# Grupların Örgülü Çaprazlanmış Modül Kategorisinin Cebirsel ve Kategoriksel Yapısı

Gizem Derbentakar Keser

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ocak 2017

Algebraic and Categorical Structure of Categories of Braided Crossed Modules of Groups

Gizem Derbentakar Keser

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Department of Mathematics and Computer Sciences

January 2017

Grupların Örgülü Çaprazlanmış Modül Kategorisinin Cebirsel ve Kategoriksel Yapısı

Gizem Derbentakar Keser

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege Arslan

Ocak 2017

# ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Gizem Derbentakar Keser'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Grupların Örgülü Çaprazlanmış Modül Kategorisinin Cebirsel ve Kategoriksel Yapısı**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Danışman** : Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege Arslan

**İkinci Danışman** : -

**Doktora Tez Savunma Jürisi:**

**Üye :** Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege Arslan

**Üye :** Doç. Dr. İ.İlker Akça

**Üye :** Prof. Dr. Erdal Ulualan

**Üye :**

**Üye :**

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ........................ tarih ve .................. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

# ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege Arslan danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Grupların Örgülü Çaprazlanmış Modül Kategorisinin Cebirsel ve Kategoriksel Yapısı**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 05/01/2017

Gizem Derbentakar Keser

# ÖZET

Grupların Örgülü Çaprazlanmış Modül Kategorisinin Cebirsel ve Kategoriksel Yapısı başlıklı yüksek lisans tezi, dört bölümden oluşmaktadır. Öncelikle, gruplar için çaprazlanmış modül ve örgülü çaprazlanmış modül kavramlarının cebirsel tanımlarıyla birlikte örneklere yer verilmiştir. Daha sonra örgülü çaprazlanmış modül ve morfizimleri ile oluşturulan kategorinin bir alt kategorisi olan $G$-tabanlı örgülü çaprazlanmış modül kategorisinde çarpım obje, geri çekme obje, eşitleyici ve eş-eşitleyici objeler araştırılmıştır. Düzenli kategori tanımı hatırlatılarak gruplar üzerinde örgülü çaprazlanmış modül kategorisinin düzenli kategori olduğu gösterilmiştir. Örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinin düzenli kategorinin bazı özelliklerine sahip olduğu detaylı olarak açıklanmıştır. Bir kategoride bağıntı kavramıyla tam kategori tanımına yer verilmiştir. Buradan örgülü çaprazlanmış modül kategorisinin bir tam kategori olduğu ve bağıntı kategorisi inşaa edilebileceği görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Tam Kategori, Çaprazlanmış Modül, Örgülü Çaprazlanmış Modül, Düzenli Kategori, Bağıntı Kategori.

# SUMMARY

This master thesis, titled Algebraic and Categorical Structure of Categories of Braided Crossed Modules of Groups, consists of four chapters. In the first all, we recall some notions which is related to the notion of crossed modules and braided crossed modules of groups and also there exist examples of crossed modules and braided crossed module of groups. Later, we investigate product object, pullback object and equalizer and co-equalizer objects of G-module category which is a subcategory with a braided crossed modules and morphisms. After we remind defination of regular category, We indicate to be braided crossed module of groups is a regular category. We investigate deeply braided $G$-module category of groups has some property of regular category. Later, there is exist the notion of relation and defination of exact category of any category. Hence, we indicate to be braided crossed module category is a exact category and reveal to be relation category is could be construct.

**Keywords:** Crossed Module, 2-Crossed Module, Exact Category, Braided Crossed Module, Regular Category, Relation Category.

# TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında bana danışmanlık ederek beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan değerli hocam, sayın,

Yrd. Doç. Dr. Ummahan EGE ARSLAN'a

ve her zaman yanımda olup beni destekleyen,

sevgili aileme

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2017
Gizem Derbentakar Keser

# İÇİNDEKİLER

# SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $/$ | Bölüm grubu |
| $\lhd$ | Normal alt grup |

| **Kısaltmalar** | **Açıklama** |
|---|---|
| $XMod$ | Çaprazlanmış modüller kategorisi |
| $XMod/G$ | $G$ grubu üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisi |
| $BCM/G$ | $G$ grubu üzerinde örgülü çaprazlanmış modüller kategorisi |
| $BCM$ | Örgülü çaprazlanmış modüller kategorisi |

# 1. GİRİŞ VE AMAÇ

Tez çalışmamızda ilk olarak gruplar için çaprazlanmış modül ve örgülü çaprazlanmış modül kavramlarına yer verilecektir. Daha sonra gruplar için örgülü çaprazlanmış modül kavramının kategoriksel özelliklerinden bahsedilecektir. Örgülü çaprazlanmış modüllerde kategoriksel özelliklerden faydalanılarak gruplar için çaprazlanmış modüllerde düzenli kategori ve örgülü çaprazlanmış modüllerin bir düzenli kategori olduğu gösterilecektir. Düzenli kategorinin özellikleri gruplar için örgülü çaprazlanmış modüllere taşınarak gösterilecektir. Daha sonra örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinin aynı zamanda bir tam kategori olduğundan bahsedilecektir. Son olarak, örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinin bir bağıntı kategorisi oluşturduğu gösterilecektir.

$$\partial : C \to G$$

grup homomorfizmi,

$$\begin{array}{ccc} C \times G & \to & C \\ (c,g) & \mapsto & c^g \end{array}$$

$G$ grubunun $C$ grubu üzerine etkisi ile birlikte her $c, c' \in C$ ve $g \in G$ için

**CM1**) $\partial(c^g) = g^{-1}\partial(c)g$

**CM2**) $\left(c^{'}\right)^{\partial(c)} = c^{-1}c'c$

şartları sağlanıyorsa bir çaprazlanmış modül adını alır ve $(C, G, \partial)$ ile gösterilir.

$$\partial : C \to G$$

çaprazlanmış modül olmak üzere

$$\{-,-\} : G \times G \to C$$

örgü dönüşümü ile birlikte her $x, x', y, y' \in G$ ve $a, b \in C$ için

**BCM1**) $\{x, yy'\} = \{x, y\}^{y^{'}} \{x, y^{'}\}$

**BCM2**) $\{xx', y\} = \{x', y\} \{x, y\}^{x'}$

**BCM3**) $\partial \{x, y\} = [y, x]$

**BCM4**) $\{x, \partial a\} = a^{-1}a^x$

**BCM5**) $\{\partial b, y\} = (b^{-1})^y\, b$

şartları sağlanıyor ise $\partial : C \to G$ gruplar üzerinde örgülü çaprazlanmış modül adını alır. Örgülü çaprazlanmış $G$-modül tanımından ve çaprazlanmış modüllerin kategoriksel yapılarından yararlanarak, örgülü çaprazlanmış $G$-modüller kategorisinde çarpım obje, geri çekme obje, eşitleyici ve eş-eşitleyici obje belirlenmiştir.

Barr(1971), tez çalışmasında düzenli kategori kavramına yer vermiştir. Bizim amacımız öncelikle bu çalışmadan yola çıkarak gruplar için örgülü çaprazlanmış $G$-modüller kategorisinin düzenli kategori olduğunu göstermek ve ilgili bazı özellikleri detaylarıyla vermektir. Ayrıca, bir düzenli kategori olan tam kategorinin şartlarının örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisi için geçerli olduğu sonucuna varmaktır. Son olarak, örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinin bir bağıntı kategorisi oluşturduğunu göstermektir.

# 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak Whitehead (1949) tarafından tanımlanmıştır. Whitehead, homotopi teori üzerine çalışmaları sırasında çaprazlanmış modül kavramına yer vermiştir. Bu kavram daha sonra matematiğin birçok uğraşma alanında yer almaya başlamıştır. Homoloji, gruplarda ve cebirde kohomoloji, homotopi teori bu alanlardan bazılarıdır. Whitehead çaprazlanmış modül kavramını öncelikle grup yapısı üzerinde tanımlamıştır. Daha sonra bu cebir yapısına da aktarılmıştır. Brown ve Spencer (1976) çaprazlanmış modüllerin yapısının topolojik gruplardaki temel gruboidlerin yapısı ile benzer oduğunu öne sürmüştür. Asosyatif cebirler üzerindeki çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak Lue (1966) tarafından tanımlanmıştır. Değişmeli cebirler için çaprazlanmış modül kavramına Porter (1986) çalışmalarında yer vermiştir. Arvasi'nin (2003) değişmeli cebirler için çaprazlanmış modüller ile ilgili birçok çalışması vardır.

Çaprazlanmış modül kavramı, 2-çaprazlanmış modül kavramı ve özel hali olan örgülü çaprazlanmış modül kavramlarının tanımlanmasında temel oluşturmuştur. Örgülü çaprazlanmış modül kavramı gruplar ve gruboidler için Brown ve Gilbert (1989) tarafından tanımlanmıştır.

Düzenli kategori ve Tam kategori kavramları modern kategoriksel cebirde önemli bir rol oynamaktadır. Düzenli ve Tam kategoriler kümeler, (değişmeli) gruplar, değişmeli halka üzerinde modüller ve halkalar kategorisinin bazı tamlık özelliklerini aksiyomize etmede yararlıdırlar. Düzenli kategori kavramı ilk kez Barr (1971) tarafından tanımlanmıştır. Toplamsal (additive) kategoriler için tam kategori kavramı Quillen (1973) tarafından tanımlanmıştır. Barr (1971) ise toplamsal olmayan kategoriler için tam kategori kavramını tanımlamıştır.

# 3. ÖRGÜLÜ ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER KATEGORİSİ

Bu bölümde gruplar üzerinde çaprazlanmış modül ve örgülü çaprazlanmış modül kavramları tanıtılıp örneklere yer verilecektir.

## 3.1 Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramı, Whitehead $(1949)$ tarafından tanımlanmıştır. Whitehead, bu yapıyı $2$-tip homotopi gruplar ile ilgili çalışmasında incelemiştir. Ayrıca konuyla ilgili olarak, Porter $(1978)$, Shammu $(1992)$, Arvasi ve Ege'nin $(2003)$ çalışmaları vardır.

**Tanım 3.1**

$$\partial : C \to G$$

*grup homomorfizmi,*

$$\begin{array}{ccc} C \times G & \to & C \\ (c,g) & \mapsto & c^g \end{array}$$

*$G$ grubunun $C$ grubu üzerine etkisi ile birlikte her $c, c' \in C$ ve $g \in G$ için*

$$\begin{array}{ll} \textbf{CM1}) & \partial(c^g) = g^{-1}\partial(c)g \\ \textbf{CM2}) & (c')^{\partial(c)} = c^{-1}c'c \end{array}$$

*şartlarını sağlıyorsa bir çaprazlanmış (crossed) modül adını alır ve $(C, G, \partial)$ ile gösterilir.*

Eğer sadece CM1) şartı sağlanıyorsa $\partial$ dönüşümüne ön çaprazlanmış modül denir.

Çaprazlanmış modül morfizmi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$(C, G, \partial)$ ve $(C', G', \partial')$ iki çaprazlanmış modül olsun.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ G \arrow[r, "\psi"'] & G' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani

$$\partial'\theta = \psi\partial$$

ve

$$\theta(c^g) = \theta(c)^{\psi(g)}$$

olacak şekilde $\theta : C \to C'$ ve $\psi : G \to G'$ grup homomorfizmleri varsa

$$(\theta, \psi) : (C, G, \partial) \to (C', G', \partial')$$

morfizmine çaprazlanmış modül morfizmi adı verilir.

Böylece objeleri çaprazlanmış modül, morfizmleri çaprazlanmış modül morfizmi olan çaprazlanmış modül kategorisi elde edilir ve XMod ile gösterilir.

Özel olarak $G = G'$ ve $\psi$ birim dönüşüm ise

$$\theta(c^g) = \theta(c)^g$$

ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\partial"'] & & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olduğunda yani $\partial'\theta = \partial$ sağlandığında $\theta$, $G$-tabanlı bir çaprazlanmış modül morfizmi olur. Bu durumda sabit bir $G$ grubu üzerinde çaprazlanmış modüllerin kategorisi elde edilir ve $XMod/G$ ile gösterilir.

**Örnek 3.1** *$N$ grubu, G grubunun normal alt grubu olmak üzere*

$$\begin{array}{rccc} \partial : & N & \to & G \\ & n & \mapsto & n \end{array}$$

*içine homomorfizmi,*

$$\begin{array}{rcl} N \times G & \to & N \\ (n, g) & \mapsto & n^g = g^{-1}ng \end{array}$$

*şeklindeki G grubunun $N$ üzerine etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomları her $n, n' \in N$ ve $g \in G$ için*

***CM*1)**

$$\begin{aligned} \partial(n^g) &= n^g \\ &= g^{-1}ng \\ &= g^{-1}\partial(n)g \end{aligned}$$

***CM*2)**

$$\begin{aligned} (n')^{\partial(n)} &= (n')^n \\ &= n^{-1}n'n \end{aligned}$$

*şeklinde kolayca sağlanır.*

**Örnek 3.2** *$M$ bir $G$-modül olmak üzere*

$$\begin{aligned} \partial = 1 : \quad M &\to G \\ m &\mapsto 1 \end{aligned}$$

*aşikar (trivial) homomorfizmi ve*

$$\begin{aligned} M \times G &\to M \\ (m, g) &\mapsto m^g \end{aligned}$$

*etkisiyle ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Her $g \in G$ ve $m, m' \in M$ için*

***CM*1)**

$$\begin{aligned} \partial(m^g) &= 1 \\ &= g^{-1}\partial(m)g \end{aligned}$$

***CM*2)**

$$\begin{aligned} (m')^{\partial(m)} &= (m')^1 \\ &= m^{-1}mm' \\ &= m^{-1}m'm \end{aligned}$$

*elde edilir.*

## 3.2 Örgülü Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

Brown ve Gilbert $(1989)$, gruplar üzerinde indirgenmiş $2$-çaprazlanmış modüle denk olan örgülü çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır. Bu bölümde gruplar üzerinde örgülü çaprazlanmış modül kavramı tanıtılıp, örgülü çaprazlanmış modül örneklerine yer verilecekttir.

**Tanım 3.2**

$$\partial : E \to G$$

*çaprazlanmış modül*

$$\{-,-\} : G \times G \to E$$

*örgü dönüşümü ile birikte her $x, x', y, y' \in G$ ve her $a, b \in E$ için*

$$\begin{array}{ll}
\textbf{BCM1)} & \{x, yy'\} = \{x, y\}^{y'} \{x, y'\} \\
\textbf{BCM2)} & \{xx', y\} = \{x', y\} \{x, y\}^{x'} \\
\textbf{BCM3)} & \partial \{x, y\} = [y, x] \\
\textbf{BCM4)} & \{x, \partial a\} = a^{-1} a^{x} \\
\textbf{BCM5)} & \{\partial b, y\} = (b^{-1})^{y}\, b
\end{array}$$

*şartlarını sağlıyor ise gruplar üzerinde örgülü çaprazlanmış modül adını alır ve*

$$\{E, G, \partial\}$$

*şeklinde gösterilir.*

Örgülü çaprazlanmış modül morfizmi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\{-,-\}"] \arrow[d, equal, "f_0 \times f_0"'] & E \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"'] & G \arrow[d, dash, "f_0"] \\
G' \times G' \arrow[r, "\{-,-\}'"'] & E' \arrow[r, "\partial_2"'] & G'
\end{tikzcd}$$

Burada;

**i)** $f_0 \circ \partial_1 = \partial_2 \circ f_1$

ve

**ii)** Her $g \in G$ ve her $e \in E$ için

$$f_1 (e^g) = f_1 (e)^{f_0(g)}$$

olmalıdır. Yani, $(f_1, f_0)$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olur. Ayrıca,

**iii)** $\{-,-\} : G \times G \longrightarrow E$ ve $\{-,-\}' : G' \times G' \longrightarrow E'$ örgü dönüşümleri için,

$$\{-,-\}' (f_0 \times f_0) = f_1 \{-,-\}$$

eşitliği sağlanmalıdır.

Bu durumda; $(f_1, f_0) : \{E, G, \partial_1\} \longrightarrow \{E', G', \partial_2\}$ morfizmine örgülü çaprazlanmış modül morfizmi denir.

Böylece objeleri örgülü çaprazlanmış modül, morfizmleri örgülü çaprazlanmış modül morfizmi olan örgülü çaprazlanmış modüller kategorisi elde edilir ve **BCM** ile gösterilir.

Özel olarak $G = G'$ alınarak, örgülü çaprazlanmış modüller kategorisinin bir alt kategorisi oluşturulur ve **BCM/G** ile gösterilir.

**Örnek 3.3** $\{E, G, \partial_1\}$ *ve* $\{E', G', \partial_2\}$ *birer örgülü çaprazlanmış modül olmak üzere,* $\{C \times C', G \times G', \partial\}$ *bir örgülü çaprazlanmış modüldür.*

$$\partial_1 : E \to G \quad ve \quad \partial_2 : E' \to G'$$

*sırasıyla,*

$$\{-,-\}_1 : G \times G \to E \quad ve \quad \{-,-\}_2 : G' \times G' \to E'$$

*örgü dönüşümleri ile birlikte iki örgülü çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda;*

$$\begin{array}{rcl} \partial : \; E \times E' & \to & G \times G' \\ (e, e') & \mapsto & (\partial_1(e), \partial_2(e')) \end{array}$$

*dönüşümü,* $G \times G'$ *grubunun* $E \times E'$ *grubu üzerine*

$$\begin{array}{rcl} (E \times E') \times (G \times G') & \to & E \times E' \\ ((e, e'), (g, g')) & \mapsto & (e, e')^{(g,g')} = (e^g, (e')^{g'}) \end{array}$$

*şeklinde tanımlı etkisi ile bir çaprazlanmış* $G \times G'$*-modüldür. Çünkü; her* $(e, e'), (s, s') \in E \times E'$ *ve* $(g, g') \in G \times G'$ *için*

***CM*1)**

$$\begin{array}{rcl} \partial((e, e')^{(g,g')}) & = & \partial(e^g, (e')^{g'}) \\ & = & (\partial_1(e^g), \partial_2(e'^{g'})) \\ & = & (g^{-1}\partial_1(e)g, (g')^{-1}\partial_2(e')g') \\ & = & (g^{-1}, (g')^{-1})(\partial_1(e), \partial_2(e'))(g, g') \\ & = & (g, g')^{-1}\partial(e, e')(g, g') \end{array}$$

***CM*2)**

$$\begin{aligned}(s,s')^{\partial(e,e')} &= (s,s')^{(\partial_1(e),\partial_2(e'))}\\ &= \left(s^{\partial_1(e)},(s')^{\partial_2(e')}\right)\\ &= \left(e^{-1}se,(e')^{-1}s'e'\right)\\ &= \left(e^{-1},(e')^{-1}\right)(s,s')(e,e')\\ &= (e,(e'))^{-1}(s,s')(e,e')\end{aligned}$$

*eşitlikleri elde edilir.*

$$\begin{aligned}\partial:\ E\times E' &\to G\times G'\\ (e,e') &\mapsto (\partial_1(e),\partial_2(e'))\end{aligned}$$

*dönüşümünün,*

$$\begin{aligned}\{-,-\}:\ (G\times G')\times(G\times G') &\to (E\times E')\\ ((g,g'),(h,h')) &\mapsto (\{g,h\}_1,\{g',h'\}_2)\end{aligned}$$

*örgü dönüşümü ile birlikte örgülü çaprazlanmış* $G\times G'$*-modül aksiyomlarını sağladığı aşağıdaki şekilde gösterilir. Her* $(g,g'),(h,h'),(s,s')\in G\times G',(e,e'),(e_1,e_2)\in E\times E'$ *olmak üzere,*

***BCM*1)**

$$\begin{aligned}\{(g,g'),(h,h')(s,s')\} &= \{(g,g'),(hs,h's')\}\\ &= (\{g,hs\}_1,\{g',h's'\}_2)\\ &= (\{g,h\}_1^s\{g,s\}_1,\{g',h'\}_2^{s'}\{g',s'\}_2)\\ &= \left(\{g,h\}_1^s,\{g',h'\}_2^{s'}\right)(\{g,s\}_1,\{g',s'\}_2)\\ &= (\{g,h\}_1,\{g',h'\}_2)^{(s,s')}(\{g,s\}_1,\{g',s'\}_2)\\ &= \{(g,g'),(h,h')\}^{(s,s')}\{(g,g'),(s,s')\}\end{aligned}$$

***BCM*2)**

$$\begin{aligned}\{(g,g')(h,h'),(s,s')\} &= \{(gh,g'h'),(s,s')\}\\ &= (\{gh,s\}_1,\{g'h',s'\}_2)\\ &= (\{h,s\}_1\{g,s\}_1^h,\{h',s'\}_2\{g',s'\}_2^{h'})\\ &= (\{h,s\}_1,\{h',s'\}_2)\left(\{g,s\}_1^h,\{g',s'\}_2^{h'}\right)\\ &= (\{h,s\}_1,\{h',s'\}_2)(\{g,s\}_1,\{g',s'\}_2)^{(h,h')}\\ &= \{(h,h'),(s,s')\}\{(g,g'),(s,s')\}^{(h,h')}\end{aligned}$$

