

Ani Alan Genişlemeli Bir Boruda Düzlemsel Akustik Dalgaların Yayılımının  
Mod-Uydurma ile Analizi

İsa Koç

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Ekim 2017

Mode-Matching Analysis of Plane Acoustic Wave Propagation along A Pipe with Sudden  
Area Expansion

İsa Koç

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Electrical and Electronics Engineering Department

October 2017

Ani Alan Genişlemeli Bir Boruda Düzlemsel Akustik Dalgaların Yayılımının  
Mod-Uydurma ile Analizi

İsa Koç

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı  
Elektromanyetik Alanlar ve Mikrodalga Tekniği Bilim Dalı  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Özge Yanaz Çınar

Ekim 2017

## ONAY

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi İsa Koç'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Ani Alan Genişlemeli Bir Boruda Düzlemsel Akustik Dalgaların Yayılımının Mod-Uydurma ile Analizi" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Danışman** : Yrd. Doç. Dr. Özge Yanaz Çınar

**İkinci Danışman** : -

**Doktora Tez Savunma Jürisi:**

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Özge Yanaz Çınar

**Üye** : Prof. Dr. Osman Parlaktuna

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Hakan Korul

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve  
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN  
Enstitü Müdürü

## ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Yrd. Doç. Dr. Özge Yanaz Çınar danışmanlığında hazırlamış olduğum “**Ani Alan Genişlemeli Bir Boruda Düzlemsel Akustik Dalgaların Yayılımının Mod-Uydurma ile Analizi**” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 16/10/2017

İsa Koç

## ÖZET

Bu çalışmada düzlemsel akustik dalgaların ani alan genişlemeli ve ani alan daralmalı akışkansız paralel-plakalı borularda yayılımının mod uydurma ile analizi yapılmıştır. Bu ve benzeri uygulamalarda karşımıza çıkacak problemlerin analitik ve sayısal yöntemlerle analizi mümkündür. Bu tez çalışmasında, söz konusu yöntemler arasından Mod-uydurma yöntemi tercih edilmiştir. Bu yöntemle, akustik basınç modlar cinsinden ifade edilecek, ardından her bir problem için geçiş bölgesindeki süreklilik ifadeleri yardımıyla sonsuz bilinmeyenli birer lineer denklem sistemi elde edilecektir. Bu sistemler belirli bir kesme sayısında kesilecek sayısal yöntemlerle çözülecektir. Kesme sayısının sonuca etkisi ayrıca çalışılacaktır. Bununla beraber, kesit alanları oranlarının yansıyan ve iletilen akustik basınçlara etkisi ortaya çıkarılacaktır.

### **Anahtar Kelimeler**

Mod Uydurma Yöntemi, Akustik Dalgalar, Helmholtz Denklemi, Dalga Kılavuzu

## SUMMARY

In this work, the propagation of plane acoustic waves along parallel-plate pipes without flow involving sudden area expansion and sudden area contraction is studied with mode-matching technique. Such problems can be analyzed by numerical or analytical methods. In this thesis, mode-matching method is preferred. With this method, the acoustic pressures in the ducts will be expressed in terms of propagating modes and with the help of the continuity relations in the transition regions, linear systems of equations with an infinite number of unknowns will be determined. These systems will be truncated at a certain number and solved numerically. The effect of the truncation number to the solution will be studied individually. Besides, the effect of the area ratios on the reflection and transmission coefficient will be presented.

### **Keywords**

Mode-Matching Technique, Acoustic Waves, Helmholtz Equation, Waveguide

## TEŞEKKÜR

Öncelikle yapmış olduğum bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, kıymetli bilgilerini ve zamanını benden esirgemeyerek her zaman yanımda olan değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç.Dr. Özge YANAZ ÇINAR' a; yüksek lisans eğitimim boyunca bana her fırsatta vakit ayırma inceliğinde bulunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen, bilgileri ve deneyimleri ile bu çalışmama yön veren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Gökhan ÇINAR' a; eğitim hayatım boyunca desteklerini hiçbir zaman benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan değerli ailem; babam Ali KOÇ' a, annem Suna KOÇ' a ve abilerim Ahmet KOÇ ve Mehmet KOÇ' a teşekkürü borç bilirim.



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	vi
SUMMARY.....	vii
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xii
1. GİRİŞ VE AMAÇ.....	1
2. AKUSTİK DALGALAR VE GÜRÜLTÜ.....	2
2.1. Akustik Dalgalar.....	2
2.2. Gürültü Problemi ve Susturucuların Sınıflandırılması.....	3
3. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI.....	4
3.1. Akustik Dalga Kılavuzlarında Yayılma ve Gürültü.....	4
3.2. Mod-Uydurma Yöntemi.....	4
4. YÖNTEM.....	6
5. ALAN GENİŞLEMELİ DALGA KILAVUZU.....	7
6. ALAN DARALMALI DALGA KILAVUZU.....	14
7. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	19
8. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	20
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	27

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.1 Alan genişlemeli paralel-plakalı dalga kılavuzu. . . . .	7
6.1 Alan daralmalı paralel-plakalı dalga kılavuzu. . . . .	14
8.1 Birinci problemde kesme sayısının yansıma katsayısına etkisi. . . . .	21
8.2 Birinci problemde kesme sayısının iletim katsayısına etkisi. . . . .	22
8.3 İkinci problemde kesme sayısının yansıma katsayısına etkisi. . . . .	23
8.4 İkinci problemde kesme sayısının iletim katsayısına etkisi. . . . .	24
8.5 Birinci problemde alan genişlemesinin yansıma katsayısına etkisi. . . . .	24
8.6 Birinci problemde alan genişlemesinin iletim katsayısına etkisi. . . . .	25
8.7 İkinci problemde alan daralmasının yansıma katsayısına etkisi. . . . .	25
8.8 İkinci problemde alan daralmasının iletim katsayısına etkisi. . . . .	26

## ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
8.1 Birinci probleme ilişkin yansıma katsayısının genliği . . . . .	22
8.2 Birinci probleme ilişkin iletim katsayısının genliği . . . . .	23
8.3 İkinci probleme ilişkin yansıma katsayısının genliği . . . . .	23
8.4 İkinci probleme ilişkin iletim katsayısının genliği . . . . .	26

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>	<b>Sayfa Numarası</b>
$p$	Akustik Basınç	1
$v$	Molekül Hızı	2
$\rho$	Akışkan Yoğunluğu	2
$c$	Ses Hızı	2
$\omega$	Açısal Frekans	2, 7
$k$	Dalga Sayısı	7
$R$	Yansıma Katsayısı	20
$T$	İletim Katsayısı	20

# 1. GİRİŞ VE AMAÇ

Çağımızın endüstriyel ortamında ve bir çok ulaşım aracında, akustik gürültünün boru sistemlerinden ilerleyerek uzaklara yayıldığı durumlar oluşmaktadır. Bu duruma örnek olarak ısıtma veya havalandırma sistemleri, rüzgar türbinleri, jetler, turbo fanlar verilebilir. Bu tür örneklerde gördüğümüz “istenmeyen gürültü” sorununa teknik çözümler uzun yıllardır aranmaktadır.

Bu çalışmada düzlemsel akustik dalgaların ani alan genişlemeli ve ani alan daralmalı akışkansız paralel-plakalı borularda yayılımının mod uydurma ile analizi yapılmıştır. Bu ve benzeri uygulamalarda karşımıza çıkacak problemlerin analitik ve sayısal yöntemlerle analizi mümkündür. Analitik yöntemlere Wiener-Hopf tekniği ve mod-uydurma tekniği örnek gösterilebilir. Wiener-Hopf tekniğinde problem, Fourier dönüşümünün uygulanması sonucu kompleks düzlemin bir şeridinde geçerli olan bir denklemin çözümüne indirgenir. Bu teknik ileri düzey analiz yeteneği gerektirmesiyle birlikte problemin formülasyonu oldukça karmaşık olur. Mod uydurma tekniği Wiener-Hopf tekniğine göre oldukça basit bir formülasyona sahiptir.

Mod-uydurma yöntemi ile, önce akustik basınç  $p$  modlar cinsinden ifade edilecek ve ardından her bir problem için geçiş bölgesindeki süreklilik ifadeleri yardımıyla sonsuz bilinmeyenli birer lineer denklem sistemi elde edilecektir. Bu sistemler belirli bir kesme sayısında kesilecek sayısal yöntemlerle çözülecektir. Kesme sayısının sonuca etkisi ayrıca çalışılacaktır. Bununla beraber, kesit alanları oranlarının yansıyan ve iletilen akustik basınçlara etkisi ortaya çıkarılacaktır.

## 2. AKUSTİK DALGALAR VE GÜRÜLTÜ

### 2.1 Akustik Dalgalar

Akustik dalgaların yayılmaları fizikte kütleinin korunumu, momentumun korunumu ve enerjinin korunumu prensiplerinden yola çıkarak incelenir. Buna göre

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \quad (2.1)$$

konvektif türev operatörü,  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) akışkan yoğunluğu ve  $v$  (m/sn) molekül hızı olmak üzere, kütleinin korunumu yasası

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{v} \quad (2.2)$$

ilişkisi ile ifade edilir. Ortamda kütleinin yoğunluğu zamanla değişmiyorsa yukarıdaki ifade basitleşerek

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.3)$$

haline gelir. Momentumun korunumu yasası ise,  $p$  akustik basınç (N/m<sup>2</sup>),  $\vec{f}$  dış kuvvetler (N) olmak üzere

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{f} \quad (2.4)$$

biçiminde ifade edilir. Son olarak, enerjinin korunumu yasası ile,  $s$  birim kütledeki entropi,  $c = c(\rho, s)$  (m/sn) birimli bir hız göstermek üzere

$$\frac{Dp}{Dt} = c^2 \frac{D\rho}{Dt} \quad (2.5)$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntılar yardımıyla, dış kuvvetlerin olmadığı durgun akışkan bir ortamda

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6)$$

dalga denkleminde erişilir ve akustik basıncın bir dalga şeklinde  $c$  hızıyla ilerlediği anlaşılır. Monokromatik bir akustik dalganın basıncının zamanla değişimi  $\exp(-it)$  şeklinde olacağından yukarıdaki denklem

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (2.7)$$

olmak üzere

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (2.8)$$

haline gelir. Bu son denkleme Helmholtz denklemi adı verilir. Monokromatik akustik dalgalarda molekül hızı  $\vec{v}$  ile akustik basınç  $p$  arasında

$$\vec{v} = \frac{1}{i\omega\rho} \nabla p \quad (2.9)$$

ilişkisi söz konusudur.

