Leibniz-Rinehart Cebirleri ve Genellemeleri

Selim Çetin

DOKTORA TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Mayıs 2017

Leibniz-Rinehart Algebras and Generalisations

Selim Çetin

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Sciences

May 2017

Leibniz-Rinehart Cebirleri ve Genellemeleri

Selim Çetin

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Mahmut Koçak

Mayıs 2017

”Bu tez ESOGÜ BAP tarafından 2016-1177 nolu proje çerçevesinde desteklenmiştir.”

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı DOKTORA öğrencisi Selim Çetin'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "**Leibniz-Rinehart Cebirleri ve Genellemeleri**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Mahmut Koçak

İkinci Danışman : -

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Mahmut Koçak

Üye : Prof. Dr. Nedim Değirmenci

Üye : Prof. Dr. Nilüfer Özdemir

Üye : Doç. Dr. İ. İlker Akça

Üye : Doç. Dr. Özcan Gelişgen

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Mahmut Koçak danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Leibniz-Rinehart Cebirleri ve Genellemeleri**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 24/05/2017

Selim Çetin

ÖZET

Leibniz-Rinehart cebirleri ve genellemeleri adlı bu doktora tezi, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde temel kavramlarla ilgili genel tanımlar ve örnekler verildi. İkinci bölümde bu tanımlar vasıtasıyla Lie-Rinehart cebirlerin genellemesi olarak Leibniz-Rinehart cebirleri ve kategorisel inşaası tanımlanıldı. Üçüncü bölümde Leibniz-Rinehart cebirlerin çaprazlanmış modülleri sunuldu ve Leibniz-Rinehart cebirlerin çaprazlanmış modüllerine örnekler verildi. Hemde bu bölümde Leibniz-Rinehart cebirler kategorisi için çaprazlanmış modül ve bazı ilişkili yapılar (kategorisel olarak denk) verildi. Dördüncü bölümde Leibniz-Rinehart cebirlerin yüksek boyutlu çaprazlanmış modülleri verildi. Beşinci ve son bölümde ise elde edilen sonuçlar yorumlanarak "sonuçlar ve öneriler" başlığı altında sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Leibniz-Rinehart Cebirler, Çaprazlanmış Modül, Cat^1-Leibniz-Rinehart Cebirler, Simplisel Leibniz-Rinehart Cebirler.

SUMMARY

This Ph.D. thesis, titled Leibniz-Rinehart algebras and generalizations, consists of five chapters. In the first chapter, it is given the definitions and examples with respect to basic concepts. In the second chapter, Leibniz-Rinehart algebras and its categorical construction are introduced in as generazition of Lie Rinehart algebras. In the third chapter, the crossed module concept of Leibniz-Rinehart algebras is introduced and examples of crossed modules of Leibniz-Rinehart algebras are given. Also in this chapter, we give rise to crossed modules and some related (even categorically equivalent) structures for the category of Leibniz - Rinehart algebras. In the fourth section, it is given that the higher dimensional crossed modules of Leibniz-Rinehart algebras. In the last chapter, the obtained results and suggestions are given under the heading ”results and suggestions”.

Keywords: Leibniz-Rinehart algebras, Crossed module, Cat^1-Leibniz-Rinehart algebras, Simplical Leibniz-Rinehart algebras.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yöneten ve tezimin hazırlanması sırasında, ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam, sayın,

Prof.Dr.Mahmut KOÇAK ' a;

bu çalışmamı Bilimsel Araştırma Projesi kapsamında destekleyen

BAP2016-1177-nolu proje olarak Eskişehir Osmangazi Üniversitesi'ne;

her zaman bana güç veren biricik kızım,

Halime Beyza ' ya;

ve son olarak her zaman yanımda olup beni destekleyen,

sevgili aileme ve arkadaşlarıma;

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2017
Selim Çetin

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**A çıklama**
$\mathbb{K}$	Keyfi bir cisim
$\mathfrak{L}$	Leibniz-Rinehart cebir
$[\![,]\!]$	Leibniz braketi
$\mathfrak{L}^{\mathrm{ann}}$	$\mathfrak{L}$ Leibniz cebirinin annilatörü
$[\![X,r]\!]$	X in r ye Etkisi
$\rtimes$	Yarı-Direkt Çarpım

Kısaltmalar	**Açıklama**
$Der(A)$	A değişmeli cebiri üzerinde derivasyonların kümesi
Gör(f)	f Morfizminin Görüntüsü
Çek(f)	f Morfizminin Çekirdeği
$Bider(\mathfrak{L})$	$\mathfrak{L}$ Leibniz cebirinin biderivasyonlarının kümesi
$\mathcal{REP}_{(\mathfrak{L},A)}$	Leibniz-Rinehart represantasyonların kategorisi
$\mathfrak{L}\otimes R$	$\mathfrak{L}$ ve R cebirlerinin Direk Çarpımı
$\mathcal{LR}(A)$	Leibniz-Rinehart cebirler Kategorisi
$\mathcal{L}(A)$	Lie-Rinehart cebirler Kategorisi
$\mathcal{XLR}(A)$	Leibniz-Rinehart Çaprazlanmış Modül Kategorisi

1. GİRİŞ VE AMAÇ

$\mathbb{K}$ bir cisim ve A bir değişmeli $\mathbb{K}$-cebir olsun. (Huebschmann, 1990) da bir $\mathbb{K}$ Lie cebir yapısı üzerinde bir A-modül yapısı oluşturup bu yapıyı Lie-Rinehart cebir olarak adlandırmıştır. Bu cebirlerin çaprazlanmış modül yapısını (Casas v.d,2004) de ve üçlü kohomolojisinin teorisini (Casas v.d,2005) de verdi.

$Der(A)$ ile A nın tüm $\mathbb{K}$-derivasyonlarının kümesi gösterilsin. Bir başka deyişle $Der(A)$ tüm $a, a' \in A$ için $D(aa') = aD(a') + D(a)a'$ olacak şekilde $D : A \longrightarrow A$ tüm $\mathbb{K}$-lineer dönüşümlerin kümesi olsun. Lie-Rinehart cebirleri ile ilgili tüm çalışmalarda ana örnek A nın tüm $\mathbb{K}$-derivasyonlarının kümesi olmuştur.

Gerçekten $Der(A)$; $a, a' \in A$ ve $D, D' \in Der(A)$ için işlemi $(aD)(a') = aD(a')$ olarak, braketi de $[D, D'] = DD' - D'D$ şeklinde tanımlandığında bir Lie $\mathbb{K}$-cebirdir; Fakat $Der(A)$ yukarıdaki işlemle A-modül olmasına karşın, tanımlanan bu braket ile

$$[D, aD'] = a[D, D'] + D(a)D'$$

elde edileceğinden A-bilineer olmadığı için Lie A-cebir değildir. Bu nedenle elde edilen bu cebirsel yapı literatürde Lie-Rinehart cebir olarak geçmektedir.

Bu tezde, (Jubin v.d,2016) de tanım ve morfizmlerini verilen Leibniz-Rinehart cebir yapısına benzer olarak Leibniz-Rinehart cebir ve morfizm tanımları verildi. Bu tezde verilen tanım (Jubin v.d,2016) da verilen tanımdan biraz farklıdır. Bunun nedeni yukarıdaki makalede sol Leibniz şartı kullanılırken tezde Leibniz cebirlerinin tanımlandığı (Loday,1993) de verdiği gibi $\mathfrak{L}$ bir $\mathbb{K}$-vektör uzayı olmak üzere her $X, Y, Z \in \mathfrak{L}$ için

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] - [[X, Z], Y]$$

şeklindeki sağ Leibniz şartı kullanılmıştır. Burada geçen tüm yapılar ve sonuçlar uygun yollarla tanımlanan bir funktor yardımıyla sol Leibniz cebir şartı ile elde edilen sonuçlarla eşlenebilir. Daha sonra Lie cebirler kategorisinin, Leibniz cebirler kategorisinin bir dolu alt kategorisi olması gerçeğinden yola çıkarak (Casas v.d,2004) ve (Casas v.d,2005) deki çalışmalarda tanımlanan yapılar genelleştirilmiştir.

Tezin sonraki bölümlerinde elde edilen bu yeni cebir yapısı üzerinde Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modülleri ve kategorisi tanımlanacaktır. Daha sonra bu yeni cebir yapısı yüksek boyutlar için incelenecektir. Bu çaprazlanmış modüllerin son kısımlarında $\mathfrak{L}$ sabit bir Leibniz-Rinehart cebir olmak üzere, tabanı R olan tüm Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modüllerin kategorisi tanımlanarak, kategorisel ve funktoriyel özellikleri incelenecektir. Elde edilen bu kategoride başlangıç objesi $0 \longrightarrow \mathfrak{L}$ ve varış objesi Çek$(\alpha_r) \longrightarrow \mathfrak{L}$ olacağından sıfır obje yoktur. Dolayısıyla abelyan veya semi-abelyan kategori değildir. İnterst ve modifiye edilmiş interest kategorilerde ankor olmadığından bu kategorilerde yeni kategoriyi kapsamaz.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

$\mathbb{K}$ bir cisim ve A bir değişmeli $\mathbb{K}$-cebir olsun. (Huebschmann, 1990) da bir $\mathbb{K}$ Lie cebir yapısı üzerinde bir A-modül yapısı oluşturup bu yapıyı Lie-Rinehart cebir olarak adlandırmıştır. Bu cebirlerin çaprazlanmış modül yapısı (Casas vd.,2004) de ve üçlü kohomolojisinin teorisi (Casas vd.,2005) de verilmiştir.

$Der(A)$ ifadesi A nın tüm $\mathbb{K}$-derivasyonlarının kümesini göstersin. Bir başka deyişle $Der(A)$ tüm $a, a' \in A$ için $D(aa') = aD(a') + D(a)a'$ olacak şekilde $D : A \longrightarrow A$ tüm K-lineer dönüşümlerin kümesi olsun. Lie-Rinehart cebirleri ile ilgili tüm çalışmalarda temel örnek A nın tüm $\mathbb{K}$-derivasyonlarının kümesi olmuştur.

Gerçekten $Der(A)$; $a, a' \in A$ ve $D, D' \in Der(A)$ için işlemi $(aD)(a') = aD(a')$ olarak, braketi de $[D, D'] = DD' - D'D$ olacak şeklinde tanımlandığında bir Lie $\mathbb{K}$-cebirdir. Fakat $Der(A)$ yukarıdaki işlemle A-modül olmasına karşın, tanımlanan bu braket ile

$$[D, aD'] = a[D, D'] + D(a)D'$$

elde edileceğinden A-bilineer olmadığı için Lie A-cebir değildir. Bu nedenle elde edilen bu cebirsel yapı literatürde Lie-Rinehart cebir olarak geçmektedir.

Çaprazlanmış modül yapısı gruplar üzerinde ilk kez Whitehead tarafından homotopi 2-tiplerin cebirsel bir modellemesi olarak (Whitehead, 1941, 1946) de tanımlanmıştır. Öyle ki (Baues, 1991; Loday, 1982) grup çaprazlanmış modülleri üzerindeki model kategori (Brown ve Golasinski, 1989; Cabello ve Garzón, 1995) için homotopi kategorisi, noktasal 2-tipler üzerindeki model kategorisi (Elvira-Donazar ve Hernandez-Paricio, 1995) için homotopi kategoriye denktir. Bilindiği üzere çarazlanmış modüller, Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan simplisel gruplar kategorisine (Conduché, 1984) ve gruplar kategorisindeki internal objeye (cat^1-grup yapısına) denktir.

Daha sonra Lie cebir versiyonu (Ellis, 1993) de ve Lie-Rinehart cebir versiyonu (Casas vd., 2004) de tanımlanmıştır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin diğer kaynaklardan bağımsız olarak daha kolay anlaşılabilmesi için tez boyunca gerekli olacak bazı temel tanımlar ve örnekler verilecektir. Ayrıca tez içinde literatüre uygun olması için etkilerde Leibniz braketi ile gösterilecektir.

3.1 Leibniz Cebir

Tanım 3.1 *$\mathfrak{L}$ bir $\mathbb{K}$-vektör uzayı ve*

$$[\![-,-]\!] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$$

$\mathbb{K}$-bilineer dönüşüm olsun. Her $X, Y, Z \in \mathfrak{L}$ için

$$[\![X, [\![Y, Z]\!]]\!] = [\![[\![X, Y]\!], Z]\!] - [\![[\![X, Z]\!], Y]\!]$$

şeklindeki özdeşlik (Leibniz özdeşliği) sağlanıyorsa; Leibniz braketi ile birlikte $\mathfrak{L}$ ye $\mathbb{K}$ üzerinde bir Leibniz cebir denir.

Tanımlanan bu kavram literatürde sağ Leibniz cebiri olarak bilinir. Tezde bu kavramı kısaca Leibniz cebiri olarak adlandırılacaktır.

3.1.1 Leibniz cebir homomorfizmi

Tanım 3.2 *$\mathfrak{L}$ ve $\mathfrak{L}'$ iki Leibniz cebiri olsun. Her $X, Y \in \mathfrak{L}$ için*

$$f[\![X, Y]\!] = [\![f(X), f(Y)]\!]$$

şartını sağlayan $f : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}'$ $\mathbb{K}$ bilineer dönüşümüne $\mathfrak{L}$ den $\mathfrak{L}'$ ne bir Leibniz cebir homomorfizması denir.

3.1.2 Leibniz cebir etkisi

Tanım 3.3 *$\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ iki Leibniz cebiri olsun.*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}' & \longrightarrow & \mathfrak{L}' \\ (X, Y') & \longmapsto & [\![X, Y']\!] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathfrak{L}' \otimes \mathfrak{L} & \longrightarrow & \mathfrak{L}' \\ (Y', X) & \mapsto & [\![Y', X]\!] \end{array}$$

şeklinde tanımlı K-bilineer dönüşümleri, her $X, Y \in \mathfrak{L}$, $X', Y' \in \mathfrak{L}'$ için
1a-) $[\![X, [\![Y, Y']\!]]\!] = [\![[\![X, Y]\!], Y']\!] - [\![[\![X, Y']\!], Y]\!]$

1b-) $[\![X, [\![Y', Y]\!]]\!] = [\![[\![X, Y']\!], Y]\!] - [\![[\![X, Y]\!], Y']\!]$

1c-) $[\![Y', [\![X, Y]\!]]\!] = [\![[\![Y', X]\!], Y]\!] - [\![[\![Y', Y]\!], X]\!]$

1d-) $[\![X, [\![X', Y']\!]]\!] = [\![[\![X, X']\!], Y']\!] - [\![[\![X, Y']\!], X']\!]$

1e-) $[\![X', [\![X, Y']\!]]\!] = [\![[\![X', X]\!], Y']\!] - [\![[\![X', Y']\!], X]\!]$

1f-) $[\![X', [\![Y', X]\!]]\!] = [\![[\![X', Y']\!], X]\!] - [\![[\![X', X]\!], Y']\!]$
şartlarını sağlıyorsa $\mathfrak{L}$ Leibniz cebirinin $\mathfrak{L}'$ Leibniz cebiri üzerine etkisi vardır denir.

3.2 Biderivasyon

3.2.1 Bir $\mathfrak{L}$ Leibniz cebirin $\mathbb{K}$ biderivasyonu

Tanım 3.4 (Loday, 1993) *$\mathfrak{L}$ bir Leibniz cebir ve $\varphi : = (d, D)$ her $X_1, X_2 \in \mathfrak{L}$ için*

$$\begin{aligned} D[\![X_1, X_2]\!] &= [\![D(X_1), X_2]\!] - [\![D(X_2), X_1]\!], \\ d[\![X_1, X_2]\!] &= [\![d(X_1), X_2]\!] + [\![X_1, d(X_2)]\!], \\ [\![X_1, d(X_2)]\!] &= [\![X_1, D(X_2)]\!], \end{aligned}$$

olacak şekilde $d, D : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ tanımlanan $\mathbb{K}$ -lineer dönüşümlerin bir ikilisi olsun. (d, D) ikilisine $\mathfrak{L}$ nin bir $\mathbb{K}$-bidervasyonu denir. $\mathfrak{L}$ nin tüm $\mathbb{K}$-biderivasyonlarının kümesi $Bider(\mathfrak{L})$ ile gösterilir.

3.2.2 Bir $\mathfrak{L}$ Leibniz cebirin $\mathbb{K}$ biderivasyon örneği

Örnek 3.1 *$\mathfrak{L}$ bir Leibniz cebiri olsun. Sabit bir $X \in \mathfrak{L}$ için, $ad_X, Ad_X : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ dönüşümleri $Y \in \mathfrak{L}$ için sırasıyla $ad_X(Y) = -[\![Y, X]\!]$ ve $Ad_X(Y) = [\![X, Y]\!]$ olarak tanımlanırsa (ad_X, Ad_X) $\mathfrak{L}$ nin biderivasyonudur.*
Gerçekten, $[\![,]\!]$ Leibniz braketi $\mathbb{K}$-bilineer olduğundan

$$ad_X(kY) = -[\![kY, X]\!] = -k[\![Y, X]\!] = k(-[\![Y, X]\!]) = kad_X(Y)$$

ve benzer şekilde

$$Ad_X(kY) = [\![X, kY]\!] = k[\![X, Y]\!] = kAd_X(Y)$$

elde edileceği için ad_X ve Ad_X dönüşümleri $\mathbb{K}$-lineerdir. Ek olarak, $(ad_X, Ad_X) = (d, D)$ alınırsa, her $X_1, X_2 \in \mathfrak{L}$ için

$$\begin{aligned} D[\![X_1, X_2]\!] &= Ad_X([\![X_1, X_2]\!]) \\ &= [\![X, [\![X_1, X_2]\!]]\!] \\ &= [\![[\![X, X_1]\!], X_2]\!] - [\![[\![X, X_2]\!], X_1]\!] \ \because \textit{Leibniz cebir şartı} \\ &= [\![Ad_X(X_1), X_2]\!] - [\![Ad_X(X_2), X_1]\!] \ \because Ad_X \textit{in tanımı} \\ &= [\![D(X_1), X_2]\!] - [\![D(X_2), X_1]\!] \end{aligned}$$

elde edilir. 2. şartın gösteriminde son şart gerekli olacağından önce son şartı gösterilsin.

$$[\![X_1, [\![X, X_2]\!]]\!] = [\![[\![X_1, X]\!], X_2]\!] - [\![[\![X_1, X_2]\!], X]\!]$$

$$-[\![X_1, [\![X_2, X]\!] = -[\![[\![X_1, X_2]\!], X]\!] + [\![[\![X_1, X]\!], X_2]\!]$$

eşitliklerinin sağ tarafları eşit olduğundan sol taraflardan $[\![X_1, [\![X, X_2]\!]]\!] = -[\![X_1, [\![X_2, X]\!]$ gelir; yani $[\![X_1, D(X_2)]\!] = [\![X_1, d(X_2)]\!]$ elde edilir.
Son olarak $[\![X_1, [\![X, X_2]\!]]\!] = [\![[\![X_1, X]\!], X_2]\!] - [\![[\![X_1, X_2]\!], X]\!]$ Leibniz cebir şartı $-[\![[\![X_1, X_2]\!], X]\!] = [\![X_1, [\![X, X_2]\!]]\!] - [\![[\![X_1, X]\!], X_2]\!]$ şartına denk olacağından

$$\begin{aligned} d[\![X_1, X_2]\!] &= ad_X([\![X_1, X_2]\!]) \\ &= -[\![[\![X_1, X_2]\!], X]\!] \\ &= [\![X_1, [\![X, X_2]\!]]\!] - [\![[\![X_1, X]\!], X_2]\!] \\ &= [\![X_1, Ad_X(X_2)]\!] - [\![-ad_X(X_1), X_2]\!] \ \because Ad_X,\ ad_X \textit{in tanımı} \\ &= [\![X_1, D(X_2)]\!] + [\![d(X_1), X_2]\!] \\ &= [\![X_1, d(X_2)]\!] + [\![d(X_1), X_2]\!] \ \because \textit{son şart} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.3 Bir $\mathbb{K}$ Leibniz cebir örneği

Örnek 3.2 *$(d, D), (d', D') \in Bider(\mathfrak{L})$ için braketi*

$$\begin{aligned} [\![\ ,\ ]\!] : Bider(\mathfrak{L}) \times Bider(\mathfrak{L}) &\longrightarrow Bider(\mathfrak{L}) \\ ((d, D), (d', D')) &\longmapsto [\![(d, D), (d', D')]\!] = (d \circ d' - d' \circ d, D \circ d' - D' \circ d) \end{aligned}$$

şeklinde alınırsa $Bider(\mathfrak{L})$ bir Leibniz $\mathbb{K}$-cebirdir. Bunu göstermek için her (d, D), (d', D'), $(d'', D'') \in Bider(\mathfrak{L})$ için

a). *$Bider(\mathfrak{L})$, $\mathbb{K}$-vektör uzay olduğu,*

b).

