

Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin
Taylor-Kollokasyon ve Taylor-Galerkin Yöntemleri ile Sayısal Çözümleri

Aynur Canıvar

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat 2011

Numerical Solutions of the Non-linear Partial Differential Equations
with Taylor-Collocation and Taylor-Galerkin Methods

Aynur Canıvar

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics

February 2011

Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin
Taylor-Kollokasyon ve Taylor-Galerkin Yöntemleri ile Sayısal Çözümleri

Aynur Canıvar

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. İdris Dağ

Şubat 2011

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Aynur CANIVAR'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı “Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin Taylor-Kollokasyon ve Taylor-Galerkin Yöntemleri ile Sayısal Çözümleri” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof.Dr. İdris DAĞ

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof.Dr. İdris DAĞ

Üye : Prof.Dr. M. Naci ÖZER

Üye : Doç.Dr. Bülent SAKA

Üye : Yrd.Doç.Dr. Ömer ÖZBAŞ

Üye : Yrd.Doç.Dr. Ahmet BOZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez çalışmasında, birçok fiziksel olayı modellemek için kullanılan bazı lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda, Adveksiyon-difüzyon, Burger ve Korteweg-de Vries (KdV) denklemlerinin yaklaşık çözümleri yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilmiştir.

Sayısal yöntemin uygulanışında, ilk olarak Taylor seri açılımı kullanılarak diferensiyel denklemlerin zaman ayrıştırması yapılmıştır. Zamana göre ayrıştırılan bu denklemlerin konum ayrıştırması için, denklemlerin çözüm bölgeleri eşit uzunluklu alt aralıklara bölünmüş ve taban fonksiyonları olarak kuadratik, kübik ve kuintik B-spline taban fonsiyonları kullanılarak Galerkin ve kollokasyon sonlu eleman metotları uygulanmıştır. Yukarıda bahsedilen diferensiyel denklemlerin, zaman ve konum ayrıştırılması ile elde edilen cebirsel denklem sistemlerinin çözümü, Thomas algoritmaları kullanılarak bulunmuştur.

Farklı derecelerdeki B-spline fonksiyonlarının kullanımı ile elde edilen sayısal yöntemler, farklı problemler üzerinde test edilmiştir. Sayısal hatalar L_2 ve L_∞ hata normları ile gösterilmiştir. Uygulanan sayısal metotlardan elde edilen fark denklemlerinin kararlılık analizleri von Neumann yöntemi ile yapılmıştır. Sayısal metotlardan elde edilen çözümler, gerek birbirileri ile gerekse de literatürde yer alan diğer bazı çalışmalarla karşılaştırılarak, önerilen yöntemlerin avantaj ve dezavantajları tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Adveksiyon-difüzyon denklemi, Burger denklemi, KdV denklemi, Spline, Sonlu elemanlar, Taylor-Galerkin, Taylor- Kollokasyon

SUMMARY

The main purpose of this thesis is to obtain the numerical solutions of some nonlinear partial differential equations which are modelled for a quantitative description of physical phenomena. For this purpose, the finite element method that is used widely in numerical solutions of differential equations is employed by dealing with Advection-diffusion, Burger and Korteweg-de Vries (KdV) equations.

In the application of the numerical method, firstly, the time discretization of the equations is achieved by using Taylor's expansion. In the finite element method, a uniform partition of the solution domain is considered for the space discretization. Then the finite element methods of Galerkin and collocation are applied on the time-discretized equation system respectively. In the solution of these equations, quadratic, cubic and quintic B-spline functions are chosen as the basis functions and system of equations was obtained. The Thomas algorithms are used for the solutions of the these systems.

The present methods given by the usage of B-splines in several degrees are tested on different problems. The errors of numerical methods are shown by L_2 and L_∞ error norms. Stability of finite-difference equations which is obtained from numerical methods is implemented by using the von Neumann method. In addition, the obtained results are both compared with each other and some other works from the literature. Then the advantages and the disadvantages of the present methods are discussed.

Keywords: Advection-diffusion Equation, Burger's Equation, Finite element, KdV Equation, Spline, Taylor-Collocation, Taylor-Galerkin.

TEŐEKKÖR

Doktora alıőmalarımın her aőamasında, bana danıőmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danıőmanım Prof. Dr. İdris DAĞ'a, yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan hocalarım Doç. Dr. Bőlent SAKA, Yrd. Doç. Dr. Dursun IRK ve Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN'e teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
TABLOLAR DİZİNİ	xii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
1. TEMEL KAVRAMLAR.....	1
1.1 Sonlu Farklar Metodu	1
1.1.1 Taylor Seri Açılımları	3
1.1.2 Lineer Sonlu Fark Operatörleri	5
1.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi	5
1.2.1 Kollokasyon Yöntemi	7
1.2.2 Galerkin Yöntemi.....	8
1.3 B-Spline Fonksiyonlar	8
1.3.1 Lineer B-spline Fonksiyonlar.....	10
1.3.2 Kuadratik B-Spline Fonksiyonlar	12
1.3.3 Kübik B-Spline Fonksiyonlar	15
1.3.4 Kuartik B-Spline Fonksiyonlar	18
1.3.5 Kuintik B-Spline Fonksiyonlar	21
1.4 Taylor-Galerkin Metodu	25
1.5 von Neumann Kararlılık Analizi.....	26
1.6 Test Problemleri	27
1.6.1 Adveksiyon-Difüzyon Denklemi	27
1.6.2 Burger Denklemi	29
1.6.3 Korteweg de-Vries Denklemi	30
2. ADVEKSİYON DİFÜZYON DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	32
2.1 Taylor-Galerkin Kuadratik B-spline Metodu (TG-QDBM)	32
2.1.1 Kararlılık Analizi	35
2.2 Taylor-Kollokasyon Kübik B-spline Metodu (TC-CBM)	37
2.2.1 Kararlılık Analizi	38

İÇİNDEKİLER (Devam Ediyor)

	<u>Sayfa</u>
2.3 Taylor-Kollokasyon Kuintik B-spline Metodu (TC-QNBM).....	39
2.3.1 Kararlılık Analizi	41
2.4 Test Problemleri	42
2.5 Sonuç	47
3. BURGER DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	48
3.1 Taylor-Galerkin Kuadratik B-spline Metodu (TG-QDBM)	48
3.1.1 Kararlılık Analizi	52
3.2 Taylor-Kollokasyon Kübik B-spline Metodu (TC-CBM)	54
3.2.1 Kararlılık Analizi	56
3.3 Taylor-Kollokasyon Kuintik B-spline Metodu (TC-QNBM).....	57
3.3.1 Kararlılık Analizi	59
3.4 Test Problemleri	60
3.5 Sonuç	71
4. KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ.....	73
4.1 Taylor-Galerkin Kuadratik B-spline Metodu (TG-QDBM)	73
4.1.1 Kararlılık Analizi	77
4.2 Taylor-Galerkin Kübik B-spline Metodu (TG-CBM).....	78
4.2.1 Kararlılık Analizi	82
4.3 Taylor-Kollokasyon Kuintik B-spline Metodu (TC-QNBM).....	83
4.3.1 Kararlılık Analizi	86
4.4 Test Problemleri	87
4.5 Sonuç	100
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	101
6.KAYNAKLAR DİZİNİ	103
ÖZGEÇMİŞ	107

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>		<u>Sayfa</u>
1.1	h aralığı için sonlu fark bölünmesi	2
1.2	İki boyutta sonlu fark bölünmesi	2
1.3	$[x_m, x_{m+1}]$ elemanında L_m, L_{m+1} deneme fonksiyonları	11
1.4	$[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki $\varphi_{m-1}, \varphi_m, \varphi_{m+1}$ deneme fonksiyonları.....	13
1.5	$[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki $\varphi_{m-1}, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}$ deneme fonksiyonları.....	17
1.6	$[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki $\varphi_{m-2}, \varphi_{m-1}, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}$ deneme fonksiyonları	20
1.7	$[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki $\varphi_{m-2}, \varphi_{m-1}, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \varphi_{m+3}$ deneme fonksiyonları	22
2.1	TG-QDBM için çözüm	43
2.2	TG-QDBM için (tam - nümerik) hata.....	43
2.3	TC-CBM için çözüm	43
2.4	TC-CBM için (tam - nümerik) hata	43
2.5	TC-QNBM için çözüm	44
2.6	TC-QNBM için (tam - nümerik) hata.....	44
3.1	Farklı zamanlardaki TG-QDBM ile çözümü: a) $h=0.005, v=0.005$ b) $h=0.001, v=0.0005$	61
3.2	Farklı zamanlardaki TC-CBM ile çözümü: a) $h=0.005, v=0.005$ b) $h=0.001, v=0.0005$	61
3.3	Farklı zamanlardaki TC-QNBM ile çözümü: a) $h=0.005, v=0.005$ b) $h=0.001, v=0.0005$	62
3.4	$t=3.1$ deki TG-QDBM ile çözümü için hata grafikleri: a) $h=0.005, v=0.005$ b) $h=0.001, v=0.0005$	64
3.5	$t=3.1$ deki TC-CBM ile çözümü için hata grafikleri: a) $h=0.005, v=0.005$ b) $h=0.001, v=0.0005$	64

ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam Ediyor)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>	
3.6	t=3.1deki TC-QNBM ile çözümü için hata grafikleri: a) h=0.005, v=0.005 b) h=0.001, v=0.0005.....	65
3.7	t=3.1 ve $0 \leq x \leq 1.2$ için TG-QDBM ile çözümünün hata grafiği.....	66
3.8	t=3.1 ve $0 \leq x \leq 1.2$ için TC-CBM ile çözümünün hata grafiği.....	67
3.9	t=3.1 ve $0 \leq x \leq 1.2$ için TC-QNBM ile çözümünün hata grafiği.....	67
3.10	TG-QDBM ile çözümü: a) v=0.001, b) v=0.01.....	68
3.11	TG-QDBM ile çözümü için hata grafiği: a) v=0.001, b) v=0.01.....	69
3.12	TC-CBM ile çözümü için hata grafiği: a) v=0.001, b) v=0.01.....	69
3.13	TC-QNBM ile çözümü için hata grafiği: a) v=0.001, b) v=0.01.....	70
4.1	0 dan 3'e tek dalganın hareketi.....	90
4.2	TG-QDBM için Maxwellian başlangıç koşulu: a) $\mu=0.04$ b) $\mu=0.01$	92
4.3	TG-CBM için Maxwellian başlangıç koşulu: a) $\mu=0.04$ b) $\mu=0.01$	92
4.4	TC-QNBM için Maxwellian başlangıç koşulu: a) $\mu=0.04$ b) $\mu=0.01$	93
4.5	$\epsilon=1.0$, $\mu=0.001$, $h=0.025$, $\Delta t=0.005$ ve $t=12.5$ de TG-QDBM için Maxwellian başlangıç koşulu.....	96
4.6	Keyfi bir başlangıç çarpmasının soliton dizisi.....	99

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
1.1	Bir bağımsız değişkenli sonlu fark yaklaşımları 4
1.2	Liner sonlu fark operatörlerinin tanımlanması 5
1.3	Düğüm noktalarında kuadratik B-spline değerleri 12
1.4	Düğüm noktalarında kübik B-spline değerleri 16
1.5	Düğüm noktalarında kuartik B-spline değerleri 19
1.6	Düğüm noktalarında kuintik B-spline değerleri 21
2.1	$\alpha=0.5$ m/s ve $\Delta t=50$ s ve farklı C_r sayıları için $t=9600$ s deki tam ve sayısal çözüm 45
2.2	$\alpha=0.01$ m/s, $\lambda=0.002$ m ² /s, $C_r=0.6$, $\Delta t=60$ s ve $t=3000$ s için tam ve sayısal çözüm 46
3.1	Farklı zamanlardaki sonuçların karşılaştırılması: $\Delta t=0.01$, $0 \leq x \leq 1$ 63
3.2	Farklı zamanlardaki sonuçların karşılaştırılması: $\Delta t=0.01$, $0 \leq x \leq 1.2$ 66
3.3	Farklı zamanlardaki sonuçların karşılaştırılması $h=0.005$, $\Delta t=0.01$ 71
4.1	$h=0.01$, $\Delta t=0.005$, $t=3$ de TG-QDBM için için tek dalga problemi 88
4.2	$h=0.01$, $\Delta t=0.005$, $t=3$ de TG-CBM için tek dalga problemi 88
4.3	$h=0.01$, $\Delta t=0.005$, $t=3$ de TC-QNBM için tek dalga problemi 89
4.4	Tek dalga çözümü için L_2 hata normu $\times 10^3$ 91
4.5	TG-QDBM için Maxwellian değerleri $\varepsilon=1.0$ 93
4.6	TG-CBM için Maxwellian değerleri $\varepsilon=1.0$ 94
4.7	TC-QNBM için Maxwellian değerleri $\varepsilon=1.0$ 94
4.8	Farklı μ değerleri için en büyük solitonun genliği ve hızı 95
4.9	$\varepsilon=1.0$ ve $\mu=0.001$ için korunum sabitleri 97
4.10	$\varepsilon=0.2$ ve $\mu=0.1$ için korunum sabitleri 98
4.11	$\varepsilon=0.2$, $\mu=0.1$ için en büyük solitonun genliği ve hızı 98

KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
TG	Taylor-Galerkin
TC	Taylor-Kollokasyon
TG-QDBM	Taylor-Galerkin Kuadratik B-spline Metodu
TC-CBM	Taylor-Kollokasyon Kübik B-spline Metodu
TC-QNBM	Taylor-Kollokasyon Kuintik B-spline Metodu
TG-CBM	Taylor-Galerkin Kübik B-spline Metodu
KdV	Korteweg de Vries
GQS	Galerkin Kuadratik Spline
GCS	Galerkin Kübik Spline
Cr	Courant sayısı
P _c	Peclet sayısı
DD	Diğer Durumlarda

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında kullanılan iki temel metottan bahsedilmiştir. Diferensiyel denklemlerin tanım aralığının sonlu sayıda bölünme noktalarına ayrılarak her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine sonlu fark yaklaşımlarının yazıldığı sonlu farklar metodu ile diferensiyel denklemlerin çözümlerini fonksiyonel yaklaşımla veren sonlu elemanlar metotları tanıtılmıştır. Seçilen ağırlık fonksiyonlarına göre sınıflandırılan bazı özel sonlu eleman yöntemleri anlatılmıştır. Sayısal yöntemlerde taban fonksiyonları olarak kullanılan B-spline fonksiyonların tanımları verilmiş ve sahip oldukları bazı özellikler vurgulanmıştır. Bu tezin ana konusu olan Taylor-Galerkin metodundan bahsedilmiştir. Kararlılık analizlerinin yapıldığı von Neumann metodu hakkında bilgi verilmiştir. Sayısal metotların uygulanacağı adveksiyon-difüzyon, Burger ve Korteweg-de Vries denklemleri tanımlanarak, bu konuda literatürde yer alan diğer çalışmalardan bahsedilmiştir.

1.1 Sonlu Farklar Metodu

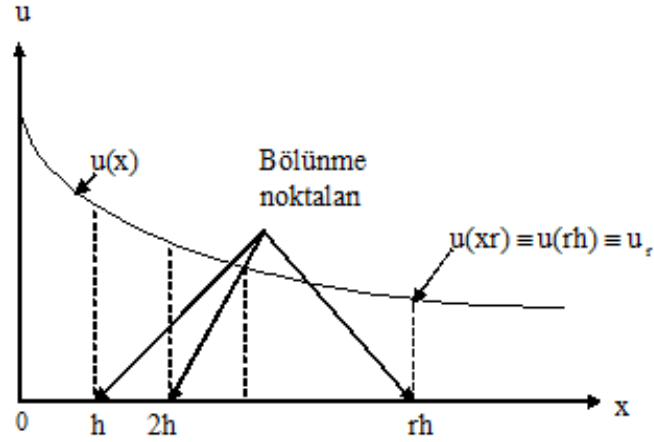
Fizik, Mühendislik ve Matematik gibi bilim dallarında karşılaşılan birçok problem, kısmi türevli diferensiyel denklemlerle modellenir. Bu tür denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılan sayısal metotlardan birisi de sonlu farklar metodudur. Bu metot, kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözüm aralığının sonlu sayıda noktaya bölünerek bu noktalar üzerinde Taylor seri açılımlarının kullanılmasıyla elde edilen bir yöntemdir.

u , x bağımsız değişkenin sürekli bir fonksiyonu olsun. Şekil 1.1 de görüldüğü gibi u fonksiyonunun tanım kümesini $x_r = x_o + rh$ noktalarında alt aralıklara bölelim. Bölünme noktalarında fonksiyon,

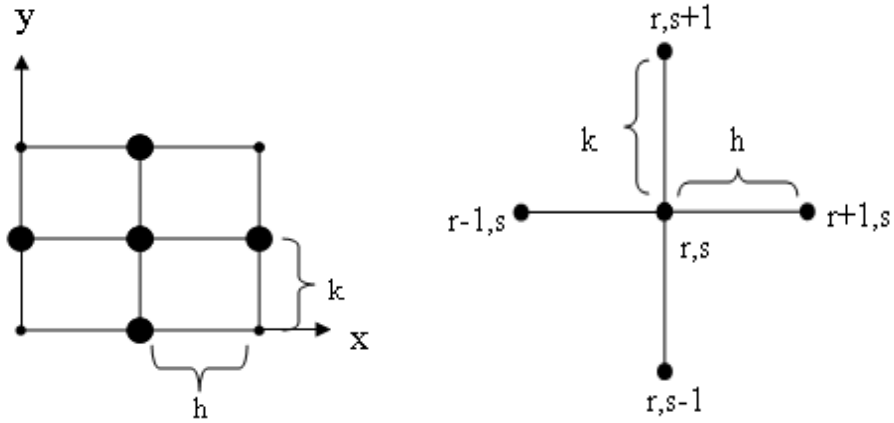
$$u(x_r) \equiv u(rh) \equiv u_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

notasyonu ile gösterilir. Bölünme noktalarının koordinatları r tamsayılarının h adım uzunluğu çarpımı ile belirlenir. r tamsayısı, x eksenini boyunca bulunan

bölünme noktalarının sayısını verir ve genellikle $r = 0$ iken $x = 0$ dır. h sabit olarak alındığında $u(rh)$ fonksiyonu u_r ile gösterilir.



Şekil 1.1. h aralığı için sonlu fark bölünmesi.



Şekil 1.2. İki boyutta sonlu fark bölünmesi.

İki boyutlu durumda Şekil 1.2 de gösterildiği gibi $u(x, y)$ fonksiyonu bölünme noktalarında

$$u(x_r, y_s) \equiv u(rh, sk) \equiv u_{r,s}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

biçiminde tanımlanır. x yönündeki adım uzunluğu h , y yönündeki adım uzunluğu k ile belirtilir. r ve s tam sayıları u fonksiyonunun sırasıyla x ve y koordinatlarındaki yerini göstermektedir. Keyfi bir (r, s) noktasma komşu bölünme noktaları; Şekil 1.2' de gösterildiği gibi

$$u_{r+1,s} \equiv u[(r+1)h, sk]$$

notasyonu ile belirtilir.

1.1.1 Taylor Seri Açılımları

Taylor seri açılımları sonlu fark metotlarının sınıflandırılmasında ve formüle edilmesinde önemli rol oynamaktadır. $u(x)$ fonksiyonunun x_r noktasındaki Taylor seri açılımı

$$u(x_r + h) = u(x_r) + hu_x|_r + \frac{h^2}{2!}u_{xx}|_r + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}|_r + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx}|_r + \dots$$

veya

$$u(x_r - h) = u(x_r) - hu_x|_r + \frac{h^2}{2!}u_{xx}|_r - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}|_r + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx}|_r + \dots$$

şeklinde. Bu denklemlerin düzenlenmesi ile

$$u_x|_r = \frac{u(x_r + h) - u(x_r)}{h} - \frac{h}{2!}u_{xx}|_r - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}|_r - \frac{h^3}{4!}u_{xxxx}|_r - \dots \quad (1.3)$$

$$u_x|_r = \frac{u(x_r) - u(x_r - h)}{h} + \frac{h}{2!}u_{xx}|_r - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}|_r + \frac{h^3}{4!}u_{xxxx}|_r - \dots \quad (1.4)$$

ifadeleri elde edilir. u fonksiyonunun x_r noktasındaki birinci türev yaklaşımı

$$u_x|_r \approx \frac{u(x_r + h) - u(x_r)}{h} \equiv \frac{u_{r+1} - u_r}{h} \quad (1.5)$$

$$u_x|_r \approx \frac{u(x_r) - u(x_r - h)}{h} \equiv \frac{u_r - u_{r-1}}{h} \quad (1.6)$$

olarak gösterilir. (1.5-1.6) ile gösterilen yaklaşımlar sırasıyla ileri fark ve geri fark yaklaşımları olarak adlandırılır. Bu yaklaşımlardan da görüldüğü gibi seriler belli bir yerden kesilmiştir. Dolayısıyla bu kesme işleminden dolayı bir hata oluşur. Bu hatalar serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir ve $O(\cdot)$ ile gösterilir. Buna göre (1.5) ve (1.6) daki türev yaklaşımlarındaki E_r hatası,

$$E_r = \pm \frac{h}{2}u_{xx}|_\xi = O(h), \quad x_r \leq \xi \leq x_r + h, \quad x_r - h \leq \xi \leq x_r$$

olarak karakterize edilebilir ve “ h ’ in kuvvetlerine göre 1. derecedendir.” denir ve $O(h)$ ile gösterilir.

(1.3), (1.4) denklemleri toplanır ve $u_x|_r$ için çözümlerse birinci türev yaklaşımının

$$u_x|_r = \frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2h} \quad (1.7)$$

biçimindeki farklı diğer bir formu elde edilir. Hata terimi ise

$$-\frac{h^2}{6} u_{xxx}|_{\xi}, \quad x_{r-1} \leq \xi \leq x_{r+1}$$

olarak bulunur. (1.7) denkleminin hata terimi $O(h^2)$ dir. (1.3) denkleminde (1.4) denklemini çıkartılırsa $u_{xx}|_r$ ’nin yaklaşık ifadesi

$$u_{xx}|_r = \frac{u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}}{h^2} \quad (1.8)$$

bulunur ve hata terimi

$$\frac{-h^2}{12} u_{xxxx}|_{\xi}, \quad x_{r-1} \leq \xi \leq x_{r+1}$$

olarak belirlenir. (1.8) denkleminin $O(h^2)$ gösterimi ile 2. dereceden hataya sahip olduğu kolaylıkla görülebilir. Tablo 1.1 de u fonksiyonunun birinci ve ikinci türevleri için sonlu fark yaklaşımları ve hata terimleri gösterilmiştir.

Tablo 1.1. Bir bağımsız değişkenli sonlu fark yaklaşımları

Türev	Sonlu Fark Yaklaşımları	Hata derecesi
$u_x _r$	$\frac{u_{r+1} - u_r}{h}$	$O(h)$
	$\frac{u_r - u_{r-1}}{h}$	$O(h)$
	$\frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2h}$	$O(h^2)$
$u_{xx} _r$	$\frac{u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}}{h^2}$	$O(h^2)$

1.1.2 Linear Sonlu Fark Operatörleri

Yaklaşık türevler lineer operatörler kullanılarak da ifade edilebilirler. Tablo 1.2 deki gösterimler fark ifadelerini basitleştirmek için kullanılır.

Tablo 1.2. Linear sonlu fark operatörlerinin tanımlanması.

Operatör	Sembol	Fark Gösterimi
İleri Fark	Δ	$\Delta u_r = u_{r+1} - u_r$
Geri Fark	∇	$\nabla u_r = u_r - u_{r-1}$
Merkezi Fark	δ	$\delta u_r = u_{r+1/2} - u_{r-1/2}$
Kaydırma	E	$E u_r = u_{r+1}$
Ortalama	μ	$\mu u_r = \frac{u_{r+1/2} + u_{r-1/2}}{2}$
Türev	D	$D u_r = \frac{du}{dx} \Big _r \equiv u_x \Big _r$

Ayrıca farklı operatörler arasında birçok bağıntılar vardır:

$$\mu \delta u_r = \frac{\delta u_{r+1/2} + \delta u_{r-1/2}}{2} = \frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2}$$

$$\begin{aligned} \delta^2 u_r &= \delta(\delta u_r) = \delta(u_{r+1/2} - u_{r-1/2}) = \delta u_{r+1/2} - \delta u_{r-1/2} \\ &= u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1} \end{aligned}$$

$$\mu \delta^3 u_r = \frac{u_{r+2} - 2u_{r+1} + 2u_{r-1} - u_{r-2}}{2}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

1.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bir çok bilim adamı, ilgilendikleri fiziksel problemlerde, fiziksel sürecin matematiksel olarak formülasyonu ve matematiksel modelin durumuna göre nümerik olarak incelenmesi üzerinde çalışırlar. Bu fiziksel süreçler, matematiksel olarak diferensiyel denklemlerle ifade edilir.

Model denklem olarak ortaya çıkan diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunması için kullanılan analitik yöntemler, bir çok problemde büyük zorlukları da beraberinde getirirler. Bu problemlerin çözümlerinin elde edilmesi ve bu çözümlerin analizlerinin yapılması noktasında sayısal yöntemler bir alternatifi temsil ederler. Sonlu farklar ve varyasyonel yöntemler çok sık kullanılan nümerik çözüm yöntemleridir.

Sonlu elemanlar yöntemi, varyasyonel yöntemlerden birisidir. Bu yöntem, yaklaşım fonksiyonlarının, problemin çözüm bölgesinin alt bölgelerinde, sistematik biçimde elde edilmesi olanağı sağlar. Sonlu elemanlar yönteminde, geometrik olarak karmaşık olan problemin çözüm bölgesinin, *sonlu elemanlar* olarak adlandırılan daha basit alt bölgelerinin bir birleşimi ile temsil edilmesi, her bir sonlu eleman üzerinde, herhangi bir sürekli fonksiyon cebirsel polinomların bir lineer kombinasyonu ile gösterilebilir olması ve belirsiz katsayılardan oluşan cebirsel bağıntıların diferensiyel denklemi sağlatarak belirlenmesi gibi özelliklerinden dolayı diğer nümerik yöntemlere göre daha çok avantaj sağlar (Reddy, 1993).

Bir diferensiyel denkleme sonlu elemanlar yönteminin uygulaması aşağıdaki gibidir.

$L[u]$, u nun türevlerini içeren genel bir diferensiyel operatörü, $U_\mu[u]$ uygun sayıda sınır koşulu, Ω çözüm bölgesi ve sınırı $\partial\Omega$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} L[u] &= r(x), & x \in \Omega, \\ U_\mu[u] &= \gamma_\mu, & x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.9}$$

sınır değer problemini dikkate alalım. Bu problemin çözümüne yapılacak yaklaşım,

$$u(x) = w(x, a_1, a_2, \dots, a_N)$$

şeklinindedir. Burada a_1, a_2, \dots, a_N bulunması gerekli olan parametrelerdir. $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]$ olarak alınır, seçilecek uygun ψ_i taban fonksiyonları için yaklaşık çözüm

$$w(x, a) = \psi_0(x) + \sum_{i=1}^N a_i \psi_i(x) \tag{1.10}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu seçim, problemin sınır koşullarını da sağlayacak şekilde olmalıdır. Bu yaklaşık çözüm, diferensiyel denklemde yerine yazılırsa

$$E[x, a] = L[w(x, a)] - r(x) \tag{1.11}$$

kalıntısı (rezidü) bulunur. Bu kalıntı, $w(x, a)$ yaklaşım fonksiyonunun diferensiyel denklemi sağlama ölçütünü bize verir. Yapılan yaklaşımdaki ψ_i fonksiyonlarının sayısı olan N büyüdükçe $E[x, a]$ kalıntısının da küçülmesi beklenir. Bu kalıntı doğrudan sıfır olduğunda ise tam çözüm elde edilir. Kalıntının doğrudan sıfır olmasını sağlamak zor olduğundan, sayısal yaklaşım yöntemlerinde $E[x, a]$ kalıntısını mümkün olduğunca küçük yapacak yollar aranır. Sonlu elemanlar yönteminde bunun için kalıntının ağırlıklı integrali olan

$$(\phi_j, E[x, a]) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1.12)$$

ifadesi sıfıra eşitlenir. Burada, $(\phi_j, E[x, a])$ bir iç çarpım olup,

$$(\phi, E) = \int_{\Omega} \phi \cdot E \, dx$$

şeklinde tanımlanır. ϕ_j ise bir ağırlık fonksiyonudur. Eğer $w(x, a)$ çözümü bir tam çözüm ise (1.12) ifadesi, ağırlık fonksiyonu nasıl seçilirse seçilsin sıfır olacaktır. Ağırlık fonksiyonlarının seçimi için değişik alternatifler vardır ve bu seçimlerin her birisi yaklaşık metot üzerinde farklı bir sonlu eleman yöntemine karşılık gelir. Ağırlık fonksiyonları belirlenip metoda uygulandığında N bilinmeyenli bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem uygun yöntemler kullanılarak çözülebilir. Buradan elde edilen çözümlerin, (1.10) denkleminde yerlerine yazılmasıyla da (1.9) ile verilen diferensiyel denklemin yaklaşık çözümü bulunmuş olur.

1.2.1 Kollokasyon Yöntemi

x_1, x_2, \dots, x_N noktaları, Ω bölgesinde N tane nokta olsunlar. Kollokasyon metodunda, (1.12) ifadesindeki ağırlık fonksiyonu, $\delta(x)$ dirac delta fonksiyonu olmak üzere, $\phi_j = \delta(x - x_j)$ biçiminde seçilir. Dirac delta fonksiyonu,

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - \xi) \, dx = f(\xi)$$

olarak tanımlanır (Reddy, 1993). Ağırlık fonksiyonlarının seçimiyle (1.12) ifadesinden elde edilecek denklemler

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_j) \cdot E[x, a] \, dx = 0 \quad (1.13)$$

şeklinde olur. Dirac delta fonksiyonu, verilen noktaların dışında sıfır olduğundan (1.13) denklemi

$$E[x_j, a] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

formuna indirgenir. Bu ise $E[x, a]$ kalıntısının Ω bölgesinden seçilen N tane noktada sıfır olarak alınması yani elde edilen yaklaşık çözümün seçilen noktalarda tam çözüm olması demektir. N tane kollokasyon noktasının seçimi keyfi olmakla beraber eşit uzaklıktaki noktaların seçilmesi yaygın kullanımdır (Reddy, 1993).

Kollokasyon yönteminde, sadece bölünme noktalarında hesaplama yapılır. Bu nedenle kısa sürede hesaplama yapılmasına olanak sağladığından diğer yöntemlere göre daha ekonomik olduğu söylenebilir.