Bu son bağıntı yardımıyla rijit duvarlara ilişkin sınır koşulu kolaylıkla elde edilir. Rijit duvarlarda hız sıfır olacaktır. Duvardan dışarı dik yöndeki birim vektör  $\hat{n}$  ise,  $\hat{n}$  yönündeki hızın sıfır olması, bir bakışla deyişle  $v_n = 0$  olması gerektiği anlaşılır. O halde

$$\nabla p = \hat{r} \nabla_T p + \hat{n} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (2.10)$$

olduğu düşünülürse, (2.9) ilişkisinden rijit duvarlarda akustik basınca ilişkin

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (2.11)$$

sınır koşulu elde edilir.

Bir akustik dalganın taşıdığı ortalama güç yoğunluğu

$$P_{av} = \frac{1}{2} \text{Re} \{p |\vec{v}|^*\} \quad (2.12)$$

ifadesiyle belirlenir.

## 2.2 Gürültü Problemi ve Susturucuların Sınıflandırılması

Akustik dalgaların yayıldıkları boru sistemlerine gürültü problemi, yaklaşık yarım yüzyıldan uzun bir süredir araştırmacıların ilgisini çekmektedir. Daha ziyade akışkanlı ortamlarda sesin yayılımını içeren bu tür problemlerde, akışkanın ses ile etkileşimi oldukça ilgi çekmiş ve derinlemesine analiz gerektirmiştir. Akışkanın bir yapı ile etkileşimi sonucunda ortaya çıkan gürültü (örneğin araba egzost sistemleri) buna bir örnektir. Bu mekanizma ilk olarak Lighthill'in çalışması ile tanınmış [Lighthill, 1952] ve bu çalışma özellikle aeroakustik dalında çok önemli bir çığır açmıştır.

Bu ve benzeri mekanizmalarla oluşan gürültünün bastırılması mühendislik uygulamaları açısından büyük önem arz etmektedir. Susturucu adı verilen bu tür uygulamalar literatürde çeşitlilik gösterir. Söz gelimi, daha ziyade yüksek frekanslarda verimli olan, mineral yün gibi geçirgen malzemelerle rijit duvarların kaplanması sonucu elde edilen susturucu sistemlerine "dağıtıcı susturucular" adı verilir. Diğer yandan, genişleme odası oluşturmak gibi, boru sisteminin geometrisine müdahale edilerek yaratılan susturuculara ise "reaktif susturucu" denir.

Bu çalışmada reaktif susturucu tipleri olan alan genişlemesi ve alan daralması incelenmiştir.

### 3. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

#### 3.1 Akustik Dalga Kılavuzlarında Yayılma ve Gürültü

Konunun akışkanlı ortamlar içinde incelenmesi ilk olarak Rayleigh tarafından yapılmıştır [Rayleigh, 1896]. Daha sonra Lighthill jet akışkanının türbülanslı yapısının ayrı bir ses kaynağı olduğunu farketmiştir [Lighthill, 1952]. Daha sonra bu konudaki en çarpıcı çalışmalardan biri Munt'ın 1977 tarihli makalesidir [Munt, 1977]. Munt bu makalesinde yarı-sonsuz bir silindirik borudan sesin yayılımını incelemiştir. Öte yandan Rawlins 1995 yılında çatalanmış dairesel dalga kılavuzunun matematiksel analizini gerçekleştirmiştir [Rawlins, 1995]. Buna benzer bir geometrinin, duvarları kaplanmış halini ise 2007 yılındaki çalışmasında sunmuştur [Rawlins, 2007]. Yıllar ilerledikçe daha güçlü motorlara ihtiyaç duyulmuş olması sebebiyle yaratılan gürültü de artmıştır. İstenmeyen gürültüyü azaltmak amacıyla çeşitli yollar önerilmiştir. Bunlardan biri dalganın yayıldığı ortamın asbest gibi yutucu bir madde ile kaplanması, ses enerjisinin bir kısmının asbest ile ısı enerjisine dönüşmesini sağlamaktır. Bu tür susturuculara “dağıtıcı susturucu” adı verilir. Bir başka yol ise, dalganın yayıldığı ortamın geometrisinde ani değişiklikler yaratmak ve gelen dalganın bir kısmını geri yansıtmaktır (reaktif susturucular). Bu tez çalışmasında bunun örnekleri olan ani alan genişlemesi ve ani alan daralması incelenmiştir. Akışkanlı dairesel kesitli borular için bu tür susturucular Nilsson ve Brander'in yaptıkları çalışmalarda tüm ayrıntılarıyla çalışılmıştır [Nilsson ve Brander, 1980b], [Nilsson ve Brander, 1980a], [Nilsson ve Brander, 1981a], [Nilsson ve Brander, 1981b].

#### 3.2 Mod-Uydurma Yöntemi

Mod uydurma tekniği, sınır değer problemlerinde problemin geometrisine bağlı olarak, ayrıştırılabilir koordinat sisteminde iki veya daha fazla bölgenin birleşimi şeklinde ifade edildiğinde kullanılabilen bir yöntem olarak bilinmektedir. Bu teknik ile uygulanan bölgedeki alan bileşenlerinin öz fonksiyon açılımı yapılır. Yapılan öz fonksiyonlar açılımı yardımıyla söz konusu alanların birleştiği yüzeyde alan bileşenlerinin sürekli olması özelliği ile bu teknik uygulanmış olur. Mod uydurma tekniğinde elde edilen çözüm yaklaşık sonuç verdiği için dolayı sonuç kesme sayısı ile ilişkilidir [Mittra ve Lee, 1971].

Warren v.d., 2002 yılındaki çalışmalarında dalga kılavuzlarının geometrilerinde ya da duvarlarında kullanılan malzemelerde süreksizlikler olduğunda, akustik dalgaların saçılmasının nasıl etkilendiğini mod-uydurma yöntemi kullanarak araştırmışlardır [Warren



ve Mohamed, 2002]. Ardından, Gabard ve Astley ise 2008 yılındaki çalışmalarında sonlu elemanlar - mod uydurma yöntemini duvarlarında değişken kaplamalar olan akışkanlı borulara uygulamışlardır [Gabard ve Astley, 2008]. Temel amaçları turbofan girişlerinde ses zayıflamasını tahmin edecek bir model geliştirmek olmuştur. Yine Lawrie'nin 2013 yılındaki çalışmasında esnek duvarlara sahip üç boyutlu dalga kılavuzlarında saçılma için bir analitik mod uydurma yöntemi sunulmuştur [Lawrie, 2013].

## 4. YÖNTEM

Bu çalışmada, alan genişlemeli ve alan daralmalı paralel-plakalı dalga kılavuzlarında saçılan akustik basınçlar Mod-Uydurma yöntemi ile incelenmiştir. Bu yöntemde birbiriyle temas halinde olan iki farklı dalga kılavuzu bölgesinde, akustik basınçlar yayılan modlar cinsinden ifade edilmektedir. Söz gelimi, A ve B dalga kılavuzu bölgelerinde akustik basınçlar, sırasıyla,

$$p_A(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_{A_n}(y) e^{\pm ikz}$$

ve

$$p_B(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_{B_n}(y) e^{\pm ikz}$$

olarak gösterilmektedir. Burada  $a_n$  ve  $b_n$  ler seri açılımın katsayıları,  $\varphi_{A_n}(y)$  ve  $\varphi_{B_n}(y)$  ise özfonksiyonları göstermektedir. Akustik basıncın zamanla değişimi  $\exp(-i\omega t)$  olarak kabul edildiğinde,  $\exp(\pm ikz)$  ifadesinde görülen  $+$  işareti  $-z$  yönünde,  $-$  işareti ise  $+z$  yönünde ilerleyen akustik dalgalara karşı gelmektedir.

Sözü geçen A ve B dalga kılavuzu bölgelerinin temas halinde olduğu  $y \in (y_1, y_2)$  aralığında ve  $z = z_0$  konumunda, akustik basıncın ve molekül hızının sürekliliği denklemlerinden, sırasıyla

$$p_A(y, z_0) = p_B(y, z_0), \quad y \in (y_1, y_2)$$

ve

$$\frac{\partial p_A(y, z_0)}{\partial z} = \frac{\partial p_B(y, z_0)}{\partial z}, \quad y \in (y_1, y_2)$$

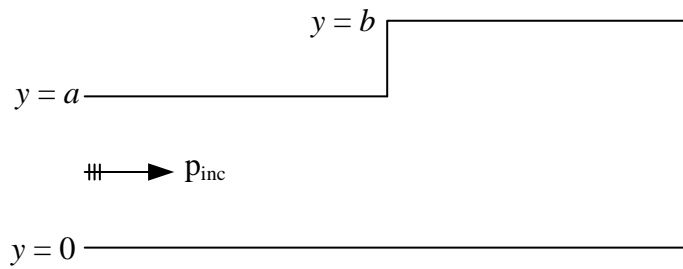
ilişkileri elde edilir. Akustik basınçların ve molekül hızlarının sürekli olduğu  $y$  aralığı birbirine eşit olmayabilir. Nitekim bu çalışmada ele alınan her iki problemde, yukarıda görülen iki eşitliğin  $y$  bakımından aralıkları farklı olacaktır.