***BCM*3)**

$$\begin{aligned}
\partial\{(g,g'),(h,h')\} &= \partial(\{g,h\}_1,\{g',h'\}_2) && (\because \{-,-\}\ \textit{tanımı}\ )\\
&= (\partial_1\{g,h\}_1,\partial_2\{g',h'\}_2) && (\because \partial\ \textit{tanımı})\\
&= ([h,g],[h',g'])\\
&= (hgh^{-1}g^{-1},h'g'(h')^{-1}(g')^{-1})\\
&= (h,h')(g,g')(h^{-1},(h')^{-1})(g^{-1},(g')^{-1})\\
&= (h,h')(g,g')(h,h')^{-1}(g,g')^{-1}\\
&= [(h,h'),(g,g')]
\end{aligned}$$

***BCM*4)**

$$\begin{aligned}
\{(g,g'),\partial(e,e')\} &= \{(g,g'),(\partial_1(e),\partial_2(e'))\}\\
&= (\{g,\partial_1(e)\}_1,\{g',\partial_2(e')\}_2) && (\because \{-,-\}\ \textit{tanımı})\\
&= \left((e^{-1}e^{g}),((e')^{-1}(e')^{g'})\right)\\
&= \left(e^{-1}g^{-1}eg,(e')^{-1}(g')^{-1}(e')\,g'\right)\\
&= (e^{-1},(e')^{-1})(g^{-1},(g')^{-1})(e,e')(g,g')\\
&= (e,e')^{-1}(g,g')^{-1}(e,e')(g,g')\\
&= (e,e')^{-1}(e,e')^{(g,g')}
\end{aligned}$$

***BCM*5)**

$$\begin{aligned}
\{\partial(e_1,e_2),(h,h')\} &= \{(\partial_1(e_1),\partial_2(e_2)),(h,h')\}\\
&= (\{\partial_1(e_1),h\}_1,\{\partial_2(e_2),h'\}_2)\\
&= \left(\left(e_1^{-1}\right)^{h}e_1,\left(e_2^{-1}\right)^{h'}e_2\right)\\
&= \left(h^{-1}\left(e_1^{-1}\right)he_1,(h')^{-1}\left(e_2^{-1}\right)h'e_2\right)\\
&= \left(h^{-1},(h')^{-1}\right)\left(e_1^{-1},e_2^{-1}\right)(h,h')(e_1,e_2)\\
&= (h,h')^{-1}(e_1,e_2)^{-1}(h,h')(e_1,e_2)\\
&= \left((e_1,e_2)^{-1}\right)^{(h,h')}(e_1,e_2)
\end{aligned}$$

**Örnek 3.4**

$$\begin{aligned}
\partial:\ G &\to G\\
g &\mapsto g
\end{aligned}$$

*birim dönüşümü,*

$$\begin{aligned}
G\times G &\to G\\
(g_1,g) &\mapsto g^{-1}g_1g
\end{aligned}$$

*etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Her* $g,g_1,g_2\in G$ *için*

***CM*1)**

$$\begin{aligned} \partial\left(g_1^g\right) &= (g_1)^g \\ &= g^{-1}\partial\left(g_1\right)g \end{aligned}$$

***CM*2)**

$$\begin{aligned} (g_2)^{\partial(g_1)} &= (g_2)^{(g_1)} \\ &= g_1^{-1}g_2g_1 \end{aligned}$$

*elde edilir.* $\partial : G \to G$ *dönüşümünün*

$$\begin{aligned} \{-,-\}: \quad G\times G &\to G \\ (g_1,g_2) &\mapsto g_2^{-1}g_1^{-1}g_2g_1 \end{aligned}$$

*örgü dönüşümü ile birlikte örgülü çaprazlanmış G-modül aksiyomlarını sağladığı aşağıdaki şekilde gösterilir. Her* $g_1, g_1', g_2, g_2' \in G$ *için,*

***BCM*1)**

$$\begin{aligned} \{g_1, g_2g_2'\} &= (g_2g_2')^{-1}g_1^{-1}g_2g_2'g_1 \\ &= (g_2')^{-1}g_2^{-1}g_1^{-1}g_2g_2'g_1 \\ &= (g_2')^{-1}(g_2^{-1}g_1^{-1}g_2g_1)g_2'(g_2')^{-1}g_1^{-1}g_2'g_1 \\ &= (g_2')^{-1}\{g_1,g_2\}\,g_2'\,\{g_1,g_2'\} \\ &= \{g_1,g_2\}^{g_2'}\{g_1,g_2'\} \end{aligned}$$

***BCM*2)**

$$\begin{aligned} \{g_1g_1', g_2\} &= (g_2)^{-1}(g_1g_1')^{-1}g_2(g_1g_1') \\ &= (g_2)^{-1}(g_1')^{-1}(g_1)^{-1}g_2(g_1g_1') \\ &= (g_2)^{-1}(g_1')^{-1}g_2g_1'(g_1)^{-1}g_1 \\ &= \{g_1',g_2\}\,g_1^{-1}g_1(g_1')^{-1}g_1'g_2^{-1}g_2 \\ &= \{g_1',g_2\}\,(g_1')^{-1}g_2^{-1}g_1^{-1}g_2g_1g_1' \\ &= \{g_1',g_2\}\,\{g_1,g_2\}^{g_1'} \end{aligned}$$

***BCM*3)**

$$\begin{aligned} \partial\{g_1,g_2\} &= \partial(g_2^{-1}g_1^{-1}g_2g_1) \\ &= g_2^{-1}g_1^{-1}g_2g_1 \\ &= [g_2,g_1] \end{aligned}$$

***BCM*4)**

$$\begin{aligned} \{g_1,\partial\left(g_2\right)\} &= \{g_1,g_2\} \\ &= g_2^{-1}g_1^{-1}g_2g_1 \\ &= g_2^{-1}(g_2)^{g_1} \end{aligned}$$

***BCM*5)**

$$\begin{aligned} \{\partial(g_1), g_2\} &= \{g_1, g_2\} \\ &= g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 g_1 \\ &= (g_1^{-1})^{g_2} g_1 \end{aligned}$$

*özellikleri sağlanır.*

*Böylece* $\partial : G \to G$ *birim dönüşümü bir örgülü çaprazlanmış modüldür.*

**Örnek 3.5** *Her* $e, e' \in E$ *için,*

$$[e, e'] = (e')^{-1} e^{-1} e' e$$

*elemanına komütatör elemanı denir. Komütatör elemanların oluşturduğu küme komütatör normal alt grup olarak adlandırılır ve* $[E, E]$ *olarak gösterilir. Ayrıca* $[E, E] \subset E$ *kapsaması geçerli olup her* $s, e, e' \in E$ *için* $[E, E] \lhd E$ *olduğu aşağıdaki gibi gösterilir.*

$$\begin{aligned} s^{-1}[e, e'] s &= s^{-1}(e')^{-1} e^{-1} e' e s \\ &= s^{-1} e e' e^{-1} \left(s (e')^{-1} (e') s^{-1}\right) (e')^{-1} s \\ &= s^{-1} e e' e^{-1} s (e')^{-1} \left((e') s^{-1} (e')^{-1} s\right) \\ &= (e')^{-1} (e^{-1} s) e' (s^{-1} e) ((e')^{-1} s (e') s^{-1})^{-1} \\ &= [s^{-1} e, e'] [s^{-1}, e'^{-1}] \end{aligned}$$

$\partial : [E, E] \to E$ *içine dönüşümünün eşlenik etkisiyle çaprazlanmış* $E$*-modül olduğu açıktır.*

*Şimdi* $\partial : [E, E] \to E$ *çaprazlanmış modülünün*

$$\begin{aligned} \{-, -\} : \quad E \times E &\to [E, E] \\ (e_1, e_2) &\mapsto [e_1, e_2] \end{aligned}$$

*örgü dönüşümü ile birlikte bir örgülü çaprazlanmış* $E$*-modül olduğunu gösterelim. Her* $e_1, e_2, e_1', e_2', e, e' \in E$

***BCM*1)**

$$\begin{aligned} \{e_1, e_2 e_2'\} &= [e_1, e_2 e_2'] \\ &= (e_2 e_2')^{-1} e_1^{-1} (e_2 e_2') e_1 \\ &= e_1 (e_2 e_2') e_1^{-1} (e_2)^{-1} (e_2')^{-1} \\ &= e_1 e_2 e_2' e_1^{-1} (e_2)^{-1} (e_2')^{-1} e_2' (e_2')^{-1} e_1^{-1} e_1 \\ &= (e_2')^{-1} e_1 (e_2) e_1^{-1} (e_2)^{-1} e_2' e_1^{-1} e_2' e_1 (e_2')^{-1} \\ &= (e_2')^{-1} [e_1, e_2 e_2'] [e_1, e_2'] \\ &= (e_2')^{-1} \{e_1, e_2\} e_2' \{e_1, e_2'\} \\ &= \{e_1, e_2\}^{e_2'} \{e_1, e_2'\} \end{aligned}$$

***BCM*2)**

$$\begin{aligned}
\{e_1e_1', e_2\} &= [e_1e_1', e_2] \\
&= e_2^{-1}\,(e_1e_1')^{-1}\,e_2\,(e_1e_1') \\
&= e_2^{-1}(e_1')^{-1}e_1^{-1}e_2\,(e_1e_1')\,e_1'(e_1')^{-1}e_2e_2^{-1}e_1e_1^{-1} \\
&= e_2^{-1}(e_1')^{-1}e_2e_1'e_1^{-1}e_2e_1(e_1')^{-1}(e_1^{-1}e_2^{-1}e_1)e_1' \\
&= e_2^{-1}(e_1')^{-1}e_2e_1'e_1^{-1}e_2e_1e_2^{-1}e_1' \\
&= \{e_1', e_2\}\,\{e_1, e_2\}^{e_1'}
\end{aligned}$$

***BCM*3)**

$$\begin{aligned}
\partial\,\{e_1, e_2\} &= [e_1, e_2] \\
&= e_2^{-1}e_1^{-1}e_2e_1 \\
&= e_1e_2e_1^{-1}\left(e_1e_2e_1^{-1}\right)^{-1} \\
&= e_1e_2e_1^{-1}e_1e_2^{-1}e_1^{-1} \\
&= e_1^{-1}e_2^{-1}e_1e_2 \\
&= [e_2, e_1]
\end{aligned}$$

***BCM*4)**

$$\begin{aligned}
\{e_1, \partial e\} &= [e_1, \partial e] \\
&= (\partial e)^{-1}e_1^{-1}\partial e e_1 \\
&= e_1\partial e e_1^{-1}\left(e_1\partial e e_1^{-1}\right)^{-1} \\
&= e_1\partial e e_1^{-1}e_1(\partial e)^{-1}e_1^{-1} \\
&= e^{e_1}e^{-1} \\
&= e^{-1}e^{e_1}
\end{aligned}$$

***BCM*5)**

$$\begin{aligned}
\{\partial e', e_2\} &= [\partial e', e_2] \\
&= e_2^{-1}(\partial e')^{-1}e_2\partial e' \\
&= e'e_2(e')^{-1}\,(\partial(e')e_2\partial(e')^{-1}) \\
&= e_2^{-1}(e')^{-1}e_2e'(e')^{-1}e' \\
&= ((e')^{-1})^{e_2}e'
\end{aligned}$$

*koşulları sağlanır. Bu durumda $\partial : [E, E] \to E$ dönüşümü bir örgülü çaprazlanmış E-modüldür.*

# 4. KATEGORİKSEL ÖZELLİKLER

Bu bölümde örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinin çarpım, geri çekme, eşitleyici ve eş-eşitleyici objelerine sahip olduğu gösterilecektir.

## 4.1 Örgülü Çaprazlanmış $G$-Modül Kategorisinde Çarpım Obje

**Teorem 4.1** *Örgülü çaprazlanmış G-modül kategorisi çarpım objeye sahiptir.*

**İspat** *$\lambda : H \to G$ ve $\mu : K \to G$ sırasıyla $\{-,-\}_H : G \times G \to H$, $\{-,-\}_K : G \times G \to K$ örgü dönüşümleri ile birlikte iki örgülü çaprazlanmış G-modül olsun. $\{H, G, \lambda\}$ ve $\{K, G, \mu\}$ objelerinin çarpım objesini bulacağız.*

$$\{H, G, \lambda\} \xleftarrow[?]{} \{?\} \xrightarrow[?]{} \{K, G, \mu\}$$

$$H \times_G K = \{(h, k) \mid h \in H, k \in K, \lambda(h) = \mu(k)\}$$

*olmak üzere, çarpım obje adayımız*

$$\begin{array}{rlcl} \partial : & H \times_G K & \to & G \\ & (h, k) & \mapsto & \partial\,(h, k) = \lambda(h) = \mu(k) \end{array}$$

*dönüşümü*

$$\begin{array}{ccc} (H \times_G K) \times G & \to & (H \times_G K) \\ ((h, k), g) & \to & (h, k)^g = (h^g, k^g) \end{array}$$

*etkisi ile bir çaprazlanmış G-modüldür. Çünkü;*

***CM*1)**

$$\begin{array}{rcll} \partial((h, k)^g) & = & \partial(h^g, k^g) & \\ & = & \lambda(h^g) & (\because \partial \text{ tanımı}) \\ & = & g^{-1}\lambda(h)g & (\because \lambda \text{ çaprazlanmış G-modül}) \\ & = & g^{-1}\partial\,(h, k)\,g & (\because \partial \text{ tanımı}) \end{array}$$

***CM*2)**

$$
\begin{aligned}
(h',k')^{\partial(h,k)} &= (h',k')^{\lambda(h)} && (\because \partial \text{ tanımı})\\
&= ((h')^{\lambda(h)},(k')^{\lambda(h)}) && (\because \text{etki tanımı})\\
&= ((h')^{\lambda(h)},(k')^{\mu(k)}) && (\because \lambda(h)=\mu(k))\\
&= (h^{-1}h'h, k^{-1}k'k) && (\because \lambda \text{ ve } \mu \text{ çaprazlanmış } G\text{-modül})\\
&= (h,k)^{-1}(h',k')(h,k)
\end{aligned}
$$

*şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.*

*Şimdi $\partial : H \times_G K \to G$ çaprazlanmış G-modülünün*

$$
\begin{aligned}
\{-,-\}:\ G\times G &\to H\times_G K\\
(g,g') &\mapsto (\{g,g'\}_H, \{g,g'\}_K)
\end{aligned}
$$

*örgü dönüşümü ile birlikte örgülü çaprazlanmış G- modül kategorisinin bir objesi olduğunu gösterelim. Öncelikle her $(g,g') \in G\times G$ için, $\partial(\{g,g'\}_H, \{g,g'\}_K) = \lambda(\{g,g'\}_H) = \mu(\{g,g'\}_K)$ eşitliği var olduğundan $\{-,-\}((g,g')) = \{g,g'\} = (\{g,g'\}_H, \{g,g'\}_K)$ dönüşümü iyi tanımlıdır.*

*Her $g,g',g_1,g_1' \in G$ ve $(h,k),(h',k') \in H\times_G K$ için,*

***BCM*1)**

$$
\begin{aligned}
\{g,g_1g_1'\} &= (\{g,g_1g_1'\}_H, \{g,g_1g_1'\}_K)\\
&= (\{g,g_1\}_H^{g_1'}\{g,g_1'\}_H, \{g,g_1\}_K^{g_1'}\{g,g_1'\}_K)\\
&= (\{g,g_1\}_H^{g_1'}, \{g,g_1\}_K^{g_1'})(\{g,g_1'\}_H, \{g,g_1'\}_K)\\
&= (\{g,g_1\}_H, \{g,g_1\}_K)^{g'}(\{g,g_1'\}_H, \{g,g_1'\}_K)\\
&= \{g,g_1\}^{g_1'}\{g,g_1'\}
\end{aligned}
$$

***BCM*2)**

$$
\begin{aligned}
\{gg',g_1\} &= (\{gg',g_1\}_H, \{gg',g_1\}_K)\\
&= (\{g',g_1\}_H\{g,g_1\}_H^{g'}, \{g',g_1\}_K\{g,g_1\}_K^{g'})\\
&= (\{g',g_1\}_H, \{g',g_1\}_K)(\{g,g_1\}_H^{g'}, \{g,g_1\}_K^{g'})\\
&= \{g',g_1\}\{g,g_1\}^{g'}
\end{aligned}
$$

***BCM*3)**

$$
\begin{aligned}
\partial\{g,g_1\} &= \partial(\{g,g_1\}_H, \{g,g_1\}_K)\\
&= \lambda\{g,g_1\}_H\\
&= [g_1,g]
\end{aligned}
$$

***BCM*4)**

$$\begin{aligned}
\{g,\partial(h,k)\} &= \{g,\lambda(h)\} && (\because \partial \textit{ tanımı}) \\
&= \left(\{g,\lambda(h)\}_H,\{g,\lambda(h)\}_K\right) \\
&= \left(\{g,\lambda(h)\}_H,\{g,\mu(k)\}_K\right) && (\because \lambda(h)=\mu(k)) \\
&= (h^{-1}h^g)(k^{-1}k^g) \\
&= (h^{-1},k^{-1})(h^g,k^g) \\
&= (h,k)^{-1}(h,k)^g
\end{aligned}$$

***BCM*5)**

$$\begin{aligned}
\{\partial(h',k'),g_1\} &= \{\lambda(h'),g_1\} \\
&= \left(\{\lambda(h'),g_1\}_H,\{\lambda(h'),g_1\}_K\right) \\
&= \left(\{\lambda(h'),g_1\}_H,\{\mu(k),g_1\}_K\right) \\
&= \left((h')^{-1}\right)^{g_1}h',\left((k')^{-1}\right)^{g_1}k' \\
&= \left((h')^{-1},(k')^{-1}\right)^{g_1}(h',k') \\
&= ((h',k')^{-1})^{g_1}(h',k')
\end{aligned}$$

*elde edilir. Şimdi*

$$\begin{aligned}
(\alpha,id_G):\ \{H\times_G K,G,\partial\} &\to \{H,G,\lambda\} \\
(h,k) &\mapsto \alpha(h,k)=h \\
(\beta,id_G):\ \{H\times_G K,G,\partial\} &\to \{K,G,\mu\} \\
(h,k) &\mapsto \beta(h,k)=k
\end{aligned}$$

*dönüşümlerinin örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olduğunu gösterelim. Aşağıdaki diyagramı göz önünde bulunduralım:*

$$\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[r, "\{-,-\}"] \arrow[d, equal, "id_G\times id_G"'] & H\times_G K \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\alpha"] & G \arrow[d, dash, "id_G"] \\
G\times G \arrow[r, "\{-,-\}_H"'] & H \arrow[r, "\lambda"'] & G
\end{tikzcd}$$

***i)** Her $(h,k)\in H\times_G K$ için,*

$$\begin{aligned}
id_G\partial(h,k) &= id_G\lambda(h) \\
&= \lambda(h) \\
&= \lambda\alpha(h,k)
\end{aligned}$$

***ii)*** *Her $g \in G$, her $(h,k) \in H \times_G K$ için*

$$
\begin{aligned}
\alpha((h,k)^g) &= \alpha((h^g,k^g)) \\
&= h^g \\
&= h^{id_G(g)} \\
&= \alpha((h,k))^{id_G(g)}
\end{aligned}
$$

***iii)*** *Her $(g,g') \in G \times G$ için,*

$$
\begin{aligned}
\{-,-\}_H (id_G \times id_G)(g,g') &= \{-,-\}_H (g,g') \\
&= \{g,g'\}_H
\end{aligned}
$$

*ve*

$$
\begin{aligned}
\alpha \{-,-\} (g,g') &= \alpha(\{g,g'\}) \\
&= \alpha \left(\{g,g'\}_H , \{g,g'\}_K\right) \\
&= \{g,g'\}_H
\end{aligned}
$$

*olup $\{-,-\}_H (id_G \times id_G) = \alpha \{-,-\}$ eşitliği elde edilir.*

*Benzer şekilde $(\beta, id_G) : \{H \times_G K, G, \partial\} \to \{K, G, \mu\}$ dönüşümünün de bir örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olduğu gösterilir.*

*$\varepsilon : D \to G$ dönüşümü $\{-,-\}_D : G \times G \to D$ örgü dönüşümüyle birlikte bir örgülü çaprazlanmış G-modül ve $(\delta, id_G) : \{D, G, \varepsilon\} \to \{H, G, \lambda\}$, $(\gamma, id_G) : \{D, G, \varepsilon\} \to \{K, G, \mu\}$ iki örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olsun. Bu durumda*

$$
\begin{tikzcd}
& & \{D,G,\varepsilon\} \arrow[lld, "(\delta,id_G)"'] \arrow[d, dotted, "(\psi,id_G)"] \arrow[rrd, "(\gamma,id_G)"] & & \\
\{H,G,\lambda\} & & \{H \times_G K, G, \partial\} \arrow[ll, "(\alpha,id_G)"] \arrow[rr, "(\beta,id_G)"'] & & \{K,G,\mu\}
\end{tikzcd}
$$