1.2.2 Galerkin Yöntemi

Galerkin metodu, sonlu elemanlar metotlarının içinde en çok kullanılan metottur. Bu metodun uygulanışında, diferensiyel denklemin yaklaşık çözümü $w(x, a)$ olmak üzere bu yöntem, (1.12) denklemindeki ağırlık fonksiyonlarının

$$\phi_j = \psi_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

şeklinde seçilmesi esasına dayanır. Böylece (1.12) ifadesi

$$\int_{\Omega} \psi_j(x) \cdot E[x, a] dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

halini alır. Buradan elde edilecek cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]$ bilinmeyenleri bulunmuş olur (Reddy, 1993).

1.3 B-spline Fonksiyonlar

Fizik, Kimya, Mühendislik Bilimlerinde ve Matematik'in çeşitli konularında problemlerin çözümlerinde kullanılan yöntemlerden biriside fonksiyonel yaklaşım yöntemleridir. Özellikle de polinom yaklaşımı fonksiyonel yaklaşım yöntemlerinde büyük yarar sağlar. Bir yaklaşım fonksiyonunun belirlenmesinde verilen nokta sayısı ne kadar fazla ise polinom o kadar yüksek dereceden olur. Bu durum fonksiyonlarda

büyük salımlara sebep olacağından hatalı sonuçlara yöneltebilir. Alternatif yaklaşım ise, aranan fonksiyonu temsil edecek şekilde verilen noktaların kümesine daha düşük dereceden parçalı polinomlarla yaklaşmak ve işlem kolaylığı sağlamaktır. Burada yapılan işlem $[x_1, x_n]$ aralığını küçük aralıklara parçalayarak her bir parça üzerinde düşük dereceden polinomlar kullanılarak, aranan fonksiyona yaklaşılmaktadır. Bu tür özelliklere sahip parçalı polinoma spline fonksiyonlar adı verilir.

Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır. Spline fonksiyonlar uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır. El ve bilgisayar hesaplamalarında spline fonksiyonlar kullanışlıdır. Spline fonksiyonların hem türevleri hem de integralleri yine spline fonksiyonlardır. Çözüm bölgesi üzerinde sürekli her fonksiyon, m . dereceden bir spline fonksiyon ile temsil edilebilir. Küçük dereceden spline fonksiyonlar çok esnekler ve polinomlardaki gibi salınım yapmazlar.

$s(x)$, spline fonksiyonları gösterebilir. x_1, x_2, \dots, x_n reel sayıların monoton artan bir dizisi olmak üzere m . dereceden spline fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- a. $s(x)$, her $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında m . yada daha küçük dereceden bir polinomdur.
- b. $s(x)$, $m - 1$. mertebeden türevlenebilir ve türevleri x_1, x_2, \dots, x_n bölünme noktalarında süreklidir.

$m = 0$ için (b) koşulu geçersizdir. $m = 1$ için spline fonksiyonu lineer bir fonksiyondur ve verilen aralıkta kırık çizgiyi gösterir. Ayrıca spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır (smooth function) ve bu fonksiyonların hesaplanmaları kolaydır.

B-spline fonksiyonlar da spline fonksiyonlardır. Ancak polinom derecesi, düzgünlük ve çözüm bölgesinin parçalanmasına göre, B-spline fonksiyonlar, minimal desteğe (support) sahip fonksiyonlardır. Belirli derecede ve düzgünlükteki her spline fonksiyon aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu ile temsil edilebilir (de Boor, 1978). Bu nedenle de B-spline fonksiyonlar, spline fonksiyonlar için bir taban oluştururlar. Aynı zamanda bir B-spline fonksiyonu Bézier eğrilerinin de bir genelleştirmesidir. B-spline terimi, ilk defa *basis spline* kelimesinin kısaltması olarak Isaac Jacob Schoenberg tarafından kullanılmıştır.

B-spline fonksiyonların tanımlanması bir kaç yolla yapılabilir. 0. dereceden B-spline fonksiyonu,

$$B_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{DD} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (de Boor, 1978). Bu adım fonksiyonunun kullanılmasıyla daha yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar ardışık olarak,

$$B_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x)$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

formülüyle hesaplanır. Böylece tanımlanan B-spline fonksiyonlar, $[x_0, x_N]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir taban oluşturmaktadır (Prenter, 1975). Yukarıdaki tanımlamadan da görüldüğü gibi B-spline fonksiyonlar, eşit uzunluklu alt aralıklar üzerinde tanımlanabileceği gibi çözüm bölgesi üzerinde eşit dağıtılmamış noktalar üzerinde de tanımlanabilir.

1.3.1 Linear B-spline Fonksiyonlar

Herhangi bir $[a, b]$ aralığını $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ şeklinde $n + 1$ tane nokta ile bölelim. $x_{-m}, x_{-m+1}, \dots, x_{-1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ noktalarında, $[a, b]$ aralığının dışında kalan noktalar olsun. $[x_{-m}, x_{n+m}]$ üzerinde tanımlı

$$B_k(t) = \frac{1}{h^{m-1}} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} (x_{i-m+k+1} - t)_+^m, \quad k = -1, 0, \dots, n+m-2$$

m . dereceden spline fonksiyonları vardır. Burada her $k = -1, 0, \dots, n+m-2$ için $t < x_{-m+k+1}, x > t_{k+2}$ olduğunda $B_k(t) = 0$ ve

$$(x_{i-m+k+1} - t)_+^m = \begin{cases} (x_{i-m+k+1} - t)^m & , t \leq x_{i-m+k+1} \\ 0 & , t > x_{i-m+k+1} \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır. $B_{-1}(t), B_0(t), \dots, B_{n+m-2}(t)$ fonksiyonlarına m . dereceden B-spline fonksiyonlar denir.

L_m linear B-spline fonksiyonu, $h = (x_{m+1} - x_m)$ için

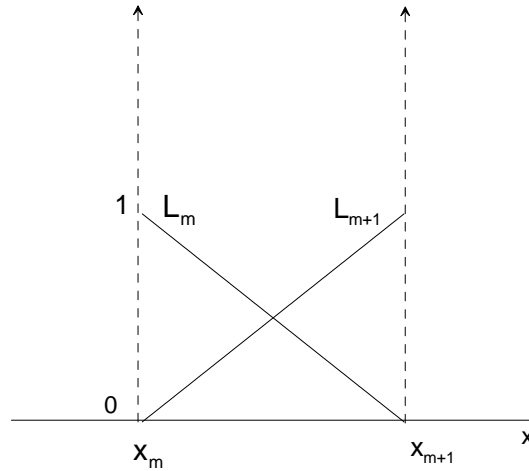
$$L_m = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x), & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{DD} \end{cases} \quad (1.14)$$

biçiminde tanımlanmıştır (Prenter, 1975). Lineer spline fonksiyonlar $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığının dışında sıfırdır. L_m spline fonksiyonu $x_{m-1} \leq x \leq x_{m+1}$ aralığında değer alır. Dolayısıyla L_m ve L_{m+1} spline fonksiyonları $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki sonlu elemanları kapsar.

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı için $h\xi = x - x_m$, $0 \leq \xi \leq 1$ dönüşümü ile tanımlı yerel koordinat sistemi yardımıyla, Şekil 1.3 de görüldüğü gibi deneme fonksiyonları

$$L^e = (L_m, L_{m+1}) = (1 - \xi, \xi)$$

elde edilebilir.



Şekil 1.3. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanında L_m , L_{m+1} deneme fonksiyonları

Bir U fonksiyonunun $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki değişimi

$$U = L^e \cdot d^e = (1 - \xi, \xi)(\delta_m, \delta_{m+1})^T$$

olarak bulunur. Buradaki $d^e = (\delta_m, \delta_{m+1})^T$ bilinmeyen parametreler ve $L^e = (L_m, L_{m+1})$ deneme fonksiyonları olarak bilinir. $x = x_m$ düğüm noktasındaki U_m

değeri δ_m parametreleri cinsinden

$$U_m = \delta_m$$

olarak elde edilir. Böylece lineer B-spline elemanları için $U(x, t)$ fonksiyonunun düğüm noktadaki değerleri ile δ_m parametreleri özdeştir (Ali, 1991).

1.3.2 Kuadratik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığını, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. Bu alt aralıklar üzerinde oluşturulan kuadratik B-spline fonksiyonları, $m = -1, 0, \dots, N$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

$$\phi_m = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{DD} \end{cases} \quad (1.15)$$

biçiminde tanımlanır (Prenter, 1975).

ϕ_m kuadratik B-spline fonksiyonu ve bu fonksiyonun birinci türevi $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. $\{\phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N\}$ kuadratik B-spline fonksiyonları, bu aralıkta tanımlı fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Tablo 1.3 de ϕ_m ve onun x 'e göre türevi olan ϕ_m' 'nin belirli düğüm noktalarındaki değerleri verilmiştir.

Tablo 1.3. Düğüm noktalarında kuadratik B-spline değerleri

	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
ϕ_m	0	1	1	0
$h\phi_m'$	0	2	-2	0

Sadece ardışık üç aralık üzerinde bir ϕ_m spline fonksiyonu tanımlıdır. Böylece ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} spline fonksiyonları $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde değer alır. Diğer tüm spline'lar bu aralıkta sıfırdır.

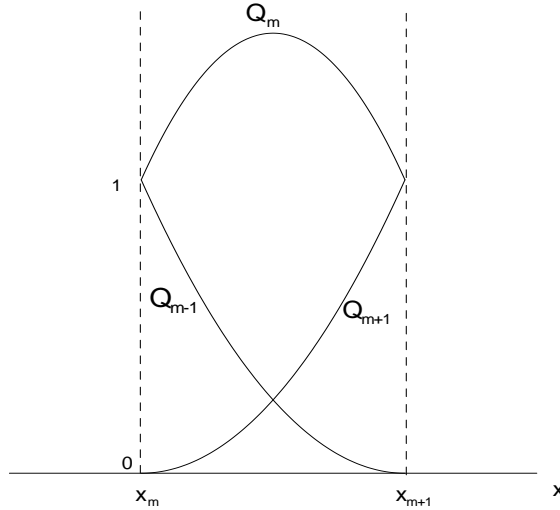
$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı için $h\xi = x - x_m$, $0 \leq \xi \leq 1$ ile bir yerel koordinat sistemi tanımlanırsa deneme fonksiyonlarının elemanları bu koordinat sistemi cinsinden

$$\phi^e = (\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}) = (1 - 2\xi + \xi^2, 1 + 2\xi - 2\xi^2, \xi^2) \quad (1.16)$$

elde edilir. (1.16) fonksiyonları, sonlu eleman yaklaşımları için kullanılan $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki kuadratik B-spline gösterimleridir ve deneme fonksiyonları olarak isimlendirilir. Her eleman için aynı olan bu deneme fonksiyonları Şekil 1.4 de gösterilmiştir. Bir U fonksiyonunun $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki ifadesi

$$\begin{aligned} U &= \phi_{m-1}\delta_{m-1} + \phi_m\delta_m + \phi_{m+1}\delta_{m+1} = \phi^e \cdot d^e \\ &= (1 - 2\xi + \xi^2, 1 + 2\xi - 2\xi^2, \xi^2) \cdot d^e \end{aligned} \quad (1.17)$$

ile bulunur. Burada $d^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})^T$ bilinmeyen parametreleri $\phi^e = (\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1})$ deneme fonksiyonlarıdır.



Şekil 1.4. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$ deneme fonksiyonları.

$x = x_m$ noktasındaki U_m ve U'_m nodal değerleri δ_m parametresi ile

$$U_m = \delta_m + \delta_{m-1} \quad (1.18)$$

$$hU'_m = 2(\delta_m - \delta_{m-1}) \quad (1.19)$$

biçiminde yazılabilir. $U(x, t)$ fonksiyonuna genel yaklaşım fonksiyonu olarak belirlenen $U_N(x, t)$ ifadesi, deneme fonksiyonları olarak kuadratik B-spline fonksiyonları kullanılarak

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^N \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (1.20)$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki δ_m ' ler zamana bağlı parametrelerdir. (1.20) formunda bir $U(x)$ fonksiyonunun bulunabilmesi için fonksiyonda gösterilen bilinmeyen $d = (\delta_{-1}, \dots, \delta_N)$ vektörü belirlenmelidir. Bunun için

$$U_N(x) = \phi \cdot d = \sum_{m=-1}^N \delta_m \phi_m(x) \quad (1.21)$$

denkleminde $U_N(x)$ yaklaşımı şu koşulları sağlamalıdır (Ali, 1991):

- a) x_0, \dots, x_N noktalarında $U(x)$ fonksiyonu ile aynı değerleri almalıdır. Dolayısıyla $N + 1$ koşul oluşur.
- b) x_0 noktasındaki $U(x)$ fonksiyonun türev değeri ile $U_N(x)$ yaklaşık fonksiyonun türev değeri aynı olmalıdır. Yani $U'_N(x_0) = U'(x_0)$ olur.

Başlangıç koşulları uygulandığında

$$\begin{aligned} \delta_0 - \delta_{-1} &= \frac{hU'(x_0)}{2} \\ \delta_0 + \delta_{-1} &= U(x_0) \\ \delta_0 + \delta_1 &= U(x_1) \\ &\vdots \\ \delta_{N-1} + \delta_N &= U(x_N) \end{aligned} \quad (1.22)$$

denklemleri elde edilir. İlk iki denklemden δ_{-1} ve δ_0

$$\delta_{-1} = \frac{2U(x_0) - hU'(x_0)}{4}, \quad \delta_0 = \frac{2U(x_0) + hU'(x_0)}{4}$$

olarak bulunur. (1.22) denklem sistemi δ_{-1} yok edilerek matris formunda düzenlenirse

$$Md = b$$

matris denklemleri elde edilir. Burada

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$d = (\delta_0, \dots, \delta_N)^T$ ve

$$b = \left(\frac{2U(x_0) + hU'(x_0)}{4}, U(x_1), \dots, U(x_N) \right)^T$$

dir. Bu denklem sisteminden $U_m = U(x_m)$ olmak üzere

$$\delta_m = U_m - \delta_{m-1}, \quad m = 1, \dots, N$$

elde edilir. Böylece bulunan d vektörü (1.21) formundaki $U(x)$ açılımında yerine yazılır (Ali, 1991).

1.3.3 Kübik B-spline Fonksiyonlar

Bir $[a, b]$ aralığı için x_0, \dots, x_N bölünme noktaları ve $h = (x_{m+1} - x_m)$ olmak üzere ϕ_m kübik B-spline fonksiyonları

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & DD \end{cases} \quad (1.23)$$

biçiminde tanımlanır (Prenter, 1975). $\phi_m(x)$, $x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}$ ve x_{m+2} noktalarındaki kübik B-spline değerleridir. ϕ_m spline fonksiyonu ve ilk iki türevi $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. Düğüm noktalarındaki $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ değerleri Tablo 1.4 de verilmiştir.

Tablo 1.4. Dügüm noktalarında kübik B-spline değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
ϕ_m	0	1	4	1	0
$h\phi'_m$	0	3	0	-3	0
$h^2\phi''_m$	0	6	-12	6	0

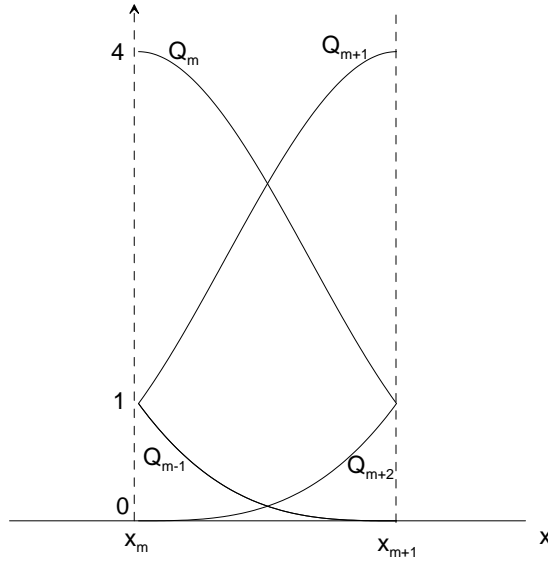
(1.23) ile verilen kübik B-spline fonksiyonunun ardışık 4 komşu eleman üzerinde sıfırdan farklı, diğer yerlerde sıfır olduğu görülmektedir. Şekil 1.5 de gösterildiği gibi her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ kübik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür. Bir U fonksiyonunun $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki açılımı

$$U^e = \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j(t) = \phi^e \cdot d^e \quad (1.24)$$

biçimindedir. Burada $\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}$ eleman parametreleri ve $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ deneme fonksiyonlarıdır. $\{\phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}\}$ kümesi $[a, b]$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir taban oluşturur. $0 \leq \xi \leq 1$ olmak üzere $h\xi = x - x_m$ yerel koordinat dönüşümü yardımıyla, spline fonksiyonlar, genel eleman parametrelerinden bağımsız olarak

$$\phi^e = (1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3, 4 - 6\xi^2 + 3\xi^3, 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3, \xi^3)^T \quad (1.25)$$

biçiminde ifade edilebilir.



Şekil 1.5. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ deneme fonksiyonları.

$x = x_m$ noktasında U_m, U'_m, U''_m değerleri δ_m terimleriyle

$$U_m = \delta_{m+1} + 4\delta_m + \delta_{m-1} \quad (1.26)$$

$$hU'_m = 3(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \quad (1.27)$$

$$h^2U''_m = 6(\delta_{m+1} - 2\delta_m + \delta_{m-1}) \quad (1.28)$$

olarak bulunur.

$U(x, t)$ fonksiyonuna genel yaklaşım fonksiyonu, ϕ_m kübik B-spline deneme fonksiyonlarına bağlı olarak

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (1.29)$$

formunda ifade edilir. Burada δ_m ' ler sınır ve interpolasyon koşullarından belirlenecek zamana bağlı büyüklüklere dir. $U_N(x)$ fonksiyonundaki $d = (\delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1})$ bilinmeyenleri aşağıdaki şekilde bulunur. (1.29) ifadesi kullanılarak δ_m parametreleri belirlenir. $U_N(x)$ yaklaşım fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlamalıdır:

- a)** $x_m, m = 0, \dots, N$ noktalarında $U(x)$ fonksiyonu ile aynı değerleri almalıdır, dolayısıyla $N + 1$ koşul oluşur.

$-2, \dots, N + 1$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{DD} \end{cases} \quad (1.32)$$

biçiminde tanımlanır

Kuartik B-spline fonksiyonlarının düğüm noktalarındaki değerleri ve üçüncü mertebeye kadar olan türev değerleri Tablo 1.5' de verilmiştir. Şekil 1.6' da görüldüğü gibi her bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı ardışık 5 spline ile örtülür.

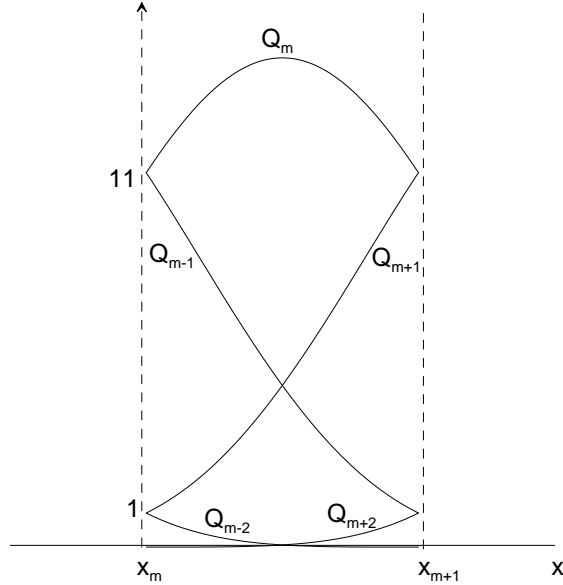
Tablo 1.5. Düğüm noktalarında kuartik B-spline değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	11	11	1	0
$h\phi'_m$	0	4	12	-12	-4	0
$h^2\phi''_m$	0	12	-12	-12	12	0
$h^3\phi'''_m$	0	24	-72	72	-24	0

$0 \leq \xi \leq 1$ ve $h\xi = x - x_m$ yerel koordinat dönüşümü yardımıyla spline fonksiyonlar genel eleman parametrelerinden bağımsız olarak

$$\begin{aligned} \phi_{m-2} &= 1 - 4\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4 \\ \phi_{m-1} &= 11 - 12\xi - 6\xi^2 + 12\xi^3 - 4\xi^4 \\ \phi_m &= 11 + 12\xi - 6\xi^2 - 12\xi^3 + 6\xi^4 \\ \phi_{m+1} &= 1 + 4\xi + 6\xi^2 + 4\xi^3 - 4\xi^4 \\ \phi_{m+2} &= \xi^4 \end{aligned} \quad (1.33)$$

biçiminde ifade edilebilir.



Şekil 1.6. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ deneme fonksiyonları.

$[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde $U(x, t)$ fonksiyonun değişimi

$$U(x, t) = \phi^e \cdot d^e = (\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}) \cdot (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T \quad (1.34)$$

formundadır. x_m düğüm noktalarındaki U_m, U'_m, U''_m, U'''_m nodal değerleri δ_m parametresi ile

$$\begin{aligned} U_m &= \delta_{m+1} + 11\delta_m + 11\delta_{m-1} + \delta_{m-2} \\ hU'_m &= 4(\delta_{m+1} + 3\delta_m - 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \\ h^2U''_m &= 12(\delta_{m+1} - \delta_m - \delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \\ h^3U'''_m &= 24(\delta_{m+1} - 3\delta_m + 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Kollokasyon metodu uygulanırken, kollokasyon noktaları elemanların bölünme noktaları olarak alınır ve kuartik B-spline interpolasyon fonksi-

yonları, kısmi türevli diferensiyel denklemin üçüncü mertebeye kadar olan türevleri ve yukarıda verilen kollokasyon noktalarındaki değerleri ile kullanılır (Ali, 1991).

1.3.5 Kuintik B-spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığını, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. Bu alt aralıklar üzerinde oluşturulan kuintik B-spline fonksiyonları, $m = -2, 0, \dots, N + 2$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

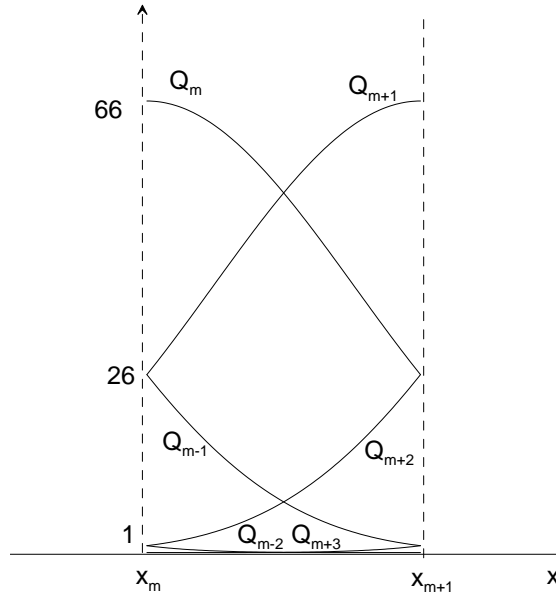
$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{DD} \end{cases} \quad (1.35)$$

biçiminde tanımlanır (Prenter, 1975). $\phi_m(x)$, x_m düğüm noktalarındaki kuintik B-spline değerleridir.

Tablo 1.6. Düğüm noktalarında kuintik B-spline değerleri

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	26	66	26	1	0
$h\phi'_m$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\phi''_m$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\phi'''_m$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4\phi^{iv}_m$	0	120	-480	720	-480	120	0

$\phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonu ve üçüncü mertebeye kadar olan türevleri $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır. Tablo 1.6 da $\phi_m(x)$ fonksiyonun ve türevlerinin düğüm noktadaki değerleri verilmiştir. Şekil 1.7 de gösterildiği gibi her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}$ kuintik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür. Bu aralıkta diğer B-spline fonksiyonları sıfırdır.



Şekil 1.7. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}$ deneme fonksiyonları.

$0 \leq \xi \leq 1$ olmak üzere $h\xi = x - x_m$ yerel koordinat dönüşümü yardımıyla kuintik

B-spline fonksiyonlar, genel eleman parametrelerinden bağımsız olarak

$$\begin{aligned}
\phi_{m-2} &= 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5 \\
\phi_{m-1} &= 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 - 20\xi^4 + 5\xi^5 \\
\phi_m &= 66 - 60\xi^2 + 30\xi^4 - 10\xi^5 \\
\phi_{m+1} &= 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 + 10\xi^5 \\
\phi_{m+2} &= 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5 \\
\phi_{m+3} &= \xi^5
\end{aligned} \tag{1.36}$$

biçiminde ifade edilebilir. $U(x, t)$ fonksiyonunun $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki değişimi

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= \phi^e . d^e = (\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}) \cdot \\
&\quad (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}, \delta_{m+3})^T
\end{aligned} \tag{1.37}$$

biçimindedir. Burada x_m noktalarındaki $U_N(x, t)$ ve 4. mertebeye kadar olan türevleri

$$U_m = \delta_{m+2} + 26\delta_{m+1} + 66\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2} \tag{1.38}$$

$$hU'_m = 5(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \tag{1.39}$$

$$h^2U''_m = 20(\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \tag{1.40}$$

$$h^3U'''_m = 60(\delta_{m+2} - 2\delta_{m+1} + 2\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \tag{1.41}$$

$$h^4U^{iv}_m = 120(\delta_{m+2} - 4\delta_{m+1} + 6\delta_m - 4\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \tag{1.42}$$

formunda verilmiştir (Gardner et al, 1990 c). Kuintik B-spline fonksiyonu ve dördüncü mertebeye kadar olan türevleri bölünme noktalarında süreklidir. Kuintik B-spline sonlu elemanlar C^4 tipinde sürekliliğe sahip fonksiyonlardır. 4. basamaktan türevleri içeren kısmi türevli diferensiyel denklemlere kuintik B-spline kollokasyon yöntemi uygulanabilir.

$\{\phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}\}$ fonksiyonlarının kümesi $[a, b]$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılarak $U(x, t)$ fonksiyonu için genel yaklaşım fonksiyonu $U_N(x, t)$

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \tag{1.43}$$

şeklinde yazılır. Burada δ_m ' ler zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir. $U_N(x, t)$ fonksiyonundaki $d = (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})$ vektörünün belirlenmesi için $U_N(x)$ yaklaşımı

$$U_N(x) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m \quad (1.44)$$

aşağıdaki koşulları sağlamalıdır (Prenter, 1975) :

- a) Düğüm noktalarında $U(x)$ fonksiyonu ile aynı değerleri almalıdır, dolayısıyla $N + 1$ koşul oluşur.
- b) Sınırlarda $U_N(x)$ yaklaşım fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri, $U(x)$ fonksiyonun türev değerleri ile aynı olmalıdır: $U'(x_0) = \alpha_1$, $U'(x_N) = \alpha_2$, $U''(x_0) = \beta_1$, $U''(x_N) = \beta_2$.

Bu koşullar uygulandığında

$$\begin{aligned} \frac{h}{5} \alpha_1 &= \delta_2 + 10\delta_1 - 10\delta_{-1} - \delta_{-2} \\ \frac{h^2}{20} \beta_1 &= \delta_2 + 2\delta_1 - 6\delta_0 + 2\delta_{-1} + \delta_{-2} \\ U(x_0) &= \delta_2 + 26\delta_1 + 66\delta_0 + 26\delta_{-1} + \delta_{-2} \\ &\vdots \\ U(x_N) &= \delta_{N+2} + 26\delta_{N+1} + 66\delta_N + 26\delta_{N-1} + \delta_{N-2} \\ \frac{h}{5} \alpha_2 &= \delta_{N+2} + 10\delta_{N+1} - 10\delta_{N-1} - \delta_{N-2} \\ \frac{h^2}{20} \beta_2 &= \delta_{N+2} + 2\delta_{N+1} - 6\delta_N + 2\delta_{N-1} + \delta_{N-2} \end{aligned} \quad (1.45)$$

biçimindeki denklem sistemi elde edilir. Burada δ_{-2}, δ_{-1} parametreleri ilk iki denklemden, δ_{N+1} ve δ_{N+2} parametreleri son iki denklemden yok edilerek (1.45) denkleminde yerine yazılırsa

$$Md = b$$

(Donea et.al, 1992). Bazı kısmi türevli diferensiyel denklemlerin zamana göre Taylor seri açılımlarında konuma göre ayrıştırılmasında wavelet taban fonksiyonlarını kullanarak wavelet-Taylor Galerkin metodu geliştirilmiştir (Kumar and Mehra, 2005). Taylor-Galerkin algoritmaları, kirliliğin taşınması, sığ su problemleri, akışkanlar dinamiği, katı (solid) dinamiği gibi çok geniş ve çeşitli alanlardaki uygulamaları gerçekleştirilmiştir (Safjan and Oden, 1993), (Tamma and Namburu, 1988), (Zhang and Tabarrok, 1999), (Mabssout and Pastor , 2003).

1.5 von Neumann Kararlılık Analizi

von Neumann kararlılık analizi yöntemi, sonlu fark denklemlerinin kararlılıklarını göstermek için kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde sonlu fark denkleminin bir çözümü Fourier serisine açılır. Amplifikasyon faktörünün büyümesi veya küçülmesi sayısal algoritmanın kararlı olup olmadığını gösterir.

İncelenmekte olan sonlu fark denklemleri lineer Fourier serisinin sadece bir genel teriminin alınarak incelenmesi yeterli olmaktadır. Gerçekte denklemin lineer olması, von Neumann kararlılık analiz yönteminin uygulanması için genel bir zorunluluktur. Bu yöntemde ayrıca sınır koşullarının çözümün kararlılığı üzerindeki etkisinde hesaba katılmaz. Lineer olmayan denklemler yerel olarak lineerleştirildikten sonra von Neumann kararlılık analizi uygulanabilir.