Bu noktadan sonra, Mod-Uydurma yönteminde, yukarıda görülen eşitliklerdeki ifadeler  $\varphi_{A_m}(y)$  ve  $\varphi_{B_m}(y)$  özfonksiyon kümelerinden uygun olanlarla çarpılıp, yanlarında görülen  $y$  aralığı boyunca integre edilirler. Sonuç olarak, bu işlemlerin ardından, bir lineer denklem sistemine ulaşılır.

Elde edilen lineer denklem sistemi sayısal yöntemlerle çözüldükten sonra  $a_n$  ve  $b_n$  katsayıları belirlenmiş olur.

## 5. ALAN GENİŞLEMELİ DALGA KILAVUZU

Zaman bağılılığı  $\exp(-i\omega t)$  şeklinde olan düzlemsel ses dalgasının  $z$  yönünde sonsuz uzanan ve genişleme süreksizliğine sahip bir paralel plakalı dalga kılavuzunda yayılımı göz önüne alınsın (Şekil 4.1). Bu paralel plakalı dalga kılavuzu uzaysal bölgede  $\{x \in (-\infty, \infty), y \in (0, a), z \in (-\infty, 0)\} \cup \{x \in (-\infty, \infty), y \in (0, b), z \in (0, \infty)\}$  şeklinde tanımlı olup burada  $(x, y, z)$  genel kartezyen koordinatları göstermektedir.



Şekil 5.1 Alan genişlemeli paralel-plakalı dalga kılavuzu.

Şekilde gösterilen, dalga kılavuzunun  $z \in (-\infty, 0)$  kısmına ait Bölge A ile  $z \in (0, \infty)$  kısmına ait Bölge B’de görülen tüm duvarlar rijittir. Gelen dalganın ve problemin geometrisinin simetrik olmasından ötürü akustik basınç her yerde  $x$  ten bağımsız olacaktır. Gelen dalganın sadece temel moddan oluşması halinde, Açısal Frekans ( $\omega$ ) olmak üzere  $k = \omega/c$  boşluğun Dalga Sayısı ( $k$ ) göstermek üzere, bu gelen dalganın akustik basıncı

$$p_{inc}(y, z) = e^{ikz} \quad (5.1)$$

şeklinde ifade edilir. Analitik uygunluk için çevredeki ortamın biraz kayıplı, yani  $k$  nın çok küçük pozitif sanal bir kısma sahip olduğu varsayılacaktır. Kayıpsız durum için ise analiz sonunda  $\text{Im}k \rightarrow 0$  yapıldığı düşünülecektir.

Analizin kolaylığı açısından  $p_T(y, z)$  toplam akustik basıncını aşağıdaki gibi ifade etmek uygun olacaktır:

$$p_T(y, z) = \begin{cases} p_{inc}(y, z) + p_1(y, z) & , y \in (0, a), z \in (-\infty, 0) \\ p_2(y, z) & , y \in (0, b), z \in (0, \infty) \end{cases} \quad (5.2)$$

Yukarıdaki ifadede görülen tüm akustik basınç terimleri, dolayısıyla  $p_1(y, z)$  ve  $p_2(y, z)$  akustik basınçları aşağıdaki Helmholtz denklemini sağlamaktadırlar:

$$\frac{\partial^2 p_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_j}{\partial z^2} + k^2 p_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (5.3)$$

$p_1(y, z)$  yansıyan basıncı göstermektedir ve ilerleme yönü  $-z$  olacağından  $z$  ye bağlılığı,  $\alpha$  reel kısmı pozitif olan herhangi bir parametre olmak üzere,  $e^{-i\alpha z}$  gibi olacaktır. Benzer biçimde,  $p_2(y, z)$  ilerleyen basıncı gösterdiğinden ve ilerleme yönü  $z$  olduğundan  $z$  ye bağlılığı,  $\beta$  reel kısmı pozitif olan herhangi bir parametre olmak üzere  $e^{i\beta z}$  gibi olacaktır. O halde, bu basınçlar için aranan çözümlerin genel yapıları,  $Y_1(y)$  ve  $Y_2(y)$  bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere

$$p_1(y, z) = Y_1(y) e^{-i\alpha z} \quad (5.4)$$

ve

$$p_2(y, z) = Y_2(y) e^{i\beta z} \quad (5.5)$$

şeklindedir. (5.4) ifadesi (5.3) denkleminde yerine konursa,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [Y_1(y) e^{-i\alpha z}] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [Y_1(y) e^{-i\alpha z}] + k^2 Y_1(y) e^{-i\alpha z} = 0,$$

ve buradan

$$e^{-i\alpha z} \frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} + (k^2 - \alpha^2) Y_1(y) e^{-i\alpha z} = 0$$

elde edilir. Yayılmakta olan bir akustik dalga için  $e^{-i\alpha z}$  ifadesi sıfıra eşit olamayacağından, yukarıdaki denklemden

$$h^2 = k^2 - \alpha^2 \quad (5.6)$$

olmak üzere

$$\frac{d^2 Y_1(y)}{dy^2} + h^2 Y_1(y) = 0 \quad (5.7)$$

diferansiyel denkleminde ulaşılır. Bu adi türevli diferansiyel denkleme ilişkin karakteristik denklem

$$\lambda^2 + h^2 = 0 \quad (5.8)$$

şeklindedir. Bu karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_{1,2} = \pm ih \quad (5.9)$$

olur. Kompleks kök haline karşı gelen bu durum için (5.7) diferansiyel denkleminin genel çözümü,  $K_1$  ve  $L_1$  bilinmeyen katsayılar olmak üzere,

$$Y_1(y) = K_1 \sin(hy) + L_1 \cos(hy) \quad (5.10)$$

biçimindedir. Rijit duvarlara ilişkin Neumann sınır koşulu

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (5.11)$$

olarak (2.11) bağıntısı ile verilmiştir. Burada türev rijit duvara dik yöndeki parametre üzerinden alınmaktadır. Şekil ile verilmiş olan geometri incelendiğinde hem  $y = 0$  daki, hem de  $y = a$  daki duvarlara dik yöndeki parametrenin  $y$  parametresi olduğu görülür. O halde, bu duvarlar üzerinde akustik basıncın  $y$  ye göre türevinin sifıra eşit bulunması gerekmektedir. Bu bilgiler ışığında,  $y = a$  ve  $y = b$  deki duvarlar için, sırasıyla,

$$\frac{\partial p_T(0, z)}{\partial y} = 0 \quad (5.12)$$

ve

$$\frac{\partial p_T(a, z)}{\partial y} = 0 \quad (5.13)$$

yazılabilir. (5.2) ile verilmiş olan toplam akustik basınç dikkate alındığında

$$\frac{\partial}{\partial y} [p_{inc}(0, z) + p_1(0, z)] = 0 \quad (5.14)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial y} [p_{inc}(a, z) + p_1(a, z)] = 0 \quad (5.15)$$

bulunur.

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{ikz} = 0 \quad (5.16)$$

olduğundan, gelen dalganın akustik basıncı nin bu koşulları zaten sağlamakta olduğu açıkça görülmektedir. O halde,  $p_1(y, z)$  akustik basıncı için

$$\frac{\partial p_1(0, z)}{\partial y} = 0 \quad (5.17)$$

ve

$$\frac{\partial p_1(a, z)}{\partial y} = 0 \quad (5.18)$$

yazılabilir. Son olarak  $p_1(y, z)$  için (5.4) ifadesi dikkate alınarak

$$\frac{dY_1(0)}{dy} = 0 \quad (5.19)$$

ve

$$\frac{dY_1(a)}{dy} = 0 \quad (5.20)$$

sınır koşullarına ulaşılır.

$$\frac{dY_1(y)}{dy} = hK_1 \cos(hy) - hL_1 \sin(hy)$$

göz önüne alınarak, (5.19) sınır koşulunun (5.10) çözümüne uygulanmasıyla, kolaylıkla

$$K_1 = 0 \quad (5.21)$$

bulunur. Ardından (5.20) sınır koşulunun dikkate alınmasıyla da

$$hL_1 \sin(ha) = 0 \quad (5.22)$$

denklemine ulaşılır. Burada  $L_1$  sifira eşit kabul edilirse, trivial çözüm elde edilmiş olur. Trivial çözümden başka bir çözüm elde edebilmek için

$$\sin(ha) = 0 \quad (5.23)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan açıkça görülüyor ki;  $h$  in keyfi herhangi bir değeri için (5.23) eşitliği sağlanamaz. Bu eşitliğin sağlanması ancak  $h$  in belirli bazı değerler almasıyla mümkün olur. Bu değerler

$$h_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.24)$$

şeklinde ve bunlara özdeğerler adı verilir. Bu özdeğerler çözümde yerine konduğunda, her bir  $h_n$  e karşı bir  $L_{1n}$  katsayısı gelebileceği de dikkate alınarak

$$Y_{1n}(y) = L_{1n} \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.25)$$

çözümlerine ulaşılır. Bu çözümlerde görülen

$$\cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

ifadelerine özfonksiyonlar adı verilir. Genel çözüm bu özfonksiyonların bir lineer kombinasyonudur. Öte yandan,

$$\alpha_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

ilişkinin dikkate alınmasıyla, akustik basınç  $p_1(y, z)$  için,  $R_n = L_{1n}$  konmak üzere,

$$p_1(y, z) = R_0 e^{-ikz} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) e^{-i\alpha_n z} \quad (5.27)$$

çözümü elde edilmiş olur.

