Rackların Çaprazlanmış Modüllerinin Kategoriksel Özellikleri

Hatice Gülsün Akay

DOKTORA TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ocak 2017

The Categorical Properties of Crossed Modules of Racks

Hatice Gülsün Akay

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Sciences

January 2017

Rackların Çaprazlanmış Modüllerinin Kategoriksel Özellikleri

Hatice Gülsün Akay

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. İ.İlker Akça

Ocak 2017

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı DOKTORA öğrencisi Hatice Gülsün Akay'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "**Rackların Çaprazlanmış Modüllerinin Kategoriksel Özellikleri**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. İ.İlker Akça

İkinci Danışman : -

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. İ.İlker Akça

Üye : Prof. Dr. Zekeriya Arvasi

Üye : Prof. Dr. Erdal Ulualan

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet Faruk Aslan

Üye : Doç. Dr. Ahmet Boz

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. İ.İlker Akça danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Rackların Çaprazlanmış Modüllerinin Kategoriksel Özellikleri**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 09/01/2017

Hatice Gülsün Akay

ÖZET

Rackların Çaprazlanmış Modüllerinin Kategoriksel Özellikleri başlıklı bu doktora tezi, altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde rack kavramıyla ilgili genel tanımlar ve örnekler verildi. Ayrıca bu bölümde, alt rack, normal alt rack, bölüm rack ve serbest rack kavramları tanıtıldı. İkinci bölümde rack kategorisinin kategoriksel özelliklerinden çarpım, eş-çarpım, geri çekme, ileri itme, eşitleyici ve eş-eşitleyici objeler ayrıntılı olarak incelendi. Üçüncü bölümde rackların çaprazlanmış modül kavramı tanıtılarak rackların çaprazlanmış modül örneklerine yer verildi. Dördüncü bölümde rackların çaprazlanmış modül kategorisinin çarpım, eş-çarpım, geri çekme, ileri itme, eşitleyici ve eş-eşitleyici objelere sahip olduğu gösterildi. Beşinci bölümde rackların serbest çaprazlanmış modülü tanımlandı. Altıncı ve son bölümde ise elde edilen sonuçlar yorumlanarak "sonuç ve öneriler" başlığı altında sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Rack, Çaprazlanmış modül, Çarpım, Geri çekme, Eşitleyici.

SUMMARY

This Ph.D. thesis, titled Some Categorical Construction of Crossed Modules of Racks, consists of six chapters. In the first chapter, the definition of rack is given and general examples about this concept are examined. Also in this chapter, the notions of subrack, normal subrack, quotient rack and free rack are introduced. In the second chapter, the categorical properties of the category of rack, product, coproduct, pullback, pushout, equaliser and coequaliser, are investigated in detail. In the third chapter, the crossed module concept of racks is introduced and examples of crossed modules of racks are given. In the fourth chapter, it is shown that the category of crossed modules of racks have product, coproduct, pullback, pushout, equaliser and coequaliser objects. In the fifth section, the free crossed module of racks is defined. In the last chapter, the results obtained and suggestion are given under the heading ”results and suggestions”.

Keywords: Rack, Crossed Module, Product, Pullback, Equaliser.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yöneten ve tezimin hazırlanması sırasında, ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam, sayın,

Doç.Dr.İ.İlker AKÇA ' ya

Her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini esirgemeyen değerli hocam, sayın,

Prof.Dr.Zekeriya ARVASİ ' ye

Bilim ve bilim insanının destekçisi,

TÜBİTAK ' a

Ve son olarak her zaman yanımda olup beni destekleyen,

sevgili aileme ve arkadaşlarıma

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2017
Hatice Gülsün Akay

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam)

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**A çıklama**
$\rtimes$	Hemi-Semi-Direct Çarpım
$\lhd$	Rack Operatörü
$\cdot$	Rack Etkisi

Kısaltmalar	**Açıklama**
Gör(f)	f Morfizminin Görüntüsü
Çek(f)	f Morfizminin Çekirdeği
$(R, \lhd, 1)$	Pointed Rack
$P \times R$	P ve R Racklarının Direk Çarpımı
$P \sqcup R$	P ve R Racklarının Eş-çarpımı
$P * R$	P ve R Racklarının Serbest Çarpımı
Rack	Rack Kategorisi
XRack	Rack Çaprazlanmış Modül Kategorisi
XRack$/S$	Sabit Bir S Rackı Üzerinde Rack Çaprazlanmış Modül Kategorisi

1. GİRİŞ VE AMAÇ

R bir küme olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} R\times R & \to & R \\ (x,y) & \mapsto & x\lhd y \end{array}$$

fonksiyonu, her $a,b,c\in R$ için

R1) $r\lhd a=b$ olacak şekilde bir tek $r\in R$ vardır;
R2) $(a\lhd b)\lhd c=(a\lhd c)\lhd (b\lhd c)$;

şartlarını sağlıyorsa bu R kümesine "rack" denir.

Özel sabit bir $1\in R$ elemanı ve her $x\in R$ için,

$$1\lhd x=1 \quad \text{ve} \quad x\lhd 1=x$$

eşitlikleri sağlanıyorsa R ye bir "pointed rack" denir.

Bu tezdeki ele alınacak tüm rack yapıları da pointed olacak olup, her seferinde ayrıca belirtilmeyecektir. Rack işlemini koruyacak şekilde tanımlı uygun rack morfizmleri yardımıyla elde edilen (pointed) rack kategorisi kısaca **Rack** şeklinde gösterilecektir.

Rack yapısı, gruplardaki konjuge teori ile oldukça bağlantılı bir yapıdır. Gruplardan farkı, rackların asosyatif olmayan cebirsel yapıya sahip olmasıdır.

Rack çaprazlanmış modülü, bir $\partial:R\to S$ rack morfizmi ve S nin R üzerine $\cdot$ (sağ) rack etkisi ile birlikte her $r,r'\in R$ ve $s\in S$ için

$$\begin{array}{ll} X1) & \partial(r\cdot s)=\partial(r)\lhd s, \\ X2) & r\cdot\partial(r')=r\lhd r' \end{array}$$

şartları ile birlikte tanımlıdır. Yine uygun şekilde tanımlanan çaprazlanmış modül morfizmleri yardımıyla, rack çaprazlanmış modül kategorisi elde edilir ve bu kategori kısaca **XRack** ile gösterilir. Özel olarak, sabit bir S rackı üzerinde çaprazlanmış modüllerin kategorisi **XRack**$/S$ ile gösterilecektir ve bu kategori **XRack** in bir dolu alt kategorisidir.

Bu tezde rack kategorisi ve rackların çaprazlanmış modül kategorisinin çarpım, eş-çarpım, geri çekme, ileri itme, eşitleyici ve eş-eşitleyici şeklindeki kategoriksel özellikleri incelenecektir. Ayrıca rackların serbest çaprazlanmış modülü tanımlanacaktır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Rack kavramı literatürde mevcut farklı çalışmalarda farklı adlandırmalarla yer almıştır. Örneğin (Brieskorn, 1988) de "otomorfik küme", (Kauffman, 1991) da "kristal", (Stanovský, 2004) de "sol dağılımlı sol quasigrup" ve son olarak da (Conway, 1959) da wrack kelimesinden türetilmiş olan "rack" kelimesinin kullanıldığı görülmektedir. Rack yapısı hakkındaki detaylı bilgiler (Fenn ve Rourke, 1992), de bulunabilir.

Rack kavramı için en önemli örnek bir grup üzerinde konjuge elemanlarla elde edilen rack yapısıdır. Bu özellik grup kategorisi ile rack kategorisi arasındaki $\mathbf{Conj}: \mathbf{Grp} \to \mathbf{Rack}$ funktorunu verir. Tersine, (Fenn ve Rourke, 1992) de detaylı inşaası verilen $\mathbf{As}: \mathbf{Rack} \to \mathbf{Grp}$ funktoru yardımıyla grup kategorisi ve rack kategorisi arasında aşağıdaki şekilde bir denklik (adjunction) elde edilir:

$$Hom\big(As(X), G\big) \cong Hom\big(X, Cong(G)\big)$$

Çaprazlanmış modül yapısı gruplar üzerinde ilk kez Whitehead tarafından homotopi 2-tiplerin cebirsel bir modellemesi olarak (Whitehead, 1941, 1946) de tanımlanmıştır. Bilindiği üzere çarazlanmış modüller, Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan simplisel gruplar kategorisine (Conduché, 1984) ve gruplar kategorisindeki internal objeye (cat^1-grup yapısına) denktir.

Rack çaprazlanmış modülü (Crans ve Wagemann, 2014) de gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüllerin bir genellemesi olarak tanımlanmıştır. Rack çaprazlanmış modülleri ile ilgili en ilginç sonuç, yukarıda bahsedilen funktorlarının çaprazlanmış modül yapısını korumasıdır (Crans ve Wagemann, 2014). Bu ise oldukça ilginç bir sonuçtur; çünkü sık kullanılan cebirsel yapılar arasında (grup, değişmeli cebir, Lie cebiri vs) tanımlı funktorlar çaprazlanmış modül yapısını genel olarak korumamaktadır. Dahası, bu özellik sayesinde grup çaprazlanmış modüller kategorisi ile rack çaprazlanmış modül kategorisi arasında (genişletilmiş) bir denklik elde edilebilmektedir. Diğer yandan bir başka ilginç detay ise her ne kadar grup çaprazlanmış modüller kategorisinin bir genellemesi gibi gözükse de, bir önceki paragrafta gruplar için verilen özelliklerin bir kısmı geçerli olmamakla birlikte, bir kısmı da henüz keşfedilmemiştir ve doğru olup olmadığı bilinmemektedir. Örneğin, (Crans ve Wagemann, 2014) de görüleceği üzere cat^1-rack yapısı ile çaprazlanmış modül yapısı arasında bir denklik açık olarak kurulamamıştır.

Sabit bir R objesi üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisi ele alnırsa, bu tipteki ilişkili çaprazlanmış modüllerin kategoriksel özellikleri gruplar için (Brown, 1984), cebirler için (Shammu, 1992) de incelenmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, rack yapısıyla ilgili genel tanımlara ve örneklere yer verilecektir (Fenn ve Rourke, 1992; Crans ve Wagemann, 2014).

3.1 Rack Kategorisi

Tanım 3.1 *R boş olmayan bir küme olmak üzere, R üzerindeki*

$$\begin{array}{rcl} R \times R & \to & R \\ (x, y) & \mapsto & x \lhd y \end{array}$$

işlemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa R kümesine bu işlem ile birlikte rack denir.

R1) *Her $x, y \in R$ için*

$$r \lhd x = y$$

olacak şekilde bir tek $r \in R$ vardır.

R2) *Her $x, y, z \in R$ için*

$$(x \lhd y) \lhd z = (x \lhd z) \lhd (y \lhd z)$$

eşitliği sağlanır. Buradaki ikinci şarta rack özdeşliği denir.

Tanım 3.2 *R bir rack olmak üzere her $x \in R$ için,*

$$x \lhd x = x$$

eşitliği sağlanıyorsa R ye bir quandle denir.

Tanım 3.3 *R bir rack olmak üzere her $x, y \in R$ için,*

$$(x \lhd y) \lhd y = x$$

eşitliği sağlanıyorsa R ye bir involutive rack denir.

Tanım 3.4 *R bir rack olmak üzere her $x \in R$ için*

$$1 \lhd x = 1 \quad ve \quad x \lhd 1 = x$$

eşitlikleri sağlanacak şekilde $1 \in R$ varsa R ye pointed rack denir ve $(R, \lhd, 1)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.5 *R ve S iki (pointed) rack olsun.*

$$f : R \to S$$

dönüşümü, her $x, y \in R$ için

$$f(x \lhd y) = f(x) \lhd f(y) \qquad (ve\ f(1) = 1)$$

şartını sağlıyorsa rack morfizmi adını alır.

Böylece objeleri racklar, morfizmleri rack morfizmleri olan rack kategorisi, **Rack,** elde edilir. Buradan itibaren tezdeki tüm racklar pointed rack olarak kabul edilecek, haliyle **Rack** da pointed rack kategorisini temsil edecektir.

ÖRNEKLER

1) Aşikar rack : $T_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ kümesi, üzerindeki

$$\begin{array}{lll} T_n \times T_n & \to & T_n \\ (x, y) & \mapsto & x \lhd y = x \end{array}$$

ikili işlemi ile birlikte rack yapısı oluşturur.

Burada $T_n = \mathbb{Z}$ alınırsa bu yapıya sonsuz aşikar rack denir ve T_∞ ile gösterilir.

2) Dihedral rack: $D_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ kümesi, üzerindeki

$$\begin{array}{lll} D_n \times D_n & \to & D_n \\ (x, y) & \mapsto & x \lhd y = 2y - x \quad mod\, n \end{array}$$

ikili işlemi ile birlikte rack yapısı oluşturur.

Burada $D_n = \mathbb{Z}$ alınırsa

$$x \lhd y = 2y - x$$

ikili işlemle birlikte bu yapıya sonsuz dihedral rack denir ve D_∞ ile gösterilir.

3) Devirli rack: $C_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ kümesi, üzerindeki

$$\begin{array}{lcl} C_n \times C_n & \to & C_n \\ (x, y) & \mapsto & x \lhd y = x + 1 \quad mod\, n \end{array}$$

ikli işlemi ile birlikte rack yapısı oluşturur.

Burada $C_n = \mathbb{Z}$ alınırsa

$$x \lhd y = x + 1$$

ikli işlem ile birlikte bu yapıya sonsuz devirli rack denir ve C_∞ ile gösterilir.

4) Konjuge rack: G bir grup olsun. G grubu, üzerindeki

$$\begin{array}{lcl} G \times G & \to & G \\ (g, h) & \mapsto & g \lhd h = h^{-1}gh \end{array}$$

ikili işlem ile birlikte rack yapısı oluşturur.

Bu yapı bize

Conj:Grp $\to$ Rack

funktorunu verir.

5) Core rack: G grubu, üzerindeki

$$\begin{array}{lcl} G \times G & \to & G \\ (g, h) & \mapsto & g \lhd h = hg^{-1}h \end{array}$$

ikili işlemle birlikte bir rack yapısı oluşturur. Bu yapı funktoriyel değildir. Çünkü grup kategorisindeki birim eleman olma özelliğini pointed rackdaki 1 elemanına taşımıyor. Yani;

$$g \lhd 1 = 1g^{-1}1 = g^{-1}$$

olup

$$g \lhd 1 \neq g$$

olduğu görülür.

Tanım 3.6 $(R, \lhd)$ *bir rack olsun. Her* $r, r' \in R$ *için*

$$r \lhd^{-1} r'$$

ikili işlem ile yeni bir rack tanımlanabilir. Bu racka tersinir (inverted) rack denir. Tersinir racklar için

$$r \lhd r' \lhd^{-1} r' = r = r \lhd^{-1} r' \lhd r'$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 3.1 *G bir grup olsun. G grubu her $g, h \in G$ için*

$$g \lhd^{-1} h = hgh^{-1}$$

şeklinde tanımlı ikili işlem ile birlikte rack yapısı oluşturur.

R1) *Her $g, h \in G$ için $x \lhd^{-1} g = h$ olacak şekilde bir tek $x \in G$ olduğu gösterilecektir:*

$$\begin{aligned} x \lhd^{-1} g = h &\Leftrightarrow gxg^{-1} = h \\ &\Leftrightarrow x = g^{-1}hg \end{aligned}$$

olup $x = g^{-1}hg \in G$ olur.

R2) *Her $g, h, k \in G$ için*

$$\begin{aligned} \left(g \lhd^{-1} h\right) \lhd^{-1} k &= \left(hgh^{-1}\right) \lhd^{-1} k \\ &= khgh^{-1}k^{-1} \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} \left(g \lhd^{-1} k\right) \lhd^{-1} \left(h \lhd^{-1} k\right) &= \left(kgk^{-1}\right) \lhd^{-1} \left(khk^{-1}\right) \\ &= \left(k^{-1}hk\right)\left(k^{-1}gk\right)\left(k^{-1}hk\right)^{-1} \\ &= khgh^{-1}k^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\left(g \lhd^{-1} h\right) \lhd^{-1} k = \left(g \lhd^{-1} k\right) \lhd^{-1} \left(h \lhd^{-1} k\right)$$

eşitliği geçerlidir.

Önerme 3.1 *$(P, \lhd)$ ve $(R, \lhd')$ iki rack olsun. Bu durumda*

$$P \times R = \{(p, r) \mid p \in P, r \in R\}$$

kümesi,

$$(p, r) \widetilde{\lhd} (p', r') = (p \lhd p', r \lhd' r')$$

şeklinde tanımlı ikili işlem ile birlikte rack yapısı oluşturur (Fenn ve Rourke, 1992).

İspat **R1**) *$(p, r), (p', r') \in P \times R$ olsun. P ve R rack olduğundan her $p, p' \in P$ ve her $r, r' \in R$ için*

$$\begin{aligned} c \lhd p &= p' \\ c' \lhd' r &= r' \end{aligned}$$

olacak şekilde bir tek $c \in P$ *ve* $c' \in R$ *vardır. Böylece*

$$(c \lhd p, c' \lhd' r) = (p', r') \Rightarrow (c, c') \,\widetilde{\lhd}\, (p, r) = (p', r')$$

olup her $(p, r), (p', r') \in P \times R$ *için*

$$(c, c') \,\widetilde{\lhd}\, (p, r) = (p', r')$$

olacak şekilde bir tek $(c, c') \in P \times R$ *vardır.*

R2) *Her* $(p, r), (p', r'), (p'', r'') \in P \times R$ *için*

$$\begin{aligned}
\big((p, r) \,\widetilde{\lhd}\, (p', r')\big) \,\widetilde{\lhd}\, (p'', r'') &= ((p \lhd p', r \lhd' r')) \,\widetilde{\lhd}\, (p'', r'') \\
&= ((p \lhd p') \lhd p'', (r \lhd' r') \lhd' r'') \\
&= ((p \lhd p'') \lhd (p' \lhd p''), (r \lhd' r'') \lhd (r' \lhd' r'')) \\
&= (p \lhd p'', r \lhd' r'') \,\widetilde{\lhd}\, (p' \lhd p'', r' \lhd' r'') \\
&= \big((p, r) \,\widetilde{\lhd}\, (p'', r'')\big) \,\widetilde{\lhd}\, \big((p', r') \,\widetilde{\lhd}\, (p'', r'')\big)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $P \times R$ *kümesi,* $\widetilde{\lhd}$ *işlemine göre bir rack olur. Bu* $P \times R$ *rackına* P *ve* R *racklarının direk çarpımı denir.*

Önerme 3.2 P *ve* R *iki rack olmak üzere,*

$$\begin{array}{rccc} p_1 : & P \times R & \rightarrow & P \\ & (p, r) & \mapsto & p \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} p_2 : & P \times R & \rightarrow & R \\ & (p, r) & \mapsto & r \end{array}$$

projeksiyon dönüşümleri rack morfizmidir.

İspat *Her* $(p, r), (p', r') \in P \times R$ *için*

$$\begin{aligned}
p_1\big((p, r) \,\widetilde{\lhd}\, (p', r')\big) &= p_1 (p \lhd p', r \lhd' r') \\
&= p \lhd p' \\
&= p_1 (p, r) \lhd p_1 (p', r')
\end{aligned}$$

olup

$$p_1\big((p, r) \,\widetilde{\lhd}\, (p', r')\big) = p_1 (p, r) \lhd p_1 (p', r')$$

elde edilir ve benzer şekilde

$$p_2\left((p,r)\,\widetilde{\triangleleft}\,(p',r')\right) = p_2(p,r) \triangleleft' p_2(p',r')$$

elde edilir. Bu durumda $p_1 : P \times R \to P$ *ve* $p_2 : P \times R \to R$ *morfizmleri rack morfizmidir.*

3.2 Alt Rack

Bu kısımda bir R (pointed) rackının alt rackı tanıtılacak ve alt rack kavramı için bazı özellikler verilecektir (Biyogmam, 2013).

Tanım 3.7 *R bir (pointed) rack ve S, R rackının boş kümeden farklı alt kümesi olsun. S (pointed) rack şartlarını sağlıyorsa S kümesine alt rack denir.*

Önerme 3.3 *R bir (pointed) rack ve S, R nin bir alt kümesi olsun. S kümesinin R nin alt rackı olması için gerek ve yeter koşul*

i) *R pointed rack ise $1 \in S$ dir,*

ii) *S ikili işlem altında kapalıdır,*

iii) *her $a, b \in R$ için $b \in S$ ve $a \triangleleft b \in S$ iken $a \in S$ dir,*

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat *S, R nin alt rackı olsun. S, R nin alt kümesi olduğundan i ve ii sağlanır. $a, b \in R$ için $b \in S$ ve $a \triangleleft b \in S$ iken $a \in S$ olduğu gösterilecektir. $a \triangleleft b = c$ olsun. S rack şartlarını sağladığından $b \in S$ ve $c \in S$ için*

$$x \triangleleft b = c$$

olacak şekilde bir tek $x \in S$ vardır.

$$x \triangleleft b = a \triangleleft b$$

olup rack yapısının birinci şartından dolayı $x = a$ olduğu görülür. Böylece $a \in S$ dir.