Fourier serisi l aralığında tanımlı bir fonksiyon için $\sum A_n e^{in\pi x/L}$ biçiminde ifade edilebilir. $U_{i,j}$ için $U(ph, qk) = U_{p,q}$ notasyonu kullanılacaktır. Bu notasyon cinsinden Fourier serisinin genel terimi

$$A_n e^{in\pi x/l} = A_n e^{in\pi ph/Nh} = A_n e^{i\beta_n ph}, \beta_n = \frac{n\pi}{Nh}, Nh = l$$

olarak yazılabilir. $t = 0$ zamanında $x = 0$ dan Nh 'a kadar olan bölünme noktalarındaki hatayı $E(ph) = E_p$, $p = 0, 1, 2, \dots, N$ ile belirtelim. $(N + 1)$ hata denklemleri yardımıyla

$$E_p = \sum_{n=0}^N A_n e^{i\beta_n ph}, p = 0, 1, \dots, N$$

A_0, A_1, \dots, A_n $(N + 1)$ bilinmeyenleri belirlenebilir. Başlangıçtaki hata dağılımı kompleks üstel formda yukarıdaki gibi ifade edilebilir. Sonlu fark denklemlerinin

lineer olması gerektiğinden ve ayrıık çözümler toplanabilir olduğundan $e^{i\beta_n ph}$ gibi sadece bir tek terimin hatasının yayılımını düşünebiliriz. A_n katsayısı sabittir ve ihmal edilebilir. t arttığında hatanın dağılımını incelemek için $t = qk = 0$ olduğu zaman $e^{i\beta ph}$ indirgenebilen sonlu fark denkleminin çözümünü bulmak yeterlidir.

$$E_{p,q} = e^{i\beta x} e^{\alpha t} = e^{i\beta ph} e^{\alpha qk} = e^{i\beta ph} \xi^q.$$

Burada $\xi = e^{\alpha k}$ ve α bir kompleks sayıdır. $q = 0$ olduğu zaman $E_{p,q} = e^{i\beta ph}$ a indirgenir. Bu durum

$$|\xi| \leq 1$$

şartı ile sağlanır. Böylece t artırılırken hata artmayacaktır (Smith, 1978).

Bu metot sabit katsayılı lineer fark denklemlerine uygulanabilir ve ayrıca periyodik başlangıç verileri içeren başlangıç değer problemi olmalıdır. $|\xi| \leq 1$ koşulu iki bağımsız değişkenli fark denklemleri için gerek ve yeter koşuldur.

1.6 Test Problemleri

Bir sayısal metodun doğruluğunun ve etkinliğinin belirlenmesi için kullanılan en etkili sayısal yöntem; analitik çözümlerin bulunduğu durumlarda sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın yani hatanın ölçülmesidir. Sayısal metodun doğruluğunu ölçmek için sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki fark

$$L_\infty = \|U^{tam} - U^{nümerik}\|_\infty = \max |U_j^{tam} - U_j^{nümerik}|$$

ve

$$L_2 = \|U^{tam} - U^{nümerik}\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N (U_j^{tam} - U_j^{nümerik})^2}$$

hata normları kullanılarak hesaplanır.

1.6.1 Adveksiyon-Difüzyon Denklemi

Adveksiyon-difüzyon denklemi kütle, ısı, enerji ve hız gibi birçok büyüklüğün modellenmesinde kullanılır. Bu denklemin çözümleri ile film üzerinde ısı transferi

(Isenberg and Gutfinger, 1972), sudaki kirliliğin yayılması (Parlarge, 1980), nehir ve akarsulardaki kirliliğin yayılımı (Chaudhry et. al., 1983), yeraltı sularındaki erimiş tuzların dağılımı (Guvanesen and Volker, 1983) gibi fiziksel olaylar modellenir. Bazı türdeki başlangıç ve sınır koşulları ile adveksiyon-difüzyon denkleminin analitik çözümlerini bulmak zordur. Adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümünü yaklaşık olarak bulmak için sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Böylece farklı türde başlangıç ve sınır koşulları için adveksiyon-difüzyon denkleminin çözümleri araştırılmaktadır. Adveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümlerinin bulunmasındaki sıkıntı yüksek Peclect sayısından kaynaklanmaktadır. Son yıllarda adveksiyon-difüzyon denkleminin bazı sayısal çözümleri önerilmiştir (Adey and Brebbia, 1974), (Holly and Preissmann, 1977), (Szymkiewicz, 1993). Denklemin Galerkin metodu kullanılarak kübik B-spline sonlu eleman çözümü yapılmıştır (Gardner and Dag, 1994). Dağ ve arkadaşları adveksiyon difüzyon denkleminin lineer ve kuadratik şekil fonksiyonları kullanılarak en küçük kareler metoduyla çözümünü önermişlerdir (Dag et.al, 2005). Donea, adveksiyon denklemlerine Taylor-Galerkin metodunu uygulamıştır (Donea, 1984).

Bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denklemi, t zamana ve x konuma göre değişkenleri ifade etmek üzere

$$U_t + \alpha U_x - \lambda U_{xx} = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

biçimindedir. Sıvının yoğunluğu $U(x, t)$ olmak üzere

$$U_t = -\alpha U_x + \lambda U_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L$$

denkleminde λU_{xx} terimi difüzyon ve $-\alpha U_x$ terimi adveksiyon bileşenleridir. Kirliliğin adveksiyon veya difüzyonu, α suyun akış hızına ve λ difüzyon katsayısına bağlı olarak değişir.

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

denklemin başlangıç koşulu

$$U(0, t) = f_0, \quad \lambda \frac{\partial U}{\partial x}(L, t) = -\phi_L(t)$$

sınır koşullarıdır. Burada L kanalın uzunluğu, ϕ_L , $x = L$ ve U_0 yönündeki akış, U_0 ve f_0 yük fonksiyonlarıdır (Dag et.al, 2005).

1.6.2 Burger Denklemi

Burger denklemi, herhangi sınır ve başlangıç koşulları için analitik olarak çözülebilen, az sayıdaki lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerden birisidir. Burger denklemini ilk olarak Bateman tanıtmıştır (Bateman, 1915). Daha sonra türbülansın modellenmesinde kullanılarak, Burger denklemi olarak anılmıştır (Burger, 1948). Burger denklemi, şok dalga ve sayılar teorisinde, türbülans problemlerinin modellenmesinde, elastik tüpdeki sıvı akışının ve sonlu elektrik iletkenliği olan bir ortamdaki manyetohidrodinamik dalgaların modellenmesi gibi bir çok fiziksel olayın modellenmesinde kullanılır.

Bugüne kadar birçok araştırmacı Burger denkleminin çözümü için farklı nümerik metotlar uygulamıştır. Çok küçük viskozite değerlerinde, nümerik çözümlerin yakınsaması zorlaşmaktadır. Keyfi başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak Burger denkleminin analitik çözümü elde edilmiştir (Hopf, 1950), (Cole, 1951). Kübik spline fonksiyonlar kullanılarak kollokasyon metodu ile denklemin nümerik çözümü araştırılmıştır (Rubin and Khosla, 1976). Jain ve Lohar, bir ve iki boyutlu Burger denkleminin kübik spline ve sonlu farklar metoduyla sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır (Jain and Lohar, 1979). Galerkin sonlu elemanlar metoduyla Burger denkleminin nümerik çözümü elde edilmiştir (Caldwell, 1987). Jain ve Holla, kübik spline metodu ile bir ve iki boyutlu Burger denkleminin sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır (Jain and Holla, 1978). Saka ve Dağ, problemin kuintik spline kollokasyon metodu ile çözümünü başarıyla uygulamışlardır (Saka and Dag, 2008). Burger denkleminin ardışık sonlu aralıklar üzerinde kübik B-spline fonksiyonlarıyla kollokasyon metodu kullanarak sayısal çözümü elde edilmiştir (Gardner et.al., 1990 b).

$v > 0$, kinematik viskozite olarak adlandırılan çok küçük pozitif bir parametre, x konuma ve t zamana göre değişkenleri göstermek üzere,

$$U_t + UU_x = vU_{xx}, \quad a \leq x \leq b, \quad t > 0, \quad (1.46)$$

denklemi Burger denklemi olarak bilinir. Denklemin başlangıç koşulu

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} U(a, t) &= \alpha, \quad U(b, t) = \beta, \\ U_x(a, t) &= U_x(b, t) = 0, \\ U_{xx}(a, t) &= U_{xx}(b, t) = 0 \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

olarak seçilebilir (Saka and Dag, 2008).

1.6.3 Korteweg-de Vries Denklemi (KdV)

Sığ sulardaki lineer olmayan dalgalar birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Bu dalgalar Korteweg-de Vries (KdV) denklemi ile modellenir. Böylece fizik, matematik ve mühendislik alanlarında birçok fiziksel dalga olayının modellenmesi yapılabilmektedir. Büyük okyanuslardaki Tsunami olarak bilinen dalgalar, harmonik olmayan bir kristaldeki ses dalgaları (Zabusky, 1967), sıcak plazmalardaki manyeto-hidrokinematik dalgalar (Gardner and Marikawa, 1965), iyonik ses dalgaları (Washimi and Taniuti, 1966), sığ sulardaki dalgalar (Korteweg and Vries, 1895) bunlardan bazılarıdır.

KdV denkleminin genel bir analitik çözümü yoktur, ancak denklemin bir özel çözümü olan soliton dalgalar tek dalga çarpışmasında orjinal büyüklüklerini, şekillerini ve şiddetlerini koruyan dalgalardır. Bu denklemdeki lineer olmayan terim dalganın kararlılığını dengeler. KdV denklemi ilk olarak Korteweg ve de Vries adlı iki kişi tarafından ortaya atıldığı için, denklem bu adla anılmıştır (Korteweg and Vries, 1895). Son yıllarda, KdV denkleminin çeşitli formlardaki sayısal çözümünü bulmak için sayısal yöntemler geliştirilmiştir. KdV denkleminin, uygun başlangıç koşulları altında, analitik çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir (Dodd et al, 1982), (Gardner et al, 1990 c). KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümü önerilmiştir (Greig and Morris, 1976), (Goda, 1975). Wahlbin denklemin çözümü için şekil ve deneme fonksiyonlarını aynı alarak Galerkin metodunun çözümünü vermiştir (Wahlbin, 1974). KdV denkleminin wavelet taban fonksiyonları kullanılarak

wavelet-Taylor-Galerkin metodu ile çözümlü yapılmıştır (Rathish Kumar ve Mehra, 2004). Denklem kübik spline (Gardner et.al., 1989) ve kuintik spline (Gardner et.al, 1990 a) şekil fonksiyonları kullanılarak sonlu elemanlar metoduyla çözümleri elde edilmiştir. Dağ ve arkadaşları, KdV denkleminin B-spline fonksiyonlar kullanılarak küçük zaman çözümlerini elde etmişlerdir (Dag et.al, 2006).

Sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen

$$\begin{aligned}
C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} U dx \\
C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} U^2 dx \\
C_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(U^3 - \frac{3\mu}{\varepsilon} (U')^2 \right) dx
\end{aligned} \tag{1.47}$$

korunum kanunu sabitlerinin analitik çözüm ile elde edilen sabitlerle uyumu incelenecektir. Nümerik metodun iyi sonuçlar verebilmesi için elde edilen korunum sabitlerinin zaman ilerledikçe sabit kalması beklenir.

KdV denklemi, ε ve μ pozitif parametreler, x konuma ve t zamana göre değişkenler olmak üzere

$$U_t + \varepsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0, \tag{1.48}$$

biçiminde tanımlanır. Denklem sayısal çözümlerinin bulunması sırasında, başlangıç koşulu

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

ve sınır koşulları da

$$\begin{aligned}
U(a, t) &= \beta_1, \quad U(b, t) = \beta_2, \\
U_x(a, t) &= U_x(b, t) = 0, \\
U_{xx}(a, t) &= U_{xx}(b, t) = 0
\end{aligned} \tag{1.49}$$

olarak seçilecektir (Gardner et.al., 1989) .

2. ADVEKSİYON DİFÜZYON DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, bir boyutlu adveksiyon-difüzyon denkleminin, sırasıyla kuadratik, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılarak Taylor-Galerkin ve Taylor-Kollokasyon metotları ile sayısal çözümleri araştırılmıştır. Sayısal yöntem iki örnek test problem üzerinde uygulanmış, hata normları hesaplanmıştır.

Birinci bölümde tanıtılan adveksiyon-difüzyon denkleminin, t zamana göre ve x konuma göre türevleri olmak üzere

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.1)$$

başlangıç koşulu ve

$$U(0, t) = f_0, \quad \lambda \frac{\partial U}{\partial x}(L, t) = -\phi_L(t) \quad (2.2)$$

sınır koşulları ile

$$U_t + \alpha U_x - \lambda U_{xx} = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.3)$$

sayısal çözümleri bulunacaktır.

2.1 Taylor-Galerkin Kuadratik B-spline Metodu (TG-QDBM)

$$U_t = -\alpha U_x + \lambda U_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.4)$$

biçiminde yazılan adveksiyon difüzyon denkleminin Taylor -Galerkin metodunu uygulayalım. Denklemin bilinmeyen fonksiyonunun zamana göre Taylor seri açılımı yapılarak zaman ayrıştırması yapılır. Buna göre

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t U_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} U_{tt}^n + O(\Delta t^3)$$

Taylor seri açılımında hata ihmal edilirse

$$U_t^n = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} U_{tt}^n \quad (2.5)$$

yazılabilir. (2.4) denkleminin zamana göre türevi

$$\begin{aligned} U_{tt}^n &= (-\alpha U_x^n + \lambda U_{xx}^n)_t = -\alpha(U_t^n)_x + \lambda(U_t^n)_{xx} \\ &= -\alpha\left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}\right)_x + \lambda\left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}\right)_{xx} \end{aligned} \quad (2.6)$$

olarak yazılabilir. (2.4) ve (2.6) denklemleri (2.5) de yerlerine yazılırsa

$$-\alpha U_x^n + \lambda U_{xx}^n = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \left[-\alpha\left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}\right)_x + \lambda\left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}\right)_{xx} \right]$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse, adveksiyon-difüzyon denkleminin zamana göre ayrıştırılmış denklemi

$$\left(1 + \alpha \frac{\Delta t}{2} \partial_x - \lambda \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2\right) U^{n+1} = \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{2} \partial_x + \lambda \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2\right) U^n \quad (2.7)$$

olarak elde edilir.

$[a, b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

olacak şekilde x_i , $i = 1, \dots, N$ noktasında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. $\{\phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N\}$ kuadratik B-spline fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için taban oluşturur. Bu taban fonksiyonları kullanılarak $U(x, t)$ çözümüne

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^N \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (2.8)$$

biçiminde bir yaklaşık çözüm araştırılacaktır. Burada δ_m ' ler sınır ve interpolasyon koşullarından belirlenecek zamana bağlı parametrelerdir.

(2.3) ile verilen adveksiyon-difüzyon denkleminde Taylor -Galerkin metodu uygulanacaktır. Bunun için (2.7) denklemi w ağırlık fonksiyonları ile çarpılıp, $[x_0, x_N]$ aralığı üzerinde integrali alınır,

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_N} w U^{n+1} dx + \alpha \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_x^{n+1} dx - \lambda \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_{xx}^{n+1} dx \\ &= \int_{x_0}^{x_N} w U^n dx - \alpha \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_x^n dx + \lambda \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_{xx}^n dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

bulunur. $\int_{x_0}^{x_N} w U_{xx} dx$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_{x_0}^{x_N} w U_{xx} dx = w U_x \Big|_{x_0}^{x_N} - \int_{x_0}^{x_N} w_x U_x dx$$

ve (2.9) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_N} wU^{n+1} dx + \alpha \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} wU_x^{n+1} dx + \lambda \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w_x U_x^{n+1} dx - \lambda \frac{\Delta t}{2} wU_x^{n+1} \Big|_{x_0}^{x_N} \\ &= \int_{x_0}^{x_N} wU^n dx - \alpha \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} wU_x^n dx - \lambda \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w_x U_x^n dx + \lambda \frac{\Delta t}{2} wU_x^n \Big|_{x_0}^{x_N} \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. Buna göre

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^N \phi_m(x) \delta_m(t)$$

yaklaşımı için w ağırlık fonksiyonları kuadratik B-spline fonksiyonlar olarak seçilirse (2.10) denklemi, $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left[\int_0^h \phi_i \phi_j dx \right] \delta_j^{n+1} + \alpha \frac{\Delta t}{2} \left[\int_0^h \phi_i \phi_j' dx \right] \delta_j^{n+1} + \lambda \frac{\Delta t}{2} \left[\int_0^h \phi_i' \phi_j' dx \right] \delta_j^{n+1} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - \lambda \frac{\Delta t}{2} \left[\phi_i \phi_j' dx \Big|_0^h \right] \delta_j^{n+1} \right\} \\ &= \\ & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left[\int_0^h \phi_i \phi_j dx \right] \delta_j^n - \alpha \frac{\Delta t}{2} \left[\int_0^h \phi_i \phi_j' dx \right] \delta_j^n - \lambda \frac{\Delta t}{2} \left[\int_0^h \phi_i' \phi_j' dx \right] \delta_j^n \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \lambda \frac{\Delta t}{2} \left[\phi_i \phi_j' dx \Big|_0^h \right] \delta_j^{n+1} \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

biçiminde yazılabilir. (2.11) eşitliği matris formunda

$$[A^e + \frac{\Delta t}{2}(\alpha B^e + \lambda C^e - \lambda D^e)](\delta^e)^{n+1} = [A^e - \frac{\Delta t}{2}(\alpha B^e + \lambda C^e - \lambda D^e)](\delta^e)^n \quad (2.12)$$

olarak yazılır. Burada i ve j ' ler $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı için sadece $m-1$, m ve $m+1$ değerlerini almak üzere

$$A_{ij}^e = \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix} \quad B_{ij}^e = \int_0^h \phi_i \phi_j' d\xi = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{ij}^e = \int_0^h \phi_i' \phi_j' d\xi = \frac{2}{3h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad D_{ij}^e = \phi_i \phi_j' \Big|_0^h = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. (2.12) denkleminin bütün elemanlar için birleştirilmiş matris formu

$$\mathbf{d} = (\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$$

olmak üzere

$$\left[A + \frac{\Delta t}{2}(\alpha B + \lambda C - \lambda D)\right]\mathbf{d}^{n+1} = \left[A - \frac{\Delta t}{2}(\alpha B + \lambda C - \lambda D)\right]\mathbf{d}^n + r \quad (2.13)$$

biçimindedir. A, B, C, D matrisleri A^e, B^e, C^e ve D^e eleman matrislerinin birleştirilmesiyle elde edilen beşli bant matrislerdir. r sınır koşullarından elde edilen vektördür. (2.2) sınır koşulları uygulanarak δ_{-1} ve δ_N parametreleri yok edilirse (2.13) denklemi $N \times N$ boyutlu denklem sistemine dönüşür. Bu sistem Thomas algoritması ile çözülebilir. \mathbf{d}^{n+1} zaman adımındaki değerleri \mathbf{d}^0 başlangıç vektörünün iterasyonu ile hesaplanır. \mathbf{d}^0 vektörünü belirlemek için $t = 0$ daki (2.8) denklemi

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^N \phi_m(x) \delta_m^0(t)$$

olarak yazılabilir. $U_N(x, 0)$ yaklaşım fonksiyonu $m = 0, \dots, N$ için x_m düğüm noktalarında analitik çözümü sağlamalı ve uç noktalardaki türevi gerçek çözümün türevi ile aynı olmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} U_N(x_m, 0) &= \delta_m + \delta_{m-1} = U(x_m, 0) \quad m = 0, \dots, N \\ \frac{2(\delta_N - \delta_{N-1})}{h} &= -\frac{\phi_L(t)}{\lambda} \end{aligned}$$

olarak alınır.

2.1.1 Kararlılık Analizi

Sayısal çözümleri veren (2.13) denkleminin kararlılığı von Neumann metodu ile incelenmiştir. (2.13) denklemi düzenlenerek yazıldığında

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3 \delta_m^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\ &= \alpha_6 \delta_{m-2}^n + \alpha_7 \delta_{m-1}^n + \alpha_8 \delta_m^n + \alpha_9 \delta_{m+1}^n + \alpha_{10} \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (2.14)$$

elde edilir. Burada katsayılar

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mu - \beta - \gamma, & \alpha_2 &= 26\mu - 10\beta - 2\gamma, & \alpha_3 &= 66\mu + 6\gamma, \\ \alpha_4 &= 26\mu + 10\beta - 2\gamma, & \alpha_5 &= \mu + \beta - \gamma, & \alpha_6 &= \mu + \beta + \gamma, \\ \alpha_7 &= 26\mu + 10\beta + 2\gamma, & \alpha_8 &= 66\mu - 6\gamma, & \alpha_9 &= 26\mu - 10\beta + 2\gamma, \\ \alpha_{10} &= \mu - \beta + \gamma \end{aligned}$$

ve

$$\mu = \frac{h}{30}, \quad \beta = \frac{\alpha\Delta t}{12}, \quad \gamma = \frac{\lambda\Delta t}{3h}$$

dır. Bu yöntemde, k mod sayısı ve h adım uzunluğu olmak üzere Fourier modu

$$\delta_m^n = \hat{\delta}^n e^{imkh}, \quad (2.15)$$

(2.14) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} a &= \mu[2 \cos^2 kh + 52 \cos^2(kh/2) + 6], \quad b = -2\gamma(\sin^2 kh + 2 \sin^2(kh/2)) \\ c &= \beta(\sin 2kh + 10 \sin kh) \end{aligned} \quad (2.16)$$

olmak üzere

$$(a - b + ic)\hat{\delta}^{n+1} = (a + b - ic)\hat{\delta}^n$$

eşitliği bulunur. g büyüme çarpanı olmak üzere $\hat{\delta}^{n+1} = g\hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a + b - ic}{a - b + ic}$$

elde edilir. g ' nin modülü alındığında

$$|g|^2 = \frac{(a + b)^2 + c^2}{(a - b)^2 + c^2}$$

bulunur. Kararlılık için $|g| \leq 1$ olması gerektiğinden

$$\begin{aligned} (a + b)^2 + c^2 &\leq (a - b)^2 + c^2 \\ 4ab &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

olmalıdır. (2.16) ifadeleri (2.17) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$-8\mu\gamma[2 \cos^2 kh + 52 \cos^2(kh/2) + 6](\sin^2 kh + 2 \sin^2(kh/2)) \leq 0$$

bulunur.

$|\cos kh| \leq 1$ ve $|\sin kh| \leq 1$ olduğundan son eşitsizlik sağlanır. O halde $|g| \leq 1$ olduğundan, (2.14) denklemi koşulsuz kararlıdır.

2.2 Taylor-Kollokasyon Kübik B-spline Metodu (TC-CBM)

Bu bölümde, (2.3) denkleminin zamana göre ayrıştırılmış formu olan (2.7) denkleminde kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak kollokasyon metodu uygulanacaktır.

$[a, b]$ aralığını x_1, x_2, \dots, x_{N-1} noktaları ile

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

$h = x_{m+1} - x_m$, $m = 0, \dots, N - 1$ olacak şekilde eşit aralıklara bölelim. ϕ_m , $m = -1, \dots, N+1$ kübik B-spline fonksiyonları x_m noktalarında $[a, b]$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir taban oluşturur. $U(x, t)$ gerçek çözümüne $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü kübik B-spline fonksiyonlarının kombinasyonu ile

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (2.18)$$

olarak yazılabilir. Burada δ_m ' ler sınır ve interpolasyon koşullarından belirlenecek zamana bağlı parametrelerdir.

Taylor seri açılımı ile zaman ayrıştırması yapılan (2.7) denkleminde (1.26)-(1.28) de verilen kübik B-spline fonksiyonları yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})^{n+1} + \alpha \frac{3\Delta t}{2h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1})^{n+1} - \lambda \frac{6\Delta t}{2h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})^{n+1} \\ & = \\ & (\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})^n - \alpha \frac{3\Delta t}{h^2} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1})^n + \lambda \frac{6\Delta t}{2h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})^n \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Bu sistem düzenlenirse

$$\begin{aligned} & (1 - \alpha \frac{3\Delta t}{2h} - \lambda \frac{3\Delta t}{h^2}) \delta_{m-1}^{n+1} + (4 + \lambda \frac{6\Delta t}{h^2}) \delta_m^{n+1} + (1 + \alpha \frac{3\Delta t}{2h} - \lambda \frac{3\Delta t}{h^2}) \delta_{m+1}^{n+1} \\ & = \\ & (1 + \alpha \frac{3\Delta t}{2h} + \lambda \frac{3\Delta t}{h^2}) \delta_{m-1}^n + (4 - \lambda \frac{6\Delta t}{h^2}) \delta_m^n + (1 - \alpha \frac{3\Delta t}{2h} + \lambda \frac{3\Delta t}{h^2}) \delta_{m+1}^n \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade kısaca

$$\alpha_1 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_m^{n+1} + \alpha_3 \delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_4 \delta_{m-1}^n + \alpha_5 \delta_m^n + \alpha_6 \delta_{m+1}^n \quad (2.19)$$

formunda da yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 - R_1 - R_2, & \alpha_2 &= 4 + 2R_2, & \alpha_3 &= 1 + R_1 - R_2 \\ \alpha_4 &= 1 + R_1 + R_2, & \alpha_5 &= 4 - 2R_2, & \alpha_6 &= 1 - R_1 + R_2\end{aligned}$$

ve

$$R_1 = \frac{3\alpha}{2h}\Delta t, \quad R_2 = \frac{3\lambda}{h^2}\Delta t$$

dir. (2.19) sisteminde, $\mathbf{d}^{n+1} = (\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1}, \delta_{N+1}^{n+1})^T$ bilinmeyenler vektörü olmak üzere, $N + 3$ bilinmeyenden oluşan $N + 1$ lineer denklem vardır. Bu sistemin çözülebilmesi için δ_{-1}^{n+1} ve δ_{N+1}^{n+1} parametreleri (2.2) ile verilen sınır koşulları kullanılarak yok edilir. (2.19) sistemi matris formunda

$$A\mathbf{d}^{n+1} = B\mathbf{d}^n + r \quad (2.20)$$

biçiminde yazılır. Burada A ve B matrisleri $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu üçlü bant matrisler ve r ise sınır koşullarından elde edilen vektördür. (2.20) sisteminde \mathbf{d}^{n+1} zaman adımlarını hesaplamak için \mathbf{d}^0 başlangıç koşuluna ihtiyaç vardır. Bunun için (2.18) de verilen yaklaşık çözüm başlangıç koşulu

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0(t)$$

ve sınır koşulları kullanılarak yazılırsa

$$\begin{aligned}U_N(x_m, 0) &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} = U(x_m, 0), \\ \lambda \frac{\partial U_N}{\partial x}(L, 0) &= \frac{3}{h}(\delta_{N+1} - \delta_{N-1}) = -\phi_L(t), \\ \frac{\partial U_N}{\partial x}(0, 0) &= \frac{3}{h}(\delta_1 - \delta_{-1}) = f'_0.\end{aligned}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerden \mathbf{d}^0 başlangıç vektörü bulunarak (2.20) sistemi yardımıyla \mathbf{d}^n bilinmeyenleri elde edilir.

2.2.1 Kararlılık Analizi

Metodun uygulanması ile elde edilen (2.19) denkleminin kararlılığı için

$$\delta_m^n = \hat{\delta}^n e^{imkh}$$

Fourier modu (2.19) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$(a + b + ic)\hat{\delta}^{n+1} = (a - b - ic)\hat{\delta}^n$$

eşitliği bulunur. Burada

$$\begin{aligned} a &= 1 + 2 \cos^2(kh/2), & b &= 2R_2 \sin^2(kh/2), \\ c &= R_1 \sin(kh) \end{aligned} \tag{2.21}$$

bulunur. g büyüme çarpanı olmak üzere $\hat{\delta}^{n+1} = g\hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a - b + ic}{a + b - ic}$$

elde edilir. Fourier kararlılık metodu gereğince $|g| \leq 1$ olmalıdır. Buna göre g 'nin modülü alındığında

$$|g|^2 = \frac{(a - b)^2 + c^2}{(a + b)^2 + c^2}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} (a - b)^2 + c^2 &\leq (a + b)^2 + c^2, \\ 4ab &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

(2.21) ifadeleri (2.22) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$4(1 + 2 \cos^2(kh/2))(2R_2 \sin^2(kh/2)) \geq 0$$

bulunur. $|g| \leq 1$ olduğundan (2.19) denklemi koşulsuz kararlıdır.

2.3 Taylor-Kollokasyon Kuintik B-spline Metodu (TC-QNBM)

Bu bölümde, adveksiyon difüzyon denkleminin Taylor seri açılımıyla elde edilen zamana göre ayrıştırılmış (2.7) denkleminde kuintik B-spline fonksiyonları kullanılarak kollokasyon çözümü yapılacaktır.

$[a, b]$ aralığını x_1, x_2, \dots, x_{N-1} noktaları ile

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

olacak şekilde eşit aralıklara bölelim. $\phi_m(x)$, x_m düğüm noktalarındaki kuintik B-spline fonksiyonları olsun. $\{\phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_{N+2}\}$ kümesi $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir taban olduğundan bu yaklaşık çözüm kuintik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (2.23)$$

Burada δ_m ' ler sınır ve kollokasyon koşullarından belirlenebilen zamana bağlı parametrelerdir.