Benzer şekilde  $Y_2(y)$  fonksiyonu da

$$s^2 = k^2 - \beta^2 \quad (5.28)$$

olmak üzere

$$\frac{d^2 Y_2(y)}{dy^2} + s^2 Y_2(y) = 0 \quad (5.29)$$

denklemini sağlayacak ve genel çözümü

$$Y_2(y) = K_2 \sin(sy) + L_2 \cos(sy) \quad (5.30)$$

biçiminde olacaktır. Bu bölgedeki rijit duvalara ilişkin sınır koşulları

$$\frac{dY_2(0)}{dy} = 0 \quad (5.31)$$

ve

$$\frac{dY_2(b)}{dy} = 0 \quad (5.32)$$

şeklindedir. Bunların dikkate alınmasıyla da akustik basınç  $p_2(y, z)$  için,  $T_n = L_{2n}$  konmak üzere,

$$p_2(y, z) = T_0 e^{ikz} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i\beta_n z} \quad (5.33)$$

çözümüne ulaşılır.

$z = 0$  noktasına her iki bölgeden yaklaşırken akustik basınçlar ve  $+z$  doğrultusundaki molekül hızları sürekli olmalıdır. Buna göre akustik basınçların sürekliliğinden

$$p_2(y, 0) = p_{inc}(y, 0) + p_1(y, 0), \quad 0 < y < a \quad (5.34)$$

ilişkisi yazılır. Öte yandan, hız ile basınç arasında söz konusu olan (2.9) bağıntısı yardımıyla,  $+z$  doğrultusundaki hız

$$v_z = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5.35)$$

bulunur. Ortam her iki bölgede de aynı olduğundan,  $+z$  doğrultusundaki hızların sürekliliğinin, akustik basınçların  $z$  ye göre türevlerinin sürekliliği anlamına geldiği kolaylıkla görülür.  $a < y < b$  ve  $z = 0$  da rijit duvar olduğundan burada hız (dolayısıyla basıncın  $z$  ye göre türevi) sıfıra eşit olacaktır. Bu bilgiler ışığında hızların sürekliliğinden

$$\frac{\partial p_2(y, 0)}{\partial z} = \begin{cases} \frac{\partial p_{inc}(y, 0)}{\partial z} + \frac{\partial p_1(y, 0)}{\partial z} & , \quad 0 < y < a \\ 0 & , \quad a < y < b \end{cases} \quad (5.36)$$

ilişkisi elde edilmiş olur.

(5.27) ve (5.33) çözümlerinin (5.34) ve (5.36) bağıntılarında yerine konmasıyla, sırasıyla

$$T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = 1 + R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad 0 < y < a \quad (5.37)$$

ve

$$kT_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n T_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = \begin{cases} k - kR_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n R_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) & , \quad 0 < y < a \\ 0 & , \quad a < y < b \end{cases} \quad (5.38)$$

denklemleri bulunur.

(5.37) denklemi terim terime  $\cos(m\pi y/a)$  ile çarpılıp,  $y = 0$  dan  $y = a$  ya integre edilirse

$$B_m^{(1)} = \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) dy \quad (5.39)$$

ve

$$\Delta_{mn}^{(2)} = \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \quad (5.40)$$

olmak üzere

$$B_m^{(1)} R_m - \sum_{n=1}^{\infty} T_n \Delta_{mn}^{(2)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.41)$$

bulunur. Ayrıca aynı denklemin terim terime 1 ile çarpılıp  $y = 0$  dan  $y = a$  ya integre edilmesiyle

$$-aR_0 + aT_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{b}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = a \quad (5.42)$$

elde edilir. (5.38) denklemi terim terime  $\cos(m\pi y/b)$  ile çarpılıp,  $y = 0$  dan  $y = b$  ye integre edilirse

$$A_m^{(1)} = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \quad (5.43)$$

ve

$$\Delta_{mn}^{(1)} = \int_0^a \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy \quad (5.44)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} kR_0 \frac{b}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi a}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n R_n \Delta_{mn}^{(1)} + \beta_n T_n A_m^{(1)} \\ = k \frac{b}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi a}{b}\right), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.45)$$

bulunur. Son olarak (5.38) denkleminin terim terime 1 ile çarpılıp,  $y = 0$  dan  $y = b$  ye integre edilmesiyle

$$bT_0 + aR_0 = a \quad (5.46)$$

ilişikisine ulaşılır. Yukarıda görülen  $A_m^{(1)}$ ,  $B_m^{(1)}$ ,  $\Delta_{mn}^{(1)}$  ve  $\Delta_{mn}^{(2)}$ , integralleri hesaplanırsa, sırasıyla,

$$A_m^{(1)} = \begin{cases} b & , \quad m = 0 \text{ ve } n = 0 \\ b/2 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases}, \quad (5.47)$$

$$B_m^{(1)} = \begin{cases} a & , \quad m = 0 \text{ ve } n = 0 \\ a/2 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases}, \quad (5.48)$$

$$\Delta_{mn}^{(1)} = -\frac{(-1)^n m}{\pi b} \sin\left(\frac{m\pi a}{b}\right) \frac{1}{\left(\frac{n}{a}\right)^2 - \left(\frac{m}{b}\right)^2}, \quad n \neq 0 \text{ ve } m \neq 0 \quad (5.49)$$



ve

$$\Delta_{mn}^{(2)} = -\frac{(-1)^m n}{\pi b} \sin\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \frac{1}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 - \left(\frac{n}{b}\right)^2}, n \neq 0 \text{ ve } m \neq 0 \quad (5.50)$$

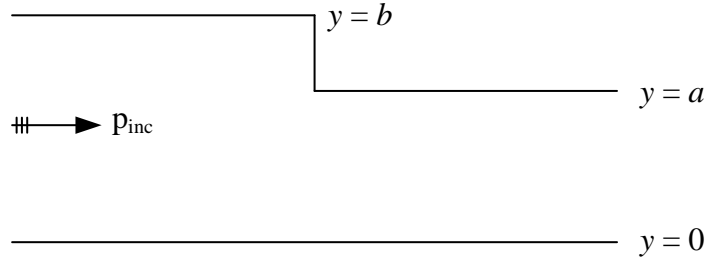
elde edilir. (5.41), (5.42), (5.45) ve (5.46) denklemlerinin bir arada düşünülmesiyle, bilinmeyenleri,  $m = 1, 2, \dots, N$  olmak üzere  $R_0, R_m, T_0$  ve  $T_m$  olan  $(2N + 2) \times (2N + 2)$  boyutunda bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin bilinmeyenler matrisi

$$\mathbf{x}_{(2N+2)} = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_N \\ T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix}$$

olarak tanımlandıktan sonra MATLAB yardımıyla söz konusu denklem sistemi çözülür.

## 6. ALAN DARALMALI DALGA KILAVUZU

Alan genişlemeli dalga kılavuzunda gerçekleştirilen benzer yaklaşım ile alan daralmalı dalga kılavuzunda çözümlenebilir. Zaman bağıllığı  $\exp(-i\omega t)$  şeklinde olan düzlemsel ses dalgasının  $z$  yönünde sonsuz uzanan ve genişleme süreksizliğine sahip bir paralel plakalı dalga kılavuzunda yayılımı göz önüne alınsın (Şekil 5.1). Bu paralel plakalı dalga kılavuzu uzaysal bölgede  $\{x \in (-\infty, \infty), y \in (0, b), z \in (-\infty, 0)\} \cup \{x \in (-\infty, \infty), y \in (0, a), z \in (0, \infty)\}$  şeklinde tanımlıdır ve burada  $(x, y, z)$  genel kartezyen koordinatları göstermektedir.



Şekil 6.1 Alan daralmalı paralel-plakalı dalga kılavuzu.

Şekilde gösterilen, dalga kılavuzunun  $z \in (-\infty, 0)$  kısmına ait Bölge A ile  $z \in (0, \infty)$  kısmına ait Bölge B’de görülen tüm duvarlar rijittir. Gelen dalganın ve problemin geometrisinin simetrik olmasından dolayı akustik basınç her yerde  $x$  ten bağımsız olacaktır. Gelen dalganın sadece temel moddan oluşması halinde,  $k = \omega/c$  boşluğun dalga sayısını göstermek üzere, bu gelen dalganın akustik basıncı

$$p_{inc}(y, z) = e^{ikz} \quad (6.1)$$

şeklinde ifade edilir. Analitik uygunluk için çevredeki ortamın biraz kayıplı, yani  $k$  nın çok küçük pozitif sanal bir kısma sahip olduğu varsayılacaktır. Kayıpsız durum ise analiz sonunda  $\text{Im}k \rightarrow 0$  yapılarak elde edilecektir.