Tersine S kümesinin R nin alt rackı olduğunu gösterilecektir. $a, b \in S$ olsun. $S \subseteq R$ olduğundan $a, b \in R$ dir. Bu durumda

$$x \triangleleft a = b$$

olacak şekilde bir tek $x \in R$ vardır. Böylece $x \lhd a \in S$ dir. $a \in S$ olduğundan iii) şartından dolayı $x \in S$ dir. $c = x$ alırsak ispat tamamlanır.

Önerme 3.4 *$f : R \to R'$ bir rack morfizmi olsun.*

$$\text{Çek}\,(f) = \{r \in R \mid f\,(r) = 1\}$$

kümesi R rackının alt rackıdır.

İspat ***i)*** *R pointed rack olduğundan $f\,(1) = 1$ olup $1 \in$ Çek$\,(f)$ dir.*

ii) *$x, y \in$ Çek$\,(f)$ olsun.*

$$\begin{aligned} f\,(x \lhd y) &= f\,(x) \lhd f\,(y) && \because f \text{ rack morfizmi} \\ &= 1 \lhd 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup $x \lhd y \in$ Çek$\,(f)$ dir.

iii) *$x, y \in R$, $x \lhd y \in$ Çek$\,(f)$ ve $y \in$ Çek$\,(f)$ olsun. Bu durumda $f\,(y) = 1$ ve $f\,(x \lhd y) = 1$ elde edilir. Böylece*

$$\begin{aligned} f\,(x) &= f\,(x) \lhd f\,(y) && \because f(y) = 1 \\ &= f\,(x \lhd y) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup $x \in$ Çek$\,(f)$ dir.

Tanım 3.8 *Yukarıda tanımlanan*

$$\text{Çek}\,(f) = \{r \in R \mid f\,(r) = 1\}$$

kümesine f morfizminin çekirdeği denir.

Önerme 3.5 *$f : R \to R'$ bir rack morfizmi olsun. R' involutive rack ise*

$$\text{Gör}\,(f) = \{f\,(r) \mid r \in R\}$$

kümesi R' rackının alt rackıdır.

İspat ***i)*** *R ve R' pointed rack olduğundan $f(1) = 1$ olup $1 \in$ Gör (f) dir.*

ii) *$y_1, y_2 \in$ Gör (f) olsun. Bu durumda*

$$f(x_1) = y_1,$$
$$f(x_2) = y_2$$

olacak şekilde $x_1, x_2 \in R$ vardır. Böylece

$$y_1 \lhd y_2 = f(x_1) \lhd f(x_2) = f(x_1 \lhd x_2)$$

olup $y_1 \lhd y_2 \in$ Gör (f) dir.

iii) *$y_1, y_2 \in R, y_1 \lhd y_2 \in$ Gör (f) ve $y_2 \in$ Gör (f) olsun. Bu durumda $f(x) = y_2$ ve $f(y) = y_1 \lhd y_2$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır. R' involutive olduğundan*

$$y_1 = (y_1 \lhd y_2) \lhd y_2 = f(y) \lhd f(x) = f(y \lhd x) \in \text{Gör}(f)$$

olup $y_1 \in$ Gör (f) dir.

Tanım 3.9 *Yukarıda tanımlanan*

$$\text{Gör}(f) = \{f(r) \mid r \in R\}$$

kümesine f morfizminin görüntüsü denir.

3.3 Normal Alt Rack

Tanım 3.10 (Ryder, 1993) *R bir rack ve N, R nin alt rackı olsun. Her $r \in R$ ve her $n \in N$ için*

$$n \lhd r \in N$$

ise N rackına R nin normal alt rackı denir.

3.4 Kongrüanslar

Tanım 3.11 *R bir rack olsun. R üzerindeki bir "$\sim$"denklik bağıntısı verilsin. $\sim$ bağıntısına,*

$$x \sim y,\ x' \sim y' \Longrightarrow x \lhd x' \sim y \lhd y'$$

özelliğini sağlıyorsa kongrüans bağıntı denir. Bir $r \in R$ için r nin denklik sınıfları $[r]$ ile gösterilir (Ryder, 1993).

3.5 Bölüm Rack

R bir rack ve $\sim$ bağıntısı R üzerinde bir kongrüans bağıntısı olsun. Bu durumda $R/_{\sim}$ kümesi, her $r, r' \in R$ için

$$[r] \lhd [r'] = [r \lhd r']$$

ikili işlemi ile birlikte rack şartlarını sağlar. Çünkü:

R1) $[r], [r'] \in R/_{\sim}$ olsun. R rack olduğundan her $r, r' \in R$ için

$$c \lhd r = r'$$

olacak şekilde bir tek $c \in R$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} c \lhd r = r' &\Rightarrow [c \lhd r] = [r'] \\ &\Rightarrow [c] \lhd [r] = [r'] \end{aligned}$$

olup her $[r], [r'] \in R/_{\sim}$ için

$$[c] \lhd [r] = [r']$$

olacak şekilde bir tek $[c] \in R/_{\sim}$ vardır.

R2) Her $[r], [r'], [r''] \in R/_{\sim}$ için

$$\begin{aligned} ([r] \lhd [r']) \lhd [r''] &= [r \lhd r'] \lhd [r''] \\ &= [(r \lhd r') \lhd r''] \\ &= [(r \lhd r'') \lhd (r' \lhd r'')] \\ &= [r \lhd r''] \lhd [r' \lhd r''] \\ &= ([r] \lhd [r'']) \lhd ([r'] \lhd [r'']) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.12 *Yukarıda elde edilen $R/_{\sim}$ rack yapısı özel olarak bölüm rackı olarak adlandırılır (Ryder, 1993).*

3.6 Serbest Rack

Tanım 3.13 *X bir küme ve $F(X)$ bir rack olsun. Herhangi bir Y rackı ve $f : X \to Y$ dönüşümü verildiğinde*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & Y \\ F(X) \arrow[ur, dotted, "h"'] & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde bir tek

$$h : F(X) \to Y$$

rack morfizmi varsa $F(X)$ rackına X kümesi üzerinde serbest rack denir.

S boştan farklı bir küme olmak üzere S üzerindeki serbest rack aşağıdaki gibi iki farklı izomorf yoldan elde edilebilir. Bu tezde eş-çarpım ve ileri itme obje için işlemlerin kolaylığı açısından ikinci versiyon kullanılacaktır.

Önerme 3.6 (Farinati vd., 2014) *S boştan farklı bir küme ve F^S de S üzerindeki serbest grup olsun. S kümesi üzerindeki serbest rack:*

$$F(S) = S \times F^S = \{(s, \alpha) \mid s \in S,\ \alpha \in F^S\}$$

kümesi ve her $r, s \in S$ ve $\alpha, \beta \in F^S$ için

$$(r, \alpha) \lhd (s, \beta) = (r, \alpha\beta^{-1}s\beta)$$

ikili işlemi ile birlikte her zaman tanımlıdır. Burada $j : S \to F(S)$, $j(s) = (s, 1)$ şeklinde tanımlıdır.

İspat *Öncelikle $F(S)$ kümesinin*

$$(r, \alpha) \lhd (s, \beta) = (r, \alpha\beta^{-1}s\beta)$$

ikili işlem ile birlikte rack yapısı oluşturduğu gösterilecektir.

$R1)$ $(s, \beta), (t, \omega) \in F(S)$ *olsun.*

$$\begin{aligned} (r, \alpha) \lhd (s, \beta) &= (t, \omega) \\ (r, \alpha\beta^{-1}s\beta) &= (t, \omega) \end{aligned}$$

olduğundan $r = t$ *ve* $\alpha = \omega\beta^{-1}s^{-1}\beta$ *olarak alınabilir. Böylece her* $(s, \beta), (t, \omega) \in F(S)$ *için*

$$(r, \alpha) \lhd (s, \beta) = (t, \omega)$$

olacak şekilde bir tek $(r, \alpha) \in F(S)$ *vardır.*

R2) Her $(r, \alpha), (s, \beta), (t, \omega) \in F(S)$ *için*

$$\begin{aligned}
((r, \alpha) \lhd (s, \beta)) \lhd (t, \omega) &= \left(r, \alpha\beta^{-1}s\beta\right) \lhd (t, \omega) \\
&= \left(r, \alpha\beta^{-1}s\beta\omega^{-1}t\omega\right) \\
&= \left(r, \alpha\left(\omega^{-1}t\omega\omega^{-1}t^{-1}\omega\right)\beta^{-1}s\beta\omega^{-1}t\omega\right) \\
&= \left(r, \alpha\omega^{-1}t\omega\right) \lhd \left(s, \beta\omega^{-1}t\omega\right) \\
&= ((r, \alpha) \lhd (t, \omega)) \lhd ((s, \beta) \lhd (t, \omega))
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Şimdi T *herhangi bir rack ve* $f : S \to T$ *herhangi bir rack morfizmi olsun.*

$$h(s, 1) = f(s) \text{ ve}$$
$$h((r, 1) \lhd (s, 1)) = f(r) \lhd f(s)$$

şeklinde tanımlanan bir tek

$$h : F(S) \to T$$

rack morfizminin var olduğu gösterilecektir.

$r, s \in S$ *ve* $\alpha \in F^S$ *için,*

$$(r, \alpha) \lhd (s, 1) = (r, \alpha s),$$
$$(r, \alpha) \lhd^{-1} (s, 1) = \left(r, \alpha s^{-1}\right)$$

olduğu göz önünde bulundurulsun. Eğer $s_i \in S$ *ve* $\varepsilon_i = \pm 1$ *için* $\alpha = s_1^{\varepsilon_1} \ldots s_n^{\varepsilon_n}$ *ise*

$$(s, \alpha) = (((((s, 1) \lhd^{\varepsilon_1} (s_1, 1)) \lhd^{\varepsilon_2} (s_2, 1)) \ldots) \lhd^{\varepsilon_{n-1}} (s_{n-1}, 1)) \lhd^{\varepsilon_n} (s_n, 1)$$

elde edilir. Bu durumda

$$h(s, \alpha) = ((((f(s) \lhd^{\varepsilon_1} f(s_1)) \lhd^{\varepsilon_2} f(s_2)) \ldots) \lhd^{\varepsilon_{n-1}} f(s_{n-1})) \lhd^{\varepsilon_n} f(s_n)$$

olduğu görülür. Ayrıca h*,* f *ile tanımlandığından dolayı tek türlü tanımlıdır.*

Şimdi $h : F(S) \to T$ morfizminin bir rack morfizmi olduğu gösterilecektir. $r, s \in S$ ve β indirgenmiş kelime olmak üzere $\alpha, \beta \in F^S$ olsun. $\beta = 1$ alınsın. Her $r, s \in S$ ve $\alpha \in F^S$ için

$$\begin{aligned} h\left((r,\alpha) \triangleleft (s,1)\right) &= h\left(\left(\left(\left(\left(\left(r,1\right) \triangleleft^{\varepsilon_1} (r_1,1)\right) \triangleleft^{\varepsilon_2} (r_2,1)\right) \ldots\right) \triangleleft^{\varepsilon_{n-1}} (r_{n-1},1)\right) \triangleleft^{\varepsilon_n} (r_n,1) \triangleleft (s,1)\right) \\ &= \left(\left(\left(\left(\left(f(r) \triangleleft^{\varepsilon_1} f(r_1)\right) \triangleleft^{\varepsilon_2} f(r_2)\right) \ldots\right) \triangleleft^{\varepsilon_{n-1}} f(r_{n-1})\right) \triangleleft^{\varepsilon_n} f(r_n)\right) \triangleleft f(s) \\ &= h(s,\alpha) \triangleleft h(s,1) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $\beta = 1$ için

$$h\left((r,\alpha) \triangleleft (s,\beta)\right) = h(r,\alpha) \triangleleft h(s,\beta)$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi, β nın uzunluğu lh(β) olmak üzere, lh$(\beta) < n$ için eşitlik sağlansın. lh$(\beta) = n$ için eşitliğin sağlandığı gösterilecektir. lh$(\beta') = n-1$, $t \in S$, ve $\varepsilon = \pm 1$ için $\beta = \beta' t^{\varepsilon}$ olsun. $\varepsilon = 1$ için,

$$\begin{aligned} h\left((r,\alpha) \triangleleft (s,\beta)\right) &= h\left((r,\alpha) \triangleleft (s,\beta' t)\right) \\ &= h\left((r,\alpha) \triangleleft \left((s,\beta') \triangleleft (t,1)\right)\right) \\ &= h\Big(\big((r,\alpha) \triangleleft^{-1} (t,1) \triangleleft (t,1)\big) \triangleleft \left((s,\beta') \triangleleft (t,1)\right)\Big) \\ &= h\Big(\Big(\big((r,\alpha) \triangleleft^{-1} (t,1)\big) \triangleleft (s,\beta')\Big) \triangleleft (t,1)\Big) \\ &= \Big(\big(h(r,\alpha) \triangleleft^{-1} h(t,1)\big) \triangleleft h(s,\beta')\Big) \triangleleft h(t,1) \\ &= \big(h(r,\alpha) \triangleleft^{-1} h(t,1) \triangleleft h(t,1)\big) \triangleleft \left(h(s,\beta') \triangleleft h(t,1)\right) \\ &= h(r,\alpha) \triangleleft \left(h(s,\beta') \triangleleft h(t,1)\right) \\ &= h(r,\alpha) \triangleleft h\left((s,\beta') \triangleleft (t,1)\right) \\ &= h(r,\alpha) \triangleleft h(s,\beta' t) \\ &= h(r,\alpha) \triangleleft h(s,\beta) \end{aligned}$$

ve $\varepsilon = -1$ için

$$\begin{aligned} h\left((r,\alpha) \triangleleft (s,\beta)\right) \triangleleft h(t,1) &= h\left(\left((r,\alpha) \triangleleft (s,\beta)\right) \triangleleft (t,1)\right) \\ &= h\Big(\Big((r,\alpha) \triangleleft \big((s,\beta') \triangleleft^{-1} (t,1)\big)\Big) \triangleleft (t,1)\Big) \\ &= h\big(\left((r,\alpha) \triangleleft (t,1)\right) \triangleleft (s,\beta') \triangleleft^{-1} (t,1) \triangleleft (t,1)\big) \\ &= h\left(\left((r,\alpha) \triangleleft (t,1)\right) \triangleleft (s,\beta')\right) \\ &= \left(h(r,\alpha) \triangleleft h(t,1)\right) \triangleleft h(s,\beta') \\ &= \Big(h(r,\alpha) \triangleleft \big(h(s,\beta') \triangleleft^{-1} h(t,1)\big)\Big) \triangleleft h(t,1) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} h\left((r,\alpha) \triangleleft (s,\beta)\right) &= h(r,\alpha) \triangleleft \big(h(s,\beta') \triangleleft^{-1} h(t,1)\big) \\ &= h(r,\alpha) \triangleleft h(s,\beta) \end{aligned}$$

olur. Tümevarım gereği her $(r,\alpha),(s,\beta)\in F(S)$ *için*

$$h\left((r,\alpha)\lhd(s,\beta)\right)=h(r,\alpha)\lhd h(s,\beta)$$

elde edilir. Bu durumda $h:S\times F(S)\to T$ *bir rack morfizmidir.*

Önerme 3.7 (Winker, 1984) *S boştan farklı bir küme olsun. S üzerindeki $F(S)$ serbest rackın elemanları $1\leq i\leq n$ için $s_i\in S$, $n\geq 0$ ve $\alpha_i=\pm 1$ olmak üzere*

$$s_0\lhd^{\alpha_1}s_1\lhd^{\alpha_2}\ldots\lhd^{\alpha_n}s_n$$

formunda olup

$$s_0\lhd^{\alpha_1}s_1\lhd^{\alpha_2}\ldots\lhd^{\alpha_{j-1}}s_{j-1}\lhd^{\alpha_j}s_j\lhd^{-\alpha_j}s_j\lhd^{\alpha_{j+1}}s_{j+1}\ldots\lhd^{\alpha_n}s_n=$$

$$s_0\lhd^{\alpha_1}s_1\lhd^{\alpha_2}\ldots\lhd^{\alpha_{j-1}}s_{j-1}\lhd^{\alpha_{j+1}}s_{j+1}\ldots\lhd^{\alpha_n}s_n$$

eşitliği geçerlidir. Bu rackın işlemi

$$\left(s_0\lhd^{\alpha_1}s_1\lhd^{\alpha_2}\ldots\lhd^{\alpha_n}s_n\right)\lhd^{\alpha}\left(r_0\lhd^{\beta_1}r_1\lhd^{\beta_2}\ldots\lhd^{\beta_m}r_m\right)=$$

$$s_0\lhd^{\alpha_1}s_1\lhd^{\alpha_2}\ldots\lhd^{\alpha_n}s_n\lhd^{-\beta_m}r_m\lhd-^{\beta_{m-1}}r_{m-1}\ldots\lhd^{-\beta_1}r_1\lhd^{\alpha}r_0\lhd^{\beta_1}r_1\lhd^{\beta_2}\ldots\lhd^{\beta_m}r_m$$

şeklinde tanımlıdır ve rack şartlarını sağladığı aşağıdaki gibi gösterilir:

R1) $\left(s_0\lhd^{\alpha_1}s_1\lhd^{\alpha_2}\ldots\lhd^{\alpha_n}s_n\right),\left(r_0\lhd^{\beta_1}r_1\lhd^{\beta_2}\ldots\lhd^{\beta_m}r_m\right)\in F(S)$ *olsun.*

$$\left(c_o\lhd^{\theta_1}\ldots\lhd^{\theta_l}c_l\right)\lhd^{\varepsilon}\left(s_0\lhd^{\alpha_1}\ldots\lhd^{\alpha_n}s_n\right)=r_0\lhd^{\beta_1}\ldots\lhd^{\beta_m}r_m$$

ise

$$c_o\lhd^{\theta_1}\ldots\lhd^{\theta_l}c_l\lhd^{-\alpha_n}s_n\lhd^{-\alpha_{n-1}}s_{n-1}\ldots\lhd^{-\alpha_1}s_1\lhd^{\varepsilon}s_0\lhd^{\alpha_1}\ldots\lhd^{\alpha_n}s_n=$$
$$r_0\lhd^{\beta_1}r_1\lhd^{\beta_2}\ldots\lhd^{\beta_m}r_m$$

olup

$$c_o\lhd^{\theta_1}\ldots\lhd^{\theta_l}c_l=r_0\lhd^{\beta_1}\ldots\lhd^{\beta_m}r_m\lhd^{-\alpha_n}s_n\lhd^{-\alpha_{n-1}}s_{n-1}\lhd^{-\alpha_1}s_1\lhd^{-\varepsilon}s_0\lhd^{\alpha_1}\ldots\lhd^{\alpha_n}s_n$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda her $\left(s_0\lhd^{\alpha_1}s_1\lhd^{\alpha_2}\ldots\lhd^{\alpha_n}s_n\right),\left(r_0\lhd^{\beta_1}r_1\lhd^{\beta_2}\ldots\lhd^{\beta_m}r_m\right)\in F(S)$ *için*

$$\left(c_o\lhd^{\theta_1}\ldots\lhd^{\theta_l}c_l\right)\lhd^{\varepsilon}\left(s_0\lhd^{\alpha_1}\ldots\lhd^{\alpha_n}s_n\right)=r_0\lhd^{\beta_1}\ldots\lhd^{\beta_m}r_m$$

olacak şekilde bir tek $\left(c_o \lhd^{\theta_1} \ldots \lhd^{\theta_l} c_l\right) \in F(S)$ *vardır. Böylece* $R1$ *şartı sağlanır.*