(1.38)-(1.40) ile verilen kuintik B-spline fonksiyonları zamana göre ayrıştırılmış olan (2.7) denkleminde yerlerine yazılıp, düzenlenirse

$$R_1 = \alpha \frac{5\Delta t}{2h}, \quad R_2 = \lambda \frac{10\Delta t}{h^2}$$

olmak üzere $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} & (1 - R_1 - R_2)\delta_{m-2}^{n+1} + (26 - 10R_1 - 2R_2)\delta_{m-1}^{n+1} + (66 + 6R_2)\delta_m^{n+1} \\ & \quad + (26 + 10R_1 - 2R_2)\delta_{m+1}^{n+1} + (1 + R_1 - R_2)\delta_{m+2}^{n+1} \\ = & \\ & (1 + R_1 + R_2)\delta_{m-2}^n + (26 + 10R_1 + 2R_2)\delta_{m-1}^n + (66 - 6R_2)\delta_m^n \\ & \quad + (26 - 10R_1 + 2R_2)\delta_{m+1}^n + (1 - R_1 + R_2)\delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (2.24)$$

bulunur. (2.24) sistemi, $d = (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$ vektörü ile gösterilen $N + 5$ bilinmeyenden oluşan $N + 1$ lineer denklemi içeren bir sistemdir. (2.2) sınır koşullarından $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ parametreleri yok edilerek (2.24) sistemi $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu bir denklem sistemine dönüştürülür. Bu sistem iterasyonla Thomas algoritmaları yardımıyla çözülür. Bunun için başlangıç parametresi δ_m^o aşağıda verilen başlangıç koşulu ve sınır koşulları kullanılarak belirlenir:

$$\begin{aligned} U_N(x_m, 0) &= \delta_{m+2} + 26\delta_{m+1} + 66\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2} = U(x_m, 0), \quad 0 \leq m \leq N \\ U'_N(0, 0) &= \frac{5}{h}(\delta_2 + 10\delta_1 - 10\delta_{-1} - \delta_{-2}) = f'_0, \\ U'_N(L, 0) &= \frac{5}{h}(\delta_{N+2} + 10\delta_{N+1} - 10\delta_{N-1} - \delta_{N-2}) = -\phi'_L(t)/\lambda, \\ U''_N(0, 0) &= \frac{20}{h^2}(\delta_2 + 2\delta_1 - 6\delta_0 + 26\delta_{-1} + \delta_{-2}) = f''_0, \\ U''_N(L, 0) &= \frac{20}{h^2}(\delta_{N+2} + 2\delta_{N+1} - 6\delta_N + 26\delta_{N-1} + \delta_{N-2}) = -\phi''_L(t)/\lambda. \end{aligned}$$

2.3.1 Kararlılık Analizi

Sayısal metodun uygulanması ile elde edilen (2.24) denkleminin kararlılığı için von Neumann metodu kullanıldı. Bunun için (2.24) denkleminde

$$\delta_m^n = \hat{\delta}^n e^{imkh}$$

ile verilen Fourier modu yerine yazılıp düzenlenirse

$$(a - b + ic)\hat{\delta}^{n+1} = (a + b - ic)\hat{\delta}^n$$

eşitliği bulunur. Burada

$$\begin{aligned} a &= 2 \cos^2 kh + 52 \cos^2(kh/2) + 6, & b &= -R_2(2 \sin^2 kh + 4 \sin^2(kh/2)), \\ c &= R_1(\sin 2kh + 10 \sin kh) \end{aligned} \quad (2.25)$$

dir. $\hat{\delta}^{n+1} = g\hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a + b - ic}{a - b + ic}$$

elde edilir. g ' nin modülü alındığında

$$|g|^2 = \frac{(a + b)^2 + c^2}{(a - b)^2 + c^2}$$

bulunur. $|g| \leq 1$ olması koşulundan

$$\begin{aligned} (a + b)^2 + c^2 &\leq (a - b)^2 + c^2 \\ 4ab &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.25) ifadeleri (2.26) de yerlerine yazılırsa

$$-4R_2(2 \cos^2 kh + 52 \cos^2(kh/2) + 6)(2 \sin^2 kh + 4 \sin^2(kh/2)) \leq 0$$

bulunur. $|g| \leq 1$ olduğundan (2.24) denklemini koşulsuz kararlıdır.

2.4 Test Problemleri

Adveksiyon difüzyon denkleminin yaklaşık çözümü için önerilen sayısal metotların iki test problem ile doğruluğu gösterilecektir. Nümerik ve tam çözüm arasındaki hata L_∞ hata normu kullanılarak ölçülecektir.

Courant sayısı

$$C_r = \alpha \frac{\Delta t}{h}$$

α akış şiddetinin $h/\Delta t$ birim zamandaki şiddetine oranıdır.

Peclet sayısı ise,

$$P_c = \alpha \frac{h}{\lambda}$$

α adveksiyon teriminin λ/h difüzyonuna oranı olarak tanımlanmaktadır.

a) Uzun bir kanaldaki yayılım.

$\lambda = 0$ ve akış hızının $\alpha = 0.5$ m/s olduğu durumda kanalın dik kesiti sabit ve aşağıya doğru meyillidir (Szymkiewicz, 1993). Başlangıçtaki yoğunluk $\sigma = 264$ m standart sapmasıyla bir Gauss dağılımıdır ve maksimum değeri 10 dur. Bu başlangıç dağılımı 9600 s de 0.5 m/s hızla 4.8 m' lik bir mesafeden akış yönündeki taşınmadır. Kanal uzunluğu $L = 9.0$ km alınarak, her bir eleman uzunluğu $h = 100$ m olacak şekilde 90 eşit parçaya bölünür. Başlangıçtaki dağılımı merkezinin kanalın başlangıcına olan uzaklığı 2 km dir. Dolayısıyla $x_0 = 2.0$ km dir. Tam çözüm

$$U(x, t) = 10e^{(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_0-\alpha t)^2)}$$

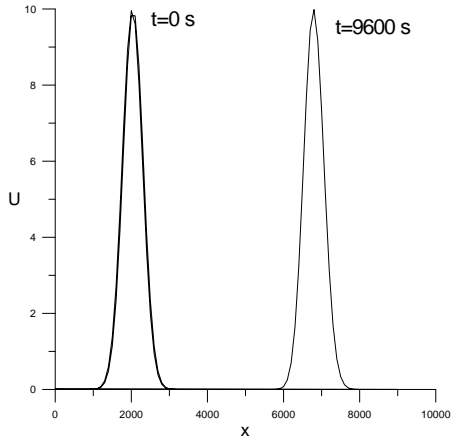
biçimindedir. Başlangıç koşulu $t = 0$ için

$$U(x, 0) = 10e^{(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_0)^2)}$$

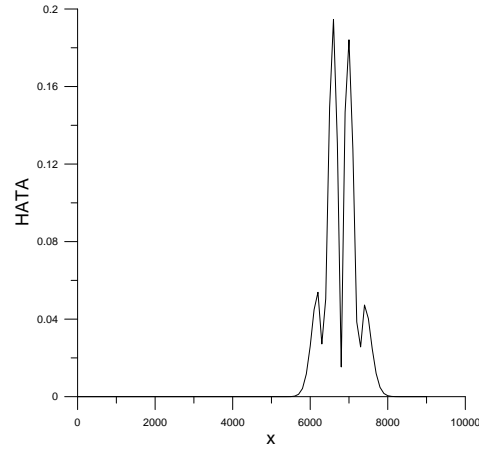
ve sınır koşulları

$$U(0, t) = 0 \text{ ve } \lambda \frac{\partial U}{\partial x}(L, t) = 0$$

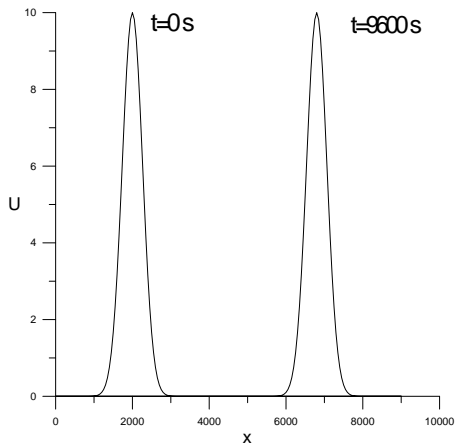
olarak yazılabilir.



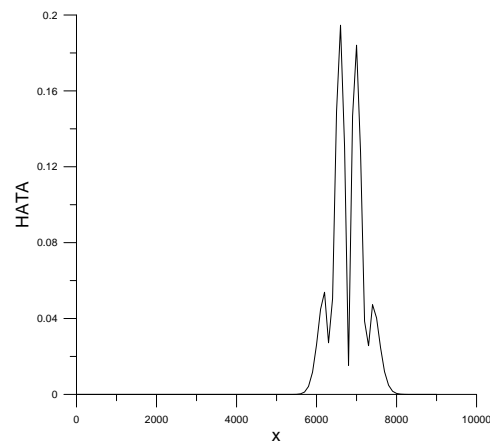
Şekil 2.1. TG-QDBM için çözüm



Şekil 2.2. TG-QDBM için |tam-nümerik| hata

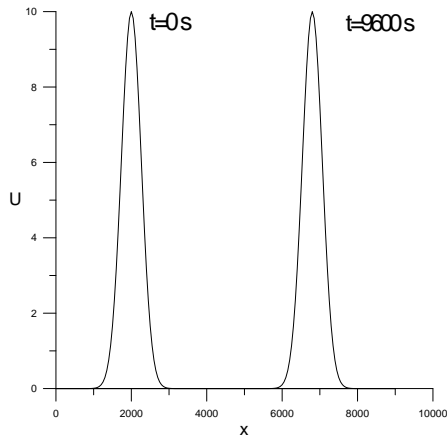


Şekil 2.3: TC-CBM için çözüm

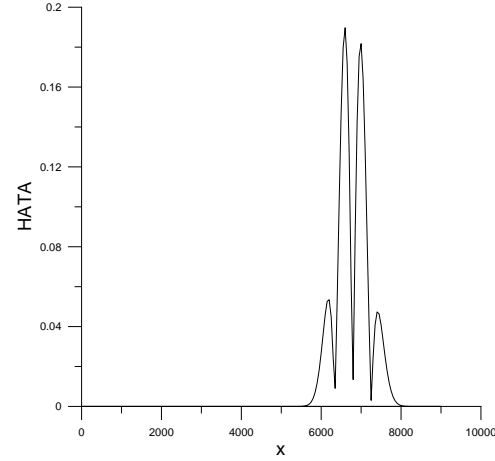


Şekil 2.4: TC-CBM için |tam - nümerik| hata.

Burada $\alpha = 0.5 \text{ m/s}$ akış hızı ve $h = 100 \text{ m}$ konum adımı alınarak $C_r = 0.25$ için $\Delta t = 50 \text{ s}$ zaman adımıyla hesaplamalar yapıldı. $\alpha = 0.5 \text{ m/s}$ ve $\Delta t = 50 \text{ s}$ sabit tutulup, h eleman uzunluğu azaltılarak Courant sayısı 0.25 den daha da artırılabilir.



Şekil 2.5. TC-QNBM için çözüm



Şekil 2.6. TC-QNBM için |tam-nümerik| hata.

Tam çözümdeki maksimum değer tüm zaman adımları için 10 olmalıdır. $C_r = 0.25$ ve $\Delta t = 50$ s için çalıştırılan zaman boyunca elde edilen çözümlerin grafikleri TG-QDBM için Şekil 2.1de, TC-CBM için Şekil 2.3 de ve TC-QNBM için Şekil 2.5 de verildi. Tam ve sayısal çözümler arasındaki hata normlarının grafikleri, TG-QDBM için Şekil 2.2 de, TC-CBM için Şekil 2.4 de ve TC-QNBM için Şekil 2.6 da gösterildi. Grafiklerden de görüldüğü gibi maksimum hata normu TC-QNBM' nda daha düşük hesaplanmıştır.

Farklı C_r sayıları için maksimum yoğunluk $t = 9600$ s, $\alpha = 0.5$ m/s, $\Delta t = 50$ s, $0 \leq x \leq 9.0$ km bölgesi üzerinde literatürdeki bazı çalışmaların sonuçları ve bu bölümde önerilen metotların sonuçları karşılaştırma yapmak için listelenmiştir. Tablo 2.1den de görüldüğü gibi önerilen üç metottan elde edilen sonuçlar karşılaştırılan diğer metotlara göre daha iyi sonuçlar vermiş ve tam çözüme oldukça yaklaşmıştır. Bu üç metot kendi arasında kıyaslandığında ise TG-QDBM, TC-CBM ve TC-QNBM' na göre çok az bir farkla tam çözüme yakın sonuçlar vermiştir. Ayrıca tabloya göre sonuçların doğruluğu nokta sayısı arttıkça aynı kalmaktadır.

Tablo 2.1. $\alpha = 0.5m/s$, $\Delta t = 50 s$ ve farklı Cr sayıları için $t = 9600 s$ deki tam ve sayısal çözüm

Cr	0.25	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	2.4	3.2	4.8
h	100	50	33.3	25	16.6	12.5	10.4	7.8	5.2
(Holly, 1977)	9.677	9.756	9.805	10.00					
(Szymkiewicz, 1993)	9.816	9.836	9.934	10.00	9.941	10.00	9.966	9.988	9.992
(Gardner, 1994)	9.986	9.986	9.993	9.986	9.994	9.986	9.994	9.999	9.994
(Dağ, 2005) (Femlsf)	9.647	9.864	9.918	9.943	9.951	9.956	9.959	9.960	9.961
(Dağ, 2005) (Femqsf)	9.926	9.932	9.949	9.961	9.959	9.961	9.962	9.962	9.962
TG-QDBM	9.989	9.991	9.996	9.991	9.996	9.995	9.996	9.996	9.996
TC-CBM	9.940	9.984	9.993	9.986	9.994	9.986	9.994	9.993	9.994
TC-QNBM	9.984	9.986	9.993	9.986	9.994	9.994	9.994	9.993	9.994
Tam Çözüm	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00

b) Bir kanaldaki difüzyon ve konveksiyon etkisinin birleştirilmesi.

Suyun hızı $\alpha = 0.01 m$ ve difüzyon katsayısı $\lambda = 0.002 m^2/s$ olarak alındı. Kanal uzunluğu $L = 200 m$ alınarak $h = 1 m$ uzunluğundaki elemanlara bölündü. Bu durumda Peclet sayısı $P_c = 5$ dir. Courant sayısı $Cr = 0.6$ ve $\Delta t = 60 s$ olarak seçildi. Başlangıç koşulu $x \geq 0$ için $U(x, 0) = 0$, sınır koşulları $x = 0$ da $t > 0$ için $U(0, t) = 1$ ve $x = L$ 'de $\lambda \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ olur. Bu durum da analitik çözüm

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} c\left(\frac{x - \alpha t}{\sqrt{4t\lambda}}\right) + \frac{1}{2} e^{\left(\frac{\alpha x}{\lambda}\right)} \operatorname{erf} c\left(\frac{x + \alpha t}{\sqrt{4t\lambda}}\right)$$

formundadır (Szymkiewicz, 1993).

$\alpha = 0.01 m/s$ ve $\lambda = 0.002 m^2/s$, $Cr = 0.6$, $\Delta t = 60 s$ için $t = 3000 s$ de uygulanan sayısal metotlardan elde edilen sonuçlar Tablo 2.2 de gösterildi. Buna göre üç metodun da tam çözüme ve birbirlerine yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Uygulanan metotlar arasında, tam çözüme en yakın sonuçlar veren TG-QDBM' dir.

Tablo 2.2. $\alpha = 0.01 \text{ m/s}$ ve $\lambda = 0.002 \text{ m}^2/\text{s}$, $C_r = 0.6$,
 $\Delta t = 60 \text{ s}$ $t = 3000 \text{ s}$ tam ve sayısal çözüm .

Uzaklık	Tam Çözüm	TG-QDBM	TC-CBM	TC-QNBM
0	1.000	1.000	1.000	1.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18	1.000	1.000	1.000	1.000
19	0.999	0.999	0.999	0.999
20	0.998	0.999	0.999	0.999
21	0.995	0.996	0.999	0.997
22	0.990	0.991	0.998	0.994
23	0.978	0.979	0.994	0.987
24	0.958	0.958	0.987	0.974
25	0.926	0.922	0.972	0.950
26	0.876	0.867	0.945	0.911
27	0.807	0.790	0.902	0.854
28	0.718	0.693	0.838	0.778
29	0.614	0.582	0.755	0.684
30	0.500	0.465	0.653	0.577
31	0.386	0.353	0.541	0.465
32	0.282	0.254	0.427	0.358
33	0.193	0.173	0.320	0.262
34	0.124	0.111	0.227	0.182
35	0.074	0.068	0.152	0.120
36	0.042	0.039	0.096	0.075
37	0.022	0.022	0.057	0.044
38	0.010	0.011	0.032	0.025
39	0.005	0.006	0.017	0.010
40	0.002	0.003	0.008	0.007
41	0.001	0.001	0.004	0.003
42	0.000	0.001	0.001	0.001

2.5 Sonuç

Bu bölümde, adveksiyon difüzyon denkleminin B-spline fonksiyonları kullanılarak Taylor-Galerkin ve Taylor-kollokasyon metotları ile sayısal çözümünün yapılabileceğinin gösterilmesi amaçlanmıştır. Bunun için adveksiyon difüzyon denkleminin önce Taylor seri açılımı kullanılarak zaman ayrıştırması yapılmıştır. Elde edilen denklemlere Galerkin ve kollokasyon sonlu eleman yöntemleri uygulanarak konum ayrıştırması yapılmıştır. Bulunan cebirsel denklemler uygun Thomas algoritmaları ile çözülerek, bölünme noktalarında elde edilen bilinmeyen fonksiyonun değerleriyle fonksiyonel çözümler bulunmuştur. Tablo 2.1 ve Tablo 2.2 de elde edilen sonuçlar daha önce farklı metotlarla yapılan çalışmalardaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Buna göre yukarıda uygulanan metotların tam çözüme yakın sonuçlar verdiği gözlenmektedir. Ayrıca uygulanan üç metot kendi arasında kıyaslandığı zaman, ilk test problem için TG-QDBM çözümü, TC-CBM çözümünden daha iyi sonuç vermiştir. İkinci test problem olan kanaldaki difüzyon ve konveksiyon etkisinin birleştirilmesinde yine birinci metot diğerlerine göre çok az bir farkla tam çözüme daha yakın sonuçlar vermiştir.

3.BURGER DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde Burger denkleminin zamana göre Taylor seri açılımı yapılarak yarı ayrıştırılmış formu elde edilecek ve sırasıyla Taylor-Galerkin kuadratik B-spline, Taylor- Kollokasyon kübik B-spline ve Taylor - Kollokasyon kuintik B-spline çözümleri yapılacaktır. Nümerik metotların Fourier kararlılık analizleri yapılarak hata normları hesaplanacaktır. Nümerik metotlardan elde edilen sonuçlar literatürde yer alan bazı çalışmalarla karşılaştırılarak, sonuçlar yorumlanacaktır.

v pozitif parametre, x ve t sırasıyla konum ve zamana göre değişkenler olmak üzere,

$$U_t + UU_x = vU_{xx}, \quad x \in [a, b], \quad t \in [t_0, T] \quad (3.1)$$

biçimindeki tek boyutlu Burger denklemini ele alalım. Başlangıç koşulu

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.2)$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} U(a, t) &= 0, \quad U(b, t) = 0 \\ U_x(a, t) &= U_x(b, t) = 0 \\ U_{xx}(a, t) &= U_{xx}(b, t) = 0 \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.3)$$

olarak kullanılacaktır (Saka and Dag, 2008).

3.1 Taylor-Galerkin Kuadratik B-spline Metodu (TG-QDBM)

$$U_t = -UU_x + vU_{xx}, \quad a \leq x \leq b \quad (3.4)$$

denkleminde Taylor -Galerkin metodunu uygulayalım. Denkleminde ilk olarak zamana göre Taylor seri açılımı yapılarak zaman ayrıştırması yapılır. Buna göre

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t U_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} U_{tt}^n + O(\Delta t^3)$$

ifadesinde hata ihmal edilirse

$$U_t^n = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} U_{tt}^n \quad (3.5)$$

olarak yazılabilir. (3.4) denkleminin zamana göre türevi

$$\begin{aligned} U_{tt}^n &= (-UU_x + vU_{xx})_t^n = -U^n(U_t^n)_x - U_x^n U_t^n + v(U_t^n)_{xx} \\ &= -U^n \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right)_x - U_x^n \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right) + v \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right)_{xx} \end{aligned} \quad (3.6)$$

biçiminde yazılabilir. (3.4) ve (3.6) denklemleri (3.5)' de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -U^n U_x^n + v U_{xx}^n &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \left[-U^n \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right)_x \right. \\ &\quad \left. - U_x^n \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right) + v \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right)_{xx} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin düzenlenmesiyle Burger denkleminin zamana göre ayrıştırılmış

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{2} U^n \partial_x + \frac{\Delta t}{2} U_x^n - v \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2 \right) U^{n+1} = \left(1 + v \frac{\Delta t}{2} \partial_x^2 \right) U^n \quad (3.7)$$

formu elde edilir.

$U(x, t)$ analitik fonksiyonunun yaklaşık çözümü $U_N(x, t)$ olmak üzere, bu yaklaşık çözüm kuadratik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^N \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (3.8)$$

Burada δ_m ' ler sınır ve interpolasyon koşullarından belirlenecek zamana bağlı parametrelerdir.

(3.1) ile verilen Burger denkleminin Taylor seri açılımıyla zamana göre ayrıştırılmış formu olan (3.7) denkleminde kuadratik B-spline fonksiyonları kullanılarak Taylor - Galerkin metodu uygulanacaktır. Bunun için (3.7) denklemi w ağırlık fonksiyonları ile çarpılıp, $[x_0, x_N]$ aralığı üzerinde integrali alınır,

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_N} w U^{n+1} dx - v \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_{xx}^{n+1} dx + \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_x^n U^{n+1} dx \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U^n U_x^{n+1} dx \quad (3.9) \\ &= \int_{x_0}^{x_N} w U^n dx + v \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_{xx}^n dx \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemde $\int_{x_0}^{x_N} wU_{xx}dx$ integraline kısmi integral uygulanır ve (3.3) sınır koşulları kullanılırsa

$$\int_{x_0}^{x_N} wU_{xx}dx = wU_x|_{x_0}^{x_N} - \int_{x_0}^{x_N} w_x U_x dx = - \int_{x_0}^{x_N} w_x U_x dx$$

eşitliği bulunur. Böylece (3.9) denklemi

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_N} wU^{n+1}dx + v\frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w_x U_x^{n+1}dx + \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} wU_x^n U^{n+1}dx \\ & + \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} wU^n U_x^{n+1}dx \quad (3.10) \\ = & \int_{x_0}^{x_N} wU^n dx - v\frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w_x U_x^n dx \end{aligned}$$

denkleminde dönüşür. w ağırlık fonksiyonları kuadratik B-spline fonksiyonlar olarak seçilip (3.10) de yerine yazılırsa $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left[\int_0^h \phi_i \phi_j dx \right] \delta_j^{n+1} + v\frac{\Delta t}{2} \left[\int_0^h \phi_i' \phi_j' dx \right] \delta_j^{n+1} \right. \\ & + \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \left[\int_0^h \phi_i \phi_k' \phi_j dx \right] \delta_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \left[\int_0^h \phi_i \phi_k \phi_j' dx \right] \delta_j^{n+1} \left. \right\} \quad (3.11) \\ = & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left[\int_0^h \phi_i \phi_j dx \right] \delta_j^n - v\frac{\Delta t}{2} \left[\int_0^h \phi_i' \phi_j' dx \right] \delta_j^n \right\} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. (3.11) eşitliği matris formunda ilgili eleman parametreleri $\delta_{\sim}^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})^T$ cinsinden

$$\{[A^e + \frac{\Delta t}{2}(vB^e + C^e(\delta) + D^e(\delta))]\delta_{\sim}^e\}^{n+1} = \{[A^e - v\frac{\Delta t}{2}B^e]\delta_{\sim}^e\}^n \quad (3.12)$$

biçiminde yazılır. Eleman matrisleri

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi, & B_{ij}^e &= \int_0^h \phi_i' \phi_j' d\xi \\ L_{ijk}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j \phi_k' d\xi, & N_{ijk}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_k \phi_j' d\xi \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı için $m = 0, 1, \dots, N-1$ olmak üzere i, j, k sadece $m-1, m, m+1$ değerlerini alabilir. A^e ve B^e 3×3 , L^e ve N^e $3 \times 3 \times 3$ boyutlu matrislerdir. L^e ve N^e ile 3×3 'lük C^e ve D^e matrisleri

$$C_{ij}^e = \sum_{k=m-1}^{m+1} L_{ijk}^e \delta_k^e dx \quad D_{ij}^e = \sum_{k=m-1}^{m+1} N_{ijk}^e \delta_k^e dx$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu element matrisleri indirgenerek yazılırsa, A^e ve B^e matrisleri

$$A_{ij}^e = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}, \quad B_{ij}^e = \frac{2}{3h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

biçiminde C^e matrisi

$$C_{11}^e = \frac{1}{30}(-10, -19, -1)\delta_{\sim}^e$$

$$C_{12}^e = \frac{1}{30}(8, 12, 0)\delta_{\sim}^e$$

$$C_{13}^e = \frac{1}{30}(2, 7, 1)\delta_{\sim}^e$$

$$C_{21}^e = \frac{1}{30}(-19, -54, -7)\delta_{\sim}^e$$

$$C_{22}^e = \frac{1}{30}(12, 0, -12)\delta_{\sim}^e$$

$$C_{23}^e = \frac{1}{30}(7, 54, 19)\delta_{\sim}^e$$

$$C_{31}^e = \frac{1}{30}(-1, -7, -2)\delta_{\sim}^e$$

$$C_{32}^e = \frac{1}{30}(0, -12, -8)\delta_{\sim}^e$$

$$C_{33}^e = \frac{1}{30}(1, 19, 10)\delta_{\sim}^e$$

ve D^e matrisi

$$D_{11}^e = \frac{1}{30}(-10, 8, 2)\delta_{\sim}^e$$

$$D_{12}^e = \frac{1}{30}(-19, 12, 7)\delta_{\sim}^e$$

$$D_{13}^e = \frac{1}{30}(-1, 0, 1)\delta_{\sim}^e$$

$$D_{21}^e = \frac{1}{30}(-19, 12, 7)\delta_{\sim}^e$$

$$D_{22}^e = \frac{1}{30}(-54, 0, 54)\delta_{\sim}^e$$

$$D_{23}^e = \frac{1}{30}(-7, -12, 19)\delta_{\sim}^e$$

$$D_{31}^e = \frac{1}{30}(-1, 0, 1)\delta_{\sim}^e$$

$$D_{32}^e = \frac{1}{30}(-7, -12, 19)\delta_{\sim}^e$$

$$D_{33}^e = \frac{1}{30}(-2, -8, 10)\delta_{\sim}^e$$

şeklinde yazılabilir. Element matrisleri birleştirilip global matrisler cinsinden sistem (3.12)

$$\left[A + v \frac{\Delta t}{2} B + \frac{\Delta t}{2} C + \frac{\Delta t}{2} D \right] \mathbf{d}^{n+1} = \left[A - v \frac{\Delta t}{2} B \right] \mathbf{d}^n \quad (3.13)$$

olarak yazılabilir ve

$$\mathbf{d}^{n+1} = (\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1})^T$$

element parametreleridir. A, B, C, D matrisleri $(N+2) \times (N+2)$ boyutlu 5' li bant matrislerdir. (3.13) sisteminin çözülebilmesi için (3.3) sınır koşulları kullanılarak δ_{-1} ve δ_N parametreleri yok edilmelidir. Böylece, bilinmeyenleri $(\delta_0^{n+1}, \delta_1^{n+1}, \dots, \delta_{N-1}^{n+1})$ parametreleri olan $N \times N$ boyutlu denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. İterasyona başlanabilmesi için \mathbf{d}^0 başlangıç vektörünün belirlenmesi gerekir. Bunun için aşağıda yazılan başlangıç ve sınır koşullarından

$$\begin{aligned} U_N(x_m, 0) &= \delta_m + \delta_{m-1} = U(x_m, 0), \quad m = 0, \dots, N \\ U(a, 0) &= U'_N(a, 0) = \frac{2(\delta_0 - \delta_{-1})}{h} = 0, \\ U(b, 0) &= U'_N(b, 0) = \frac{2(\delta_N - \delta_{N-1})}{h} = 0 \end{aligned}$$

\mathbf{d}^0 vektörü bulunur. δ_{-1} ve δ_N parametreleri yok edilerek $(N \times N)$ boyutlu denklem sistemine dönüştürülür.

$$\delta_m^n = U_m^n - \delta_{m-1}^n, \quad m = 1, \dots, N-1, \quad n = j\Delta t, \quad j = 1, 2, \dots$$

ifadesinden δ_m^n parametreleri belirlenerek (3.8) formundaki $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümünde yerine yazılarak çözümler elde edilir.

3.1.1 Kararlılık Analizi

Sayısal çözümlerin elde edildiği (3.13) denkleminin kararlılığı von Neumann metodu kullanılarak yapılacaktır. Bunun için (3.13) denklemi düzenlenerek

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3 \delta_m^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+2}^{n+1} \\ &= \\ &\alpha_5 \delta_{m-2}^n + \alpha_6 \delta_{m-1}^n + \alpha_7 \delta_m^n + \alpha_6 \delta_{m+1}^n + \alpha_8 \delta_{m+2}^n \end{aligned} \tag{3.14}$$

formunda yazılabilir. Burada katsayılar

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - \beta/2 - \gamma, & \alpha_2 &= 26\alpha - 5\beta - 2\gamma, & \alpha_3 &= 66\alpha + 6\gamma & \alpha_4 &= 26\alpha + 5\beta - 2\gamma, \\ \alpha_5 &= \alpha + \beta/2 - \gamma, & \alpha_6 &= \alpha + \gamma, & \alpha_7 &= 26\alpha + 2\gamma, & \alpha_8 &= 66\alpha - 6\gamma \end{aligned}$$

ve

$$\alpha = \frac{h}{30}, \quad \beta = \frac{\Delta t}{3}, \quad \gamma = v \frac{\Delta t}{3h}$$

olarak belirlenir. (3.14) denkleminde

$$\delta_m^n = \hat{\delta}^n e^{imkh}$$

Fourier modu yerine yazılıp düzenlenirse

$$(a + b + ic)\hat{\delta}^{n+1} = (a - b)\hat{\delta}^n$$

eşitliği bulunur. Burada

$$\begin{aligned} a &= \alpha[2 \cos^2 kh + 52 \cos^2(kh/2) + 6], \quad b = \gamma(2 \sin^2 kh + 4 \sin^2(kh/2)), \\ c &= (\beta/2)(\sin 2kh + 10 \sin kh) \end{aligned} \quad (3.15)$$

olarak yazılır. $\hat{\delta}^{n+1} = g\hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a - b}{a + b + ic} \quad (3.16)$$

elde edilir. g ' nin modülü alındığında

$$|g|^2 = \frac{(a - b)^2}{(a + b)^2 + c^2}$$

bulunur. Kararlılık için $|g| \leq 1$ olması gerektiğinden

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &\leq (a + b)^2 + c^2, \\ 4ab + c^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

koşulu sağlanmalıdır. (3.15) ifadeleri (3.17) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 4\alpha\gamma(2 \cos^2 kh + 52 \cos^2(kh/2) + 6)(2 \sin^2 kh + 4 \sin^2(kh/2)) \\ + (\beta^2/4)(\sin 2kh + 10 \sin kh)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

bulunur. $|g| \leq 1$ olduğundan (3.14) denklemini koşulsuz kararlıdır.

3.2 Taylor-Kollokasyon Kübik B-spline Metodu (TC-CBM)

Bu bölümde, (3.1) denkleminin zamana göre ayrıştırılmış formu olan (3.7) denkleminde kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak kollokasyon metodu uygulanacaktır.

(3.1) denkleminin $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü kübik B-spline fonksiyonlarının kombinasyonu yardımıyla elde edilecektir. ϕ_m , $m = -1, \dots, N + 1$ kübik B-spline fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir taban oluşturur. $U(x, t)$ gerçek çözümü olmak üzere $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümünün kübik B-spline fonksiyonları cinsinden ifadesi

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t)$$

olarak yazılabilir. Burada δ_m ' ler sınır ve interpolasyon koşullarından belirlenecek zamana bağlı parametrelerdir.