*diyagramını değişmeli yapacak $\psi(d) = (\delta(d), \gamma(d))$ şeklinde tanımlı bir tek $(\psi, id_G) : \{D, G, \varepsilon\} \to \{H \times_G K, G, \partial\}$ örgülü çaprazlanmış G-modül morfizminin var olduğunu gösterelim.*

***i)*** *Her $d \in D$ için,*

$$
\begin{aligned}
\partial\psi(d) &= \partial(\delta(d), \gamma(d)) \\
&= \lambda(\delta(d)) \\
&= id_G \varepsilon(d)
\end{aligned}
$$

***ii)*** *Her $g \in G$, her $d \in D$ için*

$$\begin{aligned} \psi(d^g) &= (\delta(d^g), \gamma(d^g)) \\ &= \left(\delta(d)^{id_G(g)}, \gamma(d)^{id_G(g)}\right) \\ &= \psi\left(d\right)^{id_G(g)} \end{aligned}$$

***iii)*** *Her $(g, g') \in G \times G$ için,*

$$\begin{aligned} \{-,-\}\,(id_G \times id_G)(g, g') &= \{-,-\}\,(g, g') \\ &= \{g, g'\} \\ &= (\{g, g'\}_H\,, \{g, g'\}_K) \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned} \psi\,\{-,-\}_D\,(g, g') &= \psi(\{g, g'\}_D) \\ &= (\delta\,\{g, g'\}_D\,, \gamma\,\{g, g'\}_D) \\ &= (\{g, g'\}_H\,, \{g, g'\}_K) \\ &= (\{-,-\}_H\,(id_G \times id_G)\,(g, g')\,, \{-,-\}_K\,(id_G \times id_G)\,(g, g')) \\ &= \{-,-\}\,(id_G \times id_G)(g, g') \end{aligned}$$

*olup $\{-,-\}\,(id_G \times id_G) = \psi\,\{-,-\}_D$ eşitliği elde edilir.*

*Ayrıca*

$$\begin{aligned} \alpha\psi\,(d) &= \alpha\,(\delta\,(d)\,, \gamma\,(d)) \\ &= \delta\,(d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta\psi\,(d) &= \beta\,(\delta\,(d)\,, \gamma\,(d)) \\ &= \gamma\,(d) \end{aligned}$$

*olup $(\alpha, id_G)\,(\psi, id_G) = (\delta, id_G)$ ve $(\beta, id_G)\,(\psi, id_G) = (\gamma, id_G)$ eşitlikleri elde edilir.*

*Son olarak $(\psi, id_G) : \{D, G, \varepsilon\} \to \{H \times_G K, G, \partial\}$ örgülü çaprazlanmış G-modül morfizminin bir tek olduğunu gösterelim. $(\psi', id_G)$, $(\psi, id_G)$ ile aynı özellikte bir örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olsun. Yani*

$$(\alpha, id_G)\,(\psi', id_G) = (\delta, id_G) \;\; ve \;\; (\beta, id_G)\,(\psi', id_G) = (\gamma, id_G)$$

*eşitlikleri sağlansın. $\psi'\,(d) = (h, k)$ olacak şekilde*

$$(\psi', id_G) : \{D, G, \varepsilon\} \to \{H \times_G K, G, \partial\}$$

*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi var olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}\alpha\psi'(d) &= \alpha(h,k) = h = \delta(d) \\ \beta\psi'(d) &= \beta(h,k) = k = \gamma(d)\end{aligned}$$

*olacak şekilde* $(\psi, id_G) = (\psi', id_G)$ *eşitliği elde edilir.*

*Böylece* $\{H \times_G K, G, \partial\}$ *objesi* $\{H, G, \lambda\}$ *ve* $\{K, G, \mu\}$ *objelerinin çarpım objesidir.*

## 4.2 Örgülü Çaprazlanmış $G$-Modül Kategorisinde Geri Çekme Obje

**Teorem 4.2** *Örgülü çaprazlanmış G-modül kategorisi geri çekme objeye sahiptir.*

**İspat** $\alpha : H \to G$ *ve* $\beta : K \to G$ *sırasıyla* $\{-,-\}_H : G \times G \to H$, $\{-,-\}_K : G \times G \to K$ *örgü dönüşümleri ile birlikte iki örgülü çaprazlanmış G-modül ve*

$$\begin{aligned}(f, id_G) &: \{H, G, \alpha\} \to \{C, G, \theta\} \\ (g, id_G) &: \{K, G, \beta\} \to \{C, G, \theta\}\end{aligned}$$

*iki örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olsun.* $((f, id_G), (g, id_G))$ *morfizm ikilisinin geri çekmeye sahip olduğunu göstereceğiz.*

$$\begin{tikzcd} \{?\} \arrow[r, "?"] \arrow[d, "?"'] & \{K, G, \beta\} \arrow[d, "(g, id_G)"] \\ \{H, G, \alpha\} \arrow[r, "(f, id_G)"'] & \{C, G, \theta\} \end{tikzcd}$$

$$H \times_C K = \{(h,k) \mid f(h) = g(k)\}$$

*kümesi geri çekme obje adayımız olup,* $(h,k)$, $(h',k') \in H \times_C K$ *olmak üzere,*

$$(h,k)(h',k') = (hh', kk')$$

*işlemiyle birlikte* $H \times_C K$ *bir grup olduğunu gösterelim.*

***G1***) *Her* $(h,k), (h',k'), (h_1,k_1) \in H \times_C K$ *için*

$$\begin{aligned}(h,k)\left[(h',k')(h_1,k_1)\right] &= (h,k)(h'h_1, k'k_1) \\ &= (h(h'h_1), k(k'k_1)) \\ &= ((hh')h_1, (kk')k_1) \\ &= [(hh'), (kk')](h_1,k_1)\end{aligned}$$

***G2***) *Her* $(h,k) \in H \times_C K$ *için*

$$\begin{array}{rcl} (h,k)(1,1) & = & (h1,k1) \\ & = & (h,k) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (1,1)(h,k) & = & (1h,1k) \\ & = & (h,k) \end{array}$$

*ve* $f(1) = g(1)$ *olacak şekilde* $(1,1) \in H \times_C K$ *var olup birim eleman vardır.*

***G3***) *Her* $(h,k) \in H \times_C K$ *için*

$$(1,1) = (h,k)(h',k') = (hh',kk')ve$$
$$(1,1) = (h',k')(h,k) = (h'h,k'k)$$

$$hh' = 1 = kk',$$
$$h'h = 1 = k'k$$

*olacak şekilde* $h' = h^{-1}$ *ve* $k' = k^{-1}$*,*$(h^{-1},k^{-1}) \in H \times_C K$ *olduğunu gösterelim: H grup olduğundan* $h \in H$ *iken* $h^{-1} \in H$ *vardır.* $(f, id_G) : (H,G,\alpha) \to (C,G,\theta)$ *ve* $(g, id_G) : (K,G,\beta) \to (C,G,\theta)$ *çaprazlanmış G-modül morfizmleri ve* $H \times_C K = \{(h,k) \mid f(h) = g(k)\}$ *geri çekme obje adayımız olmak üzere*

$$\begin{aligned} f\left(h^{-1}\right) &= (f(h))^{-1} && (\because (f, id_G) \text{ çaprazlanmış G-modül}) \\ &= (g(k))^{-1} && (\because f(h) = g(k)) \\ &= g\left((k)^{-1}\right) \end{aligned}$$

*eşitliği elde edilir. Buradan* $(h',k') = \left(h^{-1},(k)^{-1}\right) \in H \times_C K$ *olduğu görülür.*

$$\begin{array}{rccl} \partial : & H \times_C K & \to & G \\ & (h,k) & \mapsto & \partial(h,k) = \alpha(h) = \beta(k) \end{array}$$

*dönüşümünün, örgülü çaprazlanmış G-modül kategorisinin bir objesi olduğunu gösterelim.*

$$\partial : H \times_C K \to G$$

*grup homomorfizmi,*

$$\begin{array}{ccc} (H \times_C K) \times G & \to & H \times_C K \\ ((h,k),g) & \mapsto & (h,k)^g = (h^g,k^g) \end{array}$$

*etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış G-modüldür. Yani;*

***CM*1**)

$$\begin{array}{rcl} \partial((h,k)^g) & = & \partial(h^g,k^g) \\ & = & \alpha(h^g) \\ & = & g^{-1}\alpha(h)g \\ & = & g^{-1}\partial(h,k)g \end{array}$$

***CM*2)**

$$\begin{aligned}(h',k')^{\partial(h,k)} &= (h',k')^{\alpha(h)} \\ &= ((h')^{\alpha(h)},(k')^{\alpha(h)}) \\ &= ((h')^{\alpha(h)},(k')^{\beta(k)}) \qquad (\because \alpha(h)=\beta(k)) \\ &= (h^{-1}h'h,k^{-1}k'k) \\ &= (h^{-1}k^{-1})(h',k')(h,k) \\ &= (h,k)^{-1}(h',k')(h,k)\end{aligned}$$

*eitlikleri sağlanır.*

*Şimdi $\partial : H \times_C K \to G$ dönüşümünün*

$$\begin{aligned}\{-,-\}: \ G\times G &\to H\times_C K \\ (g,g') &\to \{g,g'\}=(\{g,g'\}_H\,,\{g,g'\}_K)\end{aligned}$$

*örgü dönüşümüyle birlikte örgülü çaprazlanmış G-modül aksiyomlarını sağladığını gösterelim.*

*Her $g,g',g_1,g_1' \in G$ ve $(h,k),(h',k') \in H\times_C K$ olmak üzere,*

***BCM*1)**

$$\begin{aligned}\{g,g_1g_1'\} &= (\{g,g_1g_1'\}_H\,,\{g,g_1g_1'\}_K) \\ &= (\{g,g_1\}_H^{g_1'}\{g,g_1'\}_H\,,\{g,g_1\}_K^{g_1'}\{g,g_1'\}_K) \\ &= (\{g,g_1\}_H^{g_1'}\,,\{g,g_1\}_K^{g_1'})(\{g,g_1'\}_H\,,\{g,g_1'\}_K) \\ &= \{g,g_1\}^{g_1'}\{g,g_1'\}\end{aligned}$$

***BCM*2)**

$$\begin{aligned}\{gg',g_1\} &= (\{gg',g_1\}_H\,,\{gg',g_1\}_K) \\ &= (\{g',g_1\}_H\{g,g_1\}_H^{g'}\,,\{g',g_1\}_K\{g,g_1\}_K^{g'}) \\ &= (\{g',g_1\}_H\,,\{g',g_1\}_K)(\{g,g_1\}_H^{g'}\,,\{g,g_1\}_K^{g'}) \\ &= \{g'g_1\}\{g,g_1\}^{g'}\end{aligned}$$

***BCM*3)**

$$\begin{aligned}\partial\{g,g_1\} &= \partial(\{g,g_1\}_H\,,\{g,g_1\}_K) \\ &= \alpha(\{g,g_1\}_H) \\ &= \alpha\{g,g_1\}_H \\ &= [g_1,g]\end{aligned}$$

***BCM*4)**

$$\begin{aligned}\{g,\partial(h,k)\} &= \{g,\alpha(h)\} \\ &= (\{g,\alpha(h)\}_H, \{g,\alpha(h)\}_K) \\ &= (\{g,\alpha(h)\}_H, \{g,\beta(k)\}_K) \\ &= ((h^{-1}h^g),(k^{-1}k^g)) \\ &= ((h^{-1},k^{-1})(h^g,k^g)) \\ &= ((h,k)^{-1},(h,k)^g)\end{aligned}$$

***BCM*5)**

$$\begin{aligned}\{\partial(h',k'),g_1\} &= \{\alpha(h'),g_1\} \\ &= (\{\alpha(h'),g_1\}_H, \{\alpha(h'),g_1\}_K) \\ &= (\{\alpha(h'),g_1\}_H, \{\beta(k'),g_1\}_K) \\ &= (((h')^{-1})^{g_1}h', ((k')^{-1})^{g_1}k') \\ &= ((h',k')^{-1})^{g_1}(h',k')\end{aligned}$$

*elde edilir. Böylece* $\{H \times_C K, G, \partial\}$ *bir örgülü çaprazlanmış G-modüldür ve*

$$\begin{aligned}fp_1(h,k) &= f(h) \\ &= g(k) \\ &= gp_2(h,k)\end{aligned}$$

*olup*

$$\begin{tikzcd} \{H \times_C K, G, \partial\} \arrow[r, "(p_1,id_G)"] \arrow[d, "(p_2,id_G)"'] & \{K,G,\beta\} \arrow[d, "(g,id_G)"] \\ \{A,G,\alpha\} \arrow[r, "(f,id_G)"'] & \{C,G,\theta\} \end{tikzcd}$$

*diyagram değişmelidir.*

*Şimdi her* $(h,k) \in H \times_C K$ *için* $p_1(h,k) = h$ *ve* $p_2(h,k) = k$ *şeklinde tanımlı*

$$(p_1, id_G) : \{H \times_C K, G, \partial\} \to \{H, G, \alpha\}$$

*ve*

$$(p_2, id_G) : \{H \times_C K, G, \partial\} \to \{K, G, \beta\}$$

*dönüşümlerinin örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmleri olduğunu gösterelim. Aşağıdaki diyagramı göz önünde bulunduralım:*

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\{-,-\}"] \arrow[d, equal, "id_G \times id_G"'] & H \times_C K \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "p_1"] & G \arrow[d, dash, "id_G"] \\ G \times G \arrow[r, "\{-,-\}_H"'] & H \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd}$$

***i)*** *Her* $(h,k) \in H \times_C K$ *için,*

$$
\begin{aligned}
(\alpha p_1)(h,k) &= \alpha((p_1(h,k)) \\
&= \alpha(h) \\
&= \partial(h,k) \qquad (\because \partial \text{ tanımından}) \\
&= id_G \partial(h,k)
\end{aligned}
$$

***ii)*** *Her* $g \in G$*, her* $(h,k) \in H \times_C K$ *için*

$$
\begin{aligned}
p_1((h,k)^g) &= p_1(h^g, k^g) \\
&= h^g \\
&= g^{-1}hg \\
&= g^{-1}p_1(h,k)g \\
&= p_1((h,k))^g \\
&= p_1((h,k))^{id_G(g)}
\end{aligned}
$$

***iii)*** *Her* $(g,g') \in G \times G$ *için,*

$$
\begin{aligned}
\{-,-\}_H (id_G \times id_G)(g,g') &= \{-,-\}_H (g,g') \\
&= \{g,g'\}_H
\end{aligned}
$$

*ve*

$$
\begin{aligned}
p_1 \{-,-\} (g,g') &= p_1 \{g,g'\} \\
&= p_1(\{g,g'\}_H, \{g,g'\}_K) \\
&= \{g,g'\}_H
\end{aligned}
$$

*olup* $\{-,-\}_H (id_G \times id_G) = p_1 \{-,-\}$ *eşitliği elde edilir.*

*Bu durumda* $(p_1, id_G)$*, benzer şekilde* $(p_2, id_G)$ *birer örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmidir.*

*Şimdi herhangi bir* $\delta : D \to G$ *örgülü çaprazlanmış G-modül ve için* $(p_1', id_G) : \{D,G,\delta\} \to \{H,G,\alpha\}$ *,* $(p_2', id_G) : \{D,G,\delta\} \to \{K,G,\beta\}$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmleri*

$$(f, id_G)\,(p_1', id_G) = (g, id_G)\,(p_2', id_G)$$

*eşitliğini sağlasın. Bu durumda* $(p_1, id_G)\,(h, id_G) = (p_1', id_G)$ *ve* $(p_2, id_G)\,(h, id_G) = (p_2', id_G)$ *olacak şekilde,* $h\,(d) = (p_1'(d), p_2'(d))$ *şeklinde tanımlı bir tek*

$$(h, id_G) : \{D,G,\delta\} \to \{H \times_C K, G, \partial\}$$

*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olduğunu gösterelim. Aşağıdaki diyagramı göz önünde bulunduralım:*

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\{-,-\}_D"] \arrow[d, equal, "id_G \times id_G"'] & D \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h"] & G \arrow[d, no head, "id_G"] \\ G \times G \arrow[r, "\{-,-\}"'] & H \times_C K \arrow[r, "\partial"'] & G \end{tikzcd}$$

***i)** Her $d \in D$ için,*

$$\begin{aligned} \partial h(d) &= \partial(p_1'(d), p_2'(d)) \\ &= \alpha(p_1'(d)) \\ &= \delta\,(d) \qquad (\because p_1' \text{ örgülü çaprazlanmış } G\text{-modül morfizmi}) \\ &= id_G \delta\,(d) \end{aligned}$$

***ii)** Her $g \in G$, her $d \in D$ için*

$$\begin{aligned} h((d)^g) &= (p_1'(d^g), p_2'(d^g)) \\ &= \left(p_1'(d^{id_G(g)}), p_2'(d^{id_G(g)})\right) \\ &= h\,(d)^{id_G(g)} \end{aligned}$$

***iii)** Her $(g, g') \in G \times G$ için,*

$$\begin{aligned} \{-,-\}\,(id_G \times id_G)(g, g') &= \{-,-\}\,(g, g') \\ &= \{g, g'\} \\ &= (\{g, g'\}_H\,, \{g, g'\}_K) \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned} h\,\{-,-\}_D\,(g, g') &= h(\{g, g'\}_D) \\ &= (p_1'\,\{g, g'\}_D\,, p_2'\,\{g, g'\}_D) \\ &= (\{g, g'\}_H\,, \{g, g'\}_K) \end{aligned}$$

*olup $\{-,-\}\,(id_G \times id_G) = h\,\{-,-\}_D$ eşitliği elde edilir.*

*Bu durumda $(h, id_G)$ bir örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmidir. Ayrıca, her $d \in D$ için*

$$\begin{aligned} (p_1 h)(d) &= p_1(h(d)) \\ &= p_1(p_1'(d), p_2'(d)) \\ &= p_1'(d) \\ (p_2 h)(d) &= p_2(h(d)) \\ &= p_2(p_1'(d), p_2'(d)) \\ &= p_2'(d) \end{aligned}$$

*olup* $(p_1, id_G)\,(h, id_G) = (p'_1, id_G)$ *ve* $(p_2, id_G)\,(h, id_G) = (p'_2, id_G)$ *elde edilir.*

*Son olarak,* $(h, id_G)$ *morfizminin tek olduğunu gösterelim: Her* $d \in D$ *için* $h'(d) = (a, b)$ *şeklinde tanımlı*

$$(h', id_G) : \{D, G, \delta\} \to \{H \times_C K, G, \partial\}$$

*morfizmi* $(h, id_G)$ *ile aynı özellikte yani* $(p_1, id_G)\,(h', id_G) = (p'_1, id_G)$ *ve* $(p_2, id_G)\,(h', id_G) = (p'_2, id_G)$ *eşitliklerini sağlayan bir örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olsun. Bu durumda, her* $d \in D$ *için*

$$\begin{array}{rcl} (p_1 h')(d) & = & p'_1(d) \\ p_1(h'(d)) & = & p'_1(d) \\ p_1(a, b) & = & p'_1(d) \\ a & = & p'_1(d) \end{array} \quad \textit{ve} \quad \begin{array}{rcl} (p_2 h')(d) & = & p'_2(d) \\ p_2(h'(d)) & = & p'_2(d) \\ p_2(a, b) & = & p'_2(d) \\ b & = & p'_2(d) \end{array}$$

*olup* $h'(d) = (a, b) = (p'_1(d), p'_2(d)) = h(d)$ *eşitliği elde edilir. Böylece* $(h, id_G)$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi bir tektir.*

*Sonuç olarak*

$$\begin{tikzcd}
\{D, G, \delta\} \arrow[dr, dashed, "(h, id_G)"'] \arrow[drr, "(p'_1, id_G)"] \arrow[ddr, "(p'_2, id_G)"'] & & \\
& \{H \times_C K, G, \partial\} \arrow[r, "(p_1, id_G)"'] \arrow[d, "(p_2, id_G)"] & \{K, G, \beta\} \arrow[d, "(g, id_G)"] \\
& \{H, G, \alpha\} \arrow[r, "(f, id_G)"'] & \{C, G, \theta\}
\end{tikzcd}$$

$((f, id_G), (g, id_G))$*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizm ikilisi için geri çekme diyagramı elde edilir.*

## 4.3 Örgülü Çaprazlanmış $G$-Modül Kategorisinde Eşitleyici Obje

**Teorem 4.3** *Örgülü çaprazlanmış G-modül kategorisinde her morfizmin eşitleyici objesi vardır.*

**İspat** *$\alpha : H \to G$ ve $\beta : K \to G$ sırasıyla*

$$\{-,-\} : G \times G \to H,$$
$$\{-,-\} : G \times G \to K$$

*örgü dönüşümleri ile birlikte örgülü çaprazlanmış G-modüller olmak üzere $(f, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{K, G, \beta\}$ ve $(g, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{K, G, \beta\}$ iki örügülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olsun. $(f, id_G)$ ve $(g, id_G)$ morfizmlerinin eşitleyicisini bulacağız.*

$$? \xrightarrow{\ ?\ } \{H, G, \alpha\} \overset{(f,id_G)}{\underset{(g,id_G)}{\rightrightarrows}} \{K, G, \beta\}$$