R2) *Her* $(p_o \lhd^{\varepsilon_1} \ldots \lhd^{\varepsilon_l} p_l), \left(r_0 \lhd^{\beta_1} \ldots \lhd^{\beta_m} r_m\right)$ *ve* $(s_0 \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n) \in F(S)$ *için*

$$\left((p_o \lhd^{\varepsilon_1} \ldots \lhd^{\varepsilon_t} p_t) \lhd^{\varepsilon} \left(r_0 \lhd^{\beta_1} \ldots \lhd^{\beta_m} r_m\right)\right) \lhd^{\beta} (s_0 \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n) =$$

$$(p_o \lhd^{\varepsilon_1} \ldots \lhd^{\varepsilon_l} p_l \lhd^{-\beta_m} r_m \lhd^{-\beta_{m-1}} r_{m-1} \ldots \lhd^{-\beta_1} r_1 \lhd^{\varepsilon} r_0 \lhd^{\beta_1} \ldots \lhd^{\beta_m} r_m) \\ \lhd^{\beta} (s_0 \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n) =$$

$$p_o \lhd^{\varepsilon_1} \ldots \lhd^{\varepsilon_l} p_l \lhd -^{\beta_m} r_m \lhd^{-\beta_{m-1}} r_{m-1} \ldots \lhd^{-\beta_1} r_1 \lhd^{\varepsilon} r_0 \lhd^{\beta_1} \ldots \lhd^{\beta_m} r_m \\ \lhd^{-\alpha_n} s_n \lhd^{-\alpha_{n-1}} s_{n-1} \ldots \lhd^{-\alpha_1} s_1 \lhd^{\beta} s_0 \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left((p_o \lhd^{\varepsilon_1} \ldots \lhd^{\varepsilon_t} p_t) \lhd^{\beta} (s_0 \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n)\right) \lhd^{\varepsilon} \\ \left(\left(r_0 \lhd^{\beta_1} \ldots \lhd^{\beta_m} r_m\right) \lhd^{\beta} (s_0 \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n)\right) =$$

$$\left(p_o \lhd^{\varepsilon_1} \ldots \lhd^{\varepsilon_l} p_l \lhd^{-\alpha_n} s_n \lhd^{-\alpha_{n-1}} s_{n-1} \ldots \lhd^{-\alpha_1} s_1 \lhd^{\beta} s_0 \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n\right) \lhd^{\varepsilon} \\ \left(r_0 \lhd^{\beta_1} \ldots \lhd^{\beta_m} r_m \lhd^{-\alpha_n} s_n \lhd^{-\alpha_{n-1}} s_{n-1} \ldots \lhd^{-\alpha_1} s_1 \lhd^{\beta} s_0 \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n\right) =$$

$$p_o \lhd^{\varepsilon_1} \ldots \lhd^{\varepsilon_l} p_l \lhd^{-\alpha_n} s_n \lhd^{-\alpha_{n-1}} s_{n-1} \ldots \lhd^{-\alpha_1} s_1 \lhd^{\beta} s_0 \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n \lhd^{-\alpha_n} s_n \\ \lhd^{-\alpha_{n-1}} s_{n-1} \ldots \lhd^{-\alpha_1} s_1 \lhd^{-\beta} s_0 \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n \lhd^{-\beta_m} r_m \lhd^{-\beta_{m-1}} r_{m-1} \ldots \lhd^{-\beta_1} r_1 \\ \lhd^{\varepsilon} r_0 \lhd^{\beta_1} \ldots \lhd^{\beta_m} r_m \lhd^{-\alpha_n} s_n \lhd^{-\alpha_{n-1}} s_{n-1} \ldots \lhd^{-\alpha_1} s_1 \lhd^{\beta} s_0 \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n =$$

$$p_o \lhd^{\varepsilon_1} \ldots \lhd^{\varepsilon_l} p_l \lhd -^{\beta_m} r_m \lhd^{-\beta_{m-1}} r_{m-1} \ldots \lhd^{-\beta_1} r_1 \lhd^{\varepsilon} r_0 \lhd^{\beta_1} \ldots \lhd^{\beta_m} r_m \\ \lhd^{-\alpha_n} s_n \lhd^{-\alpha_{n-1}} s_{n-1} \ldots \lhd^{-\alpha_1} s_1 \lhd^{\beta} s_0 \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n$$

olduğu görülür. Böylece $R2$ *şartı sağlanır.*

Burada da diyagram (3.1) *deki* h *rack morfizmi* $(s_0 \lhd^{\alpha_1} s_1 \lhd^{\alpha_2} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n) \in F(S)$ *için*

$$h(s_0 \lhd^{\alpha_1} s_1 \lhd^{\alpha_2} \ldots \lhd^{\alpha_n} s_n) = f(s_0) \lhd^{\alpha_1} f(s_1) \lhd^{\alpha_2} \ldots \lhd^{\alpha_n} f(s_n)$$

şeklinde tek türlü tanımlıdır.

3.7 Rack Etkisi

R ve S iki rack olsun. Eğer

$$\begin{array}{ccc} R \times S & \rightarrow & R \\ (r,s) & \mapsto & r \cdot s \end{array}$$

şeklinde gösterilen dönüşüm, her $r, r' \in R$ ve $s, s' \in S$ için

i)

$$(r \cdot s) \cdot s' = (r \cdot s') \cdot (s \lhd s')$$

ii)

$$(r \lhd r') \cdot s = (r \cdot s) \lhd (r' \cdot s)$$

şartlarını sağlıyorsa (sağ) rack etkisi adını alır (Crans ve Wagemann, 2014).

Tanım 3.14 ***(Hemi-Semi-Direct Çarpım)***

R ve S iki rack olsun. S rackının R rackı üzerine etkisi var ise, $R \rtimes S$ kümesi, her $r, r' \in R$ ve her $s, s' \in S$ için

$$(r, s) \lhd (r', s') = (r \cdot s', s \lhd s')$$

şeklinde tanımlı ikili işlem ile birlikte bir rack yapısı oluşturur ve hemi-semi-direct çarpım olarak adlandırılır.

4. RACK KATEGORİSİNİN ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde **Rack** kategorisindeki çarpım (product), serbest (free), eş-çarpım (coproduct), geri çekme (pullback), ileri itme (pushout), eşitleyici (equaliser) ve eş-eşitleyici (coequaliser) objeleri **Grp** kategorisindekilere benzer olarak oluşturulacaktır. P ve R racklarının $P \times R$ direk çarpımı ve $P * R$ serbest çarpımı Fenn ve Rourke (1992) tarafından tanımlanmıştır. Burada, rackların direk çarpımı ile çarpım obje, rackların serbest çarpımı ile eş-çarpım obje oluşturulacaktır. Yine P ve R racklarının fiber çarpım kullanılarak geri çekme obje elde edilecektir. Ayrıca, $P * R$ serbest çarpım ve onun bir N kongrüans bağıntısı kullanılarak ileri itme (pushout) obje verilecektir. Bu bölümün son kısmında ise her morfizm ikilisinin eşitleyicisinin (equaliser) ve eş-eşitleyicisinin (coequaliser) var olduğu gösterilecektir.

4.1 Çarpım (Product) Obje

Tanım 4.1 *$\mathcal{C}$ bir kategori, A ve B, $\mathcal{C}$ kategorisinin iki objesi olsun. $\mathcal{C}$ kategorisinin herhangi bir D objesi ve herhangi iki*

$$q_1 : D \to A \text{ ve } q_2 : D \to B$$

morfizmi verildiğinde

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, dotted, "\exists! q"] \arrow[dr, "q_2"] & \\ A & C \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek

$$q : D \to C$$

morfizmi varsa C objesine A ve B objelerinin çarpımı (yada çarpım obje) denir.

Fenn ve Rourke (1992) çalışmalarında P ve R racklarının direk çarpımının

$$P \times R = \{(p, r) \mid p \in P, r \in R\}$$

olduğunu söylemişlerdir. Bu tezde, $P \times R$ rackının **Rack** kategorisindeki çarpım objeye karşılık geldiği gösterilecektir.

Teorem 4.1 ***Rack*** *kategorisi çarpım objeye sahiptir.*

İspat *P ve R iki rack olsun.*

$$P \times R = \{(p, r) \mid p \in P, r \in R\}$$

kümesi P ve R racklarının direk çarpımı olup Önerme 3.1 gereğince rack yapısı oluşturur. Ayrıca

$$\begin{aligned} p_1 &: P \times R \to P, \\ p_2 &: P \times R \to R \end{aligned}$$

morfizmleri projeksiyon dönüşümler olup, Önerme 3.2 gereğince rack morfizmidir.

Şimdi T herhangi bir rack ve

$$\begin{aligned} \alpha &: T \to P, \\ \beta &: T \to R \end{aligned}$$

iki rack morfizmi olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} p_1\varphi &= \alpha, \\ p_2\varphi &= \beta \end{aligned}$$

olacak şekilde bir tek

$$\varphi : T \to P \times R$$

rack morfizminin var olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & T & \to & P \times R \\ & t & \mapsto & \varphi(t) = (\alpha(t), \beta(t)) \end{array}$$

şeklinde tanımlansın.

Her $t, t' \in T$ için

$$\begin{aligned} \varphi(t \triangleleft t') &= (\alpha(t \triangleleft t'), \beta(t \triangleleft t')) \\ &= (\alpha(t) \triangleleft \alpha(t'), \beta(t) \triangleleft \beta(t')) \\ &= (\alpha(t), \beta(t)) \triangleleft (\alpha(t'), \beta(t')) \\ &= \varphi(t) \triangleleft \varphi(t') \end{aligned}$$

olup $\varphi : T \to P \times R$ bir rack morfizmidir.

Ayrıca her $t \in T$ için

$$\begin{aligned} p_1\varphi(t) &= p_1(\alpha(t), \beta(t)) \\ &= \alpha(t) \\ p_2\varphi(t) &= p_2(\alpha(t), \beta(t)) \\ &= \beta(t) \end{aligned}$$

olup $p_1\varphi = \alpha$ ve $p_2\varphi = \beta$ olduğu görülür.

Son olarak φ morfizminin tekliği kontrol edilecektir:

$$\varphi' : T \to P \times_S R$$

morfizmi φ ile aynı özellikte, yani

$$\begin{aligned} p_1\varphi' &= \alpha, \\ p_2\varphi' &= \beta \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan bir rack morfizmi olsun ve $\varphi(t) = (p, r)$ şeklinde tanımlansın. Her $t \in T$ için

$$\begin{aligned} p_1\varphi'(t) = \alpha(t) &\Leftrightarrow p_1(p, r) = \alpha(t) \\ &\Leftrightarrow p = \alpha(t) \\ p_2\varphi'(t) = \beta(t) &\Leftrightarrow p_2(p, r) = \beta(t) \\ &\Leftrightarrow r = \beta(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda her $t \in T$ için

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (p, r) \\ &= (\alpha(t), \beta(t)) \\ &= \varphi(t) \end{aligned}$$

olup

$$\varphi'(t) = \varphi(t)$$

elde edilir. Böylece φ morfizmi bir tektir.

Sonuç olarak, $P \times R$ rackı, P ve R racklarının çarpım objesi olup

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, dotted, "\exists!\varphi"] \arrow[dr, "\beta"] & \\ P & P \times R \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & R. \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı çarpım diyagramıdır.

4.2 Serbest (Free) Çarpım

Tanım 4.2 *P ve R iki rack olsun.*

$$P + R = \bigcup_{i\in\{1,2\}} \{(i,x) \mid i = 1 \text{ iken } x \in P \text{ ve } i = 2 \text{ iken } x \in R\}$$

kümesi tanımlansın. Bu küme tarafından üretilen serbest rackın elemanları $(i = 1, \ldots, n$ için, $\alpha_i = \pm 1)$

$$(i_0, a_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, a_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, a_n)$$

formundadır. $F(P + R)$ serbest rackının

$$(i_0, p_0) \lhd^{\alpha_1} (i_0, p_1) \lhd^{\alpha_2} \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, p_n) = (i_0, p_0 \lhd^{\alpha_1} p_1) \lhd^{\alpha_2} (i_2, p_2) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, p_n)$$

ve

$$(i_0, p_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, p_1) \ldots \lhd^{\alpha j-1} (i_{j-1}, p_{j-1}) \lhd^{\alpha j} (i_j, p_j) \lhd^{-\alpha j} (i_j, p_j) \lhd^{\alpha j+2} \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, p_n)$$

$$= (i_0, p_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, p_1) \ldots \lhd^{\alpha j-1} (i_{j-1}, p_{j-1}) \lhd^{\alpha j+2} (i_{j+2}, p_{j+2}) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, p_n)$$

eşitliklerini sağlayan elemanlarının kümesi

$$P * R$$

ile gösterilsin. Bu $P * R$ kümesi

$$[(i_0, p_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, p_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, p_n)] \lhd^{\alpha} [(j_0, q_0) \lhd^{\beta_1} (j_1, q_1) \ldots \lhd^{\beta_m} (j_m, q_m)]$$

$$= (i_0, p_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, p_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, p_n) \lhd^{-\beta_m} (j_m, q_m) \lhd^{-\beta_{m-1}} (j_{m-1}, q_{m-1}) \ldots$$

$$\lhd^{-\beta_1} (j_1, q_1) \lhd^{\alpha} (j_0, q_0) \lhd^{\beta_1} (j_1, q_1) \ldots \lhd^{\beta_m} (j_m, q_m)$$

işlemi ile birlike rack yapısı oluşturur. Bu racka P ve R racklarının serbest çarpım rackı denir.

4.3 Eş-çarpım (Coproduct) Obje

Tanım 4.3 *$\mathcal{C}$ bir kategori, X_1 ve X_2, $\mathcal{C}$ kategorisinin iki objesi olsun. $\mathcal{C}$ kategorisinin herhangi bir Y objesi ve herhangi iki*

$$i_1 : X_1 \to Z \text{ ve } i_2 : X_2 \to Z$$

morfizmi verildiğinde

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ X_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "i_1"'] & Z \arrow[u, dotted, "\exists! h"] & X_2 \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek

$$h : Z \to Y$$

morfizmi varsa Z objesine X_1 ve X_2 objelerinin eş-çarpımı (coproduct) denir ve

$$Z = X_1 \sqcup X_2$$

ile gösterilir.

Şimdi (Fenn ve Rourke, 1992) de tanımlanan rackların serbest çarpımının, **Rack** kategorisindeki eş-çarpım objeye karşılık geldiği gösterilecektir.

Teorem 4.2 ***Rack*** *kategorisi eş-çarpım objeye sahiptir.*

İspat *P ve R iki rack olsun. P ve R racklarının eş-çarpımı, P ve R racklarının serbest çarpımı, $P * R$, ile tanımlıdır ve $P \sqcup R$ ile gösterilir. Bununla birlikte*

$$\begin{array}{rccc} i_1 : & P & \to & P * R \\ & p & \mapsto & (1, p) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} i_2 : & R & \to & P * R \\ & r & \mapsto & (2, r) \end{array}$$

dönüşümleri her $p, p' \in P$ için

$$\begin{aligned} i_1 (p \lhd p') &= (1, p \lhd p') \\ &= (1, p) \lhd (1, p') \\ &= i_1 (p) \lhd i_1 (p') \end{aligned}$$

olduğundan i_1 morfizmi, benzer şekilde i_2 morfizmi bir rack morfizmidir.

Şimdi eş-çarpım obje için evrensellik özelliğinin sağlandığı gösterilecektir. X bir rack ve $f_1 : P \to X$, $f_2 : R \to X$ iki rack morfizmi olsun.

$$hi_1 = f_1,$$

$$hi_2 = f_2$$

olacak şekilde bir tek

$$h : P * R \to X$$

rack morfizminin var olduğu gösterilmelidir. $h : P*R \to X$ *dönüşümünü, her* $0 \leq j \leq n$ *için* $(i_j, p_j) \in P + R$ *olmak üzere,*

$$h\left((i_0, p_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, p_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, p_n)\right) = f_{i_0}(p_0) \lhd^{\alpha_1} f_{i_1}(p_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} f_{i_n}(p_n)$$

şeklinde tanımlansın.

$h : P * R \to X$ *morfizminin rack morfizmi olduğu ve tekliği Önerme 3.6 gereğince açıktır.*

Ayrıca her $p \in P$ *için*

$$\begin{aligned} hi_1(p) &= h(1, p) \\ &= f_1(p) \end{aligned}$$

olup

$$hi_1 = f_1$$

ve benzer şekilde

$$hi_2 = f_2$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak $P * R$ *serbest çarpımı,* P *ve* R *racklarının eş-çarpımı olup,*

$$\begin{tikzcd} & X & \\ P \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "i_1"'] & P * R \arrow[u, dotted, "\exists! h"] & R \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

diyagramı eş-çarpım diyagramıdır.

4.4 Geri Çekme (Pullback) Obje

Tanım 4.4 *$\mathcal{C}$ bir kategori,* $f : A \to C$ *ve* $g : B \to C$*,* $\mathcal{C}$ *kategorisinin iki morfizmi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa* (p_1, p_2) *ikilisine* (f, g) *ikilisinin geri çekmesi (pullback) denir.*

i)

$$p_1 : P \longrightarrow A \quad ve \quad p_2 : P \longrightarrow B$$

morfizm olmak üzere,

$$fp_1 = gp_2$$

eşitliği vardır.

ii) *$\mathcal{C}$ kategorisinin herhangi bir D objesi ve herhangi iki*

$$q_1 : D \to A \text{ ve } q_2 : D \to B$$

morfizmi verildiğinde

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed, "\exists! q"] \arrow[drr, "q_2"] \arrow[ddr, "q_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek

$$q : D \to P$$

morfizmi vardır.

Burada P objesi A ve B objelerinin geri çekme objesidir.

$f : P \to T$ ve $g : R \to T$ iki rack morfizmi için, fiber çarpım rackı

$$P \times_T R = \{(p, r) \mid f(p) = g(r)\} \subseteq P \times R$$

kümesi ile tanımlanır. Aşağıdaki teoremde bu fiber çarpımın **Rack** kategorisinde geri çekme objeye karşılık geldiği gösterilecektir.

Teorem 4.3 ***Rack*** *kategorisi geri çekme objesine sahiptir.*

İspat *$f : P \to T$ ve $g : R \to T$ iki rack morfizmi olmak üzere,*

$$P \times_T R = \{(p, r) \mid f(p) = g(r)\}$$

fiber çarpım rackı ele alınsın.

$$\begin{array}{rccl} p_1: & P\times_T R & \to & P \\ & (p,r) & \mapsto & p_1(p,r)=p \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccl} p_2: & P\times_T R & \to & R \\ & (p,r) & \mapsto & p_2(p,r)=r \end{array}$$

projeksiyon dönüşümleri, Önerme 3.2 gereğince rack morfizmidir.

Şimdi Q herhangi bir rack ve

$$\begin{aligned} \alpha &: Q\to P, \\ \beta &: Q\to R \end{aligned}$$

rack morfizmleri

$$f\alpha = g\beta$$

eşitliğini sağlasın.

Bu durumda

$$\begin{aligned} p_1\varphi &= \alpha, \\ p_2\varphi &= \beta \end{aligned}$$

olacak şekilde bir tek $\varphi : Q\to P\times_T R$ rack morfizminin var olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & Q & \to & P\times_T R \\ & q & \mapsto & \varphi(q)=(\alpha(q),\beta(q)) \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Her $q,q'\in Q$ için,

$$\begin{aligned} \varphi(q\lhd q') &= (\alpha(q\lhd q'),\beta(q\lhd q')) \\ &= (\alpha(q)\lhd\alpha(q'),\beta(q)\lhd\beta(q')) \\ &= (\alpha(q),\beta(q))\lhd(\alpha(q'),\beta(q')) \\ &= \varphi(q)\lhd\varphi(q') \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\varphi : Q\to P\times_T R$ morfizmi bir rack morfizmidir.

Ayrıca her $q\in Q$ için

$$\begin{aligned} p_1\varphi(q) &= p_1(\alpha(q),\beta(q)) \\ &= \alpha(q) \\ p_2\varphi(q) &= p_2(\alpha(q),\beta(q)) \\ &= \beta(q) \end{aligned}$$

olup $p_1\varphi = \alpha$ *ve* $p_2\varphi = \beta$ *elde edilir.*

Son olarak φ *morfizminin tekliği kontrol edilecektir:*

$$\varphi' : Q \to P \times_T R$$

morfizmi φ *ile aynı özellikte, yani*

$$\begin{aligned} p_1\varphi' &= \alpha, \\ p_2\varphi' &= \beta \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan bir rack morfizmi olsun ve $\varphi'(q) = (p, r)$ *şeklinde tanımlansın. Bu durumda, her* $q \in Q$ *için*

$$\begin{aligned} p_1\varphi'(q) = \alpha(q) &\Leftrightarrow p_1(p, r) = \alpha(q) \\ &\Leftrightarrow p = \alpha(q) \\ p_2\varphi'(q) = \beta(q) &\Leftrightarrow p_2(p, r) = \beta(q) \\ &\Leftrightarrow r = \beta(q) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\varphi'(q) = (p, r) = (\alpha(q), \beta(q)) = \varphi(q)$$

olup $\varphi' = \varphi$ *eşitliği elde edilir. Böylece* φ *rack morfizmi bir tektir.*

Sonuç olarak, $P \times_T R$*,* P *ve* R *racklarının geri çekmesi olup*

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "\exists!\varphi"] \arrow[drr, "\beta"] \arrow[ddr, "\alpha"'] & & \\
& P \times_T R \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & R \arrow[d, "g"] \\
& P \arrow[r, "f"'] & T
\end{tikzcd}$$

diyagramı (f, g) *morfizm ikilisi için geri çekme diyagramıdır.*

4.5 İleri İtme (Pushout) Obje

Tanım 4.5 $\mathcal{C}$ *bir kategori,* $f : X \to Y$ *ve* $g : X \to Z$*,* $\mathcal{C}$ *kategorisinin iki morfizmi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa,* (i_1, i_2) *ikilisine* (f, g) *ikilisinin ileri itmesi (pushout) denir.*

i)

$$i_1 : Y \longrightarrow P \quad \textit{ve} \quad i_2 : Z \longrightarrow P$$

morfizm olmak üzere,

$$i_1 f = i_2 g$$

eşitliği geçerlidir.

ii) $\mathcal{C}$ *kategorisinin herhangi bir* Q *objesi ve herhangi iki*

$$j_1 : Y \to Q \text{ ve } j_2 : Z \to Q$$

morfimi verildiğinde

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "i_1"'] \arrow[ddr, "j_1"] & \\
Z \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, "j_2"'] & P \arrow[dr, dashed, "\exists!\varphi"] & \\
& & Q
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek

$$\varphi : P \to Q$$

morfizmi vardır.