Yapılan analizin kolaylığı açısından  $p_T(y, z)$  toplam akustik basıncını aşağıdaki gibi ifade etmek uygun olacaktır:

$$p_T(y, z) = \begin{cases} p_{inc}(y, z) + p_1(y, z) & , y \in (0, b), z \in (-\infty, 0) \\ p_2(y, z) & , y \in (0, a), z \in (0, \infty) \end{cases} \quad (6.2)$$

Yukarıdaki ifadede görülen  $p_1(y, z)$  ve  $p_2(y, z)$  akustik basınçları aşağıdaki Helmholtz denklemini sağlamaktadırlar:

$$\frac{\partial^2 p_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_j}{\partial z^2} + k^2 p_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (6.3)$$

$p_1(y, z)$  yansıyan basıncı göstermektedir ve ilerleme yönü  $-z$  olacağından  $z$  ye bağıllığı,  $\alpha$  herhangi bir parametre olmak üzere,  $e^{-i\alpha z}$  gibi olacaktır. Benzer biçimde,  $p_2(y, z)$  ilerleyen basıncı gösterdiğinden ve ilerleme yönü  $z$  olduğundan  $z$  ye bağıllığı  $e^{i\beta z}$  gibi olacaktır. Bu durumda, çözümleri aranan basınçların genel yapıları

$$p_1(y, z) = Y_1(y) e^{-i\alpha z} \quad (6.4)$$

ve

$$p_2(y, z) = Y_2(y) e^{i\beta z} \quad (6.5)$$

gibidir. (6.4) ifadesi (6.3) denkleminde yerine konursa,

$$h^2 = k^2 - \alpha^2 \quad (6.6)$$

olmak üzere,  $Y_1(y)$  fonksiyonu için

$$\frac{d^2 Y_1(y)}{dy^2} + h^2 Y_1(y) = 0 \quad (6.7)$$

bulunur. (6.7) ifadesinde karşımıza gelen adi türevli diferansiyel denklemin genel çözümü

$$Y_1(y) = K_1 \sin(hy) + L_1 \cos(hy) \quad (6.8)$$

şeklindedir. Rijit duvarlara ilişkin Neumann sınır koşullarından

$$\frac{dY_1(0)}{dy} = 0 \quad (6.9)$$

ve

$$\frac{dY_1(a)}{dy} = 0 \quad (6.10)$$

yazılabilir. (6.9) sınır koşulunun (6.8) çözümüne uygulanmasıyla, kolaylıkla

$$K_1 = 0 \quad (6.11)$$

bulunur. Takiben (6.10) sınır koşulunun dikkate alınmasıyla da

$$h_n = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.12)$$

özdeğerlerine ve

$$Y_{1n}(y) = L_{1n} \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.13)$$

özfonksiyonlarına ulaşılır. Bu özfonksiyonların ve

$$\alpha_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.14)$$

ilişkisinin dikkate alınmasıyla, akustik basınç  $p_1(y, z)$  için,  $R_n = L_{1n}$  konmak üzere,

$$p_1(y, z) = R_0 e^{-ikz} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-i\beta_n z} \quad (6.15)$$

çözümü elde edilir.

Benzer şekilde  $Y_2(y)$  fonksiyonu da

$$s^2 = k^2 - \beta^2 \quad (6.16)$$

olmak üzere

$$\frac{d^2 Y_2(y)}{dy^2} + s^2 Y_2(y) = 0 \quad (6.17)$$

denklemini sağlayacak ve genel çözümü

$$Y_2(y) = K_2 \sin(sy) + L_2 \cos(sy) \quad (6.18)$$

şeklinde olur. Bu bölgedeki rijit duvalara ilişkin sınır koşulları

$$\frac{dY_2(0)}{dy} = 0 \quad (6.19)$$

ve

$$\frac{dY_2(b)}{dy} = 0 \quad (6.20)$$

biçimindedir. Bunların dikkate alınmasıyla da akustik basınç  $p_2(y, z)$  için,  $T_n = L_{2n}$  konmak üzere,

$$p_2(y, z) = T_0 e^{ikz} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) e^{i\alpha_n z} \quad (6.21)$$

çözümüne ulaşılır.

$z = 0$  noktasına her iki bölgeden yaklaşırken akustik basınçlar ve  $+z$  doğrultusundaki molekül hızları sürekli olmalıdır. O halde, akustik basınçların sürekliliğinden

$$p_{inc}(y, 0) + p_1(y, 0) = p_2(y, 0), \quad 0 < y < a \quad (6.22)$$

ilişkisi yazılır. Öte yandan, hız ile basınç arasında söz konusu olan (2.9) bağıntısı yardımıyla,  $+z$  doğrultusundaki hız

$$v_z = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6.23)$$

bulunur. Ortam her iki bölgede de aynı olduğundan,  $+z$  doğrultusundaki hızların sürekliliğinin, akustik basınçların  $z$  ye göre türevlerinin sürekliliği anlamına geldiği kolaylıkla görülür.  $a < y < b$  ve  $z = 0$  da rijit duvar olduğundan burada hız (dolayısıyla basıncın  $z$  ye göre türevi) sıfıra eşit olmalıdır. Bu bilgiler doğrultusunda hızların sürekliliğinden

$$\frac{\partial p_1(y, 0)}{\partial z} + \frac{\partial p_{inc}(y, 0)}{\partial z} = \begin{cases} \frac{\partial p_2(y, 0)}{\partial z} & , 0 < y < a \\ 0 & , a < y < b \end{cases} \quad (6.24)$$

ilişkisi elde edilir.

(6.15) ve (6.21) çözümlerinin (6.22) ve (6.24) bağıntılarında yerine konmasıyla, sırasıyla

$$1 + R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad 0 < y < a \quad (6.25)$$

ve

$$k - kR_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n R_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = \begin{cases} kT_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) & , 0 < y < a \\ 0 & , a < y < b \end{cases} \quad (6.26)$$

denklemleri bulunur.

(6.25) denklemi terim terime  $\cos(m\pi y/a)$  ile çarpılıp,  $y = 0$  dan  $y = a$  ya integre edilirse

$$B_m^{(1)} = \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) dy \quad (6.27)$$

ve

$$\Delta_{mn}^{(2)} = \int_0^a \cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \quad (6.28)$$

olmak üzere

$$B_m^{(1)} T_m - \sum_{n=1}^{\infty} R_n \Delta_{mn}^{(2)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.29)$$

bulunur. Ayrıca aynı denklemin terim terime 1 ile çarpılıp  $y = 0$  dan  $y = a$  ya integre edilmesiyle

$$a + aR_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \frac{b}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = T_0 a \quad (6.30)$$

elde edilir. (6.26) denklemi terim terime  $\cos(m\pi y/b)$  ile çarpılıp,  $y = 0$  dan  $y = b$  ye integre edilirse

$$A_m^{(1)} = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \quad (6.31)$$

ve

$$\Delta_{mn}^{(1)} = \int_0^a \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy \quad (6.32)$$

olmak üzere

$$-\beta_n R_m A_m^{(1)} = kT_0 \frac{b}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi a}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_n \Delta_{mn}^{(1)}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.33)$$

bulunur. Son olarak (6.26) denkleminin terim terime 1 ile çarpılıp,  $y = 0$  dan  $y = b$  ye integre edilmesiyle

$$aT_0 + R_0 = b \quad (6.34)$$

ilişikisine ulaşılır. Yukarıda görülen  $A_m^{(1)}$ ,  $B_m^{(1)}$ ,  $\Delta_{mn}^{(1)}$  ve  $\Delta_{mn}^{(2)}$ , integralleri hesaplanırsa, sırasıyla,

$$A_m^{(1)} = \begin{cases} b & , \quad m = 0 \text{ ve } n = 0 \\ b/2 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases}, \quad (6.35)$$

$$B_m^{(1)} = \begin{cases} a & , \quad m = 0 \text{ ve } n = 0 \\ a/2 & , \quad m = n \\ 0 & , \quad m \neq n \end{cases}, \quad (6.36)$$

$$\Delta_{mn}^{(1)} = -\frac{(-1)^n m}{\pi b} \sin\left(\frac{m\pi a}{b}\right) \frac{1}{\left(\frac{n}{a}\right)^2 - \left(\frac{m}{b}\right)^2}, \quad n \neq 0 \text{ ve } m \neq 0 \quad (6.37)$$

ve

$$\Delta_{mn}^{(2)} = -\frac{(-1)^m n}{\pi b} \sin\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \frac{1}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 - \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad n \neq 0 \text{ ve } m \neq 0 \quad (6.38)$$

elde edilir. (6.29), (6.30), (6.33) ve (6.34) denklemlerinin bir arada düşünülmesiyle, bilinmeyenleri,  $m = 1, 2, \dots, N$  olmak üzere  $R_0, R_m, T_0$  ve  $T_m$  olan  $(2N + 2) \times (2N + 2)$  boyutunda bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin bilinmeyenler matrisi

$$\mathbf{x}_{(2N+2)} = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_N \\ T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır ve bu bilinmeyenler matrisinin çözümü MATLAB yardımıyla yapılır.

## 7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışma ile, paralel-plakalı dalga kılavuzlarında alan genişlemesi ve alan daralmasının, yansıyan ve iletilen akustik basınçlara olan etkisi ortaya çıkarılmıştır. Bunu yaparken Mod-Uydurma yöntemi tercih edilmiştir. Bu yöntemle, akustik basınç ve molekül hızı tüm dalga kılavuzu bölgelerinde yayılan modlar cinsinden ifade edilmiş, geçiş bölgelerinde ise bu büyüklüklerin süreklilikleri yardımıyla, birer sonsuz bilinmeyenli lineer denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sistemleri belirli bir kesme sayısında kesilerek problem sayısal olarak çözülmüştür. Kesme sayısının ve kesit alanları oranlarının yansıyan ve iletilen akustik basıncın genliğine olan etkileri ortaya çıkarılmıştır.

Sayısal incelemeler sonucunda, birinci problemde görülen uygulama ile, akustik basıncın geri yansıması  $b/a$  azaltılarak düşürülebilirken, dışarıya yayılacak gürültü de  $b/a$  arttıkça azalacaktır. Aynı durum ikinci problemde görülen uygulamada da mevcuttur.

Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar, gelecekte akışlı ortamlar için genişletilebilir. O uygulamalarda akışkanın akış hızının akustik basınçla etkileşimi ortaya çıkarılabilir.

Öte yandan, benzer bir analiz dairesel kesitli dalga kılavuzlarına da uygulanabilir. Bu iki yaklaşımla, hem akışın hem de geometrinin sonuca etkileri bağımsız olarak belirlenmiş olur.