(3.1) ile verilen Burger denkleminin ikinci mertebeden Taylor seri açılımı yapılarak elde edilen zamana göre ayrıştırılmış (3.7) denkleminde (1.26)-(1.28) ile verilen kübik B-spline fonksiyonları yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \frac{3}{h} [(\delta_{m+1} - \delta_{m-1})^{n+1} (\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})^n \\ & + (\delta_{m+1} - \delta_{m-1})^n (\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})^{n+1}] - v \frac{\Delta t}{2} \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})^{n+1} \\ = & \\ & (\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})^n + v \frac{\Delta t}{2} \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})^n \end{aligned}$$

ve denklem düzenlenirse $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} & [1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta t}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1})^n - \frac{3}{2} \frac{\Delta t}{h} (\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})^n - v \frac{3\Delta t}{h^2}] \delta_{m-1}^{n+1} \\ & + [1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta t}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1})^n + \frac{3}{2} \frac{\Delta t}{h} (\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})^n - v \frac{3\Delta t}{h^2}] \delta_{m+1}^{n+1} \\ & \quad + [4 + v \frac{6\Delta t}{h^2} + \frac{6\Delta t}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1})^n] \delta_m^{n+1} \\ = & [1 + v \frac{3\Delta t}{h^2}] \delta_{m-1}^n + (4 - v \frac{6\Delta t}{h^2}) \delta_m^n + (1 + v \frac{3\Delta t}{h^2}) \delta_{m+1}^n \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade kısaltılarak

$$\alpha_1 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_m^{n+1} + \alpha_3 \delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_4 \delta_{m-1}^n + \alpha_5 \delta_m^n + \alpha_6 \delta_{m+1}^n \quad (3.18)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$K_m^n = (\delta_{m+1} - \delta_{m-1})^n, \quad Z_m^n = (\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})^n$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 + R_1 K_m^n - R_1 Z_m^n - R_2, & \alpha_2 &= 4 + 4R_1 K_m^n + 2R_2, \\ \alpha_3 &= 1 + R_1 K_m^n + R_1 Z_m^n - R_2 \\ \alpha_4 &= 1 + R_2, & \alpha_5 &= 4 - 2R_2, & \alpha_6 &= 1 + R_2\end{aligned}$$

ve

$$R_1 = \frac{3\Delta t}{2h}, \quad R_2 = v \frac{3}{h^2} \Delta t$$

dir. (3.18) ifadesi $d = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$ vektörü ile gösterilen $N + 3$ bilinmeyenden oluşan $N + 1$ lineer denklem içeren bir sistemdir. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için iki koşul daha gerekir. Sınır koşulları kullanılarak $\delta_{-1}, \delta_{N+1}$ yok edilirse (3.18) denklemini matris formunda

$$A(d)d^{n+1} = B(d)d^n + b \quad (3.19)$$

olarak yazılır. $A(d)$ ve $B(d)$ matrisleri $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu üçgensel matrislerdir. b sınır koşullarına bağlı $(N + 1)$ boyutlu vektördür. (3.18) sisteminde d^n zaman adımlarını hesaplayabilmek için d^0 başlangıç vektörü $[a, b]$ aralığında tanımlı kübik B-spline yaklaşımıyla $U(x, 0)$ başlangıç koşulu yardımıyla

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0(t),$$

ifadesinden belirlenir. Burada δ_m^0 ' ler bilinmeyen parametrelerdir. Buna göre başlangıç koşulunun yaklaşık çözüme eşitliğinden ve sınır koşullarından

$$\begin{aligned}U_N(x_m, 0) &= U(x_m, 0), & 0 \leq m \leq N \\ U_N(a, 0) &= U(a, 0), \\ U_N(b, 0) &= U(b, 0).\end{aligned}$$

yazılabilir. (3.19) sisteminde Thomas algoritması kullanılarak $\delta_m^0, m = -1, \dots, N + 1$ başlangıç parametreleri belirlenir. Başlangıç parametreleri kullanılarak (3.19) sisteminin iteratif olarak çözümleri elde edilir.

3.2.1 Kararlılık Analizi

Burger denkleminde lineer olmayan UU_x terimindeki $U = \lambda$ sabit alınarak lineerleştirilmiş Burger denkleminin von Neumann kararlılık analizi uygulanacaktır. (3.1) denkleminin lineerleştirilmiş formunu

$$\alpha_1 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_m^{n+1} + \alpha_3 \delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_4 \delta_{m-1}^n + \alpha_5 \delta_m^n + \alpha_6 \delta_{m+1}^n \quad (3.20)$$

olarak yazalım. Burada

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - R_1 - R_2, & \alpha_2 &= 4 + 2R_2, & \alpha_3 &= 1 + R_1 - R_2 \\ \alpha_4 &= 1 + R_1 + R_2, & \alpha_5 &= 4 - 2R_2, & \alpha_6 &= 1 - R_1 + R_2 \\ R_1 &= \lambda \frac{3\Delta t}{2h}, & R_2 &= v \frac{3\Delta t}{h^2} \end{aligned}$$

dir. Son denkleminde

$$\delta_m^n = \hat{\delta}^n e^{imkh},$$

Fourier modu (3.20) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$(a + b + ic)\hat{\delta}^{n+1} = (a - b - ic)\hat{\delta}^n$$

eşitliği bulunur. Burada

$$\begin{aligned} a &= (2 \cos^2(kh/2) + 1), \\ b &= 2R_2 \sin^2(kh/2), \\ c &= R_1 \sin(kh) \end{aligned} \quad (3.21)$$

olarak bulunur. $\hat{\delta}^{n+1} = g\hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a - b - ic}{a + b + ic} \quad (3.22)$$

elde edilir. g 'nin modülü alındığında

$$|g|^2 = \frac{(a - b)^2 + c^2}{(a + b)^2 + c^2}$$

bulunur. Kararlılık için $|g| \leq 1$ olması gerektiğinden

$$\begin{aligned} (a - b)^2 + c^2 &\leq (a + b)^2 + c^2 \\ 4ab &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

koşulu sağlanmalıdır. (3.21) ifadeleri (3.23) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$ab = 2R_2(2 \cos^2 kh/2 + 1)(\sin^2 kh/2) \geq 0$$

bulunur. Son eşitsizlik daima pozitif olduğundan (3.20) denklemi koşulsuz kararlıdır.

3.3 Taylor-Kollokasyon Kuintik B-spline Metodu (TC-QNBM)

Bu kısımda, Burger denkleminin Taylor seri açılımıyla elde edilen zamana göre ayrıştırılmış (3.7) denkleminde kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılarak kollokasyon çözümü yapılacaktır.

$\{\phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_{N+2}\}$ kuintik B-spline fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir taban oluşturur. $U(x, t)$ tam çözüm olmak üzere $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü kuintik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (3.24)$$

Burada δ_m ' ler sınır ve kollokasyon koşullarından belirlenecek zamana bağlı parametrelerdir.

(1.38)-(1.40) ile verilen kuintik B-spline bağıntıları Taylor seri açılımıyla zaman ayrıştırması yapılan (3.7) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (\delta_{m+2} + 26\delta_{m+1} + 66\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2})^{n+1} + R_1 Z_m^n (\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2})^{n+1} \\ & \quad + R_1 K_m^n (\delta_{m+2} + 26\delta_{m+1} + 66\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2})^{n+1} \\ & \quad - R_2 (\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2})^{n+1} \\ = & (\delta_{m+2} + 26\delta_{m+1} + 66\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2})^n + R_2 (\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2})^{n+1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K_m^n &= (\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \\ Z_m^n &= (\delta_{m+2} + 26\delta_{m+1} + 66\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \\ R_1 &= \frac{5\Delta t}{2h}, \quad R_2 = v \frac{10\Delta t}{h^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3 \delta_m^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\ & = \\ & \alpha_6 \delta_{m-2}^n + \alpha_7 \delta_{m-1}^n + \alpha_8 \delta_m^n + \alpha_9 \delta_{m+1}^n + \alpha_{10} \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (3.25)$$

ve katsayılar

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 + R_1 K_m^n - R_1 Z_m^n - R_2), & a_2 &= (26 + 26R_1 K_m^n - 10R_1 Z_m^n - 2R_2), \\ a_3 &= (66 + 66R_1 K_m^n + 6R_2), & a_4 &= (26 + 26R_1 K_m^n + 10R_1 Z_m^n - 2R_2), \\ a_5 &= (1 + R_1 K_m^n + R_1 Z_m^n - R_2), & a_6 &= a_{10} = (1 + R_2), \\ a_7 &= a_9 = (26 + 2R_2), & a_8 &= 66 - 6R_2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. (3.25) denklem sistemi, $N + 5$ bilinmeyen içeren $N + 1$ lineer denklemden oluşur. Bu sistemin çözümünün olabilmesi için 4 koşul daha gerekir. (3.3) sınır koşullarından $\delta_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \delta_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}$ parametreleri yok edilerek (3.25) denklem sistemi $\tilde{\delta}^{n+1} = (\delta_0^{n+1}, \delta_1^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1})^T$ için $N + 1$ bilinmeyenli sisteme dönüşür.

$$A \tilde{\delta}^{n+1} = B \tilde{\delta}^n$$

A ve B matrisleri 5' li bant matrislerdir. Thomas algoritması ile kolaylıkla çözülebilir. Z_m ve K_m lineer olmayan terimleri iç iterasyonla bir önceki zaman adımı kullanılarak hesaplanır.

(3.25) denkleminde iterasyon işlemlerine başlamak için $\tilde{\delta}^0$ başlangıç vektörü $U(x, t)$ fonksiyonunun $U(x, 0)$ başlangıç koşulundan belirlenir. (3.24) denklemi başlangıç koşulu için

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m^0$$

biçiminde yazılır. Buradaki δ_m^0 , başlangıç parametresi, aşağıda verilen başlangıç koşulu ve sınır koşulları kullanılarak belirlenir:

$$\begin{aligned} U_N(x_m, 0) &= \delta_{m+2} + 26\delta_{m+1} + 66\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2} = U_0(x_m), \quad m = 0, \dots, N, \\ (U_N(a, 0))_x &= U'_N(a, 0) = \frac{5}{h}(\delta_2 + 10\delta_1 - 10\delta_{-1} - \delta_{-2}) = 0, \\ (U_N(b, 0))_x &= U'_N(b, 0) = \frac{5}{h}(\delta_{N+2} + 10\delta_{N+1} - 10\delta_{N-1} - \delta_{N-2}) = 0, \\ (U_N(a, 0))_{xx} &= U''_N(a, 0) = \frac{20}{h^2}(\delta_2 + 2\delta_1 - 6\delta_0 + 2\delta_{-1} + \delta_{-2}) = 0, \\ (U_N(b, 0))_{xx} &= U''_N(b, 0) = \frac{20}{h^2}(\delta_{N+2} + 2\delta_{N+1} - 6\delta_N + 2\delta_{N-1} + \delta_{N-2}) = 0. \end{aligned}$$

3.3.1 Kararlılık Analizi

Kararlılık için lineer olmayan UU_x teriminde $U = \lambda$ alınarak lineerleştirilen Burger denkleminde von Neumann metodunu uygulayalım. (3.1) denklemi düzenlenerek yazıldığında

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3 \delta_m^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\ & = \\ & \alpha_6 \delta_{m-2}^n + \alpha_7 \delta_{m-1}^n + \alpha_8 \delta_m^n + \alpha_9 \delta_{m+1}^n + \alpha_{10} \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (3.26)$$

denklemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - R_1 - R_2, & \alpha_2 &= 26 - 10R_1 - 2R_2, & \alpha_3 &= 66 + 6R_2, \\ \alpha_4 &= 26 + 10R_1 - 2R_2, & \alpha_5 &= 1 + R_1 - R_2, & \alpha_6 &= 1 + R_1 + R_2, \\ \alpha_7 &= 26 + 10R_1 + 2R_2, & \alpha_8 &= 66 - 6R_2, & \alpha_9 &= 26 - 10R_1 + 2R_2, \\ \alpha_{10} &= 1 - R_1 + R_2, & R_1 &= \lambda \frac{5\Delta t}{2h}, & R_2 &= v \frac{10\Delta t}{h^2} \end{aligned}$$

dir. $\delta_m^n = \hat{\delta}^n e^{imkh}$ Fourier modu (3.26) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$(a - b - ic)\hat{\delta}^{n+1} = (a + b + ic)\hat{\delta}^n$$

eşitliği bulunur. Burada

$$\begin{aligned} a &= (2 \cos^2(kh) + 52 \cos^2(kh/2) + 6), \\ b &= R_2(2 \sin^2(kh) + 4 \sin^2(kh/2)), \\ c &= R_1(\sin 2(kh) + 10 \sin(kh)) \end{aligned}$$

dir. g büyüme çarpanı olmak üzere $\hat{\delta}^{n+1} = g\hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a - b - ic}{a + b + ic} \quad (3.27)$$

elde edilir. g ' nin modülü alındığında

$$|g|^2 = \frac{(a - b)^2 + c^2}{(a + b)^2 + c^2}$$

bulunur. Kararlılık için $|g| \leq 1$ olmalı, dolayısıyla da

$$\begin{aligned} (a - b)^2 + c^2 &\leq (a + b)^2 + c^2 \\ 4ab &\geq 0 \end{aligned}$$

koşulu sağlanmalıdır.

$$ab = R_2(2 \cos^2(kh) + 52 \cos^2(kh/2) + 6)(2 \sin^2(kh) + 4 \sin^2(kh/2))$$

ifadesi $|\cos kh| \leq 1$ ve $|\sin kh| \leq 1$ olduğundan daima pozitiftir. Buna göre (3.26) denklemi koşulsuz kararlıdır.

3.4 Test Problemleri

Bu bölümde, Burger denkleminin sayısal çözümleri elde edilecektir. Sayısal metodun doğruluğunu ölçmek için sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki fark L_2 ve L_∞ hata normları kullanılarak hesaplanacaktır.

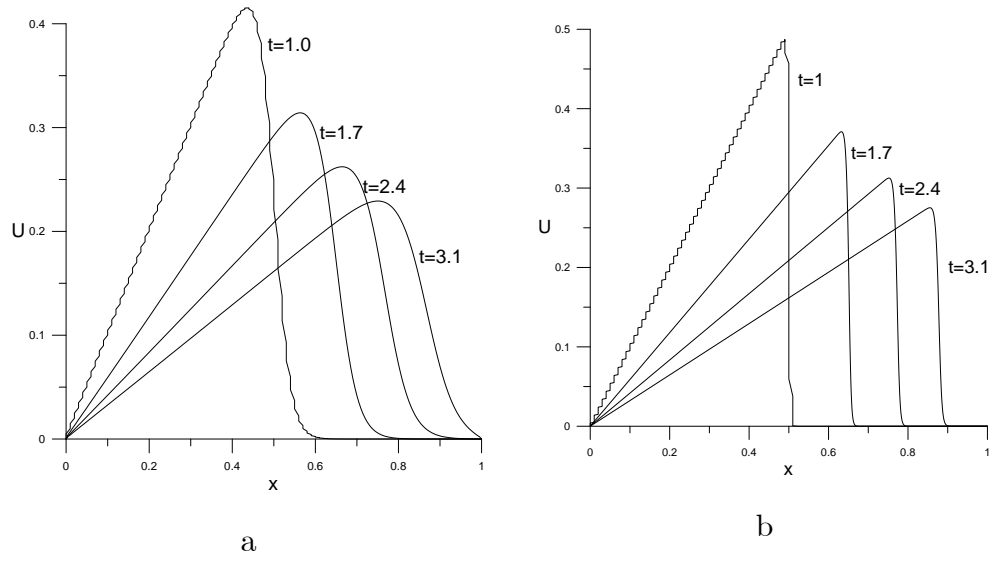
a) Burger denkleminin şok yayılımının analitik çözümü (Nguyen and Reynen, 1987)

$$U(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{(t/t_0)}e^{(x^2/4vt)}}, \quad t \geq 1 \quad (3.28)$$

$t_0 = e^{(1/8v)}$ biçiminde tanımlanmıştır. Başlangıç koşulu (3.28) denkleminde $t = 1$ yazılarak elde edilir:

$$U(x, 1) = \frac{x}{1 + \sqrt{(1/t_0)}e^{(x^2/4v)}}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

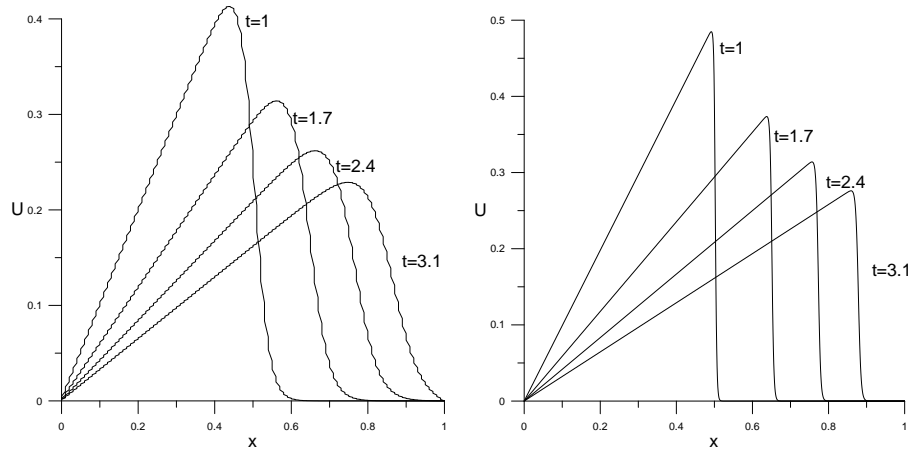
Sınır koşulları $U(0, t) = U_x(0, t) = 0$ ve $U(1, t) = U_x(1, t) = 0$ olarak alındı.



Şekil 3.1. Farklı zamanlardaki TG-QDBM ile çözümü:

a) $h = 0.005$, $v = 0.005$

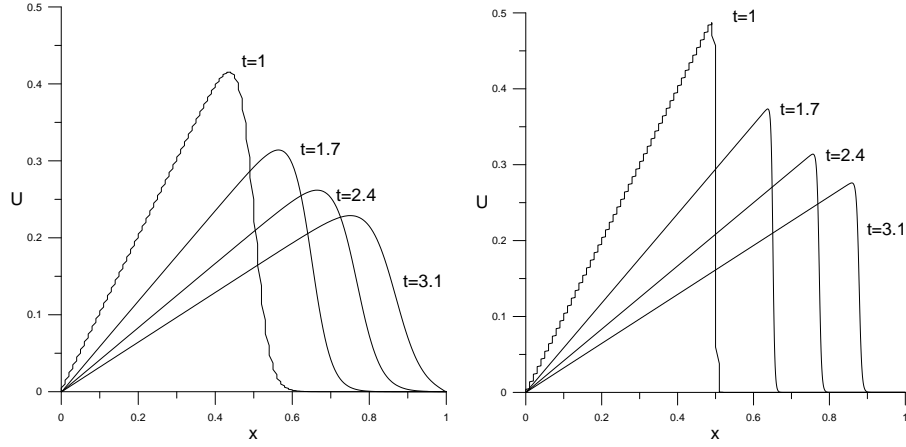
b) $h = 0.001$, $v = 0.0005$



Şekil 3.2: Farklı zamanlardaki TC-CBM ile çözümü:

a) $h = 0.005$, $v = 0.005$

b) $h = 0.001$, $v = 0.0005$



Şekil 3.3: Farklı zamanlardaki TC-QNBM ile çözümü:

a) $h = 0.005, v = 0.005$

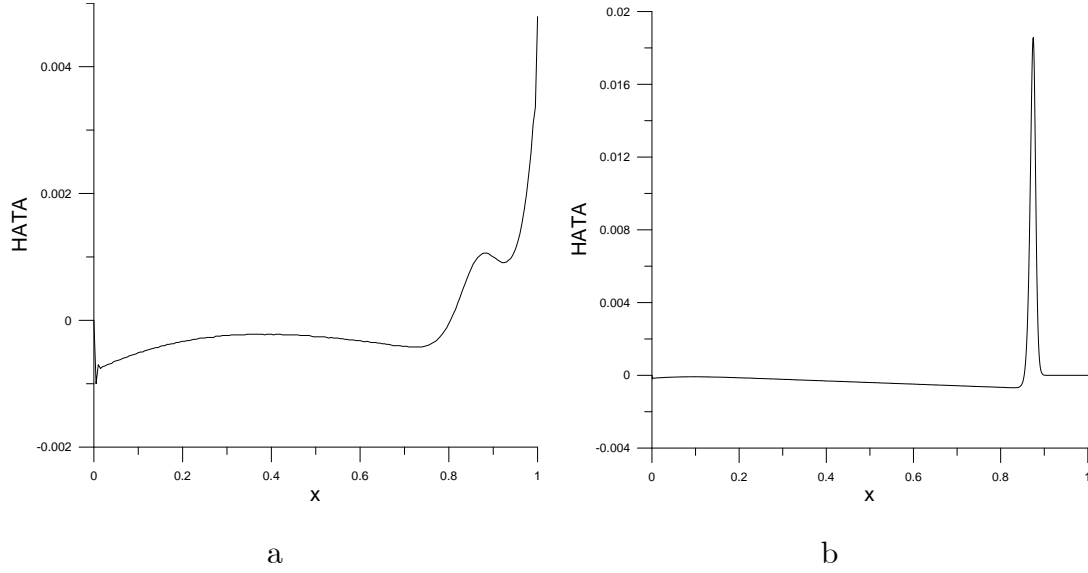
b) $h = 0.001, v = 0.0005$

Bu problemin sayısal çözümü $[0, 1]$ aralığında akışkanlık sabitinin $v = 0.01, 0.005, 0.0005$ adım uzunluğu $h = 0.02, 0.005, 0.001$ ve zaman adımı $\Delta t = 0.01$ kullanılarak hesaplandı. Önerilen üç nümerik metot $t = 1$ den $t = 3.1$ e kadar olan zaman aralıklarında çalıştırıldı. $v = 0.005$ ve $h = 0.005$ ile $v = 0.0005$ ve 0.001 kullanılarak bulunan çözümlerin grafikleri Şekil 3.1.-3.3 de gösterildi. Şekillerden de görüldüğü gibi v sabitinin değeri küçüldükçe dalgaların eğimleri dikleşir.

Tablo 3.1. Farklı zamanlardaki sonuçların karşılaştırılması: $\Delta t = 0.01, 0 \leq x \leq 1$

	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$h = 0.005, v = 0.005$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.4$	$t = 2.4$	$t = 3.1$	$t = 3.1$
TG-QDBM	0.47997	1.76325	0.47110	1.27440	0.75341	4.79057
TC-CBM	0.01688	0.06455	0.01458	0.06463	0.65076	4.79056
TC-QNBM	0.15608	0.84408	0.14251	0.60284	0.70249	4.79740
(Gardner et.al., 1990 b)	0.857	2.576	0.423	1.242	0.235	0.688
(Dag and Saka , 2007)	0.35891	1.2117	0.25132	0.80777	0.63052	4.79061
$h = 0.02, v = 0.005$	$t = 1.8$	$t = 1.8$	$t = 2.4$	$t = 2.4$	$t = 3.2$	$t = 3.2$
TG-QDBM	2.57113	7.66742	2.25957	6.71214	2.09367	5.61197
TC-CBM	0.34240	1.32904	0.23819	0.85299	1.24562	7.49140
TC-QNBM	0.63491	3.03603	0.58186	2.33489	1.05492	4.82024
(Ramadan et al., 2005 a)	0.68761	2.47189	0.67943	2.16784	1.48559	7.49146
$h = 0.02, v = 0.01$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.1$	$t = 2.1$	$t = 2.6$	$t = 2.6$
TG-QDBM	1.74548	6.23839	1.80075	4.69179	2.15576	8.06795
TC-CBM	0.14941	0.41743	0.24217	1.14759	1.55801	8.06794
TC-QNBM	0.75299	3.25151	0.75153	2.67470	1.86786	8.09564
(Ramadan et al., 2005 a)	0.69910	3.13476	0.72976	2.66986	1.74570	8.06798

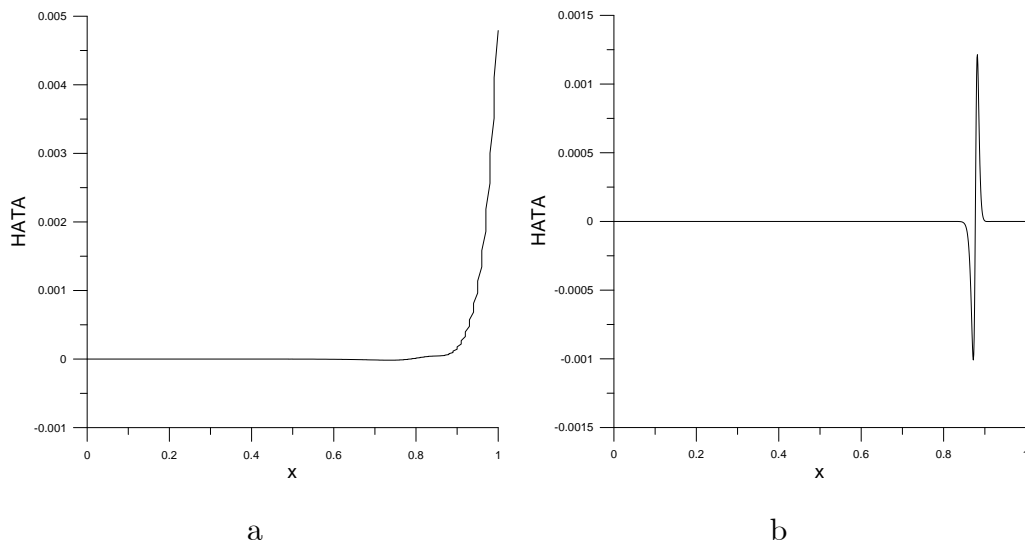
Tam çözüm ve önerilen nümerik metotlardan elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 3.1 de verildi. Üç metodun da birbirine yakın sonuçlar verdiği söylenebilir. TC-CBM metodunda hatanın başlangıç zamanlarında diğerlerine göre daha düşük olduğu Tablodan gözlemlenebilir. Tabloya göre v akışkanlık sabitinin değeri küçüldüğünde hata çok değişmezken h konum adımları küçültüldüğünde hata azalmaktadır.



Şekil 3.4. $t=3.1$ 'deki TG-QDBM ile çözümün hata grafikleri:

a) $h = 0.005, v = 0.005$

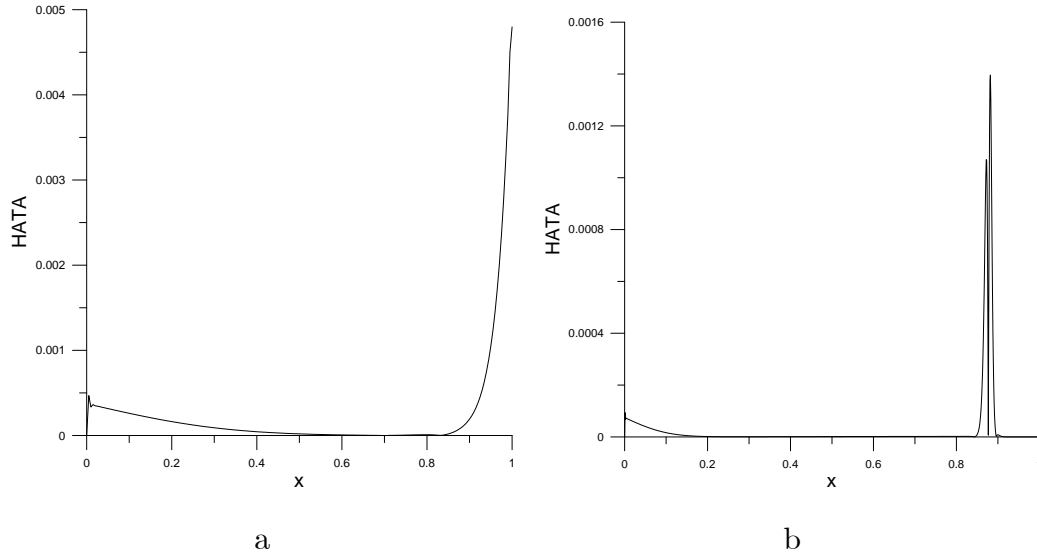
b) $h = 0.001, v = 0.0005$



Şekil 3.5: $t=3.1$ 'deki TC-CBM ile çözümün hata grafikleri:

a) $h = 0.005, v = 0.005$

b) $h = 0.001, v = 0.0005$



Şekil 3.6. $t=3.1$ ' deki TC-QNBM ile çözümün hata grafikleri:

a) $h = 0.005, v = 0.005$

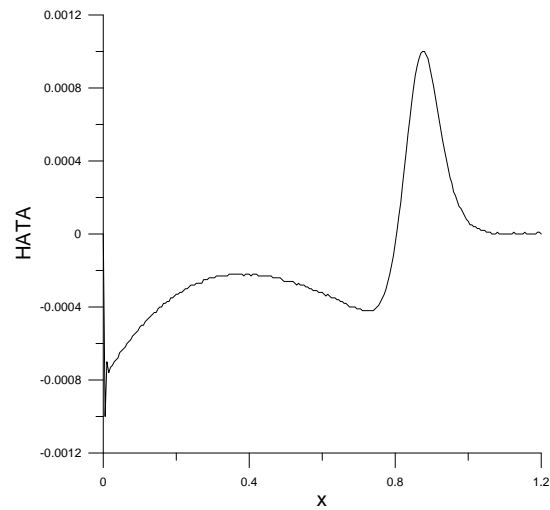
b) $h = 0.001, v = 0.0005$

Analitik çözüm ile nümerik çözüm arasındaki hata grafiği $t = 3.1$ zamanında $v = 0.005$ ve 0.0005 için çizilerek Şekil 3.4-3.6 da gösterildi. Maksimum hatanın, sınırın sağ tarafında oluştuğu görüldü. Bu hata tanım aralığındaki sınır sağ tarafa doğru genişletilerek azaltılabilir.

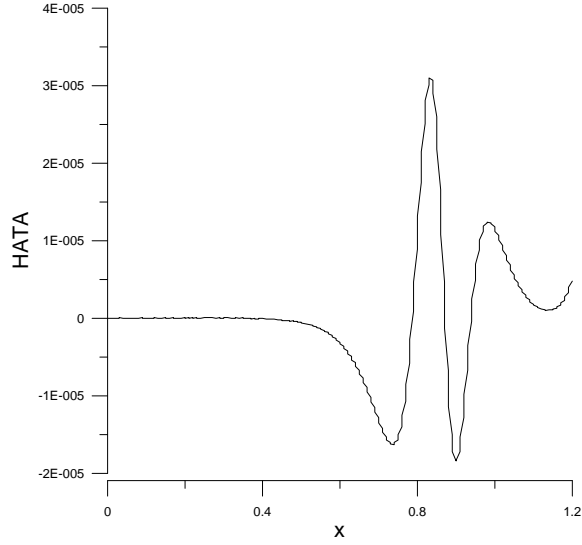
Tanım aralığı $[0, 1]$ den $[0, 1.2]$ ye genişletildiğinde elde edilen hata değerleri Tablo 3.2 de verildi. Buna göre, bulunan hatalar bir önceki algorithmadan elde edilen sonuçlardan daha küçük elde edilmiştir.