Burada P *objesi* Y *ve* Z *objelerinin ileri itme objesidir.*

Teorem 4.4 ***Rack*** *kategorisi ileri itme objesine sahiptir.*

İspat $f : S \to P$ *ve* $g : S \to R$ *iki rack morfizmi olsun.* (f, g) *morfizm ikilisinin ileri itmeye sahip olduğunu gösterilecektir.*

N *bağıntısı*

$$\{(1, f(s)) = (2, g(s)) \mid s \in S\}$$

özelliğindeki elemanlar tarafından üretilen bir kongrüans bağıntısı olsun. Bu durumda,

$$P * R$$

rackı P *ve* R *racklarının serbest çarpımı olmak üzere* P *ve* R *objelerinin ileri itme objesi*

$$(P * R) / N$$

rackıdır.

$$\begin{array}{rccc} i_1: & P & \to & (P*R)/N \\ & p & \mapsto & [(1,p)] \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} i_2: & R & \to & (P*R)/N \\ & r & \mapsto & [(2,r)] \end{array}$$

morfizmleri tanımlansın. Her $p, p' \in P$ *için*

$$\begin{aligned} i_1(p \lhd p') &= [(1, p \lhd p')] \\ &= [(1,p)] \lhd [(1,p')] \\ &= i_1(p) \lhd i_2(p') \end{aligned}$$

olup i_1 *morfizmi, benzer şekilde* i_2 *morfizmi bir rack morfizmidir.*

Ayrıca her $s \in S$ *için*

$$i_1 f(s) = [(1, f(s))] = [2, g(s)] = i_2 g(s)$$

olup

$$i_1 f = i_2 g$$

eşitliği geçerlidir.

Şimdi Q *herhangi bir rack olmak üzere,*

$$j_1 : P \to Q \text{ ve } j_2 : R \to Q$$

morfizmleri

$$j_1 f = j_2 g$$

özelliğinde iki rack morfizmi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \varphi i_1 &= j_1, \\ \varphi i_2 &= j_2 \end{aligned}$$

olacak şekilde bir tek

$$\varphi : (P*R)/N \to Q$$

rack morfizminin var olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & (P*R)/N & \to & Q \\ & [(i_0,x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1,x_1) \lhd^{\alpha_2} \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n,x_n)] & \mapsto & q_0 \lhd q_1 \lhd \ldots \lhd q_n \end{array}$$

dönüşümü, $0 \leq i \leq 1$ *olmak üzere* $x_i \in P$ *ise* $q_i = j_1(x_i)$ *ve* $x_i \in R$ *ise* $q_i = j_2(x_i)$ *şeklinde tanımlansın. Bu durumda,* φ *morfizmi* j_1 *ve* j_2 *rack morfizmleri yardımıyla tanımlandığından, bir rack morfizmidir. Ayrıca her* $p \in P$ *için*

$$\begin{aligned} \varphi i_1(p) &= \varphi([(1,p)]) \\ &= j_1(p) \end{aligned}$$

ve her $r \in R$ *için*

$$\begin{aligned} \varphi i_2(r) &= \varphi([(2,r)]) \\ &= j_2(r) \end{aligned}$$

olup $\varphi i_1 = j_1$ *ve* $\varphi i_2 = j_2$ *eşitlikleri sağlanır.*

Son olarak φ *morfizminin tekliği kontrol edilecektir:*

$$\varphi' : (P * R)/N \to Q$$

morfizmi, φ *ile aynı özellikte yani,*

$$\begin{aligned} \varphi' i_1 &= j_1, \\ \varphi' i_2 &= j_2 \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan bir rack morfizmi olsun ve

$$\varphi'[(i_0,x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1,x_1) \lhd^{\alpha_2} \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n,x_n)] = q'_0 \lhd q'_1 \lhd \ldots \lhd q'_n$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $p \in P$ *için*

$$\begin{aligned} \varphi' i_1(p) &= \varphi'([(1,p)]) \\ &= j_1(p) \end{aligned}$$

ve her $r \in R$ *için*

$$\begin{aligned} \varphi' i_2(r) &= \varphi'([(2,r)]) \\ &= j_2(r) \end{aligned}$$

olup, $0 \leq i \leq 1$ *olmak üzere* $x_i \in P$ *ise* $q_i = j_1(x_i)$ *ve* $x_i \in R$ *ise* $q_i = j_2(x_i)$ *olduğu görülür. Böylece* φ *rack morfizmi bir tektir.*

Sonuç olarak $(P * R)/N$, P ve R racklarının ileri itmesi olup,

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, "i_1"'] \arrow[ddr, "j_1"] & \\
R \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, "j_2"'] & (P * R)/N \arrow[dr, dashed, "\exists ! \varphi"] & \\
& & Q
\end{tikzcd}$$

diyagramı (f, g) mofrizm ikilisi için ileri itme diyagramıdır.

4.6 Eşitleyici (Equaliser) Obje

Tanım 4.6 *$\mathcal{C}$ bir kategori, $f : A \longrightarrow B$ ve $g : A \longrightarrow B$, $\mathcal{C}$ kategorisinin iki morfizmi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa (E, u) ikilisine (f, g) ikilisinin eşitleyicisi (equaliser) denir.*

i) *Herhangi bir $u : E \longrightarrow A$ morfizmi için,*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$fu = gu$$

eşitliği vardır.

ii) *$fh = gh$ özelliğindeki herhangi bir $h : C \longrightarrow A$ morfizmi için,*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
C \arrow[u, dotted, "\exists ! k"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani $uk = h$ olacak şekilde bir tek

$$k : C \longrightarrow E$$

morfizmi vardır.

Burada E, eşitleyici objedir.

Teorem 4.5 ***Rack*** *kategorisinde her morfizm ikilisinin eşitleyicisi vardır.*

İspat $f : P \longrightarrow R$ *ve* $g : P \longrightarrow R$ *iki rack morfizmi olsun.*

$$Q = \{p \in P \mid f(p) = g(p)\}$$

kümesi tanımlansın.

i) $1 \in P$ *için*

$$f(1) = 1 = g(1)$$

olduğundan $1 \in Q$ *dur.*

ii) *Her* $p, p' \in Q$ *için*

$$\begin{aligned} f(p \lhd p') &= f(p) \lhd f(p') \\ &= g(p) \lhd g(p') \\ &= g(p \lhd p') \end{aligned}$$

olup $p \lhd p' \in Q$ *olduğu görülür. Böylece Q,* $\lhd$ *işlemi altında kapalıdır.*

iii) $p, q \in P$ *için* $q \in Q$ *ve* $p \lhd q \in Q$ *olsun. Böylece* $f(p) = g(p)$ *ve* $f(p \lhd q) = g(p \lhd q)$ *dir. Bu durumda*

$$\begin{aligned} f(p \lhd q) = g(p \lhd q) &\Rightarrow f(p) \lhd f(q) = g(p) \lhd g(q) \\ &\Rightarrow f(p) = g(p) \end{aligned}$$

olup $p \in Q$ *olduğu görülür.*

Böylece Q *kümesi* P *rackının alt rackıdır. Bu durumda* Q *alt rackı eşitleyici objedir ve*

$$\begin{array}{rccl} u: & Q & \rightarrow & P \\ & p & \mapsto & u(p) = p \end{array}$$

morfizmi her $p, p' \in Q$ *için,*

$$\begin{aligned} u(p \lhd p') &= p \lhd p' \\ &= u(p) \lhd u(p') \end{aligned}$$

olduğundan bir rack morfizmidir.

Ayrıca her $p \in Q$ için

$$\begin{aligned}(fu)(p) &= f(u(p)) \\ &= f(p) \\ &= g(p) \\ &= g(u(p)) \\ &= (gu)(p)\end{aligned}$$

olup $f\ u = gu$ elde edilir.

Şimdi T bir rack ve

$$v : T \to P$$

morfizmi

$$fv = gv$$

eşitliğini sağlayan bir rack morfizmi olsun. Böylece

$$u\phi = v$$

olacak şekilde bir tek

$$\phi : T \to Q$$

rack morfizminin var olduğu gösterilmelidir.

$$fv = gv$$

olduğundan her $t \in T$ için

$$fv(t) = gv(t)$$

olup $v(t) \in Q$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{array}{cccl}\phi : & T & \to & Q \\ & t & \mapsto & \phi(t) = v(t)\end{array}$$

şeklinde tanımlanabilir. Her $t, t' \in T$ için,

$$\begin{aligned}\phi(t \lhd t') &= v(t \lhd t') \\ &= v(t) \lhd v(t')\end{aligned}$$

olup $\phi : T \to Q$ morfizmi bir rack morfizmidir.

Ayrıca her $t \in T$ için

$$\begin{aligned}(u\phi)(t) &= uv(t) \\ &= v(t)\end{aligned}$$

olup $u\phi = v$ *elde edilir.*

Son olarak ϕ *morfizminin tek olduğu gösterilecektir:*

$$\phi' : T \to Q$$

morfizmi, ϕ *ile aynı özellikte, yani*

$$u\phi' = v$$

olacak şekilde bir rack morfizmi olsun ve $\phi'(t) = p$ *şeklinde tanımlansın. Bu durumda*

$$\begin{aligned} u\phi'(t) = v(t) &\Rightarrow u(p) = v(t) \\ &\Rightarrow p = v(t) \end{aligned}$$

olup

$$\phi'(t) = p = \phi(t)$$

elde edilir. Böylece ϕ *rack morfizmi bir tektir.*

Sonuç olarak (Q, u) *ikilisi* (f, g) *ikilisinin eşitleyicisidir ve*

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, hook, "u"] & P \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & R \\ T \arrow[u, dotted, "\exists!\phi"] \arrow[ur, "v"'] & & \end{tikzcd}$$

diyagramı eşitleyici diyagramıdır.

4.7 Eş-eşitleyici (Coequaliser) Obje

Tanım 4.7 *$\mathcal{C}$ bir kategori,* $f : A \longrightarrow B$ *ve* $g : A \longrightarrow B$*, $\mathcal{C}$ kategorisinin iki morfizmi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa* (Q, q) *ikilisine* (f, g) *ikilisinin eş-eşitleyicisi (coequaliser) denir.*

i) *Herhangi bir* $q : B \longrightarrow Q$ *morfizmi için,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] & Q \end{tikzcd}$$

$$qf = qg$$

eşitliği vardır.

ii) *$kf = kg$ özelliğindeki herhangi bir $k : B \longrightarrow C$ morfizmi için,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "k"'] & Q \arrow[d, dotted, "\exists! h"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani $hq = k$ olacak şekilde bir tek

$$h : Q \longrightarrow C$$

morfizmi vardır.

Burada Q, eş-eşitleyici objedir.

Teorem 4.6 ***Rack*** *kategorisinde her morfizm ikilisinin eş-eşitleyicisi vardır.*

İspat *$f : P \longrightarrow R$ ve $g : P \longrightarrow R$ iki rack morfizmi olsun. $p \in P$ olmak üzere, N bağıntısı R üzerindeki*

$$N = \{(f(p), g(p)) \mid p \in P\} \subseteq R \times R$$

şeklindeki en küçük denklik bağıntısı olsun.

Böylece R/N bölüm kümesi oluşturulabilir.

R/N bölüm kümesi

$$[r] \lhd [r'] = [r \lhd r']$$

şeklinde tanımlı ikili işlem ile birlikte rack yapısı oluşturur ve eş-eşitleyici objedir.

Şimdi,

$$\begin{array}{rccc} q : & R & \rightarrow & R/N \\ & r & \mapsto & q(r) = [r] \end{array}$$

morfizmi tanımlansın. Her $r, r' \in R$ için,

$$\begin{aligned} q(r \lhd r') &= [r \lhd r'] \\ &= [r] \lhd [r'] \\ &= q(r) \lhd q(r') \end{aligned}$$

olduğundan q *morfizmi bir rack morfizmidir.*

Ayrıca her $p \in P$ *için*

$$\begin{aligned} [f(p)] = [g(p)] &\Rightarrow q(f(p)) = q(g(p)) \\ &\Rightarrow qf(p) = qg(p) \end{aligned}$$

olup

$$qf = qg$$

elde edilir.

Şimdi W *herhangi bir rack ve* $\gamma : R \to W$ *morfizmi*

$$\gamma f = \gamma g$$

eşitliğini sağlayan herhangi bir rack morfizmi olsun. Bu durumda

$$\varphi q = \gamma$$

olacak şekilde bir tek

$$\varphi : R/N \to W$$

rack morfizminin var olduğu gösterilmelidir.

φ *morfizmi*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & R/N & \to & W \\ & [r] & \mapsto & \varphi([r]) = \gamma(r) \end{array}$$

şeklinde tanımlansın.

H *bağıntısı*

$$(r, r') \in H \Leftrightarrow \gamma(r) = \gamma(r')$$

şeklinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun.

$$\gamma f = \gamma g$$

olduğundan her $p \in P$ *için*

$$\gamma f(p) = \gamma g(p)$$

olup $(f(p), g(p)) \in H$ *elde edilir.*

N bağıntısı R üzerindeki en küçük denklik bağıntısı olduğundan $N \subseteq H$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} [r] = [r'] &\Rightarrow (r, r') \in N \\ &\Rightarrow (r, r') \in H \\ &\Rightarrow \gamma(r) = \gamma(r') \end{aligned}$$

olup φ morfizmi iyi tanımlıdır.

Her $[r], [r'] \in R/N$ için

$$\begin{aligned} \varphi([r] \lhd [r']) &= \varphi([r \lhd r']) \\ &= \gamma(r \lhd r') \\ &= \gamma(r) \lhd \gamma(r') \\ &= \varphi[r] \lhd \varphi[r'] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece φ morfizmi bir rack morfizmidir.

Ayrıca her $r \in R$ için

$$\begin{aligned} (\varphi q)(r) &= \varphi([r]) \\ &= \gamma(r) \end{aligned}$$

olup $\varphi q = \gamma$ olduğu görülür.

Son olarak φ, morfizminin tek olduğu gösterilecektir:

$$\varphi' : R/N \to W$$

morfizmi φ ile aynı özellikte yani

$$\varphi' q = \gamma$$

eşitliğini sağlayan bir rack morfizmi olsun ve $\varphi'([r]) = w$ şeklinde tanımlansın. Her $r \in R$ için,

$$\begin{aligned} \varphi' q(r) = \gamma(r) &\Rightarrow \varphi'([r]) = \gamma(r) \\ &\Rightarrow w = \gamma(r) \end{aligned}$$

olup

$$\varphi'([r]) = w = \gamma(r) = \varphi([r])$$

elde edilir. Bu durumda φ rack morfizmi bir tektir.

Böylece $(R/N, q)$ *ikilisi* (f, g) *ikilisinin eş-eşitleyicisidir ve*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & R \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\gamma"'] & R/N \arrow[d, dotted, "\exists!\varphi"] \\ & & W \end{tikzcd}$$

diyagramı eş-eşitleyici diyagramıdır.

5. RACK ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL

Çaprazlanmış modül yapısı gruplar üzerinde ilk kez Whitehead (1941, 1946) tarafından homotopi 2-tiplerin cebirsel modellemesi olarak tanımlanmıştır. Sonrasında çaprazlanmış modül yapısı cebir, lie cebir, gruboid, cebiroid gibi bir çok cebirsel yapı üzerinde incelenmiştir. Rack yapısı üzerinde ise ilk kez Crans ve Wagemann (2014) tarafından ele alınmıştır. Bu bölümde rack çaprazlanmış modülleri tanıtılacak ve örnekleri incelenecektir.

Tanım 5.1 $\partial : (R, \lhd, 1) \to (S, \lhd', 1)$ *rack morfizmi* S *nin* R *üzerine tanımlı*

$$\begin{array}{ccc} R \times S & \to & R \\ (r, s) & \mapsto & r \cdot s \end{array}$$

rack etkisi ile birlikte her $r, r' \in R$ *ve her* $s \in S$ *için*

X1)

$$\partial (r \cdot s) = \partial (r) \lhd' s,$$

X2)

$$r \cdot \partial (r') = r \lhd r'$$

şartlarını sağlıyorsa rack çaprazlanmış modül adını alır ve (R, S, ∂) *ile gösterilir.*

Eğer sadece $X1$ *şartı sağlanıyorsa* ∂ *dönüşümüne rack önçaprazlanmış modül denir.*

(R, S, ∂) ve (R', S', ∂') iki rack çaprazlanmış modül olmak üzere, her $r \in R$ ve her $s \in S$ için

$$f_1 (r \cdot s) = f_1 (r) \cdot f_0 (s)$$

ve

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\partial} & S \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_0} \\ R' & \xrightarrow[\partial']{} & S' \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $f_1 : R \to R'$ ve $f_0 : S \to S'$ rack morfizmleri varsa

$$(f_1, f_0) : (R, S, \partial) \to (R', S', \partial')$$

ikilisine rack çaprazlanmış modül morfizmi denir.

Böylece rack çaprazlanmış modül kategorisi, **XRack**, elde edilir.

Özel olarak, $S = S'$ ve f_0 birim dönüşüm ise,

$$f_1 (r \cdot s) = f_1 (r) \cdot id_S (s)$$

ve

$$\partial' f_1 = id_S \partial$$

eşitlikleri sağlandığında f_1 bir rack çaprazlanmış modül morfizmi olur.

Genel olarak görüntü kümesi sabit bir S rackı olan rack çaprazlanmış modül kategorisi elde edilir ve **XRack**$/S$ ile gösterilir. Bu **XRack**$/S$ kategorisi **XRack** in bir dolu alt kategorisidir.

Rack Çaprazlanmış Modül Örnekleri

Örnek 5.1 N, R *rackının normal alt rackı olmak üzere,*

$$\begin{array}{rccl} \partial : & N & \to & R \\ & n & \mapsto & \partial (n) = n \end{array}$$

içine dönüşümünün

$$\begin{array}{ccl} N \times R & \to & N \\ (n, r) & \mapsto & n \cdot r = n \lhd r \end{array}$$

etkisi ile birlikte bir rack çaprazlanmış modül olduğu aşağıdaki gibi gösterilir:

Her $n, n' \in N$ *ve her* $r, r' \in R$ *için*

i)

$$\begin{aligned} (n \cdot r) \cdot r' &= (n \lhd r) \cdot r' \\ &= (n \lhd r) \lhd r' \\ &= (n \lhd r') \lhd (r \lhd r') \\ &= (n \cdot r') \cdot (r \lhd r') \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(n \lhd n') \cdot r &= (n \lhd n') \lhd r \\ &= (n \lhd r) \lhd (n' \lhd r) \\ &= (n \cdot r) \lhd (n' \cdot r)\end{aligned}$$

olup etki şartları sağlanır. Ayrıca her $n, n' \in N$ *için*

$$\begin{aligned}\partial (n \lhd n') &= n \lhd n' \\ &= \partial (n) \lhd \partial (n')\end{aligned}$$

olduğundan ∂ *bir rack morfizmidir. Son olarak her* $n, n' \in N$ *ve her* $r \in R$ *için*

X1)

$$\begin{aligned}\partial (n \cdot r) &= n \cdot r \\ &= n \lhd r \\ &= \partial (n) \lhd r\end{aligned}$$

X2)

$$\begin{aligned}n \cdot \partial (n') &= n \lhd \partial (n') \\ &= n \lhd n'\end{aligned}$$

olup rack çaprazlanmış modül şartları sağlanır.

Örnek 5.2 $\partial : R \to S$ *grup çaprazlanmış modül olsun.* R *ve* S *gruplarını konjuge rack alarak rack çaprazlanmış modül elde edilir. Yani, conjuge rack* S *nin conjuge rack* R *üzerine rack etkisi vardır ve her* $r, r' \in R$ *ve her* $s, s' \in S$ *için,*

i)

$$\begin{aligned}(r \cdot s) \cdot s' &= r \cdot (ss') \\ &= r \cdot s' \left((s')^{-1} ss'\right) \\ &= (r \cdot s') \cdot (s \lhd s')\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(r \lhd r') \cdot s &= \left((r')^{-1} rr'\right) \cdot s \\ &= (r' \cdot s)^{-1} (r \cdot s) (r' \cdot s) \\ &= (r \cdot s) \lhd (r' \cdot s)\end{aligned}$$

olup etki şartları sağlanır.

Ayrıca her $r, r' \in R$ için,

$$\begin{aligned}\partial\left(r \lhd r'\right) &= \partial\left(\left(r'\right)^{-1} r r'\right)\\ &= \partial\left(\left(r'\right)\right)^{-1} \partial\left(r\right)\partial\left(r'\right) \qquad \because \partial \textit{ grup homomorfizmi}\\ &= \partial\left(r\right) \lhd \partial\left(r'\right)\end{aligned}$$

olup $\partial : R \to S$ bir rack morfizmidir. Son olarak her $r, r' \in R$ ve her $s \in S$ için,

X1)

$$\begin{aligned}\partial\left(r \cdot s\right) &= s^{-1}\partial\left(r\right)s\\ &= \partial\left(r\right) \lhd s\end{aligned}$$

X2)

$$\begin{aligned}r \cdot \partial\left(r'\right) &= \left(r'\right)^{-1} r r'\\ &= r \lhd r'\end{aligned}$$

olup rack çaprazlanmış modül şartları sağlanır.