*$E = \{h \in H \mid f(h) = g(h)\} \subseteq H$ olmak üzere, eşitleyici obje adayımız*

$$\begin{array}{rccl} \partial : & E & \to & G \\ & h & \mapsto & \partial(h) = \alpha(h) \end{array}$$

*dönüşümü*

$$\begin{array}{ccc} E \times G & \to & E \\ (h, g) & \mapsto & g^{-1} h g \end{array}$$

*etkisiyle $\partial : E \to G$ bir çaprazlanmış G-modüldür. Çünkü her $h, h' \in E$ ve $g \in G$ için,*

**CM1**)

$$\begin{array}{rcl} \partial(h^g) & = & \alpha(h^g) \\ & = & g^{-1}\alpha(h)\, g \\ & = & g^{-1}\partial(h)\, g \end{array}$$

**CM2**

$$\begin{array}{rcl} h^{\partial(h')} & = & h^{\alpha(h')} \\ & = & (h')^{-1} h h' \end{array}$$

*şeklinde çaprazlanmış G-modül şartları sağlanır.*

*Şimdi $\partial : E \to G$ çaprazlanmış G-modülünün*

$$\begin{array}{rccl} \{-,-\} : & G \times G & \to & E \\ & (g, g') & \mapsto & \{g, g'\} = \{g, g'\}_H \end{array}$$

*örgü dönüşümü ile birlikte örgülü çaprazlanmış G-modül kategorisinin bir objesi olduğunu gösterelim. Her $g, g' g_1, g_1' \in G$ ve $h, h' \in E$ için,*

**BCM1**)

$$\begin{array}{rcll} \{g, g_1 g_1'\} & = & \{g, g_1 g_1'\}_H & \\ & = & (\{g, g_1\}_H)^{g_1'} \{g, g_1'\}_H & \\ & = & \{g, g_1\}^{g_1'} \{g, g_1'\} & (\because \{-,-\} \text{ tanımı}) \end{array}$$

**BCM2**)

$$\begin{aligned} \{gg', g_1\} &= \{gg', g_1\}_H \\ &= \{g', g_1\}_H \left(\{g, g_1\}_H\right)^{g'} \\ &= \{g', g_1\}\{g, g_1\}^{g'} \qquad (\because \{-,-\} \text{ tanımı}) \end{aligned}$$

**BCM3**)

$$\begin{aligned} \partial\{g, g'\} &= \partial\{g, g'\}_H \\ &= \alpha\{g, g'\}_H \\ &= [g', g] \qquad (\because \alpha \text{ örgülü çaprazlanmış } G\text{-modül}) \end{aligned}$$

**BCM4**)

$$\begin{aligned} \{g, \partial(h)\} &= \{g, \partial(h)\}_H \\ &= \{g, \alpha(h)\}_H \\ &= h^{-1}h^g \qquad (\because \alpha \text{ örgülü çaprazlanmış } G\text{-modül}) \end{aligned}$$

**BCM5**)

$$\begin{aligned} \{\partial(h'), g'\} &= \{\partial(h'), g'\}_H \\ &= \{\alpha(h'), g'\}_H \\ &= \left((h')^{-1}\right)^{g'} h' \qquad (\because \alpha \text{ örgülü çaprazlanmış } G\text{-modül}) \end{aligned}$$

*elde edilir.*

*Her $h \in E$ için $j(h) = h$ olmak üzere*

$$(j, id_G) : \{E, G, \partial\} \to \{H, G, \alpha\}$$

*dönüşümünün örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olduğunu gösterelim. Aşağıdaki diyagramı göz önünde bulunduralım:*

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\{-,-\}"] \arrow[d, equal, "id_G \times id_G"'] & E \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "j"] & G \arrow[d, dash, "id_G"] \\ G \times G \arrow[r, "\{-,-\}_H"'] & H \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd}$$

***i)*** *Her $h \in E$ için,*

$$\begin{aligned} \alpha j(h) &= \alpha(h) \\ &= \partial(h) \\ &= id_G \partial(h) \end{aligned}$$

***ii)*** *Her $h \in E$ ve $g \in G$ için,*

$$\begin{aligned} j\left(h^{g}\right) &= h^{g} \\ &= g^{-1}hg \\ &= g^{-1}j\left(h\right)g \\ &= j\left(h\right)^{id_{G}g} \end{aligned}$$

***iii)*** *Her $(g,g') \in G \times G$ için,*

$$\begin{aligned} \{-,-\}_{H}\left(id_{G} \times id_{G}\right)\left(g,g'\right) &= \{-,-\}_{H}\left(g,g'\right) \\ &= \{g,g'\}_{H} \end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned} j\{-,-\}\left(g,g'\right) &= j\{g,g'\} \\ &= \{g,g'\} \\ &= \{g,g'\}_{H} \end{aligned}$$

*olup $\{-,-\}_{H}\left(id_{G} \times id_{G}\right) = j\{-,-\}$ eşitliği elde edilir.*

*Bu durumda $(j, id_G)$ morfizmi örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmidir.*

*Ayrıca her $h \in H$ için*

$$\begin{aligned} (fj)\left(h\right) &= f\left(j\left(h\right)\right) \\ &= f\left(h\right) \\ &= g\left(h\right) \\ &= g\left(j\left(h\right)\right) \\ &= (gj)\left(h\right) \end{aligned}$$

*olup $(f, id_G)\,(j, id_G) = (g, id_G)\,(j, id_G)$ elde edilir.*

*Şimdi herhangi bir $\delta : C \to G$ örgülü çaprazlanmış G-modül olmak üzere $(h, id_G) : \{C, G, \delta\} \to \{H, G, \alpha\}$ örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi $(f, id_G)$ $(h, id_G) = (g, id_G)\,(h, id_G)$ olacak şekilde verilsin. Bu durumda*

$$\{-,-\}_{C} : G \times G \to C$$

*örgü dönüşümü tanımlıdır ve*

***i)*** *$\alpha h{=}id_G\delta$*

***ii)*** *Her $c \in C$ ve her $g \in G$ için*

$$h\left(c^{g}\right) = h\left(c\right)^{id_{G}}$$

***iii)*** $\{-,-\}_H (id_G \times id_G) = h \{-,-\}_C$ *özellikleri sağlanır. Bu durumda*

$$(j, id_G)(\varphi, id_G) = (h, id_G)$$

*olacak şekilde bir tek* $(\varphi, id_G) : \{C, G, \delta\} \to \{E, G, \partial\}$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizminin var olduğunu gösterelim. Her* $c \in C$ *için* $\varphi(c) = h(c)$ *olacak şekilde*

$$(\varphi, id_G) : \{C, G, \delta\} \to \{E, G, \partial\}$$

*dönüşümü tanımlanabilir. Çünkü, her* $c \in C$ *için*

$$\begin{aligned} fh(c) = gh(c) &\Rightarrow f(h(c)) = g(h(c)) \\ &\Rightarrow h(c) \in E \\ &\Rightarrow fh = gh \end{aligned}$$

*elde edilir.*

*Şimdi* $(\varphi, id_G)$ *dönüşümünün örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olduğunu gösterelim. Aşağıdaki diyagramı göz önünde bulunduralım:*

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\{-,-\}_C"] \arrow[d, equal, "id_G \times id_G"'] & C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi"] & G \arrow[d, dash, "id_G"] \\ G \times G \arrow[r, "\{-,-\}"'] & E \arrow[r, "\partial"'] & G \end{tikzcd}$$

***i)*** *Her* $c \in C$ *için,*

$$\begin{aligned} \partial\varphi(c) &= \alpha h(c) \\ &= id_G \delta(c) \end{aligned}$$

***ii)*** *Her* $c \in C$ *ve* $g \in G$ *için,*

$$\begin{aligned} \varphi(c^g) &= h(c^g) \\ &= g^{-1} h(c) g \\ &= h(c)^g \\ &= h(c)^{id_G(g)} \\ &= \varphi(c)^{id_G(g)} \end{aligned}$$

***iii)*** *Her* $(g, g') \in G \times G$ *için,*

$$\begin{aligned} \{-,-\}(id_G \times id_g)(g, g') &= \{-,-\}(g, g') \\ &= \{g, g'\} \end{aligned}$$

*ve*

$$
\begin{aligned}
\varphi\{-,-\}_C(g,g') &= \varphi\{g,g'\}_C \\
&= h\{g,g'\}_C \\
&= \{g,g'\}_H \qquad (\because h \text{ örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi}) \\
&= \{g,g'\})
\end{aligned}
$$

*olup* $\{-,-\}(id_G \times id_G) = \varphi\{-,-\}_C$ *eşitliği elde edilir.*

*Ayrıca her* $c \in C$ *için*

$$
\begin{aligned}
(j\varphi)(c) &= j\varphi(c) \\
&= \varphi(c) \\
&= h(c)
\end{aligned}
$$

*olup* $(j, id_G)(\varphi, id_G) = (h, id_G)$ *elde edilir.*

*Son olarak* $(\varphi, id_G)$ *morfizminin tek olduğunu gösterelim.* $(\varphi', id_G) : \{C, G, \delta\} \to \{E, G, \partial\}$ *dönüşümü* $(\varphi, id_G)$ *dönüşümü ile aynı özellikte yani* $(j, id_G)(\varphi', id_G) = (h, id_G)$ *olacak şekilde örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olsun. Her* $c \in C$ *için* $\varphi'(c) = h(c)$ *olmak üzere*

$$(\varphi', id_G) : \{C, G, \delta\} \to \{E, G, \partial\}$$

*şeklinde tanımlayalım.*

$$
\begin{aligned}
j\varphi'(c) = h(c) &\Rightarrow \varphi'(c) = h(c) \\
&\Rightarrow h(c) = \varphi(c)
\end{aligned}
$$

*olup*

$$\varphi'(c) = h(c) = \varphi(c)$$

*elde edilir. Bu durumda* $(\varphi, id_G)$ *morfizmi tektir.*

Böylece $(E, j)$ ikilisi $((f, id_G), (g, id_G))$ ikilisinin eşitleyicisidir ve

$$
\begin{tikzcd}
\{E,G,\partial\} \arrow[r, "(j,id_G)"] & \{H,G,\alpha\} \arrow[r, shift left, "(f,id_G)"] \arrow[r, shift right, "(g,id_G)"'] & \{K,G,\beta\} \\
\{C,G,\delta\} \arrow[u, dotted, "\exists!(\varphi,id_G)"] \arrow[ur, "(h,id_G)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

diyagramı eşitleyici diyagramıdır.

## 4.4 Örgülü Çaprazlanmış $G$-Modül Kategorisinde Eş-Eşitleyici Obje

**Teorem 4.4** *Örgülü çaprazlanmış G-modül kategorsinde her morfizmin eş-eşitleyici objesi vardır.*

**İspat** *$\alpha : H \to G$ ve $\beta : K \to G$ sırasıyla $\{-,-\}_H : G \times G \to H$, $\{-,-\}_K : G \times G \to K$ örgü dönüşümleri ile birlikte bir örgülü çaprazlanmış G-modül olmak üzere $(f, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{K, G, \beta\}$ ve $(g, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{K, G, \beta\}$ iki örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olsun. $(f, id_G)$ ve $(g, id_G)$ morfizmlerinin eş-eşitleyicisini bulacağız.*

$$\{H, G, \alpha\} \underset{(g,id_G)}{\overset{(f,id_G)}{\rightrightarrows}} \{K, G, \beta\} \xrightarrow{\ ?\ } ?$$

*$h \in H$ olmak üzere, $K$ grubunun $((f(h))^{-1} g(h)$ elemanlarıyla üretilen bir normal alt grubu $N$ olsun. $K/N$ bölüm grubunu oluşturabiliriz. Eş-eşitleyici obje adayımız*

$$\begin{array}{rrcl} \partial : & K/N & \to & G \\ & kN & \mapsto & \partial(kN) = \beta(k) \end{array}$$

*dönüşümü*

$$\begin{array}{lcl} K/N \times G & \to & K/N \\ (kN, g) & \mapsto & (kN)^g = k^g N \end{array}$$

*etkisiyle $\partial : K/N \to G$ bir çaprazlanmış G-modüldür. Çünkü her $kN, k'N \in K/N$ ve $g \in G$ için,*

**CM1**)

$$\begin{aligned} \partial((kN)^g) &= \partial(k^g N) \\ &= \beta(k^g) \\ &= g^{-1}\beta(k)\, g \\ &= g^{-1}\partial(kN)\, g \end{aligned}$$

**CM2**

$$\begin{aligned} (kN)^{\partial(k'N)} &= kN^{\beta(k')} \\ &= k^{\beta(k')} N \\ &= ((k'^{-1})kk')\, N \\ &= (k'N)^{-1}(kN)(k'N) \end{aligned}$$

*şeklinde çaprazlanmış G-modül şartları sağlanır.*

$\{K/N, G, \partial\}$ *için örgü dönüşümü*

$$G \times G \xrightarrow{\{-,-\}_K} K \xrightarrow{\quad q \quad} K/N$$

*olmak üzere*

$$\begin{array}{rcl} \{-,-\}: \ G \times G & \rightarrow & K/N \\ (g, g') & \mapsto & \{g, g'\} = q\{g, g'\}_K = \{g, g'\}_K N \end{array}$$

*şekilde tanımlanabilir.* $\partial : K/N \to G$ *dönüşümü, her* $g, g'g_1, g_1' \in G$ *ve* $kN, k'N \in K/N$ *için,*

**BCM1**)

$$\begin{array}{rcl} \{g, g_1 g_1'\} & = & \{g, g_1 g_1'\}_K N \\ & = & \left( (\{g, g_1\}_K)^{g_1'} \{g, g_1'\}_K \right) N \\ & = & \left( \left( (\{g, g_1\}_K)^{g_1'} \right) N \left( \{g, g_1'\}_K \right) N \right) \\ & = & (\{g, g_1\}_K N)^{g_1'} (\{g, g_1'\}_K N) \\ & = & \{g, g_1\}^{g_1'} \{g, g_1'\} \end{array}$$

**BCM2**)

$$\begin{array}{rcl} \{gg', g_1\} & = & \{gg', g_1\}_K N \\ & = & \left( \{g', g_1\}_K (\{g, g_1\}_K)^{g'} \right) N \\ & = & \{g', g_1\}_K N (\{g, g_1\}_K)^{g'} N \\ & = & (\{g', g_1\}_K N) (\{g, g_1\}_K N)^{g'} \\ & = & \{g', g_1\} \{g, g_1\}^{g'} \end{array}$$

**BCM3**)

$$\begin{array}{rcll} \partial \{g, g'\} & = & \partial (\{g, g'\}_K N) & \\ & = & \beta \{g, g'\}_K & \\ & = & [g', g] & (\because \beta \text{ örgülü çaprazlanmış } G\text{-modül}) \end{array}$$

**BCM4**)

$$\begin{array}{rcll} \{g, \partial (kN)\} & = & \{g, \partial (kN)\}_K N & \\ & = & \{g, \beta (k)\}_K N & \\ & = & (k^{-1} k^g) N & (\because \beta \text{ örgülü çaprazlanmış } G\text{-modül}) \\ & = & (kN)^{-1} (kN)^g & \end{array}$$

**BCM5)**

$$\begin{aligned}
\{\partial(k'N), g'\} &= \{\partial(k'N), g'\}_K N \\
&= \{\beta(k'), g'\}_K N \\
&= \left(\left((k')^{-1}\right)^{g'} k'\right) N \quad (\because \beta \text{ örgülü çaprazlanmış } G\text{-modül}) \\
&= \left((k')^{-1} N\right)^{g'} (k'N) \\
&= \left((k'N)^{-1}\right)^{g'} k'N
\end{aligned}$$

*özelliklerini sağlar. Böylece $\{K/N, G, \partial\}$ bir örgülü çaprazlanmış G-modüldür. Şimdi,*

$$\begin{array}{rccc}
(q, id_G): & \{K, G, \beta\} & \rightarrow & \{K/N, G, \partial\} \\
& k & \mapsto & q(k) = kN
\end{array}$$

*dönüşümünün örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olduğunu gösterelim. Aşağıdaki diyagramı göz önünde bulunduralım:*

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\{-,-\}_K"] \arrow[d, equal, "id_G \times id_G"'] & K \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "q"] & G \arrow[d, dash, "id_G"] \\
G \times G \arrow[r, "\{-,-\}"'] & K/N \arrow[r, "\partial"'] & G
\end{tikzcd}$$

***i)*** *Her $k \in K$ için,*

$$\begin{aligned}
\partial q(k) &= \partial(kN) \\
&= \beta(k) \\
&= id_G \beta(k)
\end{aligned}$$

***ii)*** *Her $k \in K$ ve $g \in G$ için,*

$$\begin{aligned}
q(k^g) &= (k^g) N \\
&= (kN)^g \\
&= (kN)^{id_G(g)} \\
&= q(k)^{id_G(g)}
\end{aligned}$$

***iii)*** *Her $(g, g') \in G \times G$ için,*

$$\begin{aligned}
\{-,-\}(id_G \times id_G)(g, g') &= \{-,-\}(g, g') \\
&= \{g, g'\}_K N
\end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned}
q\{-,-\}_K(g, g') &= q\{g, g'\}_K \\
&= \{g, g'\}_K N
\end{aligned}$$

*olup* $\{-,-\}(id_G \times id_G) = q\{-,-\}_K$ *eşitliği elde edilir.*

*Bu durumda* $(q, id_G)$ *morfizmi örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmidir.*

*Ayrıca her* $h \in H$ *için*

$$\begin{aligned}(f(h))^{-1}g(h) \in N \quad &\Rightarrow \quad f(h)N = g(h)N \\ &\Rightarrow \quad q(f(h)) = q(g(h)) \\ &\Rightarrow \quad (qf)(h) = (qg)(h)\end{aligned}$$

*olup* $(q, id_G)(f, id_G) = (q, id_G)(g, id_G)$ *elde edilir.*

*Bu durumda*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr, "\alpha"'] & K \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\beta"] & K/N \arrow[dl, "\partial"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

*diyagramı değişmelidir.*

*Şimdi, herhangi bir* $\delta : C \to G$ *örgülü çaprazlanmış G-modül ve* $(\gamma, id_G) : \{K, G, \beta\} \to \{C, G, \delta\}$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi* $(\gamma, id_G)(f, id_G) = (\gamma, id_G)(g, id_G)$ *olacak şekilde verilsin. Bu durumda*

$$\{-,-\}_C : G \times G \to C$$

*örgü dönüşümü tanımlıdır ve*

***i)*** $\delta\gamma = id_G\beta$

***ii)*** *Her* $k \in K$ *ve her* $g \in G$ *için*

$$\gamma(k^g) = \gamma(k)^{id_G(g)}$$

***iii)*** $\{-,-\}_C(id_G \times id_G) = \gamma\{-,-\}_K$ *özellikleri sağlanır. Bu durumda*

$$(\varphi, id_G)(q, id_G) = (\gamma, id_G)$$

*olacak şekilde, her* $kN \in K/N$ *için* $\varphi(kN) = \gamma(k)$ *şelinde tanımlı bir tek*

$$(\varphi, id_G) : \{K/N, G, \partial\} \to \{C, G, \delta\}$$

*örgülü çaparzlanmış G-modül morfizminin var olduğunu gösterelim: Her $h \in H$ için*

$$\begin{aligned}
\varphi\left((f(h))^{-1}g(h)\right) &= \gamma\left((f(h))^{-1}g(h)\right) \\
&= \gamma\left((f(h))^{-1}\right)\gamma(g(h)) \\
&= \gamma\left((f(h))^{-1}\right)\gamma(f(h)) \quad (\because \gamma f(h) = \gamma g(h)) \\
&= \gamma\left((f(h))^{-1}f(h)\right) \\
&= 1_C
\end{aligned}$$

*olduğundan $\varphi$ iyi tanımlıdır.*

*Şimdi $(\varphi, id_G)$ dönüşümünün örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olduğunu gösterelim. Aşağıdaki diyagramı göz önünde bulunduralım:*

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\{-,-\}"] \arrow[d, equal, "id_G \times id_G"'] & K/N \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi"] & G \arrow[d, dash, "id_G"] \\
G \times G \arrow[r, "\{-,-\}_C"'] & C \arrow[r, "\delta"'] & G
\end{tikzcd}$$

***i)** Her $kN \in K/N$ için,*

$$\begin{aligned}
\delta\varphi(kN) &= \delta\gamma(h) \\
&= id_G\beta(k) \\
&= id_G\partial(kN)
\end{aligned}$$

***ii)** Her $kN \in K/N$ ve $g \in G$ için,*

$$\begin{aligned}
\varphi(kN^g) &= \varphi(k^g N) \\
&= \gamma(k^g) \\
&= g^{-1}\gamma(k)g \\
&= g^{-1}\varphi(kN)g \\
&= \varphi(kN)^{id_G(g)}
\end{aligned}$$

***iii)** Her $(g, g') \in G \times G$ için,*

$$\begin{aligned}
\{-,-\}_C(id_G \times id_G)(g, g') &= \{-,-\}_C(g, g') \\
&= \{g, g'\}_C
\end{aligned}$$

*ve*

$$\begin{aligned}
\varphi\{-,-\}(g, g') &= \varphi(\{g, g'\}_K N) \\
&= \gamma(\{g, g'\}_K) \\
&= \{g, g'\}_C \qquad (\because \gamma \text{ örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi})
\end{aligned}$$

*olup* $\{-,-\}_C\,(id_G \times id_G) = \varphi\,\{-,-\}$ *eşitliği elde edilir.*

*Ayrıca her* $k \in K$ *için*

$$\begin{aligned} (\varphi q)(k) &= \varphi(kN) \\ &= \gamma(k) \end{aligned}$$

*olup* $(\varphi, id_G)(q, id_G) = (\gamma, id_G)$ *elde edilir.*

*Son olarak* $(\varphi, id_G)$ *morfizminin tek olduğunu gösterelim.* $(\varphi', id_G) : \{K/N, G, \partial\} \to \{C, G, \delta\}$ *dönüşümü* $(\varphi, id_G)$ *dönüşümü ile aynı özellikte yani* $(\varphi', id_G)(q, id_G) = (\gamma, id_G)$ *olacak şekilde bir örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olsun.*

$$\begin{array}{rccl} (\varphi', id_G): & \{K/N, G, \partial\} & \to & \{C, G, \delta\} \\ & kN & \mapsto & \varphi'(kN) = c \end{array}$$

*şeklinde tanımlayalım. Her* $k \in K$ *için,*

$$\begin{aligned} \varphi' q(k) = \gamma(k) &\Rightarrow \varphi'(kN) = \gamma(k) \\ &\Rightarrow c = \varphi(kN) \end{aligned}$$

*olup*

$$\varphi'(kN) = c = \varphi(kN)$$

*elde edilir. Bu durumda* $(\varphi, id_G)$ *morfizmi tektir.*

*Böylece* $(K/N, q)$ *ikilisi* $((f, id_G), (g, id_G))$ *ikilisinin eş-eşitleyicisidir ve*

$$\begin{tikzcd} \{H, G, \alpha\} \arrow[r, shift left, "{(f,id_G)}"] \arrow[r, shift right, "{(g,id_G)}"'] & \{K, G, \beta\} \arrow[r, "{(q,id_G)}"] \arrow[dr, "{(\gamma,id_G)}"'] & \{K/N, G, \partial\} \arrow[d, dotted, "{\exists!(\varphi,id_G)}"] \\ & & \{C, G, \delta\} \end{tikzcd}$$

*diyagramı eş-eşitleyici diyagramıdır.*

# 5. DÜZENLİ KATEGORİLER

Gruplar üzerinde düzenli kategori kavramı ilk olarak Barr $(1992)$ tarafından tanımlanmıştır. Bu bölümde gruplar üzerinde çaprazlanmış $G$-modül ve örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinin düzenli kategori olduğu gösterilecektir. Cebirler için benzer çalışma Gülsün (2012) de yer almaktadır.

