Lie Cebirlerin Kuadratik Modüllerinin Noktasal Homotopi Teorisi

Emre Özel

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Ağustos 2017

Pointed Homotopy Theory of Quadratic Modules of Lie Algebras

Emre Özel

MASTER OF SCIENCE THESIS

Mathematics - Computer Department

August 2017

Lie Cebirlerin Kuadratik Modüllerinin Noktasal Homotopi Teorisi

Emre Özel

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Ummahan Ege Arslan

“Bu Tez ESOGÜ BAP tarafından 2017-1574 no’lu proje çerçevesinde desteklenmiştir.”

Ağustos 2017

ONAY

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Emre Özel'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Lie Cebirlerin Kuadratik Modüllerinin Noktasal Homotopi Teorisi**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Ummahan Ege Arslan

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Ummahan Ege Arslan

Üye : Doç. Dr. İlker Akça

Üye : Prof. Dr. Erdal Ulualan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Ummahan Ege Arslan danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Lie Cebirlerin Kuadratik Modüllerinin Noktasal Homotopi Teorisi**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. …/…/20…

Emre Özel

ÖZET

Bu tezde amacımız Lie cebirlerin kuadratik modül morfizmlerinin noktasal homotopilerini tanımlamak ve bu kavramı kullanarak bir gruboid yapısı inşa etmektir.

Bunun için öncelikle gerekli temel kavramlara ver verilerek, bazı tanımlamaların ve ispatların daha kolay işlemsiz bir şekilde yapılabilmesi için herhangi bir kuadratik modül üzerinde 1-, 2- ve 3- simpleks olarak adlandırılacak olan yeni cebirsel yapılar ve bunların geometrik gösterimleri oluşturulmuştur.

Daha sonra Lie cebirlerin çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopilerine ve bunlar sayesinde oluşturulan gruboid yapısına yer verilmiştir.

Problemin Lie cebirler üzerinde kuadratik modül yapısı için çözümünün benzer olmadığı gözlenmiştir. Kuadratik modül morfizmleri için bir homotopi bağıntısı tanımlanmış, kısıtlanmış durumda bunun bir denklik bağıntısı olduğu kanıtlanmıştır.

Sonuç olarak bu kısıtlamayla beraber bir gruboid yapısı elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuadratik Modüller, Homotopi, Kuadratik Derivasyon, Gruboid

SUMMARY

Our aim in this thesis is to define pointed homotopy of quadratic module morphism of Lie algebras and to construct the groupoid structure using this concept. For this, firstly we recall the fundamental notions and construct algebraic structures called 1-, 2- and 3- simplex in a quadratic module.

Secondly, the homotopies of the crossed module morphisms of Lie algebras and the groupoid structure constructed by them are mentioned.

It is observed that the solution of problem for quadratic module of Lie algebras isn't similar. We construct for maps of quadratic modules a homotopy relation, and prove that it yields an equivalence relation in restricted cases (freeness up to order one of the domain quadratic module).

Finally we get a groupoid structure for quadratic modules morphisms in restricted case.

Keywords: Quadratic Modules, Homotopy, Quadratic Derivation, Groupoid

TEŞEKKÜR

Beni bu çalışmaya sevk eden ve bu tezin hazırlanması sırasında derin entelektüel bilgi birikimiyle bana her daim yardımcı olan sayın danışman hocam Doç. Dr. Ummahan Ege Arslan'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca, özellikle de bu çalışma sırasında yardımlarını esirgemeyen, her zaman bana destek olan sayın hocalarım Doç. Dr. İlker Akça ve Arş. Gör. Dr. Kadir Emir'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca yüksek lisans tez çalışmam sırasında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu'na, 2017-1574 no'lu proje çerçevesindeki destekleri ve yardımları için teşekkür ederim.

Son olarak hayatımdaki en büyük hazinem olan biricik ailem iyi ki varsınız, siz olmasaydınız bunların hiç birini başaramazdım. **Teşekkürler...**

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . **vi**

SUMMARY . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . **ix**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **3**

3. BULGULAR VE TARTIŞMA **4**

4. ÖN BİLGİLER **6**

4.1. Giriş 6

4.2. Lie Cebirler İle İlgili Bazı Temel Kavramlar 6

4.3. Lie Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller 8

4.4. Lie Cebirler Üzerinde Kuadratik Modüller 10

4.5. Simplisel Lie Cebirler 15

4.6. Homotopi 17

5. 0-, 1-, 2- ve 3- SİMPLEKSLER **19**

5.1. Giriş 19

5.2. 0- Simpleksler 19

5.3. Yarı-direkt Lie Çarpımı 20

5.4. 1- ve 2- Simpleksler 22

5.5. 3- Simpleksler 29

6. LIE CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL MORFİZMLERİNİN HOMOTOPİSİ ve GRUBOİD YAPISI **41**

6.1. Giriş 41

6.2. Lie Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopisi . . 41

6.3. Gruboid 44

7. LIE CEBİRLER ÜZERİNDE KUADRATİK MODÜLLERİN MORFİZMLERİNİN HOMOTOPİSİ ve GRUBOİD YAPISI **49**

7.1. Giriş 49
7.2. Lie Cebirler Üzerinde Kuadratik Modül Morfizmlerinin Homotopisi 49
7.3. Gruboid 57
7.3.1. XMod$_L$ homotopisi- QM$_L$ homotopisi analizi 57
7.3.2. Anahtar fikir 58
7.3.3. Homotopilerin kompozisyonu 59
7.3.4. Ters kuadratik derivasyon 64
7.3.5. Kompozisyonun asosyatifliği 65

8. SONUÇ VE ÖNERİLER **72**

KAYNAKLAR DİZİNİ **73**

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Günlük hayatımızı kolaylaştırmak için başvurduğumuz sınıflandırma fikri matematikte de sıklıkla kullanılan bir işlemdir. Topolojide, homotopi sınıflandırma fikri; manifoldlar arasındaki morfizmler göz önüne alındığında ‘‘doğal” olarak ortaya çıkar. Birbirine ‘‘yakın olan” morfizmleri benzer olarak düşünmek normal bir durumdur. Homotopi denkliğini basit olarak tanımlarsak; bir topolojik uzaydan diğerine tanımlanan iki sürekli fonksiyon, eğer biri diğerine ‘‘sürekli deforme” olabiliyorsa bu iki deformasyon arasındaki yapıya homotopi denir. Bu deforme olmuş iki fonksiyon ise homotoptur. Topolojik uzayları homotopik olarak sınıflandırmadaki temel amaç daha güçlü bir denklik bağıntısı olan homeomorfik olarak sınıflandırılan cebirsel değişmezleri bulmaktır. Bu değişmezlerin en önemlileri homotopi grupları, (co)homoloji grupları ve halkalarıdır.

Topoloji, cebirsel topoloji, cebirsel geometri ve kategori teorisi gibi matematiğin birçok alanında önemli bir yere sahip olan homotopi teorisinin, 1931’de Hopf fibrasyonunun (Hopf demeti, Hopf morfizmi) keşfi ile başladığı söylenebilir. Bugüne kadar birçok cebirsel yapı üzerinde homotopi çalışılmış olup bu yapılar üzerinde kendine has cebirsel ve kategoriksel özelliklere göre homotopi teorisi oluşturulmuştur. Gruplar üzerinde çaprazlanmış ve 2-çaprazlanmış modüller bu yapılara örnek olarak verilebilir. Çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak Whitehead (1941, 1949) tarafından gruplar üzerinde homotopi 2-tipler (zayıf homotopi) için cebirsel bir model olarak tanımlanmıştır. Yine gruplar üzerinde Conduché (1984) homotopi 3-tipler için bir model teşkil eden 2-çaprazlanmış modül yapısını tanımlamıştır. Gruplar üzerine çaprazlanmış kompleks ve dolayısıyla çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi Brown ve Higgins (1987) tarafından tanımlanmıştır. Gruplar üzerinde 2-çaprazlanmış modül morfizmleri için homotopi ve 2-homotopi kavramlarını ise Martins (2011) tanımlamıştır. Sonrasında Gohla ve Martins (2013) bu homotopi bağıntısının bir denklik bağıntısı olabilmesi için gerekli şartları elde etmişler ayrıca Qullen’in (1967) geliştirdiği model kategori yapısı ile arasındaki ilişkiyi ele almışlardır.

Gruplar üzerinde Peiffer nilpotent ön-çaprazlanmış modüller ilk olarak Baues (1991) tarafından tanımlanmış ve bu tanımlama ile kuadratik modül kavramını ortaya çıkarmıştır. Bu yapı daha sonra Ulualan ve Uslu (2011) tarafından Lie cebirlere uyarlanmıştır.

Bu tezin temel amacı Lie cebirler üzerinde kuadratik modül morfizmlerinin noktasal homotopisini tanımlamak ve bu kavramı kullanarak kategoriksel cebirde önemli bir yeri olan gruboid yapısını inşa etmektir. Ancak, herhangi iki keyfi kuadratik modül arasındaki morfizmler kümesi üzerinde tanımlı homotop olma bağıntısı bir denklik bağıntısı olarak nitelendirilemez. Dolayısıyla gruboid yapısı oluşturulamamaktadır. Bu problemi çözmek için gerekli bazı kısıtlamalar belirlenerek tanımlanan denklik bağıntısı ile gruboid yapısı elde edilmiştir. Bunların tanımlanabilmesi ve ispatların daha kolay işlemsiz bir şekilde tamamlanabilmesi için öncelikle herhangi bir Lie cebirin kuadratik modülü üzerinde 1-, 2- ve 3-simpleks olarak adlandırılan cebirsel yapılara ve bu yapıların geometrik gösterimlerine ihtiyaç duyulacaktır. Problemin daha iyi anlaşılması için kuadratik modülün bir alt basamağı olan çaprazlanmış (Lie) modüller için mevcut problemin çözümüne yer verilecektir (Akça ve Sidal, 2016). Bu karşılaştırma sayesinde problem daha iyi betimlenecektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Çaprazlanmış modüller (gruplar üzerinde) ilk olarak Whitehead (1941, 1946, 1949) tarafından homotopi bağlantılı 2-tipler için cebirsel model olarak tanımlanmıştır. Daha sonra Conduché (1984) homotopi 3-tiplere model oluşturmak için yine gruplar üzerinde yeni bir cebirsel yapı olan 2-çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır. Bu gelişmeler ile paralel bir şekilde Baues (1991), 2-çaprazlanmış modülden yolla çıkarak homotopi bağlantılı 3-tipler için en uygun cebirsel yapı olacak olan kuadratik modülleri tanımlamıştır. Kuadratik zincir kompleksleri, çaprazlanmış zincir komplekslerinden daha iyi bir tanımlama gücüne sahiptir. Bunun nedeni ise; 4-boyutlu durum söz konusu olduğunda Hopf dönüşümünün ($S^3 \to S^2$) kuadratik özelliklerinde dolayı ekstra ‘‘kuadratik’’ bilgiye ihtiyaç duyulmasıdır. Baues bu çalışmasında 4 boyutlu komplekslerin sınıflandırılması için ‘‘Kuadratik yapıyı’’ ele alır. Ulualan (2004) bu yapıyı değişmeli cebirler üzerinde incelemiştir. Daha sonra Ulualan ve Uslu (2011) kuadratik modül yapısını Lie cebirlere uyarlamıştır.

Gruplar üzerine çaprazlanmış kompleks ve dolayısıyla çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi Brown ve Higgins (1987) tarafından tanımlanmıştır. Herhangi bir kategoride homotopi teorisi için bu kategorinin model kategori oluşu önemlidir. Quillen (1967) simplisel gruplar kategorisinin bir model kategori olduğunu göstermiştir. Bu gelişmeler ışığında çaprazlanmış modül ve 2-çaprazlanmış modül kategorileri ile simplisel gruplar kategorisinin denkliği ele alınarak çaprazlanmış modül ve 2-çaprazlanmış modül kategorilerinin de birer model kategori oldukları görülmüştür (Cabello ve Garzon, 1994; 1995). Bununla birlikte gruplar ve gruboidler üzerinde çaprazlanmış modül ve 2-çaprazlanmış modül kategorileri için model kategori yapısı bir çok çalışmada ele alınmıştır (Noohi, 2007; Moerdijk ve Svensson, 1993; Brown ve Golansinski, 1989).

Gruplar üzerinde 2-çaprazlanmış modül için homotopi ve 2-homotopi yapısını ise Martins (2011) tanımlamıştır. Sonrasında Gohla ve Martins (2013) bu homotopi bağıntısının bir denklik bağıntısı olabilmesi için gerekli şartları elde etmişler ve 2-çaprazlanmış modül kategorisinden farklı bir model kategori yapısı inşaa etmişlerdir. Benzer çalışmaları Akça vd. (2015) 2-çaprazlanmış modül için değişmeli cebirlerde tanımlanmıştır, Lie cebirler üzerinde çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopi yapısını ise Akça ve Sidal (2016) incelemiştir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

M ve N iki topolojik uzay homeomorf $(M \simeq N)$ ise, aralarında $f : M \to N$, $g : N \to M$ sürekli fonksiyonları; $fg = 1_N$, $gf = 1_M$ şartlarını sağlayacak şekilde mevcuttur. Bu tür homeomorfik uzayların sınıflandırmasına homeomorfizm tip denir. Cebirsel topolojinin başlangıç problemlerinden biri olan sonlu sayıda çok yüzlülerin (polyhedra) homeomorfizm tip olarak sınıflandırılmasıdır (Seifert ve Threlfall, 1934). Böyle bir sınıflandırma çok az sayıdaki özel durum (örnek) için geçerlidir. Bu yüzden sınıflandırma problemi için homotopi tip sınıflandırması, homeomorfizm tip sınıflandırmasından daha da avantajlıdır.

Homotopi, sürekli deforme olma fikri üzerine kurulmuştur. Bu bakımdan homotopi tip teorisi, topolojinin ve geometrinin en temel konularından biridir. Bu teorinin merkezinde cebirsel değişmez kavramı yer alır. Cebirsel değişmez bakımından çok yüzlülerin homotopi tipleri, çoğu geometrik yapıların temelini oluşturan prototiplerdir. Buradaki temel problem ise çokyüzlülerin homotopiksel denkliğe göre sınıflandırılması ve sınıflandırılan cebirsel değişmezleri bulmaktır. Bu tür değişmezlere homotopi değişmezleri denir.

Whitehead'e göre (1950): "Cebirsel homotopinin temel amacı homotopi teorisine eş değer cebirsel bir teori oluşturmaktır." Bu amaçla Whitehead (1941, 1949) gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır. Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül (Brown vd. 2011): P, M birer grup olmak üzere P nin M üzerine "$*$" etkisi ile birlikte aşağıdaki eşitlikleri sağlayan bir $\mu : M \to P$ grup homomorfizmi ile ifade edilir ve $\mathcal{M} = (\mu : M \to P, *)$ biçiminde gösterilir.

$$XMod1)\ \ \mu(p * m) = p\mu(m)p^{-1}, \qquad p \in P, m \in M$$

$$XMod2)\ \ \mu(m) * m' = mm'm^{-1}, \qquad m, m' \in M$$

Daha sonra ise Mac Lane ve Whitehead (1950) çaprazlanmış modülün, homotopi 2-tipler için tamamen cebirsel bir model olduğunu göstermişlerdir. $Ho(XMod)$ çaprazlanmış modüllerin kategorisinin zayıf eşdeğerliliğe (denkliğe) göre lokalizasyon kategorisi olsun, bu durumda aşağıdaki gibi bir denklik vardır (Baues 1991).

$$2 - tip \xrightarrow{\sim} Ho(XMod)$$

Ama 4-boyutlu durum söz konusu olduğunda ekstra ‘‘kuadratik’’ bilgiye ihtiyaç duyulur. Bu yüzden Baues (1991), Conduché‘nin (1984) tanımladığı alternatif bir model olan 2-çapralanmış modülü yapısını göz önüne alarak gruplar üzerinde Peiffer nilpotent ön-çaprazlanmış modüleri tanımlamış ve bu tanımlama ile kuadratik modül kavramını ortaya çıkarmıştır. Dolayısıyla homotopi 3-tipler için model oluşturmuştur.

$$3-tip \xrightarrow{\sim} Ho(QM)$$

Daha sonra bu yapıyı Ulualan ve Uslu (2011) Lie cebirler üzerinde tanımlayıp özelliklerini incelemişlerdir.

$M = (M_n, d_n^i, s_n^i)$ şeklinde gösterilen simplisel gruplar, noktasal (pointed) homotopi tipleri için model oluşturur (Quillen 1967). Bilindiği üzere çaprazlanmış modüller kategorisi, Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan simplisel gruplar kategorisine denktir. Bu teoremin Lie cebir versiyonunu Kassel ve Loday tanımlamıştır (1982). Benzer bir çalışmada ise Ellis (1993) Lie cebirler üzerinde 2- çaprazlanmış modüller kategorisi, Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan simplisel Lie cebirler kategorisine denk olduğunu göstermiştir. Gruplar üzerinde ise Conduché (1984) tarafından kanıtlanmıştır.

Çaprazlanmış modül ve 2-çaprazlanmış modül kategorileri ile simplisel gruplar kategorisinin denkliği ele alınarak çaprazlanmış modül ve 2-çaprazlanmış modül kategorilerinin birer model kategori oldukları görülmüştür (Cabello ve Garzon, 1994, 1995). 2-çaprazlanmış modül için homotopiyi ve 2-homotopiyi ise Martins (2011) tanımlamış sonrasında ise Gohla ve Martins (2013) bu homotopi bağıntısının bir denklik bağıntısı olabilmesi için gerekli şartları elde etmişler ve bununla birlikte 2-çaprazlanmış modül kategorisinden farklı bir model kategori inşa etmişlerdir. Benzer bir çalışmayı ise Akça vd. (2015) değişmeli cebirler üzerinde 2-çaprazlanmış modül için tanımlamıştır.

Bu çalışmada ilk olarak Lie cebirlerin kuadratik modül morfizmlerinin kümesi üzerinde homotopi tanımlanarak bu kavramdan hareketle gruboid yapısı oluşturmak amaçlanmıştır. Lie cebirlerin çaprazlanmış modülleri için benzer problemin çözümü incelendiğinde Lie cebirlerin kuadratik modülleri için tanımlanan homotopi kavramının gruboid yapısı oluşturmayacağı öngörülmüştür. Bunun nedeni kuadratik modülün bir nil(2) modül olup, sadece ön-çaprazlanmış modül yapısını içermesinden kaynaklanmaktadır. Bu bulgudan hareketle problemin çözmü için çalışmaya dahil edilen serbest$_1$ Lie kuadratik modül kavramı ile 1-, 2- ve 3- simpleks ya da doğru, üçgen ve tetrahedron uzayları olarak adlandırılan yeni cebirsel yapılar büyük rol oynayacaktır.

4. ÖN BİLGİLER

4.1 Giriş

Bu bölümde tezde kullanılacak olan Lie cebir yapısı, Lie cebirler üzerinde çaprazlanmış modül, nilpotent Lie cebirleri, Lie cebirler üzerinde kuadratik modül, simplisel Lie cebirler ve homotopi kavramı ele alınacaktır.

4.2 Lie Cebirler İle İlgili Bazı Temel Kavramlar

Bu bölümde Bourbaki'de (1989) yer alan Lie cebir hakkındaki kavramlardan tez için gerekli olan temel bilgiler verilecektir.

Tanım 4.1: K birimli, değişmeli halka ve M de bir K-modül olsun. M nin üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $[-,-] : M \times M \to M$

$$(m,m') \in M \times M \longmapsto [m,m'] \in M$$

dönüşümü tanımlı ise M ye K üzerinde bir Lie cebir denir.

i) $[-,-]$ **braket** dönüşümü bilineerdir: Yani her $k,k' \in K$ ve $m,m',m'' \in M$ için:

1. $[km + k'm', m''] = k[m,m''] + k'[m',m'']$
2. $[m'', km + k'm'] = k[m'',m] + k'[m,m']$ olur.

ii) Alternatiflik: Her $m \in M$ için $[m,m] = 0$ olur.

iii) Jacobi Özdeşliği: Her $m,m',m'' \in M$ için;

1. $[m,[m',m'']] + [m',[m'',m]] + [m'',[m,m']] = 0$ veya
2. $[[m,m'],m''] + [[m',m''],m] + [[m'',m],m'] = 0$ olur.

Tanımın bir sonucu olarak **i)** ve **ii)** şartları düşünüldüğünde her $m,m' \in M$ için;

$$\begin{aligned} 0 &= [m+m', m'+m] \\ &= [m,m'] + [m',m'] + [m,m] + [m',m] \\ &= [m,m'] + [m'm] \end{aligned}$$

olup, buradan $[m, m'] = -[m', m]$ (**Anti-komütatiflik**) eşitliği elde edilir. Ayrıca $[-,-]$ dönüşümünün bilineerlik özelliğinden dolayı

$$[0, m] = 0 = [m, 0]$$

eşitlikleri geçerlidir.

Örnek 4.1: M , K üzerinde bir cebir olsun. Her $m, m' \in M$ için:

$$(m, m') \in M \times M \longmapsto [m, m'] = mm' - m'm \in M$$

şeklinde bir K-bilineer dönüşümü tanımlı olsun.

1) Alternatiflik:

$[m, m] = mm - mm = 0$

2) Jacobi Özdeşliği:

$$\begin{aligned}[m,[m',m'']]+[m',[m'',m']] + [m'',[m,m']] \\ &= [m, m'm'' - m''m'] + [m', m''m - mm''] + [m'', mm' - m'm] \\ &= m(m'm'' - m''m') - (m'm'' - m''m')m + m'(m''m - mm'') \\ &- (m''m - mm'')m' + m''(mm' - m'm) - (mm'' - m'm)m'' \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan M, $[-,-]$ K-bilineer dönüşümü ile birlikte bir Lie K-cebir olur.

Tanım 4.2: M bir Lie cebir olmak üzere, her $m, m' \in M$ için $[m, m'] = 0$ oluyorsa M ye Abelyen Lie cebir denir

Tanım 4.3: M ve M' , K üzerinde iki Lie cebir olsun. Her $m, m' \in M$ için $\partial([m, m']) = [\partial(m), \partial(m')]$ şeklinde tanımlı $\partial : M \to M'$ dönüşümüne Lie cebir homomorfizmi denir. Eğer ∂ birer-bir ve örten bir Lie cebir homomorfizmi ise ∂ a Lie cebir izomorfizmi denir. Bu durumda M ve M' izomorftur.

Tanım 4.4: M bir Lie cebir ve $N \subseteq M$ olsun. Her $n, n' \in N$ için $[n, n'] \in N$ ve N, M Lie cebrinin bir alt modülü oluyorsa N ye M nin alt Lie cebiri denir.

4.3 Lie Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak Whitehead (1949) tarafından gruplar üzerinde homotopi 2- tipler (zayıf homotopi) için cebirsel bir model olarak tanımlamıştır. Lie cebiri üzerinde çaprazlanmış modül kavramını ise Kassel ve Loday (1982) tarafından tanımlanmıştır.

Bu bölümde Lie cebirler üzerinde çaprazlanmış modül yapısı tanıtılacaktır. Önce bu yapı için gerekli olan, Lie cebirler için etki yapısı tanımlanacaktır.

Tanım 4.5: Z ve Y iki Lie cebir olsun.

$$\begin{aligned} Z \times Y &\longrightarrow Y \\ (z, y) &\longmapsto z * y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bilineer dönüşümü her $z, z' \in Z$ ve $y, y' \in Y$ için;

L1. $z * [y, y'] = [z * y, y'] + [y, z * y']$

L2. $[z, z'] * y = z * (z' * y) - z' * (z * y)$

şartlarını sağlıyorsa Z nin Y üzerinde bir sol etkisi olarak adlandırılır. Benzer şekilde Z nin Y üzerinde bir sağ etkisi de tanımlanabilir.

Tanım 4.6: Z ve Y iki Lie cebir olmak üzere, $\partial : Y \to Z$ bir Lie cebir homomorfizmi ve Z nin Y üzerinde $''*''$ sol etkisi ile birlikte her $z \in Z$, $y, y' \in Y$ için:

$XMod_L1)$ $\partial(z * y) = [z, \partial(y)]$

$XMod_L2)$ $\partial(y) * y' = [y, y']$

şartlarını sağlıyor ise (Y, Z, ∂) üçlüsüne Lie cebirler üzerinde çaprazlanmış modül denir. Eğer sadece birinci şartı sağlıyorsa (Y, Z, ∂) üçlüsüne Lie cebirler üzerinde ön-çaprazlanmış modül denir.

Not 4.1: Tezin geri kalan bölümlerinde genellikle esas alınan K değişmeli ve birimli halka üzerinde tanımlı Z, Y gibi Lie cebirlerinden çoğu zaman sadece “Lie cebiri” olarak bahsedilecektir.