Örnek 5.3 *$\partial : R \to S$ ve $\partial' : R' \to S'$ iki rack çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda*

$$\begin{array}{rccl}\mu = \partial \times \partial' : & R \times R' & \to & S \times S'\\ & \left(r, r'\right) & \mapsto & \mu\left(r, r'\right) = \left(\partial\left(r\right), \partial'\left(r'\right)\right)\end{array}$$

dönüşümü, her $\left(r, r'\right), \left(r_1, r_1'\right) \in R \times R'$ için

$$\left(r, r'\right) \lhd \left(r_1, r_1'\right) = \left(r \lhd r_1, r' \lhd r_1'\right)$$

şeklinde tanımlı ikili işlem ve $S \times S'$ rackının $R \times R'$ üzerine

$$\left(r, r'\right) \cdot \left(s, s'\right) = \left(r \cdot s, r' \cdot s'\right)$$

etkisiyle birlikte bir rack çaprazlanmış modüldür.

Her $\left(r, r'\right), \left(r_1, r_1'\right) \in R \times R'$ ve her $\left(s, s'\right), \left(s_1, s_1'\right) \in S \times S'$ için

i)

$$\begin{aligned}((r,r')\cdot(s,s'))\cdot(s_1,s_1') &= (r\cdot s, r'\cdot s')\cdot(s_1,s_1')\\ &= ((r\cdot s)\cdot s_1, (r'\cdot s')\cdot s_1')\\ &= ((r\cdot s_1)\cdot(s\lhd s_1), (r'\cdot s_1')\cdot(s'\lhd s_1'))\\ &= (r\cdot s_1, r'\cdot s_1')\cdot(s\lhd s_1, s'\lhd s_1')\\ &= ((r,r')\cdot(s_1,s_1'))\cdot((s,s')\lhd(s_1,s_1'))\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}((r,r')\lhd(r_1,r_1'))\cdot(s,s') &= (r\lhd r_1, r'\lhd r_1')\cdot(s,s')\\ &= ((r\lhd r_1)\cdot s, (r'\lhd r_1')\cdot s')\\ &= ((r\cdot s)\lhd(r_1\cdot s), (r'\cdot s')\lhd(r_1'\cdot s'))\\ &= ((r\cdot s), (r'\cdot s'))\lhd((r_1\cdot s), (r_1'\cdot s'))\\ &= ((r,r')\cdot(s,s'))\lhd((r_1,r_1')\cdot(s,s'))\end{aligned}$$

olup etki şartları sağlanır. Ayrıca her $(r,r'), (r_1,r_1')\in R\times R'$ *için*

$$\begin{aligned}\mu((r,r')\lhd(r_1,r_1')) &= \mu(r\lhd r_1, r'\lhd r_1')\\ &= (\partial(r\lhd r_1), \partial'(r'\lhd r_1'))\\ &= (\partial(r)\lhd\partial(r_1), \partial'(r')\lhd\partial'(r_1'))\\ &= (\partial(r), \partial'(r'))\lhd(\partial(r_1), \partial'(r_1'))\\ &= \mu(r,r')\lhd\mu(r_1,r_1')\end{aligned}$$

olduğundan μ *bir rack morfizmidir. Son olarak, her* $(r,r'), (r_1,r_1')\in R\times R'$ *ve her* $(s,s')\in S\times S'$ *için*

X1)

$$\begin{aligned}\mu((r,r')\cdot(s,s')) &= \mu(r\cdot s, r'\cdot s')\\ &= (\partial(r\cdot s), \partial'(r'\cdot s'))\\ &= (\partial(r)\lhd s, \partial'(r')\lhd s')\\ &= (\partial(r), \partial'(r'))\lhd(s,s')\\ &= \mu(r,r')\lhd(s,s')\end{aligned}$$

X2)

$$\begin{aligned}(r,r')\cdot\mu(r_1,r_1') &= (r,r')\cdot(\partial(r_1),\partial'(r_1'))\\ &= (r\cdot\partial(r_1),r'\cdot\partial'(r_1'))\\ &= (r\lhd r_1,r'\lhd r_1')\\ &= (r,r')\lhd(r_1,r_1')\end{aligned}$$

olup rack çaprazlanmış modül şartları sağlanır.

Örnek 5.4 *R bir rack ve S bir pointed rack olmak üzere, $\partial : R \to S$ bir rack çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda*

$$\text{\textit{Çek}}\,(\partial) = \{x \in R \mid \partial(x) = 1\}$$

kümesi R rackının normal alt rackıdır.

$x \in$ Çek (∂) ve $r \in R$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\partial(x\lhd r) &= \partial(x)\lhd\partial(r)\\ &= 1\lhd\partial(r)\\ &= 1\end{aligned}$$

olup $x \lhd r \in$ Çek (∂) olduğu görülür. Böylece Çek (∂) , R rackının normal alt rackıdır.

Örnek 5.5 *R bir rack ve S bir involute rack olmak üzere, $\partial : R \to S$ bir rack çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda*

$$\text{\textit{Gör}}\,(\partial) = \{\partial(r) \mid r \in R\}$$

kümesi S rackının normal alt rackıdır.

$x \in$ Gör (∂) olsun. Bu durumda

$$x = \partial(r)$$

olacak şekilde $r \in R$ vardır. Her $s \in S$ için

$$x \lhd s = \partial(r) \lhd s = \partial(r\cdot s) \in \text{Gör}\,(\partial)$$

elde edilir. Böylece Gör (∂), S rackının normal alt rackıdır.

Önerme 5.1 *$\alpha : P \to S$ ve $\beta : R \to S$ iki rack çaprazlanmış modül olsun.*

$$P \times_S R = \{(p, r) \mid \alpha(p) = \beta(r)\} \subset P \times R$$

olmak üzere,

$$\partial(p, r) = \alpha(p) = \beta(r)$$

şeklinde tanımlı

$$\partial : P \times_S R \to S$$

dönüşümü, S nin $P \times_S R$ üzerine tanımlı

$$(p, r) \cdot s = (p \cdot s, r \cdot s)$$

etkisiyle birlikte bir rack çaprazlanmış modüldür.

İspat *Her $(p, r), (p', r') \in P \times_S R$ ve $s, s' \in S$ için,*

i)

$$\begin{aligned}((p, r) \cdot s) \cdot s' &= (p \cdot s, r \cdot s) \cdot s' \\ &= ((p \cdot s) \cdot s', (r \cdot s) \cdot s') \\ &= ((p \cdot s') \cdot (s \lhd s'), (r \cdot s') \cdot (s \lhd s')) \\ &= ((p \cdot s'), (r \cdot s')) \cdot (s \lhd s') \\ &= ((p, r) \cdot s') \cdot (s \lhd s')\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}((p, r) \lhd (p', r')) \cdot s &= (p \lhd p', r \lhd r') \cdot s \\ &= ((p \lhd p') \cdot s, (r \lhd r') \cdot s) \\ &= ((p \cdot s) \lhd (p' \cdot s), (r \cdot s) \lhd (r' \cdot s)) \\ &= ((p \cdot s), (r \cdot s)) \lhd ((p' \cdot s), (r' \cdot s)) \\ &= ((p, r) \cdot s) \lhd ((p', r') \cdot s)\end{aligned}$$

olup etki şartları sağlanır.

Ayrıca her $(p, r), (p', r') \in P \times_S R$ için

$$\begin{aligned}\partial((p, r) \lhd (p', r')) &= \partial(p \lhd p', r \lhd r') \\ &= \alpha(p \lhd p') \\ &= \alpha(p) \lhd \alpha(p') \\ &= \partial(p, r) \lhd \partial(p', r')\end{aligned}$$

olup $\partial : P \times_S R \to S$ *morfizmi bir rack morfizmidir.*

Son olarak, her $(p, r), (p', r') \in P \times_S R$ *ve her* $s \in S$ *için*

X1)

$$\begin{aligned}\partial((p,r)\cdot s) &= \partial(p\cdot s, r\cdot s)\\ &= \alpha(p\cdot s)\\ &= \alpha(p)\lhd s\\ &= \partial(p,r)\lhd s\end{aligned}$$

X2)

$$\begin{aligned}(p,r)\cdot\partial(p',r') &= (p,r)\cdot\alpha(p')\\ &= (p\cdot\alpha(p'), r\cdot\alpha(p'))\\ &= (p\cdot\alpha(p'), r\cdot\beta(r'))\\ &= (p\lhd p', r\lhd r')\\ &= (p,r)\lhd(p',r')\end{aligned}$$

olup rack çaprazlanmış modül şartları sağlanır.

Önerme 5.2 $\mu : P \to S$ *ve* $\lambda : R \to S$ *iki rack çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}(p_1, id_S) &: (P\times_S R, S, \partial) \to (P, S, \mu)\\ (p_2, id_S) &: (P\times_S R, S, \partial) \to (R, S, \lambda)\end{aligned}$$

dönüşümleri rack çaprazlanmış modül morfizmidir.

İspat $\partial(p,r) = \mu(p) = \lambda(r)$ *olmak üzere,*

$$\begin{tikzcd} P\times_S R \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "p_1"'] & S \arrow[d, "id_S"] \\ P \arrow[r, "\mu"'] & S \end{tikzcd}$$

diyagramı göz önünde bulundurulsun.

i) *Her* $(p,r) \in P \times_S R$ *ve her* $s \in S$ *için*

$$\begin{aligned} p_1\left((p,r)\cdot s\right) &= p_1\left(p\cdot s, r\cdot s\right) \\ &= p\cdot s \\ &= p_1\left(p,r\right)\cdot id_S\left(s\right) \end{aligned}$$

olup etki korunur,

ii) *Her* $(p,r) \in P \times_S R$ *için*

$$\begin{aligned} \mu p_1\left(p,r\right) &= \mu\left(p\right) \\ &= \partial\left(p,r\right) \\ &= id_S\partial\left(p,r\right) \end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir.

Bu durumda $(p_1, id_S) : (P \times_S R, S, \partial) \to (P, S, \mu)$ *morfizmi ve benzer şekilde* $(p_2, id_S) : (P \times_S R, S, \partial) \to (R, S, \lambda)$ *morfizmi rack çaprazlanmış modül morfizmidir.*

6. XRACK/S KATEGORİSİNİN ÖZELLİKLERİ

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kategorisinde geri çekme ve ileri itme (Brown ve Huebschman, 1982), eş-çarpım (Brown, 1984), eşitleyici ve eş-eşitleyici (Arslan ve Onarlı, 2015), indirgenmiş (induced) çaprazlanmış modül (Brown ve Higgins, 1978) gibi çeşitli kategoriksel özellikler çalışılmıştır. Bu özelliklerin bir çoğu farklı yapılar üzerinde çaprazlanmış modüller için de ele alınmıştır. Fakat rack çaprazlanmış modül kategorisinde hiç bir kategoriksel özellik incelenmemiştir.

Tezin bu bölümünde, rack çaprazlanmış modül kategorisinde çarpım, eş-çarpım, geri çekme, ileri itme, eşitleyici ve eş-eşitleyici gibi kategoriksel özellikler gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisindekilere benzer şekilde incelenecektir.

6.1 Çarpım Obje

Teorem 6.1 **XRack**/S *kategorisi çarpım objeye sahiptir.*

İspat $\mu : P \to S$ *ve* $\lambda : R \to S$ *iki rack çaprazlanmış modül olsun.*

$$P \times_S R = \{(p,r) \mid \mu(p) = \lambda(r)\}$$

olmak üzere çarpım obje adayı

$$\begin{array}{rccl} \partial : & P \times_S R & \to & S \\ & (p,r) & \mapsto & \partial(p,r) = \mu(p) = \lambda(r) \end{array}$$

dönüşümü Önerme 5.1 gereğince bir rack çaprazlanmış modüldür.

Ayrıca Önerme 3.2 ve 5.2 gereğince

$$\begin{aligned} (p_1, id_S) &: (P \times_S R, S, \partial) \to (P, S, \mu) \\ (p_2, id_S) &: (P \times_S R, S, \partial) \to (R, S, \lambda) \end{aligned}$$

morfizmleri rack çaprazlanmış modül morfizmidir.

Böylece

$$(P, S, \mu) \xleftarrow[(p_1, id_S)]{} (P \times_S R, S, \partial) \xrightarrow[(p_2, id_S)]{} (R, S, \lambda)$$

diyagramı elde edilir

Şimdi $\delta : T \to S$ herhangi bir rack çaprazlanmış modül olmak üzere,

$$(\alpha, id_S) : (T, S, \delta) \to (P, S, \mu)$$

ve

$$(\beta, id_S) : (T, S, \delta) \to (R, S, \lambda)$$

morfizmleri rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Böylece her $t \in T$ ve her $s \in S$ için,

i) $\alpha (t \cdot s) = \alpha (t) \cdot id_S (s)$ *ve* $\beta (t \cdot s) = \beta (t) \cdot id_S (s)$

ii) $\mu\alpha = id_S\delta$ *ve* $\lambda\beta = id_S\delta$

eşitlikleri geçerlidir.

Bu durumda;

$$\begin{aligned} (p_1, id_S) (\varphi, id_S) &= (\alpha, id_S) , \\ (p_2, id_S) (\varphi, id_S) &= (\beta, id_S) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir tek

$$(\varphi, id_S) : (T, S, \delta) \to (P \times_S R, S, \partial)$$

rack çaprazlanmış modül morfizminin var olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & T & \to & P \times_S R \\ & t & \mapsto & \varphi (t) = (\alpha (t) , \beta (t)) \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Aşağıdaki diyagram göz önüne alınsın:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi"'] & S \arrow[d, "id_S"] \\ P \times_S R \arrow[r, "\partial"'] & S \end{tikzcd}$$

i) *Her $t \in T$ ve her $s \in S$ için*

$$\begin{aligned} \varphi (t \cdot s) &= (\alpha (t \cdot s) , \beta (t \cdot s)) \\ &= (\alpha (t) \cdot id_S (s) , \beta (t) \cdot id_S (s)) \\ &= (\alpha (t) , \beta (t)) \cdot id_S (s) \\ &= \varphi (t) \cdot id_S (s) \end{aligned}$$

olup etki korunur,

ii) *Her* $t \in T$ *için*

$$\begin{aligned} \partial\varphi(t) &= \partial(\alpha(t), \beta(t)) \\ &= \mu(\alpha(t)) \\ &= id_S\delta(t) \end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir.

Bu durumda $(\varphi, id_S) : (T, S, \delta) \rightarrow (P \times_S R, S, \partial)$ *morfizmi rack çaprazlanmış modül morfizmidir.*

Ayrıca her $t \in T$ *için*

$$\begin{aligned} p_1\varphi(t) &= p_1(\alpha(t), \beta(t)) \\ &= \alpha(t) \\ p_2\varphi(t) &= p_2(\alpha(t), \beta(t)) \\ &= \beta(t) \end{aligned}$$

olup, $(p_1, id_S)(\varphi, id_S) = (\alpha, id_S)$ *ve* $(p_2, id_S)(\varphi, id_S) = (\beta, id_S)$ *olduğu görülür.*

Son olarak (φ, id_S) *morfizminin tekliği kontrol edilecektir:* (φ', id_S) *morfizmi* (φ, id_S) *ile aynı özellikte bir rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Yani;*

$$\begin{array}{rccl} \varphi' : & T & \rightarrow & P \times_S R \\ & t & \mapsto & \varphi(t) = (p, r) \end{array}$$

morfizmi

$$\begin{aligned} (p_1, id_S)(\varphi', id_S) &= (\alpha, id_S), \\ (p_2, id_S)(\varphi', id_S) &= (\beta, id_S) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlasın. Her $t \in T$ *için*

$$\begin{aligned} p_1\varphi'(t) = \alpha(t) &\Leftrightarrow p_1(p, r) = \alpha(t) \\ &\Leftrightarrow p = \alpha(t) \\ p_2\varphi'(t) = \beta(t) &\Leftrightarrow p_2(p, r) = \beta(t) \\ &\Leftrightarrow r = \beta(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda her $t \in T$ *için*

$$\varphi'(t) = (p, r) = (\alpha(t), \beta(t)) = \varphi(t)$$

olup $(\varphi', id_S) = (\varphi, id_S)$ olduğu görülür. Böylece (φ, id_S) rack çaprazlanmış modül morfizmi bir tektir.

Sonuç olarak, $(P \times_S R, S, \partial)$ rack çaprazlanmış modülü, (P, S, μ) ve (R, S, λ) rack çaprazlanmış modüllerinin çarpım objesi olup,

$$\begin{tikzcd}
 & (T,S,\delta) \arrow[dl, "(\alpha, id_S)"'] \arrow[d, dotted, "\exists!(\varphi, id_S)"] \arrow[dr, "(\beta, id_S)"] & \\
(P,S,\mu) & (P \times_S R, S, \partial) \arrow[l, "(p_1, id_S)"] \arrow[r, "(p_2, id_S)"'] & (R,S,\lambda)
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı çarpım diyagramıdır.

6.2 Eş-çarpım Obje

Teorem 6.2 **XRack**$/S$ *kategorisi eş-çarpım objeye sahiptir.*

İspat *$\partial : P \to S$ ve $\partial' : R \to S$ iki rack çaprazlanmış modül olsun. P ve R racklarının serbest çarpımı $P * R$ olmak üzere;*

$$\begin{array}{rccl}
\partial * \partial' : & P * R & \to & S \\
 & (i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n) & \mapsto & s_0 \lhd s_1 \lhd ... \lhd s_n
\end{array}$$

dönüşümü $0 \leq i \leq n$ olmak üzere, $(\alpha_i = \pm 1)$, $x_i \in P$ ise $s_i = \partial(x_i)$ ve $x_i \in R$ ise $s_i = \partial'(x_i)$ şeklinde tanımlansın. Öncelikle $\partial * \partial'$ dönüşümünün bir rack önçaprazlanmış modül olduğu gösterilecektir.

S rackının $P * R$ rackı üzerine etkisi, S rackının P ve R racklarına ayrı ayrı var olan etkisi yardımıyla,

$$\begin{array}{rcl}
(P * R) \times S & \to & P * R \\
((i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n), s) & \mapsto & (i_0, x_0 \cdot s) \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n \cdot s)
\end{array}$$

şeklinde tanımlansın.

Her $(i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n), (j_0, y_0) \lhd^{\beta_1} (j_1, y_1) \ldots \lhd^{\beta_m} (j_m, y_m) \in P * R$ ve her $s, s' \in S$ için

i)

$$(((i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n)) \cdot s) \cdot s' =$$

$$((i_0, x_0 \cdot s) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1 \cdot s) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n \cdot s)) \cdot s' =$$

$$(i_0, (x_0 \cdot s) \cdot s') \lhd^{\alpha_1} (i_1, (x_1 \cdot s) \cdot s') \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, (x_n \cdot s) \cdot s') =$$

$$(i_0, (x_0 \cdot s') \cdot (s \lhd s')) \lhd^{\alpha_1} (i_1, (x_1 \cdot s') \cdot (s \lhd s')) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, (x_n \cdot s') \cdot (s \lhd s')) =$$

$$((i_0, x_0 \cdot s') \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1 \cdot s') \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n \cdot s')) \cdot (s \lhd s') =$$

$$(((i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n)) \cdot s') \cdot (s \lhd s')$$

ii)

$$\big(((i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n)) \lhd^{\alpha} \big((j_0, y_0) \lhd^{\beta_1} (j_1, y_1) \ldots \lhd^{\beta_m} (j_m, y_m)\big)\big) \cdot s =$$

$$((i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n) \lhd^{-\beta_m} (j_m, y_m) \lhd^{-\beta_{m-1}} (j_{m-1}, y_{m-1}) \ldots \lhd^{-\beta_1} (j_1, y_1)$$
$$\lhd^{\alpha} (j_0, y_0) \lhd^{\beta_1} (j_1, y_1) \ldots \lhd^{\beta_m} (j_m, y_m)) \cdot s =$$

$$(i_0, x_0 \cdot s) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1 \cdot s) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n \cdot s) \lhd^{-\beta_m} (j_m, y_m \cdot s) \lhd^{-\beta_{m-1}} (j_{m-1}, y_{m-1} \cdot s)$$
$$\ldots \lhd^{-\beta_1} (j_1, y_1 \cdot s) \lhd^{\alpha} (j_0, y_0 \cdot s) \lhd^{\beta_1} (j_1, y_1 \cdot s) \ldots \lhd^{\beta_m} (j_m, y_m \cdot s) =$$

$$((i_0, x_0 \cdot s) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1 \cdot s) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n \cdot s)) \lhd^{\alpha} (j_0, y_0 \cdot s) \lhd^{\beta_1} (j_1, y_1 \cdot s) \ldots$$
$$\lhd^{\beta_m} (j_m, y_m \cdot s) =$$

$$(((i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n)) \cdot s) \lhd^{\alpha} \big(((j_0, y_0) \lhd^{\beta_1} (j_1, y_1) \ldots \lhd^{\beta_m} (j_m, y_m)\big) \cdot s\big)$$

olup etki şartları sağlanır.

