemin Lie grup dönüşümleri altında değişmezlik göstermesi bir simetri özelliğini (öteleme, dönme vs.) tasvir eder. Doğada nerede bir simetri varsa orada bir grup yapısı vardır. Öyleki sistemin bu simetri özelliği ile bütünleşen bir korunum kanunu vardır. Simetri ile korunum kanunları arasında bire bir ilişki vardır (Gilmore, 1974, 2008). Özel bir örnek olarak 2.4 te incelenen dönüşüm, dönme dönüşümü olup iki-boyutlu uzayda ortogonal Lie grubunu temsil eder (SO(2) gibi). Dönme simetrisi ise sistemin açısal momentumun korunduğunu gösterir.

Gelecekte bu tezde ele alınmamış Lie grup dönüşümlerinin kısmi diferensiyel denklem sistemlerine uygulanması incelenebilir. Bu denklemlerin simetrileri elde edilerek daha basit forma indirgenip indirgenemediği kontrol edilebilir. Ayrıca bu çalışmada sadece bir-parametreli Lie grup dönüşümleri ele alındı. Bir başka çalışmada çok parametreli Lie grup dönüşümlerinin kısmi diferensiyel denklemlere ve denklem sistemlerine uygulanması ele alınabilir. Yine bu tezde sadece Lie grup nokta dönüşümleri ele alındığı için başka bir çalışma da Lie temas dönüşümleri, ve Lie backlund dönüşümleri ele alınarak dönüşümlerin genel özellikleri ve kısmi diferensiyel denklemlere ve denklem sistemlerine uygulanması araştırılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1]

Ahmad, A. , 2005, Symmetry Solutions of Some Nonlinear Pde's, Master Thesis, Deanship of Graduate Studies , King Fahd University of Petroleum and Minerals Dhahran 31261 Saudi Arabia.

Ağaçarası, H., 2006, Symmetry Methods For Differential Equations, Master Thesis, Graduate School of Natural and Applied Sciences of Dokuz Eylül University.

Bilgiç, H. , MT301 Soyut Cebir I Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.

Bluman, G.W., Anco, S.C. , 2002, Symmetry and Integration Methods for Differential Equations with 18 Illustrations, Springer-Verlag, New York.

Bluman, G.W., Kumei, S. , 1989, Symmetries and Differential Equations with 21 Illustrations, Springer-Verlag, New York.

Cantwell,B. J. ,2002, Introduction to Symmetry Analysis, Cambridge University Press, UK.

Cicogna, G. and Gaeta, G., 1999 , Symmetry and Perturbation Theory in Nonlinear Dynamics, Springer-Verlag, Berlin.

Gilmore, R. , 2008, Lie Group, Physics and Geometry, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Gilmore, R. , 1974, Lie Groups , Lie Algebras, and Some of Their Applications, A Wiley-InterScience Publication, Canada

Hanze, L. and Jibin, L. and Lei, L., 2009, Lie group classifications and exact solutions for two variable-coefficient equations, Applied Mathematics and Computation, 215, 2927–2935.

Hydon, P. E. , 2000, Symmetry Methods for Differential Equations A Beginner's Guide, Cambridge University Press, New York.

Ibragimov, N.H. , 1993, Crc Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume1 Symmetries Exact Solutions and Conservation Laws.

Kiraz, Açıl F. , 2007, Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin Lie Simetrileri Üzerine, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Koca, K. , 2008, Kısmi Türevli Denklemler,Gündüz Eğitim Yayıncılık, Ankara.

Olver, P. J. , 1991, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, New York.

Ovsyannikov, L.V.,1982, Group Analysis of Differential Equations, Academic Pres, New York.

Özceylan, M. , 2007, Bir Parametreli Lie Gruplarının Diferensiyel Denklemlere Uygulanması, Y. Lisans Tezi, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Özer, M.N.ve Eser, D.,1996, Diferensiyel Denklemler(Teori ve Uygulamaları), Birlik Ofset, Eskişehir.

Pala, Y. , 2006, Modern Uygulamalı Diferensiyel Denklemler, Nobel Yayınevi, Ankara.

Stephani, H. , 1989, Differential Equations(Their Solution Using Symmetries), Cambridge University Press, New York.

Tang X., Lou S. Y., 2002, Chinese Physics Letters, Vol. 19, No. 1.

Taşçı, D., 2007, Soyut Cebir, Alp Yayınevi, Ankara.