Örnek 4.2: Z bir Lie cebir ve M, Z nin bir ideali olsun. $i : M \to Z$ içine dönüşümü ve Z nin M üzerine etkisi her $z \in Z, m \in M$ için;

$$\begin{aligned} * : Z \times M &\longrightarrow M \\ (z, m) &\longmapsto [z, m] \end{aligned}$$

şeklinde Lie çarpımı olarak verilsin. Her $z \in Z$ ve $m, m_1, m_2 \in M$ için;

$XMod_L 1)$

$$\begin{aligned} i(z * m) &= i([z, m]) \\ &= [z, m] \\ &= [z, i(m)] \end{aligned}$$

$XMod_L 2)$

$$\begin{aligned} i(m_1) * m_2 &= m_1 * m_2 \\ &= [m_1, m_2] \end{aligned}$$

şartlarını sağladığından dolayı (M, Z, i) bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 4.3: Herhangi bir Y Z-modülü her $y, y' \in Y$ için $[y, y'] = 0$ işlemiyle bir Lie cebir olup $0 : Y \to Z$ sıfır dönüşümü bir Lie cebirler üzerinde çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Tanım 4.7: (Y, Z, ∂) ve (Y', Z', ∂') Lie cebirleri üzerinde birer çaprazlanmış modül olsun. $f_1 : Y \to Y'$ ve $f_0 : Z \to Z'$ Lie cebir morfizmleri için:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_1"'] & Z \arrow[d, "f_0"] \\ Y' \arrow[r, "\partial'"'] & Z' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ve her $z \in Z, y \in Y$ için;

$$f_1(z * y) = f_0(z) * f_1(y)$$

şartını sağlıyorsa $f = (f_1, f_0)$ ikilisine bir çaprazlanmış modül morfizmi denir ve $f : (Y, Z, \partial) \to (Y', Z', \partial')$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.8: **Objeleri** Lie cebirlerin çaprazlanmış modülleri ve **morfizmleri** ise Lie cebirlerin çaprazlanmış modül morfizmi olan kategoriye Lie cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisi denir ve $\mathbf{XMod}_L$ şeklinde gösterilir. Bu kategori $\mathbf{Pre\text{-}XMod}_L$ ile gösterilen ön-çaprazlanmış modüller kategorisinin (Kategorinin objeleri sadece $XMod_L 1)$ şartını sağlar.) alt kategorisidir.

$$\mathbf{XMod}_L \subseteq \mathbf{Pre\text{-}XMod}_L$$

4.4 Lie Cebirler Üzerinde Kuadratik Modüller

Whitehead (1941, 1949) çaprazlanmış modül ve çaprazlanmış zincir kompleks yapısını kullanarak 3-boyutlu komplekslerin homotopi tiplerini tanımlamıştır. Baues (1991) ‘‘kombinatoryal’’ homotopi teorisindeki gelişmelere dayanarak 4-boyutlu komplekslerin homotopi tipleri için aşikâr olmayan temel grup yapısı ile birlikte minimal bir cebirsel model tanımlamıştır ve bu yapıyı kuadratik zincir kompleksi olarak adlandırmıştır. Bu yapı Whitehead’in ünlü 3-boyutlu komplekslerin sınıflandırılması ile basit bağlantılı 4-boyutlu kompleksler arasında bağlantı sağlar. Yine Baues (1991) gruplar üzerinde Peiffer nilpotent ön-çaprazlanmış modülleri tanımlamıştır ve bu tanımlama ile komplekslerin ‘‘kuadratik’’ yapısı için gerekli yeni bir cebirsel model olan kuadratik modül kavramını ortaya çıkarmıştır. Gruplar üzerinde homotopi 3-tipleri için alternatif bir model olan 2-çaprazlanmış kompleks ve 2-çaprazlanmış modül yapısını ilk olarak Conduché (1984) tanımlamıştır. Arvasi ve Ulualan (2006) tarafından gruplar üzerinde 2-çaprazlanmış modüllerden kuadratik modüller kategorisine funktor tanımlamış ve bu iki cebirsel yapı arasındaki ilişkiyi ispatlanmıştır. Daha sonra Ulualan ve Uslu (2011) kuadratik modül yapısını Lie cebirlere uyarlamıştır.

Bu bölümde Ulualan ve Uslu (2011) tarafından tanımı verilen Lie cebirler üzerinde kuadratik modül yapısı tanıtılacaktır.

Tanım 4.9: L herhangi bir Lie cebir olsun. $n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ ve $L_1 = L, L_2 = [L, L], L_3 = [L, L_2]$, L_n kümesi $[l_1, [l_2 ... [l_{n-2}, [l_{n-1}, l_n]] ...]]$ elemanları tarafından üretilen L nin bir ideali olmak üzere;

$$...L_{n+1} \subset L_n \subset L_{n-1} \subset ... \subset L_2 \subset L_1 = L$$

şeklinde bir kapsama vardır.

Eğer $L_{n+1} = 0$ ise , L ye $nil(n)$ Lie cebiri veya nilpotent sınıfı n olan bir Lie cebiri denir.

Tanım 4.10: $\partial : C \to R$ bir Lie ön-çaprazlanmış modül olsun. Her $c_1, c_2 \in C$ için;

$$< -, - >: C \times C \longrightarrow C$$
$$(c_1, c_2) \longmapsto < c_1, c_2 >= \partial(c_1) * c_2 - [c_1, c_2]$$

dönüşümüne Peiffer çarpımı denir. Eğer bir ön-çaprazlanmış modül için Peiffer çarpımları sıfıra eşit ise bu durumda ön-çaprazlanmış modül bir çaprazlanmış modül olur. Yani,

$$\begin{aligned} 0 &= < c_1, c_2 > \\ &= \partial(c_1) * c_2 - [c_1, c_2] \end{aligned}$$

olup $\partial(c_1) * c_2 = [c_1, c_2]$ elde edilir.

$P_1(\partial) = C$ ve $P_2(\partial) =< C, C >$ kümesi, her $c_1, c_2 \in C$ için;

$$< c_1, c_2 >= \partial(c_1) * c_2 - [c_1, c_2]$$

Peiffer elemanı tarafından üretilen bir idealdir. $P_n(\partial)$ kümesi ise, $c_i \in C$ için

$$< c_1, c_2, ..., c_n >=< ... << c_1, c_2 >, c_3 > ...c_n > ... >$$

elemanı tarafından üretilir. Bu yüzden

$$...P_{n+1}(\partial) \subset P_n(\partial) \subset P_{n-1}(\partial) \subset ... \subset P_2(\partial) \subset P_1(\partial) = C$$

serisi oluşturulabilir.

Tanım 4.11: $\partial : C \to R$ bir Lie ön-çaprazlanmış modül olmak üzere, eğer $P_{n+1}(\partial) = 0$ ise ∂ a *nil(n)* modül veya Peiffer nilpotent sınıfı n olan Lie ön-çaprazlanmış modül denir. Bu tanıma göre Peiffer nilpotent sınıfı 1 olan ön çaprazlanmış modül bir çaprazlanmış modüldür. Yani

$$P_2(\partial) = 0$$

olup, her $c_1, c_2 \in C$ için,

$$< c_1, c_2 >= \partial(c_1) * c_2 - [c_1, c_2] = 0$$

olacaktır.

Bu durumda Lie cebirleri üzerinde $nil(n)$ modülleri kategorisi $XMod_L(n)$ olmak üzere;

$$XMod_L = XMod_L(1) \subset XMod_L(2) \subset ... \subset XMod_L\infty = Pre - XMod_L$$

şeklinde bir kapsama yazılabilir. Burada açıkça görüleceği gibi $nil(n-1)$ modüller kategorisi $XMod_L(n-1)$, $nil(n)$ modüller kategorisi ise $XMod_L(n)$ nin dolu (full) alt kategorisidir.

Bu kapsama bilgisi ile aşağıdaki funktor tanımlanabilir;

$$\Gamma_n : Pre - XMod_L \longrightarrow XMod_L(n)$$

Bu funktor ilk olarak Whitehead (1949) tarafından gruplar üzerinde tanımlanmıştır. Baues (1991) bu funktoru yine gruplar üzerinde kuadratik modül yapısını tanımlamak için kullanmıştır. Bu funktor; $\partial : C \to R$ Lie ön-çaprazlanmış modül olsun. Böylelikle $\Gamma(\partial) : C/P_{n+1}(\partial) \to R$, $XMod_L(n)$ nin bir objesi olacağından;

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[dr, "\partial"'] & C/P_{n+1}(\partial) \arrow[d, "\Gamma_n"] \\ & R \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olup q bölüm morfizmi R nin C üzerindeki tüm Lie cebir etkilerini korur. Bu durumda $n = 2$ için

$$\Gamma_2(\partial) = \partial^{cr} : C^{cr} = C/P_2(\partial) \to R$$

homomorfizmi, $c_1 + P_2(\partial), c_2 + P_2(\partial) \in C^{cr}$ ve $\partial : C \to R$ bir Lie ön-çaprazlanmış modül olmak üzere;

$$\begin{aligned} < c_1 + P_2, c_2 + P_2(\partial) > &= \partial^{cr}(c_1 + P_2(\partial)) * (c_2 + P_2(\partial)) \\ &- [c_1 + P_2(\partial), c_2 + P_2(\partial)] \\ &= \partial^{cr}(c_1 + P_2(\partial)) * (c_2 + P_2(\partial)) \\ &- ([c_1, c_2] + P_2(\partial)) \\ &= (\partial(c_1) * c_2 - [c_1, c_2]) + P_2(\partial) \\ &= P_2(\partial) \quad (\because \quad < c_1, c_2 > \in P_2(\partial)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan ∂^{cr} bir Lie çaprazlanmış modül olur. Özel olarak ∂^{cr} modülüne, ∂ ön-çaprazlanmış modülüne bağlı olan çaprazlanmış modül denir. Benzer şekilde $nil(2)$ modülü nilpotent şartıyla $(P_3(\partial) = 0)$ birlikte

$$\partial^{nil} : C^{nil} = C/P_3(\partial) \to R$$

homomorfizması için ∂^{nil}, ∂ ön-çaprazlanmış modülüne bağlı bir modüldür. Burada $P_3(\partial)$, $< c_1, c_2, c_3 > \in C$ için $<< c_1, c_2 >, c_3 >$ ve $< c_1, < c_2, c_3 >>$ Peiffer çarpım elemanları tarafından üretilen C nin bir Lie idealidir.

Tanım 4.12: X, Y, Z birer Lie cebiri, $C = Y^{cr}/[Y^{cr}, Y^{cr}]$ olmak üzere ve

$$\begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "\Phi"] & \\ X \arrow[r, "\delta"'] & Y \arrow[r, "\partial"'] & Z \end{tikzcd}$$

şeklindeki Lie cebirlerin homomorfizmlerinin diyagramı ile birlikte aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu yapıya Lie cebirler üzerinde kuadratik modül denir. Kısaca $(\omega, \delta, \partial)$ şeklinde gösterilir.

QM$_L$1) $\partial : Y \to Z$ Peiffer nilpotent sınıfı 2 olan bir Lie ön çaprazlanmış modül ve her $y \in Y$ için şu şekilde tanımlı bölüm morfizmi mevcuttur:

$$\begin{aligned} q : Y &\twoheadrightarrow C = Y^{cr}/[Y^{cr}, Y^{cr}] \\ y &\mapsto [y] \end{aligned}$$

QM$_L$2) $\partial\delta = 0$ ve δ ile kuadratik dönüşüm olarak adlandırılan ω nin kompozisyonu Peiffer komütatör dönüşümü olan Φ ye eşittir. Yani her $y_1, y_2 \in Y$ için

$$\delta\omega([y_1] \otimes [y_2]) = \Phi([y_1] \otimes [y_2]) = \partial(y_1) *_1 y_2 - [y_1, y_2]$$

eşitliği sağlanır.

QM$_L$3) X bir Lie Z cebir ve Z nin X üzerindeki Lie etkisi $(*_3)$ için $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere,

$$\partial(y) *_3 x = \omega([\delta(x)] \otimes [y] + [y] \otimes [\delta(x)])$$

eşitliği mevcuttur.

QM$_L$4) Her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\omega([\delta(x_1)] \otimes [\delta(x_2)]) = [x_2, x_1]$$

eşitliği vardır.

Not 4.2: Y nin X üzerindeki etkisini $(*_2)$ kullanarak kuadratik dönüşüm yardımıyla her $y \in Y$ ve $x \in X$ için;

$$y *_2 x = \omega([\delta(x)] \otimes [y])$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada ω kuadratik dönüşümü K-lineer olduğundan bu etki bir Lie cebir etkisidir. Bu tanımlama ile beraber "QM$_L$3)" aksiyomunun yardımıyla (cebirsel fark ile)

$$\partial(y) *_3 x - y *_2 x = \omega([y] \otimes [\delta(x)])$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu etki tezin ilerleyen bölümlerinde özellikle de yarı-direkt Lie çarpımı ve kuadratik derivasyon yapısı için gerekli olan bazı yardımcı teoremlerde kullanılacaktır. Ayrıca açıkça görülmektedir ki $X \xrightarrow{\delta} Y$ morfizmi Y nin X üzerine yukarıda tanımlanan etki ile beraber bir çaprazlanmış modüldür.

Tanım 4.13: (Serbest$_1$ Kuadratik Modül): $(\omega, \delta, \partial)$ Lie cebirler üzerinde bir kuadratik modül olmak üzere; eğer Z serbest bir Lie cebir ise bu kuadratik modüle "Serbest$_1$ Kuadratik Modül" denir. Bu yapı tezin ilerleyen bölümlerinde her zaman sabit bir $M \subset Z$ tabanı ile tanımlı olarak kullanılacaktır.

Tanım 4.14: $\mathcal{L} = (\omega, \delta, \partial)$ ve $\mathcal{L}' = (\omega', \delta', \partial')$ birer kuadratik modül, $f_0 : Z \to Z'$, $f_1 : Y \to Y'$, $f_2 : X \to X'$ Lie cebir morfizmleri ve $\varphi : C \to C'$; f_1 tarafından indirgenmiş dönüşüm olmak üzere;

$$\begin{array}{ccccccc} C \otimes C & \xrightarrow{\omega} & X & \xrightarrow{\delta} & Y & \xrightarrow{\partial} & Z \\ {\scriptstyle \varphi \otimes \varphi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} \\ C' \otimes C' & \xrightarrow[\omega']{} & X' & \xrightarrow[\delta']{} & Y' & \xrightarrow[\partial']{} & Z' \end{array}$$

diyagramı değişmeli yani $f_0 \circ \partial = \partial' \circ f_1$, $f_1 \circ \delta = \delta' \circ f_2$, $f_2(\omega([y_1] \otimes [y_2])) = \omega'([f_1(y_1)] \otimes [f_1(y_2)])$ ve her $z \in Z, y, y_1, y_2 \in Y, x \in X$ için;

$$f_1(z *_1 y) = f_0(z) *_1' f_1(y)$$
$$f_2(z *_3 x) = f_0(z) *_3' f_2(x)$$

şartları sağlanıyorsa, $f = (f_2, f_1, f_0) : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ dönüşümü bu iki kuadratik modül arasındaki kuadratik modül homomorfizmi olarak adlandırılır.

Tanım 4.15: Objeleri Lie cebirler üzerinde kuadratik modül ve morfizmleri ise Lie cebirlerin kuadratik modül morfizmi olan kategoriye Lie cebirler üzerinde kuadratik modüller kategorisi denir ve QM_L şeklinde gösterilir.

Örnek 4.4: $\partial : Y \to Z$ bir Peiffer nilpotent sınıfı 2 olan bir Lie ön-çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $\bar{\partial} = (1, \Phi, \partial)$ bir kuadratik modüldür. Bu kuadratik modül

$$\begin{array}{ccccc} & & C \otimes C & & \\ & {\scriptstyle 1}\swarrow & \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \\ X & \xrightarrow[\Phi]{} & Y & \xrightarrow[\partial]{} & Z \end{array}$$

şeklindeki diyagram ile tanımlayabiliriz. $X = C \otimes C$ ve "1" birim homomorfizmdir. $x \in X$ için $[\Phi(x)] = 0$ olduğundan kuadratik modül aksiyomları kolayca sağlanır. Bu $\bar{\partial}$ kuadratik modülüne özel olarak, "∂" *nil(2)* modülüne bağlı olan kuadratik modül denir.

Bu durumda $nil(2)$ modüller kategorisi $XMod_L(2)$ den kuadratik modüller kategorisi QM_L a bir funktor tanımlayabiliriz. Dolayısıyla $XMod_L(2)$ kategorisi QM_L kategorisinin bir alt kategorisidir.

4.5 Simplisel Lie Cebirler

Bu bölümde ilk Quillen (1969) ve Curtis (1971) tarafından verilen simplisel Lie cebir tanımı ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 4.16: $n \in \mathbb{N}$ için L_n Lie cebirlerinin bir ailesi olsun.

$$d_n^i : L_n \to L_{n-1} \quad , \quad 0 \le i \le n$$

$$s_n^j : L_n \to L_{n+1} \quad , \quad 0 \le j \le n$$

biçiminde tanımlı olan sınır (yüzey) ve dejenere dönüşümleri ile birlikte aşağıdaki simplisel özdeşliklerini sağlıyorsa (L_n, d_i, s_j) üçlüsüne simplisel Lie cebir denir ve kısaca L ile gösterilir.

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & d_i d_j = d_{j-1} d_i & , \quad i < j \\ \text{(ii)} & s_i s_j = s_{j+1} s_i & , \quad i \le j \\ \text{(iii)} & d_i s_j = s_{j-1} d_i & , \quad i < j \\ & d_j s_j = d_{j+1} s_j = id & \\ & d_i s_j = s_j d_{i-1} & , \quad i > j+1 \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} L = \cdots\cdots & L_3 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1, dotted] \arrow[r, shift right=1, dotted] \arrow[r, shift right=3] & L_2 \arrow[r, shift left=3, "d_2"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[r, shift right=3, "d_0"'] \arrow[l, bend left] \arrow[l, bend left=60] & L_1 \arrow[r, shift left=2, "d_1"] \arrow[r, shift right=2, "d_0"'] \arrow[l, bend left, "s_0"] \arrow[l, bend left=50, "s_1"] & L_0 \arrow[l, bend left, "s_0"] \end{tikzcd}$$

Ayrıca Simplisel Lie cebirler kategorisi ***SimpLAlg*** ile gösterilir.

Tanım 4.17: Simplisel Lie cebirin özel bir durumu olan herhangi bir n değerinden büyük tüm yapıların göz ardı edilmesi sonucu n-truncated simplisel Lie cebir adı verilen;

$$Tr_n L = \{L_n, ..., L_1, L_0\}$$

yapısı elde edilir. Benzer şekilde, bu yapı yardımıyla elde edilen n-truncated simplisel Lie cebirler kategorisi de ***TrnSimpLAlg*** şeklinde gösterilir ve bu kategori ***SimpLAlg*** nin bir full alt kategorisidir. Simplisel Lie cebirler kategorisinden n-truncated simplisel Lie cebirler kategorisine;

$$cosk_n : Tr_n SimpLAlg \to SimpLAlg$$

şeklinde tanımlı "**n-coskeleton**" sağ adjoint funktoru ve

$$sk_n : Tr_n SimpLAlg \to SimpLAlg$$

şeklinde tanımlı "**n-skeleton**" sol adjoint funktorunu sahip olan

$$Tr_n : SimpLAlg \to Tr_n SimpLAlg$$

şeklinde bir funktor vardır.

Tanım 4.18: L bir simplisel Lie cebir olsun. Bu durumda $(\mathcal{NL})_0 = L_0$ olmak üzere

$$(\mathcal{NL})_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} ker d_n^i$$

Lie cebirleri ve d_n in kısıtlaması olarak tanımlı $\partial : (\mathcal{NL})_n \to (\mathcal{NL})_{n-1}$ morfizmleri ile birlikte tanımlanan (normal) zincir kompleksi L nin *Moore kompleksi* olarak adlandırılır ve kısaca $\mathcal{NL}$ gösterilir. L bir simplisel Lie cebir olsun. Her $n \geq t+1$ için $(\mathcal{NL})_n = 0$ ise, bu durumda $\mathcal{L}$ simplisel Lie cebirinin *Moore kompleksinin* uzunluğu t olarak adlandırılır.

Teorem 4.1: Lie cebirler üzerinde 2- çaprazlanmış modüller kategorisi, Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan simplisel Lie cebirler kategorisine denktir (Ellis,1993).

Not 4.3: Bu teoremi ilk olarak Conduché (1984) tarafından gruplar üzerinde verilmiştir.

Teorem 4.2: Lie cebirler üzerinde kuadratik modüller kategorisi ile Moore kompleksinin boyutu 2 olan simplisel Lie cebirler kategorisi birbirine denktir (Ulualan ve Uslu, 2011).

Not 4.4: Hiper-çaprazlanmış kompleks çiftleri ilk olarak Carrasco ve Cegarro (1991) tarafından tanımlanmıştır. Arvasi ve Porter (1997) hiper-çaprazlanmış kompleks çiftlerini değişmeli cebirler için tanımlanmıştır. Benzer bir çalışmayı ise Lie cebirler için Arvasi ve Akça (2002) tarafından verilmiştir. Baues (1991) simplisel gruplar kategorisinden, gruplar üzerinde kuadratik modüller kategorisine bir funktor tanımlamıştır. Bu funktor ve hiper-çaprazlanmış kompleks çiftleri yardımıyla Ulualan ve Uslu (2011) **Teorem 4.2** yi ispatlamıştır. Benzer bir çalışmayı değişmeli cebirler için ise Ulualan (2004) incelemiştir.

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{\mathit{SimpLAlg}}_{\leqslant 2} \arrow[dl] \arrow[dr, dotted] & \\
\mathbf{QM}_L \arrow[rr] & & \mathbf{XMod}_L
\end{tikzcd}$$

4.6 Homotopi

Bu bölümde kategoriksel homotopi kavramı tanıtılacaktır. Aşağıdaki tanımı Kamps ve Porter (1997) de bulabilirsiniz.

Tanım 4.19: X ve Y iki topolojik uzay; $f, g : X \to Y$ iki sürekli fonksiyon ve $I = [0,1]$ olmak üzere eğer bir

$$\phi : X \times I \longrightarrow Y$$
$$(x, i) \longmapsto \phi(x, i)$$

sürekli fonksiyonu

$$\phi(x,0) = f(x) \quad ve \quad \phi(x,1) = g(x)$$

şartlarıyla birlikte tanımlanabiliyorsa bu durumda f ile g fonksiyonlarına homotopiktir denir ve kısaca $f \simeq g$ şeklinde gösterilir. Ayrıca ϕ dönüşümüne de f ile g yi bağlayan homotopi denir.

Kamps ve Porter (1997) çalışmalarında homotopi kavramını kategoriksel olarak incelemişlerdir. Bunun için ilk olarak herhangi bir kategoride, topolojik uzayların homotopi tanımındaki $I = [0,1]$ nın yerini tutan silindir obje adını verdikleri kavramı tanımlamışlardır. Bu tez yapısı için gerekli olduğundan kısaca tanıtılacaktır.

Tanım 4.20: C herhangi bir kategori olsun. $id_C : C \to C$ birim funktor olmak üzere:

$$\begin{aligned} (-) \times I : C &\longrightarrow C \\ X &\longmapsto X \times I \\ f &\longmapsto f \times id_I \end{aligned}$$

funktoru için,

$$e_0 : id_C \to (-) \times I,$$
$$e_1 : id_C \to (-) \times I,$$
$$\alpha : id_C \to (-) \times I,$$

doğal dönüşümleri

$$\alpha \circ e_0 = \alpha \circ e_1 = id_C$$

şartını sağlıyorsa $(-) \times I : C \to C$ funktoruna C üzerinde bir I silindir ya da silindir funktor denir ve $(-) \times I$ funktoru X objesine uygulandığında bu kısaca $X \times I$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.21: C bir kategori, $X, Y \in Ob(C)$ ve $(f, g : X \to Y) \in Mor(C)$ olsun. Bu durumda eğer bir

$$\phi : X \times I \to Y$$

morfizmi;

$$\phi(e_0(X)) = f \qquad ve \qquad \phi(e_1(X) = g$$

olacak şekilde tanımlanabiliyorsa f ile g ye homotopiktir denir ve $f \simeq g$ biçiminde gösterilir. Ayrıca ϕ morfizmine f ile g arasındaki homotopi denir.

5. 0-, 1-, 2- VE 3- SİMPLEKSLER

5.1 Giriş

Bu bölümde herhangi bir sabit $\mathcal{L} = (\omega, \delta, \partial)$ Lie cebir üzerindeki kuadratik modül alınarak bu yapı üzerinde yeni etkiler ile beraber çeşitli yarı-direkt Lie çarpım cebirleri oluşturulacak ve bunlar kullanılarak 0-, 1-, 2- ve 3-simpleksler inşaa edilerek geometrik olarak yorumlanacaktır.

Bu yapılar:

1) Kuadratik modüllerin homotopilerinin kompozisyonunun tanımlanmasında temel unsur olacaktır.
2) Karmaşık yapılar için gerekli olan cebirsel ispatlar yerine diyagramatik olarak resmedilen bu yapılar kullanılacaktır. Böylelikle uzun işlem gerektiren ispatların diyagramatik olarak hiçbir işlem kullanmadan ispatlanabilmesine olanak sağlanacaktır.
3) Geometrik form yorumu sayesinde bir çok teorem ve özellliğin önceden kolayca sezilmesine olanak sağlayacaktır.

Ayrıca bu simpleksler yardımıyla bir simplisel Lie cebir yapısı tanımlanacak bu tanım için gerekli olan sınır (yüzey) ve dejenere dönüşümleri yine bu bölümde verilecektir.

5.2 0- Simpleksler

$\mathcal{L} = (\omega, \phi, \partial)$ Lie cebirleri üzerinde bir kuadratik modül olsun. $\mathcal{L}_0 = Z$ ye $\mathcal{L}$ üzerindeki **0- simpleks** denir.

5.3 Yarı-direkt Lie Çarpımı

Tanım 5.1: Z, Y birer Lie cebir olmak üzere Z nin Y üzerine bir "$*_1$" Lie cebir etkisi (**Tanım 4.5**) mevcut olsun. Bu durumda:

$$Z \ltimes_{*_1} Y = \{(z, y) : z \in Z, y \in Y\}$$

kümesi her $z_1, z_2 \in Z$, $y_1, y_2 \in Y$ ve $k \in K$ olmak üzere;

$$\begin{array}{ll} i) & (z_1, y_1) + (z_2, y_2) = (z_1 + z_2, y_1 + y_2) \\ ii) & [(z_1, y_1), (z_2, y_2)] = ([z_1, z_2], [y_1, y_2] + z_1 * y_2 - z_2 * y_1) \\ iii) & k(z, y) = (kz, ky) \end{array}$$

ikili işlemleri ile birlikte bir Lie cebir yapısı oluşturur. Bu yapıya Z ile Y nin yarı-direkt çarpımı denir ve $Z \ltimes_{*_1} Y$ şeklinde gösterilir. Bu yapının Lie cebir olabilmesi için **Tanım 4.1** i sağlaması gerekir.

İspat: $Z \ltimes_{*_1} Y$ bir Lie cebiri olabilmesi için bilineerlik, alternatiflik ve Jacobi şartlarını sağlaması gerekir.