## 5.1 Düzenli Kategori

**Tanım 5.1** *$C$ kategorisi aşağıdaki şartları sağlıyorsa düzenli kategori adını alır.*

***i)*** *$C$ sonlu bütündür (finitely complete);*

***ii)*** *$C$ kategorisindeki herhangi $f : X \longrightarrow Y$ morfizmi için*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

*geri çekme diyagramı ve f morfizmin çekirdek ikilisi olarak adlandırılan $Z \underset{p_1}{\overset{p_0}{\rightrightarrows}} X$ morfizm ikilisinin eş-eşitleyicisi vardır;*

***iii)*** *$C$ kategorisindeki $f : X \longrightarrow Y$ morfizmi için*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

*geri çekme diyagramında, $f$ düzenli epimorfizm ise $g$ morfizmi de düzenli epimorfizmdir.*

Bazı düzenli kategori örnekleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

1) Kümeler kategorisi,

2) Abelyen kategoriler,

3) Kategori olarak düşünülebilinen her kısmi sıralı küme.

**Örgülü Çaprazlanmış $G$-Modül Kategorisi Düzenli Kategoridir.**

**i)** $\alpha : H \to G$ ve $\beta : K \to G$ sırasıyla

$$\{-,-\} : G \times G \to H,$$
$$\{-,-\} : G \times G \to K$$

örgü dönüşümleri ile birlikte örgülü çaprazlanmış $G$-modüller olmak üzere $(f, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{K, G, \beta\}$ ve $(g, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{K, G, \beta\}$ iki örgülü çaprazlanmış $G$-modül morfizmi olsun. Örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinde, her morfizm ikilisi eşitleyiciye sahip olduğundan

$$\begin{tikzcd}
\{E, G, \partial\} \arrow[r, "(j,id_G)"] & \{H, G, \alpha\} \arrow[r, shift left, "(f,id_G)"] \arrow[r, shift right, "(g,id_G)"'] & \{K, G, \beta\} \\
\{C, G, \delta\} \arrow[u, dotted, "\exists!(\varphi,id_G)"] \arrow[ur, "(h,id_G)"'] & &
\end{tikzcd}$$

diyagramı

$$E = \{h \in H \mid f(h) = g(h)\}$$

olmak üzere $((f, id_G), (g, id_G))$ morfizm ikilisi için eşitleyici diyagramıdır.

Ayrıca örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisi sonlu çarpıma sahiptir.

Böylece örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisi sonlu çarpıma sahip ve her morfizm ikilisi eşitleyiciye sahip olduğundan sonlu bütündür.

**ii)** $\alpha : H \to G$ ve $\beta : K \to G$ örgülü çaprazlanmış $G$-modülleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} \{-,-\}_H &: G \times G \to H \\ \{-,-\}_K &: G \times G \to K \end{aligned}$$

örgü dönüşümleri ile tanımlansın.

$$(f, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{K, G, \beta\}$$

örgülü çaprazlanmış $G$-modül morfizmini ele alalım.

Örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinde her morfizm ikilisinin geri çekmesi var olduğundan,

$$\begin{tikzcd}
\{H \times_K H, G, \partial\} \arrow[r, "(p_1, id_G)"] \arrow[d, "(p_2, id_G)"'] & \{H, G, \alpha\} \arrow[d, "(f, id_G)"] \\
\{H, G, \alpha\} \arrow[r, "(f, id_G)"'] & \{K, G, \beta\}
\end{tikzcd}$$

diyagramı,

$$H \times_K H = \{(h, h') \mid f(h) = f(h')\} \subseteq H \times H$$

olmak üzere,$(f, id_G)$ örgülü çaprazlanmış $G$-modül morfizminin kendisi ile geri çekme diyagramıdır. Böylece

$$\begin{aligned}
(p_1, id_G) &: \{H \times_K H, G, \partial\} \to \{H, G, \alpha\}, \qquad p_1(h, h') = h \\
(p_2, id_G) &: \{H \times_K H, G, \partial\} \to \{H, G, \alpha\}, \qquad p_2(h, h') = h'
\end{aligned}$$

olmak üzere $((p_1, id_G), (p_2, id_G))$ morfizm ikilisi $(f, id_G)$ morfizmi için çekirdek ikilidir.

Ayrıca örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinde her morfizm ikilisi eş-eşitleyiciye sahip olduğundan $((p_1, id_G), (p_2, id_G))$ morfizm ikilisinin eş-eşitleyicisi, $N$, $H$ grubunun

$$\left\{(p_1(h, h'))^{-1} p_2(h, h') \mid (h, h') \in H \times_K H\right\}$$

kümesi ile üretilen normal alt grubu ve

$$\begin{aligned}
\partial : \ H/N &\to G \\
hN &\mapsto \partial(hN) = \alpha(h)
\end{aligned}$$

olmak üzere $(\{H/N, G, \partial\}, (q, id_G))$ ikilisidir.

$$\partial : H/N \to G$$

dönüşümü

$$G \times G \xrightarrow{\{-,-\}_H} H \xrightarrow{q} H/N$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\{-,-\} : \ G \times G &\to H/N \\
(g, g') &\mapsto \{g, g'\} = q\{g, g'\}_H = \{g, g'\}_H N
\end{aligned}$$

örgü dönüşümü ile birlikte bir örgülü çaprazlanmış $G$-modüldür. Çünkü her $g, g', g_1, g_1' \in G$ ve $hN, h'N \in H/N$

**BCM1**)

$$\begin{aligned}
\{g, g_1 g_1'\} &= \{g, g_1 g_1'\}_H \, N \\
&= \left( (\{g, g_1\}_H)^{g_1'} \, \{g, g_1'\}_H \right) N \\
&= \left( (\{g, g_1\}_H)^{g_1'} \right) N \, (\{g, g_1'\}_H) \, N \\
&= (\{g, g_1\}_H \, N)^{g_1'} \, (\{g, g_1'\}_H \, N) \\
&= \{g, g_1\}^{g_1'} \, \{g, g_1'\}
\end{aligned}$$

**BCM2**)

$$\begin{aligned}
\{gg', g_1\} &= \{gg', g_1\}_H \, N \\
&= \left( \{g', g_1\}_H \, (\{g, g_1\}_H)^{g'} \right) N \\
&= \{g', g_1\}_H \, N \, (\{g, g_1\}_H)^{g'} \, N \\
&= (\{g', g_1\}_H \, N) \, (\{g, g_1\}_H \, N)^{g'} \\
&= \{g', g_1\} \, \{g, g_1\}^{g'}
\end{aligned}$$

**BCM3**)

$$\begin{aligned}
\partial \{g, g'\} &= \partial \left( \{g, g'\}_H \, N \right) \\
&= \alpha \{g, g'\}_H \\
&= [g', g] \qquad (\because \alpha \text{ örgülü çaprazlanmış } G\text{-modül})
\end{aligned}$$

**BCM4**)

$$\begin{aligned}
\{g, \partial (hN)\} &= \{g, \partial (hN)\}_H \, N \\
&= \{g, \alpha (h)\}_H \, N \\
&= (h^{-1} h^g) \, N \qquad (\because \alpha \text{ örgülü çaprazlanmış } G\text{-modül}) \\
&= (hN)^{-1} \, (hN)^g
\end{aligned}$$

**BCM5**)

$$\begin{aligned}
\{\partial (h'N), g'\} &= \{\partial (h'N), g'\}_H \, N \\
&= \{\alpha (h'), g'\}_H \, N \\
&= \left( \left( (h')^{-1} \right)^{g'} h' \right) N \qquad (\because \alpha \text{ örgülü çaprazlanmış } G\text{-modül}) \\
&= \left( (h')^{-1} \, N \right)^{g'} (h'N) \\
&= \left( (h'N)^{-1} \right)^{g'} (h'N)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$\begin{tikzcd}
\{H \times_K H, G, \partial\} \arrow[r, shift left, "{(p_1, id_G)}"] \arrow[r, shift right, "{(p_2, id_G)}"'] & \{H, G, \alpha\} \arrow[r, "{(q, id_G)}"] \arrow[dr, "{(q', id_G)}"] & \{H/N, G, \sigma\} \arrow[d, dashed, "{\exists! (\varphi, id_G)}"] \\
 & & \{H', G, \sigma'\}
\end{tikzcd}$$

diyagramı $((p_1, id_G), (p_2, id_G))$ morfizm ikilisi için eş-eşitleyici diyagramıdır.

**iii)** Son olarak örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinde düzenli epimorfizmlerin geri çekme altında korunduğunu gösterelim.

Örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinde $(\Phi, id_G) : \{H, G, \mu\} \longrightarrow \{C, G, \sigma\}$ morfizmi bir düzenli epimorfizm ve $(\eta, id_G) : \{K, G, \theta\} \longrightarrow \{C, G, \sigma\}$ herhangi bir morfizm olsun.

Bu durumda $\Phi : H \longrightarrow C$ morfizmi gruplar kategorisinde bir düzenli epimorfizmdir. Dolayısıyla $\Phi$ örtendir. Gruplar kategorisinde örten fonksiyon geri çekme altında korunduğundan $\Phi^* : H \times_C K \longrightarrow K$ örtendir.

$$\begin{tikzcd}
\{H \times_C K, G, \rho\} \arrow[r] \arrow[d, "(\Phi^*, id_G)"'] & \{H, G, \mu\} \arrow[d, "(\Phi, id_G)"] \\
\{K, G, \theta\} \arrow[r, "(\eta, id_G)"'] & \{C, G, \sigma\}
\end{tikzcd}$$

Ayrıca gruplar kategorisinde her örten morfizm bir epimorfizm ve her epimorfizm ise düzenlidir.

Dolayısıyla $(\Phi, id_G)$ düzenli epimorfizm iken $(\Phi^*, id_G)$ morfizmi de düzenli epimorfizmdir.

## 5.2 Düzenli Kategori Özellikleri

Bu bölümde örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinde denklik bağıntısı kavramı ve özellikleri incelenecektir. Ayrıca bağıntı ve bağıntı kategori tanımlarına ve bazı özelliklerine yer verilecektir (Gran, 2014).

**Önerme 5.1** *Örgülü çaprazlanmış G-modül kategorisinde*

$$(f, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{K, G, \beta\}$$

*bir örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi ve*

$$Eq(f) = H \times_K H = \{(h, h') \in H \times H \mid f(h) = f(h')\} \subseteq H \times H$$

*kümesi $(f, id_G)$ morfizminin çekirdek ikilisi olmak üzere $\{Eq(f), G, \partial\}$*

$$\{Eq(f), G, \partial\} \underset{(p_2, id_G)}{\overset{(p_1, id_G)}{\rightrightarrows}} \{H, G, \alpha\}$$

*bağıntısı ile birlikte bir denklik bağıntısıdır.*

**İspat**

$$\begin{aligned}(p_1, id_G) &: \{Eq(f), G, \partial\} \to \{H, G, \alpha\}\\ (p_2, id_G) &: \{Eq(f), G, \partial\} \to \{H, G, \alpha\}\end{aligned}$$

*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmleri, geri çekmenin iz düşümü olduğundan monomorfiktir.*

*Şimdi* $\{Eq(f), G, \partial\}$ *ın* $\{H, G, \alpha\}$ *üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim.*

***i)*** *Aşağıdaki kare diyagramı*

$$\begin{tikzcd}
\{H,G,\alpha\} \arrow[r, "(1_H, id_G)"] \arrow[d, "(1_H, id_G)"'] & \{H,G,\alpha\} \arrow[d, "(f, id_G)"] \\
\{H,G,\alpha\} \arrow[r, "(f, id_G)"'] & \{K,G,\beta\}
\end{tikzcd}$$

*değişmeli olduğundan ve* $((p_1, id_G), (p_2, id_G))$ *çekirdek ikilisinin evrensellik özelliğinden*

$$\begin{tikzcd}
\{H,G,\alpha\} \arrow[dr, dashed, "(f, id_G)"] \arrow[drr, "(1_H, id_G)"] \arrow[ddr, "(1_H, id_G)"'] & & \\
& \{Eq(f), G, \partial\} \arrow[r, "(p_1, id_G)"'] \arrow[d, "(p_2, id_G)"] & \{H,G,\alpha\} \arrow[d, "(f, id_G)"] \\
& \{H,G,\alpha\} \arrow[r, "(f, id_G)"'] & \{K,G,\beta\}
\end{tikzcd}$$

*diyagramı değişmeli olup*

$$p_1\delta = 1_H = p_2\delta$$

*olacak şekilde bir tek*

$$(\delta, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{Eq(f), G, \partial\}$$

*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi vardır. Bu durumda* $\{Eq(f), G, \partial\}$ *yansıyandır.*

***ii)*** *Benzer şekilde aşağıdaki diyagramın dış bölümünün (yüzünün) değişmeli olmasından*

$$
\begin{tikzcd}
\{Eq(f),G,\partial\} \arrow[dr, dashed, "(\sigma,id_G)"] \arrow[drr, "(p_1,id_G)"] \arrow[ddr, "(p_2,id_G)"'] & & \\
& \{Eq(f),G,\partial\} \arrow[r, "(p_1,id_G)"'] \arrow[d, "(p_2,id_G)"] & \{H,G,\alpha\} \arrow[d, "(f,id_G)"] \\
& \{H,G,\alpha\} \arrow[r, "(f,id_G)"'] & \{K,G,\beta\}
\end{tikzcd}
$$

$$p_1\sigma = p_2 \quad \textit{ve} \quad p_2\sigma = p_1$$

*olacak şekilde bir tek*

$$(\sigma, id_G) : \{Eq(f), G, \partial\} \rightarrow \{Eq(f), G, \partial\}$$

*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi vardır. Bu durumda* $\{Eq(f), G, \partial\}$ *simetriktir.*

***iii)***

$$
\begin{tikzcd}
\{Eq(f)\times Eq(f),G\times G,\partial\times\partial\} \arrow[rr, "(\pi_1,id_G)"] \arrow[dr, "(\tau,id_G)"] \arrow[dd, "(\pi_2,id_G)"'] & & \{Eq(f),G,\partial\} \arrow[dr, "(p_2,id_G)"] \arrow[dd, "(p_1,id_G)"] & \\
& \{Eq(f),G,\partial\} \arrow[rr, "(p_1,id_G)"] \arrow[dd, "(p_2,id_G)"] & & \{H,G,\alpha\} \arrow[dd, dash, "(f,id_G)"] \\
\{Eq(f),G,\partial\} \arrow[rr, "(p_1,id_G)"'] \arrow[dr, "(p_2,id_G)"'] & & \{H,G,\alpha\} \arrow[dr, "(f,id_G)"] & \\
& \{H,G,\alpha\} \arrow[rr, dash, "(f,id_G)"'] & & \{K,G,\beta\}
\end{tikzcd}
$$

*diyagramının orta yüzü geri çekmedir. Ayrıca diyagram değişmeli olduğundan ve* $((p_1, id_G), (p_2, id_G))$ *çekirdek ikilisinin evrensellik özelliğinden*

$$p_1\tau = p_1\pi_1 \quad \textit{ve} \quad p_2\tau = p_2\pi_2$$

*olacak şekilde bir tek*

$$(\tau, id_G) : \{Eq(f) \times Eq(f), G \times G, \partial \times \partial\} \rightarrow \{Eq(f), G, \partial\}$$

*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi vardır. Bu durumda* $\{Eq(f), G, \partial\}$ *geçişlidir.*

*Böylece* $\{Eq(f), G, \partial\}$, $\{H, G, \alpha\}$ *üzerinde bir denklik bağıntısıdır.*

**Önerme 5.2** *Örgülü çaprazlanmış G-modül kategorisinde her $(f, id_G)$ düzenli epimorfizm kendisinin çekirdek ikilisinin eş-eşitleyicisidir.*

**İspat** $(f, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{K, G, \beta\}$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi verilsin.*

$$Eq\,(f) = H \times_K H = \{(h, h') \in H \times H \mid f\,(h) = f\,(h')\}$$

*kümesi $H \times H$ grubunun alt grubu olmak üzere ve $(f, id_G)$ örgülü çaprazlanmış G-modül morfizminin çekirdek ikilisi olmak üzere $Eq\,(f)$ bir denklik bağıntısı olup, her $h \in H$ için $\phi\,(hEq\,(f)) = \alpha\,(h)$ şeklinde tanımlı*

$$\phi : H/Eq\,(f) \to G$$

*dönüşümü*

$$\begin{array}{ccc} (H/Eq\,(f)) \times G & \to & H/Eq\,(f) \\ (hEq\,(f)\,, g) & \mapsto & (hEq\,(f))^g \;\; = (h^g Eq\,(f)) \end{array}$$

*etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış G-modüldür. Çünkü her $\overline{h} = hEq\,(f)\,, \overline{h_1} = h'Eq\,(f) \in H/Eq\,(f)$ ve her $g \in G$ için,*

**CM1**)

$$\begin{aligned} \phi\left(\left(\overline{h}\right)^g\right) &= \phi\,(hEq\,(f)^g) \\ &= \phi\,(h^g Eq\,(f)) \\ &= \alpha\,(h^g) \\ &= g^{-1}\alpha\,(h)\,g \\ &= g^{-1}\phi\left(\overline{h}\right)g \end{aligned}$$

**CM2**)

$$\begin{aligned} \left(\overline{h}\right)^{\phi\left(\overline{h_1}\right)} &= \overline{h}^{\alpha(h')} \\ &= (h')^{-1}\overline{h}h' \end{aligned}$$

*olduğu görülür.*

*Şimdi $\phi : H/Eq\,(f) \to G$ dönüşümünün*

$$G \times G \xrightarrow{\{-,-\}_H} H \xrightarrow{q} H/Eq\,(f)$$

*olmak üzere,*

$$\begin{array}{rccc} \{-,-\} : & G \times G & \to & H/Eq\,(f) \\ & (g, g') & \mapsto & q\,\{g, g'\}_H = \{g, g'\}_H\,Eq\,(f) \end{array}$$

*şeklinde tanımlı örgü dönüşümü ile birlikte bir örgülü çaprazlanmış G-modül olduğunu gösterelim. Her $hEq\,(f)\,, kEq\,(f) \in H/Eq\,(f)$ ve her $g, g', g_1, g_1' \in G$ için,*