Tablo 3.2. Farklı zamanlardaki sonuçların karşılaştırılması: $\Delta t = 0.01, 0 \leq x \leq 1.2$

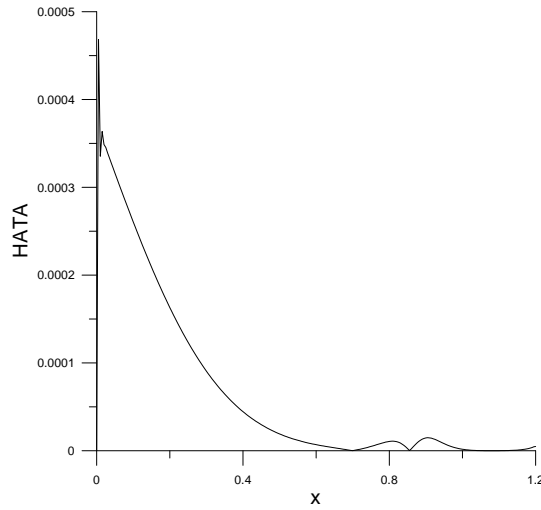
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$h = 0.005, v = 0.005,$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.4$	$t = 2.4$	$t = 3.1$	$t = 3.1$
TG-QDBM	0.47997	1.76325	0.47107	1.27440	0.43351	1.00149
TC-CBM	0.01688	0.06455	0.01202	0.04291	0.00911	0.03101
TC-QNBM	0.15608	0.84408	0.14226	0.60284	0.12960	0.46829
$h = 0.02, v = 0.005$	$t = 1.8$	$t = 1.8$	$t = 2.4$	$t = 2.4$	$t = 3.2$	$t = 3.2$
TG-QDBM	2.57123	7.66746	2.26072	6.71179	1.91257	5.41120
TC-CBM	0.34240	1.32904	0.23787	0.85302	0.16541	0.56000
TC-QNBM	0.63491	3.03603	0.58186	2.33489	0.52122	1.77612
$h = 0.02, v = 0.01$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.1$	$t = 2.1$	$t = 2.6$	$t = 2.6$
TG-QDBM	1.74581	6.23839	1.70380	5.26567	1.60999	4.36992
TC-CBM	0.14826	0.41743	0.11605	0.31220	0.09321	0.22606
TC-QNBM	0.75299	3.25151	0.75153	2.67470	0.66557	2.18206



Şekil 3.7: $t = 3.1$ ve $0 \leq x \leq 1.2$ için TG-QDBM ile çözümünün hata grafiği.



Şekil 3.8: $t = 3.1$ ve $0 \leq x \leq 1.2$ için TC-CBM ile çözümünün hata grafiği.



Şekil 3.9: $t = 3.1$ ve $0 \leq x \leq 1.2$ için TC-QNBM ile çözümünün hata grafiği.

$v = 0.005$ ve $t = 3.1$ zamanındaki hatanın grafiği TG-QDBM için Şekil 3.7 de TC-CBM için Şekil 3.8 de ve TC-QNBM için Şekil 3.9 da gösterildi. Buna göre en

küçük hata TC-CBM ile elde edildi.

b) İkinci test problemi olarak, Burger denkleminin analitik çözümü (Harris, 1996)

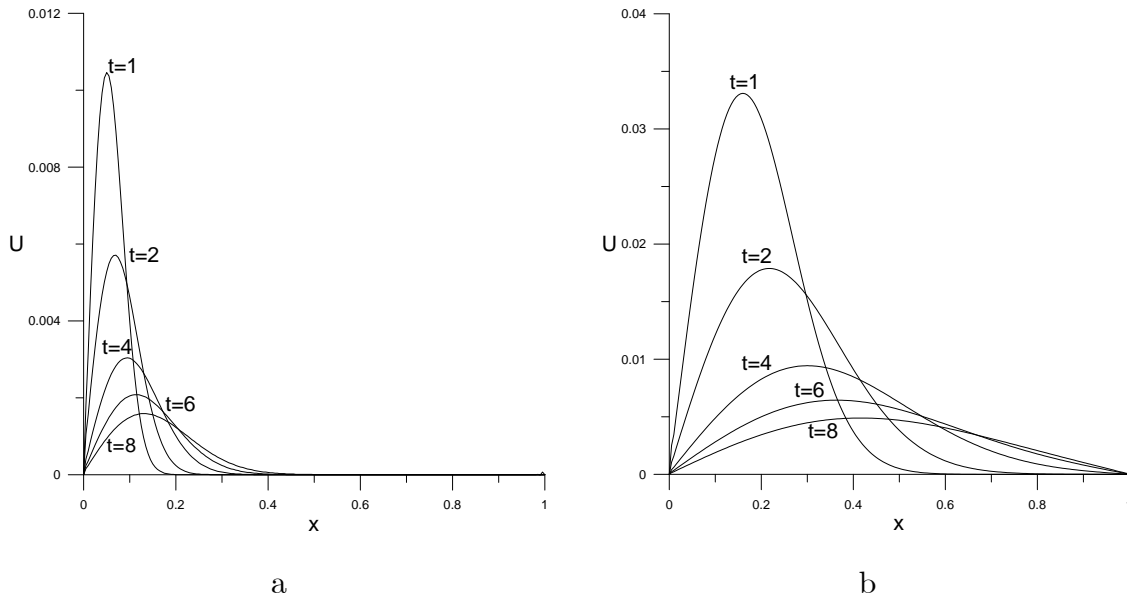
$$U(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{t/t_0}e^{(x^2/4vt)}}, \quad t \geq 1, 0 \leq x \leq 1 \quad (3.29)$$

t_0 sabit olmak üzere $0 < t_0 < 1$ olarak tanımlanan problem ele alınmıştır.

Başlangıç koşulu $t = 1$ için

$$U(x, 1) = \frac{x}{1 + 1/t_0 e^{(x^2/4v)}}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

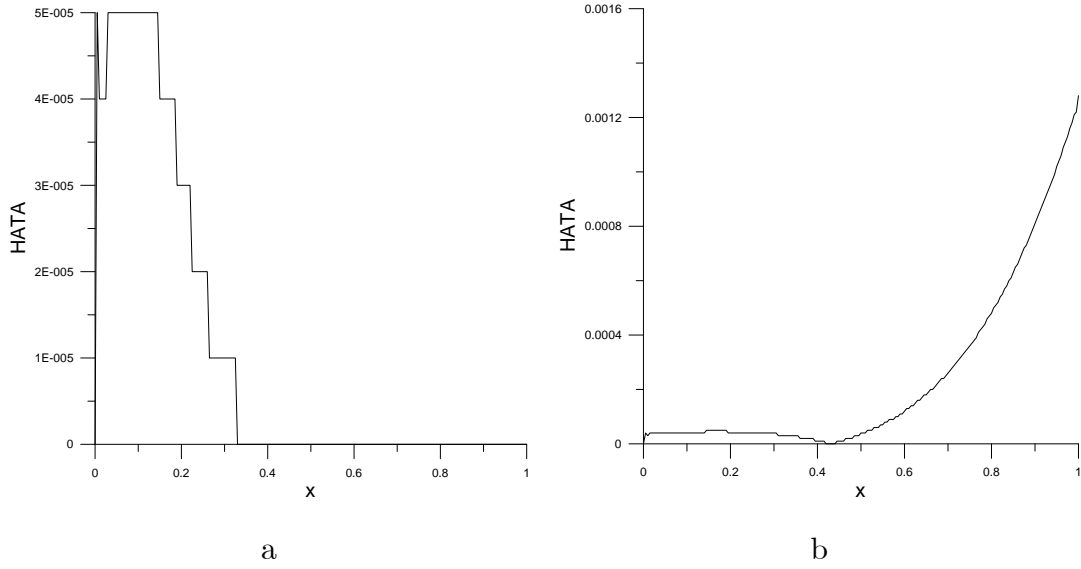
ve sınır koşulları $U(0, t) = U_x(0, t) = 0$ ve $U(1, t) = U_x(1, t) = 0$ olarak alındı.



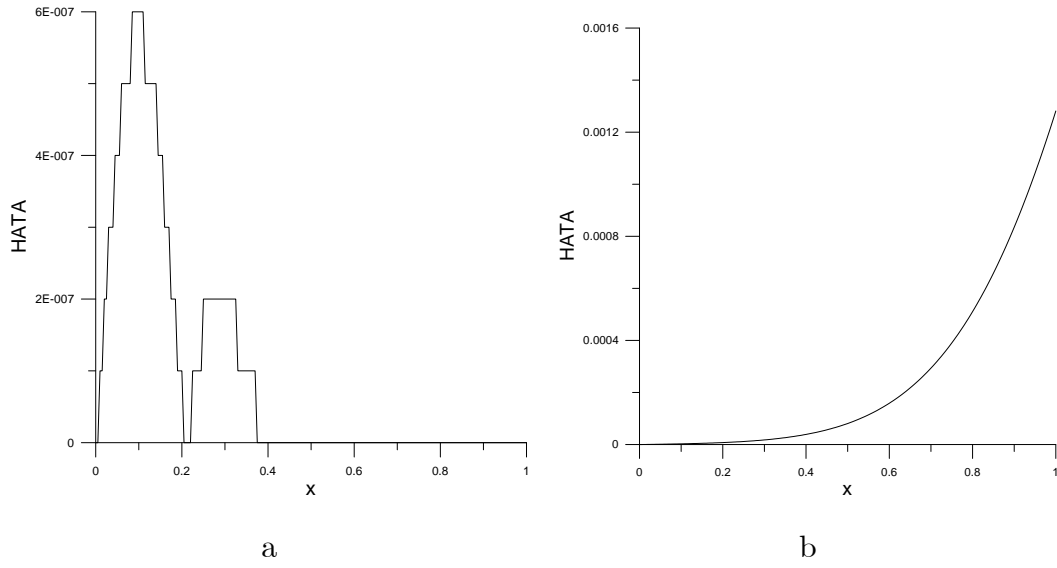
Şekil 3.10. TG-QDBM ile çözümü, a) $v = 0.001$, b) $v = 0.01$.

Literatürde yer alan diğer çalışmalarla karşılaştırabilmek için nümerik çözümler $[0, 1]$ aralığında $t_0 = 0.5$, $\Delta t = 0.01$, $v = 0.01, 0.001, 0.005$ ve $h = 0.02, 0.005$ için elde edildi. $v = 0.01, 0.001$ ve $h = 0.005$ için elde edilen nümerik çözümün grafiği diğer metotlarda da benzer olduğu için sadece TG-QDBM metoduna göre grafik çizildi ve Şekil 3.10 da gösterildi. Bu değerler için hata değişim grafikleri üç nümerik

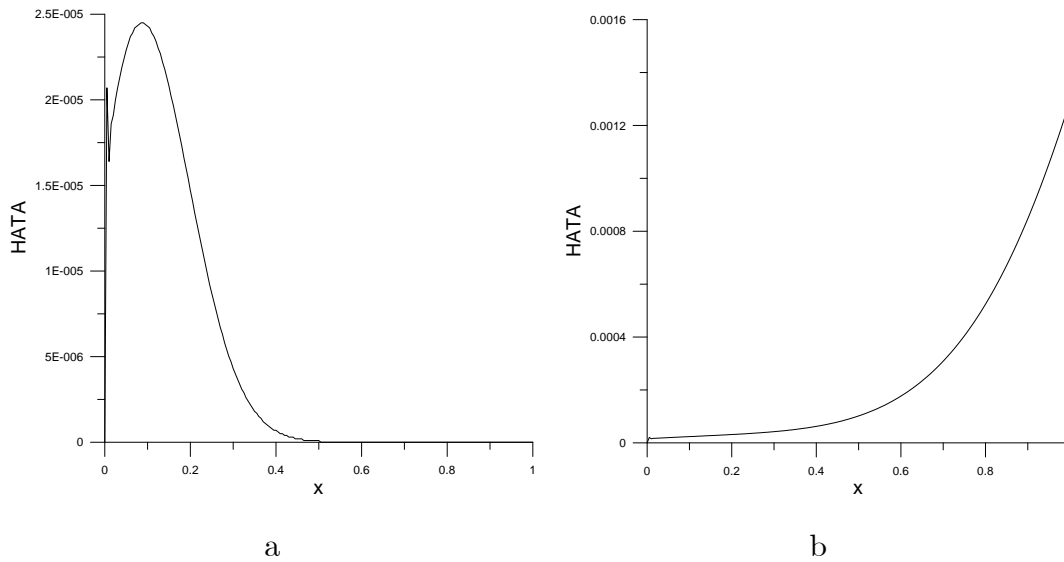
metot içinde çizilerek Şekil 3.11.-3.13. de gösterildi. $v = 0.01$ için maksimum hata yine sağ uç sınırdaki gözlemlendi. $v = 0.001$ dan daha küçük değerlerde ise maksimum hata şok dalganın en zirvede olduğu civarda gözlemlendi.



Şekil 3.11. TG-QDBM için hata grafiği: a) $v = 0.001$, b) $v = 0.01$



Şekil 3.12. TC-CBM için hata grafiği: a) $v = 0.001$, b) $v = 0.01$



Şekil 3.13. TC-QNBM için hata grafiği: a) $v = 0.001$, b) $v = 0.01$

$h = 0.005, \Delta t = 0.01$ ve $v = 0.005, 0.001, 0.01$ için analitik çözüm ve nümerik çözümler arasındaki hata normları Tablo 3.3 de verildi. Genelde uygulanan sayısal metotların diğer metotlara göre daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir. TG-QDBM metodu ile TC-QNBM metodundan elde edilen hataların birbirine yakın olduğu görülmektedir. TC-CBM metodu ile elde edilen hata farklı v değerlerinde özellikle de $v = 0.001$ olduğunda diğerlerine göre oldukça küçüktür.

Tablo 3.3. Farklı zamanlardaki sonuçların karşılaştırılması: $h = 0.005, \Delta t = 0.01$

	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$v = 0.005$	$t = 2$	$t = 2$	$t = 6$	$t = 6$	$t = 10$	$t = 10$
TG-QDBM	0.08951	0.40908	0.04604	0.09216	0.03992	0.10643
TC-CBM	0.00088	0.00242	0.00152	0.00817	0.02493	0.10642
TC-QNBM	0.04186	0.19037	0.02126	0.04189	0.02980	0.10647
(Saka and Dag, 2008)	0.22651	0.57998	0.16446	0.32987	0.013959	0.22885
$v = 0.001$						
TG-QDBM	0.05841	0.39980	0.03073	0.09511	0.02171	0.05350
TC-CBM	0.00129	0.00529	0.00039	0.00131	0.00019	0.00056
TC-QNBM	0.02827	0.18916	0.01422	0.04252	0.01003	0.04252
(Saka and Dag, 2008)	0.06811	0.26094	0.04942	0.14810	0.04067	0.10264
(Ramadan et al., 2005 a)	0.18355	0.81852	0.08142	0.21348	0.05512	0.13943
$v = 0.01$						
TG-QDBM	0.10705	0.41083	0.13972	0.52580	0.41246	1.28127
TC-CBM	0.00077	0.00177	0.13501	0.52579	0.42796	1.28126
TC-QNBM	0.04968	0.19063	0.14048	0.52597	0.43642	1.28149
(Saka and Dag, 2008)	0.37932	0.81680	0.32602	0.52579	0.54701	1.28125
(Ramadan et.al, 2005 b)	0.5231	1.2170	0.4902	0.7225	0.6401	1.2813

3.5 Sonuç

Bu bölümde, Burger denkleminin zaman ayrıştırması için Taylor seri açılımı kullanılmış ve kuadratik, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılarak konum ayrıştırması Galerkin ve kollokasyon metotları ile yapılmıştır. İki test problem kullanılarak Burger denkleminin sayısal çözümleri incelenmiştir. Sayısal metotların doğruluğunu ölçmek için belirli zaman adımlarında her bir düğüm noktasındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki fark L_2 ve L_∞ hata normları kullanılarak hesaplanmış ve grafikleri çizilmiştir. Ayrıca uygulanan sayısal metotlardan elde edilen sonuçlar, literatürde yer alan diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Buna göre, birinci test problem için TC-CBM çözümünün, diğerlerine göre daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir. Tablo 3.1. ve Tablo 3.2. de belirli zamanlardaki metotların hata analizlerine bakılırsa, TC-CBM çözümünün tam çözüme yakın sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir. $v = 0.005$ için şok dalganın hızlı ilerlemesi ve sağ sınıra çarpması nedeniyle hata sağ sınırdan artmaktadır. Oluşan bu hatanın küçültülmesi için aralık sağa doğru genişletilmiş ve hatanın azaldığı görülmüştür. v akışkanlık sabitinin değeri azaldığında hatanın az da olsa azaldığı görülmüştür. Aynı v değeri için h konum adımı küçüldükçe hata yine azalmaktadır (Bkz. Tablo 3.1.).

İkinci test probleminde, Burger denkleminin önerilen sayısal metotlarla çözümünün zamanla hareketi incelenmiştir. Metotlardan elde edilen sonuçlar analitik sonuçlarla ve literatürde yer alan diğer çalışmalarla Tablo 3.3 de karşılaştırılmıştır. Buna göre için önerilen üç metodunda diğerlerine göre daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir. Ayrıca bu test probleminde, kullanılan viskozite sabiti için hatanın yine sınırlarda arttığı görülmüştür.

Sayısal metotlar kendi aralarında kıyaslandığında, her iki test problem için de TC-CBM çözümü uygulanan diğer sonlu eleman çözümlerinden daha iyi sonuç vermiştir. Uygulanan metotlardan elde edilen fark denklemlerine, von Neumann kararlılık analizi uygulanmış ve bu denklemlerin koşulsuz kararlı oldukları gösterilmiştir.

Sonuç olarak üç metodun da Burger denkleminin sayısal çözümü için uygulanabilir olduğu ve iyi derecede sayısal çözümler verebilecek yeterlilikte olduğu söylenebilir.

4.KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, KdV denkleminin Taylor seri açılımı ile zaman ayrıştırması yapılacak ve konum ayrıştırması Galerkin kuadratik B spline, Galerkin kübik B-spline ve kollokasyon kuintik B-spline metotlarıyla yapılacaktır. Önerilen sayısal çözümler bazı test problemleri ile test edilerek, hata normları hesaplanacaktır.

KdV denklemi ε ve μ pozitif parametre olmak üzere,

$$U_t + \varepsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (4.1)$$

biçiminde tanımlanan birçok fiziksel olayın modellenmesinde kullanılan lineer olmayan bir dalga denklemdir. (4.1) denkleminin sayısal çözümleri araştırılırken

$$\begin{aligned} U(a, t) &= \beta_1, \quad U(b, t) = \beta_2, \\ U_x(a, t) &= U_x(b, t) = 0, \\ U_{xx}(a, t) &= U_{xx}(b, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

sınır koşulları ve

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

başlangıç koşulu kullanılacaktır (Gardner et.al., 1989) .

4.1 Taylor-Galerkin Kuadratik B-spline Metodu (TG-QDBM)

$$U_t = -\varepsilon U U_x - \mu U_{xxx}, \quad a \leq x \leq b \quad (4.3)$$

biçiminde yazılan KdV denkleminin ilk olarak zamana göre Taylor seri açılımı yapılarak zaman ayrıştırmasını yapalım.

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t U_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} U_{tt}^n + O(\Delta t^3)$$

ifadesinde hata ihmal edilirse

$$U_t^n = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} U_{tt}^n \quad (4.4)$$

olarak yazılabilir. (4.3) denkleminin zamana göre türevi

$$\begin{aligned} U_{tt}^n &= (-\varepsilon U U_x - \mu U_{xxx})_t^n = -\varepsilon U^n (U_t^n)_x - \varepsilon U_x^n U_t^n - \mu (U_t^n)_{xxx} \\ &= -\varepsilon U^n \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right)_x - \varepsilon U_x^n \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right) - \mu \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right)_{xxx} \end{aligned} \quad (4.5)$$

biçiminde yazılabilir. (4.3) ve (4.5) denklemleri (4.4) ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -\varepsilon U^n U_x^n - \mu U_{xxx}^n &= \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \left[-\varepsilon U^n \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right)_x \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon U_x^n \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right) - \mu \left(\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \right)_{xxx} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemin düzenlenmesiyle (4.1) denkleminin zamana göre ayrıştırılmış

$$\left(1 + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} U^n \partial_x + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} U_x^n + \mu \frac{\Delta t}{2} \partial_x^3 \right) U^{n+1} = \left(1 - \mu \frac{\Delta t}{2} \partial_x^3 \right) U^n \quad (4.6)$$

formu elde edilir.

(4.1) denkleminin yaklaşık çözümü, (1.15) ile verilen $\phi_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonlar yardımıyla tanımlanacaktır.

$U(x, t)$ analitik fonksiyonunun yaklaşık çözümü $U_N(x, t)$ olmak üzere, bu yaklaşık çözüm kuadratik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^N \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (4.7)$$

Burada δ_m ' ler sınır ve interpolasyon koşullarından belirlenecek zamana bağlı parametrelerdir.

(4.1) denkleminin zamana göre ayrıştırılmış formu olan (4.6) denkleminde Taylor-Galerkin kuadratik B-spline metodunu uygulayalım. (4.6) denklemi w ağırlık fonksiyonları ile çarpılıp, $[x_0, x_N]$ aralığında integrali almırsa,

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_N} w U^{n+1} dx + \mu \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_{xxx}^{n+1} dx + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_x^n U^{n+1} dx \\ &\quad + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U^n U_x^{n+1} dx \quad (4.8) \\ &= \int_{x_0}^{x_N} w U^n dx - \mu \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_{xxx}^n dx \end{aligned}$$

bulunur. Bu denkleminde $\int_{x_0}^{x_N} w U_{xxx} dx$ integraline kısmi integral uygulanır ve (4.2) sınır koşulları kullanılırsa

$$\int_{x_0}^{x_N} w U_{xxx} dx = w U_{xx} \Big|_{x_0}^{x_N} - \int_{x_0}^{x_N} w_x U_{xx} dx = - \int_{x_0}^{x_N} w_x U_{xx} dx$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik (4.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_N} wU^{n+1}dx - \mu \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w_x U_{xx}^{n+1} dx \\ & + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_x U^{n+1} dx + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U^n U_x^{n+1} dx \\ & = \int_{x_0}^{x_N} w U^n dx + \mu \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w_x U_{xx}^n dx \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü için w ağırlık fonksiyonları kuadratik B-spline fonksiyonlar olarak seçilir. $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left[\int_0^h \phi_i \phi_j dx \right] \delta_j^{n+1} - \mu \frac{\Delta t}{2} \left[\int_0^h \phi_i' \phi_j'' dx \right] \delta_j^{n+1} \right. \\ & \left. + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \left[\int_0^h \phi_i \phi_k'(\delta) \phi_j dx \right] \delta_j^{n+1} + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+1} \left[\int_0^h \phi_i \phi_k(\delta) \phi_j' dx \right] \delta_j^{n+1} \right\} \quad (4.9) \\ & = \sum_{j=m-1}^{m+1} \left\{ \left[\int_0^h \phi_i \phi_j dx \right] \delta_j^n - \mu \frac{\Delta t}{2} \left[\int_0^h \phi_i' \phi_j'' dx \right] \delta_j^n \right\} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. (4.9) eşitliği matris formunda, ilgili eleman parametreleri

$$\delta_{\sim}^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})^T$$

olmak üzere

$$\{[A^e + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} C^e(\delta) + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} D^e(\delta) - \mu \frac{\Delta t}{2} B^e] \delta_{\sim}^e\}^{n+1} = \{[A^e + \mu \frac{\Delta t}{2} B^e] \delta_{\sim}^e\}^n$$

biçiminde yazılır. Buradaki matris notasyonları

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi, & B_{ij}^e &= \int_0^h \phi_i' \phi_j'' d\xi \\ L_{ijk}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j \phi_k' d\xi, & N_{ijk}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_k \phi_j' d\xi \end{aligned}$$

biçimindedir. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı için i, j, k sadece $m-1, m, m+1$ değerlerini alabilir. A^e ve B^e 3×3 , L^e ve N^e $3 \times 3 \times 3$ boyutlu matrislerdir. L^e ve N^e ile 3×3 boyutlu C^e ve D^e matrisleri

$$C_{ij}^e = \sum_{k=m-1}^{m+1} L_{ijk}^e \delta_k^e d\xi \quad D_{ij}^e = \sum_{k=m-1}^{m+1} N_{ijk}^e \delta_k^e d\xi$$

olarak tanımlanabilir. A^e ve B^e matrisleri

$$A_{ij}^e = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}, \quad B_{ij}^e = \frac{2}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde, C^e matrisi

$$\begin{aligned}
C_{11}^e &= \frac{1}{30}(-10, -19, -1)\delta_{\sim}^e \\
C_{12}^e &= \frac{1}{30}(8, 12, 0)\delta_{\sim}^e \\
C_{13}^e &= \frac{1}{30}(2, 7, 1)\delta_{\sim}^e \\
C_{21}^e &= \frac{1}{30}(-19, -54, -7)\delta_{\sim}^e \\
C_{22}^e &= \frac{1}{30}(12, 0, -12)\delta_{\sim}^e \\
C_{23}^e &= \frac{1}{30}(7, 54, 19)\delta_{\sim}^e \\
C_{31}^e &= \frac{1}{30}(-1, -7, -2)\delta_{\sim}^e \\
C_{32}^e &= \frac{1}{30}(0, -12, -8)\delta_{\sim}^e \\
C_{33}^e &= \frac{1}{30}(1, 19, 10)\delta_{\sim}^e
\end{aligned}$$

ve D^e matrisi

$$\begin{aligned}
D_{11}^e &= \frac{1}{30}(-10, 8, 2)\delta_{\sim}^e \\
D_{12}^e &= \frac{1}{30}(-19, 12, 7)\delta_{\sim}^e \\
D_{13}^e &= \frac{1}{30}(-1, 0, 1)\delta_{\sim}^e \\
D_{21}^e &= \frac{1}{30}(-19, 12, 7)\delta_{\sim}^e \\
D_{22}^e &= \frac{1}{30}(-54, 0, 54)\delta_{\sim}^e \\
D_{23}^e &= \frac{1}{30}(-7, -12, 19)\delta_{\sim}^e \\
D_{31}^e &= \frac{1}{30}(-1, 0, 1)\delta_{\sim}^e \\
D_{32}^e &= \frac{1}{30}(-7, -12, 19)\delta_{\sim}^e \\
D_{33}^e &= \frac{1}{30}(-2, -8, 10)\delta_{\sim}^e
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Element matrisleri birleştirilmiş global matrisler cinsinden yazılırsa

$$[A - \mu \frac{\Delta t v}{2} B + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} C(\delta) + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} D(\delta)]_{\sim} \delta^{n+1} = [A + \mu \frac{\Delta t}{2} B]_{\sim} \delta^n \quad (4.10)$$

matris denklemi ve

$$\delta_{\sim} = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N)^T$$

parametreleri elde edilir. A, B, C, D matrisleri $(N+2) \times (N+2)$ boyutlu 5' li bant matrislerdir. $\delta_{\sim}^{n+1} = (\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1})^T$ bilinmeyen parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bunun için (4.2) ile verilen sınır koşullarından δ_{-1} ve δ_N parametreleri

yok edilerek (4.10) sistemi ($N \times N$) boyutlu bir denklem sistemine dönüştürülür. Bu sistemin çözümü Thomas algoritmaları ile ardışık olarak bulunur. Bunun için $\tilde{\delta}^0$ başlangıç vektörü başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak

$$\delta_j = U_j - \delta_{j-1} \quad j = 1, \dots, N$$

ifadesi ile hesaplanır. $\tilde{\delta}^0$ vektörü bu şekilde elde edilerek (4.7) formundaki $U(x)$ açılımında yerine yazılır.

4.1.1 Kararlılık Analizi

KdV denkleminin lineer olmayan UU_x teriminde $U = \lambda$ sabit alınarak lineerleştirilmiş KdV denkleminde von Neumann kararlılık analizi uygulanacaktır. (4.1) denkleminin lineerleştirilmiş formu

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3 \delta_m^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\ & = \\ & \alpha_5 \delta_{m-2}^n + \alpha_4 \delta_{m-1}^n + \alpha_3 \delta_m^n + \alpha_2 \delta_{m+1}^n + \alpha_1 \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (4.11)$$

biçimindedir. Burada katsayılar

$$\alpha = \frac{h}{30}, \quad \beta = \varepsilon \frac{\Delta t \lambda}{12}, \quad \gamma = \mu \frac{\Delta t}{h^2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - \beta - \gamma, & \alpha_2 &= 26\alpha - 10\beta + 2\gamma, & \alpha_3 &= 66\alpha, \\ \alpha_4 &= 26\alpha + 10\beta - 2\gamma, & \alpha_5 &= \alpha + \beta + \gamma \end{aligned}$$

dır. $\delta_m^n = \hat{\delta}^n e^{imkh}$ biçimindeki Fourier modu (4.11) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$(a + ib)\hat{\delta}^{n+1} = (a - ib)\hat{\delta}^n$$

bulunur. Burada

$$a = \frac{h}{30}(33 + \cos 2kh + 26 \cos kh),$$

$$b = \left(\varepsilon \lambda \frac{\Delta t}{12} + \mu \frac{\Delta t}{h^2} \right) \sin 2kh + \left(\varepsilon \lambda \frac{5\Delta t}{6} - \mu \frac{2\Delta t}{h^2} \right) \sin kh$$

dir. g büyüme çarpanı olmak üzere $\hat{\delta}^{n+1} = g\hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a - ib}{a + ib}$$

elde edilir. g ' nin modülü alındığında

$$|g|^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

bulunur. $|g| \leq 1$ koşulu sağlandığından (4.11) denklemi koşulsuz kararlıdır.