1) [-,-] Bilineerlik: Her $z_1, z_2, z_3 \in Z$, $y_1, y_2, y_3 \in Y$ ve $a, b \in K$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} &[a(z_1, y_1) + b(z_2, y_2), (z_3, y_3)] \\ &\quad = [(az_1, ay_1) + (bz_2, by_2), (z_3, y_3)] \\ &\quad = [(az_1 + bz_2, ay_1 + by_2), (z_3, y_3)] \\ &\quad = ([az_1 + bz_2, z_3], [ay_1 + by_2, y_3] + (az_1 + bz_2) * y_3 - z_3 * (ay_1 + by_2)) \\ &\quad = (a[z_1, z_3] + b[z_2, z_3], a[y_1, y_3] + b[y_2, y_3] + az_1 * y_3 \\ &\quad + bz_2 * y_3 - z_3 * ay_1 - z_3 * by_3) \\ &\quad = (a[z_1, z_3], a[y_1, y_3] + az_1 * y_3 - z_3 * ay_1) + (b[z_2, z_3], b[y_2, y_3] \\ &\quad + bz_2 * y_3 - z_3 * by_2) \\ &\quad = a[(z_1, y_1), (z_3, y_3)] + b[(z_2, y_2), (z_3, y_3)] \end{aligned}$$

olur ve [-,-] bilineerdir. Aynı şekilde

$$[(z_3, y_3), a(z_1, y_1) + b(z_2, y_2)] = a[(z_3, y_3), (z_1, y_1)] + b[(z_3, y_3), (z_2, y_2)]$$

bulunur.

2) Alternatiflik: Her $z, z_2, z_2 \in Z$, $y, y_1, y_2 \in Y$ için

$$\begin{aligned} [(z, y), (z, y)] &= ([z, z], [y, y] + z * y - z * y) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

ve **Anti-komütatiflik** için:

$$\begin{aligned}[(z_1, y_1), (z_2, y_2)] &= ([z_1, z_2], [y_1, y_2] + z_1 * y_2 - z_2 * y_1) \\ &= (-[z_2, z_1], -([y_2, y_1] + z_2 * y_1 - z_1 * y_2)) \\ &= -[(z_2, y_2), (z_1, y_1)]\end{aligned}$$

bulunur.

3) **Jacobi Özdeşliği:**

$$\begin{aligned}&[(z_1, y_1), [(z_2, y_2), (z_3, y_3)]] + [(z_2, y_2), [(z_3, y_3), (z_1, y_1)]] + [(z_3, y_3), [(z_1, y_1), (z_2, y_2)]] \\ &\quad = [(z_1, y_1), ([z_2, z_3], [y_2, y_3] + z_2 *_1 y_3 - z_3 *_1 y_2)] + [(z_2, y_2), ([z_3, z_1], [y_3, y_1] \\ &\quad + z_3 *_1 y_1 - z_1 *_1 y_3)] + [(z_3, y_3), ([z_1, z_2], [y_1, y_2] + z_1 *_1 y_2 - z_2 *_1 y_1)] \\ &\quad = ([z_1, [z_2, z_3]], [y_1, [y_2, y_3] + z_2 *_1 y_3 - z_3 *_1 y_2] + z_1 *_1 ([y_2, y_3] + z_2 *_1 y_3 \\ &\quad - z_3 *_1 y_2) - [z_2, z_3] *_1 y_1) + ([z_2, [z_3, z_1]], [y_2, [y_3, y_1] + z_3 *_1 y_1 - z_1 *_1 y_3] \\ &\quad + z_2 *_1 ([y_3, y_1] + z_3 *_1 y_1 - z_1 *_1 y_3) - [z_3, z_1] *_1 y_2) \\ &\quad + ([z_3, [z_1, z_2]], [y_3, [y_1, y_2] + z_1 *_1 y_2 - z_2 *_1 y_1] + z_3 *_1 ([y_1, y_2] + z_1 *_1 y_2 \\ &\quad - z_2 *_1 y_1) - [z_1, z_2] *_1 y_3) \\ &\quad = ([z_1, [z_2, z_3]] + [z_2, [z_3, z_1]] + [z_3, [z_1, z_2]], [y_1, [y_2, y_3]] + [y_2, [y_3, y_1]] + [y_3, [y_1, y_2]] \\ &\quad + [y_1, z_2 *_1 y_3] - [y_1, z_3 *_1 y_2] + [z_1 *_1 y_2, y_3] + [y_2, z_1 *_1 y_3] + z_1 *_1 (z_1 *_1 y_3) \\ &\quad - z_1 *_1 (z_3 *_1 y_2) - z_2 *_1 (z_3 *_1 y_1) + z_3 *_1 (z_2 *_1 y_1) + [y_2, z_3 *_1 y_1] \\ &\quad - [y_2, z_1 *_1 y_3] + [z_2 *_1 y_3, y_1] + [y_3, z_2 *_1 y_1] + z_2 *_1 (z_3 *_1 y_1) - z_2 *_1 (z_1 *_1 y_3) \\ &\quad - z_3 *_1 (z_1 *_1 y_2) + z_1 *_1 (z_3 *_1 y_2) + [y_3, z_1 *_1 y_3] - [y_3, z_2 *_1 y_1] + [z_3 *_1 y_1, y_2] \\ &\quad + [y_1, z_3 *_1 y_2] + z_3 *_1 (z_1 *_1 y_2) - z_3 *_1 (z_2 *_1 y_1) - z_1 *_1 (z_2 *_1 y_3) \\ &\quad + z_2 *_1 (z_1 *_1 y_3) \\ &\quad = 0\end{aligned}$$

olup Jacobi Özdeşliği sağlanır. Aynı şekilde

$$[[(z_1, y_1)(z_2, y_2)], (z_3, y_3)] + [[(z_2, y_2), (z_3, y_3)], (z_1, y_1)] + [[(z_3, y_3), (z_1, y_1)], (z_2, y_2)] = 0$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 5.1: A herhangi bir Lie cebir olmak üzere;

$$((z,y),a) \in ((Z \ltimes_{*_1} Y),A) \longmapsto (y,z) \blacktriangleright a \in A$$

şeklinde tanımlı bir bilineer dönüşümünün, $(Z \ltimes_{*_1} Y)$ nin A üzerinde etkisi (Sol) olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z, z' \in Z$, $y, y' \in Y$ ve $a, a' \in A$ için:

L1)
- $(z,0) \blacktriangleright [a,a'] = [(z,0) * a, a'] + [a, (z,0) * a']$
- $(0,y) \blacktriangleright [a,a'] = [(0,y) * a, a'] + [a, (0,y) * a']$

L2)
- $[(z,0),(z',0)] \blacktriangleright a = (z,0) \blacktriangleright ((z',0) \blacktriangleright a) - (z',0) \blacktriangleright ((z,0) \blacktriangleright a)$
- $[(0,y),(0,y')] \blacktriangleright a = (0,y) \blacktriangleright ((0,y') \blacktriangleright a) - (0,y') \blacktriangleright ((0,y) \blacktriangleright a)$
- $[(0,y),(z',0)] \blacktriangleright a = (0,y) \blacktriangleright ((z',0) \blacktriangleright a) - (z',0) \blacktriangleright ((0,y) \blacktriangleright a)$
- $[(z,0),(0,y')] \blacktriangleright a = (z,0) \blacktriangleright ((0,y') \blacktriangleright a) - (0,y') \blacktriangleright ((z,0) \blacktriangleright a)$

şartlarını sağlamasıdır.

5.4 1- ve 2- Simpleksler

$\mathcal{L}_1 = (Z \ltimes_{*_1} Y)$ Lie cebiri $\mathcal{L}$ üzerinde **1-simpleks** olarak adlandırılır. Ayrıca bu yapının geometrik açıdan simplisel formu $(z,y) \in \mathcal{L}_1$ için:

$$z \xrightarrow{\ y\ } (z + \partial(y))$$

şeklinde ifade edilir. Bu geometrik gösterim gruplar için Gohla ve Martins (2013), değişmeli cebirler için ise Akça vd. (2015) tarafından tanımlanmıştır. Bu gösterim ile birlikte $\mathcal{L}_1$ deki herhangi iki elemanın çarpımı:

$$[z \xrightarrow{\ y\ } (z + \partial(y)), z' \xrightarrow{\ y'\ } (z + \partial(y'))]$$

$$= ([z,z'] \xrightarrow{[y,y'] + z *_1 y' - z' *_1 y} ([z,z'] + \partial([y,y'] + z *_1 y' - z' *_1 y))$$

şeklinde resmedilir.

Not 5.1: Bu geometrik formun kullanılmasının sebebi aşağıdaki yardımcı teoremin görselleştirilmesi ve benzer olarak üst boyutlarda da elde edilecek geometrik yapıların anlaşılmasına kolaylık sağlamasıdır.

Yardımcı Teorem 5.2: $\mathcal{L}$, üzerinde tanımlanan 1-$simpleks$ ve 0-$simpleks$ yapıları arasında

$$d_{0,1} : \mathcal{L}_1 = (Z \ltimes_{*_1} Y) \longrightarrow Z = \mathcal{L}_0$$

tanımlı iki farklı yüzey (sınır) morfizmi:

$$d_0(\ z \xrightarrow{\ y\ } (z + \partial(y))\ ) = z \qquad d_1(z \xrightarrow{\ y\ } (z + \partial(y))\ ) = z + \partial(y)$$

biçiminde tanımlanır. Yine her $z \in Z$ için

$$s_0 : \mathcal{L}_0 = Z \longrightarrow (Z \ltimes_{*_1} Y) = \mathcal{L}_1$$

$$s_0(z) = (z, 0)$$

şeklinde bir dejenere morfizmi tanımlıdır ve bu morfizmin geometrik olarak simplisel formu

$$s_0(z) = (\ z \xrightarrow{\ 0\ } (z + \partial(y))\ ) = (z \overset{0}{\rightarrow} z)$$

şeklinde gösterilir.

Not 5.2: $\mathcal{L}$ nin tanımından Y nin X üzerinde mevcut olan $*_2$ etkisi yardımı ile $(Y \ltimes_{*_2} X)$ yarı-direkt Lie çarpımı elde edileceği açıktır.

Yardımcı Teorem 5.3: $(Z \ltimes_{*_1} Y)$ nin $(Y \ltimes_{*_2} X)$ üzerine her $z \in Z, y, y' \in Y, x \in X$ için

$$(z, y) \odot (y', x) = ([y, y'] + z *_1 y', z *_3 x + \partial(y) *_3 x + \omega([y] \otimes [y']))$$

şeklinde bir $\odot$ etkisi mevcuttur.

$''\odot''$ Lie cebir etkisi olabilmesi için **Tanım 4.5** de verilen L_1 ve L_2 şartlarını **Yardımcı Teorem 5.1** yardımıyla sağlaması gerekir.

İspat: Tanımlanan bu etki şu şekilde iki parça halinde düşünülebilir;

$$(z, 0) \odot (y', x) = (z *_1 y', z *_3 x)$$

ve

$$(0, y) \odot (y', x) = ([y, y'], \partial(y) *_3 x + \omega([y] \otimes [y']))$$

Not 5.3: Tezin geri kalan bölümlerinde, uzun işlem gerektiren ispatların okuyucuya daha anlaşılabilir gelmesi için $\omega([-] \otimes [-])$ kuadratik dönüşümü yerine $''\omega([-], [-])''$ ve $*_1, *_2, *_3$ yerine $''*''$ notasyonu kullanılacaktır.

L1) Her $z \in Z,\ y, y_1', y_2' \in Y$ ve $x_1, x_2 \in X$ için:

$$\begin{aligned}(z, 0) \odot [(y_1', x_1), (y_2', x_2)] &= (z, 0) \odot ([y_1', y_2'], [x_1, x_2] + y_1' * x_2 - y_2' * x_1) \\ &= (z * [y_1', y_2'], z * ([x_1, x_2] + y_1' * x_2 - y_2' * x_1) \\ &= ([z * y_1', y_2'] + [y_1', z * y_2'], [z * x_1, x_2] + [x_1, z * x_2] \\ &+ z * (\omega([\delta(x_2], [y_1']) - z * (\omega([\delta(x_1], [y_2']))\end{aligned}$$

bulunur ve

$$
\begin{aligned}
&[(z,0)\odot(y_1',x_1),(y_2',x_2)]+[(y_1',x_1),(z,0)\odot(y_2',x_2)]\\
&=[(z*y_1',z*x_1),(y_2',x_2)]+[(y_1',x_1),(z*y_2',z*x_2)]\\
&=([z*y_1',y_2'],[z*x_1,x_2]+(z*y_1')*x_2-y_2'*(z*x_1))\\
&+([y_1',z*y_2'],[x_1,z*x_2]+y_1'*(z*x_2)-(z*y_2')*x_1)\\
&=([z*y_1',y_2']+[y_1',z*y_2'],[z*x_1,x_2]+[x_1,z*x_2]\\
&+\omega([\delta(x_2),[z*y_1']])+\omega([z*\delta(x_2)],[y_1'])\\
&-\omega([\delta(x_1),[z*y_2']])+\omega([z*\delta(x_1)],[y_2'])\\
&=(z*[y_1',y_2'],z*[x_1,x_2]+z*(\omega([\delta(x_2],[y_1']))-z*(\omega([\delta(x_1)],[y_2']))
\end{aligned}
$$

olup böylelikle her $z\in Z$, $y_1',y_2'\in Y$ ve $x_1,x_2\in X$ için

$$(z,0)\odot[(y_1',x_1),(y_2',x_2)]=[(z,0)\odot(y_1',x_1),(y_2',x_2)]+[(y_1',x_1),(z,0)\odot(y_2',x_2)]$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
&(0,y)\odot[(y_1',x_1),(y_2',x_2)]\\
&\qquad=(0,y)\odot([y_1',y_2'],[x_1,x_2]+y_1'*x_2-y_2'*x_1)\\
&\qquad=([y,[y_1',y_2']],\partial(y)*([x_1,x_2]+y_1'*x_2-y_2'*x_1))\\
&\qquad=([y,[y_1',y_2']],\partial(y)*([x_1,x_2])+\partial(y)*(y_1'*x_2)-\partial(y)*(y_2'*x_1)))
\end{aligned}
$$

olur ve

$$
\begin{aligned}
&[(0,y)\odot(y_1',x_1),(y_2',x_2)]+[(y_1',x_1),(0,y)\odot(y_2',x_2)]\\
&=[[y,y_1'],\partial(y)*x_1+\omega([y],[y_1]),(y_2',x_2)]+[(y_1',x_1),([y,y_2'],\partial(y)*x_2\\
&+\omega([y],[y_2')]\\
&=[[y,y_1'],y_2'],[\partial(y)*x_1+\omega([y],[y_1']),x_2])+[y,y_1']*x_2-y_2'*(\partial(y)x_1\\
&+\omega([y],[y_1'])+([y_1',[y,y_2'],[x_1,\partial(y)*x_2+\omega([y],[y_2'])\\
&+y_1'*(\partial(y)*x_2+\omega([y],[y_2'])-[y,y_2']*x_1))\\
&=([[y,y_1']+[y],[y_2')],[\partial(y)*x_1,x_2]+[\omega([y],[y_1']),x_2]\\
&+[x_1,\partial(y)*x_2]+[x_1,\omega([y],[y_2'])]+y*(y_1'*x_2)-y_1'*(y*x_2)\\
&+y_2'*(\partial(y)*x_1)+y_2'*\omega([y],[y_1'])+y_1'*(\partial(y)*x_2)\\
&+y_1'*\omega([y],[y_2'])-y*(y_2'*x_1)-y_2'*(y*x_1))\\
&=([y,[y_1',y_2']],\partial(y)*([x_1,x_2])+\partial(y)*(y_1'*x_2)-\partial(y)*(y_2'*x_1)))
\end{aligned}
$$

olup, buna göre $y,y_1',y_2'\in Y$ ve $x_1,x_2\in X$ için

$$(0,y)\odot[(y_1',x_1),(y_2',x_2)]=[(0,y)\odot(y_1',x_1),(y_2',x_2)]+[(y_1',x_1),(0,y)\odot(y_2',x_2)]$$

olur. Diğer Lie cebir etki şartı için ise:

L2) Her $z \in Z, y, y_1, y_2, y_1', y_2' \in Y$ ve $x_1, x_2 \in X$ için

$$\begin{aligned}[(z_1,0),(z_2,0)] \odot (y',x) &= ([z_1,z_2],0) \odot (y',x) \\ &= ([z_1,z_2] * y', ([z_1,z_2] * x)\end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned}&(z,0) \odot ((z_2,0) \odot (y',x)) - (z_2,0) \odot ((z_1,0) \odot (y',x)) \\ &= (z_1,0) \odot (z_2 * y', z_2 * x) - (z_2,0) \odot (z_1 * y', z_1 * x) \\ &= (z_1 * (z_2 * y'), z_1 * (z_2 * x)) - (z_2 * (z_1 * y'), z_2 * (z_1 * x)) \\ &= (z_1 * (z_2 * y') - z_2 * (z_1 * y'), z_1 * (z_2 * x) - z_2 * (z_1 * x)) \\ &= ([z_1,z_2] * y', [z_1,z_2] * x)\end{aligned}$$

olur. Böylece her $z_1, z_2 \in Z, y' \in Y$ ve $x \in X$ için:

$$[(z_1,0),(z_2,0)] \odot (y',x) = (z,0) \odot ((z_2,0) \odot (y',x)) - (z_2,0) \odot ((z_1,0) \odot (y',x))$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}&[(z_1,0),(0,y_2)] \odot (y',x) \\ &\qquad = (0, z_1 * y_2) \odot (y',x) \\ &\qquad = ([z_1 * y_2, y'], \partial(z_1 * y_2) * x + \omega([z_1 * y_2],[y']) \\ &\qquad = ([z_1 * y_2, y'], [z_1, \partial(y_2)] * x + \omega([z_1 * y_2],[y'])\end{aligned}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned}&(z_1,0) \odot ((0,y_2) \odot (y',x)) - (0,y_2) \odot ((z_1,0) \odot (y',x)) \\ &= (z_1,0) \odot ([y_2,y'], \partial(y_2) * x + \omega([y_2],[y']) - (0, y_2 \odot (z_1 * y', z_1 * x) \\ &= (z_1 * [y_2,y'], z_1 * (\partial(y_2) * x + \omega([y_2],[y']))) - ([y_2, z_1 * y'], \partial(y_2) * (z_1 * x) \\ &+ \omega([y_2],[z_1 * y'])) \\ &= ([z_1 * y_2, y'] + [y_2, z_1 * y'] - [y_2, z_1 * y'], z_1 * (\partial(y_2) * x) \\ &+ \omega([z_1 * y_2],[y']) + \omega([y_2],[z_1 * y']) - \partial(y_2) * (z_1 * x) - \omega([y_2],[z_1 * y'])) \\ &= ([z_1 * y_2, y'], [z_1, \partial(y_2)] * x + \omega([y_2],[z_1 * y']))\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre her $z_1 \in Z$, $y_2, y' \in Y$ ve $x \in X$ için

$$[(z_1,0),(0,y_2)] \odot (y',x) = (z_1,0) \odot ((0,y_2) \odot (y',x)) - (0,y_2) \odot ((z_1,0) \odot (y',x))$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&(0, y_1) \odot ((z_2, 0) \odot (y', x)) - (z_2, 0) \odot ((0, y_1), (y', x)) \\
&= (0, y_1) \odot (z_2 * y', z_2 * x) - (z_2, 0) \odot ([y_1, y'], \partial(y_1) * x + \omega([y_1], [y]) \\
&= ([y_1, z_2 * y'], \partial(y_1) * (z_2 * x) + \omega([y_1], [z_2 * y']) \\
&- (z_2 * [y_1, y'], z_2 * (\partial(y_1) * x) + z_2 * \omega([y_1], [y']) \\
&= ([y_1, z_2 * y'] - z_2 * [y_1, y'], \partial(y_1) * (z_2 * x) + \omega([y_1], [z_2 * y']) \\
&= (-[z_2 * y_1, y'], -\partial(z_2 * y_1) * x - \omega([z_2 * y_1], [y']))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&[(0, y_1), (z_2, 0)] \odot (y', x) \\
&\qquad = ([0, z_2], [y_1, 0] + 0 - z_2 * y_1) \odot (y', x) \\
&\qquad = (0, -z_2 * y_1) \odot (y', x) \\
&\qquad = (-[z_2 * y_1, y'], -\partial(z_2 * y_1) * x - \omega([z_2 * y_1], [y']))
\end{aligned}$$

olur. Böylece her $z_2 \in Z$, $y_1, y' \in Y$ ve $x' \in X$ için:

$$[(0, y_1), (z_2, 0)] \odot (y', x) = (0, y_1) \odot ((z_2, 0) \odot (y', x)) - (z_2, 0) \odot ((0, y_1), (y', x))$$

elde edilir. Benzer şekilde:

$$\begin{aligned}
&[(0, y_1), (0, y_2)] \odot (y', x') \\
&\qquad = (0, [y_1, y_2]) \odot (y', x') \\
&\qquad = ([[y_1, y_2], y'], \partial([y_1, y_2]) * x' + \omega([[y_1, y_2]], [y']))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&(0, y_1) \odot ((0, y_2) \odot (y', x')) - (0, y_2) \odot ((0, y_1) \odot (y', x')) \\
&= (0, y_1) \odot ([y_2, y'], \partial(y_2) * x' + \omega([y_2], [y'])) \\
&- (0, y_2) \odot ([y_1, y'], \partial(y_1) * x' + \omega([y_1], [y'])) \\
&= ([y_1, [y_2, y']], \partial(y_1) * (\partial(y_2) * x' + \omega([y_2], [y'])) + \omega([y_1], [[y_2, y']])) \\
&- ([y_2, [y_1, y']], \partial(y_2) * (\partial(y_1) * x' + \omega([y_1], [y'])) + \omega([y_2], [[y_1, y']])) \\
&= ([[y_1, y_2], y'], \partial([y_1, y_2]) * x' + \omega([[y_1, y_2]], [y']))
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre her $y_1, y_2, y' \in Y$ ve $x \in X$ için:

$$[(0, y_1), (0, y_2)] \odot (y', x') = (0, y_1) \odot ((0, y_2) \odot (y', x')) - (0, y_2) \odot ((0, y_1) \odot (y', x'))$$

olur.

Tanım 5.2: $(Z \ltimes_{*_1} Y)$ nin $(Y \ltimes_{*_2} X)$ üzerine mevcut olan $''\odot''$ etkisi ile elde edilen

$$\mathcal{L}_2 = (Z \ltimes_{*_1} Y) \ltimes_{\odot} (Y \ltimes_{*_2} X)$$

şeklindeki yeni bir Lie cebir yapısı $\mathcal{L}$ üzerindeki 2-$simpleks$ Lie cebiri olarak adlandırılır. Her bir $(z, y, y', x) \in (Z \ltimes_{*_1} Y) \ltimes_{\odot} (Y \ltimes_{*_2} X)$ elemanı da:

$$\begin{tikzcd} & z+\partial(y)+\partial(y') \\ z \arrow[ur, "y+y'"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\boxed{\mathrm{X}}"', near end] & z+\partial(y) \arrow[u, "y'+\delta(x)"'] \end{tikzcd}$$

simplisel formda geometrik olarak bu şekilde resmedilir.

Tanım 5.3: $\mathcal{L}$ üzerinde tanımlanan 2- simpleks ve 1-simpleks yapıları arasında:

$$d_{0,1,2} : \mathcal{L}_2 = (Z \ltimes_{*_1} Y) \ltimes_{\odot} (Y \ltimes_{*_2} X) \to (Z \ltimes_{*_1} Y) = \mathcal{L}_1$$

biçiminde üç farklı sınır (yüzey) morfizmi:

$$d_0(z, y, y', x) = (z, y), \quad d_1(z, y, y', x) = (z, y+y') \quad , d_2(z, y, y', x) = (z+\partial(y), y'+\delta(y))$$

şeklinde tanımlanır ve bu morfizmler de yine simplisel formda:

$$d_0\left(\begin{tikzcd} & z+\partial(y)+\partial(y') \\ z \arrow[ur, "y+y'"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\boxed{\mathrm{X}}"', near end] & z+\partial(y) \arrow[u, "y'+\delta(x)"'] \end{tikzcd}\right) = \left(z \xrightarrow{y} (z+\partial(y))\right)$$

$$d_1\left(\begin{tikzcd} & z+\partial(y)+\partial(y') \\ z \arrow[ur, "y+y'"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\boxed{\mathrm{X}}"', near end] & z+\partial(y) \arrow[u, "y'+\delta(x)"'] \end{tikzcd}\right) = \left(z \xrightarrow{y+y'} (z+\partial(y)+\partial(y'))\right)$$

$$d_2\left(\begin{tikzcd} & z+\partial(y)+\partial(y') \\ z \arrow[ur, "y+y'"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\boxed{\mathrm{X}}"', near end] & z+\partial(y) \arrow[u, "y'+\delta(x)"'] \end{tikzcd}\right) = \left(z+\partial(y) \xrightarrow{y'+\delta(x)} (z+\partial(y)+\partial(y'))\right)$$

şeklinde resmedilir. Yukarıda tanımlanan morfizmlerin indislerinin, 2 simpleksin sınırları (yüzeyleri) ile ilişkisi:

$$\begin{tikzcd} & 0 \\ 2 \arrow[ur] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

şeklindedir. Burada dikkatlice bakılırsa her bir d_i morfizmi, 2-simpleksi farklı şekilde dejenere ederek, i olarak numaralandırılan kenarı ortadan kaldırarak 1-simplekse dönüştürür.

Tanım 5.4: İki farklı simpleks arasında:

$$s_{0,1} : \mathcal{L}_1 = (Z \ltimes_{*_1} Y) \to (Z \ltimes_{*_1} Y) \ltimes_{\odot} (Y \ltimes_{*_2} X) = \mathcal{L}_2$$

biçiminde iki farklı dejenere morfizmi:

$$s_0(z, y) = (z, y, 0, 0), \qquad s_0(z, y) = (z, 0, y, 0),$$

şeklinde tanımlanır ve simplisel formu ise:

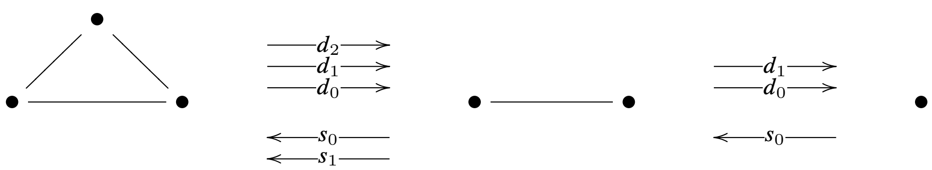
$$s_0\left(z \xrightarrow{y} (z + \partial(y))\right) = \left(\begin{tikzcd} & z + \partial(y) \\ z \arrow[ur, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\boxed{0}"] & z + \partial(y) \arrow[u, "0"'] \end{tikzcd}\right)$$

ve

$$s_1\left(z \xrightarrow{y} (z + \partial(y))\right) = \left(\begin{tikzcd} & z + \partial(y) \\ z \arrow[ur, "y"] \arrow[r, "0"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\boxed{0}"] & z \arrow[u, "y"'] \end{tikzcd}\right)$$

şeklindedir.