$[\![(d, D), [\![(d', D'), (d'', D'')]\!]]\!] = [\![[\![(d, D), (d', D')]\!], (d'', D'')]\!] - [\![[\![(d, D), (d'', D'')]\!], (d', D')]\!]$, *şeklindeki Leibniz şartı sağlandığı,*

c). *Yukarıda tanımlanan* $[\![,]\!]$ *Leibniz braketi* $\mathbb{K}$*-bilineer olduğu gösterilmelidir.*

a). $(d,D),(d',D'),(d'',D'') \in Bider(\mathfrak{L})$ *ve* $k,k_1,k_2 \in \mathbb{K}$ *ve* $X \in \mathfrak{L}$ *için*

$$\begin{array}{rcl} + \;:\; Bider(\mathfrak{L}) \times Bider(\mathfrak{L}) & \longrightarrow & Bider(\mathfrak{L}) \\ ((d,D),(d',D')) & \longmapsto & ((d,D)+(d',D'))(X) = ((d+d'),(D+D'))(X) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} \cdot \;:\; \mathbb{K} \times Bider(\mathfrak{L}) & \longrightarrow & Bider(\mathfrak{L}) \\ (k,(d,D)) & \longmapsto & (k \cdot (d,D))(X) = k(d,D)(X) = (kd,kD)(X) \end{array}$$

işlemleri verilsin.

V_1). $(Bider(\mathfrak{L}),+)$ *bir Abelyan gruptur.*

V_2). *Her* $X \in \mathfrak{L}$ *için*

$$\begin{aligned} (k \cdot ((d,D)+(d',D'))(X) &= k(((d,D)+(d',D'))(X)) \\ &= k((d,D)(X)+(d',D')(X)) \\ &= k(d,D)(X)+k(d',D')(X) \\ &= (k\cdot(d,D))(X)+(k\cdot(d',D'))(X) \\ &= (k\cdot(d,D)+k\cdot(d',D'))(X) \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$k \cdot ((d,D)+(d',D')) = k\cdot(d,D)+k\cdot(d',D')$$

sonucu elde edilir.

V_3). *Her* $X \in \mathfrak{L}$ *için*

$$\begin{aligned} ((k_1+k_2)\cdot(d,D))(X) &= (k_1+k_2)(d,D)(X) \\ &= k_1(d,D)(X)+k_2(d,D)(X) \\ &= (k_1\cdot(d,D))(X)+(k_2\cdot(d,D))(X) \\ &= (k_1\cdot(d,D)+k_2\cdot(d,D))(X) \end{aligned}$$

olduğundan

$$(k_1+k_2)\cdot(d,D) = k_1\cdot(d,D)+k_2\cdot(d,D)$$

dir.

V*$_4$). *Her* $X \in \mathfrak{L}$ *için

$$\begin{aligned} ((k_1k_2)\cdot(d,D))(X) &= (k_1k_2)(d,D)(X) \\ &= k_1\cdot(k_2(d,D)(X)) \\ &= k_1\cdot((k_2\cdot(d,D))(X)) \\ &= (k_1\cdot(k_2\cdot(d,D)))(X) \end{aligned}$$

ve buradan

$$(k_1k_2)\cdot(d,D) = k_1\cdot(k_2\cdot(d,D))$$

sonucu elde edilir.

***V*$_5$).** *Her* $(d,D) \in Bider(\mathfrak{L})$, $1 \in \mathbb{K}$ *için*

$$1\cdot(d,D) = (d,D)$$

elde edilir ki buradan $Bider(\mathfrak{L})$ *bir* $\mathbb{K}$*-vektör uzayıdır.*

b). *Burada kısalık olması için* $\circ$ *bileşke işlemi yazılmayacaktır.*

$$\begin{aligned} I_1 &= [\![(d,D),[\![(d',D'),(d'',D'')]\!]]\!] \\ &= [\![(d,D),(d'd''-d''d',D'd''-D''d')]\!] \\ &= (d(d'd''-d''d')-(d'd''-d''d')d, D(d'd''-d''d')-(D'd''-D''d')d) \\ &= (dd'd''-dd''d'-d'd''d+d''d'd, Dd'd''-Dd''d'-D'd''d+D''d'd) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= [\![[\![(d,D),(d',D')]\!],(d'',D'')]\!] \\ &= [\![(dd'-d'd,Dd'-D'd),(d'',D'')]\!] \\ &= (dd'-d'd)d''-d''(dd'-d'd),(Dd'-D'd)d''-D''(dd'-d'd)) \\ &= (dd'd''-d'dd''-d''dd'+d''d'd, Dd'd''-D'dd''-D''dd'+D''d'd) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= [\![[\![(d,D),(d'',D'')]\!],(d',D')]\!] \\ &= [\![(dd''-d''d,Dd''-D''d),(d',D')]\!] \\ &= (dd''-d''d)d'-d'(dd''-d''d),(Dd''-D''d)d'-D'(dd''-d''d)) \\ &= (dd''d'-d''dd'-d'dd''+d'd''d, Dd''d'-D''dd'-D'dd''+D'd''d) \end{aligned}$$

$I_1 = I_2 - I_3$ *eşitliği gereği*

$$[\![(d,D),[\![(d',D'),(d'',D'')]\!]]\!] = [\![[\![(d,D),(d',D')]\!],(d'',D'')]\!] - [\![[\![(d,D),(d'',D'')]\!],(d',D')]\!]$$

Leibniz şartı sağlanır.

c). *Her* $X \in \mathfrak{L}$ *için*

$$\begin{aligned}
&= (k \cdot [\![(d,D),(d',D')]\!])(X) \\
&= k([\![(d,D),(d',D')]\!](X)) \\
&= k((dd' - d'd, Dd' - D'd)(X)) \\
&= k((dd' - d'd)(X), (Dd' - D'd)(X)) \\
&= k(dd' - d'd)(X), k(Dd' - D'd)(X) \\
&= kd(d'(X)) - kd'(d(X)), kD(d'(X)) - kD'(d(X)) \\
&= kd(d'(X)) - d'(kd(X)), kD(d'(X)) - D'(kd(X)) \;\; (\because d, D : A \longrightarrow A, \mathbb{K}\text{-lineer}) \\
&= k \cdot d(d'(X)) - d'(k \cdot d(X)), k \cdot D(d'(X)) - D'(k \cdot d(X)) \\
&= (k \cdot d)d' - d'(k \cdot d), (k \cdot D)d' - D'(k \cdot d)(X) \\
&= [\![(k \cdot d, k \cdot D),(d',D')]\!](X) \\
&= [\![k \cdot (d,D),(d',D')]\!](X)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&= (k \cdot [\![(d,D),(d',D')]\!])(X) \\
&= k([\![(d,D),(d',D')]\!](X)) \\
&= k((dd' - d'd, Dd' - D'd)(X)) \\
&= k((dd' - d'd)(X), (Dd' - D'd)(X)) \\
&= k(dd' - d'd)(X), k(Dd' - D'd)(X) \\
&= kd(d'(X)) - kd'(d(X)), kD(d'(X)) - kD'(d(X)) \\
&= d(kd'(X)) - kd'(d(X)), D(kd'(X)) - kD'(d(X)) \;\; (\because d, D : A \longrightarrow A, \mathbb{K}\text{-lineer}) \\
&= d(k \cdot d'(X)) - k \cdot d'(d(X)), D(k \cdot d'(X)) - k \cdot D'(d(X)) \\
&= (d(k \cdot d') - (k \cdot d')d, D(k \cdot d') - (k \cdot D')d)(X) \\
&= [\![(d,D)(k \cdot d', k \cdot D')]\!](X) \\
&= [\![(d,D), k \cdot (d',D')]\!](X)
\end{aligned}$$

olur ki buradan

$$k \cdot [\![(d,D),(d',D')]\!] = [\![k \cdot (d,D),(d',D')]\!] = [\![(d,D), k \cdot (d',D')]\!]$$

sonucu elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&= [\![(d,D) + (d',D'),(d'',D'')]\!](X) \\
&= [\![((d+d'),(D+D')),(d'',D'')]\!](X) \\
&= ((d+d') \circ d'' - d'' \circ (d+d'), (D+D') \circ d'' - D'' \circ (d+d'))(X) \\
&= ((dd'' + d'd'') - (d''d + d''d'), (Dd'' + D'd'') - (D''d + D''d'))(X) \\
&= ((dd'' - d''d) + (d'd'' - d''d'), (Dd'' - D''d) + (D'd'' - D''d'))(X) \\
&= ((dd'' - d''d, Dd'' - D''d)(X) + (d'd'' - d''d', D'd'' - D''d'))(X) \\
&= [\![(d,D)(d'',D'')]\!](X) + [\![(d',D'),(d'',D'')]\!](X)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
&= [\![(d,D),(d',D')+(d'',D'')]\!](X)\\
&= [\![(d,D),((d'+d''),(D'+D''))]\!](X)\\
&= (d\circ(d'+d'')-(d'+d'')\circ d, D\circ(d'+d'')-(d'+d'')\circ D)(X)\\
&= ((dd'+dd'')-(d'd+d''d),(Dd'+Dd'')-(d'D+d''D))(X)\\
&= (dd'-d'd)+((dd''-d''d),(Dd'-d'D)+(Dd''-d''D))(X)\\
&= ((dd'-d'd,Dd'-d'D)(X)+(dd''-d''d,Dd''-d''D))(X)\\
&= [\![(d,D)(d',D')]\!](X)+[\![(d,D),(d'',D'')]\!](X)
\end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla $[\![,]\!]$ *braketi* $\mathbb{K}$*-bilineerdir.*

Yapılan tüm bu işlemlerle birlikte $Bider(\mathfrak{L})$ *bir Leibniz* $\mathbb{K}$*-cebirdir.*

4. LEİBNİZ-RİNEHART CEBİRLER

Bu bölümde ilk olarak bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde $\mathfrak{L}$ Leibniz-Rinehart cebiri tanımlanmış ardından verilen iki Leibniz-Rinehart cebir arasındaki morfizmler tanımlanarak Leibniz-Rinehart cebirler kategorisi oluşturulmuştur. Tanımlanan bu yeni cebir çeşitli örneklerle desteklenmiştir. Ardından $\mathfrak{L}$ Leibniz cebirinin R Leibniz A-cebiri üzerine etkisi tanımlanmış ve bu etki yardımıyla $R \times \mathfrak{L}$ direkt çarpımının alt kümesi olarak $R \rtimes \mathfrak{L}$ yarı-direkt çarpımı tanımlanıp bu yarı direkt çarpımın ilgili braket tanımı ile Leibniz-Rinehart cebir yapısı oluşturduğu gösterilmiştir. Daha sonra konuyla ilgili bir kaç teorem verilerek özel bir Leibniz-Rinehart cebir örneğiyle bu kısım sonlandırılmıştır.

4.1 Leibniz-Rinehart Cebirleri

Bu kısımda Leibniz cebiroidlerin cebirselleştirmesi olan Leibniz-Rinehart cebirleri (Jubin vd.,2016) de tanım ve morfizmleri verilen Leibniz cebiroid tanımına ve Leibniz-Rinehart cebir yapısına benzer olarak Leibniz-Rinehart cebir ve morfizm tanımı verilmiştir. Burada verilen tanım (Jubin vd.,2016) de verilen tanımdan biraz farklıdır. Bunun nedeni yukarıdaki makalede sol Leibniz şartı kullanılırken burada Leibniz cebirlerinin tanımlandığı (Loday, 1993) daki gibi $\mathfrak{L}$ bir $\mathbb{K}$-vektör uzayı olmak üzere her $X, Y, Z \in \mathfrak{L}$ için

$$[\![X, [\![Y, Z]\!]]\!] = [\![[\![X, Y]\!], Z]\!] - [\![[\![X, Z]\!], Y]\!]$$

şeklinde tanımlı olan sağ Leibniz şartını kullanıldı. Burada geçen tüm yapılar ve sonuçlar uygun yollarla tanımlanan bir funktor yardımıyla sol Leibniz cebir şartı ile elde edilen sonuçlarla eşlenebilir.

Tanım 4.1 *$\mathbb{K}$ bir cisim, A değişmeli bir $\mathbb{K}$-cebir, $\mathfrak{L}$ bir $\mathbb{K}$-Leibniz cebir ve $\alpha_r : \mathfrak{L} \to Der(A)$ Leibniz $\mathbb{K}$-cebir ve A-modül homomorfizmi olsun. Her $a \in A$, $X, Y \in \mathfrak{L}$ için*

$$[\![aX, Y]\!] = a[\![X, Y]\!] - \alpha_r(Y)(a)X$$
$$\alpha_r[\![X, Y]\!] = [\alpha_r(X), \alpha_r(Y)]$$

şartlarını sağlayan A modül yapısına sahip bir $\mathfrak{L}$ Leibniz $\mathbb{K}$-cebirine $(\mathbb{K}, A)$ üzerinde bir Leibniz-Rinehart cebir denir ve $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ ile gösterilir.

4.1.1 Leibniz-Rinehart cebir homomorfizmi

Tanım 4.2 *$(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ ve $(\mathfrak{L}', \alpha'_r)$ aynı $(A, \mathbb{K})$ üzerinde iki Leibniz-Rinehart cebir ve $f : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}'$ bir Leibniz $\mathbb{K}$-cebir ve A-modül homomorfizmi olsun. Eğer*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{L} \arrow[dr, "\alpha_r"] \arrow[dd, "f"'] & \\
 & Der(A) \\
\mathfrak{L}' \arrow[ur, "\alpha'_r"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ise f ye Leibniz-Rinehart cebir homomorfizmi denir. Böylece $(\mathbb{K}, A)$ üzerinde Leibniz-Rinehart cebirlerinin kategorisi $\mathcal{LR}(A)$ elde edilir.

4.1.2 Leibniz-Rinehart cebir örnekleri

Örnek 4.1 *$T_r : Der(A) \longrightarrow Der(A)$ tüm $D, D' \in Der(A)$ için*

$$T_r(T_r(D)D') = T_r(D)T_r(D') = T_r(DT_r(D'))$$

olacak şekilde $\mathbb{K}$-lineer A-modül homomorfizmi olsun. O zaman $Der(A)$;

$$\begin{array}{rcl}
[\![,]\!] : Der(A) \times Der(A) & \longrightarrow & Der(A) \\
(D, D') & \longmapsto & [\![D, D']\!] = DT_r(D') - T_r(D)D'
\end{array}$$

braketi ile Leibniz $\mathbb{K}$-cebirdir. Bu açıkça ifade edilirse $D, D' \in Der(A)$ ve k, $k' \in \mathbb{K}$ ve $a \in A$ için

$$\begin{array}{rcl}
+ \quad : \quad Der(A) \times Der(A) & \longrightarrow & Der(A) \\
(D, D') & \longmapsto & (D + D')(X) = D(X) + D'(X)
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl}
\cdot \quad : \quad \mathbb{K} \times Der(A) & \longrightarrow & Der(A) \\
(k, D) & \longmapsto & (k \cdot D)(X) = kD(X)
\end{array}$$

işlemleri verilsin.

V_1). *$(Der(A), +)$ bir Abelyan gruptur.*

***V*$_2$*).** Her $a \in A$ için*

$$\begin{aligned}(k \cdot (D + D'))(a) &= k((D + D')(a)) \\ &= k(D(a) + D'(a)) \\ &= kD(a) + kD'(a) \\ &= (k \cdot D)(a) + (k \cdot D')(a) \\ &= (k \cdot D + k \cdot D')(a)\end{aligned}$$

ve buradan

$$k \cdot (D + D') = k \cdot D + k \cdot D'$$

sonucu elde edilir.

***V*$_3$*).** Her $a \in A$ için*

$$\begin{aligned}((k + k') \cdot D)(a) &= (k + k')D(a) \\ &= kD(a) + k'D(a) \\ &= (k \cdot D)(a) + (k' \cdot D)(a) \\ &= (k \cdot D + k' \cdot D)(a)\end{aligned}$$

ve buradan

$$(k + k') \cdot D = k \cdot D + k' \cdot D$$

sonucu elde edilir.

***V*$_4$*).** Her $a \in A$ için*

$$\begin{aligned}((kk') \cdot D)(a) &= (kk')D(a) \\ &= k \cdot (k'D(a)) \\ &= k \cdot ((k' \cdot D)(a)) \\ &= (k \cdot (k' \cdot D))(a)\end{aligned}$$

ve buradan

$$(kk') \cdot D = k \cdot (k' \cdot D)$$

sonucu elde edilir.