## 8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, sayısal hesaplamalar MATLAB programlama dilinde yapılmıştır. Sayısal hesaplamalarda, öncelikle, her iki problemde karşımıza çıkan lineer denklem sisteminin boyutunun sonuçlara olan etkisi incelenmiştir. Birinci ve ikinci problemlerde kesme sayısına (denklem, dolayısıyla bilinmeyen sayısı) göre değişimler Şekil 8.1, Şekil 8.2, Şekil 8.3 ve Şekil 8.4 ile gösterilmektedir.

Öte yandan kesit alanlardaki değişim oranlarının yansıma ve iletim katsayılarına etkileri de Şekil 8.5, Şekil 8.6, Şekil 8.7 ve Şekil 8.8 ile sunulmuştur. Bu grafiklerde görülen katsayı genliklerinin enerjinin korunumu yasasına uygun olup olmadığı, ortalama enerji yoğunluğu için (2.12) ile verilmiş bağıntı yardımıyla kontrol edilebilir. Buna göre, alan genişlemeli problem için, her iki boruda da temel modların yayıldığı dikkate alınırsa, A bölgesindeki toplam akustik basınç için

$$p_A = e^{ikz} + R_0 e^{-ikz} \quad (8.1)$$

B bölgesindeki toplam akustik basınç için ise

$$p_B = T_0 e^{ikz} \quad (8.2)$$

yazılabilir. Bunlara karşı gelen molekül hızları  $\vec{v}_A$  ve  $\vec{v}_B$  (2.9) yardımıyla, sırasıyla,

$$\vec{v}_A = \frac{1}{Z} [e^{ikz} - R_0 e^{-ikz}] \hat{z} \quad (8.3)$$

ve

$$\vec{v}_B = \frac{1}{Z} T_0 e^{ikz} \hat{z} \quad (8.4)$$

olarak belirlenir. Burada

$$Z = \frac{\omega \rho}{k} = \rho c \quad (8.5)$$

ortamın karakteristik empedansını göstermektedir. Sonuç olarak A ve B bölgelerindeki ortalama güç yoğunlukları

$$P_{av,A} = \frac{1}{2Z} [e^{ikz} + R_0 e^{-ikz}] [e^{-ikz} - R_0^* e^{ikz}] = \frac{1}{2Z} [1 - |R_0|^2] \quad (8.6)$$

ve

$$P_{av,B} = \frac{1}{2Z} T_0 e^{ikz} T_0^* e^{-ikz} = \frac{1}{2Z} |T_0|^2 \quad (8.7)$$

şeklinde elde edilir. Bu ortalama güç yoğunlukları yardımıyla, borunun Ox-ekseni üzerinde  $x$  kadarlık parçası dikkate alınmıyorsa, hesaplanan toplam güçler ise

$$W_{av,A} = \frac{1}{2Z} [1 - |R_0|^2] b \quad (8.8)$$



ve

$$W_{av,B} = \frac{1}{2Z} |T_0|^2 a \quad (8.9)$$

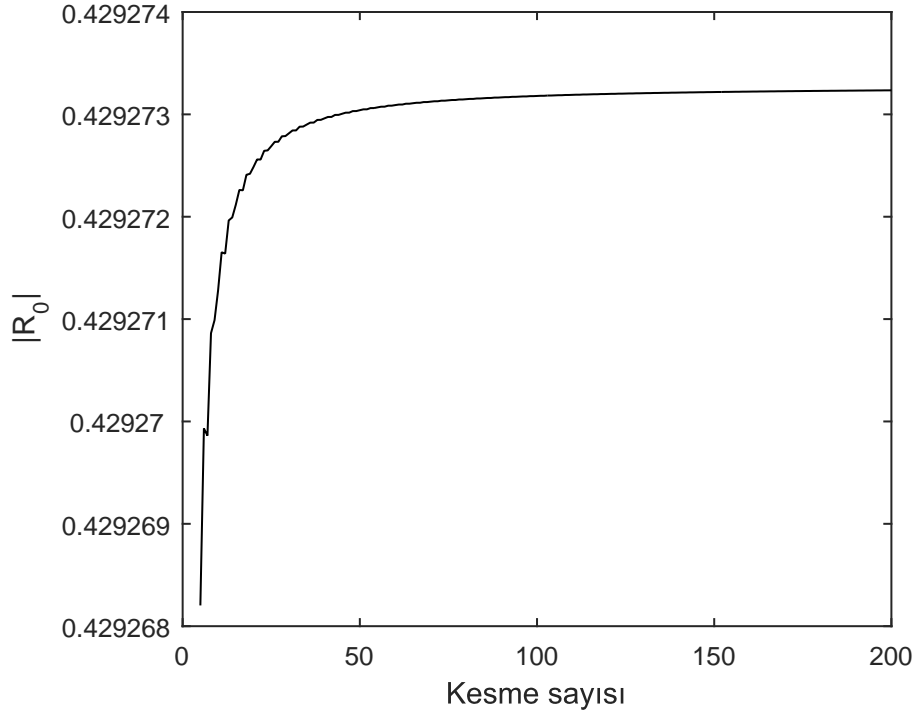
biçiminde olur. O halde enerjinin korunumu yasası gereği

$$[1 - |R_0|^2] b = |T_0|^2 a \quad (8.10)$$

bağıntısı sağlanmalıdır. Yapılan sayısal hesaplamalar ile bunun sağlandığı görülmüştür.

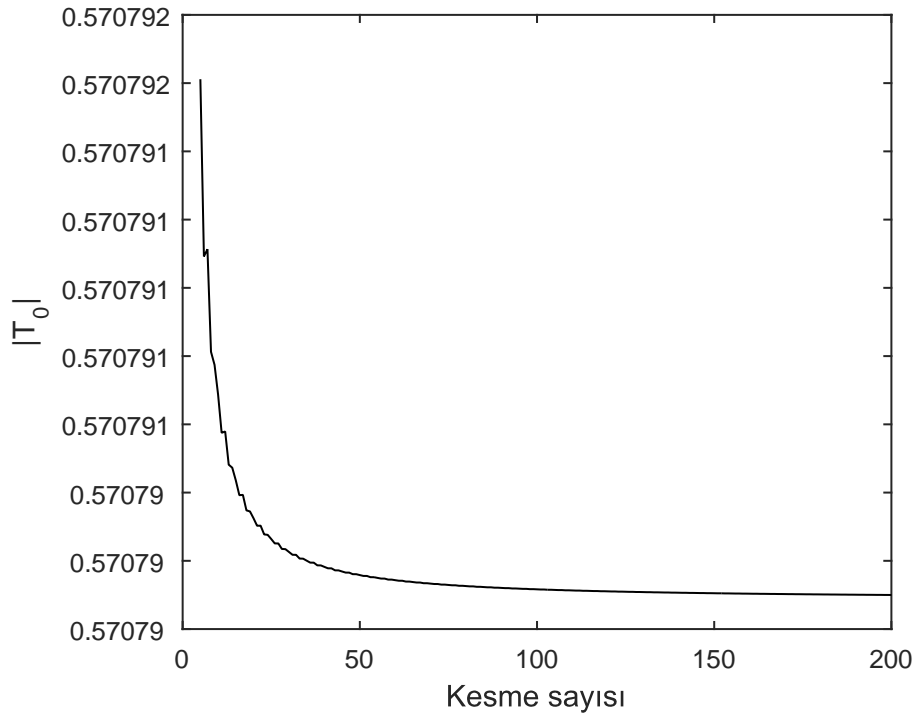
Bu bölümde yer verilmiş olan grafiklerde, her iki probleme ilişkin  $T$  iletim katsayısı ve  $R$  yansımaya katsayılarının kesit alanların oranına ve kesme sayısına göre değişimleri gösterilmiştir.

Şekil 8.1, Şekil 8.2, Şekil 8.3 ve Şekil 8.4'te görüldüğü üzere, kesme sayısının yaklaşık olarak 80 alınması, sonuçların yakınsaması için yeterlidir. Bundan daha yüksek kesme sayıları için sonuçlar da kayda değer bir değişiklik gözlemlenmemektedir.



Şekil 8.1 Birinci problemde kesme sayısının yansımaya katsayısına etkisi.

Şekil 8.5 ile gösterildiği üzere, birinci problemde alan genişlemesi oranı, bir başka deyişle,  $b/a$  arttıkça temel moda ilişkin yansımaya katsayısının genliği de artmaktadır. Buna mukabil, Şekil 8.6'da görüldüğü üzere, iletim katsayısının genliği ise azalmaktadır. Öte

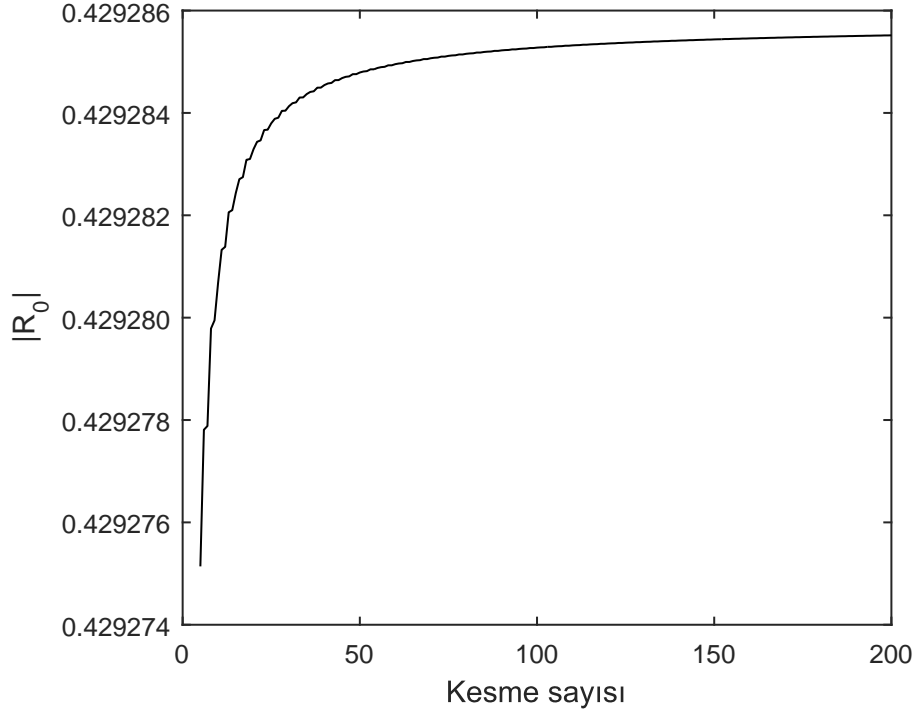


Şekil 8.2 Birinci problemde kesme sayısının iletim katsayısına etkisi.