Not 5.4: $\mathcal{L}$ üzerindeki yukarıda tanımlanan 0-, 1-, 2- simpleksler arasındaki morfizmler May (1992) tarafından verilen simplisel özdeşliklerin tüm şartlarını sağlar. Böylece 0-, 1- , 2-simpleksler ve bu yapılar arasında tanımlanan morfizmler yardımıyla aşağıdaki şekilde resmedilebilen bir 2-truncated simplisel cebir yapısı elde edilir.



5.5 3- Simpleksler

Bu bölümde Ellis (1993) tarafında Lie cebirler üzerinde tanımlanan 3- simpleks yapısı tanıtılacaktır. Ama öncelikle 3- simplekslerin inşaasında temel oluşturacak yarı-direkt Lie çarpım objelerinin tanımı verilecektir.

Yardımcı Teorem 5.4: $(Y \ltimes_{*_2} X)$ in X üzerine her $(y,x) \in (Y \ltimes_{*_2} X)$ ve $x' \in X$ için

$$(y,x) \blacktriangleright x' = y *_2 x' + [x,x']$$

şeklinde bir ► etkisi mevcuttur.

İspat: "►" bir Lie cebir etkisi olabilmesi için **Tanım (4.5)** deki şartları sağlaması gerekir.

L1) Her $y_1, y_2 \in Y$ ve $x, x_1, x_2 \in X$ için;

$$\begin{aligned}
&(y_1,x_1) \blacktriangleright ((y_2,x_2) \blacktriangleright x) - (y_2,x_2) \blacktriangleright ((y_1,x_1) \blacktriangleright x)\\
&= (y_1,x_1) \blacktriangleright (y_2 *_2 x + [x_2,x]) - (y_2,x_2) \blacktriangleright (y_1 *_2 x + [x_1,x])\\
&= y_1 *_2 (y_2 *_2 x + [x_2,x]) + [x_1, y_2 *_2 x + [x_2,x]]\\
&- y_2 *_2 (y_1 *_2 x + [x_1,x]) + [x_2, y_1 *_2 x + [x_1,x]]\\
&= y_1 *_2 (y_2 *_2 x) + [y_1 *_2 x_2, x] + [x_2, y_1 *_2 x] + [x_1, y_2 *_2 x] + [x_1,[x_1,[x_2,x]]\\
&- y_2 *_2 (y_1 *_2 x) - [y_2 *_2 x_1, x] - [x_1, y_2 *_2 x] - [x_2, y_1 *_2 x] + [x_1,[x_2,[x_1,x]]\\
&= y_1 *_2 (y_2 *_2 x) - y_2 *_2 (y_1 *_2 x) + [[x_1,x_2],x] + [y_1 *_2, x] - [y_2 *_2 x_1, x]\\
&= ([y_1,y_2] \blacktriangleright x + [[x_1,x_2] + y_1 *_2 X_2 - y_2 *_2 X_1])\\
&= ([y_1,y_2], [x_1,x_2] + y_1 *_2 x_2 - y_2 *_2 x_1) \blacktriangleright x\\
&= [(y_1,x_1),(y_2,x_2)] \blacktriangleright x
\end{aligned}$$

olur. Böylece $[(y_1,x_1),(y_2,x_2)] \blacktriangleright x = (y_1,x_1) \blacktriangleright ((y_2,x_2) \blacktriangleright x) - (y_2,x_2) \blacktriangleright ((y_1,x_1) \blacktriangleright x)$ sağlanmış olur.

L2) Her $y \in Y$ ve $x, x_1, x_2 \in X$ için;

$$\begin{aligned}
&[(y,x) \blacktriangleright x_1, x_2] + [x_1, (y,x) \blacktriangleright x_2]\\
&= [y *_2 x_1 + [x,x_1], x_2] + [x_1, y *_2 x_2 + [x,x_2]]\\
&= [y *_2 x_1, x_2] + [[x,x_1],x_2] + [x_1, y *_2 x_2] + [x_1,[x,x_2]]\\
&= [y *_2 x_1, x_2] + [x_1, y *_2 x_2] + [x,[x_1,x_2]]\\
&= y *_2 [x_1,x_2] + [x,[x_1,x_2]]\\
&= (y,x) \blacktriangleright [x_1,x_2]
\end{aligned}$$

olup ve $(y,x) \blacktriangleright [x_1,x_2] = [(y,x) \blacktriangleright x_1, x_2] + [x_1,(y,x) \blacktriangleright x_2]$ sağlanmış olur.

Tanımlanan bu etki yardımıyla

$$(Y \ltimes_{*_2} X) \ltimes_{\blacktriangleright} X$$

şeklinde yeni bir yarı-direkt Lie çarpım cebiri elde edilir.

Yardımcı Teorem 5.5: $(Z \ltimes_{*_1} Y)$ nin $((Y \ltimes_{*_2} X) \ltimes_{\blacktriangleright} X)$ üzerinde her $(z,y) \in (Z \ltimes_{*_1} Y)$ ve $(y',x,x') \in ((Y \ltimes_{*_2} X) \ltimes_{\blacktriangleright} X)$ için:

$$(z,y) \ominus_1 (y',x,x') = ([y,y'] + z *_1 y', z *_3 x + \partial(y) *_3 x + \omega([y] \otimes [y'], z *_3 x + \partial(y') *_3 x')$$

şeklinde $\ominus_1$ etkisi mevcuttur.

İspat: "$\ominus_1$" bir Lie cebir etkisi olabilmesi için tanım **(4.5)** deki şartları sağlaması gerekir.

Uyarı 5.1: Bu bölümdeki ispatlar için **Not 5.3** ü dikkate alınız.

L1) Her $z, z \in Z$, $y, y', y'' \in Y$ ve $x, x' \in X$ için;

$$\begin{aligned}
&(z,y) \ominus_1 ((z',y') \ominus_1 (y'',x,x')) - (z',y') \ominus_1 ((z,y) \ominus_1 (y'',x,x')) \\
&= (z,y) \ominus_1 ([y',y''] + z' * y'', z' * x + \partial(y') * x + \omega([y'],[y'']), z' * x' \\
&+ \partial(y') * x') - (z',y') \ominus_1 ([y,y''] + z * y'', z * x + \partial(y) * x \\
&+ \omega([y],[y'']), z * x' + \partial(y) * x') \\
&= ([y,[y',y'']] + z * ([y',y''] + z' * y''), z * (z' * x + \partial(y') * x + \omega([y'],[y''])) \\
&+ \partial(y) * (z' * x + \partial(y') * x + \omega([y'],[y''])) \\
&+ \omega([y],[[y,y''] + z' * y'']), z * (z' * x' + \partial(y') * x') \\
&+ \partial(y) * (z' * x' + \partial(y') * x')) \\
&- ([y',[y,y'']] + z' * ([y,y''] + z * y''), z' * (z * x + \partial(y) * x + \omega([y],[y''])) \\
&+ \partial(y') * (z * x + \partial(y) * x + \omega([y],[y''])) \\
&+ \omega([y'],[[y,y''] + z * y'']), z' * (z * x' + \partial(y) * x') \\
&+ \partial(y') * (z * x' + \partial(y) * x'))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ([y,[y',y'']] + [y,z'*y''] + z*[y',y''] + z*(z'*y'') - [y',[y,y'']] \\
&- [y',z*y''] - z'*[y,y''] - z'*(z*y''), z*(z'*x) + z*(\partial(y')*x) \\
&+ z*\omega([y'],[y'']) - z'*(z*x) - z'*(\partial(y)*x) - z'*\omega([y],[y'']) \\
&+ \partial(y)*(z'*x) + \partial(y)*(\partial(y')*x) + \partial(y)*\omega([y'],[y'']) - \partial(y')*(z*x) \\
&- \partial(y')*(\partial(y)*x) - \partial(y')*\omega([y],[y'']) + \omega([y],[[y',y'']]) + \omega([y],[z'*y'']) \\
&- \omega([y'],[[y,y'']]) - \omega([y'],[z*y'']), z*(z'*x) + z*(\partial(y')*x') \\
&- z'*(z*x') - z'*(\partial(y)*x') + \partial(y)*(z'*x') + \partial(y)*(\partial(y')*x') \\
&- \partial(y')*(z*x') - \partial(y')(\partial(y)*x')) \\
&= ([[y,y'],y''] + [z*y',y''] - [z'*y,y''] + [z,z']*y'', [z,z']*x \\
&+ \partial([y,y'])*x + [z,\partial(y')]*x + [\partial(y),z']*x + \omega([z*y'],[y'']) \\
&- \omega([z'*y],[y'']) + \omega([[y,y']],[y'']), [z,z']*x' + \partial([y,y'])*x' \\
&+ [z,\partial(y')]*x' + [\partial(y),z']*x') \\
&= ([[y,y'],y''] + [z*y',y''] - [z'*y,y'] + [z,z']*y'', [z,z']*x + \partial([y,y'])*x \\
&+ [z,\partial(y')]*x + [\partial(y),z']*x + \omega([[y,y']],[y'']) + \omega([z*y'],[y'']) \\
&- \omega([z'*y],[y'']), [z,z']*x' + \partial([y,y'])*x' + [z,\partial(y')]*x' + [\partial(y),z']*x') \\
&= ([[y,y'] + z*y' - z'*y, y''] + [z,z']*y'', [z,z']*x \\
&+ \partial([y,y'] + z*y' - z'*y)*x + \omega([[y,y'] + z*y' - z'*y],[y'']), [z,z']*x' \\
&+ \partial([y,y'] + z*y' - z'*y)*x') \\
&= ([z,z'],[y,y'] + z*y' - z'*y) \ominus_1 (y'',x,x'') \\
&= [(z,y),(z',y')] \ominus_1 (y'',x,x')
\end{aligned}
$$

bulunur ve böylelikle

$$
\begin{aligned}
[(z,y),(z',y')] \ominus_1 (y'',x,x') = {}& (z,y) \ominus_1 ((z',y') \ominus_1 (y'',x,x')) \\
& - (z',y') \ominus_1 ((z,y) \ominus_1 (y'',x,x'))
\end{aligned}
$$

olup **L1** şartı sağlanır. Yukarıdaki ispat geçişlerine bakıldığı zaman özellikle **Not 4.2** ve

$$
\begin{aligned}
\omega([[y,y']],[y'']) = {}& \partial(y) *_3 \omega([y'],[y'']) + \omega([y],[[y',y'']]) \\
& - \partial(y') *_3 \omega([y],[y'']) + \omega([y'],[[y,y'']])
\end{aligned}
$$

eşitliği kullanılmıştır.

L2) Her $z \in Z,\, y, y_1, y_2 \in Y$ ve $x_1, x_1', x_2, x_2' \in X$ için;

$$
\begin{aligned}
&[(z, y) \ominus_1 (y_1, x_1, x_1'), (y_2, x_2, x_2')] + [(y_1, x_1, x_1'), (z, y) \ominus_1 (y_2, x_2, x_2')] \\
&= [([y, y_1] + z * y_1, z * x_1 + \partial(y) * x_1 + \omega([y], [y_1]), z * x_1' \\
&+ \partial(y) * x_1'), (y_2, x_2, x_2')] + [(y_1, x_1, x_1'), ([y, y_2] + z * y_2, z * x_2 \\
&+ \partial(y) * x_2 + \omega([y], [y_2]), z * x_2' + \partial(y) * x_2')] \\
&= ([[y, y_1] + z * y_1, y_2], [z * x_1 + \partial(y) * x_1 + \omega([y], [y_1]), x_2] \\
&+ ([y, y_1] + z * y_1) * x_2 - y_2 * (z * x_1 + \partial(y) * x_1 + \omega([y], [y_1])) \\
&, [z * x_1 + \partial(y) * x_1 + \omega([y], [y_1]), x_2'] - [x_2, z * x_1' + \partial(y) * x_1'] \\
&+ [z * x_1' + \partial(y) * x_1', x_2'] + ([y, y_1] + z * y_1) * x_2' - y_2 * (z * x_1' + \partial(y) * x_1') \\
&+ ([y_1, [y, y_2] + z * y_2], [x_1, z * x_2 + \partial(y) * x_2 + \omega([y], [y_2])] + y_1 * (z * x_2 \\
&+ \partial(y) * x_2 + \omega([y], [y_2])) - ([y, y_2] + z * y_2) * x_1, [x_1, z * x_2' + \partial(y) * x_2'] \\
&- [z * x_2 + \partial(y) * x_2 + \omega([y], [y_2]), x_1'] + [x_1', z * x_2' + \partial(y) * x_2'] \\
&+ y_1 * (z * x_2' + \partial(y) * x_2') - ([y, y_2] + z * y_2) * x_1') \\
&= ([[y, y_1], y_2] + [z * y_1, y_2] + [y_1, [y, y_2]] + [y_1, z * y_2], [z * x_1, x_2] \\
&+ [\partial(y) * x_1, x_2] + (\partial(y) * y_1) * x_2 - [y, y_1] * x_2 + [y, y_1] * x_2 + (z * y_1) * x_2 \\
&- y_2 * (z * x_1) - y_2 * (\partial(y) * x_1) - y_2 * \omega([y], [y_1]) + [x_1, z * x_2] \\
&+ [x_1, \partial(y) * x_2] - (\partial(y) * y_2) * x_1 + [y, y_2] * x_1 + y_1 * (z * x_2) \\
&+ y_1 * (\partial(y) * x_2) + y_1 * \omega([y], [y_2]) - [y, y_2] * x_1 - (z * y_2) * x_1, [z * x_1, x_2'] \\
&+ [\partial(y) * x_1, x_2'] + (\partial(y) * y_1) * x_2' - [y, y_1] * x_2' - [x_2, z * x_1'] - [x_2, \partial(y) * x_1'] \\
&+ [z * x_1', x_2'] + [\partial * x_1', x_2'] + [y, y_1] * x_2' + (z * y_1) * x_2' - y_2 * (z * x_1') \\
&- y_2 * (\partial(y) * x_1') + [x_1, z * x_2'] + [x_1, \partial(y) * x_2'] - [z * x_2, x_1'] - [\partial(y) * x_2, x_1'] \\
&- (\partial(y) * y_2) * x_1' + [y, y_2] * x_1' + [x_1', z * x_2'] + +[x_1, \partial(y) * x_2'] \\
&+ y_1 * (z * x_2') + +y_1 * (\partial(y) * x_2') - [y, y_2] * x_1' - (z * y_2) * x_1') \\
&= ([y, [y_1, y_2]] + z * [y_1, y_2], z * ([x_1, x_2] + y_1 * x_2 - y_2 * x_1) + \partial(y) * ([x_1, x_2] \\
&+ y_1 * x_2 - y_2 * x_1) + \omega([y], [[y_1, y_2]]), z * ([x_1, x_2'] - [x_2, x_1'] + [x_1', x_2'] \\
&+ y_1 * x_2' - y_2 * x_1') + \partial(y) * ([x_1, x_2'] - [x_2, x_1'] + [x_1', x_2'] + y_1 * x_2' - y_2 * x_1') \\
&= (z, y) \ominus_1 ([y_1, y_2], [x_1, x_2] + y_1 * x_2 - y_2 * x_1, [x_1, x_2'] - [x_2, x_1'] \\
&+ [x_1', x_2'] + y_1 * x_2' - y_2 * x_1') \\
&= (z, y) \ominus_1 [(y_1, x_1, x_1'), (y_1, x_1, x_1')]
\end{aligned}
$$

elde edilir ve

$$
\begin{aligned}
(z,y)\ominus_1[(y_1,x_1,x_1'),(y_1,x_1,x_1')] &= [(z,y)\ominus_1(y_1,x_1,x_1'),(y_2,x_2,x_2')]\\
&\quad+[(y_1,x_1,x_1'),(z,y)\ominus_1(y_2,x_2,x_2')]
\end{aligned}
$$

olduğundan **L2** şartı sağlanır. Dikkat edilirse yukarıdaki adımlarda **Not 4.2** de bahsedilen özel dönüşümler ile

$$z*_3\omega([y],[y'])=\omega([z*_3 y],[y'])+\omega([y],[z*_3 y'])$$

ve

$$
\begin{aligned}
&y'*_2\omega([y],[y''])-y''*_2\omega([y],[y'])\\
&\qquad=\omega([\delta\omega([y],[y''])],[y'])-\omega([\delta\omega([y],[y'])],[y''])\\
&\qquad=\omega([\partial(y)*_1 y''-[y,y'']],[y'])-\omega([\partial(y)*_1 y'-[y,y']],[y''])\\
&\qquad=\omega([\partial(y)*_1 y''],[y'])-\omega([[y,y'']],[y'])-\omega([\partial(y)*_1 y'],[y''])\\
&\qquad+\omega([[y,y']],[y''])\\
&\qquad=\omega([\partial(y)*_1 y''],[y'])-\partial(y)*_3\omega([y''],[y'])-\omega([y],[[y'',y']])\\
&\qquad+\partial(y'')*_3\omega([y],[y'])+\omega([y''],[[y,y']])-\omega([\partial(y)*_1 y'],[y''])\\
&\qquad+\partial(y'')*_3\omega([y],[y'])+\omega([y''],[[y,y']])-\omega([\partial(y)*_1 y'],[y''])\\
&\qquad-\omega([y'],[[y,y'']])\\
&\qquad=-\omega([y''],[\partial(y)*_1 y'])-\omega([y][[y'',y']])+\partial(y'')*_3\omega([y],[y'])\\
&\qquad+\omega([y''],[[y,y']])+\omega([y'],[\partial(y)*y''])+\omega([y,[[y',y'']]])\\
&\qquad-\partial(y')*_3\omega([y],[y''])-\omega([y'],[[y,y'']])\\
&\qquad=\omega([y],[[y'',y']])-\omega([y],[[y'',y']])+\omega([y],[[y',y'']])\\
&\qquad=\omega([y],[[y',y'']])
\end{aligned}
$$

eşitlikleri kullanılmıştır.

Yardımcı Teorem 5.6: $(Y\ltimes_{*_2}X)$ in $((Y\ltimes_{*_2}X)\ltimes_{\blacktriangleright}X)$ üzerinde her $(y,x'')\in(Y\ltimes_{*_2}X)$ ve $(y',x,x')\in((Y\ltimes_{*_2}X)\ltimes_{\blacktriangleright}X)$ olmak üzere;

$$(y,x'')\ominus_2(y',x,x')=([y,y'],y*_2x-y'*_2x''+[x'',x],\partial(y)*_3x'+\omega([y+\delta(x'')]\otimes[y'+\delta(x')])$$

şeklinde bir $\ominus_2$ etkisi mevcuttur.

İspat: **L1)** Her $y, y_1, y_2 \in Y$ ve $x, x', x_1, x_2 \in X$ için;

$$
\begin{aligned}
&(y_1, x_1) \ominus_2 ((y_2, x_2) \ominus_2 (y, x, x')) - (y_2, x_2) \ominus_2 ((y_1, x_1) \ominus_2 (y, x, x'))\\
&= (y_1, x_1) \ominus_2 ([y_2, y], y_2 * x - y * x_2 + [x_2, x], \partial(y_2) * x'\\
&+ \omega([y_2 + \delta(x_2)], [y + \delta(x)]))\\
&- (y_2, x_2) \ominus_2 ([y_1, y], y_1 * x - y * x_1 + [x_1, x], \partial(y_1) * x'\\
&+ \omega([y_1 + \delta(x_1)], [y + \delta(x)]))\\
&= ([y_1, [y_2, y]], y_1 * (y_2 * x - y * x_2 + [x_2, x]) - [y_2, y] * x_1\\
&+ [x_1, y_2 * x - y * x_2 + [x_2, x], \partial(y_1) * (\partial(y_2) * x' + \omega([y_2 + \delta(x_2)], [y + \delta(x)]))\\
&+ \omega([y_1 + \delta(x_1)], [[y_2, y] + \delta(y_2 * x - y * x_2 + [x_2, x])])\\
&- ([y_2, [y_1, y]], y_2 * (y_1 * x - y * x_1 + [x_1, x]) - [y_1, y] * x_2\\
&+ [x_2, y_1 * x - y * x_1 + [x_1, x], \partial(y_2) * (\partial(y_1) * x' + \omega([y_1 + \delta(x_1)], [y + \delta(x)]))\\
&+ \omega([y_2 + \delta(x_2)], [[y_1, y] + \delta(y_1 * x - y * x_1 + [x_1, x])])\\
&= ([y_1, [y_2, y]] - [y_2, [y_1, y]], y_1 * (y_2 * x) - y_1 * (y * x_2) + [y_1 * x_2, x]\\
&+ [x_2, y_1 * x] - y_2 * (y * x_1) + y * (y_2 * x_1) + [x_1, y_2 * x] - [x_1, y * x_2]\\
&+ [x_1, [x_2, x]] - y_2 * (y_1 * x) + y_2 * (y * x_1) - [y_2 * x_1, x] - [x_1, y_2 * x]\\
&+ y_1 * (y * x_2) - y * (y_1 * x_2) - [x_2, y_1 * x] + [x_2, y * x_1] - [x_2, [x_1, x]]\\
&, \partial(y_1) * (\partial(y_2) * x') + \partial(y_1) * \omega([y_2], [y]) + \partial(y_1) * \omega([y_2], [\delta(x)])\\
&+ \partial(y_1) * \omega([\delta(x_2)], [y]) + \partial(y_1) * \omega([\delta(x_2)], [\delta(x)]) + \omega([y_1], [[y_2, y]])\\
&+ \omega([y_1], [[y_2, \delta(x)]]) - +\omega([y_1], [[y, \delta(x_2)]]) + +\omega([y_1], [[\delta(x_2), \delta(x)]])\\
&- \partial(y_2) * (\partial(y_1) * x') - \partial(y_2) * \omega([y_1], [y]) - \partial(y_2) * \omega([y_1], [\delta(x)])\\
&- \partial(y_2) * \omega([\delta(x_1)], [y]) - \partial(y_2) * \omega([\delta(x_1)], [\delta(x)]) - \omega([y_2], [[y_1, y]])\\
&- \omega([y_2], [[y_1, \delta(x)]]) + \omega([y_2], [[y, \delta(x_1)]]) - \omega([y_2], [[\delta(x_1), \delta(x)]])\\
&- \omega([\delta(x_2)], [[y_1, y]]) - \omega([\delta(x_2)], [[y_1, \delta(x)]]) + \omega([\delta(x_2)], [[y, \delta(x_2)]])\\
&- \omega([\delta(x_2)], [[\delta(x_1), \delta(x)]]))\\
&= ([[y_1, y_2], y], y_1 * (y_2 * x) - y_2 * (y_1 * x) - [y * x_1, x_2] - [x_1, y * x_2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= ([[y_1,y_2],y], y_1 * (y_2 * x) - y_2 * (y_1 * x) - [y * x_1, x_2] - [x_1, y * x_2] \\
&- y * (y_1 * x_2) + y * (y_2 * x_1) + [[x_1,x_2],x] + [y_1 * x_2, x] - [y_2 * x_1, x] \\
&, \partial(y_1) * (\partial(y_2) * x') - \partial(y_2) * (\partial(y_1) * x') + \omega([[y_1,y_2]],[y]) \\
&+ \omega([[y_1,y_2]],[\delta(x)]) + \omega([[\delta(x_1),\delta(x_2)]],[y]) + \omega([[\delta(x_1),\delta(x_2)]],[\delta(x)]) \\
&+ \omega([[y_1,\delta(x_2)]],[y]) + \omega([[y_1,\delta(x_2)]],[\delta(x)]) - \omega([[y_2,\delta(x_2)]],[y]) \\
&- \omega([[y_2,\delta(x_2)]],[\delta(x)])) \\
&= ([[y_1,y_2],y], [y_1,y_2] * x - y * ([x_1,x_2] + y_1 * x_2 - y_2 * x_1) \\
&+ [[x_1,x_2] + y_1 * x_2 - y_2 * x_1, x], \partial([y_1,y_2]) * x' + \omega([[y_1,y_2] \\
&+ \delta([x_1,x_2] + y_1 * x_2 - y_2 * x_1)],[y + \delta(x)])) \\
&= ([y_1,y_2],[x_1,x_2] + y_1 * x_2 - y_2 * x_1) \ominus_2 (y,x,x') \\
&= [(y_1,x_1),(y_2,x_2)] \ominus_2 (y,x,x')
\end{aligned}
$$

elde edilir ve

$$
\begin{aligned}
[(y_1,x_1),(y_2,x_2)] \ominus_2 (y,x,x') = {} & (y_1,x_1) \ominus_2 ((y_2,x_2) \ominus_2 (y,x,x')) \\
& - (y_2,x_2) \ominus_2 ((y_1,x_1) \ominus_2 (y,x,x'))
\end{aligned}
$$

olduğundan **L1** şartı sağlanır. Yukarıdaki eşitlikte dikkat edilirse

$$
\begin{aligned}
\omega([[y,y']],[y'']) = {} & \partial(y) *_3 \omega([y'],[y'']) + \omega([y],[[y',y'']]) \\
& - \partial(y') *_3 \omega([y],[y'']) - \omega([y'],[[y,y'']])
\end{aligned}
$$

eşitliği kullanılmıştır.