Ayrıca her $(i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n) \in P * R$ *ve* $s \in S$ *için* $0 \leq j \leq n$ *olmak üzere* $x_j \in P$ *ise* $\partial_{i_j} = \partial$ *ve* $x_j \in R$ *ise* $\partial_{i_j} = \partial'$ *şeklinde tanımlansın. Böylece*

$$\partial * \partial' \left(\left((i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n) \right) \cdot s \right)$$

$$= \partial * \partial' \left((i_0, x_0 \cdot s) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1 \cdot s) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n \cdot s) \right)$$

$$= \partial_{i_0} (x_0 \cdot s) \lhd \partial_{i_1} (x_1 \cdot s) \lhd \ldots \lhd \partial_{i_n} (x_n \cdot s)$$

$$= (\partial_{i_0} (x_0) \lhd s) \lhd (\partial_{i_1} (x_1) \lhd s) \lhd \ldots \lhd (\partial_{i_n} (x_n) \lhd s)$$

$$= (\partial_{i_0} (x_0) \lhd \partial_{i_1} (x_1) \lhd \ldots \lhd \partial_{i_n} (x_n)) \lhd s$$

$$= \left(\partial * \partial' \left((i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n) \right) \right) \lhd s$$

olup $(P * R, S, \partial * \partial')$ *bir rack önçaprazlanmış modüldür.*

Şimdi rack çaprazlanmış modülünü elde edilecektir: I *bağıntısı* $P * R$ *üzerindeki*

$$\begin{aligned}
&((i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n)) \cdot \left(\partial_{j_0} (y_0) \lhd^{\beta_1} \partial_{j_1} (y_1) \ldots \lhd^{\beta_m} \partial_{j_m} (y_m) \right) = \\
&(i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n) \overset{-\beta_m}{\lhd} (j_m, y_m) \overset{-\beta_{m-1}}{\lhd} (j_{m-1}, y_{m-1}) \ldots \\
&\overset{-\beta_1}{\lhd} (j_1, y_1) \lhd (j_0, y_0) \lhd^{\beta_1} (j_1, y_1) \ldots \lhd^{\beta_m} (j_m, y_m)
\end{aligned}$$

eşitliğini sağlayan elemanlar tarafından üretilen bir kongrüans bağıntısı olsun. Bu durumda $(P * R) / I$ *bölüm rackı elde edilir. Böylece*

$$\partial^* : (P * R) / I \to S$$

dönüşümünü $\partial * \partial'$ *dönüşümünün indirgenmişi (induced) olup*

$$\partial^* \left([(i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n)] \right) = \partial * \partial' \left((i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n) \right)$$

şeklinde tanımlıdır ve rack çaprazlanmış modül şartları aşağıdaki gibi kolayca sağlanır: Her $[(i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n)]$, $\left[(j_0, y_0) \lhd^{\beta_1} \ldots \lhd^{\beta_m} (j_m, y_m) \right] \in (P * R) / I$ *ve* $s \in S$ *için*

X1)

$$\partial^*\left(\left[(i_0,x_0)\lhd^{\alpha_1}\ldots\lhd^{\alpha_n}(i_n,x_n)\right]\cdot s\right)=\partial^*\left(\left[\left((i_0,x_0)\lhd^{\alpha_1}\ldots\lhd^{\alpha_n}(i_n,x_n)\right)\cdot s\right]\right)$$

$$=\partial^*\left(\left[(i_0,x_0\cdot s)\lhd^{\alpha_1}\ldots\lhd^{\alpha_n}(i_n,x_n\cdot s)\right]\right)$$

$$=\partial_{i_0}(x_0\cdot s)\lhd\partial_{i_1}(x_1\cdot s)\lhd\ldots\lhd\partial_{i_n}(x_n\cdot s)$$

$$=(\partial_{i_0}(x_0)\lhd s)\lhd(\partial_{i_1}(x_1)\lhd s)\lhd\ldots\lhd(\partial_{i_n}(x_n)\lhd s)$$

$$=(\partial_{i_0}(x_0)\lhd\partial_{i_1}(x_1)\lhd\ldots\lhd\partial_{i_n}(x_n))\lhd s$$

$$=\partial^*\left(\left[(i_0,x_0)\lhd^{\alpha_1}\ldots\lhd^{\alpha_n}(i_n,x_n)\right]\right)\lhd s$$

X2)

$$\left(\left[(i_0,x_0)\lhd^{\alpha_1}(i_1,x_1)\ldots\lhd^{\alpha_n}(i_n,x_n)\right]\right)\cdot\partial^*\left(\left[(j_0,y_0)\lhd^{\beta_1}\ldots\lhd^{\beta_m}(j_m,y_m)\right]\right)=$$

$$\left(\left[(i_0,x_0)\lhd^{\alpha_1}(i_1,x_1)\ldots\lhd^{\alpha_n}(i_n,x_n)\right]\right)\cdot\left(\partial_{j_0}(y_0)\lhd^{\beta_1}\partial_{j_1}(y_1)\ldots\lhd^{\beta_m}\partial_{j_m}(y_m)\right)=$$

$$\left[\left((i_0,x_0)\lhd^{\alpha_1}(i_1,x_1)\ldots\lhd^{\alpha_n}(i_n,x_n)\right)\cdot\left(\partial_{j_0}(y_0)\lhd^{\beta_1}\partial_{j_1}(y_1)\ldots\lhd^{\beta_m}\partial_{j_m}(y_m)\right)\right]$$

$$\left[(i_0,x_0)\lhd^{\alpha_1}(i_1,x_1)\ldots\lhd^{\alpha_n}(i_n,x_n)\overset{-\beta_m}{\lhd}(j_m,y_m)\overset{-\beta_{m-1}}{\lhd}(j_{m-1},y_{m-1})\ldots\right.$$
$$\left.\overset{-\beta_1}{\lhd}(j_1,y_1)\lhd(j_0,y_0)\lhd^{\beta_1}(j_1,y_1)\ldots\lhd^{\beta_m}(j_m,y_m)\right]=$$

$$\left[(i_0,x_0)\lhd^{\alpha_1}(i_1,x_1)\ldots\lhd^{\alpha_n}(i_n,x_n)\right]\lhd\left[(j_0,y_0)\lhd^{\beta_1}(j_1,y_1)\ldots\lhd^{\beta_m}(j_m,y_m)\right]$$

noindent elde edilir.

Şimdi

$$\begin{array}{rccl}(i_1,id_S): & (P,S,\partial) & \to & ((P*R)/I,S,\partial^*)\\ & p & \mapsto & i_1(p)=[(1,p)]\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccl}(i_2,id_S): & (R,S,\partial') & \to & ((P*R)/I,S,\partial^*)\\ & r & \mapsto & i_2(r)=[(2,r)]\end{array}$$

dönüşümleri tanımlansın. Aşağıdaki diyagram göz önüne alınsın:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i_1"'] & S \arrow[d, "id_S"] \\
(P * R)/I \arrow[r, "\partial^*"'] & S
\end{tikzcd}$$

i) *Her* $p \in P$ *ve* $s \in S$ *için*

$$\begin{aligned}
i_1(p \cdot s) &= [(1, p \cdot s)] \\
&= [(1, p) \cdot s] \\
&= [(1, p)] \cdot s \\
&= i_1(p) \cdot id_S(s)
\end{aligned}$$

olup etki korunur,

ii) *Her* $p \in P$ *için*

$$\begin{aligned}
\partial^* i_1(p) &= \partial^*[(1, p)] \\
&= \partial(p) \\
&= id_S \partial(p)
\end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir.

Böylece

$$(i_1, id_S) : (P, S, \partial) \to ((P * R)/I, S, \partial^*)$$

morfizmi, benzer şekilde

$$(i_2, id_S) : (R, S, \partial') \to ((P * R)/I, S, \partial^*)$$

morfizmi rack çaprazlanmış modül morfizmidir.

Bu durumda

$$(P, S, \partial) \xrightarrow[(i_1, id_S)]{} ((P * R)/I, S, \partial^*) \xleftarrow[(i_2, id_S)]{} (R, S, \partial')$$

diyagramı elde edilir.

Son olarak (Q, S, θ) *herhangi bir rack çaprazlanmış modül olmak üzere*

$$\begin{aligned}
(f_1, id_S) &: (P, S, \partial) \to (Q, S, \theta), \\
(f_2, id_S) &: (R, S, \partial') \to (Q, S, \theta)
\end{aligned}$$

iki rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Böylece her $p \in P$, $r \in R$ ve her $s \in S$ için,

i) $f_1(p \cdot s) = f_1(p) \cdot id_S(s)$ *ve* $f_2(r \cdot s) = f_2(r) \cdot id_S(s)$

ii) $\theta f_1 = id_S \partial$ *ve* $\theta f_2 = id_S \partial'$

eşitlikleri geçerlidir.

Bu durumda

$$\begin{aligned}(\varphi, id_S)(i_1, id_S) &= (f_1, id_S)\\ (\varphi, id_S)(i_2, id_S) &= (f_2, id_S)\end{aligned}$$

olacak şekilde bir tek

$$(\varphi, id_S) : ((P * R)/I, S, \partial^*) \to (Q, S, \theta)$$

rack çaprazlanmış modül morfizminin var olduğu gösterilmelidir.

$$(\varphi, id_S) : ((P * R)/I, S, \partial^*) \to (Q, S, \theta)$$

morfizmini,

$$\varphi([(i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} (i_1, x_1) \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n)]) = q_0 \lhd q_1 \lhd \ldots \lhd q_n$$

için $0 \leq i \leq n$ *için* $x_i \in P$ *ise* $q_i = f_1(x_i)$ *ve* $x_i \in R$ *ise* $q_i = f_2(x_i)$ *şeklinde tanımlayalım.* (φ, id_S) *morfizmi Önerme 3.6 da tanımlanan*

$$h : P * R \to Q$$

morfizmiyle tanımlı olup bu durumda φ morfizminin varlığı, bir tekliği ve diyagramın değişmeliliği serbest rack tanımı gereği açıktır. Böylece eş-çarpım için evrensellik özelliği sağlanır.

Sonuç olarak $((P * R)/I, S, \partial^*)$ *rack çaprazlanmış modülü,* (P, S, ∂) *ve* (R, S, ∂') *rack çaprazlanmış modüllerinin eş -çarpımı olup,*

$$\begin{tikzcd}
 & (Q,S,\theta) & \\
(P,S,\partial) \arrow[ur, "{(f_1,id_S)}"] \arrow[r, "{(i_1,id_S)}"'] & ((P*R)/I,S,\partial^*) \arrow[u, dotted, "{\exists!(\varphi,id_S)}"] & (R,S,\partial') \arrow[ul, "{(f_2,id_S)}"'] \arrow[l, "{(i_2,id_S)}"]
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı eş-çarpım diyagramıdır.

6.3 Geri Çekme Obje

Teorem 6.3 **XRack**$/S$ *kategorisi geri çekme objeye sahiptir.*

İspat

$$\begin{aligned}(f, id_S) &: (P, S, \mu) \to (T, S, \theta) \\ (g, id_S) &: (R, S, \lambda) \to (T, S, \theta)\end{aligned}$$

iki rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun. $((f, id_S), (g, id_S))$ *morfizm ikilisinin geri çekmeye sahip olduğu gösterilecektir:*

$$\begin{tikzcd} (?) \arrow[r, "?"] \arrow[d, "?"'] & (R, S, \lambda) \arrow[d, "(g, id_S)"] \\ (P, S, \mu) \arrow[r, "(f, id_S)"'] & (T, S, \theta) \end{tikzcd}$$

$$P \times_T R = \{(p, r) \mid f(p) = g(r)\} \subseteq P \times R$$

olmak üzere, geri çekme obje adayı olan

$$\begin{aligned}\partial : \quad P \times_T R &\to S \\ (p, r) &\mapsto \partial(p, r) = \mu(p) = \lambda(r)\end{aligned}$$

dönüşümü, Önerme 5.1 gereğince bir rack çaprazlanmış modüldür. Ayrıca

$$\begin{aligned}(p_1, id_S) &: (P \times_T R, S, \partial) \to (P, S, \mu), \quad p_1(p, r) = p \\ (p_2, id_S) &: (P \times_T R, S, \partial) \to (R, S, \lambda), \quad p_2(p, r) = r\end{aligned}$$

dönüşümleri projeksiyon dönüşümler olup Önerme 5.2 gereğince rack çaprazlanmış modül morfizmidir.

Bununla birlikte her $(p, r) \in P \times_S R$ *için*

$$\begin{aligned}fp_1(p, r) &= f(p) \\ &= g(r) \\ &= gp_2(p, r)\end{aligned}$$

olduğundan $(f, id_S)(p_1, id_S) = (g, id_S)(p_2, id_S)$ *elde edilir.*

Böylece aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{tikzcd}
(P \times_T R, S, \partial) \arrow[r, "(p_2, id_S)"] \arrow[d, "(p_1, id_S)"'] & (R, S, \lambda) \arrow[d, "(g, id_S)"] \\
(P, S, \mu) \arrow[r, "(f, id_S)"'] & (T, S, \theta)
\end{tikzcd}$$

Şimdi (Q, S, δ) *herhangi bir rack çaprazlanmış modül ve*

$$\begin{aligned}
(\alpha, id_S) &: (Q, S, \delta) \to (P, S, \mu), \\
(\beta, id_S) &: (Q, S, \delta) \to (R, S, \lambda)
\end{aligned}$$

morfizmleri

$$(f, id_S)(\alpha, id_S) = (g, id_S)(\beta, id_S)$$

eşitliğini sağlayan iki rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Böylece her $q \in Q$ *ve her* $s \in S$ *için,*

i) $\alpha(q \cdot s) = \alpha(q) \cdot id_S(s)$ *ve* $\beta(q \cdot s) = \beta(q) \cdot id_S(s)$

ii) $\mu\alpha = id_S\delta$ *ve* $\lambda\beta = id_S\delta$

eşitlikleri geçerlidir. Bu durumda

$$(p_1, id_S)(\varphi, id_S) = (\alpha, id_S)$$

ve

$$(p_2, id_S)(\varphi, id_S) = (\beta, id_S)$$

olacak şekilde bir tek

$$(\varphi, id_S) : (Q, S, \delta) \to (P \times_T R, S, \partial)$$

rack çaprazlanmış modül morfizminin var olduğu gösterilmelidir. Her $q \in Q$ *için*

$$\varphi(q) = (\alpha(q), \beta(q))$$

şeklinde tanımlansın. Aşağıdaki diyagram göz önüne alınsın:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\varphi"'] & S \arrow[d, dash, "id_S"] \\
P \times_T R \arrow[r, "\partial"'] & S
\end{tikzcd}$$

i) *Her $q \in Q$ ve her $s \in S$ için,*

$$\begin{aligned}\varphi\left(q \cdot s\right) &= \left(\alpha\left(q \cdot s\right), \beta\left(q \cdot s\right)\right) \\ &= \left(\alpha\left(q\right) \cdot id_S\left(s\right), \beta\left(q\right) \cdot id_S\left(s\right)\right) \\ &= \left(\alpha(q), \beta(q)\right) \cdot id_S\left(s\right) \\ &= \varphi(q) \cdot id_S\left(s\right)\end{aligned}$$

olup etki korunur,

ii) *Her $q \in Q$ için*

$$\begin{aligned}\partial\varphi(q) &= \partial(\alpha(q), \beta(q)) \\ &= \mu\alpha\left(q\right) \\ &= id_S\delta\left(q\right)\end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir.

Ayrıca her $q \in Q$ için

$$\begin{aligned}p_1\varphi\left(q\right) &= p_1\left(\alpha(q), \beta(q)\right) \\ &= \alpha(q) \\ p_2\varphi\left(q\right) &= p_2\left(\alpha(q), \beta(q)\right) \\ &= \beta(q)\end{aligned}$$

olup $\left(p_1, id_S\right)\left(\varphi, id_S\right) = \left(\alpha, id_S\right)$ ve $\left(p_2, id_S\right)\left(\varphi, id_S\right) = \left(\beta, id_S\right)$ elde edilir.

Son olarak $\left(\varphi, id_S\right)$ morfizminin tek olduğu gösterilecektir:

$$\begin{array}{rccl}(\varphi', id_S): & (Q, S, \delta) & \rightarrow & (P \times_T R, S, \partial) \\ & q & \mapsto & \varphi'(q) = (p, r)\end{array}$$

morfizmi $\left(\varphi, id_S\right)$ ile aynı özellikte, yani,

$$\begin{aligned}\left(p_1, id_S\right)\left(\varphi', id_S\right) &= \left(\alpha, id_S\right), \\ \left(p_2, id_S\right)\left(\varphi', id_S\right) &= \left(\beta, id_S\right)\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan bir rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda, her $q \in Q$ için

$$\begin{aligned}p_1\varphi'\left(q\right) = \alpha\left(q\right) &\Leftrightarrow p_1(p, r) = \alpha\left(q\right) \\ &\Leftrightarrow p = \alpha\left(q\right) \\ p_2\varphi'\left(q\right) = \beta\left(q\right) &\Leftrightarrow p_2\left(p, r\right) = \beta\left(q\right) \\ &\Leftrightarrow r = \beta\left(q\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\varphi'(q) = (p, r) = (\alpha(q), \beta(q)) = \varphi(q)$$

olup

$$(\varphi', id_S) = (\varphi, id_S)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (φ, id_S) rack çaprazlanmış modül morfizmi bir tektir.

Sonuç olarak $(P \times_T R, S, \partial)$ rack çaprazlanmış modülü, (P, S, μ) ve (R, S, λ) rack çaprazlanmış modüllerinin geri çekmesi olup,

$$\begin{tikzcd}
(Q,S,\delta) \arrow[dr, dashed, "\exists!(\varphi,id_S)"] \arrow[drr, "(\beta,id_S)"] \arrow[ddr, "(\alpha,id_S)"'] & & \\
& (P \times_T R, S, \partial) \arrow[r, "(p_2,id_S)"'] \arrow[d, "(p_1,id_S)"] & (R,S,\lambda) \arrow[d, "(g,id_S)"] \\
& (P,S,\mu) \arrow[r, "(f,id_S)"'] & (T,S,\theta)
\end{tikzcd}$$

diyagramı $((f, id_S), (g, id_S))$ morfizm ikilisi için geri çekme diyagramıdır.

6.4 İleri İtme Obje

Teorem 6.4 **XRack**$/S$ *kategorisi ileri itme objeye sahiptir.*

İspat

$$(f, id_S) : (Q, S, \theta) \to (P, S, \alpha),$$
$$(g, id_S) : (Q, S, \theta) \to (R, S, \beta)$$

iki rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun. $((f, id_S), (g, id_S))$ morfizm ikilisinin ileri itmeye sahip olduğu gösterilecektir:

$$\begin{tikzcd}
(Q,S,\theta) \arrow[r, "(f,id_S)"] \arrow[d, "(g,id_S)"'] & (P,S,\alpha) \arrow[d, "?"'] \\
(R,S,\beta) \arrow[r, "?"] & (?)
\end{tikzcd}$$

N bağıntısı Teorem 6.2 de tanımlanan I bağıntısının elemanları ve

$$\{(1, f(q)) = (2, g(q)) \mid q \in Q\}$$

özelliğindeki elemanlar tarafından üretilen bir kongrüans bağıntısı olmak üzere,

$$P * R$$

rackı P ve R racklarının serbest çarpımı olsun. Bu durumda Teorem 4.4 ve 6.2 gereğince

$$\partial : \mathcal{X} = (P * R)/N \to S$$

bir rack çaprazlanmış modüldür.

Ayrıca Teorem 6.2 de gösterildiği üzere

$$\begin{array}{rccc} (i_1, id_S): & (P, S, \alpha) & \to & (\mathcal{X}, S, \partial) \\ & p & \mapsto & [(1, p)] \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} (i_2, id_S): & (R, S, \beta) & \to & (\mathcal{X}, S, \partial) \\ & r & \mapsto & [(2, r)] \end{array}$$

dönüşümleri rack çaprazlanmış modül morfizmidir.

Bununla birlikte her $q \in Q$ için

$$i_1 f(q) = [(1, f(q))] = [2, g(q)] = i_2 g(q)$$

olup

$$(i_1, id_S)(f, id_S) = (i_2, id_S)(g, id_S)$$

eşitliği geçerlidir. Böylece

$$\begin{tikzcd} (Q, S, \theta) \arrow[r, "(f, id_S)"] \arrow[d, "(g, id_S)"'] & (P, S, \alpha) \arrow[d, "(i_1, id_S)"] \\ (R, S, \beta) \arrow[r, "(i_2, id_S)"] & (\mathcal{X}, S, \partial) \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı elde edilir.