***V*$_5$*).** Her $D \in Der(A)$, $1 \in \mathbb{K}$ için*

$$1 \cdot D = D$$

elde edilir. O halde $Der(A)$ bir $\mathbb{K}$-vektör uzayıdır.

Ayrıca; her $a \in A$ ve $D_1,\ D_2,\ D \in Der(A)$ için

$$\begin{aligned}
([\![D + D_1, D_2]\!])(a) &= ((D + D_1)T_r(D_2) - T_r(D_2)(D + D_1))(a) \\
&= ((D + D_1)T_r(D_2))(a) - (T_r(D_2)(D + D_1))(a) \\
&= ((DT_r(D_2) + (D_1T_r(D_2)))(a) - (T_r(D_2)D + T_r(D_2)D_1)(a)) \\
&= (DT_r(D_2)(a) + (D_1T_r(D_2))(a) - T_r(D_2)D(a) - T_r(D_2)D_1(a)) \\
&= (DT_r(D_2)(a) - T_r(D_2)D(a)) + (D_1T_r(D_2)(a) - T_r(D_2)D_1(a)) \\
&= (DT_r(D_2) - T_r(D_2)D)(a) + (D_1T_r(D_2) - T_r(D_2)D_1)(a) \\
&= [\![D, D_2]\!](a) + [\![D_1, D_2]\!](a),
\end{aligned}$$

bulunur ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
([\![D_1, D + D_2]\!])(a) &= (D_1T_r(D + D_2) - T_r(D + D_2)D_1)(a) \\
&= (D_1T_r(D + D_2))(a) - (T_r(D + D_2)D_1)(a) \\
&= ((D_1T_r(D + D_2)(a)) - (T_r(D + D_2)D_1(a))) \\
&= ((D_1T_r(D + D_2)(a)) - (T_r(D + D_2)(D_1(a)))) \ (\because D_1(a) \in A) \\
&= ((D_1T_r(D)(a) + (D_1T_r(D_2)(a)) \\
&\quad -(T_r(D)D_1(a) + T_r(D_2)(D_1(a))) \ (\because T_r \ \textit{A-modül homomorfizmi}) \\
&= (D_1T_r(D)(a) - T_r(D)D_1(a)) + (D_1T_r(D_2)(a) - T_r(D_2)D_1(a)) \\
&= (D_1T_r(D) - T_r(D)D_1)(a) + (D_1T_r(D_2) - T_r(D_2)D_1)(a) \\
&= [\![D_1, D]\!](a) + [\![D_1, D_2]\!](a)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ek olarak,

$$\begin{aligned}
&= (k \cdot [\![D_1, D_2]\!])(a) \\
&= k([\![D_1, D_2]\!](a)) \\
&= k((D_1T_r(D_2) - T_r(D_2)D_1)(a)) \\
&= k((D_1T_r(D_2))(a) - (T_r(D_2)D_1)(a)) \\
&= k(D_1T_r(D_2)(a) - k(T_r(D_2)D_1)(a) \\
&= kD_1(T_r(D_2)(a)) - kT_r(D_2)(D_1(a)) \\
&= kD_1(T_r(D_2)(a)) - (T_r(D_2)(kD_1(a)) \ \ (\because Der(A) \ \textit{üzerindeki işlem} \ \mathbb{K}\textit{-lineer}) \\
&= k \cdot D_1(T_r(D_2)(a)) - (T_r(D_2)(k \cdot D_1(a)) \\
&= (k \cdot D_1(T_r(D_2)) - T_r(D_2)(k \cdot D_1))(a) \\
&= [\![kD_1, D_2]\!](a) \\
&= [\![k \cdot D_1, D_2]\!](a)
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
&= (k \cdot [\![D_1, D_2]\!])(a) \\
&= k([\![D_1, D_2]\!](a)) \\
&= k((D_1T_r(D_2) - T_r(D_2)D_1)(a)) \\
&= k((D_1T_r(D_2))(a) - (T_r(D_2)D_1)(a)) \\
&= k(D_1T_r(D_2)(a) - k(T_r(D_2)D_1)(a) \\
&= kD_1(T_r(D_2)(a)) - kT_r(D_2)(D_1(a)) \\
&= D_1(kT_r(D_2)(a)) - (kT_r(D_2)(D_1(a)) \ \ (\because Der(A) \text{ üzerindeki işlem } \mathbb{K}\text{-lineer}) \\
&= D_1(T_r(kD_2)(a)) - (T_r(kD_2)(D_1(a)) \ (\because Der(A) \text{ üzerindeki } T_r \text{ işlemi } \mathbb{K}\text{-lineer}) \\
&= (D_1(T_r(k \cdot D_2)) - T_r(k \cdot D_2)(D_1))(a) \\
&= [\![D_1, kD_2]\!](a) \\
&= [\![D_1, k \cdot D_2]\!](a)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$k \cdot [\![D_1, D_2]\!] = [\![k \cdot D_1, D_2]\!] = [\![D_1, k \cdot D_2]\!]$$

olur. Yani $[\![,]\!]$ *braketi* $\mathbb{K}$*-bilineerdir. Ayrıca*

$$
\begin{aligned}
I_1 &= [\![D_1, [\![D_2, D_3]\!]]\!] \\
&= D_1T_r([\![D_2, D_3]\!]) - T_r([\![D_2, D_3]\!])D_1 \\
&= D_1T_r(D_2T_r(D_3) - T_r(D_3)D_2) - T_r(D_2T_r(D_3) - T_r(D_3)D_2)D_1 \\
&= D_1T_r(D_2T_r(D_3)) - D_1T_r(T_r(D_3)D_2) - T_r(D_2T_r(D_3))D_1 + T_r(T_r(D_3)D_2)D_1 \\
&= D_1T_r(D_2)T_r(D_3) - D_1T_r(D_3)T_r(D_2) - T_r(D_2)T_r(D_3)D_1 + T_r(D_3)T_r(D_2)D_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= [\![[\![D_1, D_2]\!], D_3]\!] \\
&= [\![D_1, D_2]\!]T_r(D_3) - T_r(D_3)[\![D_1, D_2]\!] \\
&= (D_1T_r(D_2) - T_r(D_2)D_1)T_r(D_3) - T_r(D_3)(D_1T_r(D_2) - T_r(D_2)D_1) \\
&= (D_1T_r(D_2))T_r(D_3) - (T_r(D_2)D_1)T_r(D_3) - T_r(D_3)(D_1T_r(D_2)) + T_r(D_3)(T_r(D_2)D_1) \\
&= D_1T_r(D_2)T_r(D_3) - T_r(D_2)D_1T_r(D_3) - T_r(D_3)D_1T_r(D_2) + T_r(D_3)T_r(D_2)D_1
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned}
I_3 &= [\![[\![D_1, D_3]\!], D_2]\!] \\
&= [\![D_1, D_3]\!]T_r(D_2) - T_r(D_2)[\![D_1, D_3]\!] \\
&= (D_1T_r(D_3) - T_r(D_3)D_1)T_r(D_2) - T_r(D_2)(D_1T_r(D_3) - T_r(D_3)D_1) \\
&= (D_1T_r(D_3))T_r(D_2) - (T_r(D_3)D_1)T_r(D_2) - T_r(D_2)(D_1T_r(D_3)) + T_r(D_2)(T_r(D_3)D_1) \\
&= D_1T_r(D_3)T_r(D_2) - T_r(D_3)D_1T_r(D_2) - T_r(D_2)D_1T_r(D_3) + T_r(D_2)T_r(D_3)D_1
\end{aligned}$$

olup, $I_1 = I_2 - I_3$ *eşitliği gereği,*

$$[\![D_1, [\![D_2, D_3]\!]]\!] = [\![[\![D_1, D_2]\!], D_3]\!] - [\![[\![D_1, D_3]\!], D_2]\!]$$

elde edilir ve dolayısıyla $(Der(A), T_r)$ *Leibniz* $\mathbb{K}$*-cebirdir.*
Ek olarak; $D, D_1, D_2 \in Der(A)$, $k, k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ *ve* $a \in A$ *için*

$$\begin{array}{rcl}
+ : Der(A) \times Der(A) & \longrightarrow & Der(A) \\
(D_1, D_2) & \longmapsto & (D_1 + D_2)(a) = D_1(a) + D_2(a)
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl}
\cdot : \mathbb{K} \times Der(A) & \longrightarrow & Der(A) \\
(k, D) & \longmapsto & (k \cdot D)(a) = kD(a)
\end{array}$$

işlemleri verilsin. $D_1, D_2, D'_1, D'_2 \in \mathrm{Der}(A)$ *ve* $a, b \in A$ *için*

$$\begin{aligned}
(D_1 + D_2)(ab) &= a(D_1 + D_2)(b) + (D_1 + D_2)(a)b \\
&= a(D_1(b) + D_2(b)) + (D_1(a) + D_2(a))b \\
&= aD_1(b) + aD_2(b) + D_1(a)b + D_2(a)b \\
&= aD_1(b) + D_1(a)b + aD_2(b) + D_2(a)b \\
&= D_1(ab) + D_2(ab)
\end{aligned}$$

ve $(D_1, D_2) = (D'_1, D'_2)$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}
(D_1 + D_2)(a) &= D_1(a) + D_2(a) \\
&= D'_1(a) + D'_2(a) \\
&= (D'_1 + D'_2)(a)
\end{aligned}$$

olacağından yukarıda tanımlanan $+$ *dönüşümü bir ikili işlemdir.*

M$_1$***).*** $(\mathrm{Der}(A), +)$ *bir Abelyan gruptur.*

***M$_2$). Her** $a,\ b \in A$ için*

$$\begin{aligned}(a\cdot(D_1+D_2))(b) &= a((D_1+D_2)(b))\\ &= a(D_1(b)+D_2(b))\\ &= aD_1(b)+aD_2(b)\\ &= (a\cdot D_1)(b)+(a\cdot D_2)(b)\\ &= (a\cdot D_1+a\cdot D_2)(b)\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$a\cdot(D_1+D_2)=a\cdot D_1+a\cdot D_2$$

dir.

***M$_3$). Her** $a,\ a',\ b \in A$ için*

$$\begin{aligned}((a+a')\cdot D)(b) &= (a+a')D(b)\\ &= aD(b)+a'D(b)\\ &= (a\cdot D)(b)+(a'\cdot D)(b)\\ &= (a\cdot D+a'\cdot D)(b)\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$(a+a')\cdot D=a\cdot D+a'\cdot D$$

sonucu elde edilir.

***M$_4$). Her** $a,\ a',\ b \in A$ için*

$$\begin{aligned}((aa')\cdot D)(b) &= (aa')D(b)\\ &= a\cdot(a'D(b))\\ &= a\cdot((a'\cdot D)(b))\\ &= (a\cdot(a'\cdot D))(b)\end{aligned}$$

olduğundan

$$(aa')\cdot D=a\cdot(a'\cdot D)$$

dir. Bu durumda Der(A) *bir* A*-modüldür.*
Bu modül yapısıyla

$$\begin{aligned}[\![aD_1,D_2]\!] &= aD_1T_r(D_2)-T_r(D_2)(aD_1)\\ &= aD_1T_r(D_2)-(aT_r(D_2)(D_1)+T_r(D_2)(a)(D_1))\\ &= aD_1T_r(D_2)-aT_r(D_2)(D_1)-T_r(D_2)(a)D_1\\ &= a[\![D_1,D_2]\!]-T_r(D_2)(a)D_1\end{aligned}$$

Leibniz-Rinehart olma ve

$$\begin{aligned} T_r[\![D_1, D_2]\!] &= T_r(D_1 T_r(D_2) - T_r(D_2) D_1) \\ &= T_r(D_1 T_r(D_2)) - T_r(T_r(D_2) D_1) \\ &= T_r(D_1) T_r(D_2) - T_r(D_2) T_r(D_1) \\ &= [\![T_r(D_1), T_r(D_2)]\!], \end{aligned}$$

A-modül morfizmi olma şartlarını sağladığından $(Der(A), T_r)$ Leibniz-Rinehart cebirdir.

Örnek 4.2 *$(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ Leibniz-Rinehart cebiri için $\alpha_r = 0$ olursa, tanım gereği $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ Leibniz-Rinehart cebiri üzerinde Leibniz $\mathbb{K}$-cebir yapısı yanında Leibniz-Rinehart cebir şartı*

$$[\![aX, Y]\!] = a[\![X, Y]\!] - \alpha_r(Y)(a)X = a[\![X, Y]\!] - 0(Y)(a)X = a[\![X, Y]\!]$$

olacağından $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ Leibniz-Rinehart cebiri Leibniz A-cebir olur.

Örnek 4.3 *$(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ Leibniz-Rinehart cebiri için $A = \mathbb{K}$ olursa, $Der(A) = 0$ olur ve tanım gereği $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ Leibniz-Rinehart cebiri sadece Leibniz cebir olur.*

Örnek 4.4 *Her Lie-Rinehart cebir (Huebschmann,1990) de bir Leibniz-Rinehart cebirdir. Gerçekten $(\mathcal{L}, \alpha)$ Lie-Rinehart cebirinden $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ Leibniz-Rinehart cebirine ankor $(\alpha_r = \alpha)$ düşünülerek $inc. : \mathcal{L}(A) \longrightarrow \mathfrak{L}R(A)$ içerme funktoru ile geçilir; Leibniz-Rinehart cebirinden ise $\widetilde{\alpha} : \mathfrak{L}_{Lie} \longrightarrow Der(A)$ ankor dönüşümüyle $\widetilde{\alpha}(\overline{X}) = -\alpha_r(X)$ olacak şekilde ve$\mathfrak{L}^{\mathrm{ann}} = \langle\{[\![X, X]\!] : X \in \mathfrak{L}\}\rangle$ olmak üzere $\mathfrak{L}_{Lie} = \mathfrak{L}/\mathfrak{L}^{ann}$ sol eşlenik Lie'leştirme funktoru ile verildi.*

Örnek 4.5 *$\mathbb{K}$ bir cisim olmak üzere $a, b, c \in P$ için P (Casas vd.,2014) de deki gibi $\mathbb{K}$ üzerinde*

$$[\![a \cdot b, c]\!] = a \cdot [\![b, c]\!] + [\![a, c]\!] \cdot b$$

özdeşliğini sağlayan bir komutatif olmayan bir sağ Poisson cebiri olsun. $p \in P$ için ankoru;

$$\begin{aligned} \alpha_r : P &\longrightarrow Der(P) \\ p &\longmapsto -[\![-, p]\!] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa (P, α_r) bir Leibniz-Rinehart cebirdir. Gerçekten; P bir sağ poisson cebiri oldugundan tanım gereği P bir Leibniz $\mathbb{K}$-cebirdir. Ayrıca

$$[\![a \cdot b, c]\!] = a \cdot [\![b, c]\!] + [\![a, c]\!] \cdot b$$

sağ poisson özdeşliği sağlanacağından

$$\begin{aligned}
[\![a \cdot b, c]\!] &= a \cdot [\![b, c]\!] + [\![a, c]\!] \cdot b \\
&= a \cdot [\![b, c]\!] - (-[\![a, c]\!]) \cdot b \\
&= a \cdot [\![b, c]\!] - (\alpha_r(c)(a)) \cdot b \\
&= a \cdot [\![b, c]\!] - \alpha_r(c)(a) \cdot b,
\end{aligned}$$

elde edilir yani, (P, α_r) *bir Leibniz-Rinehart cebirdir.*

4.2 Leibniz-Rinehart cebir etkisi

Tanım 4.3 $\mathfrak{L}$ *bir Leibniz-Rinehart cebir ve* R *bir Leibniz* A*-cebir olsun.* R *üzerinde* $\mathfrak{L}$ *nin etkisi tüm,* $X, Y \in \mathfrak{L}$ *,* $a \in A$ *,* $r, r_1, r_2 \in R$ *için,*

1a-) $[\![X, [\![Y, r_2]\!]]\!] = [\![[\![X, Y]\!], r_2]\!] - [\![[\![X, r_2]\!], Y]\!]$

1b-) $[\![X, [\![r_2, Y]\!]]\!] = [\![[\![X, r_2]\!], Y]\!] - [\![[\![X, Y]\!], r_2]\!]$

1c-) $[\![r_2, [\![X, Y]\!]]\!] = [\![[\![r_2, X]\!], Y]\!] - [\![[\![r_2, Y]\!], X]\!]$

1d-) $[\![X, [\![r_1, r_2]\!]]\!] = [\![[\![X, r_1]\!], r_2]\!] - [\![[\![X, r_2]\!], r_1]\!]$

1e-) $[\![r_1, [\![X, r_2]\!]]\!] = [\![[\![r_1, X]\!], r_2]\!] - [\![[\![r_1, r_2]\!], X]\!]$

1f-) $[\![r_1, [\![r_2, X]\!]]\!] = [\![[\![r_1, r_2]\!], X]\!] - [\![[\![r_1, X]\!], r_2]\!]$

2-) $[\![aX, r]\!] = a[\![X, r]\!]$

3-) $[\![ar, X]\!] = a[\![r, X]\!] - \alpha_r(X)(a)r$

şartlarını sağlayan

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{L} \otimes R & \longrightarrow & R & \qquad & R \otimes \mathfrak{L} & \longrightarrow & R \\
(X, r) & \longmapsto & [\![X, r]\!] & & (r, X) & \mapsto & [\![r, X]\!]
\end{array}$$

iki $\mathbb{K}$*-bilineer dönüşümdür.*

$\mathfrak{L}$ bir Leibniz-Rinehart cebir ve R de üzerindeki $\mathfrak{L}$ etkisiyle bir abelyen Leibniz A-cebir (yani aşikar braket ile Leibniz cebiri) olsun. O zaman R ye $\mathfrak{L}$ nin bir reprezantasyonu denir. Bu tez boyunca $\mathfrak{L}$ üzerindeki Leibniz-Rinehart reprezantasyonların kategorisi $\mathcal{REP}_{(\mathfrak{L},A)}$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.4 *$(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ bir Leibniz-Rinehart cebir ve R de $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ üzerinde bir reprezantasyon olsun. Herhangi bir $(\mathfrak{L}', \alpha_r')$ Leibniz-Rinehart cebiri, i A-lineer dönüşümü ve π Leibniz-Rinehart homomorfizmi için,*

$$0 \longrightarrow R \stackrel{i}{\longrightarrow} \mathfrak{L}' \stackrel{\pi}{\longrightarrow} \mathfrak{L} \longrightarrow 0$$

dizisi bir tam dizi ise bu diziye $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ nin R ile bir abelyan genişlemesi denir. Burada her $r, r' \in R,\ X' \in \mathfrak{L}'$ için;

$$[\![i(r), i(r')]\!] = 0,$$

$$[\![X', i(r)]\!] = [\![\pi(X'), r]\!],$$

$$[\![i(r), X']\!] = [\![r, \pi(X')]\!].$$

eşitlikleri sağlanır.
Ayrıca eğer burada π A-lineer kesite (section) sahipse, bu abelyan genişlemeye A-split denir.