L2) Her $y, y_1, y_2 \in Y$ ve $x, x_1, x_2, x_1', x_2' \in x$ için;

$$
\begin{aligned}
&[(y,x) \ominus_2 (y_1,x_1,x_1'),(y_2,x_2,x_2')] + [(y_1,x_1,x_1'),(y,x) \ominus_2 (y_2,x_2,x_2')] \\
&= [(([y,y_1], y * x_1 - y_1 * x + [x,x_1], \partial(y) * x_1' \\
&+ \omega([y+\delta(x)],[y_2+\delta(x_2)]))),(y_2,x_2,x_2')] + [(y_1,x_1,x_1'),([y,y_2], y * x_2 \\
&- y_2 * x + [x,x_2], \partial(y) * x_2' + \omega([y+\delta(x)],[y_2+\delta(x_2)]))] \\
&= ([[y,y_1],y_2],[y * x_1 - y_1 * x + [x,x_1],x_2] + [y,y_1] * x_2 - y_2 * (y * x_1 - y_1 * x \\
&+ [x,x_1]),[y * x_1 - y_1 * x + [x,x_1],x_2'] - [x_2, \partial(y) * x_1' + \omega([y+\delta(x)],[y_1+\delta(x_1)])] \\
&+ [\partial(y) * x_1' + \omega([y+\delta(x)],[y_1+\delta(x_1)]),x_2'] + [y,y_1] * x_2' - y_2 * (\partial(y) * x_1' \\
&+ \omega([y+\delta(x)],[y_1+\delta(x_1)]))) + ([y,[y,y_2]],[x_1, y * x_2 - y_2 * x + [x,x_2]] \\
&+ y_1 * (y * x_2 - y_2 * x + [x,x_2]) - [y,y_2] * x_1,[x_1, \partial(y) * x_2' \\
&+ \omega([y+\delta(x)],[y_2+\delta(x_2)])] - [y * x_2 - y_2 * x + [x,x_2],x_1'] + [x_1', \partial(y) * x_2' \\
&+ \omega([y+\delta(x)],[y_2+\delta(x_2)])] + y_1 * (\partial(y) * x_2' + \omega([y+\delta(x)],[y_2+\delta(x_2)])) \\
&- [y,y_2] * x_1') \\
&= ([[y,y_1],y_2] + [y_1,[y,y_2]],[y * x_1,x_2] - [y_1 * x,x_2] + [[x,x_1],x_2] + y * (y_1 * x_2) \\
&- y_1 * (y * x_2) - y_2 * (y * x_1) + y_2 * (y_1 * x) - [y_2 * x,x_1] - [x, y_2 * x_1] + [x_1, y * x_2] \\
&- [x_1, y_2 * x] + [x_1[x,x_2]] + y_1 * (y * x_2) - y_1 * (y_2 * x) + [y_1 * x,x_2] + [x, y_1 * x_2] \\
&- y * (y_2 * x_1) + y_2 * (y * x_1),[y * x_1,x_2'] - [y_1 * x,x_2'] + [[x,x_1],x_2'] - [x_2, \partial(y) * x_1'] \\
&- [x_2, \omega([y],[y_1])] - [x_2, \partial(y) * x_1] + [x_2, y * x_1] - [x_2,[x_1,x]] + [\partial(y) * x_1',x_2'] \\
&+ (\partial(y) * y_1) * x_2' - [y,y_2] * x_2' + [\partial(y) * x_1,x_2'] - [y * x_1,x_2'] + [y_1 * x,x_2'] \\
&+ [[x_1,x],x_2'] + [y,y_1] * x_2' - y_2 * (\partial(y) * x_1') - y_2 * \omega([y],[y_1]) - y_2 * \omega([y],[\delta(x_1)]) \\
&- y_2 * \omega([\delta(x)],[y_1]) - y_2 * \omega([\delta(x)],[\delta(x_1)]) + [x_1, \partial(y) * x_2'] + [x_1, \omega([y],[y_2])] \\
&+ [x_1, \partial(y) * x_2] - [x_1, y * x_2] + [x_1, y_2 * x] + [x_1,[x_2,x]] - [y * x_2,x_1'] + [y_2 * x,x_1'] \\
&- [[x,x_2],x_1'] + [x_1', \partial(y) * x_2'] - (\partial(y) * y_2) * x_1' + [y,y_2] * x_1' + [x_1', \partial(y) * x_2] \\
&- [x_1', y * x_2] + [x_1', y_2 * x] + [x_1',[x_2,x]] + y_1 * (\partial(y) * x_2') + y_1 * \omega([y],[y_2]) \\
&+ y_1 * \omega([y],[\delta(x_2)]) + y_1 * \omega([\delta(x)],[y_2]) + + y_1 * \omega([\delta(x)],[\delta(x_2)]) - [y,y_2] * x_1')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= ([y,[y_1,y_2]],[y*x_1,x_2]+[x_1,y*x_2]+y*(y_1*x_2)-y*(y_2*x_1)-y_1*(y*x)\\
&+y_2*(y_1*x)+[x,[x_1,x_2]]+[x,y_1*x_2]-[x,y_2*x_1],[\partial(y)*x_1,x_2']\\
&+[x_1,\partial(y)*x_2']-[\partial(y)*x_2,x_1']-[x_2,\partial(y)*x_1']+[\partial(y)*x_1',x_2']+[x_1',\partial(y)*x_2']\\
&+\partial(y)*(y_1*x_2')-\partial(y)*(y_2*x_1')+\omega([y],[[y_1,y_2]])+\omega([y],[[\delta(x_1),\delta(x_2)]])\\
&+\omega([y],[[y_1,\delta(x_2)]])-\omega([y],[[y_2,\delta(x_1)]])+\omega([\delta(x)],[[y_1,y_2]])\\
&+\omega([\delta(x)],[[\delta(x_1),\delta(x_2)]])+\omega([\delta(x)],[[y_1,\delta(x_2)]])-\omega([\delta(x)],[[y_2,\delta(x_1)]])\\
&= ([y,[y_1,y_2]],y*([x_1,x_2]+y_1*x_2-y_2*x_1)-[y_1,y_2]*x+[x,[x_1,x_2]+y_1*x_2\\
&-y_2*x_1],\partial*(y)([x_1,x_2']-[x_2,x_1']+[x_1',x_2']+y_1*x_2'-y_2*x_1')\\
&+\omega([y+\delta(x)],[[y_1,y_2]+\delta([x_1,x_2]+y_1*x_2-y_2*x_1)]))\\
&= (y,x)\ominus_2([y_1,y_2],[x_1,x_2]+y_1*x_2-y_2*x_1,[x_1,x_2']-[x_2,x_1']+[x_1',x_2']+y_1*x_2'\\
&-y_2*x_1')\\
&= (y,x)\ominus_2([y_1,y_2],[x_1,x_2]+y_1*x_2-y_2*x_1,[x_1,x_2']-[x_2,x_1']+[x_1',x_2']+y_1*x_2'\\
&-y_2*x_1')\\
&= (y,x)\ominus_2[(y_1,x_1,x_1'),(y_2,x_2,x_2')]
\end{aligned}
$$

elde edilir ve

$$
\begin{aligned}
(y,x)\ominus_2[(y_1,x_1,x_1'),(y_1,x_1,x_1')] &= [(y,x)\ominus_2(y_1,x_1,x_1'),(y_2,x_2,x_2')]\\
&+[(y_1,x_1,x_1'),(z,y)\ominus_2(y_2,x_2,x_2')]
\end{aligned}
$$

olduğundan **L2** şartı sağlanır. Bu eşitliğin sağlanmasında özellikle **Not (4.1)**,

$$z*_3\omega([y],[y'])=\omega([z*_3 y],[y'])+\omega([y],[z*_3 y'])$$

ve

$$y'*_2\omega([y],[y''])-y''*_2\omega([y],[y'])=\omega([y],[[y',y'']])$$

eşitlikleri kullanılmıştır.

Yardımcı Teorem 5.7: $((Z\ltimes_{*_1}Y)\ltimes_{\odot}(Y\ltimes_{*_2}X))$ nin $((Y\ltimes_{*_2}X)\ltimes_{\blacktriangleright}X)$ üzerine:

$$(0,0,y,x'')\blacktriangleright_{\ominus}(y',x,x')=(y,x'')\ominus_2(y',x,x')$$

ve

$$(z,y,0,0)\blacktriangleright_{\ominus}(y',x,x')=(z,y)\ominus_1(y',x,x')$$

şeklinde tanımlı bir $\blacktriangleright_{\ominus}$ etkisi vardır.

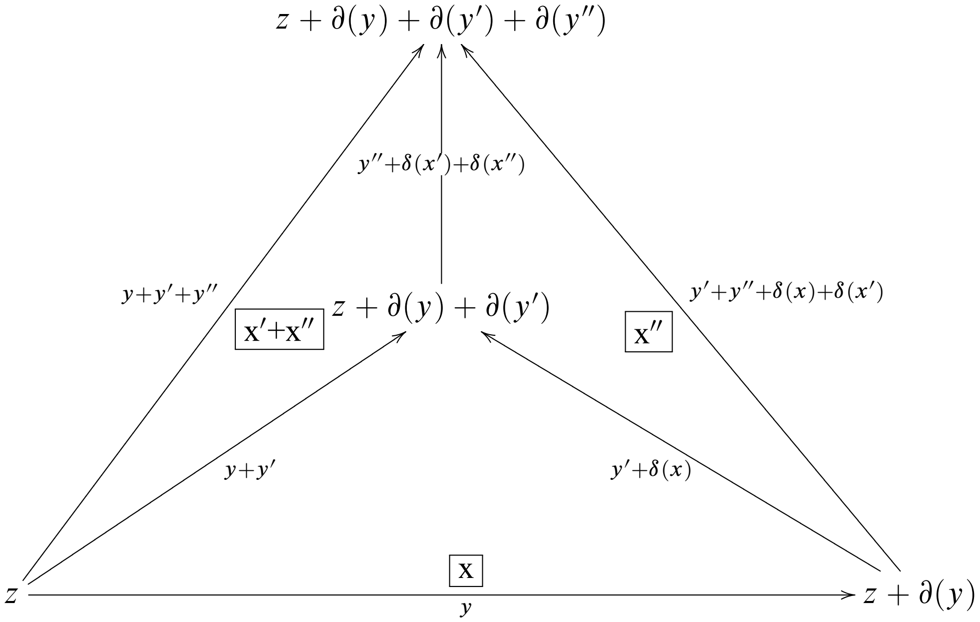
Bu tanımlamalar ile birlikte artık $\mathcal{L}$ üzerinde bir 3- simpleks yapısı oluşturulabilir.

Tanım 5.5: $\mathcal{L}$ üzerindeki **3- simpleks** cebiri yarı-direkt Lie çarpımı yardımıyla

$$\mathcal{L}_3 = ((Z \ltimes_{*_1} Y) \ltimes_{\odot} (Y \ltimes_{*_2} X)) \ltimes_{\blacktriangleright\ominus} ((Y \ltimes_{*_2} X) \ltimes_{\blacktriangleright} X)$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca her bir $(z, y, y', x, y'', x', x'') \in \mathcal{L}_3$ elemanı da simplisel formu yardımıyla:

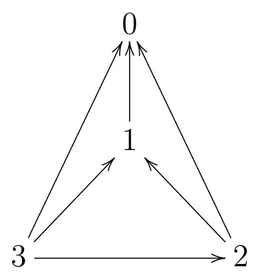


şeklinde resmedilir.

Tanım 5.6: Tanımlanan bu 3-simpleks ve 2-simpleksler arasında

$$\begin{aligned}
d_0(z, y, y', x, y'', x', x'') &= (z, y, y', x),\\
d_1(z, y, y', x, y'', x', x'') &= (z, y, y' + y'', x + x'),\\
d_2(z, y, y', x, y'', x', x'') &= (z, y + y', y'', x' + x''),\\
d_3(z, y, y', x, y'', x', x'') &= (z + \partial(y), y' + \delta(x), y'' + \delta(x'), x'')
\end{aligned}$$

şeklinde dört farklı yüzey morfizmi mevcuttur. Bu dört morfizmin her biri, yukarıda tanımlanan **tetrahedronun** farklı bir yüzüne sınır dönüşümü olarak:



şeklinde bir numaralandırma ile aşağıdaki şekillere karşılık gelmektedir:

$$
d_0\left(\begin{tikzcd} & \bullet & \\ & \bullet \arrow[u] & \\ \bullet \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[uul] \arrow[ul] \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} & z+\partial(y)+\partial(y') \\ z \arrow[ur, "y+y'"] \arrow[r, "y"'] & z+\partial(y) \arrow[u, "\boxed{\mathrm{x}}", "y'+\delta(x)"'] \end{tikzcd}
$$

$$
d_1\left(\begin{tikzcd} & \bullet & \\ & \bullet \arrow[u] & \\ \bullet \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[uul] \arrow[ul] \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} & z+\partial(y)+\partial(y')+\partial(y'') \\ z \arrow[ur, "y+y'+y''"] \arrow[r, "y"'] & z+\partial(y) \arrow[u, "\boxed{\mathrm{x}+\mathrm{x}'}", "y'+\delta(x)+\delta(x')"'] \end{tikzcd}
$$

$$
d_2\left(\begin{tikzcd} & \bullet & \\ & \bullet \arrow[u] & \\ \bullet \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[uul] \arrow[ul] \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} & z+\partial(y)+\partial(y')+\partial(y'') \\ z \arrow[ur, "y+y'+y''"] \arrow[r, "y"'] & z+\partial(y)+\partial(y') \arrow[u, "\boxed{\mathrm{x}'+\mathrm{x}''}", "y''+\delta(x')+\delta(x'')"'] \end{tikzcd}
$$

$$
d_3\left(\begin{tikzcd} & \bullet & \\ & \bullet \arrow[u] & \\ \bullet \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[uul] \arrow[ul] \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} & z+\partial(y)+\partial(y')+\partial(y'') \\ z+\partial(y) \arrow[ur, "y'+y''+\delta(x)+\delta(x')"] \arrow[r, "y'+\delta(x)"'] & z+\partial(y)+\partial(y') \arrow[u, "\boxed{\mathrm{x}''}", "y''+\delta(x')+\delta(x'')"'] \end{tikzcd}
$$

Tanım 5.7: Benzer şekilde bu iki simpleks arasında, $s_{0,1,2} : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$ olarak,

$$
\begin{aligned}
s_0(z, y, y', x) &= (z, y, y', x, 0, 0, 0) \\
s_1(z, y, y', x) &= (z, y, 0, 0, y', x, 0) \\
s_2(z, y, y', x) &= (z, 0, y, 0, y', 0, x)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı üç farklı dejenere morfizmi vardır ve bu morfizmler simplisel formda:

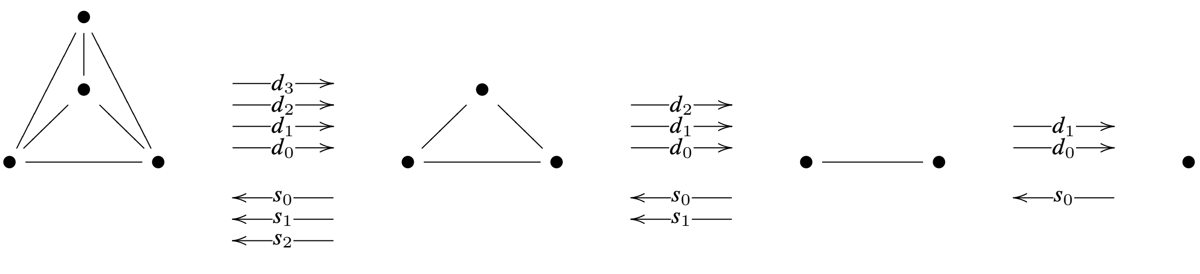
$$
s_0\left(\begin{tikzcd} & & z+\partial(y)+\partial(y') \\ z \arrow[urr, "y+y'"] \arrow[rr, "y"'] & & z+\partial(y) \arrow[u, "y'+\delta(x)"'] \arrow[ul, phantom, "\boxed{x}"] \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} & & z+\partial(y)+\partial(y') & & \\ & & z+\partial(y)+\partial(y') \arrow[u, "0"] & & \\ z \arrow[uurr, "y+y'"] \arrow[urr, "y+y'"'] \arrow[rrrr, "y"', "0"] & & & & z+\partial(y) \arrow[uull, "y'"'] \arrow[ull, "y'+\delta(x)"] \end{tikzcd}
$$

$$
s_1\left(\begin{tikzcd} & & z+\partial(y)+\partial(y') \\ z \arrow[urr, "y+y'"] \arrow[rr, "y"'] & & z+\partial(y) \arrow[u, "y'+\delta(x)"'] \arrow[ul, phantom, "\boxed{x}"] \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} & & z+\partial(y)+\partial(y') & & \\ & & z+\partial(y) \arrow[u, "y'+\delta(x)"] & & \\ z \arrow[uurr, "y+y'"] \arrow[urr, "y"'] \arrow[rrrr, "y"', "0"] \arrow[ur, phantom, "x"] & & & & z+\partial(y) \arrow[uull, "y'+\delta(x)"'] \arrow[ull, "0"] \arrow[ul, phantom, "0"] \end{tikzcd}
$$

$$
s_2\left(\begin{tikzcd} & & z+\partial(y)+\partial(y') \\ z \arrow[urr, "y+y'"] \arrow[rr, "y"'] & & z+\partial(y) \arrow[u, "y'+\delta(x)"'] \arrow[ul, phantom, "\boxed{x}"] \end{tikzcd}\right) = \begin{tikzcd} & & z+\partial(y)+\partial(y') & & \\ & & z+\partial(y) \arrow[u, "y'+\delta(x)"] & & \\ z \arrow[uurr, "y+y'"] \arrow[urr, "y"'] \arrow[rrrr, "0"', "0"] \arrow[ur, phantom, "x"] & & & & z \arrow[uull, "y+y'"'] \arrow[ull, "y"] \arrow[ul, phantom, "x"] \end{tikzcd}
$$

şeklinde resmedilir.

Not 5.5: Lie cebir üzerindeki 3-simpleks yapısının da inşa edilmesi sonucu, **Not 5.4** de bahsedildiği üzere, aşağıdaki şekilde resmedilen bir "3-truncated" simplisel cebir yapısı elde edilir.



6. LIE CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL MORFİZMLERİNİN HOMOTOPİSİ VE GRUBOİD YAPISI

6.1 Giriş

Bu bölümde Akça ve Sidal (2016) tarafından tanımlanan Lie cebir üzerinde çaprazlanmış modül morfizmleri arasındaki homotopi kavramı tanıtılacaktır. Daha sonra bu kavram yardımıyla oluşturulan gruboid yapısı üzerinde durulacaktır.

6.2 Lie Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopisi

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi Brown ve Higgins (1987) tarafından verilmiş ve daha ayrıntılı olarak Martins (2011) tarafından incelenmiştir. Gruboidler üzerinde çaprazlanmış komplekslerin morfizmlerinin homotopisi ilk olarak Brown ve Golasinski (1989) tarafından tanımlanmıştır. Yine gruplar üzerinde 2-çaprazlanmış modül için homotopi, 2-homotopi kavramlarını Gohla ve Martins (2013) tanımlamışlar ve bu homotopi bağıntısının bir denklik bağıntısı olabilmesi için gerekli şartları elde etmişlerdir. Akça vd. (2015) değişmeli cebirlerin 2-çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisini tanımlamışlar ve bu makalede çalışan araştırmacılar bu homotopi kavramı ile gruboid yapısı oluşturmuşlardır. Aynı durum için burada Lie cebirler üzerinde yapılan benzer çalışma Akça ve Sidal'a (2016) ait olup detaylarıyla aşağıda yer almaktadır.

Çalışmada herhangi iki keyfi $\mathcal{L} = (Y, Z, \partial)$ ve $\mathcal{L}' = (Y', Z', \partial')$ Lie cebirlerin çaprazlanmış modülleri kullanılacaktır.

Tanım 6.1: $f_0 : Z \to Z'$ bir Lie cebir morfizmi olsun. Bu durumda $s_0 : Z \to Y'$ K-lineer dönüşümü her $z, z' \in Z$ için:

$$s_0[z, z'] = f_0(z) *'_1 s_0(z') - f_0(z') *'_1 s_0(z) + s_0[z, z']$$

şartını sağlıyorsa, s_0 dönüşümüne bir f_0-derivasyonu denir.

Teorem 6.1: $f = (f_0, f_1) : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ bir Lie çaprazlanmış modül morfizmi ve $s_0 : Z \to Y'$ bir f_0-derivasyonu olmak üzere her $z \in Z$ ve $y \in Y$ için

$$\begin{aligned} g_0(z) &= f_0(z) + (\partial' \circ s_0)(z) \\ g_1(y) &= f_1(y) + (s_0 \circ \partial)(y) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı olan $g = (g_0, g_1) : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ ikilisi Lie cebirleri üzerinde yeni bir çaprazlanmış modül morfizmidir.

İspat: İlk olarak g_0 ve g_1 in birer Lie cebir morfizmi olduğu gösterilmelidir. Bu durumda her $z, z' \in Z$ ve $k \in K$ için:

$$\begin{aligned} g_0(z+z') &= f_0(z+z') + (\partial \circ s_0)(z+z') \\ &= f_0(z+z') + (\partial \circ s_0)(z+z') \\ &= f_0(z) + (\partial \circ s_0)(z) + f_0(z') + (\partial \circ s_0)(z') \\ &= g_0(z_)) + g_0(z') \end{aligned}$$

ve $g_0(kz) = kg_0(z)$ olduğu s_0 ın K-lineer olmasından dolayı kolayca görülebilir. Ayrıca:

$$\begin{aligned} (g_0 \circ \partial)(y) &= f_0(\partial(y)) + (\partial' \circ s_0)(\partial(y)) \\ &= (f_0 \circ \partial)(y) + \partial'(s_0(\partial(y))) \\ &= (\partial' \circ f_1)(y) + \partial'(s_0(\partial(y))) + 0_z \\ &= \partial'(f_1(y)) + \partial'((s_0 \circ \partial)(y)) + (\partial' \circ \delta')(s_1(y)) \\ &= \partial'(f_1(y) + (s_0 \circ \partial)(y) + (\delta' \circ s_1)(y)) \\ &= \partial'(g_1(y)) \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "g_1"'] & Z \arrow[d, "g_0"] \\ Y' \arrow[r, "\partial'"'] & Z' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Bununla beraber $z, z' \in Z$ için:

$$\begin{aligned} g_0([z,z']) &= f_0([z,z']) + (\partial \circ s_0)([z,z']) \\ &= [f_0(z), f_0(z')] + \partial'(f_0(z) *_1' s_0(z') - f_0(z) *_1' s_0(z) + s_0[z,z'] \\ &= [f_0(z), f_0(z')] + \partial'(f_0(z) *_1' s_0(z') - \partial'(f_0(z') *_1' s_0(z) \\ &= [f_0(z), f_0(z')] + [f_0(z), (\partial' s_0)(z')] + [(\partial' s_0)(z), f_0(z')] \\ &+ [(\partial' s_0)(z)), (\partial' s_0)(z')] \\ &= [f_0(z) + (\partial \circ s_0)(z), f_0(z') + (\partial \circ s_0)(z')] \\ &= [g_0(z), g_0(z')] \end{aligned}$$

olur, bu durumda g_0 bir Lie cebir morfizimidir. Benzer şekilde g_1 morfizmi her $y, y' \in Y$ için :

$$\begin{aligned} g_1(y+y') &= f_1(y+y') + (s_0\partial)(y+y') \\ &= f_1(y) + f_1(y') + s_0(\partial(y) + \partial(y')) \\ &= f_1(y) + f_1(y') + s_0(\partial(y)) + s_0(\partial(y')) \\ &= g_1(y) + g_1(y') \end{aligned}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned} g_1([y,y']) &= f_1([y,y']) + (s_0 \circ \partial)([y,y']) \\ &= [f_1(y), f_1(y')] + s_0([\partial(y), (\partial(y')] \\ &= [f_1(y), f_1(y')] + f_0(\partial(y)) *_1' s_0(\partial(y')) \\ &- f_0(\partial(y')) *_1' s_0(\partial(y)) + [s_0(\partial(y)), s_0(\partial(y'))] \\ &= [f_1(y), f_1(y')] + (\partial' f_1)(y_1) *_1' s_0(\partial(y')) \\ &- (\partial' f_1)(y') *_1' s_0(\partial(y)) + [s_0(\partial(y)), s_0(\partial(y'))] \\ &= [f_1(y), f_1(y')] + [f_1(y), s_1(\partial(y'))] \\ &- [f_1(y'), s_1(\partial(y_1))] + [s_0(\partial(y_1)), s_0(\partial(y'))] \\ &= [f_1(y), f_1(y')] + [f_1(y), s_1(\partial(y'))] \\ &+ [s_1(\partial(y)), f_1(y')] + [s_0(\partial(y)), s_0(\partial(y'))] \\ &= [f_1(y) + (s_0\partial)(y), f_1(y) + (s_0\partial)(y))] \\ &= [g_1(y), g_1(y')] \end{aligned}$$

olduğundan g_1 de Lie cebir morfizmidir. Son olarak Z nin Y üzerine etkisi g altında korunur. Yani her $z \in Z$ ve $y \in Y$ için:

$$
\begin{aligned}
g_1(z *_1 y) &= f_1(z *_1 y) + (s_0 \circ \partial)(z *_1 y) \\
&= f_0(z) *'_1 f_1(y) + s_0[z, \partial(y)] \\
&= f_0(z) *'_1 f_1(y) + f_0(z) *'_1 s_0(\partial(y)) - f_0(\partial(y)) *'_1 s_0(z) + [s_0(z), (s_0\partial)(y)] \\
&= f_0(z) *'_1 f_1(y) + f_0(z) *'_1 (s_0\partial)(y) \\
&- (\partial' f_1)(y) *'_1 s_0(z) + [s_0(z), (s_0\partial)(y)] \\
&= f_0(z) *'_1 f_1(y) + f_0(z) *'_1 (s_0\partial)(y) - [f_1(y), s_0(z)] + [s_0(z), (s_0\partial)(y)] \\
&= f_0(z) *'_1 f_1(y) + f_0(z) *'_1 (s_0\partial)(y) + [s_0(z), f_1(y)] + [s_0(z), (s_0\partial)(y)] \\
&= f_0(z) *'_1 f_1(y) + f_0(z) *'_1 (s_0\partial)(y) + [s_0(z), f_1(y) + (s_0\partial)(y)] \\
&= f_0(z) *'_1 f_1(y) + f_0(z) *_1 (s_0\partial)(y) + (\partial' s_0)(z) *_1 (f_1(y) + (s_0\partial)(y)) \\
&= g_0(z) *'_1 g_1(y)
\end{aligned}
$$

olur.

Burada açıkça görülmektedir ki eşitliğin son iki adımında **Tanım 4.6** nın ikinci kuralı ($\mathrm{XMod}_L 2$)) kullanılmıştır. Bu yüzden teorem genel olarak ön-çaprazlanmış modüller için geçerli değildir.

Sonuç olarak; (f_0, s_0) ikilisi, f morfizmini g morfizmine bağlayan bir noktasal "homotopi" olarak adlandırılır ve kısaca

$$f \xrightarrow{(f_0,s_0)} g$$

şeklinde gösterilir. Tüm bu verilenler diyagramatik olarak aşağıdaki şekilde özetlenir:

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, bend right, "g_1"'] \arrow[d, bend left, "f_1"] & Z \arrow[dl, "(f_0,s_0)"] \arrow[d, bend right, "g_0"'] \arrow[d, bend left, "f_0"] \\
Y' \arrow[r, "\partial'"'] & Z'
\end{tikzcd}
$$

6.3 Gruboid

Bu bölümde objeleri Lie cebirler üzerinde çaprazlanmış modül morfizmleri, morfizmleri bunlar arasındaki homotopiler olan bir gruboidin inşaası ele alınacaktır. Gruboid yapısının tanımlanabilmesi için morfizmler arasında bir kompozisyon tanımlanmalı ve bu kompozisyonun asosyatif olduğu gösterilmelidir. Ayrıca bu kompozisyon için sağ ve sol birimler ve her bir morfizmin tersinin de tanımlanması gerekir.