**BCM1**)

$$\begin{aligned}
\{g, g_1 g_1'\} &= \{g, g_1 g_1'\}_H \, Eq(f) \\
&= \left( (\{g, g_1\}_H)^{g_1'} \{g, g_1'\}_H \right) Eq(f) \\
&= \left( (\{g, g_1\}_H)^{g_1'} \, Eq(f) \right) \{g, g_1'\}_H \, Eq(f) \\
&= \{g, g_1\}^{g_1'} \{g, g_1'\}
\end{aligned}$$

**BCM2**)

$$\begin{aligned}
\{gg', g_1\} &= \{gg', g_1\}_H \, Eq(f) \\
&= \left( \{g', g_1\}_H \{g, g_1\}_H^{g'} \right) Eq(f) \\
&= (\{g', g_1\}_H \, Eq(f)) \left( \{g, g_1\}_H^{g'} \, Eq(f) \right) \\
&= \{g', g_1\} \{g, g_1\}^{g'}
\end{aligned}$$

**BCM3**)

$$\begin{aligned}
\phi \{g, g'\} &= \phi (\{g, g'\}_H \, Eq(f)) \\
&= \alpha \{g, g'\}_H \\
&= [g', g]
\end{aligned}$$

**BCM4**)

$$\begin{aligned}
\{g, \phi (hEq(f))\} &= \{g, \phi (hEq(f))\}_H \, Eq(f) \\
&= \{g, \beta(h)\}_H \, Eq(f) \\
&= (h^{-1} h^g) \, Eq(f) \\
&= (h^{-1} Eq(f)) (hEq(f))^g
\end{aligned}$$

**BCM5**)

$$\begin{aligned}
\{\phi (h' Eq(f)), g'\} &= \{\phi (h' Eq(f)), g'\}_H \, Eq(f) \\
&= \{\alpha (h'), g'\}_H \, Eq(f) \\
&= \left( ((h')^{-1})^{g'} \, h' \right) Eq(f) \\
&= ((h')^{-1} Eq(f))^{g'} (h' Eq(f))
\end{aligned}$$

*elde edilir. Böylece* $\{H/Eq(f), G, \phi\}$ *bir örgülü çaprazlanmış G-modüldür.*

*Şimdi her* $h \in H$ *için* $q(h) = hEq(f)$ *şeklinde tanımlı*

$$(q, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{H/Eq(f), G, \phi\}$$

*dönüşümünün örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olduğunu gösterelim. Aşağıdaki diyagramı göz önünde bulunduralım:*

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\{-,-\}_H"] \arrow[d, equal, "id_G \times id_G"'] & H \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "q"] & G \arrow[d, no head, "id_G"] \\ G \times G \arrow[r, "\{-,-\}"'] & H/Eq(f) \arrow[r, "\phi"'] & G \end{tikzcd}$$

***i)*** *Her $h \in H$ için,*

$$\begin{aligned} \phi q(h) &= \phi(hEq(f)) \\ &= \alpha(h) \\ &= id_G \alpha(h) \end{aligned}$$

*elde edilir.*

***ii)*** *Her $h \in H$ ve $g \in G$ için,*

$$\begin{aligned} q(h^g) &= (h^g)\, Eq(f) \\ &= (hEq(f))^g \\ &= q(h)^{id_G(g)} \end{aligned}$$

*elde edilir.*

***iii)*** *Her $(g, g') \in G$ için,*

$$\begin{aligned} \{-,-\}\, id_G \times id_G (g, g') &= \{-,-\}_H\, Eq(f)(g, g') \\ &= \{g, g'\}_H\, Eq(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q\{-,-\}_H (g, g') &= q\{g, g'\}_H \\ &= \{g, g'\}_H\, Eq(f) \end{aligned}$$

*olup $\{-,-\}_H\, Eq(f)\, id_G \times id_G = q\{-,-\}_H$ elde edilir.*

*Diğer taraftan*

$$(p_1, id_G) : \{Eq(f), G, \partial\} \to \{H, G, \alpha\} \;\; (p_2, id_G) : \{Eq(f), G, \partial\} \to \{H, G, \alpha\}$$

*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmleri $(f, id_G)$ örgülü çaprazlanmış G-modül morfizminin çekirdek ikilisi olduğundan aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak bir tek*

$$(i, id_G) : \{H/Eq(f), G, \phi\} \to \{K, G, \beta\}$$

*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi vardır. O halde*

$$\begin{tikzcd} \{Eq(f), G, \partial\} \arrow[r, shift left, "(p_1, id_G)"] \arrow[r, shift right, "(p_2, id_G)"'] & \{H, G, \alpha\} \arrow[r, "(q, id_G)"] \arrow[dr, "(f, id_G)"'] & \{H/Eq(f), G, \phi\} \arrow[d, dotted, "(i, id_G)"] \\ & & \{K, G, \beta\} \end{tikzcd}$$

*diyagramı değişmeli olur. Bu diyagram eş-eşitleyicisi diyagramı olup* $(q, id_G)$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi,* $((p_1, id_G), (p_2, id_G))$ *çekirdek ikilisinin eş-eşitleyicisidir.*

*Diyagram değişmeli olduğundan*

$$(f, id_G) = (i, id_G)(q, id_G)$$

*yazılabilir. Bu durumda* $(f, id_G)$ *morfizmi çarpanlarına ayrılabilirdir.* $(f, id_G)$ *çarpanlarına ayrılabilir ve* $(q, id_G)$ *düzenli epimorfizm olduğundan* $(i, id_G)$ *bir monomorfizmdir.*

**Önerme 5.3** *Örgülü çaprazlanmış G-modül kategorisinde*

$$(f, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{K, G, \beta\}$$

*bir örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi* $\{Eq(f), G, \partial\}, ((p_1, id_G), (p_2, id_G))$ *çekirdek ikilisine sahip olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

***i)*** $(f, id_G)$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi monomorfizmdir.*

***ii)*** $(p_1, id_G)$, $(p_2, id_G) : \{Eq(f), G, \partial\} \to \{H, G, \alpha\}$ *projeksiyon dönüşümleri eşittir.*

**Önerme 5.4**

$$\begin{tikzcd} \{H, G, \alpha\} \arrow[r, "(f, id_G)"] \arrow[d, "(\gamma, id_G)"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \{K, G, \beta\} \arrow[r, "(g, id_G)"] \arrow[d, "(\psi, id_G)"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \{C, G, \theta\} \arrow[d, "(\delta, id_G)"'] \\ \{H', G, \alpha'\} \arrow[r, "(f', id_G)"'] & \{K', G, \beta'\} \arrow[r, "(g', id_G)"'] & \{C', G, \theta'\} \end{tikzcd}$$

*diyagramı değişmelidir. Bu durumda,*

***i)*** *Eğer* $(1)$ *ve* $(2)$ *kare diyagramları geri çekme diyagramları ise bu durumda dış diyagram,* $(1) + (2)$ *dikdörtgen diyagramı, geri çekme diyagramıdır.*

***ii)*** *Eğer dış diyagram,* $(1) + (2)$ *dikdörtgen diyagramı, geri çekme diyagramı ise bu durumda* $(1)$ *kare diyagramı da geri çekmedir.*

**İspat** ***i)*** $(1)$ *ve* $(2)$ *kare diyagramları geri çekme diyagramları olsun.* $(1) + (2)$ *dikdörtgen diyagramının geri çekme diyagramı olduğunu gösterelim.*

$\{S, G, \rho\}$ *bir örgülü çaprazlanmış G-modül,* $(i, id_G) : \{S, G, \rho\} \to \{C, G, \theta\}$ *ve* $(j, id_G) : \{S, G, \rho\} \to \{H', G, \alpha'\}$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmleri olmak üzere aşağıdaki diyagrama göre,*

$$\begin{tikzcd}
\{S,G,\rho\} \arrow[dr, dashed, "(m{,}id_G)"] \arrow[drr, "(i{,}id_G)"] \arrow[ddr, "(j{,}id_G)"'] & & \\
& \{K,G,\beta\} \arrow[r, "(g{,}id_G)"'] \arrow[d, "(\psi{,}id_G)"] & \{C,G,\theta\} \arrow[d, "(\delta{,}id_G)"] \\
& \{K',G,\beta'\} \arrow[r, "(g'{,}id_G)"'] & \{C',G,\theta'\}
\end{tikzcd}$$

$(2)$ *geri çekme diyagramının evrensellik özelliğinden* $g \circ m = i$, $\psi \circ m = j$ *ve* $g' \circ \psi = \delta \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $(m, id_G) : \{S, G, \rho\} \to \{K, G, \beta\}$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi vardır.*

*Benzer şekilde,* $(1)$ *geri çekme diyagramının evrensellik özelliğinden* $f \circ n = m$, $\gamma \circ n = k$ *ve* $\psi \circ f = f' \circ \gamma$ *olacak şekilde bir tek* $(n, id_G) : \{S, G, \rho\} \to \{H, G, \alpha\}$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi vardır.*

$$\begin{tikzcd}
\{S,G,\rho\} \arrow[dr, dashed, "(n{,}id_G)"] \arrow[drr, "(m{,}id_G)"] \arrow[ddr, "(k{,}id_G)"'] & & \\
& \{H,G,\alpha\} \arrow[r, "(f{,}id_G)"'] \arrow[d, "(\gamma{,}id_G)"] & \{K,G,\beta\} \arrow[d, "(\psi{,}id_G)"] \\
& \{H',G,\alpha'\} \arrow[r, "(f'{,}id_G)"'] & \{K',G,\beta'\}
\end{tikzcd}$$

*Şimdi* $(g \circ f) \circ n = i$, $\gamma \circ n = k$ *ve* $g' \circ f' \circ \gamma = \delta \circ g \circ f$ *eşitliklerini sağlayan bir tek* $(n, id_G)$ : $\{S, G, \rho\} \to \{H, G, \alpha\}$ *örgülü çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim.*

$$g \circ f \circ n = g \circ (f \circ n) = g \circ m = i$$

*eşitliği elde edilir. Ayrıca* $(1)$ *diyagramı geri çekme diyagramı olduğundan* $\gamma \circ n = k$ *eşitliği yazılabilir. Diğer taraftan,*

$$\delta \circ (g \circ f) = (\delta \circ g) \circ f = g' \circ \psi \circ f = g' \circ f' \circ \gamma = (g' \circ f') \circ \gamma$$

*eşitliği elde edilir.*

*Son olarak* $(n, id_G)$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizminin tekliğini gösterelim:*

$$(n', id_G) : \{S, G, \rho\} \to \{H, G, \alpha\}$$

*olmak üzere*

$$\begin{aligned} \gamma \circ n' &= k \\ g \circ f \circ n' &= i \end{aligned}$$

*eşitlikleri sağlansın.* $(m', id_G) : \{S, G, \rho\} \to \{K, G, \beta\}$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olmak üzere*

$$m' = f \circ n'$$

*olsun.* $(2)$ *geri çekme diyagramının teklik özelliğinden*

$$m = m' = n'$$

*eşitliğinin var olduğunu söyleyebiliriz. Benzer şekilde* $(1)$ *geri çekme diyagramının teklik özelliğinden*

$$g \circ m' = g \circ f \circ n' = i$$

*ve*

$$\begin{aligned} \psi \circ m' &= \psi \circ f \circ n' \\ &= f' \circ \gamma \circ n' \\ &= f' \circ k \end{aligned}$$

*eşitlikleri elde edilir. Bu durumda* $(n, id_G) = (n', id_G)$ *olarak alabiliriz. O halde* $(1) + (2)$ *dış diyagramı bir geri çekme diyagramıdır.*

$$\begin{tikzcd}
\{S,G,\rho\} \arrow[dr, dashed, "(n,id_G)"] \arrow[drr, "(i,id_G)"] \arrow[ddr, "(k,id_G)"'] & & \\
& \{H,G,\alpha\} \arrow[r, "(g\circ f,id_G)"'] \arrow[d, "(\gamma,id_G)"] & \{C,G,\theta\} \arrow[d, "(\delta,id_G)"] \\
& \{H',G,\alpha'\} \arrow[r, "(g'\circ f',id_G)"'] & \{C',G,\theta'\}
\end{tikzcd}$$

***ii)*** $(1)+(2)$ *diyagramı geri çekme diyagramı olduğundan değişmelidir ve*

$$\delta \circ i = g' \circ f' \circ k$$

*eşitliği vardır.* $(2)$ *diyagramı geri çekme diyagramı olduğundan* $(2)$ *diyagramının evrensellik özelliğinden*

$$g \circ m = i$$

*ve*

$$\psi \circ m = f' \circ j$$

*olacak şekilde bir tek*

$$(m, id_G) : \{S, G, \rho\} \to \{K, G, \beta\}$$

*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi vardır.* $(1)$ *diyagramının geri çekme diyagramı olduğunu göstermek için* $(m, id_G)$ *ve* $(j, id_G)$ *birer örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmleri olmak üzere* $\psi \circ f = f' \circ \gamma$, $f \circ n = m$ *ve* $\psi \circ n = j$ *olacak şekide bir tek* $(n, id_G) : \{S, G, \rho\} \to \{H, G, \alpha\}$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olduğunu göstermek yeterlidir.*

**Teorem 5.1** *Örgülü çaprazlanmış G-modül kategorisinde;*

***i)*** *Her morfizm, bir monomorfizm ve bir düzenli epimorfizmin bileşkesi olarak yazılabilir.*

***ii)*** *Bu yazımlar geri çekme altında korunurlar.*

**İspat** ***i)*** $(f, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{K, G, \beta\}$ *bir örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi olsun. Örnek 5.2 den dolayı*

$$\begin{tikzcd}
\{Eq(f), G, \partial\} \arrow[r, shift left, "(p_1, id_G)"] \arrow[r, shift right, "(p_2, id_G)"'] & \{H, G, \alpha\} \arrow[r, "(q, id_G)"] \arrow[dr, "(f, id_G)"'] & \{H/Eq(f), G, \phi\} \arrow[d, dotted, "(m, id_G)"] \\
& & \{K, G, \beta\}
\end{tikzcd}$$

$((p_1, id_G), (p_2, id_G))$ *ikilisi* $(f, id_G)$*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizminin çekirdek ikilisidir ve* $(q, id_G)$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi,* $((p_1, id_G), (p_2, , id_G))$ *çekirdek ikilisinin eş-eşitleyicisidir. Bu durumda*

$$(m, id_G)(q, id_G) = (f, id_G)$$

*olacak şekilde bir tek*

$$(m, id_G) : \{H/Eq(f), G, \phi\} \to \{K, G, \beta\}$$

*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi vardır.*

*Şimdi $(m, id_G)$ morfizminin monomorfizm olduğunu gösterelim. Bunun için önerme 5.3 den $(m, id_G)$ morfizminin çekirdek ikilisi olan*

$$\begin{aligned}(p_1, id_G) &: \{Eq(m), G, \rho\} \to \{H/Eq(f), G, \phi\}\\ (p_2, id_G) &: \{Eq(m), G, \rho\} \to \{H/Eq(f), G, \phi\}\end{aligned}$$

*projeksiyon dönüşümlerinin eşit olduğunu gösterelim. Aşağıdaki diyagramı göz önünde bulunduralım:*

$$\begin{tikzcd}
\{Eq(f), G, \partial\} \arrow[r, "(b,id_G)"] \arrow[d, "(a,id_G)"'] & \{Eq(m), G, \omega\} \times_{H/Eq(f)} \{H, G, \alpha\} \arrow[r, "(\pi_2,id_G)"] \arrow[d, "(\pi_1,id_G)"] & \{H, G, \alpha\} \arrow[d, "(q,id_G)"] \\
\{H, G, \alpha\} \times_{H/Eq(f)} \{Eq(m), G, \omega\} \arrow[r, "(\phi_2,id_G)"'] \arrow[d, "(\phi_1,id_G)"'] & \{Eq(m), G, \omega\} \arrow[r, "(p_2,id_G)"'] \arrow[d, "(p_1,id_G)"] & \{H/Eq(f), G, \phi\} \arrow[d, "(m,id_G)"] \\
\{H, G, \alpha\} \arrow[r, "(q,id_G)"'] & \{H/Eq(f), G, \phi\} \arrow[r, "(m,id_G)"'] & \{K, G, \beta\}
\end{tikzcd}$$

*her kare diyagramı bir geri çekme diyagramı olduğundan önerme 5.4 den dolayı dıştaki kare diyagramı da geri çekme olur ve*

$$(f_1, id_G) = (\phi_1, id_G)(a, id_G) \quad \textit{ve} \quad (f_2, id_G) = (\pi_2, id_G)(b, id_G)$$

*elde edilir. Diğer taraftan diyagramın değişmeli olmasından*

$$(\phi_2, id_G)(a, id_G) = (\pi_1, id_G)(b, id_G)$$

*eşitliği geçerlidir. Bu durumda epimorfizmlerin bileşkesi de epimorfizm olduğundan*

$$(\phi_2, id_G)(a, id_G) : \{Eq(f), G, \partial\} \to \{Eq(m), G, \omega\}$$

*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi bir epimorfizmdir.*

*Böylece $(\phi_1, id_G)(a, id_G) = (f_1, id_G)$ ve $(\pi_2, id_G)(b, id_G) = (f_2, id_G)$ eşitlikleri ile birlikte*

$$\begin{aligned}p_1(\phi_2 a) &= q\phi_1 a\\ &= qf_1\\ &= qf_2\\ &= q\pi_2 b\\ &= p_2\pi_1 b\\ &= p_2(\phi_2 a)\end{aligned}$$

*olup* $p_1(\phi_2 a) = p_2(\phi_2 a)$ *elde edilir.* $\phi_2$ *morfizmi epimorfizm olduğundan*

$$(p_1, id_G) = (p_2, id_G)$$

*elde edilir.*

*Sonuç olarak* $(m, id_G)$ *örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi bir monomorfizmdir.*

**Teorem 5.2** *Örgülü çaprazlanmış G-modül kategorisinde*

$$(f, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{X, G, \varkappa\}$$

*örgülü çaprazlanmış G-modül morfizmi,*

$$\begin{tikzcd}
\{Eq(f), G, \partial\} \arrow[r, shift left, "{(p_1, id_G)}"] \arrow[r, shift right, "{(p_2, id_G)}"'] \arrow[d, "{(v, id_G)}"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \{H, G, \alpha\} \arrow[r, "{(f, id_G)}"] \arrow[d, "{(u, id_G)}"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \{X, G, \varkappa\} \arrow[d, "{(w, id_G)}"] \\
\{Eq(g), G, \partial'\} \arrow[r, shift left, "{(p_1', id_G)}"] \arrow[r, shift right, "{(p_2', id_G)}"'] & \{K, G, \beta\} \arrow[r, "{(g, id_G)}"] & \{Y, G, \mu\}
\end{tikzcd}$$

*diyagramını değişmeli yapan bir düzenli epimorfizmdir.*

*Eğer* (1) *kare diyagramı geri çekme ise bu durumda* (2) *kare diyagramı da geri çekmedir.*

**İspat**

$$\begin{tikzcd}
\{Eq(f), G, \partial\} \arrow[rrr, "{(p_2, id_G)}"] \arrow[drr, "{(p_1, id_G)}"] \arrow[dd, "{(v, id_G)}"'] & & & \{H, G, \alpha\} \arrow[dr, "{(f, id_G)}"] \arrow[dd, "{(f, id_G)}" near end] & \\
& & \{H, G, \alpha\} \arrow[rr, "{(f, id_G)}"] \arrow[dd, "{(u, id_G)}" near end] & & \{X, G, \varkappa\} \arrow[dd, dash, "{(w, id_G)}"] \\
\{Eq(g), G, \partial'\} \arrow[rrr, "{(p_2', id_G)}" near end] \arrow[drr, "{(p_1', id_G)}"'] & & & \{K, G, \beta\} \arrow[dr, "{(g, id_G)}"'] & \\
& & \{K, G, \beta\} \arrow[rr, dash, "{(g, id_G)}"'] & & \{Y, G, \mu\}
\end{tikzcd}$$

*diyagramı değişmelidir, küpün sol tarafi ve küpün tabanı geri çekmedir.*

*Diyagram değişmeli olduğundan dış diyagram*

$$\begin{tikzcd}
\{Eq(f), G, \partial\} \arrow[r, "{(p_2, id_G)}"] \arrow[d, "{(p_1, id_G)}"'] & \{H, G, \alpha\} \arrow[r, "{(u, id_G)}"] \arrow[d, "{(f, id_G)}"'] & \{K, G, \beta\} \arrow[d, "{(g, id_G)}"] \\
\{H, G, \alpha\} \arrow[r, "{(f, id_G)}"'] & \{X, G, \varkappa\} \arrow[r, "{(w, id_G)}"'] & \{Y, G, \mu\}
\end{tikzcd}$$

*şeklinde olup değişmelidir. Bu durumda önerme 5.4 den sağ taraftaki diyagram da geri çekmedir.*

## 5.3 Bağıntı

**Tanım 5.2** *Herhangi bir sonlu bütün (finitly complete) $C$ kategorisinde $X$ den $Y$ ye bir bağıntı*

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dr, "d_2"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

$$(d_1, d_2) : R \to X \times Y$$

*şeklinde çarpanı bir monomorfizma olan bir ikilidir.*

*$X = Y$ alınırsa $R \to X \times X$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir bağıntıdır denir. Eğer $R \to X \times Y$ bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bir denklik bağıntısıdır denir.*

***i)***

$$\delta : X \to R$$

*morfizmi için*

$$d_1\delta = 1_X = d_2\delta$$

*eşitliği sağlanıyor ise $R$ bağıntısı yansıyandır.*

***ii)***

$$\sigma : R \to R$$

*morfizmi için*

$$\begin{aligned} d_1\sigma &= d_2 \\ d_2\sigma &= d_1 \end{aligned}$$

*eşitlikleri sağlanıyor ise $R$ bağıntısı simetriktir.*

***iii)*** *Aşağıdaki diyagram geri çekme diyagramı olmak üzere;*

$$\begin{tikzcd} R \times_X R \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & R \arrow[d, "d_1"] \\ R \arrow[r, "d_2"'] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} d_1\tau &= d_1p_1 \\ d_2\tau &= d_2p_2 \end{aligned}$$

*eşitliklerini sağlayan*

$$\tau : R \times_X R \to R$$

*morfizmi varsa $R$ bağıntısı geçişlidir.*

*Ayrıca $R$ gruplar kategorisinde bir denklik bağıntısı olmak üzere $R \subset X \times X$ olup $X \times X$ grubunun bir alt grubudur.*

## 5.4 Bağıntı Kategori

Düzenli kategorilerde bağıntıların bileşkesi tanımlanabilir:

Herhangi bir düzenli kategoride aşağıdaki yapıyı oluşturmak mümkündür.