4.2.1 Leibniz-Rinehart cebir yarı-direkt çarpım

$\mathfrak{L}$ bir Leibniz-Rinehart cebir ve R de üzerinde $\mathfrak{L}$ nin etkisi olan Leibniz A-cebir olsun. Tüm $r, r' \in R, X, X' \in \mathfrak{L}$ ve $a \in A$ için,

$$a(r, X) = (ar, aX)$$

işlemi ve

$$[\![(r, X), (r', X')]\!] = ([\![r, r']\!] + [\![X, r']\!] + [\![r, X']\!], [\![X, X']\!])$$

braketi ile birlikte $R \oplus \mathfrak{L}$ kümesi ele alınsın. $R \oplus \mathfrak{L}$ nin:

$$\widetilde{\alpha_r} : R \oplus \mathfrak{L} \longrightarrow Der(A), \qquad \widetilde{\alpha_r}(r', X') = \alpha_r(X')$$

anchor dönüşümleriyle birlikte bir Leibniz-Rinehart cebir olduğunu gösterilecektir. Bunun için;

a). $R \oplus \mathfrak{L}$ nin bir $\mathbb{K}$-vektör uzayı olduğu,

b).

$$[\![(r, X), [\![(r', X'), (r'', X'')]\!]]\!] = [\![[\![(r, X), (r', X')]\!], (r'', X'')]\!] - [\![[\![(r, X), (r'', X'')]\!], (r', X')]\!],$$

şeklinde Leibniz şartının sağlandığı ve

c). Yukarıda tanımlanan $[\![\ ,\ ]\!]$ Leibniz braketinin $\mathbb{K}$-bilineer olduğunun gösterilmesi gerekmektedir.

Bu işlemler aşağıda adım adım gösterilecektir.

a). (r, X), (r', X'), $(r'', X'') \in R \oplus \mathfrak{L}$ ve $k, k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ olmak üzere

$$\begin{array}{cclcl} + & : & (R \oplus \mathfrak{L}) \times (R \oplus \mathfrak{L}) & \longrightarrow & R \oplus \mathfrak{L} \\ & & ((r, X), (r', X')) & \longmapsto & ((r, X) + (r', X')) = ((r + r'), (X + X')) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{cclcl} \cdot & : & \mathbb{K} \times (R \oplus \mathfrak{L}) & \longrightarrow & (R \oplus \mathfrak{L}) \\ & & (k, (r, X)) & \longmapsto & (k \cdot (r, X))(X) = k(r, X) = (kr, kX) \end{array}$$

şeklinde $+$ ve $\cdot$ işlemleri tanımlansın.

V$_1$). $((R \oplus \mathfrak{L}), +)$ bir Abelyan gruptur,

V$_2$).

$$\begin{aligned} (k \cdot ((r, X) + (r', X')) &= k((r, X) + (r', X')) \\ &= k(r, X) + k(r', X') \\ &= (k \cdot (r, X)) + (k \cdot (r', X')) \\ &= k \cdot (r, X) + k \cdot (r', X') \end{aligned}$$

ve buradan

$$k \cdot ((r, X) + (r', X')) = k \cdot (r, X) + k \cdot (r', X')$$

elde edilir,

V$_3$).

$$\begin{aligned} ((k_1 + k_2) \cdot (r, X)) &= (k_1 + k_2)(r, X) \\ &= k_1(r, X) + k_2(r, X) \\ &= (k_1 \cdot (r, X)) + (k_2 \cdot (r, X)) \\ &= (k_1 \cdot (r, X) + k_2 \cdot (r, X)) \end{aligned}$$

ve buradan

$$(k_1 + k_2) \cdot (r, X) = k_1 \cdot (r, X) + k_2 \cdot (r, X)$$

elde edilir,

V$_4$).

$$\begin{aligned} ((k_1 k_2) \cdot (r, X)) &= (k_1 k_2)(r, X) \\ &= k_1 \cdot (k_2(r, X)) \\ &= k_1 \cdot ((k_2 \cdot (r, X))) \\ &= (k_1 \cdot (k_2 \cdot (r, X))) \end{aligned}$$

ve buradan

$$(k_1 k_2) \cdot (r, X) = k_1 \cdot (k_2 \cdot (r, X))$$

elde edilir. Ayrıca;

V$_5$). Her $(r,X)\in R\oplus\mathfrak{L}$, $1\in\mathbb{K}$ için

$$1\cdot(r,X)=(r,X)$$

olur ki bu $(R\oplus\mathfrak{L})$ nın bir $\mathbb{K}$-vektör uzayı olduğu anlamına gelir.

b).

$$\begin{aligned}
J_1 &= [\![(r,X),[\![(r',X'),(r'',X'')]\!]]\!] \\
&= [\![(r,X),([\![r',r'']\!]+[\![X',r'']\!]+[\![r',X'']\!],[\![X',X'']\!])]\!] \\
&= \Big([\![r,([\![r',r'']\!]+[\![X',r'']\!]+[\![r',X'']\!])]\!]+[\![X,([\![r',r'']\!]+[\![X',r'']\!]+[\![r',X'']\!])]\!] \\
&\qquad +[\![r,[\![X',X'']\!]]\!],[\![X,[\![X',X'']\!]]\!]\Big) \\
&= \Big([\![r,[\![r',r'']\!]]\!]+[\![r,[\![X',r'']\!]]\!]+[\![r,[\![r',X'']\!]]\!]+[\![X,[\![r',r'']\!]]\!]+[\![X,[\![X',r'']\!]]\!] \\
&\qquad +[\![X,[\![r',X'']\!]]\!]+[\![r,[\![X',X'']\!]]\!],[\![X,[\![X',X'']\!]]\!]\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= [\![[\![(r,X),(r',X')]\!],(r'',X'')]\!] \\
&= \big[\!\!\big[\big([\![r,r']\!]+[\![X,r']\!]+[\![r,X']\!],[\![X,X']\!]\big),(r'',X'')\big]\!\!\big] \\
&= \big(\big[\!\!\big[([\![r,r']\!]+[\![X,r']\!]+[\![r,X']\!]),r''\big]\!\!\big]+\big[\!\!\big[[\![X,X']\!],r''\big]\!\!\big] \\
&\quad +\big[\!\!\big[([\![r,r']\!]+[\![X,r']\!]+[\![r,X']\!]),X''\big]\!\!\big],\big[\!\!\big[[\![X,X']\!],X''\big]\!\!\big]\big) \\
&= \big(\big[\!\!\big[[\![r,r']\!],r''\big]\!\!\big]+\big[\!\!\big[[\![X,r']\!],r''\big]\!\!\big]+\big[\!\!\big[[\![r,X']\!],r''\big]\!\!\big]+\big[\!\!\big[[\![X,X']\!]r''\big]\!\!\big] \\
&\quad +\big[\!\!\big[[\![r,r']\!],X''\big]\!\!\big]+\big[\!\!\big[[\![X,r']\!],X''\big]\!\!\big]+\big[\!\!\big[[\![r,X']\!],X''\big]\!\!\big],\big[\!\!\big[[\![X,X']\!],X''\big]\!\!\big]\big)
\end{aligned}$$

ve son olarak:

$$\begin{aligned}
J_3 &= \big[\!\!\big[[\![(r,X),(r'',X'')]\!],(r',X')\big]\!\!\big] \\
&= \big[\!\!\big[\big([\![r,r'']\!]+[\![X,r'']\!]+[\![r,X'']\!],[\![X,X'']\!]\big),(r',X')\big]\!\!\big] \\
&= \big(\big[\!\!\big[([\![r,r'']\!]+[\![X,r'']\!]+[\![r,X'']\!],r'\big]\!\!\big]+\big[\!\!\big[[\![X,X'']\!],r'\big]\!\!\big] \\
&\quad +\big[\!\!\big[([\![r,r'']\!]+[\![X,r'']\!]+[\![r,X'']\!]),X'\big]\!\!\big],\big[\!\!\big[[\![X,X'']\!],X'\big]\!\!\big]\big) \\
&= \big(\big[\!\!\big[[\![r,r'']\!],r'\big]\!\!\big]+\big[\!\!\big[[\![X,r'']\!],r'\big]\!\!\big]+\big[\!\!\big[[\![r,X'']\!],r'\big]\!\!\big]+\big[\!\!\big[[\![X,X'']\!],r'\big]\!\!\big] \\
&\quad +\big[\!\!\big[[\![r,r'']\!],X'\big]\!\!\big]+\big[\!\!\big[[\![X,r'']\!],X'\big]\!\!\big]+[\![\big[\!\!\big[r,X'']\!],X'\big]\!\!\big],\big[\!\!\big[[\![X,X'']\!]X'\big]\!\!\big]\big)
\end{aligned}$$

olup $J_1=J_2-J_3$ eşitliğinden istenen

$$\big[\!\!\big[(r,X),[\![(r',X'),(r'',X'')]\!]\big]\!\!\big]=\big[\!\!\big[[\![(r,X),(r',X')]\!],(r'',X'')\big]\!\!\big]-\big[\!\!\big[[\![(r,X),(r'',X'')]\!],(r',X')\big]\!\!\big]$$

sonucu elde edilir. Ayrıca; her $(r, X), (r', X'), (r'', X'') \in R \oplus \mathfrak{L}$ için

$$\begin{aligned}
& [\![(r, X) + (r', X'), (r'', X'')]\!] \\
= \;& ([\![((r + r'), (X + X')), (r'', X'')]\!]) \\
= \;& ([\![(r + r'), r'']\!] + [\![(X + X'), r'']\!] + [\![(r + r'), X'']\!], [\![(X + X'), X'']\!]) \\
= \;& ([\![r, r'']\!] + [\![r', r'']\!] + [\![X, r'']\!] + [\![X', r'']\!] + [\![r, X'']\!] + [\![r', X'']\!], [\![X, X'']\!] + [\![X', X'']\!]) \\
= \;& ([\![r, r'']\!] + [\![X, r'']\!] + [\![r, X'']\!], [\![X, X'']\!]) \\
& +([\![r', r'']\!] + [\![X', r'']\!] + [\![r', X'']\!], [\![X', X'']\!]) \\
= \;& [\![(r, X), (r', X')]\!] + [\![(r', X'), (r'', X'')]\!],
\end{aligned}$$

benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
& [\![(r, X), (r', X') + (r'', X'')]\!] \\
= \;& ([\![(r, X), ((r' + r''), (X' + X''))]\!]) \\
= \;& ([\![r, (r' + r'')]\!] + [\![X, (r' + r'')]\!] + [\![r, (X' + X'')]\!], [\![X, (X' + X'')]\!]) \\
= \;& ([\![r, r']\!] + [\![r, r'']\!] + [\![X, r']\!] + [\![X, r'']\!] + [\![r, X']\!] + [\![r, X'']\!], [\![X, X']\!] + [\![X, X'']\!]) \\
= \;& ([\![r, r']\!] + [\![X, r']\!] + [\![r, X']\!], [\![X, X']\!]) \\
& +([\![r, r'']\!] + [\![X, r'']\!] + [\![r, X'']\!], [\![X, X'']\!]) \\
= \;& [\![(r, X), (r', X')]\!] + [\![(r, X), (r'', X'')]\!]
\end{aligned}$$

elde edilir. Ek olarak,

$$\begin{aligned}
& (k \cdot [\![(r, X), (r', X')]\!]) \\
= \;& k([\![(r, X), (r', X')]\!]) \\
= \;& k([\![r, r']\!] + [\![X, r']\!] + [\![r, X']\!], [\![X, X']\!]) \\
= \;& (k([\![r, r']\!] + [\![X, r']\!] + [\![r, X']\!]), k([\![X, X']\!])) \\
= \;& (k([\![r, r']\!]) + k([\![X, r']\!]) + k([\![r, X']\!]), k([\![X, X']\!])) \\
= \;& (k \cdot [\![r, r']\!] + k \cdot [\![X, r']\!] + k \cdot [\![r, X']\!], k \cdot [\![X, X']\!]) \\
= \;& ([\![k \cdot r, r']\!] + [\![k \cdot X, r']\!] + [\![k \cdot r, X']\!], [\![k \cdot X, X']\!]) \; (\because X \text{ ve } R \text{ üzerindeki braket } \mathbb{K}\text{-bilineer}) \\
= \;& ([\![kr, r']\!] + [\![kX, r']\!] + [\![kr, X']\!], [\![kX, X']\!]) \\
= \;& [\![(kr, kX), (r', X')]\!] \\
= \;& [\![k(r, X), (r', X')]\!] \\
= \;& [\![k \cdot (r, X), (r', X')]\!]
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
& (k \cdot [\![(r,X),(r',X')]\!]) \\
= \;& k([\![(r,X),(r',X')]\!]) \\
= \;& k([\![r,r']\!] + [\![X,r']\!] + [\![r,X']\!], [\![X,X']\!]) \\
= \;& (k([\![r,r']\!] + [\![X,r']\!] + [\![r,X']\!]), k([\![X,X']\!])) \\
= \;& (k([\![r,r']\!]) + k([\![X,r']\!]) + k([\![r,X']\!]), k([\![X,X']\!])) \\
= \;& (k \cdot [\![r,r']\!] + k \cdot [\![X,r']\!] + k \cdot [\![r,X']\!], k \cdot [\![X,X']\!]) \\
= \;& ([\![r,k \cdot r']\!] + [\![X,k \cdot r']\!] + [\![r,k \cdot X']\!], [\![X,k \cdot X']\!]) \; (\because \mathfrak{L} \text{ ve } R \text{ üzerindeki braket } \mathbb{K}\text{-bilineer}) \\
= \;& ([\![r,kr']\!] + [\![X,kr']\!] + [\![r,kX']\!], [\![X,kX']\!]) \\
= \;& [\![(r,X),(kr',kX')]\!] \\
= \;& [\![(r,X),k(r',X')]\!] \\
= \;& [\![(r,X),k \cdot (r',X')]\!]
\end{aligned}
$$

olacağından

$$k \cdot [\![(r,X),(r',X')]\!] = [\![k \cdot (r,X),(r',X')]\!] = [\![(r,X),k \cdot (r',X')]\!]$$

eşitlikleri elde edilir. Buradanda $[\![\;,\;]\!]$ braketi $\mathbb{K}$-bilineerdir.

Ek olarak: $(r,X),(r',X') \in (R \oplus \mathfrak{L})$, $k, k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ için

$$
\begin{array}{rcl}
+ : (R \oplus \mathfrak{L}) \times (R \oplus \mathfrak{L}) & \longrightarrow & (R \oplus \mathfrak{L}) \\
((r,X),(r',X')) & \longmapsto & ((r,X) + (r',X')) = (r + r', X + X')
\end{array}
$$

ve

$$
\begin{array}{rcl}
\cdot : \mathbb{K} \times (R \oplus \mathfrak{L}) & \longrightarrow & (R \oplus \mathfrak{L}) \\
(k,(r,X)) & \longmapsto & (k \cdot (r,X)) = k(r,X) = (kr,kX)
\end{array}
$$

işlemleri verilsin. $(r,X),(r',X') \in (R \times \mathfrak{L})$, ve $a, b \in A$ için

M$_1$). $((R \oplus \mathfrak{L}), +)$ bir Abelyan gruptur.

M$_2$).

$$
\begin{aligned}
(a \cdot ((r,X) + (r',X'))) &= a(((r,X) + (r',X'))) \\
&= a((r + r', X + X')) \\
&= (a(r + r'), a(X + X')) \\
&= ((ar + ar'), (aX + aX')) \\
&= ((ar, aX), (ar', aX')) \\
&= (a(r,X) + a(r',X')) \\
&= (a \cdot (r,X) + a \cdot (r',X'))
\end{aligned}
$$

ve dolayısıyla

$$a \cdot ((r,X) + (r',X')) = a \cdot (r,X) + a \cdot (r',X')$$

eşitliği elde edilir.

M$_3$).

$$\begin{aligned} ((a+b)\cdot(r,X)) &= (a+b)(r,X) \\ &= a(r,X)+b(r,X) \\ &= a\cdot(r,X)+b\cdot(r,X) \end{aligned}$$

olduğundan

$$(a+b)\cdot(r,X) = a\cdot(r,X)+b\cdot(r,X)$$

dir.

M$_4$).

$$\begin{aligned} ((ab)\cdot(r,X)) &= (ab(r,X) \\ &= a\cdot(b(r,X)) \\ &= a\cdot(b\cdot(r,X)) \end{aligned}$$

elde edileceğinden

$$(ab)\cdot(r,X) = a\cdot(b\cdot(r,X))$$

dir. Bu durumda $(R\oplus\mathfrak{L})$ bir A-modüldür. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} [\![a(r,X),(r',X')]\!] &= [\![(ar,aX),(r',X')]\!] \\ &= ([\![ar,r']\!]+[\![aX,r']\!]+[\![ar,X']\!],[\![aX,X']\!]) \\ &= (a[\![r,r']\!]+a[\![X,r']\!]+a[\![r,X']\!]-\alpha_r(X')(a)r, a[\![X,X']\!]-\alpha_r(X')(a)X) \\ &= (a([\![r,r']\!]+[\![X,r']\!]+[\![r,X']\!])-\alpha_r(X')(a)r, a[\![X,X']\!]-\alpha_r(X')(a)X) \\ &= (a([\![r,r']\!]+[\![X,r']\!]+[\![r,X']\!],[\![X,X']\!])-(\alpha_r(X')(a)r,\alpha_r(X')(a)X) \\ &= a([\![(r,X),(r',X')]\!])-\alpha_r(X')(a)(r,X) \\ &= a([\![r,X]\!],[\![r',X']\!])-\widetilde{\alpha_r}(r',X')(a)(r,X) \end{aligned}$$

elde edilir.
Böylece elde edilen Leibniz-Rinehart cebire R ve $\mathfrak{L}$ nin yarı-direkt çarpımı denir ve $R\rtimes\mathfrak{L}$ ile ifade edilir.
Eğer buradaki R ile gösterilen A-Leibniz cebiri abelyan ise,

$$\begin{array}{rcl} i_R : R & \longrightarrow & R\rtimes\mathfrak{L} \\ r & \longmapsto & (r,0) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} i_{\mathfrak{L}} : \mathfrak{L} & \longrightarrow & R\rtimes\mathfrak{L} \\ X & \longmapsto & (0,X) \end{array}$$

kanonikal gömmeler ve

$$\begin{aligned} p_{\mathfrak{L}} : R\rtimes\mathfrak{L} &\longrightarrow \mathfrak{L} \\ (r,X) &\longmapsto X \end{aligned}$$

kanonikal projeksiyonu Leibniz-Rinehart homomorfizmidir. Gerçekten, $r, r' \in R$ için

$$\begin{aligned}
[\![i_R(r), i_R(r')]\!] &= [\![(r,0),(r',0)]\!] \\
&= ([\![r,r']\!] + [\![0,r']\!] + [\![r,0]\!], [\![0,0]\!]) \\
&= ([\![r,r']\!], [\![0,0]\!]) \\
&= ([\![r,r']\!], 0) \\
&= i_R([\![r,r']\!])
\end{aligned}$$

ve keyfi $X, X' \in \mathfrak{L}$ için

$$\begin{aligned}
[\![i_{\mathfrak{L}}(X), i_{\mathfrak{L}}(X')]\!] &= [\![(0,X),(0,X')]\!] \\
&= ([\![0,0]\!] + [\![X,0]\!] + [\![0,X']\!], [\![X,X']\!]) \\
&= ([\![0,0]\!], [\![X,X']\!]) \\
&= (0, [\![X,X']\!]) \\
&= i_{\mathfrak{L}}([\![X,X']\!])
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $(r,X),(r',X') \in R \rtimes \mathfrak{L}$ için

$$\begin{aligned}
p_{\mathfrak{L}}([\![(r,X),(r',X')]\!]) &= p_{\mathfrak{L}}([\![r,r']\!] + [\![X,r']\!] + [\![r,X']\!], [\![X,X']\!]) \\
&= ([\![X,X']\!]) \\
&= [\![p_{\mathfrak{L}}(r,X), p_{\mathfrak{L}}(r',X')]\!]
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla i_R, $i_{\mathfrak{L}}$ gömmeleri ve $p_{\mathfrak{L}}$ projeksiyonu Leibniz-Rinehart cebir homomorfizmidir. Dolayısıyla $i_{\mathfrak{L}} : \mathfrak{L} \longrightarrow R \rtimes \mathfrak{L}$ olmak üzere aşağıdaki tam diziyi split yapan

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i_R} R \rtimes \mathfrak{L} \xrightarrow{p_{\mathfrak{L}}} \mathfrak{L} \longrightarrow 0$$

abelyan genişlemesi elde edilir.