Yardımcı Teorem 6.1: $f = (f_0, f_1) : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ bir çaprazlanmış modül morfizmi için;

$$0_{s_0} : z \in Z \mapsto 0_{Y'} \in Y'$$

biçiminde tanımlanan sıfır morfizmi için:

$$f \xrightarrow{(f_0, 0_{s_0})} f$$

olur.

İspat: Her $z, z' \in Z$ için:

$$f_0(z) = f_0(z) + (\partial' \circ 0_{s_0})(z), \qquad f_1 = f_1(z) + (0_{s_0} \circ \partial)(z)$$

ve Lie cebir etkisi özelliği gereği:

$$0_{s_0}([z, z']) = f_0(z) *_1' 0_{s_0}(z') - f_0(z') *_1' 0_{s_0}(z) + 0_{s_0}[z, z']$$

olup gerekli şartlar sağlanmış olur.

Yardımcı Teorem 6.2: $f = (f_0, f_1)$ ve $g = (g_0, g_1)$ ikilileri $\mathcal{L}$ den $\mathcal{L}'$ ye tanımlı çaprazlanmış modül morfizmleri ve

$$f \xrightarrow{(f_0, s_0)} g$$

olsun. Her $z \in Z$ için:

$$t_0(z) = -s_0(z)$$

biçiminde tanımlanan $t_0 = -s_0 : Z \to Y'$ dönüşümü için

$$g \xrightarrow{(g_0, t_0)} f$$

olur.

İspat:

$$f_0(z) = g_0(z) + (\partial' \circ t_0)(z), \qquad f_1 = g_1(z) + (t_0 \circ \partial)(z)$$

eşitlikleri kolayca elde edilir ve **Teorem (6.1**) deki şartlar sağlanır.

Eğer **Tanım (6.1)** şartı kontrol edilirse:

$$
\begin{aligned}
t_0([z,z']) &= -s_0[z,z'] \\
&= -(f_0(z) *_1' s_0(z') - f_0(z') *_1' s_0(z) + s_0[z,z']) \\
&= -f_0(z) *_1' s_0(z') + f_0(z') *_1' s_0(z) - s_0[z,z'] \\
&= -f_0(z) *_1' s_0(z') + f_0(z') *_1' s_0(z) - s_0[z,z'] \\
&- s_0[z,z'] + s_0[z,z']) \\
&= -(f_0(z) *_1' s_0(z') - (\partial' s_0)(z) *_1' s_0(z') + f_0(z') *_1' s_0(z) \\
&+ (\partial' s_0)(z') *_1' s_0(z) + [s_0(z), s_0(z')] \\
&= f_0(z) *_1' (-s_0(z')) + (\partial' s_0)(z) *_1' (-s_0(z')) - f_0(z') *_1' (-s_0(z)) \\
&- (\partial' s_0)(z') *_1' (-s_0(z)) + [-s_0(z), -s_0(z')] \\
&= (f_0(z) + (\partial' s_0)(z)) *_1' (-s_0(z')) - (f_0(z') + (\partial' s_0)(z')) *_1' (-s_0(z)) \\
&+ [-s_0(z), -s_0(z')] \\
&= g_0(z) *_1' (-s_0(z')) - f_0(z') *_1' (-s_0(z)) + [-s_0(z), -s_0(z')]
\end{aligned}
$$

olup t_0 bir g_0 derivasyonudur.

Yardımcı Teorem 6.3: $f, g, h : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ çaprazlanmış modül morfizmleri olmak üzere:

$$f \xrightarrow{(f_0, s_0)} g \quad ve \quad g \xrightarrow{(g_0, s_0')} h$$

verilsin. Bu durumda

$$(s_0 + s_0')(z) = s_0(z) + s_0'(z)$$

şeklinde tanımlanan $(s_0 + s_0') : Z \to Y'$ K-lineer dönüşümü için:

$$f \xrightarrow{(f_0, (s_0 + s_0'))} h$$

olur.

İspat: Mevcut $f \overset{(f_0,s_0)}{\longrightarrow} g$ ve $g \overset{(g_0,s_0')}{\longrightarrow} h$ homotopiler yardımıyla:

$$h_0(z) = f_0(z) + (\partial' \circ (s_0 + s_0'))(z), \qquad h_1 = f_1(z) + (s_0 + s_0') \circ \partial)(z)$$

elde edilir. **Teorem 6.1** in şartlarını sağladığı açıktır. Sadece kontrol edilmesi gereken şey **Tanım 6.1** de verilen f_0-derivasyon şartının sağlandığıdır. Her $z, z' \in Z$ için:

$$
\begin{aligned}
(s_0+s_0')([z,z']) &= s_0[z,z'] + s_0'[z,z'] \\
&= f_0(z) *_1' s_0(z') - f_0(z') *_1' s_0(z) + s_0[z,z'] \\
&+ g_0(z) *_1' s_0'(z') - g_0(z') *_1' s_0'(z) + s_0'[z,z'] \\
&= f_0(z) *_1' s_0(z') - f_0(z') *_1' s_0(z) + [s_0(z), s_0(z')] \\
&+ ((f_0(z) *_1' (\partial' s_0)(z)) *_1' s_0'(z) - ((f_0(z') *_1' (\partial' s_0)(z')) *_1' s_0'(z) \\
&+ [s_0(z), s_0(z')] \\
&= f_0(z) *_1' s_0(z') - f_0(z') *_1' s_0(z) + [s_0(z), s_0(z')] + f_0(z) * s_0'(z') \\
&+ (\partial' s_0)(z)) *_1' s_0'(z) - f_0(z') *_1' s_0'(z) - (\partial' s_0)(z')) *_1' s_0'(z) \\
&+ [s_0(z), s_0(z')] \\
&= f_0(z) *_1' s_0(z') - f_0(z') *_1' s_0(z) + [s_0(z), s_0(z')] + f_0(z) *_1' s_0'(z') \\
&+ [s_0(z), s_0'(z')] - f_0(z') *_1' s_0'(z) - [s_0(z'), s_0'(z)] + [s_0'(z), s_0'(z')] \\
&= f_0(z) *_1' (s_0(z) + s_0'(z)) - f_0(z') *_1' (s_0(z) + s_0'(z)) \\
&+ [(s_0(z) + s_0'(z)), (s_0(z') + s_0'(z'))]
\end{aligned}
$$

olup (s_0+s_0') dönüşümü f ile h yi bağlayan bir f_0-derivasyonu olduğu görülür.

Sonuç 6.1: Toplama işleminin özelliğinden dolayı, homotopilerin kompozisyon işlemi asosyatif olduğu açıktır.

Not 6.1: Son iki yardımcı teoremin ispatlarına dikkatlice bakıldığında, çaprazlanmış modül tanımının (4.6) ikinci şartının ($XMod_L2$)) sıklıkla kullanıldığı açıkça görülür. Dolayısıyla elde edilen bu sonuçlar tanımları gereği ön-çaprazlanmış modül, 2-çaprazlanmış modül ya da kuadratik modül yapılarında geçerli olmayacaktır. Tezin 7. bölümünde kuadratik modülerin homotopisindeki bu sorunun nasıl üstesinden gelinebileceği üzerinde durulacaktır. Bu amaçla $\mathcal{L}$ olarak bir serbest$_1$ kuadratik modülün sabitlenmesine ihtiyaç duyulacaktır ve yeri geldiğinde bu durum nedeniyle birklikte detaylıca açıklanacaktır.

Sonuç olarak bu bölümün esas amacını şu iki teorem ile verebiliriz.

Teorem 6.2: $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{L}'$ herhangi keyfi seçilen Lie cebirleri üzerinde iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda **objeleri** Lie cebirleri üzerinde çaprazlanmış modül morfizmleri; **morfizmleri** de bunların homotopileri olan ve kısaca HOM($\mathcal{L}$,$\mathcal{L}'$) şeklinde gösterilen bir gruboid yapısı elde edilir.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 6.3: $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{L}'$ herhangi keyfi seçilen iki Lie cebirleri üzerinde çaprazlanmış modül olmak üzere $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ biçimindeki çaprazlanmış modül morfizmleri kümesi üzerinde tanımlı;

$$'' f \simeq g \Leftrightarrow \text{f ile g yi bağlayan bir } f_0\text{-derivasyonu mevcuttur}''$$

bağıntısı bir denklink bağıntısıdır.

7. LIE CEBİRLER ÜZERİNDE KUADRATİK MODÜLLERİN MORFİZMLERİNİN HOMOTOPİSİ VE GRUBOİD YAPISI

7.1 Giriş

Bu bölümde, bir önceki bölümde Lie cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller için verilen tanımlama ve elde edilen sonuçlar Lie cebirlerin kuadratik modülleri homotopi kavramı için ele alınacaktır.

Not 7.1: Aksi belirtilene dek tanımlar ve hesaplamalar, en genel halde, yani herhangi bir kısıtlama olmadan $\mathcal{L} = (\omega, \delta, \partial)$ ve $\mathcal{L}' = (\omega', \delta', \partial')$ şeklinde iki sabit Lie kuadratik modül üzerinde yapılacaktır.

7.2 Lie Cebirler Üzerinde Kuadratik Modül Morfizmlerinin Homotopisi

Tanım 7.1: $f = (f_2, f_1, f_0) : (\omega, \delta, \partial) \to (\omega', \delta', \partial')$ bir kuadratik modül morfizmi olmak üzere; $s_0 : Z \to Y'$ ve $s_1 : Y \to X'$ K-lineer dönüşümleri her $z, z_1, z_2 \in Z$ ve $y, y_1, y_2 \in Y$ için:

$$s_0 [z_1, z_2] = f_0 (z_1) *_1' s_0 (z_2) - f_0 (z_2) *_1' s_0 (z_1) + [s_0 (z_1), s_0 (z_2)]$$

ve

$$\begin{aligned} s_1 [y_1, y_2] &= -\omega ([f_1 (y_1)] \otimes [s_0 (\partial (y_2))]) + \omega ([f_1 (y_2)] \otimes [s_0 (\partial (y_1))]) \\ &\quad + f_1 (y_1) *_2' s_1 (y_2) + s_0 (\partial (y_1)) *_2' s_1 (y_2) - f_1 (y_2) *_2' s_1 (y_1) \\ &\quad - s_0 (\partial (y_2)) *_2' s_1 (y_1) + [s_1 (y_1), s_1 (y_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1(z *_1 y) &= f_0 (z) *_3' s_1 (y) + \partial' (s_0 (z)) *_3' s_1 (y) + \omega ([s_0 (z)] \otimes [f_1 (y)]) \\ &\quad + \omega ([f_1 (y)] \otimes [s_0 (z)]) + \omega ([s_0 (z)] \otimes [s_0 (\partial (y))]) \end{aligned}$$

şartlarını sağlıyorsa (s_0, s_1) ikilisine bir kuadratik f-derivasyon denir.

Yardımcı Teorem 7.1: $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ bir kuadratik modül morfizmi ve (s_0, s_1) bir kuadratik f-derivasyon olmak üzere her $x, x_1, x_2 \in X$ ve $z \in Z$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$s_1\left[\delta\left(x_1\right), \delta\left(x_2\right)\right] = \left[f_2\left(x_1\right), s_1\left(\delta\left(x_2\right)\right)\right] - \left[f_2\left(x_2\right), s_1\left(\delta\left(x_2\right)\right)\right] + \left[s_1\left(\delta\left(x_1\right)\right), s_1\left(\delta\left(x_2\right)\right)\right]$$

$$s_1\left(z * \delta\left(x\right)\right) = f_0\left(z\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x\right) + \left(\partial' s_0\right)\left(z\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x\right) + \left(\partial' s_0\right)\left(z\right) * f_2\left(x\right)$$

İspat: $s_1\left[\delta\left(x_1\right), \delta\left(x_2\right)\right]$

$$\begin{aligned}
&= -\omega\left(\left[f_1\left(\delta\left(x_1\right)\right)\right] \otimes \left[s_0\left(\partial\left(\delta\left(x_2\right)\right)\right)\right]\right) + \omega\left(\left[f_1\left(\delta\left(x_2\right)\right)\right] \otimes \left[s_0\left(\partial\left(\delta\left(x_1\right)\right)\right)\right]\right) \\
&\quad + f_1\left(\delta\left(x_1\right)\right) * s_1\left(\delta\left(x_2\right)\right) + s_0\left(\partial\left(\delta\left(x_1\right)\right)\right) * s_1\left(\delta\left(x_2\right)\right) \\
&\quad - f_1\left(\delta\left(x_2\right)\right) * s_1\left(\delta\left(x_1\right)\right) - s_0\left(\partial\left(\delta\left(x_2\right)\right)\right) * s_1\left(\delta\left(x_1\right)\right) \\
&\quad + \left[s_1\left(\delta\left(x_1\right)\right), s_1\left(\delta\left(x_2\right)\right)\right] \\
&= -\omega\left(\left[\left(f_1\delta\right)\left(x_1\right)\right] \otimes \left[s_0\left(\left(\partial\delta\right)\left(x_2\right)\right)\right]\right) + \omega\left(\left[\left(f_1\delta\right)\left(x_2\right)\right] \otimes \left[s_0\left(\left(\partial\delta\right)\left(x_1\right)\right)\right]\right) \\
&\quad + \left(f_1\delta\right)\left(x_1\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_2\right) + s_0\left(\left(\partial\delta\right)\left(x_1\right)\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_2\right) \\
&\quad - \left(f_1\delta\right)\left(x_2\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_1\right) - s_0\left(\left(\partial\delta\right)\left(x_2\right)\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_1\right) \\
&\quad + \left[s_1\left(\delta\left(x_1\right)\right), s_1\left(\delta\left(x_2\right)\right)\right] \\
&= -\omega\left(\left[\left(\delta' f_2\right)\left(x_1\right)\right] \otimes \left[s_0\left(0_Z\right)\right]\right) + \omega\left(\left[\left(\delta' f_2\right)\left(x_2\right)\right] \otimes \left[s_0\left(0_Z\right)\right]\right) \\
&\quad + \left(\delta' f_2\right)\left(x_1\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_2\right) + s_0\left(0_z\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_2\right) \\
&\quad - \left(\delta' f_2\right)\left(x_2\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_1\right) - s_0\left(0_z\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_1\right) \\
&\quad + \left[s_1\left(\delta\left(x_1\right)\right), s_1\left(\delta\left(x_2\right)\right)\right] \\
&= \left(\delta' f_2\right)\left(x_1\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_2\right) + s_0\left(0_z\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_2\right) \\
&\quad - \left(\delta' f_2\right)\left(x_2\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_1\right) - s_0\left(0_z\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_1\right) \\
&\quad + \left[s_1\left(\delta\left(x_1\right)\right), s_1\left(\delta\left(x_2\right)\right)\right] \\
&= \left(\left(\left(\delta' f_2\right)\left(x_1\right) + 0_{Y'}\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_2\right)\right) - \left(\left(\left(\delta' f_2\right)\left(x_2\right) + 0_{Y'}\right) * \left(s_1\delta\right)\left(x_1\right)\right) \\
&\quad + \left[s_1\left(\delta\left(x_1\right)\right), s_1\left(\delta\left(x_2\right)\right)\right] \\
&= \omega\left(\left[\delta'\left(s_1\delta\right)\left(x_2\right)\right] \otimes \left[\left(\delta' f_2\right)\left(x_1\right)\right]\right) - \omega\left(\left[\delta'\left(s_1\delta\right)\left(x_1\right)\right] \otimes \left[\left(\delta' f_2\right)\left(x_2\right)\right]\right) \\
&\quad + \left[s_1\left(\delta\left(x_1\right)\right), s_1\left(\delta\left(x_2\right)\right)\right] \\
&= \left[f_2\left(x_1\right), \left(s_1\delta\right)\left(x_2\right)\right] - \left[f_2\left(x_2\right), \left(s_1\delta\right)\left(x_2\right)\right] + \left[s_1\left(\delta\left(x_1\right)\right), s_1\left(\delta\left(x_2\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

ve $s_1(z * \delta(x))$

$$\begin{aligned}
&= f_0(z) * s_1(\delta(x)) + \partial'(s_0(z)) * s_1(\delta(x)) + \omega([s_0(z)] \otimes [f_1(\delta(x))]) \\
&\quad +\omega([f_1(\delta(x))] \otimes [s_0(z)]) + \omega([s_0(z)] \otimes [s_0(\partial(\delta(x)))]) \\
&= f_0(z) * (s_1\delta)(x) + (\partial' s_0)(z) * (s_1\delta)(x) + \omega([s_0(z)] \otimes [(f_1\delta)(x)]) \\
&\quad +\omega([(f_1\delta)(x)] \otimes [s_0(z)]) + \omega([s_0(z)] \otimes [s_0((\partial\delta)(x))]) \\
&= f_0(z) * (s_1\delta)(x) + (\partial' s_0)(z) * (s_1\delta)(x) + \omega([s_0(z)] \otimes [(f_1\delta)(x)]) \\
&\quad +\omega([(f_1\delta)(x)] \otimes [s_0(z)]) + \omega([s_0(z)] \otimes [s_0((\partial\delta)(x))]) \\
&= f_0(z) * (s_1\delta)(x) + (\partial' s_0)(z) * (s_1\delta)(x) + \omega([s_0(z)] \otimes [(\delta' f_2)(x)]) \\
&\quad +\omega([(\delta' f_2)(x)] \otimes [s_0(z)]) + \omega([s_0(z)] \otimes [s_0(0_z)]) \\
&= f_0(z) * (s_1\delta)(x) + (\partial' s_0)(z) * (s_1\delta)(x) + (\partial' s_0)(z) * f_2(x)
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 7.1: $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ bir kuadratik modül morfizmi ve (s_0, s_1) bir kuadratik f-derivasyon olmak üzere her $z \in Z, y \in Y, x \in X$ için:

$$\begin{aligned}
g_0(z) &= f_0(z) + (\partial' \circ s_0(z)) \\
g_1(y) &= f_1(y) + (s_0 \circ \partial)(y) + (\delta' \circ s_1)(y) \\
g_2(x) &= f_2(x) + (s_1 \circ \delta)(x)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $g = (g_2, g_1, g_0)$ üçlüsü $g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ şeklinde yeni bir kuadratik modül morfizmidir.

İspat: İlk olarak g_0, g_1 ve g_2 nin Lie cebir morfizmi olduğu gösterilmelidir. Bunun için ise:

$$g_0(z_1 + z_2) = g_0(z_1) + g_0(z_2) \quad \text{ve} \quad g_0(kz) = kg_0(z)$$

olduğu (benzer şekilde g_1 ve g_2 için) s_0 ve s_1 nin K-lineer olmasından dolayı açıktır.

Ayrıca her $z_1, z_2 \in Z$ için:

$$
\begin{aligned}
g_0[z_1, z_2] &= f_0([z_1, z_2]) + (\partial' s_0([z_1, z_2])) \\
&= [f_0(z_1), f_0(z_2)] + \partial'(s_0[z_1, z_2]) \\
&= [f_0(z_1), f_0(z_2)] \\
&\quad + \partial'(f_0(z_1) * s_0(z_2) - f_0(z_2) * s_0(z_1) + [s_0(z_1), s_0(z_2)]) \\
&= [f_0(z_1), f_0(z_2)] + \partial'(f_0(z_1) * s_0(z_2)) \\
&\quad - \partial'(f_0(z_2) * s_0(z_1)) + \partial'([s_0(z_1), s_0(z_2)]) \\
&= [f_0(z_1), f_0(z_2)] + [f_0(z_1), (\partial' s_0)(z_2)] - [f_0(z_2), (\partial' s_0)(z_1)] \\
&\quad + [(\partial' s_0)(z_1), (\partial' s_0)(z_2)] \\
&= [f_0(z_1), f_0(z_2)] + [f_0(z_1), (\partial' s_0)(z_2)] + [(\partial' s_0)(z_1), f_0(z_2)] \\
&\quad + [(\partial' s_0)(z_1), (\partial' s_0)(z_2)] \\
&= [f_0(z_1) + (\partial' s_0)(z_1)], [f_0(z_2) + (\partial' s_0)(z_2)] \\
&= [g_0(z_1), g_0(z_2)]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Benzer şekilde $y_1, y_2 \in Y$ için:

$$
\begin{aligned}
g_1[y_1, y_2] &= f_1([y_1, y_2]) + (s_0\partial)([y_1, y_2]) + (\delta' s_1)([y_1, y_2]) \\
&= [f_1(y_1), f_1(y_2)] + s_0[\partial(y_1), \partial(y_2)] + \delta'(s_1[y_1, y_2]) \\
&= [f_1(y_1), f_1(y_2)] + (f_0\partial)(y_1) * (s_0\partial)(y_2) - (f_0\partial)(y_2) * (s_0\partial)(y_1) \\
&\quad + [(s_0\partial)(y_1), (s_0\partial)(y_2)] + \delta'(-\omega([f_1(y_1)], [(s_0\partial)(y_2)]) \\
&\quad + \omega([f_1(y_2)], [(s_0\partial)(y_1)]) + f_1(y_1) * s_1(y_2) + (s_0\partial)(y_1) * s_1(y_2) \\
&\quad - f_1(y_2) * s_1(y_1) - (s_0\partial)(y_2) * s_1(y_1) + [s_1(y_1), s_1(y_2)]) \\
&= [f_1(y_1), f_1(y_2)] + (\partial' f_1)(y_1) * (s_0\partial)(y_2) - (\partial' f_1)(y_2) * (s_0\partial)(y_1) \\
&\quad + [(s_0\partial)(y_1), (s_0\partial)(y_2)] - \delta'\omega([f_1(y_1)], [(s_0\partial)(y_2)]) \\
&\quad + \delta'\omega([f_1(y_2)], [(s_0\partial)(y_1)]) + \delta'(f_1(y_1) * s_1(y_2)) \\
&\quad + \delta'((s_0\partial)(y_1) * s_1(y_2)) - \delta'(f_1(y_2) * s_1(y_1)) \\
&\quad - \delta'((s_0\partial)(y_2) * s_1(y_1)) + \delta'([s_1(y_1), s_1(y_2)]) \\
&= [f_1(y_1), f_1(y_2)] + \partial'(f_1(y_1)) * (s_0\partial)(y_2) - \partial'(f_1(y_2)) * (s_0\partial)(y_1) \\
&\quad + [(s_0\partial)(y_1), (s_0\partial)(y_2)] - \partial'(f_1(y_1)) * (s_0\partial)(y_2) \\
&\quad + [f_1(y_1), (s_0\partial)(y_2)] + \partial'(f_1(y_2)) * (s_0\partial)(y_1) \\
&\quad - [f_1(y_2), (s_0\partial)(y_1)] + [(f_1(y_1)), (\delta' s_1)(y_2)] \\
&\quad + [(s_0\partial)(y_1), (\delta' s_1)(y_2)] - [f_1(y_2), (\delta' s_1)(y_1)] \\
&\quad - [(s_0\partial)(y2), (\delta' s_1)(y_1)] + [(\delta' s_1)(y_1), (\delta' s_1)(y_2)] \\
&= [f_1(y_1), f_1(y_2)] + [(s_0\partial)(y_1), (s_0\partial)(y_2)] + [f_1(y_1), (s_0\partial)(y_2)] \\
&\quad + [(s_0\partial)(y_1), f_1(y_2)] + [(f_1(y_1)), (\delta' s_1)(y_2)] \\
&\quad + [(s_0\partial)(y_1), (\delta' s_1)(y_2)] + [(\delta' s_1)(y_1), f_1(y_2)] \\
&\quad + [(\delta' s_1)(y_1), f_1(y_2)] + [(\delta' s_1)(y_1), (\delta' s_1)(y_2)] \\
&= [f_1(y_1), f_1(y_2)] + [f_1(y_1), (s_0\partial)(y_2)] + [(f_1(y_1)), (\delta' s_1)(y_2)] \\
&\quad + [(s_0\partial)(y_1), f_1(y_2)] + [(s_0\partial)(y_1), (s_0\partial)(y_2)] \\
&\quad + [(s_0\partial)(y_1), (\delta' s_1)(y_2)] + [(\delta' s_1)(y_1), f_1(y_2)] \\
&\quad + [(\delta' s_1)(y_1), f_1(y_2)] + [(\delta' s_1)(y_1), (\delta' s_1)(y_2)] \\
&= [f_1(y_1) + (s_0\partial)(y_1) + (\delta' s_1)(y_1), f_1(y_2) + (s_0\partial)(y_2) + (\delta' s_1)(y_2)] \\
&= [g_1(y_1), g_1(y_1)]
\end{aligned}
$$

olur ve her $x_1, x_2 \in X$ için:

$$\begin{aligned}
g_2[x_1,x_2] &= f_2([x_1,x_2]) + (s_1\delta)([x_1,x_2]) \\
&= [f_2(x_1), f_2(x_2)] + s_1(\delta[x_1,x_2]) \\
&= [f_2(x_1), f_2(x_2)] + s_1[\delta(x_1), \delta(x_2)] \\
&= [f_2(x_1), f_2(x_2)] + [f_2(x_1), s_1(\delta(x_2))] \\
&\quad -[f_2(x_2), s_1(\delta(x_2))] + [s_1(\delta(x_1)), s_1(\delta(x_2))] \\
&= [f_2(x_1), f_2(x_2)] + [f_2(x_1), (s_1\delta)(x_2)] \\
&\quad +[(s_1\delta)(x_2), f_2(x_2)] + [(s_1\delta)(x_1), (s_1\delta)(x_2)] \\
&= [f_2(x_1) + (s_1\delta)(x_1), f_2(x_2) + (s_1\delta)(x_2)] \\
&= [g_2(x_1), g_2(x_2)]
\end{aligned}$$

olduğundan g_0, g_1, g_2 birer Lie cebir morfizmidir. Ayrıca her $y \in Y$ için;