Şimdi (T, S, ω) herhangi bir rack çaprazlanmış modül olmak üzere,

$$(\lambda, id_S) : (P, S, \alpha) \to (T, S, \omega),$$
$$(\mu, id_S) : (R, S, \beta) \to (T, S, \omega)$$

morfizmleri

$$(\lambda_1, id_S)(f, id_S) = (\mu, id_S)(g, id_S)$$

özelliğinde iki rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda

$$(\varphi, id_S)\,(i_1, id_S) = (\lambda, id_S)$$

ve

$$(\varphi, id_S)\,(i_2, id_S) = (\mu, id_S)$$

olacak şekilde bir tek

$$(\varphi, id_S) : (\mathcal{X}, S, \partial) \to (T, S, \omega)$$

rack çaprazlanmış modül morfizminin var olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{array}{lccl} (\varphi, id_S) : & (\mathcal{X}, S, \partial) & \to & (T, S, \omega) \\ & [(i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n)] & \mapsto & t_0 \lhd t_1 \lhd \ldots \lhd t_n \end{array}$$

dönüşümü, $0 \leq i \leq 1$ *olmak üzere* $x_i \in P$ *ise* $t_i = \lambda\,(x_i)$ *ve* $x_i \in R$ *ise* $t_i = \mu\,(x_i)$ *şeklinde tanımlansın.* (φ, id_S) *morfizmi,* (λ, id_S) *ve* (μ, id_S) *rack çaprazlanmış modül morfizmleri yardımı ile tanımlandığından bir rack çaprazlanmış modül morfizmidir.*

Ayrıca, her $p \in P$ *için*

$$\begin{aligned} \varphi i_1\,(p) &= \varphi\,([(1, p)]) \\ &= \lambda\,(p) \end{aligned}$$

ve her $r \in R$ *için*

$$\begin{aligned} \varphi i_2\,(r) &= \varphi\,([(2, r)]) \\ &= \mu\,(r) \end{aligned}$$

olup $(\varphi, id_S)\,(i_1, id_S) = (\lambda, id_S)$ *ve* $(\varphi, id_S)\,(i_2, id_S) = (\mu, id_S)$ *eşitlikleri sağlanır.*

Son olarak (φ, id_S) *morfizminin tekliği kontrol edilecektir:*

$$(\varphi', id_S) : (\mathcal{X}, S, \partial) \to (T, S, \omega)$$

morfizmi, (φ, id_S) *ile aynı özellikte, yani*

$$\begin{aligned} (\varphi', id_S)\,(i_1, id_S) &= (\lambda, id_S)\,, \\ (\varphi', id_S)\,(i_2, id_S) &= (\mu, id_S) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan bir rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun ve

$$\varphi'\,[(i_0, x_0) \lhd^{\alpha_1} \ldots \lhd^{\alpha_n} (i_n, x_n)] = t'_0 \lhd t'_1 \lhd \ldots \lhd t'_n$$

şeklinde tanımlansın. Her $p \in P$ *için*

$$\varphi' i_1 (p) = \varphi' ([(1,p)]) = \lambda (p)$$

ve her $r \in R$ *için*

$$\varphi' i_2 (r) = \varphi' ([(2,r)]) = \mu (r)$$

olup $0 \leq i \leq 1$ *olmak üzere* $x_i \in P$ *ise* $q_i = \lambda (x_i)$ *ve* $x_i \in R$ *ise* $q_i = \mu (x_i)$ *olduğu görülür. Böylece* (φ, id_S) *rack çaprazlanmış modül morfizmi bir tektir.*

Sonuç olarak $(\mathcal{X}, S, \partial)$ *rack çaprazlanmış modülü,* (P, S, α) *ve* (R, S, β) *rack çaprazlanmış modüllerinin ileri itmesi olup,*

$$\begin{tikzcd}
(Q,S,\theta) \arrow[r, "{(f,id_S)}"] \arrow[d, "{(g,id_S)}"'] & (P,S,\alpha) \arrow[d, "{(i_1,id_S)}"'] \arrow[ddr, "{(\lambda,id_S)}"] & \\
(R,S,\beta) \arrow[r, "{(i_2,id_S)}"] \arrow[drr, "{(\mu,id_S)}"'] & (\mathcal{X},S,\partial) \arrow[dr, dashed, "{\exists!(\varphi,id_S)}"] & \\
 & & (T,S,\omega)
\end{tikzcd}$$

diyagramı $((f, id_S), (g, id_S))$ *morfizm ikilisi için ileri itme diyagramıdır.*

6.5 Eşitleyici Obje

Teorem 6.5 **XRack**$/S$ *kategorisinde her morfizm ikilisinin eşitleyicisi vardır.*

İspat

$$(f, id_S) : (P, S, \mu) \to (T, S, \theta),$$
$$(g, id_S) : (P, S, \mu) \to (T, S, \theta)$$

iki rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun. $((f, id_S), (g, id_S))$ *morfizm ikilisinin eşitleyicisi tanımlanacaktır:*

$$\begin{tikzcd}
(?) \arrow[r, "?"] & (P,S,\mu) \arrow[r, shift left, "{(f,id_S)}"] \arrow[r, shift right, "{(g,id_S)}"'] & (R,S,\lambda)
\end{tikzcd}$$

$Q = \{p \in P \mid f(p) = g(p)\}$ *kümesi tanımlansın. Teorem 4.5 gösterildiği üzere* Q *kümesi* P *rackının alt rackıdır.*

Bu durumda eşitleyici obje adayı

$$\partial : Q \to S$$

rack çaprazlanmış modülü elde edilir. ∂ *dönüşümü, her* $p \in P$ *için,*

$$\partial(p) = \mu(p)$$

şeklinde tanımlanabilir. Her $p, p' \in Q$ *için*

$$\begin{aligned}\partial(p \lhd p') &= \mu(p \lhd p') \\ &= \mu(p) \lhd \mu(p') \\ &= \partial(p) \lhd \partial(p')\end{aligned}$$

olduğundan ∂ *bir rack morfizmidir. Şimdi* $\partial : Q \to S$ *dönüşümünün*

$$\begin{array}{ccc} Q \times S & \to & Q \\ (p, s) & \mapsto & p \cdot s \end{array}$$

etkisiyle birlikte bir rack çaprazlanmış modül olduğu gösterilecektir. Her $p, p' \in Q$ *ve her* $s \in S$ *için*

X1)

$$\begin{aligned}\partial(p \cdot s) &= \mu(p \cdot s) \\ &= \mu(p) \lhd s \\ &= \partial(p) \lhd s\end{aligned}$$

X2)

$$\begin{aligned}p \cdot \partial(p') &= p \cdot \mu(p') \\ &= p \lhd p'\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi

$$\begin{array}{cccc} (u, id_S): & (Q, S, \partial) & \to & (P, S, \mu) \\ & p & \mapsto & u(p) = p \end{array}$$

morfizminin rack çaprazlanmış modül morfizmi olduğu gösterilecektir. Aşağıdaki diyagram göz önüne alınsın:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "u"'] & S \arrow[d, no head, "id_S"] \\ P \arrow[r, "\mu"'] & S \end{tikzcd}$$

i) *Her* $p \in Q$ *ve her* $s \in S$ *için,*

$$\begin{aligned} u(p \cdot s) &= p \cdot s \\ &= u(p) \cdot s \\ &= u(p) \cdot id_S(s) \end{aligned}$$

olup etki korunur,

ii) *Her* $p \in Q$ *için,*

$$\begin{aligned} \mu u(p) &= \mu(p) \\ &= \partial(p) \\ &= id_S \partial(p) \end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir.

Böylece aşağıdaki diyagram elde edilir:

$$(Q, S, \partial) \xhookrightarrow{(u, id_S)} (P, S, \mu) \underset{(g, id_S)}{\overset{(f, id_S)}{\rightrightarrows}} (R, S, \lambda)$$

Ayrıca her $p \in Q$ *için*

$$\begin{aligned} (fu)(p) &= f(u(p)) \\ &= f(p) \\ &= g(p) \\ &= g(u(p)) \\ &= (gu)(p) \end{aligned}$$

olup

$$(f, id_S)(u, id_S) = (g, id_S)(u, id_S)$$

olduğu görülür.

Şimdi (T, S, δ) *bir rack çaprazlanmış modül ve*

$$(v, id_s) : (T, S, \delta) \to (P, S, \mu)$$

morfizmi

$$(f, id_S)(v, id_S) = (g, id_S)(v, id_S)$$

eşitliğini sağlayan bir rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda her $t \in T$ *ve her* $s \in S$ *için,*

i) $v(t \cdot s) = v(t) \cdot id_S(s)$

ii) $\mu v = id_S \delta$

eşitlikleri sağlanır. Böylece

$$(u, id_S)(\phi, id_S) = (v, id_S)$$

olacak şekilde bir tek

$$(\phi, id_G) : (T, S, \delta) \to (Q, S, \partial)$$

rack çaprazlanmış modül morfizminin var olduğu gösterilmelidir.

$$(f, id_S)(v, id_S) = (g, id_S)(v, id_S)$$

olduğundan her $t \in T$ için

$$fv(t) = gv(t)$$

olup $v(t) \in Q$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{array}{rcl} (\phi, id_S) : \quad (T, S, \delta) & \to & (Q, S, \partial) \\ t & \mapsto & \phi(t) = v(t) \end{array}$$

şeklinde tanımlanabilir. Şimdi (ϕ, id_S) morfizminin rack çaprazlanmış modül morfizmi olduğu gösterilmelidir. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alınsın:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\phi"'] & S \arrow[d, "id_S"] \\ Q \arrow[r, "\partial"'] & S \end{tikzcd}$$

i) *Her $t \in T$ ve her $s \in S$ için,*

$$\begin{aligned} \phi(t \cdot s) &= v(t \cdot s) \\ &= v(t) \cdot id_S(s) \\ &= \phi(t) \cdot id_S(s) \end{aligned}$$

olup etki korunur,

ii) *Her $t \in T$ için,*

$$\begin{aligned} \partial\phi(t) &= \partial v(t) \\ &= \mu v(t) \\ &= id_S \delta(t) \end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir.

Ayrıca her $t \in T$ için

$$\begin{aligned}(u\phi)(t) &= uv(t)\\ &= v(t)\end{aligned}$$

olup

$$(u, id_S)(\phi, id_S) = (v, id_S)$$

elde edilir.

Son olarak (ϕ, id_S) morfizminin tek olduğu gösterilecektir:

$$(\phi', id_S) : (T, S, \delta) \to (Q, S, \partial)$$

morfizmi, (φ, id_S) ile aynı özellikte, yani,

$$(u, id_S)(\phi', id_S) = (v, id_S)$$

olacak şekilde bir rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun ve $\phi'(t) = p$ şeklinde tanımlansın.

$$\begin{aligned}u\phi'(t) = v(t) &\Leftrightarrow u(p) = v(t)\\ &\Leftrightarrow p = v(t)\end{aligned}$$

olup

$$\phi'(t) = p = \phi(t)$$

elde edilir. Bu durumda (ϕ, id_S) rack çaprazlanmış modül morfizmi bir tektir.

Sonuç olarak $(Q, (u, id_S))$ ikilisi $((f, id_S), (g, id_S))$ morfizm ikilisinin eşitleyicisidir ve

$$\begin{tikzcd}
(Q, S, \partial) \arrow[r, hook, "{(u, id_S)}"] & (P, S, \mu) \arrow[r, shift left, "{(f, id_S)}"] \arrow[r, shift right, "{(g, id_S)}"'] & (R, S, \lambda) \\
(T, S, \delta) \arrow[u, dotted, "{\exists!(\phi, id_S)}"] \arrow[ur, "{(v, id_S)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

diyagramı eşitleyici diyagramıdır.

6.6 Eş-eşitleyici Obje

Teorem 6.6 **XRack**$/S$ *kategorisinde her morfizm ikilisinin eş-eşitleyicisi vardır.*

İspat

$$\begin{aligned}(f, id_S) &: (P, S, \mu) \to (R, S, \lambda),\\ (g, id_S) &: (P, S, \mu) \to (R, S, \lambda)\end{aligned}$$

iki rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun. $((f, id_S), (g, id_S))$ *morfizm ikilisinin eş-eşitleyicisi tanımlanacaktır:*

$$\begin{tikzcd}(P, S, \mu) \arrow[r, shift left, "(f, id_S)"] \arrow[r, shift right, "(g, id_S)"'] & (R, S, \lambda) \arrow[r, "?"] & (?)\end{tikzcd}$$

$p \in P$ *olmak üzere,* N *bağıntısı* R *üzerindeki*

$$N = \{(f(p), g(p)) \mid p \in P\} \subseteq R \times R$$

şeklinde tanımlı en küçük kongrüans bağıntısı olsun.

Böylece R/N *bölüm kümesi oluşturulabilir.* R/N *bölüm kümesinin*

$$[r] \triangleleft [r'] = [r \triangleleft r']$$

şeklinde tanımlı ikili işlem ile birlikte rack yapısı oluşturduğu daha önce gösterilmiştir.

Şimdi eş-eşitleyici obje adayı

$$\begin{aligned}\partial : \quad R/N &\to S\\ [r] &\mapsto \partial([r]) = \lambda(r)\end{aligned}$$

dönüşümünün

$$\begin{aligned}R/N \times S &\to R/N\\ ([r], s) &\to [r] \cdot s = [r \cdot s]\end{aligned}$$

etkisiyle birlikte bir rack çaprazlanmış modül olduğunu gösterilecektir.

Her $[r], [r'] \in R/N$ *ve* $s, s' \in S$ *için,*

i)

$$\begin{aligned}([r]\cdot s)\cdot s' &= [r\cdot s]\cdot s' \\ &= [(r\cdot s)\cdot s'] \\ &= [(r\cdot s')\cdot(s\lhd s')] \\ &= [r\cdot s']\cdot(s\lhd s') \\ &= ([r]\cdot s')\cdot(s\lhd s')\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}([r]\lhd[r'])\cdot s &= [r\lhd r']\cdot s \\ &= [(r\lhd r')\cdot s] \\ &= [r\cdot s\lhd r'\cdot s] \\ &= [r\cdot s]\lhd[r'\cdot s] \\ &= ([r]\cdot s)\lhd([r']\cdot s)\end{aligned}$$

olup etki şartları sağlanır.

Ayrıca her $[r]\,,[r']\in R/N$*,*

$$\begin{aligned}\partial([r]\lhd[r']) &= \partial[r\lhd r'] \\ &= \lambda(r\lhd r') \\ &= \lambda(r)\lhd\lambda(r') \\ &= \partial([r])\lhd\partial([r'])\end{aligned}$$

olup ∂ *dönüşümü bir rack morfizmidir.*

Son olarak her $[r]\,,[r']\in R/N$ *ve* $s\in S$ *için,*

X1)

$$\begin{aligned}\partial([r]\cdot s) &= \partial([r\cdot s]) \\ &= \lambda(r\cdot s) \\ &= \lambda(r)\lhd s \\ &= \partial([r])\lhd s\end{aligned}$$

X2)

$$
\begin{aligned}
[r] \cdot \partial [r'] &= [r] \cdot \lambda (r') \\
&= [r \cdot \lambda (r')] \\
&= [r \lhd r'] \\
&= [r] \lhd [r']
\end{aligned}
$$

olup rack çaprazlanmış modül şartları sağlanır.

Şimdi,

$$
\begin{array}{rccc}
(q, id_S): & (R, S, \lambda) & \rightarrow & (R/N, S, \partial) \\
& r & \mapsto & q(r) = [r]
\end{array}
$$

morfizminin rack çaprazlanmış modül morfizmi olduğu gösterilmelidir. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alınsın:

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "q"'] & S \arrow[d, "id_S"] \\
R/N \arrow[r, "\partial"'] & S
\end{tikzcd}
$$

i) *Her* $r \in R$ *ve her* $s \in S$ *için,*

$$
\begin{aligned}
q (r \cdot s) &= [r \cdot s] \\
&= [r] \cdot s \\
&= q (r) \cdot id_S (s)
\end{aligned}
$$

olup etki korunur,

ii) *Her* $r \in R$ *için,*

$$
\begin{aligned}
\partial q (r) &= \partial ([r]) \\
&= \lambda (r) \\
&= id_S \lambda (r)
\end{aligned}
$$

olup diyagram değişmelidir.

Ayrıca her $p \in P$ *için*

$$
\begin{aligned}
[f (p)] = [g (p)] &\Rightarrow q (f (p)) = q (g (p)) \\
&\Rightarrow qf (p) = qg (p)
\end{aligned}
$$

olup

$$(q, id_S)\,(f, id_S) = (q, id_S)\,(g, id_S)$$

olduğu görülür.

Bu durumda

$$(P, S, \mu) \underset{(g,id_S)}{\overset{(f,id_S)}{\rightrightarrows}} (R, S, \lambda) \xrightarrow{(q,id_S)} (R/N, S, \partial)$$

diyagramı elde edilir.

Şimdi (W, S, ω) *bir rack çaprazlanmış modül ve* $(\gamma, id_S) : (R, S, \lambda) \to (W, S, \omega)$ *morfizmi*

$$(\gamma, id_S)\,(f, id_S) = (\gamma, id_S)\,(g, id_S)$$

eşitliğini sağlayan bir rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda her $r \in R$ *ve* $s \in S$ *için,*

i) $\gamma\,(r \cdot s) = \gamma\,(r) \cdot id_S\,(s)$

ii) $\omega\gamma = id_S\lambda$

eşitlikleri sağlanır. Böylece

$$(\varphi, id_S)\,(q, id_S) = (\gamma, id_S)$$

olacak şekilde bir tek

$$(\varphi, id_S) : (R/N, S, \partial) \to (W, S, \omega)$$

rack çaparzlanmış modül morfizminin var olduğu gösterilmelidir. (φ, id_S) *morfizmi*

$$\varphi\,([r]) = \gamma\,(r)$$

şeklinde tanımlansın.

H *bağıntısı*

$$(r, r') \in H \Leftrightarrow \gamma\,(r) = \gamma\,(r')$$

şeklinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun.

$$(\gamma, id_S)\,(f, id_S) = (\gamma, id_S)\,(g, id_S)$$

olduğundan her $p \in P$ *için*

$$\gamma f\,(p) = \gamma g\,(p)$$

olup $(f(p), g(p)) \in H$ *elde edilir.*

N *bağıntısı* R *üzerindeki en küçük denklik bağıntısı olduğundan* $N \subseteq H$ *olur. Böylece*

$$\begin{aligned}[r] = [r'] &\Rightarrow (r, r') \in N \\ &\Rightarrow (r, r') \in H \\ &\Rightarrow \gamma(r) = \gamma(r')\end{aligned}$$

olup (φ, id_S) *morfizmi iyi tanımlıdır.*

Şimdi (φ, id_S) *morfizminin rack çaprazlanmış modül morfizmi olduğu gösterilecektir. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alınsın:*

$$\begin{tikzcd} R/N \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi"'] & S \arrow[d, "id_S"] \\ W \arrow[r, "\omega"'] & S \end{tikzcd}$$

i) *Her* $s \in S$ *ve* $[r] \in R/N$ *için*

$$\begin{aligned}\varphi([r] \cdot s) &= \varphi([r \cdot s]) \\ &= \gamma(r \cdot s) \\ &= \gamma(r) \cdot id_S(s) \\ &= \varphi[r] \cdot id_S(s)\end{aligned}$$

olup etki korunur,

ii) *Her* $[r] \in R/N$ *için,*

$$\begin{aligned}\omega\varphi[r] &= \omega\gamma(r) \\ &= id_S\lambda(r) \\ &= id_S\varphi[r]\end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir.

Ayrıca her $r \in R$ *için*

$$\begin{aligned}(\varphi q)(r) &= \varphi([r]) \\ &= \gamma(r)\end{aligned}$$

olup

$$\left(\varphi, id_S\right)\left(q, id_S\right) = \left(\gamma, id_S\right)$$

elde edilir.

Son olarak (φ, id_S) *morfizminin tek olduğu gösterilecektir.*

$$(\varphi', id_S) : (R/N, S, \partial) \to (W, S, \omega)$$

morfizmi, (φ, id_S) *ile aynı özellikte, yani,*

$$\left(\varphi', id_S\right)\left(q, id_S\right) = \left(\gamma, id_S\right)$$

olacak şekilde bir rack çaprazlanmış modül morfizmi olsun ve $\varphi'([r]) = w$ *şeklinde tanımlansın. Her* $r \in R$ *için,*

$$\begin{aligned} \varphi' q(r) = \gamma(r) &\Rightarrow \varphi'([r]) = \gamma(r) \\ &\Rightarrow w = \gamma(r) \end{aligned}$$

olup

$$\varphi'([r]) = w = \gamma(r) = \varphi([r])$$

elde edilir. Bu durumda (φ, id_S) *morfizmi bir tektir.*

Böylece $(R/N, (q, id_S))$ *ikilisi* $((f, id_S), (g, id_S))$ *morfizm ikilisinin eş-eşitleyicisidir ve*

$$\begin{tikzcd} (P,S,\mu) \arrow[r, shift left, "(f,id_S)"] \arrow[r, shift right, "(g,id_S)"'] & (R,S,\lambda) \arrow[r, "(q,id_S)"] \arrow[dr, "(\gamma,id_S)"'] & (R/N,S,\partial) \arrow[d, dotted, "\exists!(\varphi,id_S)"] \\ & & (W,S,\omega) \end{tikzcd}$$

diyagramı eş-eşitleyici diyagramıdır.