Tanım 4.5 $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ *bir Leibniz-Rinehart cebir ve* R *de* $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ *nin bir representasyonu olsun.* $a \in A$, X, $Y \in \mathfrak{L}$ *için;*

$$\delta(aX) = a\delta(X)$$

$$\delta([\![X,Y]\!]) = [\![\delta(X), Y]\!] + [\![X, \delta(Y)]\!],$$

olacak şekildeki $\delta : \mathfrak{L} \longrightarrow R$ $\mathbb{K}$*-lineer dönüşümüne* $\mathfrak{L}$ *den* R *ye bir derivasyon denir.*

$(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ Leibniz-Rinehart cebirinden R representasyonuna tüm derivasyonların kümesi $Der_A(\mathfrak{L}, R)$ ile ifade edilecektir.

Örnek 4.6 *(a)*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i_R} R \rtimes \mathfrak{L} \xrightarrow{p_{\mathfrak{L}}} \mathfrak{L} \longrightarrow 0$$

tam dizisindeki $p_R : R \rtimes \mathfrak{L} \to R, p_R(r, X) = r$ *dönüşümü bir derivasyondur. Buradaki representasyon yapısı* $(R \rtimes \mathfrak{L}, \widetilde{\alpha_r})$ *den* $p_{\mathfrak{L}}$ *boyunca* R *ye gelir.*

(b) $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ R *Leibniz* A *cebiri üzerinde etkisi olan bir Leibniz-Rinehart cebir olsun.* $X \in \mathfrak{L}, r \in R$ *için* $ad_r : \mathfrak{L} \to R, ad_r(X) = [\![X, r]\!]$ *dönüşümü bir derivasyondur.*

Teorem 4.1 $p_{\mathfrak{L}} \circ \sigma = id_{\mathfrak{L}}$ *olacak şekildeki* $\sigma : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L} \rtimes R$ *Leibniz-Rinehart homomorfizmleri ile* $Der_A(\mathfrak{L}, R)$ *nin elemanları arasında bir birebir eşleme vardır.*

İspat $p_{\mathfrak{L}} \circ \sigma = id_{\mathfrak{L}}$ *şeklinde bir* $\sigma : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L} \rtimes R$ *homomorfizmden* $\delta_\sigma : p_R \circ \sigma : \mathfrak{L} \longrightarrow R$ *derivasyonunu elde edilebilir. Diğer yandan* $\delta : \mathfrak{L} \longrightarrow R$ *bir derivasyon verildiğinde, keyfi bir* $X \in \mathfrak{L}$ *için* σ_δ *dönüşümü*

$$\begin{aligned} \sigma_\delta : & \mathfrak{L} \longrightarrow R \rtimes \mathfrak{L} \\ & X \longmapsto \sigma_\delta(X) = (\delta(X), X) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanarak Leibniz-Rinehart homomorfizmi elde edilir. $\sigma \mapsto \delta_\sigma$ *dönüşümü,* $\delta \mapsto \sigma_\delta$ *dönüşümünün tersidir. Buda ispatı tamamlar.*

4.2.2 Leibniz-Rinehart cebirler için özel bir örnek

$(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ bir Leibniz-Rinehart cebir, R bir Leibniz A-cebir olsun. $Bider(R)$ nin (Cigoli vd.,2013) de verilen

$$\overline{Bider_{\mathbb{K}}(R)} := \{(d, D) \in Bider_{\mathbb{K}}(R) | Dd' = DD',\ (d', D') \in Bider_{\mathbb{K}}(R)\}$$

şeklindeki alt cebiri ele alınsın. Örnegin $r \in Z(R)$ için $(ad_r, Ad_r) \in \overline{Bider_{\mathbb{K}}(R)}$ dir. Ayrıca $DO(A, \mathfrak{L}, R)$, $\varphi = (d, D) \in \overline{Bider_{\mathbb{K}}(R)}$ ve $X \in \mathfrak{L}$ olmak üzere, (φ, X) ikililerinin vektör uzayı olsun. $a \in A$, $r \in R$ için

$$\begin{aligned} D(ar) &= aD(r) \\ d(ar) &= ad(r) + \alpha_r(X)(a)r \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa yukarıdaki gibi tanımlanan $Bider_{\mathbb{K}}(R)$ nin alt kümesi ile birlikte $DO(A, \mathfrak{L}, R)$ Leibniz-Rinehart cebirdir. Bunun için; $((d, D), X), ((d', D'), X') \in DO(A, \mathfrak{L}, R)$ için braketi

$$\begin{aligned} [\![\ ,\ ]\!] : DO(A, \mathfrak{L}, R) \times DO(A, \mathfrak{L}, R) &\longrightarrow DO(A, \mathfrak{L}, R) \\ (((d, D), X), ((d', D'), X')) &\longmapsto [\![((d, D), X), ((d', D'), X')]\!] \\ &= ([\![(d, D), (d', D')]\!], [\![X, X']\!]) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlandığında $DO(A, \mathfrak{L}, R)$ bir Leibniz $\mathbb{K}$-cebir olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
& (dd' - d'd)\,(ar) \\
=& (dd')(ar) - d'd(ar) \\
=& (d(ad'\,(r) + \alpha_r(X')(a)r - d'(ad\,(r) - \alpha_r(X)(a)r)) \\
=& (d(ad'\,(r)) + d(\alpha_r(X')(a)r) - d'(ad\,(r)) - d'(\alpha_r(X)(a)r), \\
=& (ad(d'\,(r)) + \alpha_r(X)(a)d'\,(r) + \alpha_r(X')(a)d(r) + \alpha_r(X)\alpha_r(X')(a)r \\
& - ad'd\,(r) - \alpha_r(X')(a)d\,(r) - \alpha_r(X)(a)d'(r) - \alpha_r(X')(\alpha_r(X)(a))r), \\
=& (ad(d'\,(r)) + \alpha_r(X)(a)d'\,(r) + \alpha_r(X')(a)d(r) + \alpha_r(X)\alpha_r(X')(a)r \\
& - ad'd\,(r) - \alpha_r(X')(a)d\,(r) - \alpha_r(X)(a)d'(r) - \alpha_r(X')(\alpha_r(X)(a))r), \\
=& a(dd' - d'd)\,(r) + \alpha_r([\![X, X']\!])(a)r)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& (Dd' - d'D)\,(ar) \\
=& (Dd')\,(ar) - (d'D)\,(ar) \\
=& (D(ad'(r) - \alpha_r(X')(a)r) - d'(aD\,(r)) \\
=& (D(ad'(r)) - D(\alpha_r(X')(a)r) - (d'(aD\,(r)))) \\
=& aDd'(r) - \alpha_r(X')(a)D\,(r) - ad'(D\,(r)) + \alpha_r(X')(a)D\,(r) \\
=& aDd'(r) - ad'D\,(r) \\
=& a(Dd' - d'D)\,(r)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$[\![(d, D), (d', D')]\!](ar) = (a(dd' - d'd)\,(r) + \alpha_r([\![X, X']\!])(a)r, a(Dd' - d'D)\,(r))$$

elde edileceginden iyi tanımlıdır. Ayrıca her $(\varphi, X) = ((d, D), X)$, $(\varphi', X') = ((d', D'), X')$, $(\varphi'', X'') = ((d'', D''), X'') \in DO(A, \mathfrak{L}, R)$ için

a). $DO(A, \mathfrak{L}, R)$, $\mathbb{K}$-vektör uzayı olduğu,

b).

$[\![(\varphi, X), [\![(\varphi', X'), (\varphi'', X'')]\!]]\!] = [\![[\![(\varphi, X), (\varphi', X')]\!], (\varphi'', X'')]\!] - [\![[\![(\varphi, X), (\varphi'', X'')]\!], (\varphi', X')]\!]$,

şeklindeki Leibniz şartının sağlandığı ve

c). Yukarıda tanımlanan $[\![\ ,\ ]\!]$ Leibniz braketi $\mathbb{K}$-bilineer olduğu gösterilmelidir.

Bu özelliklerin adım adım ispatı aşağıda verilmiştir.

a). $((d,D),X),((d',D'),X'),((d'',D''),X'') \in DO(A,\mathfrak{L},R)$ ve $k,k_1,k_2 \in \mathbb{K}$ için, $+$ ve $\cdot$ işlemleri

$$\begin{array}{rcccl} + & : & DO(A,\mathfrak{L},R) \times DO(A,\mathfrak{L},R) & \longrightarrow & DO(A,\mathfrak{L},R) \\ & & ((d,D),X),((d',D'),X') & \longmapsto & ((d,D),X)+((d',D'),X') \\ & & & & =((d+d'),(D+D'),(X+X')) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcccl} \cdot & : & \mathbb{K} \times DO(A,\mathfrak{L},R) & \longrightarrow & DO(A,\mathfrak{L},R) \\ & & (k,((d,D),X)) & \longmapsto & (k\cdot((d,D),X)) = k((d,D),X) = ((kd,kD),kX) \end{array}$$

şeklinde tanımlansın.

V$_1$). $(DO(A,\mathfrak{L},R),+)$ bir değişmeli gruptur.

V$_2$).

$$\begin{aligned} k\cdot(((d,D),X)+((d',D'),X')) &= k(((d,D),X)+((d',D'),X')) \\ &= k((d,D),X)+k((d',D'),X') \\ &= k\cdot((d,D),X)+k\cdot((d',D'),X') \end{aligned}$$

elde edileceğinden

$$k\cdot(((d,D),X)+((d',D'),X')) = k\cdot((d,D),X)+k\cdot((d',D'),X')$$

olur.

V$_3$).

$$\begin{aligned} ((k_1+k_2)\cdot((d,D),X)) &= (k_1+k_2)((d,D),X) \\ &= k_1((d,D),X)+k_2((d,D),X) \\ &= k_1\cdot((d,D),X)+k_2\cdot((d,D),X) \end{aligned}$$

elde edileceğinden

$$(k_1+k_2)\cdot((d,D),X) = k_1\cdot((d,D),X)+k_2\cdot((d,D),X)$$

bulunur.

V$_4$).

$$\begin{aligned} ((k_1k_2)\cdot((d,D),X)) &= (k_1k_2)((d,D),X) \\ &= k_1\cdot(k_2((d,D),X)) \\ &= k_1\cdot(k_2\cdot((d,D),X)) \end{aligned}$$

olduğundan

$$(k_1k_2)\cdot((d,D),X) = k_1\cdot(k_2\cdot((d,D),X))$$

dir.

V$_5$). Her $((d,D),X) \in (DO(A,\mathfrak{L},R)$, $1 \in \mathbb{K}$ için

$$1 \cdot ((d,D),X) = ((d,D),X)$$

elde edilir. O halde $(DO(A,\mathfrak{L},R)$ bir $\mathbb{K}$-vektör uzayıdır.

b). $\varphi = (d,D)$, $\varphi' = (d',D')$ $\varphi'' = (d'',D'') \in Bider_{\mathbb{K}}(R)$, $X, X', X'' \in \mathfrak{L}$ için

$$\begin{aligned}
\Big[\!\!\Big[(\varphi,X),[\![(\varphi',X'),(\varphi'',X'')]\!]\Big]\!\!\Big] &= \Big[\!\!\Big[\big((d,D),X\big),\, [\![((d',D'),X'),((d'',D''),X'')]\!]\Big]\!\!\Big] \\
&= \Big[\!\!\Big[((d,D),X),\big((d'd''-d''d',D'd''-d''D'),[\![X',X'']\!]\big)\Big]\!\!\Big] \\
&= \Big[\!\!\Big[\big(d(d'd''-d''d')-(d'd''-d''d')d, D(d'd''-d''d')-(d'd''-d''d')D,[\![X,[\![X',X'']\!]]\!]\Big]\!\!\Big] \\
&= \Big[\!\!\Big[\big(dd'd''-dd''d'-d'd''d+d''d'd, Dd'd''-Dd''d'-d'd''D+d''d'D,[\![X,[\![X',X'']\!]]\!]\Big]\!\!\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big[\!\!\Big[[\![(\varphi,X),(\varphi',X')]\!],(\varphi'',X'')]\!]\Big]\!\!\Big] &= \Big[\!\!\Big[[\![\big((d,D),X\big),((d',D'),X')]\!],((d'',D''),X'')\Big]\!\!\Big] \\
&= \Big[\!\!\Big[,\big((dd'-d'd,Dd'-d'D),[\![X,X']\!]\big),((d'',D''),X'')\Big]\!\!\Big] \\
&= \Big[\!\!\Big[\big((dd'-d'd)d''-d''(dd'-d'd),(Dd'-d'D)d''-d''(Dd'-d'D),[\![X,X']\!],X'']\!]\Big]\!\!\Big] \\
&= \Big[\!\!\Big[\big(dd'd''-d'dd''-d''dd'+d''d'd, Dd'd''-d'Dd''-d''Dd'+d''d'D,[\![[\![X,X']\!],X'']\!]\Big]\!\!\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big[\!\!\Big[[\![(\varphi,X),(\varphi'',X'')]\!],(\varphi',X')]\!]\Big]\!\!\Big] &= \Big[\!\!\Big[[\![\big((d,D),X\big),((d'',D''),X'')]\!],((d',D'),X')\Big]\!\!\Big] \\
&= \Big[\!\!\Big[,\big((dd''-d''d,Dd''-d''D),[\![X,X'']\!]\big),((d',D'),X')\Big]\!\!\Big] \\
&= \Big[\!\!\Big[\big((dd''-d''d)d'-d'(dd''-d''d),(Dd''-d''D)d'-d'(Dd''-d''D),[\![X,X'']\!],X']\!]\Big]\!\!\Big] \\
&= \Big[\!\!\Big[\big(dd''d'-d''dd'-d'dd''+d'd''d, Dd''d'-d''Dd'-d'Dd''+d'd''D,[\![[\![X,X'']\!],X']\!]\Big]\!\!\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![((d,D),X),[\![((d',D'),X'),((d'',D''),X'')]\!]]\!] &= [\![[\![((d,D),X),((d',D'),X')]\!],((d'',D''),X'')]\!] \\
&\quad - [\![[\![((d,D),X),((d'',D''),X'')]\!],((d',D'),X')]\!]
\end{aligned}$$

Leibniz şartı sağlanır. Ayrıca,

c).