$$\begin{aligned}
g_0(\partial(y)) &= f_0(\partial(y)) + (\partial' s_0)(\partial(y)) \\
&= f_0(\partial(y)) + \partial'((s_0\partial)(y)) + 0_z \\
&= (\partial' f_1)(y) + \partial'((s_0\partial)(y)) + \partial'\delta'(s_1(y)) \\
&= \partial'(f_1(y) + (s_0\partial)(y) + (\delta' s_1)(y)) \\
&= \partial'(g_1(y))
\end{aligned}$$

ve her $x \in X$ için;

$$\begin{aligned}
g_1(\delta(x)) &= f_1(\delta(x)) + (s_0\partial)(\delta(x)) + (\delta' s_1)(\delta(x)) \\
&= (f_1\delta)(x) + s_0((\partial\delta)(x)) + \delta'((s_1\delta)(x)) \\
&= (\delta' f_2)(x) + s_0(0_z) + \delta'((s_1\delta)(x)) \\
&= (\delta' f_2)(x) + 0_{y'} + \delta'((s_1\delta)(x)) \\
&= \delta'(f_2(x) + (s_1\delta)(x)) \\
&= \delta'(g_2(x))
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\varphi \otimes \varphi"'] & X \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "g_2"] & Y \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "g_1"] & Z \arrow[d, "g_0"] \\
C' \otimes C' \arrow[r, "\omega'"'] & X' \arrow[r, "\delta'"'] & Y' \arrow[r, "\partial'"'] & Z'
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Son olarak bu morfizmlerin Lie cebir etkilerini ve kuadratik ω liftingi koruduğu gösterilmelidir. Her $z \in Z, y_1, y_2 \in Y, x \in X$ için;

$$\begin{aligned}
g_1(z*y) &= f_1(z*y) + (s_0\partial)(z*y) + (\delta' s_1)(z*y) \\
&= f_0(z)*f_1(y) + s_0(\partial(z*y)) + \delta'(s_1(z*y)) \\
&= f_0(z)*f_1(y) + s_0[z,\partial(y)] + \delta'(s_1(z*y)) \\
&= f_0(z)*f_1(y) + f_0(z)*(s_0\partial)(y) - (f_0\partial)(y)*s_0(z) \\
&\quad + [s_0(z),(s_0\partial)(y)] + \delta'((f_0(z)*s_1(y) \\
&\quad + (\partial' s_0)(z)*s_1(y) + \omega([s_0(z)],[f_1(y)]) + \omega([f_1(y)],[s_0(z)]) \\
&\quad +\omega([s_0(z)],[(s_0\partial)(y)])) \\
&= f_0(z)*f_1(y) + f_0(z)*(s_0\partial)(y) - \partial'(f_1(y))*s_0(z) \\
&\quad + [s_0(z),(s_0\partial)(y)] + \delta'(f_0(z)*s_1(y)) \\
&\quad +\delta'((\partial' s_0)(z)*s_1(y)) + \delta'\omega([s_0(z)],[f_1(y)]) \\
&\quad +\delta'\omega([f_1(y)],[s_0(z)]) + \delta'\omega([s_0(z)],[(s_0\partial)(y)]) \\
&= f_0(z)*f_1(y) + f_0(z)*(s_0\partial)(y) - \partial'(f_1(y))*s_0(z) \\
&\quad + [s_0(z),(s_0\partial)(y)] + f_0(z)*(\delta' s_1)(y) \\
&\quad + (\partial' s_0)(z)*(\delta' s_1)(y) + (\partial' s_0)(z)*f_1(y) \\
&\quad - [s_0(z),f_1(y)] + (\partial' f_1)(y)*s_0(z) - [f_1(y),s_0(z)] \\
&\quad + (\partial' s_0)(z)*(s_0\partial)(y) - [s_0(z),(s_0\partial)(y)] \\
&= f_0(z)*f_1(y) + f_0(z)*(s_0\partial)(y) + f_0(z)*(\delta' s_1)(y) \\
&\quad + (\partial' s_0)(z)*f_1(y) + (\partial' s_0)(z)*(s_0\partial)(y) \\
&\quad + (\partial' s_0)(z)*(\delta' s_1)(y) \\
&= (f_0(z) + (\partial' s_0)(z))*(f_1(y) + (s_0\partial)(y) + (\delta' s_1)(y)) \\
&= g_0(z)*g_1(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2(z*x) &= f_2(z*x) + (s_1\delta)(z*x) \\
&= f_0(z)*f_2(x) + s_1(\delta(z*x)) \\
&= f_0(z)*f_2(x) + s_1(z*\delta(x)) \\
&= f_0(z)*f_2(x) + f_0(z)*(s_1\delta)(x) + (\partial' s_0)(z)*(s_1\delta)(x) \\
&\quad + (\partial' s_0)(z)*f_2(x) \\
&= f_0(z)*f_2(x) + f_0(z)*(s_1\delta)(x) + (\partial' s_0)(z)*f_2(x) \\
&\quad + (\partial' s_0)(z)*(s_1\delta)(x) \\
&= (f_0(z) + (\partial' s_0)(z))*(f_2(x) + (s_1\delta)(x)) \\
&= g_0(z)*g_2(x)
\end{aligned}$$

olup etkiler korunur. Son olarak

$$\begin{aligned}
& g_2(\omega([y_1],[y_2])) \\
= \; & f_2\left(\omega\left(\left[y_1\right],\left[y_2\right]\right)\right)+\left(s_1\delta\right)\left(\omega\left(\left[y_1\right],\left[y_2\right]\right)\right) \\
= \; & \omega'\left(\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]\right)+s_1\left(\delta\left(\omega\left(\left[y_1\right],\left[y_2\right]\right)\right)\right) \\
= \; & \omega'\left(\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]\right)+s_1\left(\partial\left(y_1\right)*y_2-\left[y_1,y_2\right]\right) \\
= \; & \omega'\left(\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]\right)+s_1\left(\partial\left(y_1\right)*y_2\right)-s_1\left(\left[y_1,y_2\right]\right) \\
= \; & \omega'\left(\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]\right)+\left(f_0\partial\right)*s_1\left(y_2\right)+\partial'\left(\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right)*s_1\left(y_2\right) \\
& +\omega'\left(\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]\right)+\omega'\left(\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)\right]\right) \\
& +\omega'\left(\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)\right]\right)-\omega'\left(\left[f_1\left(y_2\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right]\right) \\
& -f_1\left(y_1\right)*s_1\left(y_2\right)-\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)*s_1\left(y_2\right)+f_1\left(y_2\right)*s_1\left(y_1\right) \\
& +\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)*s_1\left(y_1\right)-\left[s_1\left(y_1\right),s_1\left(y_2\right)\right] \\
= \; & \omega'\left(\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]\right)+\partial'\left(f_1\left(y_1\right)\right)*s_1\left(y_2\right)+\partial'\left(\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right)*s_1\left(y_2\right) \\
& +\omega'\left(\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]\right)+\omega'\left(\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)\right]\right) \\
& +\omega'\left(\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)\right]\right)-\omega'\left(\left[f_1\left(y_2\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right]\right) \\
& -f_1\left(y_1\right)*s_1\left(y_2\right)-\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)*s_1\left(y_2\right)+f_1\left(y_2\right)*s_1\left(y_1\right) \\
& +\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)*s_1\left(y_1\right)-\left[s_1\left(y_1\right),s_1\left(y_2\right)\right] \\
= \; & \omega'\left(\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]\right)+\omega'\left(\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right],\left[f_1\left(y_1\right)\right]\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right],\left[f_1\left(y_1\right)\right]\right) \\
& +\omega'\left(\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right]+\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right]\right) \\
& +\omega'\left(\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]\right)+\omega'\left(\left[f_1\left(y_2\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right]\right) \\
& +\omega'\left(\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)\right]\right)+\omega'\left(\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)\right]\right) \\
& -\omega'\left(\left[f_1\left(y_2\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right]\right)-\omega'\left(\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right],\left[f_1\left(y_1\right)\right]\right) \\
& -\omega'\left(\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right]\right)+\omega'\left(\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]\right) \\
& +\omega'\left(\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(s_{0\partial}\right)\left(y_2\right)\right]\right)+\omega'\left(\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right]\right) \\
= \; & \omega'(\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]+\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right] \\
& +\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right]+\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right] \\
& +\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)\right]+\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)\right] \\
& +\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]+\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)\right]+\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right]) \\
= \; & \omega'(\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]+\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)\right]+\left[f_1\left(y_1\right)\right],\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right] \\
& +\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]+\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)\right]+\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right] \\
& +\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)\right]+\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)\right]+\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_1\right)\right],\left[\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right]) \\
= \; & \omega'(\left[f_1\left(y_1\right)+\left(s_0\partial\right)\left(y_1\right)+\left(\delta s_1\right)\left(y_1\right)\right],\left[f_1\left(y_2\right)+\left(s_0\partial\right)\left(y_2\right)+\left(\delta s_1\right)\left(y_2\right)\right]) \\
= \; & \omega\left(\left[g_1\left(y_1\right)\right],\left[g_1\left(y_2\right)\right]\right)
\end{aligned}$$

olup ω kuadratik dönüşümü korunur.

Sonuç olarak (f, s_0, s_1) üçlüsü, f morfizmini g morfizmine bağlayan bir **homotopi** olarak adlandırılır ve

$$f \xrightarrow{(f,s_0,s_1)} g$$

şeklinde gösterilir.

Tüm bu verilenler diyagramatik olarak aşağıdaki şekilde özetlenir:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, bend right, "g_2"'] \arrow[d, bend left, "f_2"] & Y \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[d, bend right, "g_1"'] \arrow[d, bend left, "f_1"] & Z \arrow[dl, "s_0"'] \arrow[d, bend right, "g_0"'] \arrow[d, bend left, "f_0"] \\
X' \arrow[r, "\delta'"'] & Y' \arrow[r, "\partial'"'] & Z'
\end{tikzcd}$$

7.3 Gruboid

Yardımcı Teorem 7.2: $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ Lie cebirler üzerinde bir kuadratik modül morfizmi olmak üzere, sıfır morfizmler yardımıyla tanımlanan $(0_{s_0}, 0_{s_1})$ ikilisi için;

$$f \xrightarrow{(f_0,0_{s_0},0_{s_1})} f$$

olur.

İspat: **Yardımcı Teorem (6.1)** in ispatına benzer niteliktedir.

7.3.1 XMod$_L$ homotopisi- QM$_L$ homotopisi analizi

$f, g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ Lie cebir üzerinde birer kuadratik modül morfizmi ve (s_0, s_1) ikilisi f ile g yi bağlayan bir kuadratik f-derivasyonu olsun, çaprazlanmış modül durumunda olduğu gibi bu dönüşümlerin toplamsal negatifleri yardımıyla tanımlanan $(-s_0, -s_1)$ ikilisi ele alınsın.

Kuadratik modül sisteminin diyagramı göz önüne alınırsa ∂ (nil(2)) Peiffer nilpotent sınıfı 2 olan bir ön-çaprazlanmış modüldür. Bu yüzden $(-s_0, -s_1)$ ikilisi genel olarak bir kuadratik g-derivasyon değildir ve $-s_0$ için f_0-derivasyonu dahi tanımlanamaz.(**Not 6.1**)

Bununla beraber $f, g, h : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ birer Lie cebir üzerinde kuadratik modül morfizmi olmak üzere;

$$f \xrightarrow{(f_0,s_0,s_1)} g \qquad \text{ve} \qquad g \xrightarrow{(f_0,s'_0,s'_1)} h$$

homotopileri verilsin. Bu durumda;

$$h_0(z) = f_0(z) + (\partial' \circ (s_0 + s'_0))(z), \tag{7.3.1}$$

$$h_1(y) = f_1(y) + ((s_0 + s'_0) \circ \partial)(y) + (\delta \circ (s_1 + s'_1))(y), \tag{7.3.2}$$

$$h_2(x) = f_2(x) + ((s_1 + s'_1) \circ \delta)(x) \tag{7.3.3}$$

eşitlikleri kolayca elde edilebilir. Bu şekilde de sezgisel olarak f ile h yi birbirine bağlayacak yeni homotopinin yine $nil(1)$ yani çaprazlanmış modül durumunda olduğu gibi toplama işlemi yardımıyla elde edilebileceği düşünülebilir.
Fakat $(s_0 + s'_0)$ ikilisi genel olarak f_0-derivasyonunu tanımlamaz. Çünkü yukarıda bahsedilen problemdeki gibi $(XMod_L 2))$ özelliğine ihtiyaç duyulur.

Lie cebirlerin üzerinde çaprazlanmış modüllerin homotopilerinin birbirine bağlanması için kullanılan ikili işlem olan toplama işlemi, ve bu işlem için ters eleman niteliğindeki toplamsal ters; Lie cebirlerin kuadratik modül morfizmlerinin homotopileri söz konusu olduğunda geçerli değildir.

Bu analizin sonucunda çaprazlanmış modül morfizmlerindeki durumdan farklı olarak kuadratik modül morfizmlerinin homotop olma bağıntısının bu şartlarda bir denklik bağıntısı olamayacağı görülür.

7.3.2 Anahtar fikir

Bu problemin çözülebilmesi için, belirli kısıtlamalar getirilmesi gerekmektedir. Bunun için $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ arasında tanımlanan Lie cebirlerin kuadratik modül morfizmlerinin homotopisi için tezin bundan sonraki kısımında $\mathcal{L} = (\omega, \delta, \partial)$ bir serbest$_1$ kuadratik modül olarak sabitlenecektir. Yani Z, sabit bir $M \subset Z$ tabanı üzerinde tanımlı bir serbest Lie cebir (**Tanım 4.13**) olacaktır. Bu özel durumun Lie cebirlerin kuadratik modül kategorisi üzerinde bir model kategori yapısında cofibrant objeye karşılık gelmesi beklenir (Dwyer ve Spalinski, 1995). Bu durum gruplar için Gohla ve Martins (2013) tarafından detaylı bir şekilde incelenmiş olup Lie cebirler (kuadratik modül) için model kategori kısmına bu çalışmada değinilmeyerek ileriki bir başka çalışmada ele alınacaktır.

Yardımcı Teorem 7.3: $f = (f_2, f_1, f_0) : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ bir Lie cebir üzerinde kuadratik modül morfizmi olmak üzere, $s_0 : Z \to Y'$ şeklindeki f_0-derivasyonu ile

$$\alpha : z \in Z \mapsto (f_0(z), s_0(z)) \in (Z' \ltimes_{*'_1} Y') = \mathcal{L}'_1$$

şeklinde tanımlı bir Lie cebir morfizmi arasında bire-bir eşleme vardır. Bu özellikle birlikte aşağıda verilecek olan yardımcı teorem, mevcut problemin çözümünde anahtar rolü üstlenecektir.

Yardımcı Teorem 7.4: Z (M tabanlı) bir serbest Lie cebir olsun. Bu durumda $s_0 : Z \to Y'$ f_0-derivasyonu, serbest Lie cebirin evrensellik özelliği dolayısıyla, $M \subset Z$ serbest tabanı altındaki değerler yardımıyla biricik tanımlanır. Böylece herhangi bir $s_0^* : Z \to Y'$ fonksiyon ailesi

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "incl"] \arrow[dr, "(f_0, s_0^*)"'] & Z \arrow[d, dotted, "\exists ! \; (f_0, s_0)"] \\ & \mathcal{L}'_1 \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı altında genişleyerek biricik $s_0 : Z \to Y'$ f_0-derivasyonunu tanımlar.

7.3.3 Homotopilerin kompozisyonu

$f, g, h : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ birer Lie cebir üzerinde kuadratik modül morfizmleri olmak üzere

$$f \xrightarrow{(f_0, s_0, s_1)} g \qquad \text{ve} \qquad g \xrightarrow{(f_0, s_0', s_1')} h$$

homotopileri verilsin.

Tanım 7.2: $s_0 \boxplus s_0' : Z \to Y'$ derivasyonu $s_0 + s_0'$ fonksiyonunun M tabanına kısıtlanmasının serbest Lie cebrin evrensellik özelliğinden yukarıdaki gibi bir diyagram ile elde edilen biricik f_0-derivasyonu olarak tanımlansın.
Burada diyagramın değişmeliliği göz önüne alınırsa, her $m \in M$ elemanı için

$$(s_0 \boxplus s_0')(m) = (s_0 + s_0')(m)$$

şeklindedir:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "incl"] \arrow[dr, "(f_0, s_0 + s_0')"'] & Z \arrow[d, dotted, "\exists ! \; (f_0, s_0 \boxplus s_0')"] \\ & \mathcal{L}'_1 \end{tikzcd}$$

Yukarıdaki diyagram ile elde edilen bu yeni kuadratik derivasyonun açık cebirsel formunun neye karşılık geldiğini görmek için bu amaçla bazı yardımcı fonksiyon ve morfizmlerin tanımlanması gerekir.
$\mathcal{L}' = (\omega', \delta', \partial')$ üzerindeki 2-simpleks tanımı kullanılarak,

$$\beta : M \to (Z' \ltimes_{*_1'} Y') \ltimes_{\odot'} (Y' \ltimes_{*_2'} X') = \mathcal{L}'_2$$

fonksiyonu her $m \in M$ için

$$\beta(m) = (f_0, (m), s_0(m), s_0'(m), 0)$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon geometrik olarak:

$$m \in M \overset{\beta}{\longmapsto}
\begin{tikzcd}
 & f_0(m) + \partial(s_0(m)) + \partial(s_0'(m)) \\
f_0(m) \arrow[r, "s_0(m)"'] \arrow[ur, "s_0(m)+s_0'(m)"] & f_0(m) + \partial(s_0(m)) \arrow[u, "0"', "s_0(m)+\delta(0)"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & h_0(m) \\
f_0(m) \arrow[r, "s_0(m)"'] \arrow[ur, "(s_0+s_0')(m)"] & g_0(m) \arrow[u, "0"', "s_0'(m)"]
\end{tikzcd}$$

şeklindedir.

Bu durumda serbest Lie cebirin evrensellik özelliği gereği, β fonksiyonunun

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "incl"] \arrow[dr, "\beta"'] & Z \arrow[d, dotted, "\exists!"', "\Omega^{(s_0,s_0')}"] \\
 & \mathcal{L}'_2
\end{tikzcd} \tag{7.3.4}$$

diyagramı altında genişlemesiyle biricik

$$\Omega^{(s_0,s_0')} = Z \to (Z' \ltimes_{*_1'} Y') \ltimes_{\odot'} (Y' \ltimes_{*_2'} X') = \mathcal{L}'_2$$

Lie cebir morfizmi mevcuttur.

Diyagramın değişme özelliğini düşündüğümüzde her $m \in m$ için;

$$\Omega^{(s_0,s_0')}(m) = (f_0, (m), s_0(m), s_0'(m), 0) = \beta(m)$$

olur. Burada genel olarak $z \in Z$ için bu eşitlik geçerli değildir. Bu yüzden $\Omega^{(s_0,s_0')}(z)$ elemanı aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$\Omega^{(s_0,s_0')}(z) \neq (f_0, (z), s_0(z), s_0'(z), 0) = \beta(z)$$

Burada $\Omega^{(s_0,s_0')}(z) \in \mathcal{L}'_2$ elemanı **Tanım 5.3** de verilen d_1 morfizmi ve **Yardımcı teorem 7.4** den faydanılarak , biricik biçimde tanımlanmış olan $\eta^{(s_0,s_0')} : Z \to X'$ dönüşümünün yardımı ile aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$\Omega^{(s_0,s_0')}(z) =
\begin{tikzcd}
 & h_0(z) \\
f_0(m) \arrow[r, "s_0(m)"'] \arrow[ur, "(s_0 \boxplus s_0')(z)"] & g_0(m) \arrow[u, "\eta^{(s_0,s_0')}", "s_0'(z)"']
\end{tikzcd} \tag{7.3.5}$$

Böylelikle aşağıdaki sonuç elde edilir.

Yardımcı Teorem 7.5: Yukarıda tanımlanan $\eta^{(s_0,s_0')} : Z \to X'$ dönüşümü her $z, z' \in Z$ için;

$$
\begin{aligned}
\eta^{(s_0,s_0')}([z,z']) = {} & f_0(z) *_2' \eta^{(s_0,s_0')}(z') - f_0(z') *_2' \eta^{(s_0,s_0')}(z) + s_0(z) *_2' \eta^{(s_0,s_0')}(z') \\
& + s_0'(z) *_2' \eta^{(s_0,s_0')}(z') - s_0(z') *_2' \eta^{(s_0,s_0')}(z) - s_0'(z') *_2' \eta^{(s_0,s_0')}(z) \\
& - \omega([s_0(z')],[s_0'(z)]) + \omega([s_0(z)],[s_0'(z')]) - [\eta^{(s_0,s_0')}(z), \eta^{(s_0,s_0')}(z')]
\end{aligned}
$$

şartını sağlayan bir K-lineer dönüşümüdür. Ayrıca 2-simpleksin tanımı gereği $\eta^{(s_0,s_0')}$ dönüşümü her $z \in Z$ için

$$(s_0 \boxplus s_0')(z) = s_0(z) + s_0'(z) - (\delta' \circ \eta^{(s_0,s_0')})(z)$$

şeklindedir. Burada $\eta^{(s_0,s_0')}$ dönüşümü $(s_0 \boxplus s_0')(z)$ ile $(s_0' + s_0')(z)$ arasındaki cebirsel farkın δ' morfizmi yardımıyla ölçülmesini sağlar.

İspat: (7.3.1), (7.3.2), (7.3.3) de verilen eşitlikler, yarı-direkt Lie çarpımı tanımı (**Tanım 5.1**) ve **Yardımcı Teorem 5.3** de verilen etki gereği 2-simpleks yapısının (**Tanım 5.1**) bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır.

Diğer yandan $(s_0 \boxplus s_0')(z) = s_0(z) + s_0'(z) - (\delta' \circ \eta^{(s_0,s_0')})(z)$ ise; **Yardımcı Teorem 5.2** de verilen simplisel formun (7.3.5) üzerinde uygulanarak çözülmesi sonucu direkt olarak elde edilir.

Not 7.2: $\eta^{(s_0,s_0')}(z)$ elemanı $z \in M \subset Z$ durumunda sıfıra eşittir. Bu şekilde düşünüldüğünde 2- simpleks için tanımladığımız üçgen dekompoze edilerek sıralı dörtlü biçimindeki gösterime geçilir ve aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 7.2:

$$
\begin{aligned}
\Omega^{(s_0,s_0')} : Z & \longrightarrow (Z' \ltimes_{*_1'} Y') \ltimes_{\odot'} (Y' \ltimes_{*_2'} X') \\
z & \longmapsto (f_0(z), s_0(z) + s_0'(z), -(\delta' \circ \eta^{(s_0,s_0')})(z), \eta^{(s_0,s_0')}(z))
\end{aligned}
$$

şekilde tanımlı bir Lie cebir homomorfizmi mevcuttur.

Burada $\Omega^{(s_0,s_0')}$ Lie cebir morfizminin

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "incl"] \arrow[dr, "\beta"'] & Z \arrow[d, dotted, "\exists!\ \Omega^{(s_0,s_0')}"] \\
 & \mathcal{L}'_2
\end{tikzcd}
$$

diyagramındaki biricik morfizmden yola çıkarak tanımlandığını söylemekte yarar vardır.

Şimdi $\eta^{(s_0,s_0')} : Z \to X'$ dönüşümüne ait birkaç cebirsel özelliği üzerinde durulacaltır.

Yardımcı Teorem 7.6: s_0 ya da s_0' derivasyonlarından biri sıfıra eşit ise

$$\eta^{(s_0,s_0')} = 0$$

olur.

İspat: İlk olarak $s_0 = 0$ durumu ele alınırsa. $\Omega^{(s_0,s_0')} : Z \to \mathcal{L}_2'$ morfizminin tanımı ile her $m \in M$ için:

$$\Omega^{(s_0,s_0')}(m) = \begin{tikzcd} & & f_0(m)+\partial(s_0(m))+\partial(s_0'(m)) \\ f_0(m) \arrow[urr, "s_0(m)+s_0'(m)"] \arrow[rr, "s_0(m)"'] & & f_0(m)+\partial(s_0(m)) \arrow[u, "0", "s_0'(m)+\delta(0)"'] \end{tikzcd}$$

elde edilir. Kabul gereği $s_0' = 0$ olduğundan dolayı da $\Omega^{(s_0,s_0')}(m) \in \mathcal{L}_2'$ elemanı:

$$\Omega^{(s_0,s_0')}(m) = \begin{tikzcd} & & f_0(m)+\partial(s_0(m)) \\ f_0(m) \arrow[urr, "s_0(m)"] \arrow[rr, "s_0(m)"'] & & f_0(m)+\partial(s_0(m)) \arrow[u, "0", "0"'] \end{tikzcd}$$

şeklinde indirgenir. Elde edilen bu sonuç **Tanım (5.4)** ve **Yardımcı teorem (7.3)** yardımıyla:

$$\begin{aligned} s_0(f_0(m) \longrightarrow (f_0(m)+\partial(s_0(m)))) &= s_0(f_0(m), s_0(m)) \\ &= (s_0 \circ \mu)(m) \end{aligned}$$

olacaktır. Yani her $m \in M \subset Z$ serbest taban elemanı için:

$$\Omega^{(s_0,s_0')}(m) = (s_0 \circ \mu)(m)$$

elde edilir. Bu iki elemanın eşit olması, serbest Lie cebirin evrensellik özelliği altında genişlemeleri olan $Z \to \mathcal{L}_2'$ Lie cebir homomorfizmlerinin de her $z \in Z$ için:

$$\Omega^{(s_0,s_0')}(z) = (s_0 \circ \mu)(z)$$

şeklinde birbirine eşit olmasını gerektirmektedir. Bu eşitlik ise, $\Omega^{(s_0,s_0')}$ nün tanımı, diyagram (7.3.5) ve bununla birlikte s_0 dejenere dönüşümünün simplisel formu (**Tanım (5.4)**) yardımıyla:

$$\begin{tikzcd} & f_0(z)+\partial(s_0(z)) \\ f_0(z) \arrow[ur, "s_0(z)-\delta(\eta^{(s_0,0)}(z))"] \arrow[r, "s_0(z)"'] & f_0(z)+\partial(s_0(z)) \arrow[u, "-\delta(\eta^{(s_0,0)}(z))"'] \arrow[u, phantom, "\boxed{\mathrm{X}}", shift right=4ex] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & f_0(z)+\partial(s_0(z)) \\ f_0(z) \arrow[ur, "s_0(z)"] \arrow[r, "s_0(z)"'] & f_0(z)+\partial(s_0(z)) \arrow[u, "0"'] \arrow[u, phantom, "\boxed{0}", shift right=4ex] \end{tikzcd}$$

yani her $z \in Z$ için:

$$\eta^{(s_0,0)} = 0$$

olur ve benzer şekilde $s_0' = 0$ için de $\eta^{(s_0,s_0')}(z) = 0$ olduğu ispatlanır.