Herhangi bir düzenli $C$ kategorisinde $X$ den $Y$ ye bir bağıntı

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

$$(p_1, p_2) : R \to X \times Y$$

ve $Y$ den $Z$ ye bir bağıntı

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Y & & Z \end{tikzcd}$$

$$(p_1, p_2) : S \to Y \times Z$$

ve

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists x \in Y,\ xRySz\}$$

olmak üzere

$$S \circ R \to X \times Z$$

bağıntı tanımlıdır.

Önce geri çekme diyagramı

$$\begin{tikzcd}
 & & R \times_Y S \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & & \\
 & R \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & & S \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

daha sonra $q : R \times_Y S \to I$ düzenli epimorfizmi ile $i : I \to X \times Z$ monomorfizminin bileşkesi olarak

$$R \times_Y S \xrightarrow{q} I \xrightarrow{i} X \times Z$$

ve

$$(p_1 \circ \pi_1, p_2 \circ \pi_2) : R \times_Y S \to X \times Z$$

dönüşümü oluşturulur.

Bir düzenli kategori olan örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinde bağıntıların bileşkesi birleşme özelliğine sahiptir.

**Teorem 5.3** *$\mathcal{A} = \{A, G, \alpha\}$, $\mathcal{B} = \{B, G, \beta\}$, $\mathcal{C} = \{C, G, \rho\}$, $\mathcal{D} = \{D, G, \phi\}$, $\mathcal{R} = \{R, G, \partial\}$, $\mathcal{S} = \{S, G, \delta\}$ ve $\mathcal{T} = \{T, G, \theta\}$ örgülü çaprazlanmış G-modülleri verilsin.*

$$\mathcal{R} \to \mathcal{A} \times \mathcal{B},$$
$$\mathcal{S} \to \mathcal{B} \times \mathcal{C},$$
$$\mathcal{T} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$$

*$BCM/G$ kategorisinde birer bağıntı ise bu durumda*

$$\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$$

*elde edilir.*

**İspat** *Aşağıdaki* (1), (2) *ve* (3) *geri çekme yapılar ile elde edilen diyagramı göz önüne alalım:*

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{X} \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[dr, "x_2"] & & & \\
 & & \mathcal{R} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{S} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[rr, phantom, "(1)"] & & \mathcal{S} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{T} \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & & \\
 & \mathcal{R} \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] \arrow[rr, phantom, "(2)"] & & \mathcal{S} \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "s_2"] \arrow[rr, phantom, "(3)"] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[dr, "t_2"] & \\
\mathcal{A} & & \mathcal{B} & & \mathcal{C} & & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

*Teoremin ispatı için* $\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$ *ve* $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$ *bağıntılarının*

$$i : \mathcal{I} \to \mathcal{A} \times \mathcal{D}$$

*monomorfizmi ile*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[rr, "(r_1 \circ p_1 \circ x_1, t_2 \circ q_2 \circ x_2)"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathcal{A} \times \mathcal{D} \\
 & \mathcal{I} \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

$$i \circ q = (r_1 \circ p_1 \circ x_1, t_2 \circ q_2 \circ x_2)$$

*bileşkesinde* $i$ *nin düzenli görüntüsü ile verildiğini göstermek yeterli olacaktır.*

Örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinin bağıntı kategorisi elde edilebilir. Örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisi bir düzenli kategori olduğundan;

**i)** $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ örgülü çaprazlanmış $G$-modül olmak üzere $\mathcal{R}$, $\mathcal{X}$ den $\mathcal{Y}$ ye bir bağıntı olsun.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{R} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{X} & & \mathcal{Y}
\end{tikzcd}$$

Kategorinin objeleri $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ dir.

**ii)** $\mathcal{R}$, $\mathcal{X}$ den $\mathcal{Y}$ ye bir bağıntı olsun.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{R} \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dr, "d_2"] & \\ \mathcal{X} & & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

Kategorinin morfizmleri

$$(d_1, d_2) : \mathcal{R} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$$

ile tanımlıdır.

**iii)** Kompozisyon bağıntılar arasındaki bileşke olarak tanımlıdır. Yani;$\mathcal{R}$, $\mathcal{X}$ den $\mathcal{Y}$ ye bir bağıntı ve $\mathcal{S}$, $\mathcal{Y}$ den $\mathcal{Z}$ ye bir bağıntı olmak üzere;

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{R} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \mathcal{S} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{X} & & \mathcal{Y} & \mathcal{Y} & & \mathcal{Z} \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$$

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \mid \exists y \in \mathcal{Y},\ x\mathcal{R}y\mathcal{S}z\}$$

bağıntısı ile verilir.

Aksiyomlar:

**K1)** (Birleşme Aksiyomu) $\mathcal{R} \to \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, $\mathcal{S} \to \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ ve $\mathcal{T} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinde birer bağıntı olmak üzere

$$\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$$

eşitliği geçerlidir.

**K2)** $\mathcal{X}$ den $\mathcal{Y}$ ye her $\mathcal{R}$ bağıntısı için

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ \mathcal{X} & & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

$$\Delta_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \overset{1_{\mathcal{X}}}{\underset{1_{\mathcal{X}}}{\rightrightarrows}} \mathcal{X}$$

olmak üzere

$$\mathcal{R} \circ \Delta_{\mathcal{X}} = \mathcal{R}$$

olacak şekilde ayrık bir bağıntı vardır.

Benzer şekilde $\mathcal{Z}$ den $\mathcal{X}$ e bir $\mathcal{S}$ bağıntısı için

$$\Delta_{\mathcal{X}} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}$$

bağıntısı vardır.

## 5.5 Tam Kategori

**Tanım 5.3** *Herhangi bir $C$ kategorisi aşağıdaki şartları sağlıyorsa tam kategori adını alır.*

***TK-1)*** *$C$ kategorisi düzenli kategoridir.*

***TK-2)*** *Her denklik bağıntısı etkili bağıntıdır.*

**Çaprazlanmış $G$-Modül Kategorisi Tam Kategoridir.**

**TK-1**) $(f, id_G) : (A, G, \theta) \to (B, G, \Psi)$ çaprazlanmış $G$-modül morfizmi olmak üzere, $f$ morfizminin kendisi ile geri çekmesinin var olduğunu gösterelim:

$$A \times_B A = \{(a, b) \mid f(a) = f(b)\}$$

kümesinin her $(a, a'), (b, b') \in A \times_B A$ için

$$(a, a')(b, b') = (ab, a'b')$$

şeklinde tanımlı işlem ile birlikte grup olduğu açıktır.

$$(f, id_G) : (A, G, \theta) \to (B, G, \psi)$$

çaprazlanmış $G$-modül morfizmi olduğundan

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\theta"'] & & B \arrow[dl, "\Psi"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Bu durumda;$(a,b) \in A \times_B A$ için,

$$\theta(a) = \Psi f(a) = \Psi f(b) = \theta(b)$$

elde edilir. O halde $\partial : A \times_B A \to G$ her $(a,b) \in A \times_B A$ için,

$$\partial(a,b) = \theta(a) = \theta(b)$$

ve $(a,b)^g = (a^g, b^g)$ tanımlarıyla bir çaprazlanmış $G$-modüldür. Çünkü; her $(a,b), (a',b') \in A \times_B A$ ve her $g \in G$ için,

**CM1**)

$$\begin{aligned} \partial((a,b)^g) &= \partial((a^g, b^g)) \\ &= \theta(a^g) \\ &= g^{-1}\theta(a)g \\ &= g^{-1}\partial(a,b)g \end{aligned}$$

**CM2**)

$$\begin{aligned} (a',b')^{\partial(a,b)} &= (a',b')^{\theta(a)} \\ &= ((a')^{\theta(a)}, (b')^{\theta(a)}) \\ &= ((a')^{\theta(a)}, (b')^{\theta(b)}) \qquad (\because \theta(a) = \theta(b)) \\ &= (a^{-1}a'a, b^{-1}b'b) \\ &= (a,b)^{-1}(a',b')(a,b) \end{aligned}$$

özellikleri sağlanır.

$p_1(a,b) = a$ ve $p_2(a,b) = b$ izdüşüm dönüşümler olmak üzere

$$(p_1, id_G) : (A \times_B A, G, \partial) \to (A, G, \theta) \quad \text{ve} \quad (p_2, id_G) : (A \times_B A, G, \partial) \to (A, G, \theta)$$

şeklinde tanımlı çaprazlanmış $G$-modül morfizmidir. Ayrıca her $(a,b) \in A \times_B A$ için,

$$fp_1(a,b) = f(a) = f(b) = fp_2(a,b)$$

$$\begin{tikzcd} (A \times_B A, G, \partial) \arrow[r, "(p_1, id_G)"] \arrow[d, "(p_2, id_G)"'] & (A, G, \theta) \arrow[d, "(f, id_G)"] \\ (A, G, \theta) \arrow[r, "(f, id_G)"'] & (B, G, \Psi) \end{tikzcd}$$

olup diyagram değişmelidir.

Şimdi,$(C, \delta)$ çaprazlanmış $G$-modül ve

$$(\alpha, id_G) : (C, G, \delta) \to (A, G, \theta) \quad \text{ve} \quad (\beta, id_G) : (C, G, \delta) \to (A, G, \theta)$$

morfizmleri,

$$f\alpha = f\beta$$

özelliğinde çaprazlanmış $G$-modül morfizmi olsun. Bu durumda;

$$p_1 h = \alpha \quad \text{ve} \quad p_2 h = \beta$$

olacak şekilde bir tek $(h, id_G)$ çaprazlanmış $G$-modül morfizminin var olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rccl} (h, id_G): & (C, G, \delta) & \rightarrow & (A \times_B A, G, \partial) \\ & c & \mapsto & h(c) = (\alpha(c), \beta(c)) \end{array}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Açıkca $(h, id_G)$ iyi tanımlıdır. Her $c \in C$ için,

$$\begin{aligned} p_1 h(c) &= p_1(\alpha(c), \beta(c)) = \alpha(c) \\ p_2 h(c) &= p_2(\alpha(c), \beta(c)) = \beta(c) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$p_1 h = \alpha \quad \text{ve} \quad p_2 h = \beta$$

elde edilir. Şimdi $(h, id_G)$ morfizminin bir tek olduğunu gösterelim.

$$(h', id_G) : (C, G, \delta) \rightarrow (A \times_B A, G, \partial)$$

morfizmi,

$$p_1 h' = \alpha \quad \text{ve} \quad p_2 h' = \beta$$

özelliğinde bir çaprazlanmış $G$-modül morfizmi olsun. $h'(c) = (a, a')$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \alpha(c) &= p_1 h'(c) = p_1(a, a') = a \\ \beta(c) &= p_2 h'(c) = p_2(a, a') = a' \end{aligned}$$

olduğundan, her $c \in C$ için,

$$h'(c) = (a, a') = (\alpha(c), \beta(c)) = h(c)$$

elde edilir. Böylece

$$h' = h$$

olup $(h, id_G)$ bir tektir.

Sonuç olarak, $(p_1, p_2)$ ikilisi $f$ morfizminin kendisi ile geri çekmesidir ve geri çekme diyagramı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{tikzcd}
(C, G, \delta) \arrow[dr, dashed, "\exists!(h, id_G)"] \arrow[drr, "(\alpha, id_G)"] \arrow[ddr, "(\beta, id_G)"'] & & \\
& (A \times_B A, G, \partial) \arrow[r, "(p_1, id_G)"'] \arrow[d, "(p_2, id_G)"] & (A, G, \theta) \arrow[d, "(f, id_G)"] \\
& (A, G, \theta) \arrow[r, "(f, id_G)"'] & (B, G, \Psi)
\end{tikzcd}$$

Bu durumda $(p_1, p_2)$ ikilisi $f$ morfizminin çekirdek ikilisidir.

Şimdi $(p_1, p_2)$ ikilisinin eş-eşitleyiciye sahip olduğunu gösterelim.

$H$, $A$ nın $x = (a, b) \in A \times_B A$ olmak üzere, $(p_1(x))^{-1}p_2(x)$ elemanları ile üretilen bir normal alt grubu olsun. $A/H$ bölüm grubunu oluşturabiliriz. $\overline{\theta} : A/H \to G$

$$\begin{array}{rlll} \overline{\theta}: & A/H & \to & G \\ & aH & \mapsto & \overline{\theta}(aH) = \theta(a) \end{array}$$

şeklinde tanımlı olup iyi tanımlıdır. Ayrıca, $\overline{\theta} : A/H \to G$ dönüşümü bir çaprazlanmış $G$-modüldür. Çünkü; her $g \in G$, $aH, bH \in A/H$ için,

**CM1**)

$$\begin{aligned} \overline{\theta}((aH)^g) &= \overline{\theta}(a^g H) \\ &= \theta(a^g) \\ &= g^{-1}\theta(a)g \\ &= g^{-1}\overline{\theta}(aH)g \end{aligned}$$

**CM2**)

$$\begin{aligned} (bH)^{\overline{\theta}(aH)} &= (bH)^{\theta(a)} \\ &= b^{\theta(a)}H \\ &= (a^{-1}ba)H \\ &= (aH)^{-1}(bH)(aH) \end{aligned}$$

şartları sağlanır.

Her $a \in A$ için $q(a) = aH$ olmak üzere

$$(q, id_G) : (A, G, \theta) \to (A/H, G, \overline{\theta})$$

dönüşümü bir çaprazlanmış $G$-modül morfizmidir. Ayrıca, her $(a, b) \in A \times_B A$ için,

$$\begin{aligned} qp_1(a, b) = qp_2(a, b) &\Leftrightarrow q(a) = q(b) \\ &\Leftrightarrow aH = bH \\ &\Leftrightarrow a^{-1}b \in H \end{aligned}$$

olup $qp_1 = qp_2$ bulunur. Şimdi $(q', id_G) : (A/H, G, \overline{\theta}) \to (C, G, \gamma)$ dönüşümü, $q'p_1 = q'p_2$ özelliğinde bir çaprazlanmış $G$-modül morfizmi olsun.

Bu durumda $\phi q = q'$ olacak şekilde bir tek

$$(\phi, id_G) : (A/H, G, \overline{\theta}) \to (C, G, \gamma)$$

çaprazlanmş $G$-modül morfizmi olduğunu gösterelim.

$$\phi(aH) = q'(a)$$

şeklinde tanımlayalım. $(\phi, id_G)$ iyi tanımlıdır. Çünkü; her $aH, bH \in A/H$ için,

$$\begin{array}{rcl} aH = bH \quad \text{iken} \quad \phi(aH) & = & q'(a) \\ & = & q'p_1(a,b) \\ & = & q'p_2(a,b) \\ & = & q'(b) \\ & = & \phi(bH) \end{array}$$

bulunur. Ayrıca her $a \in A$ için

$$\begin{array}{rcl} \phi q(a) & = & \phi(aH) \\ & = & q'(a) \end{array}$$

olup

$$\phi q = q'$$

elde edilir.

Şimdi $\phi$ dönüşümünün tekliğini gösterelim.

$$(\phi', id_G) : (A/H, G, \overline{\theta}) \to (C, G, \gamma)$$

morfizmi,

$$\phi' q = q'$$

özelliğini sağlayan bir çaprazlanmış $G$-modül morfizmi olsun. Her $a \in A$ için,

$$\begin{array}{rcl} q'(a) & = & \phi' q(a) \\ & = & \phi'(aH) \end{array}$$

olduğundan,

$$\phi'(aH) = q'(a) = \phi(aH)$$

elde edilir. Bu durumda $\phi' = \phi$ olup, $\phi$ bir tektir. Böylece aşağıdaki değişmeli diyagramı elde ederiz.

$$\begin{tikzcd} A \times_B A \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[dr, "\partial"'] & A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\theta"] \arrow[dr, "q'"] & A/H \arrow[dl, "\overline{\theta}"'] \arrow[d, dotted, "\exists ! \phi"] \\ & G & C \arrow[l, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

Sonuç olarak , $q$ morfizmi $(p_1, p_2)$ ikilisinin eş-eşitleyicisi olup,

$$\begin{tikzcd} (A \times_B A, G, \partial) \arrow[r, shift left, "(p_1, id_G)"] \arrow[r, shift right, "(p_2, id_G)"'] & (A, G, \theta) \arrow[r, "(q, id_G)"] \arrow[dr, "(q', id_G)"'] & \left(A/H, G, \overline{\theta}\right) \arrow[d, dotted, "(\exists ! \phi, id_G)"] \\ & & (C, G, \gamma) \end{tikzcd}$$

diyagramı eş-eşitleyici diyagramıdır. Ayrıca çaprazlanmış $G$-modül kategorisi sonlu bütündür ve düzenli epimorfizmler geri çekme altında korunur.

**TK-2**) Şimdi çaprazlanmış $G$-modül kategorisinde her

$$(E, G, \alpha) \underset{(v, id_G)}{\overset{(u, id_G)}{\rightrightarrows}} (A, G, \partial)$$

denklik bağıntısının bir etkili bağıntı olduğunu gösterelim. $A/E$,

$$[a] = \{b \in A \mid (a, b) \in E\}$$

olmak üzere, $[a]$ denklik sınıflarının bir kümesi olsun. $A/E$ kümesi

$$[a]\,[b] = [ab]$$

işlemiyle bir gruptur. $\overline{\partial} : A/E \to G$; $\partial : A \to G$ dönüşümünün indirgenmişi $\overline{\partial}([a]) = \partial(a)$ şeklinde tanımlıdır. $\partial u = \partial v$ olduğundan, $\overline{\partial} : A/E \to G$ iyi tanımlıdır. Her $g \in G$ ve $[a] \in A/E$ için

$$[a]^g = [a^g]$$

şeklindeki etki tanımıyla $(A/E, G, \overline{\partial})$ bir çaprazlanmış $G$-modüldür. Her $[a], [b] \in A/E$ ve her $g \in G$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

**CM1**)

$$\begin{aligned} \overline{\partial}([a]^g) &= \overline{\partial}([a^g]) \\ &= \partial(a^g) \\ &= g^{-1}\partial(a)g \\ &= g^{-1}\overline{\partial}([a])g \end{aligned}$$

**CM2**)

$$\begin{aligned} [b]^{\overline{\partial}([a])} &= [b]^{\partial(a)} \\ &= \left[b^{\partial(a)}\right] \\ &= [a^{-1}ba] \\ &= [a]^{-1}\,[b]\,[a] \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki çaprazlanmış $G$-modül morfizmlerinin diyagramı elde edilir.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[dr, "\alpha"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\partial"] & A/E \arrow[dl, "\overline{\partial}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

$A$ üzerindeki denklik bağıntısı tanımından $E$, $A \times_G A$ objesinin alt objesidir. Yani;

$$E \subseteq A \times_G A = \{(a,b) \mid \partial(a) = \partial(b)\}$$

olup, her $x \in E$ için, $\partial u(x) = \partial v(x)$ olduğundan, $(u(x), v(x)) \in E$ elde edilir. Böylece

$$(1, u(x)(v(x))^{-1}) \in E$$

olur ve bu durumda,

$$pu = pv$$

elde edilir. Böylece $p$, $(u,v)$ ikilisinin eş-eşitleyicisidir.