$$\begin{aligned}
& k\cdot [\![((d,D),X),((d',D'),X')]\!] \\
= \;& k[\![((d,D),X),((d',D'),X')]\!] \\
= \;& k((dd'-d'd,Dd'-D'd),[\![X,X']\!])) \\
= \;& (k(dd'-d'd,Dd'-D'd),k[\![X,X']\!]) \\
= \;& ((k(dd'-d'd),k(Dd'-D'd)),[\![kX,X']\!]) \text{ (} \because \mathfrak{L}\text{deki braket}\mathbb{K}\text{-bilineer)} \\
= \;& (kd(d')-kd'(d),kD(d')-kD'(d),[\![k\cdot X,X']\!]) \\
= \;& (kd(d')-d'(kd),kD(d')-D'(kd),[\![k\cdot X,X']\!]) \;(\because d,D\;\mathbb{K}-lineer) \\
= \;& (k\cdot d(d')-d'(k\cdot d),k\cdot D(d')-D'(k\cdot d),[\![k\cdot X,X']\!]) \\
= \;& [\![((k\cdot d,k\cdot D),k\cdot X),((d',D'),X')]\!] \\
= \;& [\![k\cdot((d,D),X),((d',D'),X')]\!]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& k\cdot [\![((d,D),X),((d',D'),X')]\!] \\
= \;& k[\![((d,D),X),((d',D'),X')]\!] \\
= \;& k((dd'-d'd,Dd'-D'd),[\![X,X']\!])) \\
= \;& (k(dd'-d'd,Dd'-D'd),k[\![X,X']\!]) \\
= \;& ((k(dd'-d'd),k(Dd'-D'd)),[\![X,kX']\!]) \text{ (} \because \mathfrak{L}\text{ deki braket }\mathbb{K}\text{-bilineer)} \\
= \;& (kd(d')-kd'(d),kD(d')-kD'(d),[\![X,k\cdot X']\!]) \\
= \;& (d(kd')-kd'(d),D(kd')-kD'(d),[\![X,k\cdot X']\!]) \;\; (\because d,D\;\;\mathbb{K}\text{-lineer}) \\
= \;& (d(k\cdot d')-k\cdot d'(d),D(k\cdot d')-k\cdot D'(d),[\![X,k\cdot X']\!]) \\
= \;& [\![((d,D),X),((k\cdot d',k\cdot D'),k\cdot X')]\!] \\
= \;& [\![((d,D),X),k\cdot((d',D'),X')]\!]
\end{aligned}$$

elde edileceğinden,

$$k\cdot[\![((d,D),X),((d',D'),X')]\!] = [\![k\cdot((d,D),X),((d',D'),X')]\!] = [\![((d,D),X),k\cdot((d',D'),X')]\!]$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
B_1 \;=\;& [\![((d,D),X)+((d',D'),X'),((d'',D''),X'')]\!] \\
=\;& [\![(((d+d'),(D+D')),(X+X')),((d'',D''),X'')]\!] \\
=\;& [\![([\![((d+d'),(D+D')),(d'',D'')]\!],[\![(X+X'),X'']\!]) \\
=\;& (((d+d')d''-d''(d+d'),(D+D')d''-D''(d+d')),[\![X+X',X'']\!]) \\
=\;& (((dd''+d'd'')-(d''d+d''d'),(Dd''+D'd'')-(D''d+D''d')),[\![X,X'']\!]+[\![X',X'']\!]) \\
=\;& (((dd''-d''d)+(d'd''-d''d'),(Dd''-D''d)+(D'd''-D''d')),[\![X,X'']\!]+[\![X',X'']\!]) \\
=\;& (((dd''-d''d,Dd''-D''d),[\![X,X'']\!])+((d'd''-d''d',D'd''-D''d'),[\![X',X'']\!]) \\
=\;& ([\![(d,D)(d'',D'')]\!],[\![X,X'']\!])+[\![(d',D'),(d'',D'')]\!],[\![X',X'']\!]) \\
=\;& [\![((d,D),X),((d'',D''),X'')]\!]+[\![((d',D'),X'),((d'',D''),X'')]\!]
\end{aligned}$$

bulunur ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
B_2 &= [\![((d,D),X),((d',D'),X')+((d'',D''),X'')]\!] \\
&= [\![((d,D),X),(((d'+d''),(D'+D'')),(X'+X''))]\!] \\
&= [\![([\![(d,D),((d'+d''),(D'+D''))]\!],[\![X,(X'+X'')]\!])\\
&= ((d(d'+d'')-(d'+d'')d,D(d'+d'')-(d'+d'')D),[\![X,X']\!]+[\![X,X'']\!]) \\
&= (((dd'+dd'')-(d'd+d''d),(Dd'+Dd'')-(d'D+d''D)),[\![X,X']\!]+[\![X,X'']\!]) \\
&= (((dd'-d'd)+(dd''-d''d),(Dd'-D'd)+(Dd''-D''d)),[\![X,X']\!]+[\![X,X'']\!]) \\
&= (((dd'-d'd,Dd'-D'd),[\![X,X']\!])+((dd''-d''d,Dd''-D''d),[\![X,X'']\!]) \\
&= ([\![(d,D)(d',D')]\!],[\![X,X']\!])+[\![(d,D),(d'',D'')]\!],[\![X,X'']\!]) \\
&= [\![((d,D),X),((d',D'),X')]\!]+[\![((d,D),X),((d'',D''),X'')]\!]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $[\![\ ,\ ]\!]$ braketi $\mathbb{K}$-bilineerdir.

Dolayısıyla $DO(A,\mathfrak{L},R)$ bir Leibniz $\mathbb{K}$-cebirdir.
Ayrıca, $Bider_{\mathbb{K}}(R)$ nin Leibniz $\mathbb{K}$-cebir olduğu daha önce gösterildiğinden, $\varphi=(d,D)\,,\varphi'=(d',D')\in\overline{Bider_{\mathbb{K}}(R)}$ ve braket

$$[\![\varphi,\varphi']\!]=[\![(d,D)\,,(d',D')]\!]=(dd'-d'd,Dd'-d'D)$$

şeklinde tanımlandığından $\varphi''=(d'',D'')\in\overline{Bider_{\mathbb{K}}(R)}$ için

$$\begin{aligned}
(Dd'-d'D)d'' &= (Dd')d''-(d'D)d'' \\
&= (Dd')D''-(d'D)D'' \\
&= (Dd'-d'D)D'',
\end{aligned}$$

sağlanacağından $\overline{Bider_{\mathbb{K}}(R)}$ alt kümesi $Bider_{\mathbb{K}}(R)$ cebirinin alt cebiri olduğu da gösterilebilir. Ek olarak
a). $DO(A,\mathfrak{L},R)$ nin A-modül olduğu ve

b). $DO(A,\mathfrak{L},R)$ nin Leibniz-Rinehart şartını sağladığı gösterilsin.
a). $((d,D),X),((d',D'),X'),((d'',D''),X'')\in DO(A,\mathfrak{L},R)$ $a\in A$ ve $k,k_1,k_2\in\mathbb{K}$ için,

$$\begin{aligned}
+\ :\ DO(A,\mathfrak{L},R)\times DO(A,\mathfrak{L},R) &\longrightarrow DO(A,\mathfrak{L},R) \\
((d,D),X),((d',D'),X') &\longmapsto ((d,D),X)+((d',D'),X') \\
&\qquad = ((d+d'),(D+D'),(X+X'))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\cdot\ :\ A\times DO(A,\mathfrak{L},R) &\longrightarrow DO(A,\mathfrak{L},R) \\
(a,((d,D),X)) &\longmapsto (a\cdot((d,D),X))=a((d,D),X)=((ad,aD),aX)
\end{aligned}$$

olacak şekilde $+$ ve $\cdot$ tanımlansın. İkinci işlemde $r \in R$ için, $(ad)(r) = a(d(r))$ ve $(aD)(r) = a(D(r))$dir; Ayrıca

$$\begin{aligned}((aD)\circ e)(r) &= a((D\circ e)(r))\\ &= a((D\circ E)(r))\end{aligned}$$

elde edileceğinden, $a \in A$, $(e,E) \in Bider_{\mathbb{K}}(R)$ ve $(d,D) \in \overline{Bider_{\mathbb{K}}(R)}$ için $(aD)\circ e = (aD)\circ E$, eşitliğinden tüm $a \in A$ ve $(d,D) \in \overline{Bider_{\mathbb{K}}(R)}$ için $(ad, aD) \in \overline{Bider_{\mathbb{K}}(R)}$ elde edileceğinden işlem iyi tanımlıdır.

M$_1$). $(DO(A,\mathfrak{L},R),+)$ bir Abelyan gruptur.

M$_2$).

$$\begin{aligned}a\cdot(((d,D),X)+((d',D'),X')) &= a(((d,D),X)+((d',D'),X'))\\ &= a((d,D),X)+a((d',D'),X')\\ &= a\cdot((d,D),X)+a\cdot((d',D'),X')\end{aligned}$$

elde edileceğinden

$$a\cdot(((d,D),X)+((d',D'),X')) = a\cdot((d,D),X)+a\cdot((d',D'),X')$$

olur.

M$_3$). $a_1, a_2 \in A$ için

$$\begin{aligned}((a_1+a_2)\cdot((d,D),X)) &= (a_1+a_2)((d,D),X)\\ &= a_1((d,D),X)+a_2((d,D),X)\\ &= a_1\cdot((d,D),X)+a_2\cdot((d,D),X)\end{aligned}$$

olduğundan

$$(a_1+a_2)\cdot((d,D),X) = a_1\cdot((d,D),X)+a_2\cdot((d,D),X)$$

bulunur.

M$_4$). $a_1, a_2 \in A$ için

$$\begin{aligned}((a_1a_2)\cdot((d,D),X)) &= (a_1a_2)((d,D),X)\\ &= a_1\cdot(a_2((d,D),X))\\ &= a_1\cdot(a_2\cdot((d,D),X))\end{aligned}$$

olduğundan

$$(a_1a_2)\cdot((d,D),X) = a_1\cdot(a_2\cdot((d,D),X))$$

dir. O halde $DO(A, \mathfrak{L}, R)$ bir A-modüldür.
Diğer yandan,

$$\begin{aligned}(bd)\,(ar) &= b(d\,(ar))\\ &= b(ad\,(r) + \alpha_r\,(X)\,(a)\,r)\\ &= (ba)d\,(r) + b\alpha_r\,(X)\,(a)\,r)\\ &= (ab)d\,(r) + \alpha_r\,(bX)\,(a)\,r)\\ &= a(bd)\,(r) + \alpha_r\,(bX)\,(a)\,r)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(bD)\,(ar) &= b(D\,(ar))\\ &= b(aD\,(r))\\ &= (ba)D\,(r)\\ &= (ab)D\,(r)\\ &= a(bD)\,(r)\end{aligned}$$

elde edileceğinden (bd, bD) bir biderivasyondur.
Ek olarak, benzer hesaplamalarla $\widetilde{\alpha_r}$ nin Leibniz cebir ve A-modül homomorfizmi olduğu gösterilmelidir. Buna göre,

$$\widetilde{\alpha}_r : DO\,(A, \mathfrak{L}, R) \xrightarrow{pr} \mathfrak{L} \xrightarrow{\alpha_r} Der\,(A)$$

şeklindeki dönüşüm ve $a \in A$, $((d, D), X)$, $((d', D'), X') \in DO\,(A, \mathfrak{L}, R)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_r[\![((d, D), X), ((d', D'), X')]\!] &= \widetilde{\alpha}_r([\![(d, D), ((d', D')]\!], [\![X, X']\!])\\ &= \widetilde{\alpha}_r((dd' - d'd, Dd' - d'D), [\![X, X']\!])\\ &= \alpha_r \circ pr((dd' - d'd, Dd' - d'D), [\![X, X']\!])\\ &= \alpha_r(pr((dd' - d'd, Dd' - d'D), [\![X, X']\!]))\\ &= \alpha_r([\![X, X']\!])\\ &= [\![\alpha_r(X), \alpha_r(X')]\!]\\ &= [\![\alpha_r(pr((d, D), X)), \alpha_r(pr((d', D'), X'))]\!]\\ &= [\![\alpha_r \circ pr((d, D), X), \alpha_r \circ pr((d', D'), X')]\!]\\ &= [\![\widetilde{\alpha}_r((d, D), X), \widetilde{\alpha}_r((d', D'), X')]\!]\end{aligned}$$

bulunur ve buradan

$$\widetilde{\alpha}_r[\![((d, D), X), ((d', D'), X')]\!] = [\![\widetilde{\alpha}_r((d, D), X), \widetilde{\alpha}_r((d', D'), X')]\!]$$

eşitliğinden $\widetilde{\alpha}_r$, Leibniz cebir homomorfizmidir; Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_r(a((d,D),X)) &= \widetilde{\alpha}_r(a(d,D),aX) \\
&= \alpha_r \circ pr(a(d,D),aX) \\
&= \alpha_r(pr(a(d,D),aX)) \\
&= \alpha_r(aX) \\
&= a\alpha_r(X) \\
&= a\alpha_r(pr((d,D),X)) \\
&= a(\alpha_r \circ pr((d,D),X)) \\
&= a(\widetilde{\alpha}_r((d,D),X)) \\
&= a\widetilde{\alpha}_r((d,D),X)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak, $a \in A$, $((d,D),X)$, $((d',D'),X') \in DO\,(A,\mathfrak{L},R)$ için

$$\begin{aligned}
I &= [\![a((d,D),X),((d',D'),X')]\!] \\
&= [\![((ad,aD),aX),((d',D'),X')]\!] \\
&= ([\![(ad,aD),(d',D')]\!],[\![aX,X']\!]) \\
&= ((ad(d')-d'(ad),aDd'-d'(aD)),a[\![X,X']\!]-\alpha_r(X')(a)X) \\
&= ((add'-d'(ad),aDd'-d'(aD)),a[\![X,X']\!]-\alpha_r(X')(a)X) \\
&= ((add'-ad'd-\alpha_r(X')(a)d,aDd'-ad'(D)-\alpha_r(X')(a)D),a[\![X,X']\!]-\alpha_r(X')(a)X) \\
&= ((a\,(dd'-d'd)-\alpha_r(X')(a)d,a(Dd'-d'D)-\alpha_r(X')(a)D),a[\![X,X']\!]-\alpha_r(X')(a)X) \\
&= a((dd'-d'd,Dd'-d'D),[\![X,X']\!])-((\alpha_r(X')(a)d,\alpha_r(X')(a)D),-\alpha_r(X')(a)X) \\
&= a([\![(d,D),(d',D')]\!],[\![X,X']\!])-(\alpha_r(X')(a)(d,D),\alpha_r(X')(a)X) \\
&= a[\![((d,D),X),((d',D'),X')]\!]-\alpha_r(X')(a)((d,D),X) \\
&= a[\![(d,D),X),(d',D'),X')]\!]-\widetilde{\alpha_r}((d',D'),X')(a)((d,D),X),
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
J &= [\![((d,D),X),a((d',D'),X')]\!] \\
&= [\![((d,D),X),((ad',aD'),aX')]\!] \\
&= ([\![(d,D),(ad',aD')]\!],[\![X,aX']\!]) \\
&= ((d(ad')-ad'd,D(ad')-ad'D),a[\![X,X']\!]) \\
&= ((D(ad')-ad'd,D(ad')-ad'D),a[\![X,X']\!]) \because (dd'=Dd') \\
&= ((aDd'-ad'd,aDd'-ad'D),a[\![X,X']\!]) \\
&= ((add'-ad'd,aDd'-ad'D),a[\![X,X']\!]) \because (dd'=Dd') \\
&= ((a\,(dd'-d'd),a(Dd'-d'D)),a[\![X,X']\!]) \\
&= a((dd'-d'd,Dd'-d'D),[\![X,X']\!]) \\
&= a([\![(d,D),(d',D')]\!],[\![X,X']\!]) \\
&= a[\![((d,D),X),((d',D'),X')]\!]
\end{aligned}
$$

olacağından

$$
\begin{aligned}
&[\![(\varphi,X),a(\varphi',X')]\!] = a[\![(\varphi,X),(\varphi',X')]\!], \\
&[\![a(\varphi,X),(\varphi',X')]\!] = a[\![(\varphi,X),(\varphi',X')]\!] - \widetilde{\alpha}_r\,(\varphi',X')\,(a)(\varphi,X),
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir ki buna göre $DO(A,\mathfrak{L},R)$ bir Leibniz-Rinehart cebir olur.

R $Ann(R)=0$ veya $[\![R,R]\!]=0$ olacak şekilde bir Leibniz cebir ve $(\mathfrak{L},\alpha_r)$ R üzerinde bir etkiye sahip olsun. Bu durumda $D^X(r)=[\![X,r]\!]$ ve $d^X(r)=-[\![r,X]\!]$ olmak üzere;

$$f:\mathfrak{L}\longrightarrow DO(A,\mathfrak{L},R)$$

$$f(X)=(\varphi^X,X)=((d^X,D^X),X)$$

dönüşümü

$$
\begin{tikzcd}
DO\,(A,\mathfrak{L},R) \arrow[r, "p"] & \mathfrak{L} \\
\mathfrak{L} \arrow[u, "f"] \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}
$$

diyagramını değişmeli yapan Leibniz-Rinehart cebir homomorfizmidir. Gerçekten $X,X'\in$

$\mathfrak{L}$ için

$$\begin{aligned} pf(X) &= p \circ f(X) \\ &= p(f(X)) \\ &= p((d^X, D^X), X) \\ &= p((-\llbracket r, X], \llbracket X, r\rrbracket), X) \\ &= X \\ &= id_{\mathfrak{L}} \end{aligned}$$

oldugundan değişmelidir ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} f(\llbracket X, X'\rrbracket) &= ((d^{\llbracket X,X'\rrbracket}, D^{\llbracket X,X'\rrbracket}), \llbracket X, X'\rrbracket) \\ &= ((-\llbracket r, \llbracket X, X'\rrbracket\rrbracket, \llbracket\llbracket X, X'\rrbracket, r\rrbracket), \llbracket X, X'\rrbracket) \\ &= (\llbracket -\llbracket r, X\rrbracket, -\llbracket r, X'\rrbracket\rrbracket, \llbracket\llbracket X, r\rrbracket, \llbracket X', r\rrbracket\rrbracket, \llbracket X, X'\rrbracket) \\ &= (\llbracket(-\llbracket r, X\rrbracket, \llbracket X, r\rrbracket), (-\llbracket r, X'\rrbracket, \llbracket X', r\rrbracket)\rrbracket, \llbracket X, X'\rrbracket) \\ &= \llbracket((-\llbracket r, X\rrbracket, \llbracket X, r\rrbracket), X), ((-\llbracket r, X'\rrbracket, \llbracket X', r\rrbracket), X')\rrbracket \\ &= \llbracket((d^X, D^X), X), ((d^{X'}, D^{X'}), X')\rrbracket \\ &= \llbracket f(X), f(X')\rrbracket \end{aligned}$$

olduğundan Leibniz-Rinehart cebir homomorfizmidir.
Tersine,

$$\begin{tikzcd} DO\,(A, \mathfrak{L}, R) \arrow[r, "p"] & \mathfrak{L} \\ \mathfrak{L} \arrow[u, "f"] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan herhangi bir

$$\begin{aligned} f : \mathfrak{L} &\longrightarrow DO\,(A, \mathfrak{L}, R) \\ X &\longmapsto (\varphi^X, X) = ((d^X, D^X), X) \end{aligned}$$

Leibniz-Rinehart cebir homomorfizmi $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ den R üzerine $\llbracket X, r\rrbracket := D^X\,(r)$ ve $\llbracket r, -X\rrbracket := d^X\,(r)$ şeklinde tanımlanan bir etki verir. Yukarıdaki eşitliklerden $a \in A$, $r \in R$, $X \in \mathfrak{L}$ için

$$\begin{aligned} \llbracket X, ar\rrbracket &= D^X\,(ar) \\ &= aD^X\,(r) \\ &= a\llbracket X, r\rrbracket \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\![ar, X]\!] &= -d^X\,(ar) \\
&= -\left(ad^X\,(r) - \alpha_r(X)\,(a)\,r\right) \\
&= -ad^X\,(r) - \alpha_r(X)\,(a)\,r \\
&= a[\![r, X]\!] - \alpha_r(X)\,(a)\,r.
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
(d^{aX}, D^{aX}) &= f(aX) \\
&= af(X) \\
&= a(d^X, D^X) \\
&= (ad^X, aD^X)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
[\![r, aX]\!] &= -d^{aX}(r) \\
&= -ad^X(r) \\
&= a[\![r, X]\!]
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
[\![aX, r]\!] &= D^{aX}(r) \\
&= aD^X(r) \\
&= a[\![X, r]\!]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.7 *R nın çözülebilir radikali $R/Leibn(R)$ bir Lie cebiri olacak şekildeki $Leibn(R)$ minimal idealine eşit ise R Leibniz cebirine yarıbasit Leibniz cebiri denir (Demir vd.,2005[Tanım 5.2]). (Demir vd.,2005[Önerme 5.7]) den herhangi bir Leibniz A-cebiri $[\![L, L]\!] = L$ özelliğini sağlar.*
$L = span\,\{h, e, f, x_0, x_1\}$ ile gerilen ve çarpımı

$$\begin{array}{lllll}
[\![h, e]\!] = 2e, & [\![h, f]\!] = -2f, & [\![e, f]\!] = h, & [\![e, h]\!] = -2e, & [\![f, h]\!] = 2f, \\
[\![f, e]\!] = -h, & [\![h, x_0]\!] = x_0, & [\![f, x_0]\!] = x_1, & [\![h, x_1]\!] = -x_1, & [\![e, x_1]\!] = -x_0,
\end{array}$$

şeklinde verilen 5-boyutlu bir Leibniz cebiridir; Bu şekilde oluşturulan (Demir vd.,2005[Örnek 5.7]), L bir yarıbasit Leibniz A-cebirdir (bu örnekte $A = \mathbb{K}$ dır). Ayrıca L yukarıdaki $Ann(L) = 0$ olacak şekildeki Leibniz cebirinin iyi bir örneğidir.