Yardımcı Teorem 7.7: $0_{s_0} : Z \to Y'$ sıfır dönüşümü için

$$s_0 \boxplus 0_{s_0} = s_0 \qquad ve \qquad 0_{s_0} \boxplus s_0 = s_0$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: $\boxplus$ işlemi diyagramatik olarak **Tanım 7.2** gereği, s_0 ın bir derivasyon olmasının yardımıyla istenilen sonuçlar elde edilir ve buna alternatif olarak

$$(s_0 \boxplus s_0')(z) = s_0(z) + s_0'(z) - (\delta' \circ \eta^{(s_0,s_0')})(z)$$

eşitliğinde **Yardımcı Teorem 7.6** nın kullanılmasıyla ispatlanır.

Tanım 7.3: Mevcut olan $f \xrightarrow{(f,s_0,s_1)} g$ ve $g \xrightarrow{(g,s_0',s_1')} h$ homotopileri için:

$$(s_1 \boxplus s_1')(y) = s_1(y) + s_1'(y) + (\eta^{(s_0,s_0')} \circ \partial)(y)$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: **Yardımcı Teorem 7.6** gereği, s_0' ya da s_0 nin sıfır olması durumunda sırasıyla:

$$s_1 \boxplus 0_{s_1} = s_1 \qquad ve \qquad 0_{s_1'} \boxplus s_1' = s_1'$$

elde edilir.

Yukarıda mevcut tanımlamalarla birlikte aşağıdaki verilecek olan teorem tezin en önemli teoremlerinden birisi olacaktır:

Teorem 7.3: $f, g, h : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ şeklindeki Lie cebirler üzerinde kuadratik modül morfizmleri için:

$$f \xrightarrow{(f,s_0,s_1)} g \quad ve \quad g \xrightarrow{(g,s_0',s_1')} h$$

homotopileri verilsin. Bu durumda $(s_0 \boxplus s_0', s_1 \boxplus s_1')$ ikilisi, f ile g yi bağlayan:

$$f \xrightarrow{(f,s_0 \boxplus s_0',s_1 \boxplus s_1')} h$$

şeklinde bir homotopi (kuadratik f-derivasyon) tanımlar.

İspat: Burada önceki bölümde tanımlanan $s_0 \boxplus s_0'$ dönüşümü tanımı gereği bir f_0-derivasyondur. $s_1 \boxplus s_1'$ şeklinde tanımlanan dönüşümün ise **Tanım 7.1** de verilen şartı $\eta^{(s_0,s_0')}([z,z'])$ yardımıyla sağladığı uzun işlemler dizisi sonucu görülmektedir. Bu yüzden $(s_0 \boxplus s_0', s_1 \boxplus s_1')$ ikilisi bir kuadratik derivasyon olmakta, daha da ötesi, (7.1) de verilen şartların da geçerli olması nedeniyle f ile h yi bağlayan bir kuadratik derivasyondur.

7.3.4 Ters kuadratik derivasyon

$f, g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ Lie cebirleri üzerinde kuadratik modül morfizmleri için;

$$f \xrightarrow{(f,s_0,s_1)} g$$

homotopisi verilsin. ($\mathcal{L}$; $M \subseteq Z$ sabit tabanı ile beraber serbest$_1$ kuadratik modüldür.)

g ile f yi bağlayan ve aynı zamanda gruboid yapısı için (s_0, s_1) kuadratik derivasyonunun tersini oluşturan:

$$g \xrightarrow{(f,t_0,t_1)} f$$

homotopisi, yani (t_0, t_1) kuadratik g-derivasyonu tanımlanacaktır. Mevcut $f \xrightarrow{(f,s_0,s_1)} g$ homotopisi kullanılarak:

$$g_0(z) = f_0(z) + (\partial' \circ s_0)(z) \quad \text{ya da} \quad f_0(z) = g_0(z) + (\partial' \circ -s_0)(z)$$

eşitlikleri kolayca elde edilir. Bu eşitlikte, $-s_0 : Z \to Y'$ dönüşümü her ne kadar homotopinin t_0 bileşeni için doğru bir tercih gibi gözükse de $-s_0$ genel olarak bir g_0-derivasyon olmadığından dolayı uygun bir fikir olmayacaktır.

Tanım 7.4: $t_0 : Z \to Y'$ derivasyonu $-s_0$ nin (M ye kısıtlaması) serbest Lie cebirin evrensellik özelliğin altında genişlemesi **(Yardımcı Teorem 7.4**), yani;

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "incl"] \arrow[dr, "(f_0,-s_0)"'] & Z \arrow[d, dotted, "\exists!\ (f_0,t_0)"] \\ & \mathcal{L}'_1 \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramıyla elde edilen biricik g_0-derivasyon olarak tanımlanır.

Yardımcı Teorem 7.8: Yukarıda elde edilen şekil sayesinde tanımlı t_0 için:

$$s_0 \boxplus t_0 = 0_{s_0} \quad ve \quad t_0 \boxplus s_0 = 0_{s_0}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: **Yardımcı teorem 7.4** ve $\boxplus$ işlemi diyagramatik tanımı (**Tanım 7.2**) gereği; her $M \subseteq Z$ elemanı için

$$(s_0 + t_0)(m) = (s_0 + (-s_0))(m) = 0$$

olup, bu fonksiyonun genişlemesi olan $s_0 \boxplus t_0$ derivasyonu için sonuç sıfır morfizmidir. (Sıfır morfizminin derivasyon olduğu aşikârdır.) Benzer ispat diğer durum içinde geçerli olacaktır.

Ters homotopinin ikinci birleşeni ise şu şekildedir:

Tanım 7.5: Yukarda tanımlı olan şartları göz önünde tutarak,

$$t_1 = -s_1 - (\eta^{(s_0,t_0)} \circ \partial)$$

şeklinde tanımlanır. Böylelikle:

$$s_1 \boxplus t_1 = 0_{s_1} \quad ve \quad t_1 \boxplus s_1 = 0_{s_1}$$

eşitlikleri aşikârdır.

Sonuç olarak:

Teorem 7.4: $f, g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ Lie cebirler üzerinde kuadratik modül morfizmleri ve $f \xrightarrow{(f,s_0,s_1)} g$ homotopisi için yukardaki şekilde tanımlı (**Tanım 7.4**) (t_0, t_1) ikilisi, g ile f yi bağlayan;

$$g \xrightarrow{(f,t_0,t_1)} f$$

şeklinde bir homotopi (kuadratik g-derivasyon) tanımlar.

İspat: **Teorem 7.3** ün ispatıyla aynıdır.

7.3.5 Kompozisyonun asosyatifliği

$f, g, h, k : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ birer Lie cebir üzerinde kuadratik modül morfizmleri olmak üzere

$$f \xrightarrow{(f,s_0,s_1)} g \quad g \xrightarrow{(g,s_0',s_1')} h \quad h \xrightarrow{(h,s_0'',s_1'')} k$$

homotopileri verilsin. Serbest tabandan seçilen her $m \in M \subset Z$ elemanı için:

$$(s_0 \boxplus (s_0' \boxplus s_0'')(m) = ((s_0 \boxplus s_0') \boxplus s_0'')(m)$$

eşitliği geçerlidir. Bu nedenle **Yardımcı teorem 7.4** gereği, bu iki elemanın genişlemeleri olan homotopiler için: her $z \in Z$

$$(s_0 \boxplus (s_0' \boxplus s_0'')(z) = ((s_0 \boxplus s_0') \boxplus s_0'')(z)$$

şeklindedir ve homotopinin ilk bileşeni için asosyatiflik kolayca sağlanmış olur. Homotopinin ikinci birleşeninin asosyatifliği için ise 3-simpleks tanımından yaralanarak:

$$\begin{aligned}
\Psi : M &\longrightarrow \mathcal{L}'_3 = ((Z' \ltimes_{*_1} Y') \ltimes_{\odot} (Y' \ltimes_{*_2} X')) \ltimes_{\blacktriangleright\ominus} ((Y' \ltimes_{*_2} X') \ltimes_{\blacktriangleright} X' \\
m &\longmapsto (f_0(m), s_0(m), s_0'(m), 0, s_0''(m), 0, 0)
\end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın.

Tanımlanan $\Psi(m)$ fonksiyonu simplisel form olarak:

$$\begin{tikzcd}
 & & f_0(m)+\partial(s_0(m))+\partial(s_0'(m))+\partial(s_0''(m)) & & \\
 & \boxed{0+0} & f_0(m)+\partial(s_0(m))+\partial(s_0'(m)) \arrow[u, "s_0''(m)"] & \boxed{0} & \\
f_0(m) \arrow[uurr, "s_0(m)+s_0'(m)+s_0''(m)"] \arrow[urr, "s_0(m)+s_0'(m)"'] \arrow[rrrr, "\boxed{0}", "s_0(m)"'] & & & & f_0(m)+\partial(s_0(m)) \arrow[uull, "s_0'(m)+s_0''(m)+\delta(0)+\delta(0)"'] \arrow[ull, "s_0'(m)+\delta(0)"]
\end{tikzcd}$$

ya da kısaca

$$\begin{tikzcd}
 & & k_0(m) & & \\
 & \boxed{0} & h_0(m) \arrow[u, "s_0''(m)"] & \boxed{0} & \\
f_0(m) \arrow[uurr, "s_0(m)+s_0'(m)+s_0''(m)"] \arrow[urr, "s_0(m)+s_0'(m)"'] \arrow[rrrr, "\boxed{0}", "s_0(m)"'] & & & & g_0(m) \arrow[uull, "s_0'(m)+s_0''(m)"'] \arrow[ull, "s_0'(m)"]
\end{tikzcd}$$

şeklinde resmedilir.

Serbest Lie cebirin evrensellik özelliği dolaysıyla $\Psi : M \rightarrow \mathcal{L}'_3$ fonksiyonunun değişmeli:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook, "incl"] \arrow[dr, "\Psi"'] & Z \arrow[d, dotted, "\exists!\ \lambda"] \\ & \mathcal{L}'_3 \end{tikzcd}$$

diyagramı altında genişlemesiyle tanımlanan bir $\lambda : Z \rightarrow \mathcal{L}'_3$ Lie cebir morfizmi mevcut olacaktır. **Tanım 5.6** da tanımlanan $d_{0,1,2,3}$ morfizmleri ve **yardımcı teorem 7.4** kullanılarak, her $z \in Z$ için:

$$\lambda(z) = \begin{tikzcd} & k_0(z) & \\ & h_0(z) \arrow[u, "s''_0(z)"] & \\ f_0(z) \arrow[uur, "(s_0 \boxplus s'_0 \boxplus s''_0)(z)"] \arrow[ur, "(s_0 \boxplus s'_0)(z)"'] \arrow[ur, phantom, bend left=40, "\eta^{(s_0 \boxplus s'_0, s''_0)(z)}"] \arrow[rr, "\eta^{(s_0, s'_0)(z)}", "s_0(z)"'] & & g_0(z) \arrow[uul, "(s'_0 \boxplus s''_0)(m)"'] \arrow[ul, "s'_0(z)"] \arrow[ul, phantom, bend right=40, "\eta^{(s'_0, s''_0)(z)}"'] \end{tikzcd}$$

simplisel formu elde edilir.

Şimdi 3-simpleks dekompoze edilerek, bölüm (7.3.3) de verilen tanım ve yapılar ile mevcut kompozisyonun asosyatifliğini tanımlamak için gerekli olan sıradaki teorem verilecektir.

Teorem 7.5: Her $z \in Z$ için:

$$\Psi : Z \to \mathcal{L}'_3 = ((Z' \ltimes_{*'_1} Y') \ltimes_{\odot'} (Y' \ltimes_{*'_2} X')) \ltimes_{\blacktriangleright'_{\ominus'}} ((Y' \ltimes_{*'_2} X') \ltimes_{\blacktriangleright'} X')$$

$$\begin{aligned} z \longmapsto &(f_0(z), s_0(z), s'_0(z) - (\delta' \circ \eta^{(s'_0,s''_0)}(z), \eta^{(s'_0,s''_0)})(z), s''_0(z) \\ &- (\delta \circ \eta^{(s_0 \boxplus s'_0,s''_0)})(z), \eta^{(s_0 \boxplus s'_0,s''_0)}(z) - \eta^{(s'_0,s''_0)}(z), \eta^{(s'_0,s''_0)}(z)) \end{aligned}$$

şekilde tanımlı bir Lie cebir morfizmi yukardaki diyagramı değişmeli yapan biricik morfizm, olarak tanımlansın.

$\pi = d_1 \circ \Psi : Z \to \mathcal{L}_2$ şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. Burada **Tanım 5.6** hatırlanacak olursa, tanımlanan bu dönüşüm yukarıdaki tetrahedronun arka yüzeyini yani bir başka deyişle, $z \in Z$ için:

$$\pi(z) = \begin{tikzcd} & k_0(z) & \\ f_0(z) \arrow[ur, "(s_0 \boxplus s'_0 \boxplus s''_0)(z)"] \arrow[rr, "\eta^{(s_0,s'_0)}(z) - \eta^{(s'_0,s''_0)}(z) + \eta^{(s_0 \boxplus s'_0,s''_0)}(z)", "s_0(z)"'] & & g_0(z) \arrow[ul, "(s'_0 \boxplus s''_0)(z)"'] \end{tikzcd}$$

üçgensel diyagramını verecektir. Bu 2-simpleks $m \in M$ serbest taban elemanı için:

$$\pi(m) = \begin{tikzcd} & k_0(m) & \\ f_0(m) \arrow[ur, "(s_0+s_0'+s_0'')(m)"] \arrow[rr, "0", "s_0(m)"'] & & g_0(z) \arrow[ul, "(s_0'+s_0'')(m)"'] \end{tikzcd}$$

geometrik formundadır.

$\Omega^{(s_0, s_0')} : Z \to \mathcal{L}_2'$ nin tanımının (Bölüm (7.3.3)) kullanılacağını söylemekte fayda vardır. Bilindiği üzere, herhangi bir $M \to \mathcal{L}_2$ fonksiyonunun evrensellik özelliği altında genişlemesi olan $Z \to \mathcal{L}_2'$ Lie cebir morfizmi biriciktir.

Diğer yandan, dikkat edilirse $(s_0 \boxplus (s_0' \boxplus s_0''))(m) = ((s_0 \boxplus s_0') \boxplus s_0'')(m)$ eşitliği gereği her $m \in M$ için:

$$\pi(m) = \Omega^{(s_0, s_0' \boxplus s_0'')}(m)$$

olup yukarıda ifade edilen sebepten dolayı her $z \in Z$ için:

$$\pi(z) = \begin{tikzcd} & k_0(z) & \\ f_0(z) \arrow[ur, "(s_0 \boxplus s_0' \boxplus s_0'')(z)"] \arrow[rr, "\eta^{(s_0, s_0' \boxplus s_0'')}(z)", "s_0(z)"'] & & g_0(z) \arrow[ul, "(s_0' \boxplus s_0'')(z)"'] \end{tikzcd} = \Omega^{(s_0, s_0' \boxplus s_0'')}(z)$$

elde edilir.

Sonuç olarak yukardaki iki tetrahedrona bakılırsa: her $z \in Z$ için:

$$\eta^{(s_0,s_0')}(z) - \eta^{(s_0',s_0'')}(z) + \eta^{(s_0 \boxplus s_0',s_0'')}(z) = \eta^{(s_0,s_0' \boxplus s_0'')}(z),$$

ya da:

$$\eta^{(s_0,s_0')}(z) + \eta^{(s_0 \boxplus s_0',s_0'')}(z) = \eta^{(s_0,s_0' \boxplus s_0'')}(z)\eta^{(s_0',s_0'')}(z),$$

sonucu elde edilir. Homotopinin ilk birleşeni için asosyatiflik sağlanır. Artık homotopinin ikinci bileşeni içinde asosyatifiği gösterebiliriz:

Teorem 7.6: Her $y \in Y$ için:

$$(s_1 \boxplus s_1') \boxplus s_1'' = s_1 \boxplus (s_1' \boxplus s_1'')$$

eşitliği geçerlidir.(Asosyatiftir)

İspat:

$$\begin{aligned}
((s_1 \boxplus s_1') \boxplus s_1'')(y) &= (s_1 \boxplus s_1')(y) + s_1''(y) + (\eta^{(s_0 \boxplus s_0',s_0'')} \circ \partial)(y) \\
&= s_1(y) + s_1'(y) + (\eta^{(s_0,s_0')} \circ \partial)(y) + s_1''(y) + (\eta^{(s_0 \boxplus s_0',s_0'')} \circ \partial)(y) \\
&= s_1(y) + s_1'(y) + \eta^{(s_0,s_0')}(\partial(y)) + s_1''(y) + \eta^{(s_0 \boxplus s_0',s_0'')}(\partial(y)) \\
&= s_1(y) + s_1'(y) + s_1''(y) + \eta^{(s_0,s_0')}(\partial(y)) + \eta^{(s_0 \boxplus s_0',s_0'')}(\partial(y)) \\
&= s_1(y) + s_1'(y) + s_1''(y) + (\eta^{(s_0,s_0')} \circ \partial)(y) + (\eta^{(s_0 \boxplus s_0',s_0'')} \circ \partial)(y) \\
&= s_1(y) + (s_1' \boxplus s_1'')(y) + (\eta^{(s_0,s_0' \boxplus s_0'')} \circ \partial)(y) \\
&= (s_1 \boxplus (s_1' \boxplus s_1''))(y)
\end{aligned}$$

Böylece tezin esas amacı olan aşağıdaki teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 7.7: $\mathcal{L}$ Lie cebirler üzerinde özel olarak $M \subset Z$ serbest tabanı yardımıyla tanımlı serbest$_1$ kuadratik modül ve $\mathcal{L}'$ ise Lie cebirler üzerinde herhangi bir kuadratik modül olsun.

Bu durumda **objeleri** $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ arasında tanımlı kuadratik modül morfizmleri, **morfizmleri** de bunların homotopileri olan kısaca $HOM(\mathcal{L},\mathcal{L}')$ ile gösterilen bir gruboid yapısı elde edilir.
Bu gruboidin işlemi

$$\boxplus : ((s_0,s_1),(s_0',s_1')) \rightarrow (s_0 \boxplus s_0', s_1 \boxplus s_1')$$

şeklindedir.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 7.8: $\mathcal{L}$ Lie cebirler üzerinde serbest$_1$ kuadratik modül ve $\mathcal{L}'$ keyfi bir Lie cebirler üzerinde kuadratik modül olsun. Bu durumda $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ arasında tanımlı kuadratik modül morfizmleri kümesi üzerinde "$f \simeq g \iff f$ ile g yi bağlayan bir kuadratik f-derivasyonu mevcuttur." şeklinde tanımlı "$\simeq$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Her $f : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ kuadratik modül morfizmi için; $f \xrightarrow{(f_0, 0_{s_0}, 0_{s_1})} f$ olduğundan "$\simeq$" bağıntısı yansıyan bağıntıdır.

$f, g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ kuadratik modül morfizmleri için $f \simeq g$ ise $f \xrightarrow{(f_0, s_0, s_1)} g$ olur. Bu durumda $g \xrightarrow{(f_0, -s_0, -s_1)} f$ olduğundan $g \simeq f$ elde edilir. Böylece "$\simeq$" simetrik bağıntıdır.

$f, g, h : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ kuadratik modül morfizmleri için $f \simeq g$ ve $g \simeq h$ ise $f \xrightarrow{(f_0, s_0, s_1)} g$ ve $g \xrightarrow{(g_0, s_0', s_1')} h$ olduğundan $f \xrightarrow{(f, s_0 \boxplus s_0', s_1 \boxplus s_1')} h$ elde edilir. Böylece "$\simeq$" geçişken bağıntıdır.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde sonuç olarak her ikisi de ön-çaprazlanmış modül kavramı üzerine kurulan çaprazlanmış modül ve kuadratik modül yapısı için morfizmler kümesi üzerinde tanımlanan homotopi bağıntısının, denklik bağıntısı olma noktasında farklılık gösterdiği saptanmıştır. Lie cebirlerin çaprazlanmış modül kategorisi için herhangi bir cebirsel kısıtlamaya gidilmeden morfizmler arası homotop olma bağıntısı, denklik bağıntısı olarak tanımlanmasına rağmen kuadratik modül morfizmleri için bu durum ancak bazı kısıtlamalarla mümkün olabilmiştir. Bu problemi çözmek için Lie cebirler üzerinde serbest$_1$ kuadratik modül yapısı kullanılmıştır. $\mathcal{L}$ serbest$_1$ kuadratik modül ve $\mathcal{L}'$ ise keyfi seçilmiş Lie cebirler üzerinde kuadratik modül olmak üzere objeleri $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ şeklindeki tanımlı morfizmler ve morfizmleri de bunların homotopileri olan bir gruboid yapısı elde edilmiştir.

Bu çalışma sonrasında, homotopileri birbirine bağlayan bir üst boyutlu homotopi olarak açıklanabilen 2-homotopi kavramı Lie cebirlerin kuadratik modül morfizmleri için araştırılabilinir ve 2-gruboid yapısı oluşturulabilinir. Ayrıca ‘‘kuadratik 2-modül morfizmleri için homotopi kavramı nasıl tanımlanır?’’ sorusu da merak konusudur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça, I., Arvasi, Z., 2002, Simplicial and crossed Lie algebras, Homology, Homotopy and Applications 4(1), pp.43–57.

Akça, I., Sidal, Y., 2016, Homotopies of Lie Crossed Module Morphisms, https://arxiv.org/abs/1609.09297, 29 Sep 2016.

Akça, I., Emir, K., Martins, J.F., 2016, Homology, Homotopy and Applications Volume 18 Number 1, pp.99 - 128.

Arvasi, Z., Porter, T., 1997, Higher dimensional Peiffer elements in simplicial commutative algebras, Theory and Applications of Categories, Vol. 2, No.1, pp.1-23.

Arvasi, Z., Ulualan, E., 2006, On Algebraic Models for Homology 3-types, J. Homotopy and Releated Structures, Vol.1 No.1, pp.1-27.

Baues, H. J. 1991, Combinatorial homotopy and 4-dimensional complexes, Walter de Gruyter Berlin, 1 380 pages.

Bourbaki, N., 1989, Lie Groups and Lie Algebras, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Chapters 1-3 (1), pp. XVII, 461.

Brown, R., Golasinski, M., 1989, A model structure for the homotopy theory of crossed complexes, Cah. Topologie Géom. Différ. Catégoriques, 30(1) pp.61–82.

Brown, R., Higgins, P.J., 1987, Tensor products and homotopies for ω-groupoids and crossed complexes, J. Pure Appl. Algebra, 47 pp.1–33.

Brown, R., Higgins, P.J., Sivera, R., 2011, Nonabelian algebraic topology. Filtered spaces, crossed complexes, cubical homotopy groupoids. With contributions by Christopher D. Wensley and Sergei V. Soloviev, Zürich: European Mathematical Society (EMS), p.703.

Cabello, J.G., Garzón, A.R., 1994, Quillen's theory for algebraic models of n-types. Extracta Mathematicae, 9(1) pp.42–47.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Cabello, J.G., Garzón, A.R., 1995, Closed model structures for algebraic models of n-types. J.Pure Appl. Algebra, 103(3) pp. 287–302.

Carrasco, P., Cegarra, A.M., 1991, Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types, Jour. Pure Applied Algebra, 75, pp.195-235.

Conduché, D., 1984, Modules croisés généralisés de longueur 2. J. Pure Appl. Algebra, 34 pp.155–178.

Curtis, E.B., 1971, Simplicial homotopy theory, Adv. in Math., 6, pp.107-209.

Dwyer, W.G., Spalinski, J., 1995 Homotopy theories and model categories. In Handbook of algebraic topology Amsterdam: North-Holland, pp 73–126.

Ellis, G.J., 1993, Homotopical aspects of lie algebras. Journal of the Australian Mathematical Society (Series A), 54 pp. 393–419.

Gohla, B., Martins, J.F., 2013, Pointed homotopy and pointed lax homotopy of 2-crossed module maps. Adv. Math., 248 pp.986–1049.

Kamps, K.H., Porter, T., 1997, Abstract Homotopy and Simple Homotopy Theory. World Scientific.

Kassel, C., Loday, J.L., 1982 Extensions centrales d'alg´ebres de Lie, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 33 pp. 119–142.

Martins, J.F., 2011, The fundamental 2-crossed complex of a reduced CW-complex. Homology Homotopy Appl., 13(2) pp.129–157.

MacLane, S., Whitehead, J.H.C., 1950, On the 3-type of a complex, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36, pp.155-178.

May, J.P., 1992, Simplicial Objects in Algebraic Topology, Chicago Lectures in Mathematics University of Chicago Press, p.170.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Moerdijk, I., Svensson J.A., 1993, Algebraic Classification of Equivariant Homotopy 2-Types I, J.Pure Appl. Algebra 89 (1-2) pp. 187-216.

Noohi, B., 2007. Notes on 2-Grouboids, 2-Groups and Crossed Modules, Homology homotopy Appl. 9 (1) pp.75-106.

Quillen, D.G., 1967, Homotopical Algebra. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.

Quillen, D.G., 1969, Rational homotopy theory, Annals of Mathematics, Vol. 90, No. 2 pp.205-295.

Seifert, H, Threlfall, W., 1934, Lehrbruch der Topologie, Chelsea, New York, Teubner.

Ulualan, E., 2004, Quadratic Modules for Commutative Algebras, Ph.D.Thesis, University of Osmangazi, p.7-78.

Ulualan, E., Uslu, E., 2011, Quadratic Modules for Lie Algebras, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, pp.409 – 419.

Whitehead, J.H.C, 1941, On adding relations to homotopy groups. Ann. of Math. (2) , 42 pp.409–428.

Whitehead, J.H.C, 1946, Note on a previous paper entitled “On adding relations to homotopy groups”. Ann. of Math. (2) , 47 pp.806–810.

Whitehead, J.H.C., 1949, Combinatorial Homotopy II, Bull. Amer. Math. Soc.55, pp.453-496.

Whitehead, J.H.C., 1950, Algebraic homotopy theory, Proc. Int. Congress of Math., Harvard, vol. 2 pp.354-357.