yandan, ikinci problemde de  $b/a$  oranı arttıkça yansıma katsayısı artmakta, iletim katsayısı azalmaktadır. Bu durumlar Şekil 8.7 ve Şekil 8.8’de görülmektedir. Bu demektir ki, birinci problemde görülen uygulama ile, akustik basıncın geri yansıması  $b/a$  azaltılarak düşürülebilirken, dışarıya yayılacak gürültü de  $b/a$  arttıkça azalacaktır. Aynı durum ikinci problemde görülen uygulamada da mevcuttur. Sayısal olarak bulunan sonuçlar aşağıdaki Çizelge 8.1, Çizelge 8.2, Çizelge 8.3 ve Çizelge 8.4’te de özetlenmiştir.

Çizelge 8.1 Birinci probleme ilişkin yansıma katsayısının genliği

Frekans	$b/a=2.5$	$b/a=2$	$b/a=1.5$
500 Hz	0.4315	0.3355	0.2017
1000 Hz	0.4388	0.3394	0.2028
1500 Hz	0.4525	0.3465	0.2048
2000 Hz	0.4761	0.3576	0.2077
2500 Hz	0.5187	0.3750	0.2117
3000 Hz	0.6129	0.4028	0.2173



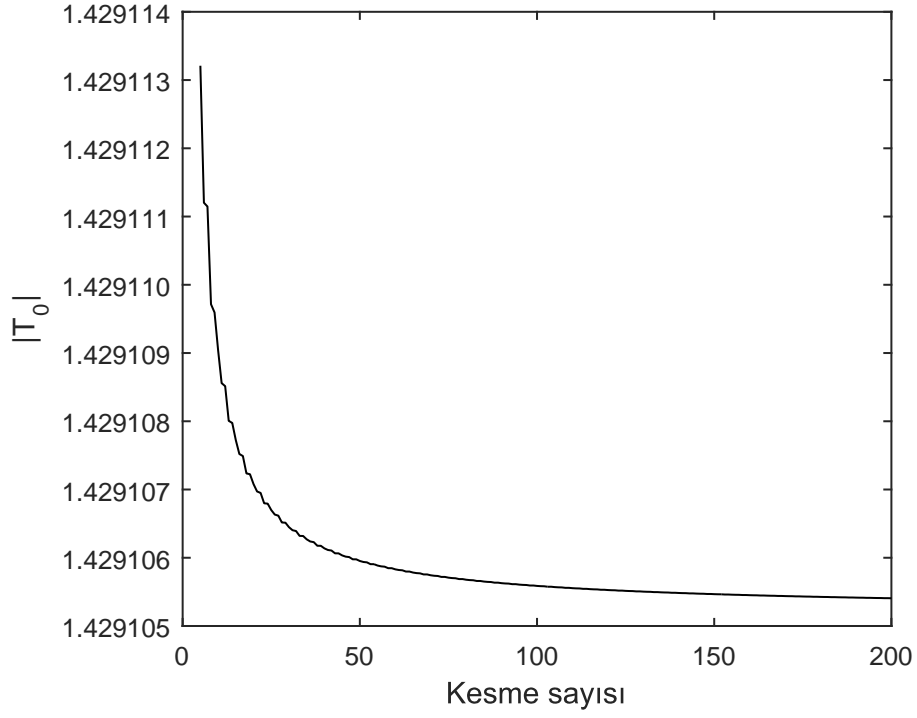
Şekil 8.3 İkinci problemde kesme sayısının yansımaya katsayısına etkisi.

Çizelge 8.2 Birinci probleme ilişkin iletim katsayısının genliği

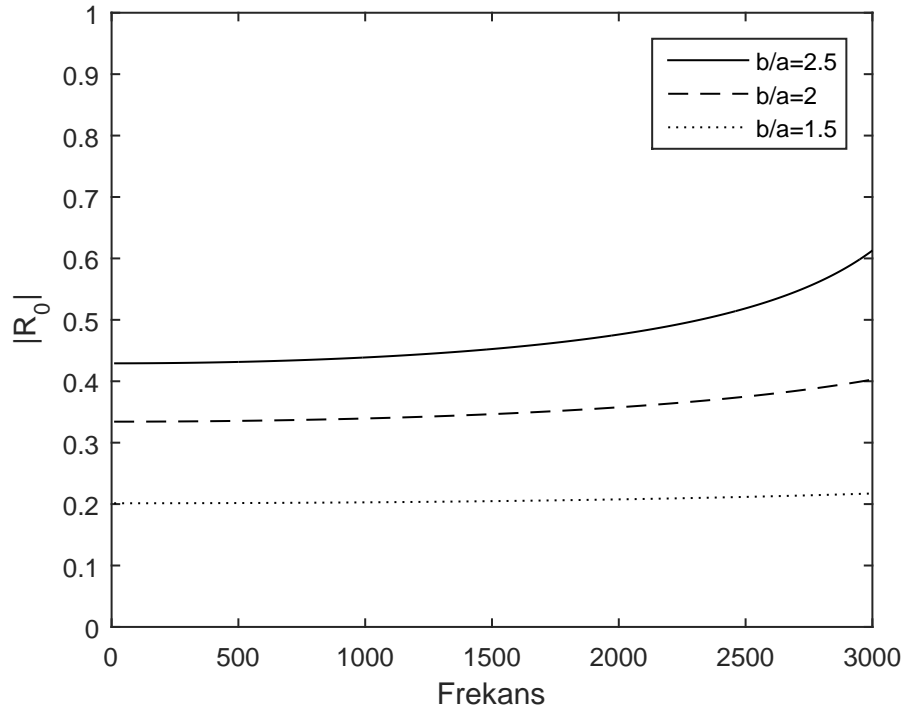
Frekans	b/a =2.5	b/a =2	b/a =1.5
500 Hz	0.5701	0.6655	0.7986
1000 Hz	0.5679	0.6645	0.7984
1500 Hz	0.5636	0.6627	0.7981
2000 Hz	0.5558	0.6597	0.7976
2500 Hz	0.5403	0.6549	0.7969
3000 Hz	0.4994	0.6466	0.7959

Çizelge 8.3 İkinci probleme ilişkin yansımaya katsayısının genliği

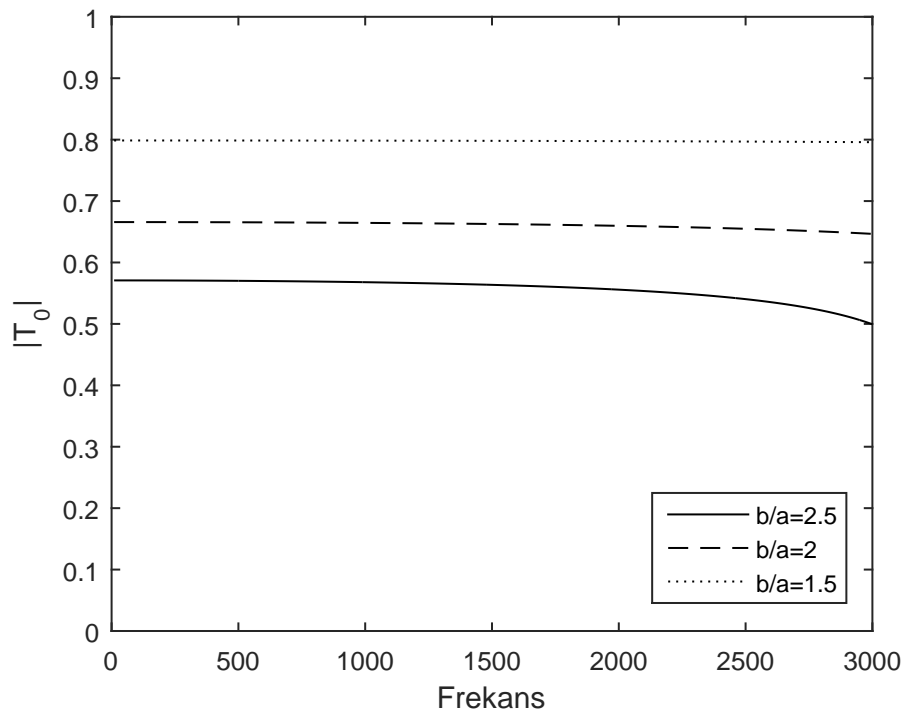
Frekans	b/a =2.5	b/a =2	b/a =1.5
500 Hz	0.4318	0.3357	0.2018
1000 Hz	0.4400	0.3403	0.2033
1500 Hz	0.4555	0.3486	0.2057
2000 Hz	0.4822	0.3618	0.2095
2500 Hz	0.5301	0.3824	0.214
3000 Hz	0.6348	0.4155	0.2200