7. RACKLARIN SERBEST ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLÜ

Serbest çaprazlanmış modül kavramı gruplar üzerinde ilk olarak Whitehead (1949) tarafından tanımlanmıştır. Porter (1986), değişmeli cebirler üzerinde indirgenmiş (induced) çaprazlanmış modüllerin özel hali olarak serbest çaprazlanmış modülleri tanımlamıştır. Gruboidler üzerinde serbest çaprazlanmış modül tanımı ise ilk olarak Brown vd. (2011) tarafından verilmiştir. Bu bölümde rackların çaprazlanmış modüller kategorisinde serbest çaprazlanmış modül kavramı tanıtılacaktır.

Tanım 7.1 *X bir küme ve R bir rack olmak üzere $f : X \to R$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

i) *$v : X \to \mathcal{E}$ fonksiyonu verildiğinde*

$$f = \partial^* v$$

eşitliği geçerli ise,

ii) *herhangi bir $\delta : S \to R$ rackların çaprazlanmış modülü ve $\omega : X \to S$ fonksiyonu*

$$\delta\omega = \partial^* v$$

eşitliğini sağlayacak şekilde verildiğinde

$$\begin{tikzcd}
 & & S \arrow[dl, "\delta"] \\
X \arrow[urr, "\omega"] \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{E} \arrow[ur, dotted, "\exists!\theta^*"'] \arrow[d, "\partial^*"] & \\
 & R &
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde bir tek

$$\theta^* : \mathcal{E} \to S$$

rackların çaprazlanmış modül morfizmi varsa,

$$\partial^* : \mathcal{E} \to R$$

dönüşümüne rackların serbest çaprazlanmış modülü denir.

Teorem 7.1 *X bir küme ve R bir rack olmak üzere $f : X \to R$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f : X \to R$ fonksiyonu üzerinde,*

$$\partial^* : \mathcal{E} \to R$$

rackların serbest çaprazlanmış modülü her zaman tanımlıdır.

İspat *$F(X \times R)$, $X \times R$ kümesi üzerindeki serbest grup olmak üzere,*

$$E = (X \times R) \times F(X \times R)$$

$X \times R$ üzerindeki serbest rack olsun. Her $((x, r), (x', \alpha)), ((y, r'), (y', \beta)) \in E$ için rack işlemi

$$((x, r), (x', \alpha)) \lhd ((y, r'), (y', \beta)) = \Big((x, r), (x', \alpha)(y', \beta)^{-1}(y, r')(y', \beta)\Big)$$

şeklinde tanımlansın.

$$E = (X \times R) \times F(X \times R)$$

kümesi serbest rack tanımından rack yapısı oluşturur.

Şimdi her $((x, r), (x', \alpha)), ((y, r'), (y', \beta)) \in E$ ve $q \in R$ için R rackının E üzerine etkisi

$$((x, r), (x', \alpha)) \cdot q = ((x, r \lhd q), (x', \alpha \lhd q))$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{array}{rccl} \partial : & E & \to & R \\ & ((x, r), (x', \alpha)) & \mapsto & \partial((x, r), (x', \alpha)) = f(x) \lhd f(x') \lhd \alpha \end{array}$$

şeklinde tanımlanan ∂ dönüşümü Önerme 3.6 gereğince bir rack morfizmidir. Ayrıca her $((x, r), (x', \alpha)), ((y, r'), (y', \beta)) \in E$ ve $q, q' \in R$ için

i)

$$\begin{aligned} (((x, r), (x', \alpha)) \cdot q) \cdot q' &= ((x, r \lhd q), (x', \alpha \lhd q)) \cdot q' \\ &= ((x, (r \lhd q) \lhd q'), (x', (\alpha \lhd q) \lhd q')) \\ &= ((x, (r \lhd q') \lhd (q \lhd q')), (x', (\alpha \lhd q') \lhd (q \lhd q'))) \\ &= ((x, (r \lhd q')), (x', (\alpha \lhd q'))) \cdot (q \lhd q') \\ &= (((x, r), (x', \alpha)) \cdot q') \cdot (q \lhd q') \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((y,r'),(y',\beta)) \cdot q &= \Big((x,r),(x',\alpha)(y',\beta)^{-1}(y,r')(y',\beta)\Big) \cdot q \\ &= \Big((x,r \lhd q),(x',\alpha \lhd q)(y',\beta \lhd q)^{-1}(y,r' \lhd q)(y',\beta \lhd q)\Big) \\ &= ((x,r \lhd q),(x',\alpha \lhd q)) \lhd ((y,r' \lhd q),(y',\beta \lhd q)) \\ &= (((x,r),(x',\alpha)) \cdot q) \lhd (((y,r'),(y',\beta)) \cdot q)\end{aligned}$$

olup etki şartları sağlanır.

Ayrıca $((x,r),(x',\alpha)) \in E$ *ve* $q \in R$ *için*

$$\begin{aligned}\textbf{X1)}\ \partial\left(((x,r),(x',\alpha)) \cdot q\right) &= \partial\left((x,r \lhd q),(x',\alpha \lhd q)\right) \\ &= f(x) \lhd f(x') \lhd \alpha \lhd q \\ &= \partial\left((x,r),(x',\alpha)\right) \lhd q\end{aligned}$$

elde edilir.

S herhangi bir rack ve $\theta : E \to S$ herhangi bir rack morfizmi için

$$E^{*} = \{((x,r),(x',\alpha)) \in E \mid \theta\left(((x,r),(x',\alpha)) \cdot q\right) = \theta\left((x,r),(x',\alpha)\right) \cdot q,\ q \in R\}$$

kümesi E nin alt rackıdır. Çünkü;

i)

$$\begin{aligned}\theta\left(((1,1),(1,1)) \cdot q\right) &= \theta\left(((1,1 \lhd q),(1,1 \lhd q))\right) \\ &= \theta\left((1,1),(1,1)\right) \\ &= 1 \quad (\because \theta \textit{ rack morfizmi}) \\ &= 1 \cdot q \\ &= \theta\left((1,1),(1,1)\right) \cdot q\end{aligned}$$

olup $((1,1),(1,1)) \in E^{*}$ *dır.*

ii) *Her* $((x,r),(x',\alpha)),((y,r'),(y',\beta)) \in E^{*}$ *ve* $q \in R$ *için*

$$\begin{aligned}\theta\left((((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((y,r'),(y',\beta))) \cdot q\right) &= \theta\left(((x,r),(x',\alpha)) \cdot q \lhd ((y,r'),(y',\beta)) \cdot q\right) \\ &= \theta\left(((x,r),(x',\alpha)) \cdot q\right) \lhd \theta\left(((y,r'),(y',\beta)) \cdot q\right) \\ &= \theta\left((x,r),(x',\alpha)\right) \cdot q \lhd \theta\left((y,r'),(y',\beta)\right) \cdot q \\ &= \left(\theta\left((x,r),(x',\alpha)\right) \lhd \theta\left((y,r'),(y',\beta)\right)\right) \cdot q \\ &= \theta\left(((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((y,r'),(y',\beta))\right) \cdot q\end{aligned}$$

olup $((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((y,r'),(y',\beta)) \in E^*$ *olduğu görülür.*

iii) *Her* $((x,r),(x',\alpha)),((y,r'),(y',\beta)) \in E$ *ve* $q \in R$ *için* $((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((y,r'),(y',\beta)) \in E^*$ *ve* $((y,r'),(y',\beta)) \in E^*$ *iken*

$$\theta((((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((y,r'),(y',\beta))) \cdot q) = \theta(((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((y,r'),(y',\beta))) \cdot q \Rightarrow$$

$$\theta(((x,r),(x',\alpha)) \cdot q \lhd ((y,r'),(y',\beta)) \cdot q) = (\theta((x,r),(x',\alpha)) \lhd \theta((y,r'),(y',\beta))) \cdot q \Rightarrow$$

$$\theta(((x,r),(x',\alpha)) \cdot q) \lhd \theta(((y,r'),(y',\beta)) \cdot q) = \theta((x,r),(x',\alpha)) \cdot q \lhd \theta((y,r'),(y',\beta)) \cdot q \Rightarrow$$

$$\theta(((x,r),(x',\alpha)) \cdot q) \lhd \theta((y,r'),(y',\beta)) \cdot q = \theta((x,r),(x',\alpha)) \cdot q \lhd \theta((y,r'),(y',\beta)) \cdot q$$

olduğundan $((x,r),(x',\alpha)) \in E^*$ *olduğu görülür.*

E^* *üzerindeki* I *bağıntısını*

$$\begin{array}{l} ((x,r),(x',\alpha)) \sim ((y,r'),(y',\beta)) \Leftrightarrow \\ ((x,r),(x',\alpha)) \cdot \partial((y,r'),(y',\beta)) = \big((x,r),(x',\alpha)(y',\beta)^{-1}(y,r')(y',\beta)\big) \end{array}$$

buna denk olarak

$$\begin{array}{l} ((x,r),(x',\alpha)) \sim ((y,r'),(y',\beta)) \Leftrightarrow \\ ((y,r'),(y',\beta)) \in \text{Çek}\partial \text{ ve } (y',\beta)^{-1}(y,r')(y',\beta) = (1,1) \end{array}$$

olarak tanımlansın. Şimdi bu I *bağıntısının kongrüans bağıntısı olduğu, yani,*

$$(x,r),(x',\alpha) \sim ((y,p),(y',\beta)) \text{ ve } (x_1,r'),(x_1',\alpha') \sim ((y_1,p'),(y_1',\beta'))$$

iken

$$(((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((x_1,r'),(x_1',\alpha'))) \sim (((y,p),(y',\beta)) \lhd ((y_1,p'),(y_1',\beta')))$$

olduğu gösterilecektir.

$$\begin{array}{rcl} ((x,r),(x',\alpha)) \cdot \partial((y,r'),(y',\beta)) & = & \Big((x,r),(x',\alpha)(y',\beta)^{-1}(y,r')(y',\beta)\Big), \\ ((y,r'),(y',\beta)) & \in & \text{Çek}\partial,\ (y',\beta)^{-1}(y,r')(y',\beta) = (1,1) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} ((x_1,r'),(x_1',\alpha')) \cdot \partial((y_1,p'),(y_1',\beta')) & = & \Big((x_1,r'),(x_1',\alpha')(y_1',\beta')^{-1}(y_1,p')(y_1',\beta')\Big), \\ ((y_1,p'),(y_1',\beta')) & \in & \text{Çek}\partial,\ (y_1',\beta')^{-1}(y_1,p')(y_1',\beta') = (1,1) \end{array}$$

olduğu biliniyor. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&(((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((x_1,r'),(x_1',\alpha'))) \cdot \partial (((y,r'),(y',\beta)) \lhd ((y_1,p'),(y_1',\beta'))) = \\
&(((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((x_1,r'),(x_1',\alpha'))) \cdot \partial \left(((y,r'),(y',\beta)(y_1',\beta')^{-1}(y_1,p')(y_1',\beta'))\right) = \\
&(((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((x_1,r'),(x_1',\alpha'))) \cdot \partial ((y,r'),(y',\beta)) = \\
&(((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((x_1,r'),(x_1',\alpha'))) \cdot f(y) \lhd f(y') \lhd \beta = \\
&((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((x_1,r'),(x_1',\alpha'))
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&(((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((x_1,r'),(x_1',\alpha'))) \lhd ((y,r'),(y',\beta)) \lhd ((y_1,p'),(y_1',\beta')) = \\
&\left((x,r),(x',\alpha)(x_1',\alpha')^{-1}(x_1,r')(x_1',\alpha')\right) \lhd \left((y,r'),(y',\beta)(y_1',\beta')^{-1}(y_1,p')(y_1',\beta')\right) = \\
&\left((x,r),(x',\alpha)(x_1',\alpha')^{-1}(x_1,r')(x_1',\alpha')\right) \lhd ((y,r'),(y',\beta)) = \\
&\left((x,r),(x',\alpha)(x_1',\alpha')^{-1}(x_1,r')(x_1',\alpha')(y',\beta)^{-1}(y,r')(y',\beta)\right) = \\
&\left((x,r),(x',\alpha)(x_1',\alpha')^{-1}(x_1,r')(x_1',\alpha')\right) = \\
&((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((x_1,r'),(x_1',\alpha'))
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\mathcal{E} = E^*/I$$

bölüm rackı elde edilir. Böylece

$$\partial^* : \mathcal{E} \to R$$

dönüşümü ∂ dönüşümünün indirgenmişi (induced) olup

$$\partial^*([(x,r),(x',\alpha)]) = \partial((x,r),(x',\alpha))$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda

X2) $$
\begin{aligned}
([(x,r),(x',\alpha)]) \cdot \partial^*([(y,r'),(y',\beta)]) &= [(x,r),(x',\alpha)] \cdot \partial((y,r'),(y',\beta)) \\
&= [((x,r),(x',\alpha)) \cdot \partial((y,r'),(y',\beta))] \\
&= \left[(x,r),(x',\alpha)(y',\beta)^{-1}(y,r')(y',\beta)\right] \\
&= [((x,r),(x',\alpha)) \lhd ((y,r'),(y',\beta))] \\
&= [(x,r),(x',\alpha)] \lhd [(y,r'),(y',\beta)]
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Böylece $(\mathcal{E}, R, \partial^*)$ rackların çaprazlanmış modülü elde edilir.

Son olarak serbest çaprazlanmış modül için evrensellik özelliğinin sağlandığı gösterilecektir:

i) *$v : X \to S$ fonksiyonu verilsin ve her $x \in X$ için*

$$v(x) = [(x,1),(1,1)]$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\partial^* v(x) &= \partial^* ([(x,1),(1,1)]) \\
&= \partial (((x,1),(1,1))) \\
&= f(x) \triangleleft f(1) \triangleleft 1 \\
&= f(x) \quad (\because f(1) = 1)
\end{aligned}
$$

olup

$$\partial^* v = f$$

elde edilir.

ii) *$\delta : S \to R$ herhangi bir rackların çaprazlanmış modülü olmak üzere, $\omega : X \to S$ fonksiyonu*

$$\delta\omega = \partial^* v$$

eşitliğini sağlayacak şekilde verilsin. Bu durumda

$$\theta^* v = w$$

olacak şekilde bir tek

$$\theta^* : \mathcal{E} \to S$$

crackların çaprazlanmış modül morfizminin var olduğu gösterilecektir.

E bir serbest rack olduğunda serbest rack tanımı gereği

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "w"] \arrow[d, "v"'] & S \\
E \arrow[ur, dotted, "\exists!\theta"'] &
\end{tikzcd}
\tag{7.1}
$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde bir tek $\theta : E \to S$ rack morfizmi vardır.

Böylece θ^* dönüşümü θ ile tanımlı olup varlığı ve tek olduğu açıktır. İspat için θ^* dönüşümünün rackların çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu göstermek yeterlidir.

Aşağıdaki diyagram göz önünde bulundurulsun:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "\partial^*"] \arrow[d, "\theta^*"'] & R \arrow[d, "id_R"] \\
S \arrow[r, "\delta"'] & R
\end{tikzcd}
$$

i) *Her* $[(x,r),(x',\alpha)] \in \mathcal{E}$ *ve* $q \in R$ *için*

$$\begin{aligned}
\theta^*\left(\left([(x,r),(x',\alpha)]\right)\cdot q\right) &= \theta^*\left([((x,r),(x',\alpha))\cdot q]\right) \\
&= \theta\left(((x,r),(x',\alpha))\cdot q\right) \\
&= \theta\left((x,r),(x',\alpha)\right)\cdot q \\
&= \theta^*\left((x,r),(x',\alpha)\right)\cdot id_R(q)
\end{aligned}$$

olup etki korunur.

ii) *Her* $x \in X$ *için*

$$\begin{aligned}
\delta\theta^* v(x) &= \delta w(x) \\
&= \partial^* v(x)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\delta\theta^* = \partial^*$$

olduğu görülür. Böylece diyagram değişmelidir.

Bu durumda

$$\begin{tikzcd}
 & & S \arrow[ddl, "\delta"] \\
X \arrow[urr, "\omega"] \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{E} \arrow[ur, dotted, "\exists!\theta^*"] \arrow[d, "\partial^*"] & \\
 & R &
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı elde edilir.

Sonuç olarak $(\mathcal{E}, R, \partial^*)$ *rackların çaprazlanmış modülü* $f : X \to R$ *fonksiyonu üzerindeki rackların serbest çaprazlanmış modülüdür.*

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde **Rack** ve $\mathbf{XRack}/\mathbf{S}$ kategorisinde çarpım, eş-çarpım, geri çekme, ileri itme, eşitleyici ve eş-eşitleyici gibi kategoriksel objeler elde edilmiştir. Ayrıca rackların serbest çaprazlanmış modülü tanımlanmıştır.

Buradan yola çıkarak, grup üzerindeki çaprazlanmış modül kategorisi ile rack üzerindeki çaprazlanmış modül kategorisi arasındaki ilişkinin varlığı görülmüştür.

Bu tezde elde edilen tanım ve kavramlar, racklar üzerindeki farklı kategoriler ve yapılar için de ele alınabilir ve yeni çalışmalar ortaya çıkabilir. Bu hususta, grupların çaprazlanmış modüller kategorisi için literatürde yer alan mevcut çalışmalar, yapılacak yeni çalışmalar için ipucu verip yol gösterici olacaktır. Örneğin, rackların serbest çaprazlanmış modül kavramı kullanılarak rackların indirgenmiş (induced) çaprazlanmış modülü oluşturulabilir. Ayrıca çaprazlanmış modüller için önemli bir yeri olan gömme (embedding) teoremi de incelenebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Arslan, U.E., Onarlı, G., 2015, An embedding theorem for the category of crossed P-modules, Georgian Mathematical Journal, 22(3): 361-371.

Biyogmam, G.R., 2013, A study of n-subracks, Quasigroups Related Systems, 21(1): 19-28.

Brieskorn, E., 1988, Automorphic Sets and Singularities, In ”Braids (Santa Cruz, CA, 1986)”, Contemporary Mathematics, 78: 45-115.

Brown, R., 1984, Coproducts of crossed P-modules: Applications to Second Homotopy Groups and to the homology of Groups, Topology, 23: 337-345.

Brown, R., Higgins, P.J., 1978, On the connection between the second relative homotopy groups of some related spaces, Proceedings of the London Mathematical Society, 3(2): 193-212.

Brown, R., Higgins, P.J., Sivera, R., 2011, Nonabelian algebraic topology: filtered spaces, crossed complexes, cubical homotopy groupoids, EMS Tracts in Mathematics, 15, 703.

Brown, R., Huebschman, J., 1982, Identities among relations, Low dimensional topology, Ed. R. Brown and TL Thickstun, London Math. Soc. Lecture Notes, 46: 153-202.

Conduché, D., 1984, Modules Croisés Généralisés de Longueur 2, Journal of Pure and Applied Algebra, 34: 155-178,

Crans, A., Wagemann, F., 2014, Crossed Modules of Racks, Homology, Homotopy and its Application, 16(2): 85-106.

Farinati, M., Guccione, J.A., Guccione, J.J., 2014, The Homology of Free Racks and Quandles, Communications in Algebra, 42: 3593-3606.

Fenn, R., Rourke, C., 1992, Racks and Links in Codimension Two, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 1: 343-406.

Kauffman, L.H., 1991, Knot-Crystals Classical Knot Theory in Modern Guise, Journal of Knots and Physics, 1.

Porter, T., 1986, Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles, J. Algebra, 99: 458-465.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ryder, H.J., 1993, The structure of racks, Ph.D .Thesis, University of Warwick.

Shammu, N.M., 1992, Algebraic and categorical structure of categories of crossed modules of algebras, Ph.D. Thesis, University College of North Wales.

Stanovský, D, 2004, Left Distributive Left Quasigroup, PhD Thesis, Charles University.

Whitehead, J.H.C., 1941, On adding Relations to Homotopy Groups, Annals of Mathematics Second Series, 42: 409-428.

Whitehead, J.H.C., 1946, Note on a previous paper entitled On adding relations to homotopy groups, Annals of Mathematics, 2, 47: 806-810.

Whitehead, J.H.C., 1949, Combinatorial homotopy. II. Bull. Amer. Math. Soc. 55: 453–496.

Winker, S.K., 1984, Quandles, knot invariants, and the n-fold branched cover, PhD Thesis, University of Illinois at Chicago.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Hatice Gülsün Akay

Uyruğu: T.C

Doğum Yeri, Tarihi: Bolvadin, 13.05.1985

Medeni Hali: Evli

İş Adresi: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü, F-1 Blok No:202, Eskişehir

E-posta: hgulsun@ogu.edu.tr

Eğitim Bilgileri

Doktora:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı (2012-2017)

Yüksek Lisans:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (Topoloji) (2008-2012)

Lisans

Gazi Üniveristesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği (2003-2008)

İş Deneyimi:

Araştırma Görevlisi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü (29.11.2010-)

Hatice Gülsün Akay