5. YÜKSEK MERTEBEDEN LEİBNİZ-RİNEHART CEBİRLER

5.1 Giriş

Bu bölümde öncelikle iki boyutlu Leibniz cebirler kategorisi tanımlanıp bu kategori üzerindeki funktorsal ilişkiler incelenecektir. Bunun için ilk kısımda öncelikle Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modülleri tanımlayıp birçok örnek verildikten sonra Leibniz çaprazlanmış modüllerin kategorisi oluşturulacaktır.

Sonraki kısımda Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan simplisel Leibniz-Rinehart cebirler ve Cat^1 - Leibniz-Rinehart cebirler tanımlanarak aradaki funktorsal ilişkiler ayrıntılı bir biçimde irdelenerek katagoriksel denklikleri gösterilecektir.

5.2 Leibniz-Rinehart Çaprazlanmış Modüller

Çaprazlanmış modül kavramı ilk kez (Whitehead,1949) tarafından tanımlanmıştır. Whitehead ikinci relatif homotopi gruplarının cebirsel yapılarını incelerken çaprazlanmış modüllere yer vermiştir. Çaprazlanmış modüller grupların homoloji ve kohomolojisi, devirli homoloji, kombinatoryal grup teori, cebirsel K-teori ve diferensiyel geometri gibi homotopi teoriyi içeren matematiğin bir çok alanında önemli bi role sahiptir. Çaprazlanmış modüllere halka, ideal gibi bir çok cebirsel yapının genellemesi olarakta bakılabilir.

Tanım 5.1 *$(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ Leibniz-Rinehart cebirinin R Leibniz A-cebiri üzerine etkisi var ve $\partial : R \longrightarrow \mathfrak{L}$ Leibniz $\mathbb{K}$-cebir homomorfizması her $r, r' \in R$, $X \in \mathfrak{L}$, $a \in A$ için:*
(a) *$\partial [\![X, r]\!] = [\![X, \partial(r)]\!]$,*
(b) *$\partial [\![r, X]\!] = [\![\partial(r), X]\!]$,*
(c) *$[\![\partial(r'), r]\!] = [\![r', r]\!] = [\![r', \partial(r)]\!]$,*
(d) *$\partial(ar) = a\partial(r)$,*
(e) *$\alpha_r(\partial(r))(a) = 0$,*
şartları sağlanıyorsa ∂ a Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modül denir ve $(R, \mathfrak{L}, \partial)$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımdaki ilk üç şart Leibniz çaprazlanmış modül şartıdır. Dördüncü şart ∂ ın A-modül homomorfizmi olması gerektiğini ifade eder. Son şart ise $R \xrightarrow{\partial} \mathfrak{L} \xrightarrow{\alpha_r} Der(A)$ bileşkesinin sıfır dönüşümü olduğunu ifade eder.

Örnek 5.1 $(\mathfrak{L},\alpha_r)$ *bir Leibniz-Rinehart cebir olsun.* I *da* $\mathfrak{L}$ *nin bir Leibniz* $\mathbb{K}$*-alt cebiri olsun. Aynı zamanda* I*, kendi başına bir* A*-modül ise* I *ya* $\mathfrak{L}$ *nin bir Leibniz-Rinehart alt cebiri denir. Burada* I *nın* $\mathfrak{L}$ *üzerine etkisi*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{I} & \overset{\mathfrak{inc.}}{\hookrightarrow} & \mathfrak{L} & \xrightarrow{\alpha_r} & Der(A) & & \\ & & & & & & \\ X & \longmapsto & \mathfrak{inc.}(X)=X & \longmapsto & \alpha_r(X):A & \longrightarrow & A \\ & & & & a & \longmapsto & \alpha_r(X)(a)=X(a) \end{array}$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathfrak{L}$ *Leibniz-Rinehart cebir ve* I $\mathfrak{L}$ *nin alt Leibniz-Rinehart cebiri olsun. Eğer burada* I *Leibniz* $\mathbb{K}$ *cebir olarak* $\mathfrak{L}$ *nin ideali ve*

$$\mathrm{I} \hookrightarrow \mathfrak{L} \xrightarrow{\alpha_r} Der(A)$$

şeklinde verilen bileşke 0 *dönüşümü ise* I *ya* $\mathfrak{L}$ *Leibniz-Rinehart ideali denir. Bundan sonra Leibniz-Rinehart ideali şeklinde uzun uzun yazılması yerine (kısalığın hatırına)* $\mathrm{I} \trianglelefteq \mathfrak{L}$ *ile gösterilecektir. Bu durumda*

$$\mathfrak{inc.}:\mathrm{I} \longrightarrow \mathfrak{L}$$

içerme dönüşümü ve

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{L}\times \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathrm{I} & & \mathrm{I}\times\mathfrak{L} & \longrightarrow & \mathrm{I} \\ (X,I) & \longmapsto & {}^{X}I=[\![X,I]\!] & & (I,X) & \longmapsto & I^{X}=[\![I,X]\!] \end{array}$$

Leibniz etkileri ile beraber $(\mathrm{I},\mathfrak{L},\mathfrak{inc.})$ *bir Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modüldür.* $I,\ I'\in\mathrm{I}$*,* $X\in\mathfrak{L}$ *ve* $a\in A$ *olsun.*

ÇM a).

$$\begin{aligned} \mathfrak{inc.}({}^{X}I) &= {}^{X}I \\ &= [\![X,I]\!] \\ &= [\![X,\mathfrak{inc.}(I)]\!] \end{aligned}$$

elde edilir.

ÇM b).

$$\begin{aligned} \mathfrak{inc.}(I^{X}) &= I^{X} \\ &= [\![I,X]\!] \\ &= [\![\mathfrak{inc.}(I),X]\!] \end{aligned}$$

elde edilir.

ÇM c).

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{inc}.(I')}I &= {}^{I'}I \\ &= [\![I', I]\!] \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} I^{\mathfrak{inc}.(I')} &= I^{I'} \\ &= [\![I, I']\!] \end{aligned}$$

elde edilir.

ÇM d).

$$\begin{aligned} \mathfrak{inc}.(aI) &= aI \\ &= a(\mathfrak{inc}.(I)) \end{aligned}$$

elde edilir.

ÇM e). I $\trianglelefteq \mathfrak{L}$ *olduğundan dolayı*

$$\mathrm{I} \overset{\mathfrak{inc}.}{\hookrightarrow} \mathfrak{L} \xrightarrow{\alpha_r} Der(A)$$

bileşkesi 0 *dönüşümdür ve dolayısıyla* $\alpha_r(\mathfrak{inc}.) = 0$ *dır. Buradan* $(\alpha_r(\mathfrak{inc}.))(I)(a) = 0$ *elde edilir.*

Örnek 5.2 $g : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}'$ *bir Leibniz-Rinehart cebir homomorfizması olsun. Bu durumda* inc : *Çekg* $\hookrightarrow \mathfrak{L}$ *bir Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Buradan genellemek gerekirse* I $\trianglelefteq \mathfrak{L}$ *ideali için*

$$inc : \mathrm{I} \hookrightarrow \mathfrak{L}$$

dönüşümünün bir Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modül belirttiği yukarıda gösterildi. Diğer taraftan Çekg $\trianglelefteq \mathfrak{L}$ *olduğundan özel olarak* I =*Çekg alınırsa*

$$inc : \text{Çekg} \hookrightarrow \mathfrak{L}$$

içerme dönüşümü bir Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 5.3 *R,* $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ *Leibniz-Rinehart cebirinin bir reprezentasyonu olsun. Buradaki* ∂ *yerine* 0 *dönüşümü alınırsa,* $0 : R \longrightarrow \mathfrak{L}$ *bir Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modüldür.*

R *bir reprezentasyon olduğu için* R *bir abelyan Leibniz* A*-cebirdir. Dolayısıyla her* $r, r' \in R$ *için* $[\![r, r']\!] = 0$ *dır. Ayrıca* $\mathfrak{L}$ *bir Leibniz-Rinehart cebirdir. Ek olarak;*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{L} \times R & \longrightarrow & R \\ (X, r) & \longmapsto & {}^{X}r = [\![X, r]\!] \end{array} \quad \begin{array}{rcl} R \times \mathfrak{L} & \longrightarrow & R \\ (r, X) & \longmapsto & r^{X} = [\![r, X]\!] \end{array}$$

şeklinde iki bilineer dönüşümle tanımlanan Leibniz etkisi de vardır. Her $X \in \mathfrak{L}$, $r,\ r' \in R$ ve $a \in A$ için

ÇM a).

$$\begin{aligned} 0({}^{X}r) &= 0(\llbracket X, r \rrbracket) \\ &= 0 \\ &= \llbracket X, 0 \rrbracket \\ &= \llbracket X, 0(r) \rrbracket \end{aligned}$$

olur.

ÇM b).

$$\begin{aligned} 0(r^{X}) &= 0(\llbracket r, X \rrbracket) \\ &= 0 \\ &= \llbracket 0, X \rrbracket \\ &= \llbracket 0(r), X \rrbracket \end{aligned}$$

olur.

ÇM c).

$$\begin{aligned} {}^{0(r')}r &= {}^{0}r \\ &= \llbracket 0, r \rrbracket \\ &= 0 \\ &= \llbracket r', r \rrbracket \quad (\because R \textit{ değişmeli Leibniz } A\textit{-cebirdir}) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} r^{0(r')} &= r^{0} \\ &= \llbracket r, 0 \rrbracket \\ &= 0 \\ &= \llbracket r, r' \rrbracket \quad (\because R \textit{ değişmeli Leibniz } A\textit{-cebirdir}) \end{aligned}$$

elde edilir.

ÇM d).

$$\begin{aligned} 0(ar) &= 0 \\ &= a0 \\ &= a0(r) \end{aligned}$$

dır. Son olarak;

ÇM e).

$$\begin{aligned} \alpha_r(0(r))(a) &= \alpha_r(0)(a) \\ &= 0(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 5.4 $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ *bir Leibniz-Rinehart cebir,* $\theta : R \longrightarrow R'$ *dönüşümüde* $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ *üzerindeki reprezentasyonların homomorfizmi olsun.* $R' \rtimes \mathfrak{L}$, R' *ve* $\mathfrak{L}$ *cebirlerinin yarı direkt çarpımı olmak üzere* $R' \rtimes \mathfrak{L}$ *nin bir Leibniz-Rinehart cebir olduğu daha önce gösterildi. Bu durumda her* $X \in \mathfrak{L}$, $r \in R$ *ve* $r' \in R'$ *için;*

$$\begin{array}{llllll} (R' \rtimes \mathfrak{L}) \times R & \longrightarrow & R & R \times (R' \rtimes \mathfrak{L}) & \longrightarrow & R \\ ((r', X), r) & \longmapsto & (r', X)^r = [\![X, r]\!] & (r, (r', X)) & \longmapsto & {}^r(r', X) = [\![r, X]\!] \end{array}$$

bilineer dönüşümleri ile verilen $R' \rtimes \mathfrak{L}$ *nin* R *üzerinde etkisi vardır.*

$$\begin{array}{rlll} \partial : & R & \longrightarrow & R' \rtimes \mathfrak{L} \\ & r & \longmapsto & \partial(r) = (\theta(r), 0) \end{array}$$

homomorfizması ile birlikte

ÇM a).

$$\begin{aligned} \partial((r', X)^r) &= \partial[\![X, r]\!] \\ &= (\theta[\![X, r]\!], 0) \\ &= ([\![X, \theta(r)]\!], 0) \\ &= ([\![r', \theta(r)]\!] + [\![X, \theta(r)]\!], 0) \because \ R' \text{ Değişmeli Leibniz cebir} \\ &= ([\![r', \theta(r)]\!] + [\![r', 0]\!] + [\![X, \theta(r)]\!], [\![X, 0]\!]) \\ &= [\![(r', X), (\theta(r), 0)]\!] \\ &= [\![(r', X), (\partial(r)]\!] \\ &= [\![X, \partial(r)]\!] \, , \end{aligned}$$

ÇM b).

$$\begin{aligned} \partial({}^r(r', X)) &= \partial[\![r, X]\!] \\ &= (\theta[\![r, X]\!], 0) \\ &= ([\![\theta(r), X]\!], 0) \\ &= ([\![\theta(r), r']\!] + [\![\theta(r), X]\!], 0) \because \ R' \text{ Değişmeli Leibniz cebir} \\ &= ([\![\theta(r), r']\!] + [\![0, r']\!] + [\![\theta(r), X]\!], [\![0, X]\!]) \\ &= [\![(\theta(r), 0), (r', X)]\!] \\ &= [\![(\partial(r), (r', X)]\!] \\ &= [\![\partial(r), X]\!] \, , \end{aligned}$$

ÇM c) $r_1,\ r_2 \in R'$ *için*

$$\begin{aligned} {}^{\partial(r_1)}r_2 &= {}^{(\theta(r_1),0)}r_2 \\ &= [\![(\theta(r_1), r_2]\!] \\ &= [\![r_1, r_2]\!] \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} {r_2}^{\partial(r_1)} &= {r_2}^{(\theta(r_1),0)} \\ &= [\![r_2, (\theta(r_1)]\!] \\ &= [\![r_2, r_1]\!] \, , \end{aligned}$$

ÇM d).

$$\begin{aligned} \partial(ar) &= (\theta(ar), 0) \\ &= (a\theta(r), a0) \because \theta \textit{ represantasyon homomorfizmi} \\ &= a(\theta(r), 0) \\ &= a\partial(r) \, , \end{aligned}$$

ve son olarak;

ÇM e).

$$\begin{aligned} \alpha_r(\partial(r))(a) &= \alpha_r((\theta(r), 0))(a) \\ &= (\theta(r), 0)(a) \\ &= \partial(r)(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edileceğinden $(R, R' \rtimes \mathfrak{L}, \partial)$ *üçlüsü Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.*

Tanım 5.2 $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ *bir Leibniz-Rinehart cebir olsun.*

$$Z_A(\mathfrak{L}) := \{z \in \mathfrak{L} | [\![az, X]\!] = 0,\ \alpha_r(z)(a) = 0,\ \textit{her } X \in \mathfrak{L},\ a \in A.\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ *Leibniz-Rinehart cebirinin merkezi denir.*

Örnek 5.5 *R bir Leibniz A cebir ve $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ bir Leibniz-Rinehart cebir olsun. $\partial : R \longrightarrow \mathfrak{L}$ dönüşümü R Leibniz A cebirinden $(\mathfrak{L}, \alpha_r)$ Leibniz-Rinehart cebirine bir merkezsel(central) epimorphism (yani Çek$\partial \subseteq Z(R)$) olsun.*
Ayrıca her $X \in \mathfrak{L}$, $r, r' \in R$, $a \in A$ ve $\partial(r') = X$ için Leibniz etkisi;

$$\begin{array}{lcllcl} \mathfrak{L} \times R & \longrightarrow & R & R \times \mathfrak{L} & \longrightarrow & R \\ (X, r) & \longmapsto & {}^{X}r = [\![r', r]\!] & (r, X) & \longmapsto & r^{X} = [\![r, r']\!] \end{array}$$

şeklindeki iki bilineer dönüşüm vasıtasıyla tanımlansın. Bu durumda;

ÇM a).

$$\begin{aligned}\partial({}^{X}r) &= \partial[\![X,r]\!] \\ &= \partial[\![r',r]\!] \\ &= [\![\partial(r'),\partial(r)]\!] \\ &= [\![X,\partial(r)]\!]\,,\end{aligned}$$

ÇM b).

$$\begin{aligned}\partial(r^{X}) &= \partial[\![r,X]\!] \qquad , \\ &= \partial[\![r,r']\!] \\ &= [\![\partial(r),\partial(r')]\!] \\ &= [\![\partial(r),X]\!]\end{aligned}$$

ÇM c).

$$\begin{aligned}{}^{\partial(r')}r &= {}^{X}r \\ &= [\![X,r]\!] \\ &= [\![r',r]\!]\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}r^{\partial(r')} &= r^{X} \qquad , \\ &= [\![r,X]\!] \\ &= [\![r,r']\!]\end{aligned}$$

ÇM d).

$$\begin{aligned}\partial(ar) &= 0 \\ &= a0 \\ &= a\partial(r)\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Son olarak;

ÇM e).

$$\begin{aligned}\alpha_r(\partial(r))(a) &= \alpha_r(0)(a) \ \because\ \textit{Çek}\partial \subseteq Z(R) \\ &= 0(a) \\ &= 0\end{aligned}$$

olacağından $(R,\mathfrak{L},\partial)$ *bir Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modüldür.*

Örnek 5.6 $(\mathfrak{L},\alpha_r)$ *bir Leibniz-Rinehart cebir ve* $DO\,(A,\mathfrak{L},(\textit{Çek}(\alpha_r)))$ *nin* $\textit{Çek}(\alpha_r)$ *üzerine Leibniz etkisi her* $X,Y \in \textit{Çek}(\alpha_r)$ *için,*

$$\begin{array}{lcl} DO\,(A,\mathfrak{L},(\textit{Çek}(\alpha_r))) \times \textit{Çek}(\alpha_r) & \longrightarrow & \textit{Çek}(\alpha_r) \\ (((d,D),X),Y) & \longmapsto & [\![((d,D),X),Y]\!] = D(Y) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Çek}(\alpha_r) \times DO\left(A, \mathfrak{L}, (\text{Çek}(\alpha_r))\right) & \longrightarrow & \text{Çek}(\alpha_r) \\ (Y, ((d, D), X)) & \longmapsto & [\![Y, ((d, D), X)]\!] = d(Y) \end{array}$$

şeklinde iki bilineer dönüşümle tanımlansın. ∂ dönüşümü de

$$\partial : \text{Çek}(\alpha_r) \longrightarrow DO\left(A, \mathfrak{L}, \text{Çek}(\alpha_r)\right)$$
$$\partial(Y) = ((d^Y, D^Y), 0)$$

şelklinde tanımlansın.