Şimdi, $(D,G,\delta)$ çaprazlanmış $G$-modül ve $(u', id_G)$,$(v', id_G)$ : $(D,G,\delta) \to (A,G,\partial)$ dönüşümleri $pu' = pv'$ özelliğinde iki çaprazlanmış $G$-modül morfizmi olsun. Bu durumda, her $d \in D$ için,

$$pu'(d) = pv'(d)$$

olduğundan

$$[u'(d)] = [v'(d)]$$

olup $(u'(d), v'(d)) \in E$ elde edilir. Böylece

$$u\theta = u' \quad \text{ve} \quad v\theta = v'$$

olacak şekilde, bir tek $(\theta, id_G) : (D,G,\delta) \longrightarrow (E,G,\alpha)$, $\theta(d) = (u'(d), v'(d))$ çaprazlanmış $G$-modül morfizmi vardır. Dolayısıyla aşağıdaki diyagram geri çekme diyagramı olup, $(u,v)$ ikilisi, $(p, id_G) : (A,G,\partial) \longrightarrow \left(A/E, G, \overline{\partial}\right)$ dönüşümünün çekirdek ikilisidir.

$$\begin{tikzcd}
(D,G,\delta) \arrow[dr, dotted, "\exists!(\theta,id_G)"] \arrow[drr, "(u',id_G)"] \arrow[ddr, "(v',id_G)"'] & & \\
& (E,G,\alpha) \arrow[r, "(u,id_G)"'] \arrow[d, "(v,id_G)"] & (A,G,\partial) \arrow[d, "(p,id_G)"] \\
& (A,G,\partial) \arrow[r, "(p,id_G)"'] & \left(A/E, G, \overline{\partial}\right)
\end{tikzcd}$$

O halde $XMod/G$ kategorisinde her

$$(E,G,\alpha) \overset{(u,id_G)}{\underset{(v,id_G)}{\rightrightarrows}} (A,G,\partial)$$

denklik bağıntısı etkili bağıntıdır.

Çaprazlanmış $G$-modül kategorisi TK-1 ve TK-2 şartlarını sağladığından bir tam kategoridir.

**Örgülü Çaprazlanmış $G$-Modül Kategorisi Tam Kategoridir.**

**TK-1**) $\alpha : H \to G$ ve $\beta : K \to G$ örgülü çaprazlanmış $G$-modülleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} \{-,-\}_H &: G \times G \to H \\ \{-,-\}_K &: G \times G \to K \end{aligned}$$

örgü dönüşümleri ile verilsin.

$$(f, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{K, G, \beta\}$$

örgülü çaprazlanmış $G$-modül morfizmini ele alalım. Örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinde her morfizm ikilisinin geri çekmesi var olduğundan,

$$H \times_K H = \{(h, h') \mid f(h) = f(h')\} \subseteq H \times H$$

olmak üzere

$$\begin{tikzcd} \{H \times_K H, G, \partial\} \arrow[r, "(p_1, id_G)"] \arrow[d, "(p_2, id_G)"'] & \{H, G, \alpha\} \arrow[d, "(f, id_G)"] \\ \{H, G, \alpha\} \arrow[r, "(f, id_G)"'] & \{K, G, \beta\} \end{tikzcd}$$

diyagramı, $(f, id_G)$ örgülü çaprazlanmış $G$-modül morfizminin kendisi ile geri çekme diyagramıdır. Böylece

$$\begin{aligned} (p_1, id_G) &: \{H \times_K H, G, \partial\} \to \{H, G, \alpha\}, \qquad p_1(h, h') = h \\ (p_2, id_G) &: \{H \times_K H, G, \partial\} \to \{H, G, \alpha\}, \qquad p_2(h, h') = h' \end{aligned}$$

olmak üzere $((p_1, id_G), (p_2, id_G))$ morfizm ikilisi $(f, id_G)$ morfizmi için çekirdek ikilidir.

Ayrıca örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinde her morfizm ikilisi eş-eşitleyiciye sahip olduğundan $((p_1, id_G), (p_2, id_G))$ morfizm ikilisinin eş-eşitleyicisi $N$, $H$ grubunun

$$\left\{(p_1(h, h'))^{-1} p_2(h, h') \mid (h, h') \in H \times_K H\right\}$$

kümesi ile üretilen normal altgrubu ve

$$\begin{aligned} \partial : \quad H/N &\to G \\ hN &\mapsto \partial(hN) = \alpha(h) \end{aligned}$$

olmak üzere $(\{H/N,G,\partial\},(q,id_G))$ ikilisidir.

$$\begin{tikzcd} \{H\times_K H,G,\partial\} \arrow[r, shift left, "(p_1,id_G)"] \arrow[r, shift right, "(p_2,id_G)"'] & \{H,G,\alpha\} \arrow[r, "(q,id_G)"] \arrow[dr, "(q\prime,id_G)"'] & \{H/N,G,\sigma\} \arrow[d, dashed, "\exists!(\varphi,id_G)"] \\ & & \{H',G,\sigma'\} \end{tikzcd}$$

diyagramı $((p_1,id_G),(p_2,id_G))$ morfizm ikilisi için eş-eşitleyici diyagramıdır.

Ayrıca örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisi sonlu bütündür ve düzenli epimorfizmler geri çekme altında korunur.

**TK-2**) Örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinde her

$$\{E,G,\partial\} \underset{(v,id_G)}{\overset{(u,id_G)}{\rightrightarrows}} \{H,G,\alpha\}$$

denklik bağıntısının bir etkili bağıntı olduğunu gösterelim. Teorem 4.4 de detaylı olarak bahsedildiği gibi $\overline{\alpha}:H/E\to G$, $\overline{\alpha}[h]=\alpha(h)$ dönüşümü

$$(hE)^g=(h^g)\,E$$

şeklinde tanımlı etkisiyle bir çaprazlanmış $G$-modüldür. Şimdi $\overline{\alpha}:H/E\to G$ çaprazlanmış $G$-modülünün

$$\begin{array}{rcl} \{-,-\}: \ G\times G & \to & H/E \\ (g,g') & \mapsto & \{g,g'\}=\{g,g'\}_H\,E \end{array}$$

örgü dönüşümü ile birlikte örgülü çaprazlanmış $G$-modül olduğunu gösterelim. Her $g,g'g_1,g_1'\in G$ ve $h,h'\in E$ için,

**BCM1**)

$$\begin{array}{rcl} \{g,g_1g_1'\} & = & \{g,g_1g_1'\}_H \\ & = & (\{g,g_1\}_H)^{g_1'}\{g,g_1'\}_H \\ & = & \{g,g_1\}^{g_1'}\{g,g_1'\} \qquad (\because \{-,-\} \text{ tanımı}) \end{array}$$

**BCM2**)

$$\begin{array}{rcl} \{gg',g_1\} & = & \{gg',g_1\}_H\,E \\ & = & \left(\{g',g_1\}_H\,(\{g,g_1\}_H)^{g'}\right)E \\ & = & \{g',g_1\}_H\,E\,(\{g,g_1\}_H)^{g'}\,E \\ & = & \{g',g_1\}\,\{g,g_1\}^{g'} \qquad (\because \{-,-\} \text{ tanımı}) \end{array}$$

**BCM3**)

$$
\begin{aligned}
\overline{\alpha}\{g,g'\} &= \overline{\alpha}\left(\{g,g'\}_H E\right)\\
&= \alpha\{g,g'\}_H\\
&= [g',g] \qquad\qquad (\because \alpha \text{ çaprazlanmış } G\text{-modül})
\end{aligned}
$$

**BCM4**)

$$
\begin{aligned}
\{g,\overline{\alpha}(kN)\} &= \{g,\overline{\alpha}(hE)\}_H E\\
&= \{g,\alpha(h)\}_H E\\
&= \left(h^{-1}h^{g}\right)E \qquad (\because \alpha \text{ çaprazlanmış } G\text{-modül})\\
&= (hE)^{-1}(hE)^{g}
\end{aligned}
$$

**BCM5**)

$$
\begin{aligned}
\{\overline{\alpha}(k'N),g'\} &= \{\overline{\alpha}(h'E),g'\}_H E\\
&= \{\alpha(h'),g'\}_H E\\
&= \left(\left((h')^{-1}\right)^{g'}h'\right)E \quad (\because \alpha \text{ çaprazlanmış } G\text{-modül})\\
&= \left((h'E)^{-1}\right)^{g'}h'E
\end{aligned}
$$

özelliklerini sağlar. Böylece $\{H/E,G,\overline{\alpha}\}$ bir örgülü çaprazlanmış $G$-modüldür.

Şimdi her $h\in H$ için $q(h)=hE$ şeklinde tanımlı

$$(q,id_G):\{H,G,\alpha\}\to\{H/E,G,\overline{\alpha}\}$$

dönüşümünün örgülü çaprazlanmış $G$-modül morfizmi olduğunu gösterelim. Aşağıdaki diyagramı göz önünde bulunduralım:

$$
\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[r, "\{-,-\}_H"] \arrow[d, equal, "id_G\times id_G"'] & H \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "q"] & G \arrow[d, dash, "id_G"] \\
G\times G \arrow[r, "\{-,-\}"'] & H/E \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & G
\end{tikzcd}
$$

Her $g,g'\in G$ ve her $h\in H$ için

**i**)

$$
\begin{aligned}
\overline{\alpha}q(h) &= \overline{\alpha}(hE)\\
&= \alpha(h)\\
&= id_G(\alpha(h))\\
&= id_G\alpha(h)
\end{aligned}
$$

olup $\overline{\alpha}q = id_G\alpha$ bulunur.

**ii**)

$$\begin{aligned} q\left(h^g\right) &= \left(h^g\right)E \\ &= (hE)^g \\ &= (hE)^{id_G(g)} \\ &= q\left(h\right)^{id_G(g)} \end{aligned}$$

olup $q\left(h^g\right) = q\left(h\right)^{id_G(g)}$ bulunur.

**iii**)

$$\begin{aligned} \{-,-\}\left(id_G \times id_G\right)\left(g,g'\right) &= \{g,g'\} \\ &= \{g,g'\}_H E \\ &= q\{g,g'\}_H \\ &= q\{-,-\}_H\left(g,g'\right) \end{aligned}$$

olup $\{-,-\}\ (id_G \times id_G) = q\{-,-\}_H$ bulunur.

$H$ üzerindeki denklik bağıntsı tanımından $E$, $H \times_G H$ kümesinin bir alt objesidir. Yani;

$$E = \{(h,h') \mid q\left(h\right) = q\left(h'\right)\}$$

olmak üzere

$$E \subseteq H \times_G H = \{(h,h') \mid \alpha\left(h\right) = \alpha\left(h'\right)\}$$

olduğu görülür. Çünkü;

$$\begin{aligned} (h,h') \in E &\Rightarrow q\left(h\right) = q\left(h'\right) \\ &\Rightarrow hE = h'E \\ &\Rightarrow \overline{\alpha}\left[h\right] = \overline{\alpha}\left[h'\right] \qquad (\because \overline{\alpha} \text{ iyi tanımlı}) \\ &\Rightarrow \alpha\left(h\right) = \alpha\left(h'\right) \\ &\Rightarrow (h,h') \in H \times_G H \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\alpha u = \alpha v$ olduğundan her $x \in E$ için $\alpha u\left(x\right) = \alpha v\left(x\right)$ elde edilir. Böylece $\left(u\left(x\right), v\left(x\right)\right) \in E$ olup $(1, u(x).v(x)^{-1}) \in E$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} (1, u(x)(v(x))^{-1}) \in E &\Rightarrow \left(u\left(x\right)\left(v\left(x\right)\right)^{-1}\right)E = 1E \\ &\Rightarrow q\left(u\left(x\right)\left(v\left(x\right)\right)^{-1}\right) = 1 \\ &\Rightarrow q\left(u\left(x\right)\right) = q\left(v\left(x\right)\right) \\ &\Rightarrow qu\left(x\right) = qv\left(x\right) \end{aligned}$$

olup $qu = qv$ olduğu görülür. Böylece $(q, id_G)$, $\left(\left(u, id_G\right), \left(v, id_G\right)\right)$ ikilisinin eş-eşitleyicisidir.

Şimdi $((u, id_G), (v, id_G))$ ikilisinin $(q, id_G)$ morfizminin çekirdek ikilisi olduğunu gösterelim. $\{S, G, \rho\}$ bir örgülü çaprazlanmış $G$-modül olsun ve $(u', id_G)$, $(v', id_G) : \{S, G, \rho\} \to \{H, G, \alpha\}$ dönüşümleri $qu'(s) = qv'(s)$ olacak şekilde tanımlansın.

Her $s \in S$ için $qu'(s) = qv'(s)$ dir. Böylece

$$[u'(s)] = [v'(s)]$$

olup $((u', id_G), (v', id_G)) \in E$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{tikzcd}
\{S,G,\rho\} \arrow[dr, dotted, "\exists!(\theta, id_G)"] \arrow[drr, "(u', id_G)"] \arrow[ddr, "(v', id_G)"'] & & \\
& \{E,G,\partial\} \arrow[r, "(u, id_G)"'] \arrow[d, "(v, id_G)"] & \{H,G,\alpha\} \arrow[d, "(q, id_G)"] \\
& \{H,G,\alpha\} \arrow[r, "(q, id_G)"'] & \{H/E, G, \overline{\alpha}\}
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde bir tek $(\theta, id_G) : \{S, G, \rho\} \to \{E, G, \partial\}$ örgülü çaprazlanmış $G$-modül morfizminin var olduğunu gösterelim

$$\theta(s) = (u'(s), v'(s))$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\{-,-\}_S"] \arrow[d, equal, "id_G \times id_G"'] & S \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\theta"] & G \arrow[d, no head, "id_G"] \\
G \times G \arrow[r, "\{-,-\}_E"'] & E \arrow[r, "\partial"'] & G
\end{tikzcd}$$

diyagramını göz önünde bulunduralım.

**i**) Her $s \in S$ için

$$\begin{aligned}
\partial\theta(s) &= \partial(u'(s), v'(s)) \\
&= \overline{\alpha}(u'(s)) \qquad (\because \overline{\alpha}u' = \overline{\alpha}v') \\
&= \overline{\alpha}(v'(s)) \\
&= \rho(s) \\
&= id_G\rho(s)
\end{aligned}$$

olup $\partial\theta = id_G\rho$ bulunur.

**ii**) Her $g, g' \in G$ ve her $s \in S$ için

$$\begin{aligned} \theta\left(s^{g}\right) &= \left(u'\left(s^{g}\right), v'\left(s^{g}\right)\right) \\ &= \left(u'\left(s\right)^{id_G(g)}, v'\left(s\right)^{id_G(g)}\right) \\ &= \theta\left(s\right)^{id_G(g)} \end{aligned}$$

elde edilir.

**iii**) Her $g, g' \in G$ için

$$\begin{aligned} \{\_,\_\}_E \, id_G \times id_G\left(g, g'\right) &= \{g, g'\}_E \\ &= \left(\{g, g'\}_H, \{g, g'\}_H\right) \\ &= \theta\{g, g'\}_S \\ &= \left(u'\{g, g'\}_S, v'\{g, g'\}_S\right) \\ &= \left(\{g, g'\}_H, \{g, g'\}_H\right) \end{aligned}$$

olup $\{\_,\_\}_E \, id_G \times id_G = \theta\{-,-\}_S$ bulunur.

Böylece $(\theta, id_G) : \{S, G, \rho\} \to \{E, G, \partial\}$ morfizmi bir örgülü çaprazlanmış $G$-modül morfizmidir. Burada

$$\left(u', id_G\right), \left(v', id_G\right) : \{S, G, \rho\} \to \{H, G, \alpha\}$$

örgülü çaprazlanmış $G$-modül morfizmi olup aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\{-,-\}_S"] \arrow[d, equal, "id_G \times id_G"'] & S \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "u'"] & G \arrow[d, dash, "id_G"] \\ G \times G \arrow[r, "\{-,-\}_H"'] & H \arrow[r, "\alpha"'] & G \end{tikzcd}$$

Yani,

$$\begin{aligned} u'\{-,-\}_S\left(g, g'\right) &= \{\_,\_\}_H \, id_G \times id_G\left(g, g'\right) \\ &\Leftrightarrow u'\{g, g'\}_S = \{-,-\}_H\left(g, g'\right) \\ &\Leftrightarrow u'\{g, g'\}_S = \{g, g'\}_H \end{aligned}$$

olup $u'\{-,-\}_S = \{-,-\}_H \, id_G \times id_G$ ve benzer şekilde $v'\{-,-\}_S = \{-,-\}_H \, id_G \times id_G$ olduğu görülür.

Ayrıca her $s \in S$ için

$$\begin{aligned} u\theta\left(s\right) &= u\left(u'\left(s\right), v'\left(s\right)\right) \\ &= u'\left(s\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} v\theta(s) &= v(u'(s), v'(s)) \\ &= v'(s) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Son olarak $(\theta, id_G)$ morfizminin bir tekliğini gösterelim. Her $S \in S$ için $\theta'(s) = (h, h')$ şeklinde tanımlı $(\theta', id_G) : \{S, G, \rho\} \to \{E, G, \partial\}$ morfizmi $(\theta, id_G)$ ile aynı özellikte bir örgülü çaprazlanmış $G$-modül morfizmi olsun. Bu durumda $u\theta' = u'$ ve $v\theta' = v'$ eşitlikleri sağlanır. Buradan $s \in S$ için

$$u'(s) = u\theta'(s) = u(h, h') = h$$

ve

$$v'(s) = v\theta'(s) = v(h, h') = h'$$

olup

$$\theta'(s) = (h, h') = (u'(s), v'(s)) = \theta(s)$$

elde edilir. $s \in S$ keyfi olduğundan $\theta = \theta'$ olup $(\theta, id_G)$ morfizmi bir tektir.

Böylece $((u, id_G), (v, id_G))$ ikilisi, örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinde, $(q, id_G) : \{H, G, \alpha\} \to \{H/E, G, \overline{\alpha}\}$ morfizminin çekirdek ikilisidir. Bu durumda

$$\{E, G, \partial\} \underset{(v, id_G)}{\overset{(u, id_G)}{\rightrightarrows}} \{H, G, \alpha\}$$

denklik bağıntısı etkili bağıntıdır.

Sonuç olarak, örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisi tam kategoridir.

# 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Gruplar üzerinde örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisinin bazı özel objelere sahip olmasından yola çıkılarak bir düzenli ve tam kategori olduğu sonucuna varılmıştır. Düzenli kategorilerin bazı özellikleri özel olarak örgülü çaprazlanmış $G$-modül kategorisine uygulanmıştır. Bir kategoride bağıntı kavramıyla oluşturulan bağıntı kategorisi yapısı örgülü çaprazlanmış $G$-modüller için sağlanmıştır. Çalışma sonrasında Lie Cebirler gibi farklı cebirsel yapılar üzerinde örgülü çaprazlanmış modül kategorisi için veya bu kategorinin genelleştirilmişi olan 2- çaprazlanmış modül kategorisi için benzer araştırmalara yer verilebilir.

# KAYNAKLAR DİZİNİ


Arvasi, Z., Koçak, M. and Ulualan, E., 2005, Braided Crossed Modules and Reduced Simplicial Groups, Taiwanese Journal of Mathematics, 9, 3, 477-488.

Brown, R., Gilbert N.D., 1989, Algebraic Models of 3-Types and Automorphism Structures for Crossed Modules, Proc. London Math. Soc., 59 , 51-73.

Brown, R., Spencer, C.B., 1976, G-groupoids, Crossed Modules and the Fundamental Groupoid of a Topological Group, In Indagationes Mathematicae (Proceeding), 79, 4, North-Holland, 296-302.

Bühler, T., 2010, Exact Categories, Expo. Math., 28(1), 85-147.

Fukushi, T., 1998, Perfect Braided Crossed Modules and Their Mod-q Analogues, Hokkaido Mathematical Journal, 27, 135-146.

Gran, M., 2014, Notes on Regular, Exact and Additive Categories, Summer School on Category Theory and Algebraic Topology, Ecole Polythecnique F ed erale de Lausanne, 11-13.

Grandjeán, A.R., Vale, M.J., 1986, 2-Modules Cruzados an la Chomologia de Andre-Quillen ,Memorias de la Reai Academia de Ciencias, 22.

Gülsün, H., 2012, Örgülü Çaprazlanmış Modüller Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, ESOGÜ.

Lichtenbaum, S., Schlessingger, M. , 1967, The Cotangent Complex of a Morphism, Trans. American Society, 18, 41-70.

Lue, A.S.T., 1968, Non-Abelian Cohomology of Associative Algebras, The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford(2) 19, 159-180.

Porter, T., 1986, Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles, Journal of Algebra, 99, 458-465.

Porter, T., 1978, Some Categorical Results in the Category of Crossed Modules in Commutative Algebra, Journal of Algebra, 109, 415-429.

Quillen, D., 1973, Higher Algebric K-Theory I, in:SLNM, vol.341, Springer-Verlag, pp. 85-147.

Shammu, N.M., 1992, Algebraic and categorical structure of categories of crossed modules of algebras, Ph.D. Thesis, University College of North Wales.

# KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ulualan, E., 2004, Degismeli Cebirler Uzerinde Kuadratik Moduller, Doktora Tezi, ESOGU FBE.

Whitehead, J.H.C., 1949, Combinatorial Homotopy II, Bull.American Math. Society., 55, 453-456.