4.2 Taylor-Galerkin Kübik B-spline Metodu (TG-CBM)

Bu bölümde, (4.1) denkleminin zamana göre ayrıştırılmış formu olan (4.6) denkleminde kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak Taylor-Galerkin metodu uygulanacaktır. (4.1) denkleminin yaklaşık çözümü (1.23) ile verilen $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonları yardımıyla tanımlanacaktır. $\{\phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{N+1}\}$ kübik B-spline fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Deneme fonksiyonları olarak kübik B-spline fonksiyonları seçilerek $U(x, t)$ analitik çözümüne

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (4.12)$$

biçiminde bir yaklaşık çözüm araştırılacaktır. (4.6) denklemi w ağırlık fonksiyonları ile çarpılıp, $[x_0, x_N]$ aralığında integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_N} w U^{n+1} dx + \mu \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_{xxx}^{n+1} dx + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_x^n U^{n+1} dx + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U^n U_x^{n+1} dx \\ = & \int_{x_0}^{x_N} w U^n dx - \mu \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w U_{xxx}^n dx \end{aligned} \quad (4.13)$$

bulunur. Bu denklemde $\int_{x_0}^{x_N} w U_{xxx} dx$ integraline kısmi integral uygulanır ve (4.2) sınır koşulları kullanılırsa

$$\int_{x_0}^{x_N} w U_{xxx} dx = w U_{xx} \Big|_{x_0}^{x_N} - \int_{x_0}^{x_N} w_x U_{xx} dx = - \int_{x_0}^{x_N} w_x U_{xx} dx$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (4.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_N} wU^{n+1}dx - \mu \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w_x U_{xx}^{n+1} dx + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} wU_x^n U^{n+1} dx \\ & \quad + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} wU^n U_x^{n+1} dx \\ & = \int_{x_0}^{x_N} wU^n dx + \mu \frac{\Delta t}{2} \int_{x_0}^{x_N} w_x U_{xx}^n dx \end{aligned}$$

denklemini bulunur. Burada $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü için w ağırlık fonksiyonları kübik B-spline fonksiyonlar olarak seçildiğinde $m = 0, 1, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left[\int_0^h \phi_i \phi_j dx \right] \delta_j^{n+1} - \mu \frac{\Delta t}{2} \left[\int_0^h \phi_i' \phi_j'' dx \right] \delta_j^{n+1} \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \left[\int_0^h \phi_i \phi_k'(\delta) \phi_j dx \right] \delta_j^{n+1} + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \left[\int_0^h \phi_i \phi_k(\delta) \phi_j' dx \right] \delta_j^{n+1} \right\} \quad (4.14) \\ & = \sum_{j=m-1}^{m+2} \left\{ \left[\int_0^h \phi_i \phi_j dx \right] \delta_j^n - \mu \frac{\Delta t}{2} \left[\int_0^h \phi_i' \phi_j'' dx \right] \delta_j^n \right\} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. (4.14) eşitliği matris formunda ilgili eleman parametreleri

$$\delta_{\sim}^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$$

olmak üzere

$$\{[A^e + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} C^e(\delta) + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} D^e(\delta) - \mu \frac{\Delta t}{2} B^e] \delta_{\sim}^e\}^{n+1} = \{[A^e + \mu \frac{\Delta t}{2} B^e] \delta_{\sim}^e\}^n$$

biçiminde yazılır. Buradaki eleman matrisleri

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi, \quad B_{ij}^e = \int_0^h \phi_i' \phi_j'' d\xi \\ L_{ijk}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j \phi_k' d\xi, \quad N_{ijk}^e = \int_0^h \phi_i \phi_k \phi_j' d\xi \end{aligned}$$

biçimindedir. $[x_m, x_{m+1}]$ eleman için i, j, k sadece $m-1, m, m+1, m+2$ değerlerini alabilir. A^e ve B^e 4×4 , L^e ve N^e $4 \times 4 \times 4$ boyutlu matrislerdir. L^e ve N^e ile 4×4 boyutlu C^e ve D^e matrisleri

$$C_{ij}^e = \sum_{k=m-1}^{m+2} L_{ijk}^e \delta_k^e dx \quad D_{ij}^e = \sum_{k=m-1}^{m+2} N_{ijk}^e \delta_k^e dx$$

olarak tanımlanabilir. A^e ve B^e matrisleri

$$A_{ij}^e = \frac{h}{140} \begin{bmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{bmatrix}, \quad B_{ij}^e = \frac{3}{2h^2} \begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 9 & -7 \\ 7 & -9 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

biçiminde, C^e matrisi

$$\begin{aligned}
C_{m-1,m-1}^e &= -\frac{1}{3}\delta_{m-1} - \frac{5}{28}\delta_m + \frac{1}{2}\delta_{m+1} + \frac{1}{84}\delta_{m+2} \\
C_{m-1,m}^e &= C_{m,m-1}^e = -\frac{107}{56}\delta_{m-1} - \frac{87}{56}\delta_m + \frac{927}{280}\delta_{m+1} + \frac{43}{280}\delta_{m+2} \\
C_{m-1,m+1}^e &= C_{m+1,m-1}^e = -\frac{3}{4}\delta_{m-1} - \frac{33}{35}\delta_m + \frac{219}{140}\delta_{m+1} + \frac{9}{70}\delta_{m+2} \\
C_{m-1,m+2}^e &= C_{m+2,m-1}^e = -\frac{1}{168}\delta_{m-1} - \frac{1}{40}\delta_m + \frac{1}{40}\delta_{m+1} + \frac{1}{168}\delta_{m+2} \\
C_{m,m}^e &= -\frac{316}{28}\delta_{m-1} - 21\delta_m + \frac{4167}{140}\delta_{m+1} + \frac{289}{70}\delta_{m+2} \\
C_{m,m+1}^e &= C_{m+1,m}^e = -\frac{1783}{280}\delta_{m-1} - \frac{5847}{280}\delta_m + \frac{5847}{280}\delta_{m+1} + \frac{1783}{280}\delta_{m+2} \\
C_{m,m+2}^e &= C_{m+2,m}^e = -\frac{9}{70}\delta_{m-1} - \frac{219}{140}\delta_m + \frac{33}{35}\delta_{m+1} + \frac{3}{4}\delta_{m+2} \\
C_{m+1,m+1}^e &= -\frac{289}{70}\delta_{m-1} - \frac{4167}{140}\delta_m + 21\delta_{m+1} + \frac{361}{28}\delta_{m+2} \\
C_{m+1,m+2}^e &= C_{m+2,m+1}^e = -\frac{43}{280}\delta_{m-1} - \frac{927}{280}\delta_m + \frac{87}{56}\delta_{m+1} + \frac{107}{56}\delta_{m+2} \\
C_{m+2,m+2}^e &= -\frac{1}{84}\delta_{m-1} - \frac{1}{2}\delta_m + \frac{5}{28}\delta_{m+1} + \frac{1}{3}\delta_{m+2}
\end{aligned}$$

ve D^e matrisi

$$\begin{aligned}
D_{m-1,m-1}^e &= -\frac{1}{3}\delta_{m-1} - \frac{107}{56}\delta_m - \frac{3}{4}\delta_{m+1} - \frac{1}{168}\delta_{m+2} \\
D_{m-1,m}^e &= -\frac{5}{28}\delta_{m-1} - \frac{87}{56}\delta_m - \frac{33}{35}\delta_{m+1} - \frac{1}{40}\delta_{m+2} \\
D_{m-1,m+1}^e &= \frac{1}{2}\delta_{m-1} + \frac{927}{280}\delta_m + \frac{219}{140}\delta_{m+1} + \frac{1}{40}\delta_{m+2} \\
D_{m-1,m+2}^e &= \frac{1}{84}\delta_{m-1} + \frac{43}{280}\delta_m + \frac{9}{70}\delta_{m+1} + \frac{1}{168}\delta_{m+2} \\
D_{m,m-1}^e &= -\frac{107}{56}\delta_{m-1} - \frac{361}{28}\delta_m - \frac{1783}{280}\delta_{m+1} - \frac{9}{70}\delta_{m+2} \\
D_{m,m}^e &= -\frac{87}{56}\delta_{m-1} - 21\delta_m - \frac{5847}{280}\delta_{m+1} - \frac{219}{140}\delta_{m+2} \\
D_{m,m+1}^e &= \frac{927}{280}\delta_{m-1} + \frac{4167}{140}\delta_m + \frac{5847}{280}\delta_{m+1} + \frac{33}{35}\delta_{m+2} \\
D_{m,m+2}^e &= \frac{43}{280}\delta_{m-1} + \frac{289}{70}\delta_m + \frac{1783}{280}\delta_{m+1} + \frac{3}{4}\delta_{m+2} \\
D_{m+1,m-1}^e &= -\frac{3}{4}\delta_{m-1} - \frac{1783}{280}\delta_m - \frac{289}{70}\delta_{m+1} - \frac{43}{280}\delta_{m+2} \\
D_{m+1,m}^e &= -\frac{33}{35}\delta_{m-1} - \frac{5847}{280}\delta_m - \frac{4167}{140}\delta_{m+1} - \frac{927}{280}\delta_{m+2} \\
D_{m+1,m+1}^e &= \frac{219}{140}\delta_{m-1} + \frac{5847}{280}\delta_m + 21\delta_{m+1} + \frac{87}{56}\delta_{m+2} \\
D_{m+1,m+2}^e &= \frac{9}{70}\delta_{m-1} + \frac{1783}{280}\delta_m + \frac{361}{28}\delta_{m+1} + \frac{107}{56}\delta_{m+2} \\
D_{m+2,m-1}^e &= -\frac{1}{168}\delta_{m-1} - \frac{9}{70}\delta_m - \frac{43}{280}\delta_{m+1} - \frac{1}{84}\delta_{m+2} \\
D_{m+2,m}^e &= -\frac{1}{40}\delta_{m-1} - \frac{219}{140}\delta_m - \frac{927}{280}\delta_{m+1} - \frac{1}{2}\delta_{m+2} \\
D_{m+2,m+1}^e &= \frac{1}{40}\delta_{m-1} + \frac{33}{35}\delta_m + \frac{87}{56}\delta_{m+1} + \frac{5}{28}\delta_{m+2} \\
D_{m+2,m+2}^e &= \frac{1}{168}\delta_{m-1} + \frac{3}{4}\delta_m + \frac{107}{56}\delta_{m+1} + \frac{1}{3}\delta_{m+2}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Bütün elemanlar birleştirilmiş matriste yazılırsa

$$[A - \mu \frac{\Delta t v}{2} B + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} C(\delta) + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} D(\delta)] \delta_{\sim}^{n+1} = [A + \mu \frac{\Delta t}{2} B] \delta_{\sim}^n \quad (4.15)$$

matris denklemleri ve

$$\delta_{\sim} = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1})^T$$

eleman parametreleri elde edilir. A, B, C, D matrisleri $(N+3) \times (N+3)$ boyutlu 7' li bant matrislerdir.

(4.15) denklem sisteminin çözülebilmesi için (4.11) sınır koşulları kullanılarak δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri yok edilmelidir. Böylece bilinmeyenleri $\delta_{\sim}^{n+1} = (\delta_0^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1})^T$ parametreleri olan $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu 7' li bant matrislerden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

(4.15) denkleminde iterasyon işlemlerine başlamak için δ_{\sim}^0 başlangıç vektörü $U(x, t)$ fonksiyonunun $U(x, 0)$ başlangıç koşullarından belirlenir. (4.12) ifadesi

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m^0 \phi_m(x)$$

biçiminde yazılabilir. Buna göre $U_N(x, 0)$ fonksiyonu şu koşulları sağlamalıdır:

$$\begin{aligned} U_N(x_m, 0) &= U(x_m, 0), & 0 \leq m \leq N \\ U_N''(x_0, 0) &= 0, \\ U_N''(x_N, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

(4.6) deki kübik B-spline bağıntıları ve (4.16) koşulları kullanılarak elde edilen sistem, matris formunda

$$A_{\sim} \delta_{\sim}^0 = b_{\sim}$$

dır.

$\delta_m^n = \hat{\delta}^n e^{imkh}$ biçimindeki Fourier modu (4.17) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$(a + ib)\hat{\delta}^{n+1} = (a - ib)\hat{\delta}^n$$

bulunur. Burada

$$a = \frac{h}{140}(1208 + 1191 \cos kh + 120 \cos 2kh + \cos 3kh)$$

$$b = \left(\frac{\varepsilon\alpha\Delta t}{40} + \frac{3\mu\Delta t}{4h^2}\right) \sin 3kh + \left(\frac{56\varepsilon\alpha\Delta t}{40} + \frac{6\mu\Delta t}{h^2}\right) \sin 2kh \\ + \left(\frac{245\varepsilon\alpha\Delta t}{40} - \frac{57\mu\Delta t}{4h^2}\right) \sin kh.$$

olarak bulunur. g büyüme çarpanı olmak üzere $\hat{\delta}^{n+1} = g\hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a - ib}{a + ib}$$

elde edilir. g ' nin modülü alındığında

$$|g|^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

bulunur. $|g| \leq 1$ koşulu sağlandığından (4.17) denklemini koşulsuz kararlıdır.

4.3 Taylor-Kollokasyon Kuintik B-spline Metodu (TC-QNBM)

Bu kısımda, KdV denkleminin Taylor seri açılımıyla elde edilen zamana göre ayrıştırılmış (4.6) denkleminde kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılarak kollokasyon çözümü yapılacaktır.

$\{\phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_{N+2}\}$ kümesi $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir taban olduğundan bu yaklaşık çözüm kuintik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (4.18)$$

Burada δ_m ' ler sınır ve kollokasyon koşullarından belirlenecek zamana bağlı parametrelerdir.

(4.6) denkleminde (1.38)-(1.41) ile verilen kuintik B-spline fonksiyonları yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} K_m^n &= (\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \\ Z_m^n &= (\delta_{m+2} + 26\delta_{m+1} + 66\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) \\ R_1 &= \varepsilon \frac{5\Delta t}{2h}, \quad R_2 = \mu \frac{30\Delta t}{h^3} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} &(\delta_{m+2} + 26\delta_{m+1} + 66\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2})^{n+1} + R_2(\delta_{m+2} - 2\delta_{m+1} + 2\delta_{m-1} - \delta_{m-2})^{n+1} \\ &\quad + R_1 K_m^n (\delta_{m+2} + 26\delta_{m+1} + 66\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2})^{n+1} \\ &\quad + R_1 Z_m^n (\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2})^{n+1} \\ &= (\delta_{m+2} + 26\delta_{m+1} + 66\delta_m + 26\delta_{m-1} + \delta_{m-2})^n - R_2(\delta_{m+2} - 2\delta_{m+1} + 2\delta_{m-1} - \delta_{m-2})^n \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 + R_1 K_m^n - R_1 Z_m^n - R_2), & a_2 &= (26 + 26R_1 K_m^n - 10R_1 Z_m^n + 2R_2) \\ a_3 &= (66 + 66R_1 K_m^n), & a_4 &= (26 + 26R_1 K_m^n + 10R_1 Z_m^n - 2R_2) \\ a_5 &= (1 + R_1 K_m^n + R_1 Z_m^n + R_2), & a_6 &= (1 + R_2), \quad a_7 = (26 - 2R_2) \\ a_8 &= 66, \quad a_9 = (26 + 2R_2), & a_{10} &= (1 - R_2) \end{aligned}$$

katsayıları için

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3 \delta_m^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\ &= \\ &\alpha_6 \delta_{m-2}^n + \alpha_7 \delta_{m-1}^n + \alpha_8 \delta_m^n + \alpha_9 \delta_{m+1}^n + \alpha_{10} \delta_{m+2}^n \end{aligned} \tag{4.19}$$

bulunur. Burada (4.19) denklem sistemi $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$ olmak üzere $N + 5$ bilinmeyen içeren, $N + 1$ lineer denklemden oluşur. Bu sistemin çözümünün olabilmesi için 4 koşul daha gerekir. Gerekli koşullar sınır koşullarından elde edilir. $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ parametreleri (4.19) sisteminden yok edilerek, denklem sistemi $\tilde{\delta}^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$ $N + 1$ bilinmeyenli bir sisteme dönüşür.

$$\tilde{A} \tilde{\delta}^{n+1} = \tilde{B} \tilde{\delta}^n \tag{4.20}$$

denklemler sistemi elde edilir. Burada

$$\underset{\sim}{\delta}^0 = (\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0)^T$$

ve

$$\underset{\sim}{b} = (U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_N))^T$$

dir. Bu sistem Thomas algoritması kullanılarak çözümlerse başlangıç için $\underset{\sim}{\delta}^0$ parametreleri bulunmuş olur.

4.3.1 Kararlılık Analizi

Kararlılık analizi için (4.1) denkleminde lineer olmayan UU_x terimindeki U sabit olmak üzere λ olarak alındı. Buna göre denklem tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3 \delta_m^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\ & = \\ & \alpha_5 \delta_{m-2}^n + \alpha_4 \delta_{m-1}^n + \alpha_3 \delta_m^n + \alpha_2 \delta_{m+1}^n + \alpha_1 \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (4.21)$$

denklemleri elde edilir. Katsayılar

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - R_1 - R_2, & \alpha_2 &= 26 - 10R_1 + 2R_2, & \alpha_3 &= 66, \\ \alpha_4 &= 26 + 10R_1 - 2R_2, & \alpha_5 &= 1 + R_1 + R_2, \\ R_1 &= \varepsilon \frac{5\Delta t \lambda}{2h}, & R_2 &= \mu \frac{30\Delta t}{h^3} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. $\delta_m^n = \hat{\delta}^n e^{imkh}$ biçimindeki Fourier modu (4.21) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$(a + ib)\hat{\delta}^{n+1} = (a - ib)\hat{\delta}^n$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} a &= (\cos 2kh + 26 \cos kh + 33), \\ b &= (R_1 + R_2) \sin 2kh + (10R_1 - 2R_2) \sin kh, \end{aligned} \quad (4.22)$$

dir. g büyüme çarpanı olmak üzere $\hat{\delta}^{n+1} = g\hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a - ib}{a + ib} \quad (4.23)$$

bulunur. g ' nin modülü

$$|g|^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

olduğundan $|g| \leq 1$ koşulu sağlanır. O halde (4.21) denklemi koşulsuz kararlıdır.

4.4 Test Problemleri

Bu bölümde farklı başlangıç ve sınır koşulları için KdV denkleminin sayısal çözümleri elde edildi. Sayısal metodun doğruluğunu ölçmek için belirli zaman adımlarında her bir düğüm noktasındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki fark L_2 ve L_∞ hata normları kullanılarak hesaplandı.

a) Bu problemde ilk olarak tek (soliton) dalga yayılımı üzerinde çalışılacaktır. Bunun için A , D ve c sabitler olmak üzere başlangıç koşulu

$$U(x, 0) = 3c \sec h^2(Ax + D), \quad t \geq 1$$

ve sınır koşulları bütün zaman adımları için $U(0, t) = U(2, t) = 0$ olan ve

$$A = \frac{1}{2}(\varepsilon c / \mu)^{1/2} \text{ ve } B = \frac{1}{2}\varepsilon c \left(\frac{\varepsilon c}{\mu}\right)^{1/2}$$

olmak üzere analitik çözümü

$$U(x, t) = 3c \sec h^2(Ax - Bt + D),$$

biçiminde verildi. Bu çözüm $3c$ genlikte $x = 0$ da başlayan ve soldan sağa εc sabit hızla hareket eden tek dalgayı göstermektedir. Daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırmak için hesaplamalarda $\varepsilon = 1$, $\mu = 4.84 \times 10^{-4}$, $c = 0.3$, $D = -6$ parametreleri kullanıldı. Tek dalga çözümü $[0.2]$ aralığında $t = 0$ dan $t = 3$ e kadar konum adımı $h = 0.01$ ve zaman adımı $\Delta t = 0.005$ alınarak bulundu.

Tablo 4.1. $h = 0.01$, $\Delta t = 0.005$, $t = 3$ de TG-QDBM için tek dalga problemi

t	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$
0	0.14459809	0.08675931	0.046850	0.0000000
0.5	0.14459518	0.08675855	0.04673262	0.00593404
1.0	0.14459759	0.08675777	0.04673195	0.01196621
1.5	0.14459918	0.08675702	0.04673128	0.01852339
2.0	0.14459817	0.08675627	0.04673059	0.02525500
2.5	0.14459769	0.08675562	0.04672999	0.03382699
3.0	0.14459676	0.08675481	0.04672933	0.04219276

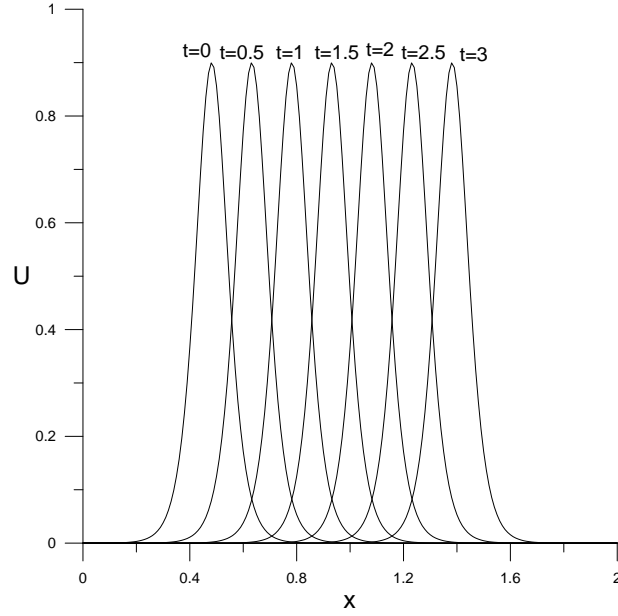
Tabo 4.2. $h = 0.01$, $\Delta t = 0.005$, $t = 3$ de TG-CBM için tek dalga problemi

t	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$
0	0.14459804	0.08675930	0.04685000	0.0000000
0.5	0.14460130	0.08675962	0.04685100	0.00653395
1.0	0.14459883	0.08675993	0.04685128	0.01289342
1.5	0.14459805	0.08676025	0.04685158	0.01906928
2.0	0.14459836	0.08676056	0.04685185	0.02532572
2.5	0.14459883	0.08676083	0.04685208	0.03082960
3.0	0.14459679	0.08676122	0.04685239	0.03868370

Tablo 4.3. $h = 0.01$, $\Delta t = 0.005$, $t = 3$ de TC-QNBM için tek dalga problemi

t	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$
0	0.14459774	0.08675924	0.04684897	0.0000000
0.5	0.14459692	0.08675811	0.04684897	0.00617776
1.0	0.14459595	0.08675701	0.04684798	0.01271481
1.5	0.14459519	0.08675594	0.04684702	0.01961736
2.0	0.14459419	0.08675485	0.04684604	0.02710121
2.5	0.14459318	0.08675376	0.04684505	0.03604276
3.0	0.14459242	0.08675265	0.04684405	0.04596135

Bu test problemin, sırasıyla TG-QDBM, TG-CBM ve TC-QNBM metotları ile sayısal çözümleri yapıldı ve her biri için C_1 , C_2 , C_3 büyüklükleri ve L_2 normu hesaplanarak Tablo 4.1-4.3 de verildi. $h = 0.01$, $\Delta t = 0.005$ için $t = 0$ dan $t = 3$ e kadar farklı zamanlardaki tek dalga hareketi benzer olduğu için sadece TG-QDBM için Şekil 4.1 de gösterildi. Her üç metoda göre, dalga en büyük yüksekliğe $x = 1.38$ noktasında ulaştı ve bu noktadaki nümerik ve analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değeri TG-QDBM için 0.00037, TG-CBM için 0.00107 ve TC-QNBM için 0.0000957 olarak bulundu.



Şekil 4.1. 0 dan 3'e tek dalganın hareketi.

Farklı zaman ve konum adımlarında bulunan sayısal sonuçlar literatürde mevcut olan daha önce yapılan diğer sonuçlarla Tablo 4.4 de karşılaştırılmıştır. Buna göre uygulanan üç sayısal yöntem, birbirine yakın sonuçlar vermiştir. Diğer çalışmalarla karşılaştırıldığında önerilen sayısal metotlardan elde edilen sonuçların oldukça iyi olduğu görülmektedir. Metotlar kendi arasında kıyaslandığında TG-QDBM ile çözümün diğer metotlara göre daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir.

Tablo 4.4. Tek dalga çözümü için L_2 hata normu $\times 10^3$

Zaman	Zabusky 1967	Greig- Morris 1976	Gardner et.al.1989 GQS	Gardner et.al.1989 GCS	TG - QDBM	TG - CBM	TC - QNBM
t	$\Delta t = 0.025$	h=0.05	$\Delta t = 0.025$		h=0.05		
0.25	34.64	61.21	22.92	13.27	2.87415	3.06430	8.62447
0.50	122.68	122.41	25.12	21.95	3.85809	5.12120	10.8161
0.75	210.44	181.35	26.48	25.67	4.53497	5.97926	14.2039
1.0	298.19	228.10	28.84	29.45	5.39669	6.76747	16.9036
t			$\Delta t = 0.01$		h= 0.033		
0.25			1.10	1.34	0.18944	0.24863	0.56113
0.50			1.74	1.82	0.28260	0.33733	0.86441
0.75			2.05	2.30	0.36255	0.39401	1.09216
1.0			2.48	2.69	0.44551	0.54261	1.38319
t	$\Delta t = 0.0005$	h=0.01	$\Delta t = 0.005$		h=0.01		
0.25	5.94	3.79	0.02	0.02	0.00108	0.00349	0.00341
0.50	13.17	9.28	0.04	0.04	0.00201	0.00653	0.00617
0.75	21.08	14.14	0.05	0.06	0.00194	0.00968	0.00933
1.0	28.66	18.72	0.06	0.08	0.00211	0.01289	0.01271

b) İkinci test problem olarak Maxwellian başlangıç koşulu

$$U(x, 0) = e^{(-x^2)}$$

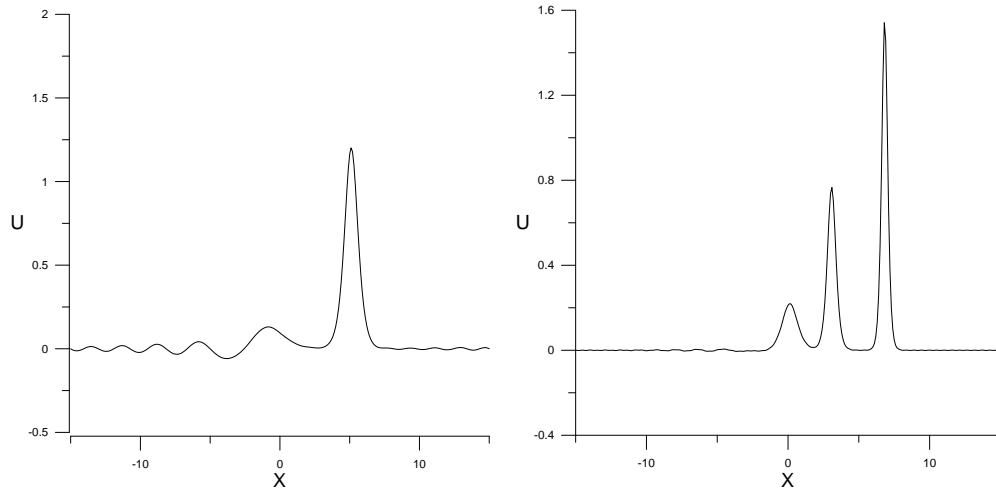
ve sınır koşulları

$$U(-15, t) = U(15, t) = 0, \quad t > 0$$

olarak seçildi. Nümerik çözümlerde $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ olarak alındı.

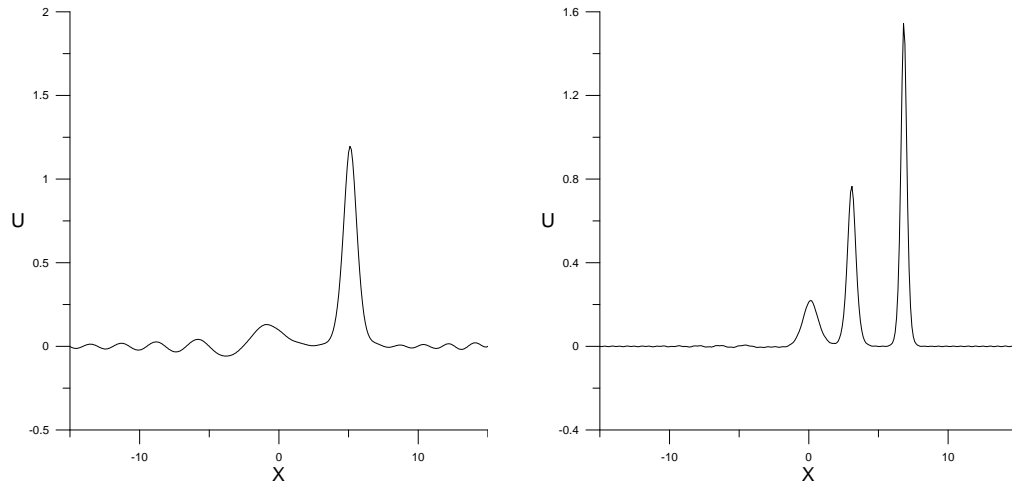
$\varepsilon = 1.0$ değeri sabit alınırken μ 'nün değişik değerleri için çözümün oluşumu incelendi. μ_c bazı kritik parametre olmak üzere (Jeffrey and Kakutani, 1972), çözümün

davranışının $\mu < \mu_c$ veya $\mu > \mu_c$ ye bağlı olup olmadığı araştırıldı. Berezin ve Karpman, bazı çalışmalarda Maxwellian başlangıç koşulu için μ_c kritik parametresini $\mu_c = 0.625$ olarak gösterdi (Berezin and Karpman, 1967). $\mu \ll \mu_c$ için Maxwellian başlangıcı μ ye bağlı olarak tek dalgalara ayrılır. $\mu \gg \mu_c$ ise Maxwellian başlangıç koşulu solitonlara ayrılmaz, fakat hızlı salınım dalgaları oluşturur.



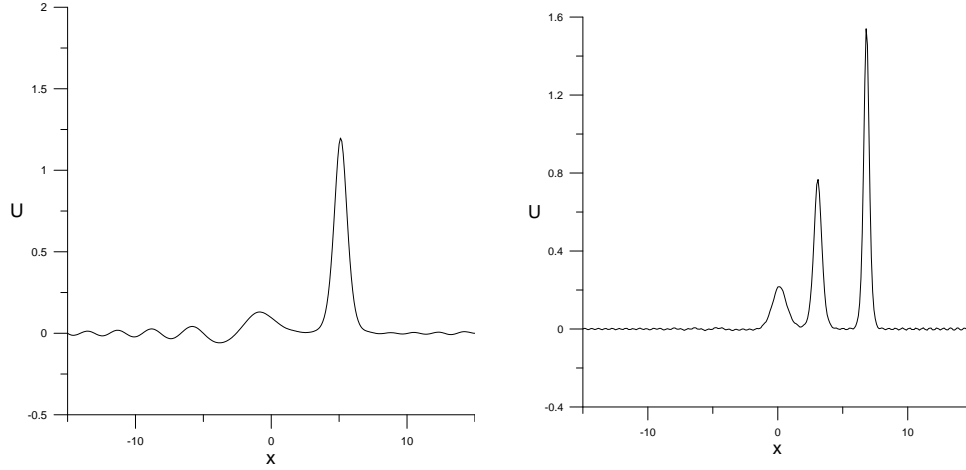
Şekil 4.2. TG-QDBM için Maxwellian başlangıç koşulu,

a) $\mu = 0.04$ b) $\mu = 0.01$.