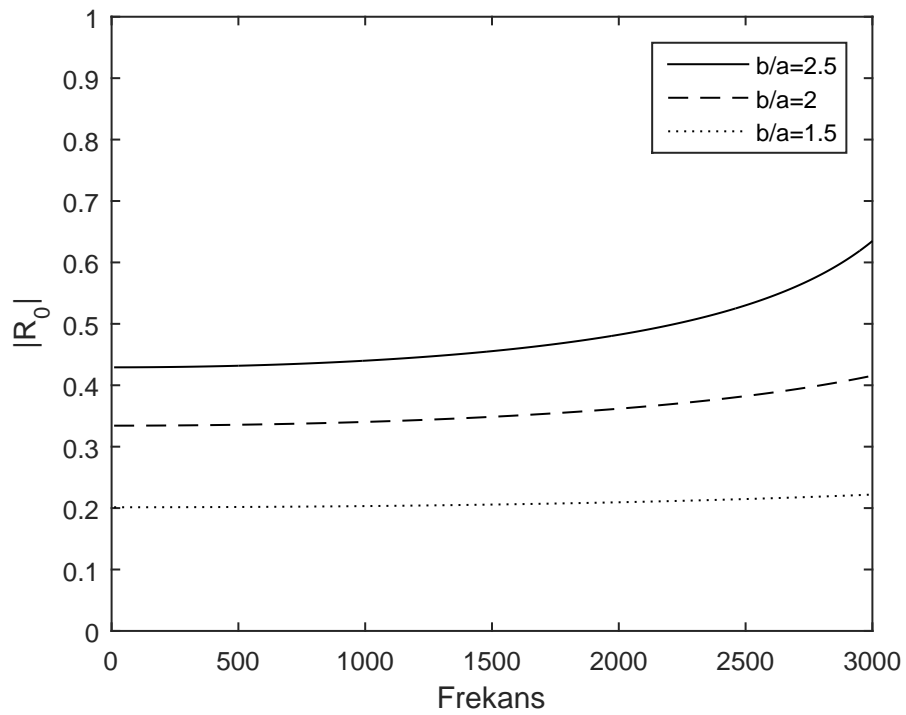
Şekil 8.4 İkinci problemde kesme sayısının iletim katsayısına etkisi.



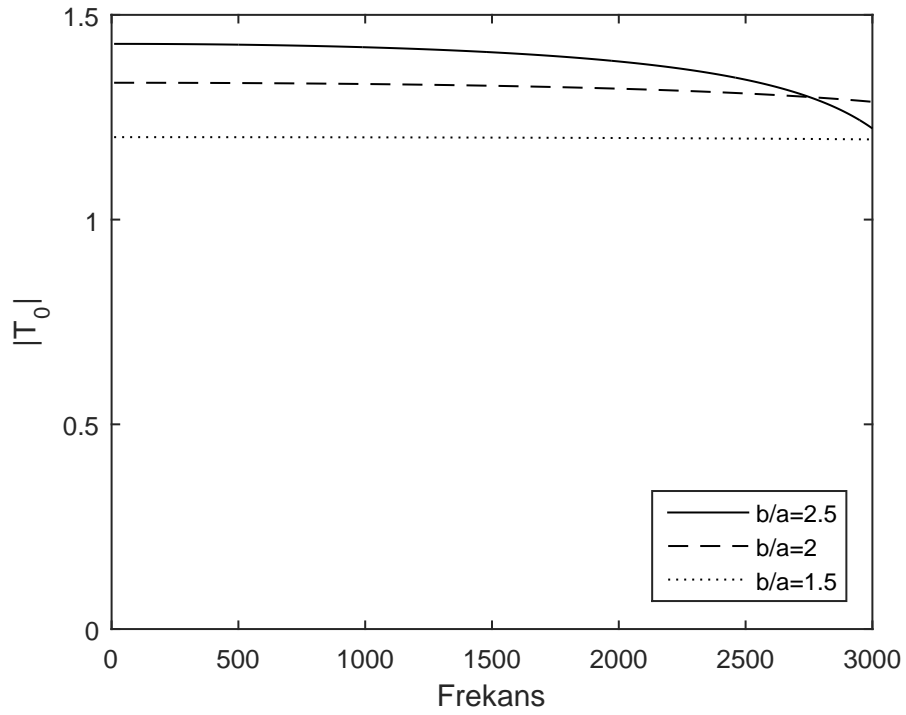
Şekil 8.5 Birinci problemde alan genişlemesinin yansımaya katsayısına etkisi.



Şekil 8.6 Birinci problemde alan genişlemesinin iletim katsayısına etkisi.



Şekil 8.7 İkinci problemde alan daralmasının yansımaya katsayısına etkisi.



Şekil 8.8 İkinci problemde alan daralmasının iletim katsayısına etkisi.

Çizelge 8.4 İkinci probleme ilişkin iletim katsayısının genliği

Frekans	b/a =2.5	b/a =2	b/a =1.5
500 Hz	1.4272	1.3335	1.2012
1000 Hz	1.4209	1.3311	1.2009
1500 Hz	1.4086	1.3268	1.2002
2000 Hz	1.3862	1.3197	1.1993
2500 Hz	1.3417	1.3080	1.1979
3000 Hz	1.2226	1.2876	1.1956

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Gabard, G., Astley, R.J., 2008, A computational mode-matching approach for sound propagation in three-dimensional ducts with flow, *Journal of Sound and Vibration* 315, 1103–1124, DOI: 10.1016/j.jsv.2008.02.015. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X0800148X>, erişim tarihi: 10.10.2017.
- Lawrie, J. B., 2013, Analytic mode-matching for acoustic scattering in three dimensional waveguides with flexible walls. Application to a triangular duct, *Wave Motion* 50, 542–557, DOI: 10.1016/j.wavemoti.2012.12.002. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165212512001424>, erişim tarihi: 10.10.2017.
- Lighthill, M. J., 1952, On sound generated aerodynamically, Part I. General theory. *Proceedings of the Royal Society A* 211, 564–587, DOI: 10.1098/rspa.1952.0060. URL: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/211/1107/564>, erişim tarihi: 10.10.2017.
- Mitra, R. , Lee, S.W., 1971, *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*, McMillan and Company. URL: <https://www.amazon.com/Analytical-techniques-Macmillan-electrical-science/dp/B0006C0E1M>, erişim tarihi: 10.10.2017.
- Munt, R., 1977, The interaction of sound with a subsonic jet issuing from a semi-infinite cylindrical pipe, *Journal of Fluid Mechanics* 83, 609–640, DOI: 10.1017/S0022112077001384. URL: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/the-interaction-of-sound-with-a-subsonic-jet-issuing-from-a-semi-infinite-cylindrical-pipe/C5F8426D0B7E6CD7FBDA76FFEE7FB812>, erişim tarihi: 10.10.2017.
- Nilsson, B., Brander, O., 1980a, The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining. I-Modes in an infinite duct, *IMA Journal of Applied Mathematics* 26.3, 269–298, DOI: 10.1093/imamat/26.3.269. URL: <https://academic.oup.com/imamat/article-abstract/26/3/269/648066/The-Propagation-of-Sound-in-Cylindrical-Ducts-with?redirectedFrom=fulltext>, erişim tarihi: 10.10.2017.
- Nilsson, B., Brander O., 1980b, The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining. II-Bifurcated ducts. *IMA Journal of Applied Mathematics* 26.4, 381–410, DOI: 10.1093/imamat/26.4.381. URL: <https://academic.oup.com/imamat/article-abstract/26/4/381/784179/The-Propagation-of-Sound-in-Cylindrical-Ducts-with?redirectedFrom=fulltext>, erişim tarihi: 10.10.2017.
- Nilsson, B., Brander O., 1981a, The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining. III-Step discontinuities, *IMA Journal of Applied Mathematics* 27.1, 105–132, DOI: 10.1093/imamat/27.1.105. URL: <https://academic.oup.com/imamat/article->

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

abstract/27/1/105/740156/The-Propagation-of-Sound-in-Cylindrical-Ducts-with?redirectedFrom=fulltext, erişim tarihi: 10.10.2017.

Nilsson, B., Brander O., 1981b, The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining. IV-Several interacting discontinuities, *IMA Journal of Applied Mathematics* 27.3, 263–290, DOI: 10.1093/imamat/27.3.263. URL: <https://academic.oup.com/imamat/article-abstract/27/3/263/625053/The-Propagation-of-Sound-in-Cylindrical-Ducts-with?redirectedFrom=fulltext>, erişim tarihi: 10.10.2017.

Rawlins, A. D., 1995, A bifurcated circular waveguide problem, *IMA Journal of Applied Mathematics* 54.1, 59–81, DOI: 10.1093/imamat/54.1.59. URL: <https://academic.oup.com/imamat/article-abstract/54/1/59/660570/A-bifurcated-circular-waveguide-problem?redirectedFrom=PDF>, erişim tarihi: 10.10.2017.

Rawlins, A. D., 2007, Wave propagation in a bifurcated impedance-lined cylindrical waveguide, *Journal of Engineering Mathematics* 59, 419–435, DOI: 10.1007/s10665-007-9172-4. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10665-007-9172-4>, erişim tarihi: 10.10.2017.

Rayleigh, L., 1896, *The Theory of Sound*, London Macmillan, URL: <https://archive.org/details/theorysound06raylgoog>, erişim tarihi: 10.10.2017.

Warren D. P., Lawrie, J. B., Mohamed, I.M., 2002, Acoustic scattering in waveguides that are discontinuous in geometry and material property, *Wave Motion* 36.2, 119–142, DOI: 10.1016/S0165-2125(02)00005-7. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165212502000057>, erişim tarihi: 10.10.2017.