Şekil 4.3. TG-CBM için Maxwellian başlangıç koşulu:

a) $\mu = 0.04$ b) $\mu = 0.01$.



Şekil 4.4. TC-QNBM için Maxwellian başlangıç koşulu:

a) $\mu = 0.04$ b) $\mu = 0.01$

Her üç metoda göre $\varepsilon = 1.0$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ alınarak $t = 12.5$ zamanında $\mu = 0.04$ ve $\mu = 0.01$ için oluşan dalga grafikleri çizildi ve Şekil 4.2-4.4 de gösterildi. Farklı zamanlardaki C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitleri TG-QDBM için Tablo 4.5 de, TG-CBM için Tablo 4.6 da ve TC-QNBM için Tablo 4.7 de listelenmiştir.

Tablo 4.5. TG-QDBM için Maxwellian değerleri $\varepsilon = 1.0$

t	C_1		C_2		C_3	
	$\mu = 0.04$	$\mu = 0.01$	$\mu = 0.04$	$\mu = 0.01$	$\mu = 0.04$	$\mu = 0.01$
0	1.77245	1.77245	1.25331	1.25331	0.8729	0.9857
2.5	1.77245	1.77248	1.25329	1.25312	0.86989	0.9708
5.0	1.77262	1.77234	1.25328	1.25304	0.86941	0.9644
7.5	1.77187	1.77257	1.25327	1.25303	0.86816	0.9638
10.0	1.77677	1.77240	1.25326	1.25303	0.86812	0.9637
12.5	1.76937	1.77243	1.25323	1.25303	0.85961	0.9636

Tablo 4.6. TG-CBM için Maxwellian değerleri $\varepsilon = 1.0$

t	C_1		C_2		C_3	
	$\mu = 0.04$	$\mu = 0.01$	$\mu = 0.04$	$\mu = 0.01$	$\mu = 0.04$	$\mu = 0.01$
0	1.77245	1.77245	1.25331	1.25331	0.8729	0.9865
2.5	1.77247	1.77250	1.25331	1.25343	0.87295	0.9865
5.0	1.77235	1.77230	1.25331	1.25349	0.87295	0.9869
7.5	1.77232	1.77257	1.25332	1.25350	0.87292	0.9869
10.0	1.76937	1.77245	1.25349	1.25350	0.87270	0.9869
12.5	1.77585	1.77206	1.25390	1.25350	0.87209	0.9869

Tablo 4.7: TC-QNBM için Maxwellian değerleri $\varepsilon = 1.0$

t	C_1		C_2		C_3	
	$\mu = 0.04$	$\mu = 0.01$	$\mu = 0.04$	$\mu = 0.01$	$\mu = 0.04$	$\mu = 0.01$
0	1.77245	1.77245	1.25331	1.25331	0.87290	0.9865
2.5	1.77247	1.77236	1.25330	1.25336	0.87291	0.9856
5.0	1.77244	1.77275	1.25330	1.25342	0.87290	0.9855
7.5	1.77177	1.77244	1.25328	1.25349	0.87289	0.9853
10.0	1.77219	1.77207	1.25329	1.25355	0.87287	0.9851
12.5	1.77346	1.77329	1.25326	1.25367	0.87286	0.9848

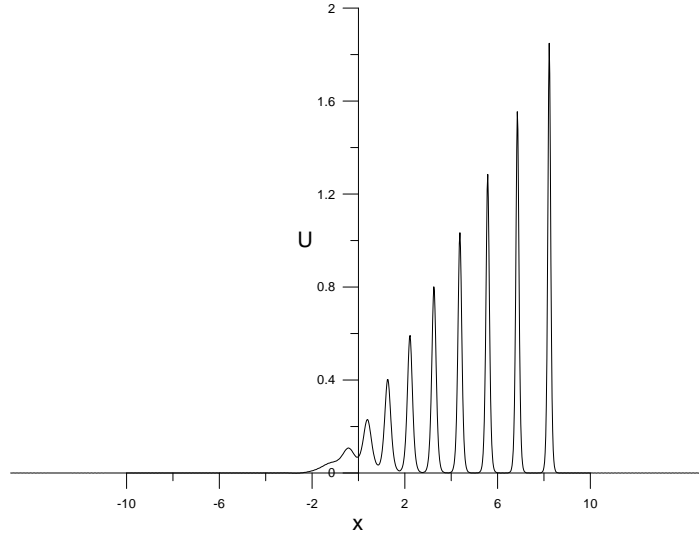
$\mu = 0.04$ için grafiklerde titreşimli kuyruk biçiminde bir dalganın daha eklendiği gözlemlendi. Bu durumda sayısal metotlardan elde edilen çözüm en yüksek değerini $x = 5.1$ noktasında aldı. Sayısal metotlardan elde edilen sonuçlara göre $t=12.5$ zamanında, dalganın ortalama hızı, $t_1 = 10.$ ve $t_2 = 12.5$ zamanında en yüksek değeri aldıkları konumlar sırasıyla x_1 ve x_2 olmak üzere $V_n = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ formülüyle, a en büyük dalganın genliği olmak üzere ölçülen genliğe bağlı hızı $V_a =$

$\frac{a\varepsilon}{3}$ formülü ile hesaplanır. Buna göre üç metoda göre elde edilen sayısal hızlar Tablo 4.8 de gösterildi. Böylece birbiriyle uyumlu sonuçlar bulunduğu için oluşan dalgalar soliton dalgalarıdır.

Tablo 4.8. Farklı μ değerleri için en büyük solitonun genliği ve hızı.

μ	Metot	Konum	Genlik	$V_a = \frac{a\varepsilon}{3}$	Ortalama hız
$\mu = 0.04$	TG-QDBM	5.1	1.20106	0.4	4
	TG-CBM	5.1	1.19563	0.396	4
	TC-QNBM	5.1	1.19773	0.399	4
$\mu = 0.01$	TG-QDBM	6.8	1.54118	0.51372	0.52
	TG-CBM	6.8	1.54468	0.51489	0.52
	TC-QNBM	6.8	1.53986	0.51328	0.52
$\mu = 0.001$	TG-QDBM	8.225	1.84857	0.6161	0.62
	TG-CBM	8.225	1.85124	0.6170	0.62
	TC-QNBM	8.225	1.85106	0.6170	0.62

$\mu = 0.01$ için üç soliton form oluşur. Bu durumda dalga en yüksek değerine $x = 6.8$ noktasında ulaştı. $t = 12.5$ zamanındaki ortalama hızı $t = 10.$ ve $t = 12.5$ zamanında en yüksek değeri aldıkları konumlar kullanılarak hesaplandı. Ortalama hızı ve genliğe bağlı hızları Tablo 4.8 de gösterildi. Sonuçların birbirine yakın olduğu görülmektedir.



Şekil 4.5. $\varepsilon = 1.0, \mu = 0.001, h = 0.025, \Delta t = 0.005$
ve $t=12.5$ de TG-QDBM için Maxwellian başlangıç koşulu.

Son olarak $\mu = 0.001$ için dalga oluşumu incelendi. μ yayılım katsayısı küçüldükçe lineer olmayan terim baskın gelir. Şekil 4.5 de görüldüğü gibi 9 soliton sağdan sola genliği ve şiddeti azalarak hareket eder. Her üç metot için elde edilen korunum sabitleri Tablo 4.9 de gösterilmiştir. En büyük solitonun ortalama hızı ve genliğe bağlı hızları Tablo 4.8 de gösterildi. . Buna göre dalga en yüksek değerini $x=8.225$ noktasında aldı. Ortalama hızı $t=10$ ve $t=12.5$ zamanları arasında en yüksek noktaya ulaştıkları konumları kullanılarak hesaplandı. Sonuçlar birbirine oldukça yakındır.

Tabo 4.9. $\varepsilon = 1.0$ ve $\mu = 0.001$ için korunum sabitleri

t	TG-QDBM			TG-CBM			TC-QNBM		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
0	1.77245	1.25331	1.02332	1.77245	1.25331	1.0233	1.77245	1.25331	1.0233
2.5	1.77245	1.25336	1.00991	1.77243	1.25347	1.0202	1.77245	1.25346	1.0198
5.0	1.77247	1.25338	1.00617	1.77242	1.25352	1.0204	1.77244	1.25352	1.0198
7.5	1.77247	1.25338	1.00597	1.77242	1.25351	1.0204	1.77247	1.25354	1.0198
10.0	1.77247	1.25339	1.00594	1.77242	1.25350	1.0204	1.77251	1.25355	1.0198
12.5	1.77247	1.25340	1.00595	1.77241	1.25348	1.0203	1.77250	1.25356	1.0198

c) Son olarak başlangıç koşulu

$$U(x, 0) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left[\frac{|x| - 25}{5} \right] \right]$$

ve sınır koşulları

$$U(-50, t) = U(150, t) = 0, \quad t > 0$$

$$U_x(-50, t) = U_x(150, t) = 0,$$

biçiminde alındı. $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.05$ ve $h = 0.4$ için program $t = 800$ e kadar çalıştırılarak dalgalar dizisinin oluşumu gözlemlendi. C_1, C_2 ve C_3 korunum sabitleri Tablo 4.10 da verilmiştir.

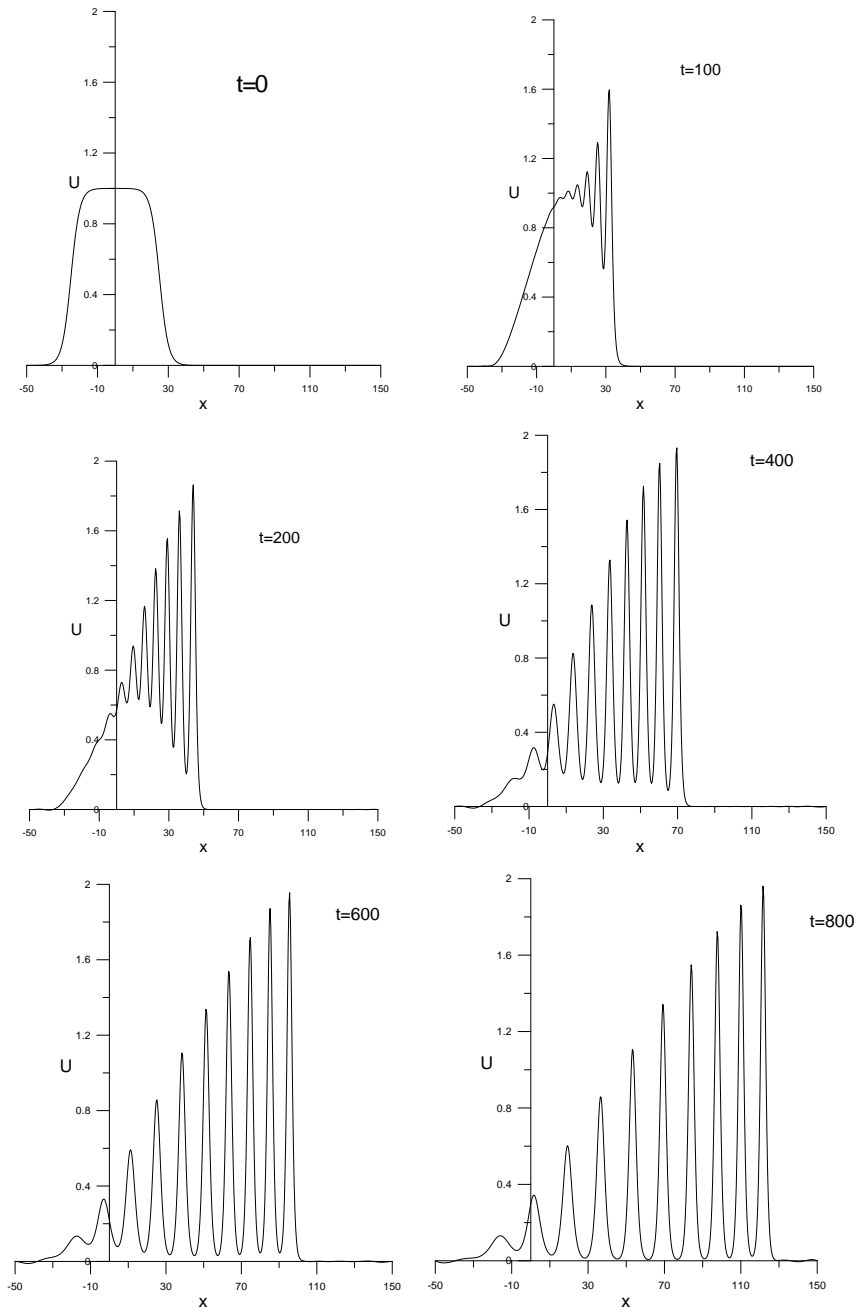
Tablo 4.10. $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$ için korunum sabitleri.

t	TG-QDBM			TG-CBM			TC-QNBM		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
0	50.000	45.000	42.501	50.000	45.000	42.500	50.000	45.00	42.500
100	50.000	45.000	42.246	50.000	45.000	42.302	50.000	45.00	42.300
200	50.004	44.999	42.088	50.003	45.001	42.305	50.000	45.00	42.299
300	50.000	44.999	42.009	50.046	45.002	42.307	49.999	45.00	42.299
400	49.987	44.999	41.990	50.046	45.003	42.308	49.999	45.00	42.299
500	49.967	44.998	41.984	50.101	45.006	42.308	49.998	45.00	42.299
600	49.953	44.998	41.984	50.137	45.011	42.308	49.998	45.00	42.299
700	49.961	44.998	41.981	50.104	45.012	42.308	50.000	45.00	42.299
800	49.985	44.999	41.977	50.012	45.014	42.308	50.001	45.00	42.299

Oluşan dalgalar dizisi sadece TG-CBM için Şekil 4.6 da gösterildi. Şekilden de görüldüğü üzere sağa doğru hareket eden on tane dalga oluşmuştur. Buna göre bu dalganın ortalama hızı $t = 600$ ve $t = 800$ de dalganın en yüksek değerini aldığı konum kullanılarak hesaplandı. Dalga en yüksek değerine $x=121.6$ noktasında ulaştı. Ortalama hız ve genliğe bağlı hızları Tablo 4.11 de gösterildi. Buna göre sonuçlar birbiriyle tutarlıdır.

Tablo 4.11. $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$ için en büyük solitonun genliği ve hızı.

Metot	Konum	Genlik	$V_a = \frac{a\varepsilon}{3}$	Ortalama hız
TG-QDBM	121.6	1.96119	0.1307	0.13
TG-CBM	121.6	1.96342	0.1309	0.13
TC-QNBM	121.6	1.96219	0.1308	0.13



Şekil 4.6. Keyfi bir başlangıç çarpmasının soliton dizisi.

4.5 Sonuç

Bu çalışmada, KdV denkleminin sırasıyla, TG-QDBM, TG-CBM ve TC-QNBM ile sayısal çözümleri incelenmiştir. Solitonların büyüklükleri, durumu ve konumları KdV denkleminin farklı test problemleri için bulunmuştur. Sayısal çözümlerin doğruluğunu ölçmek için L_2 ve L_∞ hata normları kullanılmıştır. Sayısal metotlar için korunum yasaları hesaplanmış ve C_1, C_2, C_3 büyüklüklerinin zamanla sabit kaldığı görülmüştür. Ayrıca uygulanan metotlar literatürde yapılmış olan çalışmalarla karşılaştırıldığında bulunan çözümlerin iyi olduğu görülmüştür. Nümerik çözümü yapılan üç metot, kendi aralarında kıyaslandığında en iyi sonucu TG-QDBM metodu vermiştir. Uygulan metotlardan elde edilen fark denklemlerine von Neumann kararlılık analizi uygulanmış ve bu denklemlerin koşulsuz kararlı oldukları gösterilmiştir. Sonuç olarak üç metodun da KdV denkleminin sayısal çözümüne başarıyla uygulandığı ve sonuçların analitik çözüme yakın sonuçlar verdiği gözlenmektedir.

5.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Kuadratik, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonları test fonksiyonlar olarak kullanılarak Taylor-Galerkin ve Taylor-kollokasyon sonlu eleman yöntemleri geliştirilmiştir. Metotların uygulanabilirliğinin gösterilmesi için, farklı kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümleri elde edilmiş ve farklı dereceden B-spline fonksiyonlar uygulanarak çözümler üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Problemlerin zaman ayrıştırması Taylor seri açılımıyla, konum ayrışması ise kuadratik, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonları yardımıyla oluşturulan Galerkin ve kollokasyon sonlu eleman metotları ile elde edilmiştir.

İlk olarak Adveksiyon - difüzyon denkleminin sayısal çözümü araştırılmıştır. Denklemin Taylor seri açılımı ile zaman ayrıştırması yapılmış, kuadratik Galerkin, kübik kollokasyon ve kuintik kollokasyon yöntemleri ile konum ayrışması yapılmıştır. Adveksiyon difüzyon denkleminin iki farklı test probleminin çözümü yukarıda bahsedilen yöntemlerle yapılmış ve bulunan sonuçlar daha önce yapılmış çalışmalarla karşılaştırılarak metodun doğruluğu tartışılmıştır. Sayısal metotlardan elde edilen denklemlerin kararlılık analizleri von Neumann yöntemi ile yapılmıştır.

Burger denkleminin kuadratik Galerkin, kübik kollokasyon ve kuintik kollokasyon çözümleri yapılmıştır. Burger denkleminin analitik çözümü bilinen test problemleri seçilerek sayısal sonuçların L_2 ve L_∞ hata normları bulunmuştur. Bulunan sayısal sonuçların analitik çözümlere oldukça yakın olduğu görülmüştür. ν viskozite sabitinin etkisi grafiksel çözümlerle gösterilmiştir. Uygulan metotlardan elde edilen fark denklemlerine von Neuman kararlılık analizi uygulanmış ve bu denklemlerin koşulsuz kararlı oldukları gösterilmiştir.

Son olarak KdV denkleminin üç farklı başlangıç ve sınır değer problemi sırasıyla TG-QDBM, TG-CBM ve TC-QNBM 'ları ile sayısal çözümleri hesaplanmıştır. Soliton dalga oluşumu ve Maxwellian başlangıç koşulu ile dalgaların grafikleri çizilmiştir. μ değerinin dalga oluşumuna etkisi gözlemlenmiştir. Uygulanan metotlar için C_1, C_2 ve C_3 korunum sabitleri hesaplanarak zamanla sabit kaldıkları gösterilmiştir.

Genel olarak, Adveksiyon-difüzyon, Burger ve KdV denklemlerinin B-spline Taylor-Galerkin ve B-spline Taylor-kollokasyon metotları ile çözümlerinden oldukça iyi

sonuçlar elde edilmiştir. Her bir denkleme B-spline fonksiyonların etkisini araştırmak için farklı dereceden spline fonksiyonlar uygulanmış ve elde edilen sonuçlar birbiriyle ve literatürde yer alan diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Taylor-Galerkin ve Taylor-kollokasyon metotları kendi aralarında kıyaslandığı zaman Adveksiyon-difüzyon denkleminde TG-QDBM metodu, Burger denkleminde TC-CBM metodu ve KdV denkleminde TG-QDBM metodu diğer B-spline çözümlerine göre analitik çözüme daha yakın sonuçlar vermiştir. Lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerdeki lineerleştirme işlemi konuma göre ayırıştırmadan önce yapıldığı için işlem kolaylığı sağlanmıştır.

Bu tez çalışmasında uygulanan metotlar için ikinci dereceden Taylor seri açılımı kullanılmıştır. B-spline fonksiyonların derecesine göre yüksek dereceden Taylor seri açılımı kullanılarak diferensiyel denklemlerin çözümleri elde edilebilir. Kısmi türevli diferensiyel denklemler ve çok değişkenli diferensiyel denklem sistemleri içinde öne rilen metotlar uygulanabilir.

Bu tezin konusu olan Taylor-Galerkin ve Taylor-kollokasyon B-spline sonlu ele man metotlarının uygulanmasının kolay olması ve yukarıda bahsedilen her üç denklemin sayısal özümlelerinde iyi sonuçlar vermesi nedeniyle, benzer tipdeki kısmi türevli diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri için de uygun bir metot olduğu sonucuna varılabilir.

6. KAYNAKLAR DİZİNİ

- Adey, R.A. and Brebbia, C.A., 1974, Finite element solution for effluent dispersion, in Numerical Methods in Fluid Dynamics (Ed. C.A. Brebbia and J.J. Connor) Pentech Press, London, 325-354.
- Ali, A.H.A., 1991, Modelling Nonlinear waves with B-spline finite elements, in Proc Int Conf Math & Num aspect Wave Propagation, Strasbourg, ed., SIAM.
- Bateman, H., 1915, Some recent researches on the motion of fluids, Monthly Weather Rec., 43, 163-170.
- Berezin, Y.A. and Karpman, V.A., 1967, Nonlinear evolution of disturbances in plasmas and other dispersive media, Soviet Phys. JETP 24-1049.
- Bottura, L. and Zienkiewicz, O.C., 1990, Experiments on iterative solitons for the semi implicit characteristic-Galerkin algorithm, Communications in applied Numerical Methods, 6, 387-393.
- Burger, J.M. 1948, A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence, Adv. in App. Mech. I, 171-199.
- Caldwell, J., 1987, Application of cubic splines to the nonlinear Burgers' equation, pp 253-261 in Numerical methods for nonlinear problems, vol 3, (Eds. E. Hinton et al. Pineridge Press.)
- Chaudhry, M.H, Cass, D.E., Edinger J.E., 1983, Modelling of unsteady-flow water temperatures, J. Hydraul. Eng. 109 (5), 657-669.
- Cole, J.D., 1951, On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, Quat. Appl. Maths. 9, 225-236 .
- Dağ, I., Irk, D. and Tombul, M, 2005, Least-squares finite element method for advection-diffusion equation, Appl. Math. and Comp., 12.
- Dağ, I., Irk, D. and Saka, B., 2006, A small time solutions for KdV equation using spline approximation, Appl. Math. and Comp., 173, 834-846.
- de Boor, C., 1978, A practical guide to splines, Springer.
- Dodd, R.K., Gibbon, J.D. and Morris, H.C., 1982, Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, New York.
- Donea, J., 1984, A Taylor Galerkin method for convection transport phenomena, International Journal for Numerical Methods in Engineering ,20, 101-119.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Donea, J., Quartepelle, L. and Selmin, V., 1992, An introduction to finite element methods for transient advection problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95, 169-203.

Gardner, C.S. and Marikawa, G.K., 1965, The effect of temperature on the width of a small amplitude solitary wave in a collision free plasma, *Comm Pure Appl. Math.*, 18, 35-49.

Gardner, G.A., Gardner, L.R.T. and Ali, A.H.A., 1989, A Finite Element Solution For the Korteweg-de Vries Equation with Cubic B Splines, *U.C.N.W. Math. Preprint*. 89,01.

Gardner, G.A., Gardner, L.R.T. and Ali, A.H.A., 1990 a, Modelling Solution of the Korteweg-de Vries Equation with Quintic Splines, *U.C.N.W. Math.*, Preprint, 90.30.

Gardner, L.R.T. and Dağ, I., 1994, A numerical solution of the advection-diffusion equation using B spline finite elements, *Proc.Intern. AM SE Conference*,1,109-116.

Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. and Ali, A.H.A., 1990 b, A Galerkin approach to solution of Burger equation, *University of Wales, Bangor, Math.*, Preprint, 90.04.

Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. and Ali, A.H.A., 1990 c Solitons of the Modified KdV equation, in *Numerical Methods in Engineering*, ed. G N Pande & J Middleton *Appl. Mech. Engng.*

Goda K. 1975, "on Stability of some Finite difference Schemes for the Korteweg de Vries Equations,*J.Phys. Soc. Japan* 39.229-236.

Greig, I.S. and Morris, J. L., 1976, A Hopscotch Method for the KdV Equation, *J. Comp. Phys.*, 20,64-80.

Guvanesen, V., Volker, R.E., 1983, Numerical solutions for solute transport in unconfined aquifers, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 3, 103-123.

Harris, S. L., 1996, Sonic shocks governed by the modified Burgers equation, *EJAM* 6,75-107.

Holly, F M and Preissmann, A., 1977, Accurate calculation of transport in two dimensions, *J Hydraulics Division*, 103 (HY11), 1259-1277.

Hopf, E., 1950, The partial differential equation $u_t + u_x = \epsilon u_{xx}$, *Communs. pure. appl., Math.*, 3, 201.

Isenberg, J., Gutfinger C., 1972, Heat transfer to a drainin film, *Int. J. Heat Transf.* 16, 505-512.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Jain, P.C. and Holla, D.N., 1978, Numerical solutions of coupled Burgers' equations, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 13, 213 .

Jain, P.C. and Lohar, B. L., 1979, Cubic Spline Tecnique for Coupled Non-linear Parabolic Equations, *Comp.&Maths. with Appl.*, 5, 179-185.

Jeffrey, A. and Kakutani, T., 1972, Weak Nonlinear Dispersive Waves: a discussion centred around the Korteweg de Vries Equation, *SIAM Review*, 14,522-643.

Korteweg, D.J. and Vries de, G., 1895, On the change in form of long waves advancing in rectangular canal and on a new type of long stationary wave, *Phil. Mag*, 39, 422-443.

Kumar, B.V.R. and Mehra, M., 2005, "A wavelet-Taylor Galerkin method for parabolic and hyperbolic partial differantial equations", *Int. J. Comput. Meth.*, Vol.2, No.1, pp. 75-97.

Lambert, J. D., 1973, *Computational Methods for Ordinary Differential Equations*, Wiley, London.

Lax, P. D. and Wendroff, B., 1960, System of conservation laws, *Comm. Pure. Appl. Math.*, 13, 217.

Lohner, R.L., Morgan, K., and Zienkiewicz, O.C., 1984, The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 4, 1043-1063.

Mabssout, M. and Pastor, M.A., 2003, Taylor-Galerkin algorithm for shock wave propagation and strain localization failure of viscoplastic continua, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 955-971.

Nguyen, H. and Reynen, J., 1987, A Space Time Finite Element Approach to Burgers Equation in *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, Eds. E Hinton et al. Pineridge Press., 3.

Parlarge, J. Y., 1980, Water transport in soils, *Ann. Rev. Fluids Mech.* 2 77-102.

Prenter, P.M., 1975, *Splines ve Variational Methods*, Wiley, New York.

Ramadan, M.A., El Danaf, T.S. and Alaal, F., 2005 a, A numerical solution of Burgers' equation using septic B-splines, *Chaos Solitons&Fractals*, 26, 795-804.

Ramadan, M.A. and El Danaf, T.S., 2005 b, Numerical treatment for modified Burgers' equation, *Math.Comput.Simulat*, 70, 90-98.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

- Rathis Kumar, B.V. and Mehra, M., 2004, Time-accurate solutions of Korteweg-de Vries equation using wavelet Galerkin Method, *Applied Math. and Comp.*
- Reddy, J.N., 1993, *An introduction to the finite element method*, McGraw Hill, Singapore.
- Rubin, S.G. and Khosla, P.K., 1976, Higher-order Numerical Solutions Using Cubic Splines, *AIAA Journal*, vol 14, no 7, 851-858.
- Safjan, A. and Oden, J.T., 1993, High order Taylor-Galerkin and adaptive h-p methods for second order hyperbolic systems: applications to elastodynamics, *Computer Methods in*.
- Saka, B. and Dağ, I., 2007, Quartic B-spline collocation methods to numerical solutions of the Burgers' equation, *Chaos Solitons & Fractals*, 32, 1125-1137.
- Saka, B. and Dağ, I., 2008, A numerical study of Burgers' equation, *Journal of the Franklin Institute*, 345, 328-348.
- Smith, G.D., 1978, *Numerical solution of partial differential equations*, Clarendon Press, Oxford, 92-93
- Szymkiewicz, R., 1993, Solution of the advection-diffusion equation using the spline function and finite elements, *Comm. Num. Math. Eng.*, 9, 197-206.
- Tamma, K.K. and Namburu, R.R., 1988, A new finite element based Lax-Wendroff Taylor-Galerkin methodology for computational dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71, 137-150.
- Wahlbin L.B., 1974, "A dissipative Galerkin Method for the Numerical Solution of First Order Hyperbolic Equation In Math. Aspect of Finite El. in Part. Diff. Equation (C.D. Boor), Academic Press, 147-169, New York.
- Washimi, H. and Taniuti, T., 1966, Propagation of ion acoustic solitary waves of small amplitude, *Phys. Rev. Lett.*, 17, 996-998
- Zabusky, N. J., 1967, A Synergetic Approach to Problem of Nonlinear Dispersive Wave Propagation and Interaction, *Proc. Symp. Nonlinear partial diff. equation*, ed W Ames Academic Press, 223-258.
- Zhang, Y. and Tabarrok, B., 1999, Modifications to the Lax-Wendroff scheme for hyperbolic systems with source terms, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, 27-40

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Aynur Canıvar

Uyruğu: T.C.

Doğum Yeri, Tarihi: Beyşehir, 23.05.1978

Medeni hali: Bekar

Adres: Cemal Mümtaz Anadolu Öğretmen Lisesi 26210 – Eskişehir – Türkiye

E-posta: aynurcanivar@mynet.com ;

Eğitim Bilgileri:

Lisans	: Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü	2000
Yüksek Lisans	: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik	2003
Doktora	: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik	2011

Yayınlar (SCI-SCIE) :

- 1) A. Canıvar, M. Sarı and İ. Dağ, A Taylor- Galerkin finite element method for the KdV equation using cubic B-splines, Physica B , Vol 405, Issue 16, August 2010, pages 3376-3383.
- 2) İ. Dağ, A. Canıvar and A. Şahin, Taylor-Galerkin and Taylor-Collocation methods for the numerical solutions of Burger equation using B-splines., Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation., Vol 16, Issue 7, July 2011 , pages 2696-2708.
- 3) İ. Dağ, A. Canıvar and A. Şahin, Taylor-Galerkin Method for the Advection Diffusion Equation Using B-spline Finite Elements, Kybernetes in press.