Teorem 5.1 *$\partial : \text{Çek}(\alpha_r) \longrightarrow DO\left(A, \mathfrak{L}, \text{Çek}(\alpha_r)\right)$ dönüşümü iyi tanımlıdır.*

İspat *Her $X, Y \in \text{Çek}(\alpha_r)$, $a \in A$ için,*

$$\begin{aligned} d^X(aY) &= -[\![aY, X]\!] \\ &= [\![aY, -X]\!] \\ &= a[\![Y, -X]\!] - \alpha_r(-X)(a)\, Y \\ &= ad^X(Y) + 0\,(a)\, Y \\ &= ad^X(Y) + \alpha_r(0)(a)\, Y \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D^X(aY) &= [\![X, aY]\!] \\ &= a[\![X, Y]\!] \\ &= aD^X(Y) \end{aligned}$$

olacağından $\left(\left(d^X, D^X\right), 0\right) \in DO\left(A, \mathfrak{L}, \text{Çek}(\alpha_r)\right)$ elde edilir.

Teorem 5.2 *Her $X, Y \in \text{Çek}(\alpha_r)$ için,*

$$\begin{array}{lcl} DO\left(A, \mathfrak{L}, (\text{Çek}(\alpha_r))\right) \times \text{Çek}(\alpha_r) & \longrightarrow & \text{Çek}(\alpha_r) \\ (((d, D), X), Y) & \longmapsto & [\![((d, D), X), Y]\!] = D(Y) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Çek}(\alpha_r) \times DO\left(A, \mathfrak{L}, (\text{Çek}(\alpha_r))\right) & \longrightarrow & \text{Çek}(\alpha_r) \\ (Y, ((d, D), X)) & \longmapsto & [\![Y, ((d, D), X)]\!] = d(Y) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan etkiler iyi tanımlıdır.

İspat *$Y \in \text{Çek}(\alpha_r)$ olsun. Bu durumda $Y = [\![Y', Y'']\!]$ olacak şekilde $Y', Y'' \in \text{Çek}(\alpha_r)$ vardır. Dolayısıyla, her $((e, E), X) \in DO\left(A, \mathfrak{L}, \text{Çek}(\alpha_r)\right)$ için,*

$$\begin{aligned} \alpha_r d(Y) &= \alpha_r d[\![Y', Y'']\!] \\ &= \alpha_r\left([\![d(Y'), Y'']\!] + [\![Y', d(Y'')]\!]\right) \\ &= [\![\alpha_r d(Y'), \alpha_r Y'']\!] + [\![\alpha_r Y', \alpha_r d(Y'')]\!] \\ &= [\![\alpha_r d(Y'), 0]\!] + [\![0, \alpha_r d(Y'')]\!] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}\alpha_r D(Y) &= \alpha_r D[\![Y', Y'']\!] \\ &= \alpha_r\left([\![D(Y'), Y'']\!] - [\![D(Y''), Y']\!]\right) \\ &= [\![\alpha_r D(Y'), \alpha_r Y'']\!] - [\![\alpha_r D(Y''), \alpha_r Y']\!] \\ &= [\![\alpha_r D(Y'), 0]\!] + [\![\alpha_r D(Y''), 0]\!] \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edileceğinden $d(Y), D(Y) \in$ *Çek*(α_r) *olur.*

Teorem 5.3 ∂ : *Çek*$(\alpha_r) \longrightarrow$ *DO* $(A, \mathfrak{L},$ *Çek*$(\alpha_r))$, $\partial(Y) = ((d^Y, D^Y), 0)$ *bir çaprazlanmış modüldür.*

İspat ÇM a). *Her* $r \in \mathfrak{L}$, *için,*

$$\begin{aligned}ed^Y(r) - d^Y e(r) &= -e[\![r, Y]\!] + [\![e(r), Y]\!] \\ &= -[\![e(r), Y]\!] - [\![r, e(Y)]\!] + [\![e(r), Y]\!] \\ &= -[\![r, e(Y)]\!] \\ &= -[\![r, E(Y)]\!] \\ &= d^{E(Y)}(r)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}Ed^Y(r) - d^Y E(r) &= -E[\![r, Y]\!] + [\![E(r), Y]\!] \\ &= -[\![E(r), Y]\!] + [\![E(Y), r]\!] + [\![E(r), Y]\!] \\ &= [\![E(Y), r]\!] \\ &= D^{E(Y)}(r)\end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned}[\![(e, E, X), \partial(Y)]\!] &= [\![((e, E), X), \left(\left(d^Y, D^Y\right), 0\right)]\!] \\ &= \left([\![(e, E), \left(d^Y, D^Y\right)]\!][\![X, 0]\!]\right) \\ &= \left(\left(ed^Y - d^Y e, Ed^Y - d^Y E\right), 0\right) \\ &= \left(\left(d^{E(Y)}, D^{E(Y)}\right), 0\right) \\ &= \partial(E(Y)) \\ &= \partial[\![(e, E, X), (Y)]\!]\end{aligned}$$

elde edilir.

ÇM b). *Her* $r \in \mathfrak{L}$, *için,*

$$\begin{aligned}d^Y e(r) - ed^Y(r) &= -[\![e(r), Y]\!] + e[\![r, Y]\!] \\ &= -[\![e(r), Y]\!] + [\![e(r), Y]\!] + [\![r, e(Y)]\!] \\ &= [\![r, e(Y)]\!] \\ &= d^{-e(Y)}(r)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D^{Y}e(r)-eD^{Y}\left(r\right) &= [\![Y,e(r)]\!]-e[\![Y,r]\!] \\ &= [\![Y,e(r)]\!]-[\![e\left(Y\right),r]\!]-[\![Y,e\left(r\right)]\!] \\ &= -[\![e\left(Y\right),r]\!] \\ &= D^{-e(Y)}\left(r\right) \end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned} [\![\partial\left(Y\right),\left(e,E,X\right)]\!] &= [\![\left(d^{Y},D^{Y},0\right),\left(e,E,X\right)]\!] \\ &= \left([\![\left(d^{Y},D^{Y}\right),\left(e,E\right)]\!],[\![0,X]\!]\right) \\ &= \left(\left(d^{Y}e-ed^{Y},D^{Y}e-eD^{Y}\right),0\right) \\ &= \left(\left(d^{-e(Y)},D^{-e(Y)}\right),0\right) \\ &= \partial\left(-e\left(Y\right)\right) \\ &= \partial[\![Y,\left(e,E,X\right)]\!], \end{aligned}$$

elde edilir.

ÇM c). *Her* $X,Y\in$ *Çek*(α_r) *için,*

$$\begin{aligned} [\![\partial\left(Y\right),X]\!] &= [\![\left(d^{Y},D^{Y},0\right),X]\!] \\ &= D(X) \\ &= [\![Y,X]\!] \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} [\![X,\partial\left(Y\right)]\!] &= [\![X,\left(d^{Y},D^{Y},0\right)]\!] \\ &= d(X) \\ &= [\![X,Y]\!] \end{aligned}$$

elde edilir.

ÇM d).

$$\begin{aligned} \partial(aX) &= (d^{aX},D^{aX},0) \\ &= (ad^{X},aD^{X},a0) \\ &= a(d^{X},D^{X},0) \\ &= a\partial(X) \end{aligned}$$

dır. Son olarak;

ÇM e).

$$\begin{aligned} \alpha_r(\partial(X))(a) &= \alpha_r((d^{X},D^{X},0))(a) \ \because\ X\in \text{Çek}\alpha_r \\ &= 0(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Teorem 5.4 $\partial : R \longrightarrow \mathfrak{L}$ *bir Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modül ve* $\mathrm{I} = \partial(R)$ *olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler verilebilir.*

a) *Çek*$(\partial) \trianglelefteq R$*,*

b) *Çek*(∂)*,* $\mathfrak{L}/\mathrm{I}$*-modüldür,*

c) *Gör*(∂) $\mathfrak{L}$ *nin bir ideali ve bir* A*-altmodüldür.*

İspat ***a)*** $c \in$*Çek*(∂) *ve* $r \in R$ *olsun. Dolayısıyla*

$$\begin{aligned} \partial[r, c]] &= [\![\partial(r), \partial(c)]\!] \\ &= [\![\partial(r), 0]\!] \quad (\because c \in \text{Çek}(\partial) \text{ olduğundan } \partial(c) = 0 \text{ dır}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} \partial[\![c, r]\!] &= [\![\partial(c), \partial(r)]\!] \\ &= [\![0, \partial(r)]\!] \quad (\because c \in \text{Çek}(\partial) \text{ olduğundan } \partial(c) = 0 \text{ dır}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edileceğinden $[\![r, c]\!]$*,* $[\![c, r]\!] \in$ *Çek*(∂) *dir. Bu ise Çek*$(\partial) \trianglelefteq R$ *anlamına gelir.*

b) $X, X' \in \mathfrak{L}$ *olmak üzere ve Leibniz braketide*

$$[\![X + I, X' + I]\!] = [\![X, X']\!] + I$$

şeklinde alınırsa $\mathfrak{L}/\mathrm{I}$ *nın Leibniz* $\mathbb{K}$*-cebir olduğu açıktır. Ayrıca* A *nın* $\mathfrak{L}/\mathrm{I}$ *üzerine modül etkisi*

$$\begin{aligned} A \times \mathfrak{L}/\mathrm{I} &\longrightarrow \mathfrak{L}/\mathrm{I} \\ (a, X + I) &\longmapsto aX + I \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa $\mathfrak{L}/\mathrm{I}$*,* A*-modül yapısına sahiptir. Anchor dönüşümüde*

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha_r} : \mathfrak{L}/\mathrm{I} &\longrightarrow Der(A) \\ l + I &\longmapsto \widetilde{\alpha_r}(X + I) = \alpha_r(X) \end{aligned}$$

şeklinde alınırsa $\mathfrak{L}/\mathrm{I}$ *Leibniz-Rinehart* A*-cebir olur. Çek*(∂) *kümesinin* $\mathfrak{L}/\mathrm{I}$*-modül olduğunu göstermek için* $r \in R$*,* $a \in$ *Çek*(∂) *ve* $X = \partial(r)$ *alınıp modül etkisi de*

$$\begin{aligned} \mathrm{I} \times \text{Çek}(\partial) &\longrightarrow \text{Çek}(\partial) \\ (X, a) &\longmapsto X \cdot a \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} X \cdot a &= \partial(r) \cdot a \\ &= [\![r, a]\!] \quad (\because \partial \text{ çaprazlanmış modül }) \\ &= \partial(a) \cdot r \quad (\because \partial \text{ çaprazlanmış modül}) \\ &= 0 \cdot r \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edileceğinden bu etkinin, I *nın Çek*(∂) *üzerinde sıfır olduğu anlaşılır. Bu etki vasıtasıyla* $\mathfrak{L}/\mathrm{I}$ *nın Çek*(∂) *üzerine modül etkisi*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{L}/\mathrm{I} \times \textit{Çek}(\partial) & \longrightarrow & \textit{Çek}(\partial) \\ (X+I, a) & \longmapsto & (X+I) \cdot a = X \cdot a \end{array}$$

olarak verilebilir. Buradan Çek(∂) *nin* $\mathfrak{L}/\mathrm{I}$*-modül olduğu görülür.*

c) $r' \in$ *Gör*(∂) *ve* $X \in \mathfrak{L}$ *olsun. Bu durumda* $r' = \partial(r)$ *olacak şekilde bir* $r \in R$ *vardır.*

$$[\![X, r']\!] = [\![X, \partial(r)]\!] = \partial[\![X, r]\!]$$

benzer şekilde

$$[\![r', X]\!] = [\![\partial(r), X]\!] = \partial[\![r, X]\!]$$

ve $(R, \mathfrak{L}, \partial)$ *çaprazlanmış modül olduğundan* $[\![X, r]\!]$, $[\![r, X]\!] \in$ *Gör*(∂) *dir. Bu durumda Gör*$(\partial) \trianglelefteq \mathfrak{L}$ *olur.*

5.2.1 Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisinin inşaası

Tanım 5.3 $(R, \mathfrak{L}, \partial)$ *ve* $(R', \mathfrak{L}', \partial')$ *iki Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modül olsun.*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"'] & R' \arrow[d, "\partial'"] \\ \mathfrak{L} \arrow[r, "\phi"'] & \mathfrak{L}' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani,

$$\partial' f(r) = \phi\partial(r) \text{ ve } f(X \cdot r) = \phi(X) \cdot f(r)$$

olacak şekilde bir

$$f : R \longrightarrow R'$$

Leibniz $\mathbb{K}$*-cebir homomorfizması ve*

$$\phi : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}'$$

Leibniz-Rinehart cebir homomorfizması varsa

$$(f, \phi) : (R, \mathfrak{L}, \partial) \longrightarrow (R', \mathfrak{L}', \partial')$$

ikilisine çaprazlanmış modüller arasındaki homomorfizma denir.

Böylece Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisi oluşturulur ve bu kategori $\mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR})$ ile gösterilir. Şimdi bu kategorinin bazı temel funktoriyel özellikleri verilsin. Forgetful (unutulabilir) funktorların

$$\begin{array}{rccc} U_1 : & \mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR}) & \longrightarrow & \mathfrak{L}\mathcal{R}(A) \\ & (R, \mathfrak{L}, \partial) & \longmapsto & \mathfrak{L} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} U_2 : & \mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR}) & \longrightarrow & \mathfrak{L}(A) \\ & (R, \mathfrak{L}, \partial) & \longmapsto & R \end{array}$$

şeklinde tanımlandığı açıktır. $\mathfrak{LXmod}(\mathbb{K})$, Leibniz $\mathbb{K}$ cebirlerin çaprazlanmış modüller kategorisini göstermek üzere forgetful funktor A-modül yapısı unutularak

$$U_3 : \quad \mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR}) \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{LXmod}(\mathbb{K})$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 5.5 ***a).*** *$\mathfrak{L}$ ve $\mathfrak{L}'$ iki Leibniz-Rinehart cebir, $f, g : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}'$ Leibniz-Rinehart cebir homomorfizmleri ve Çek$(\alpha'_r) = 0$ olsun. Bu durumda $f = g$ dir. Çünkü*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{L} \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, "\alpha_r"'] & & \mathfrak{L}' \arrow[dl, "\alpha'_r"] \\ & Der(A) & \end{tikzcd}$$

her $X \in \mathfrak{L}$ için

$$\begin{array}{rcl} \alpha'_r(f(X) - g(X)) & = & \alpha'_r f(X) - \alpha'_r g(X) \\ & = & \alpha_r(X) - \alpha_r(X) \\ & = & 0 \end{array}$$

dir. O halde $f(X) - g(X) \in$Çek(α'_r) olup $f = g$ elde edilir.

Özel olarak $I \trianglelefteq \mathrm{Der}(A)$, $(R, \mathrm{Der}(A), \partial)$ bir çaprazlanmış modül ve

$$\partial' = i : I \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$$

içine dönüşümü alınırsa Çek$(\partial') = 0$ olup

$$f : (R, \mathrm{Der}(A), \partial) \longrightarrow (I, \mathrm{Der}(A), i)$$

şeklinde biricik çaprazlanmış modül homomorfizması vardır.

b). *R bir Leibniz A-cebir olsun. Eğer*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha_r=0"'] & & R \arrow[dl, "\alpha'_r=Id_R"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ise $f = 0$ dir. Üstelik Çek$(\partial') = 0$ olduğu için f biriciktir.

c). *R bir Leibniz A-cebir olsun. Eğer*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "Id_R"'] & & N \arrow[dl, "\partial"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ise $\partial(R) = \mathrm{Der}(A)$ olup ∂ örtendir.

5.3 Simplisel Leibniz-Rinehart Cebirler

5.3.1 Giriş

Bilindiği üzere çaprazlanmış modüller, Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan simplisel gruplar kategorisine (Conduché, 1984) ve gruplar kategorisindeki internal objeye (cat^1-grup yapısına) denktir.

Simplisel obje kavramı (May,1992) tarafından tanımlanmıştır. Bu tanımlamaya benzer olarak (Casas, 2010) da simplisel Leibniz n-cebirleri tanımlamış ve bu cebirlerin kategorinin çaprazlanmış n-küp kategorisiyle denk olduğunu göstermiştir. Bu bölümde simplisel Leibniz-Rinehart cebirler tanımlanıp bu cebirlerin kategorisini inşaa edilecektir. Ardından bu kategori ile Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisi arasındaki (kategoriksel olarak) doğal denklik verilecektir.

5.3.2 Simplisel Leibniz-Rinehart cebirler ve kategorisi

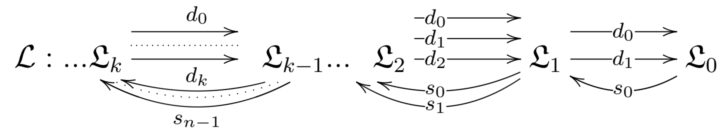
Tanım 5.4 *$\mathbb{K}$ bir cisim, A değişmeli bir $\mathbb{K}$-cebir ve $\mathcal{L} = \{\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, ..., \mathfrak{L}_n, ...\}$ Leibniz-Rinehart cebirlerin kümesi olsun.*

$$\begin{aligned} d_i := d_i^n : \ \mathfrak{L}_n &\longrightarrow \mathfrak{L}_{n-1} \ , \ 0 \le i \le n \quad (n \neq 0) \\ s_i := s_i^n : \ \mathfrak{L}_n &\longrightarrow \mathfrak{L}_{n+1} \ , \ 0 \le i \le n \end{aligned}$$

Leibniz-Rinehart homomorfizmler olmak üzere $0 \leq i \leq n$ *için*

$$\begin{array}{rcll} d_i d_j & = & d_{j-1} d_i, & i < j \\ d_i s_j & = & \begin{cases} s_{j-1} d_i, & i < j \\ Id, & i = j \text{ veya } \dot{I} = j+1 \\ s_j d_{i-1}, & i > j+1 \end{cases} & \\ s_i s_j & = & s_{j+1} s_i, & i \leq j \end{array}$$

özdeşlikleri sağlanıyorsa $\mathcal{L} = ((\mathfrak{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}, d_i, s_j)$ *üçlüsüne simplisel Leibniz-Rinehart cebir denir. Buradaki* d_i *ve* s_j *operatörlerinede sırasıyla yüz ve dejenere operatörleri denir. Herhangi bir* $((\mathfrak{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}, d_i, s_j)$ *simplisel Leibniz-Rinehart cebiri diyagramsal olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.*



Örnek 5.7 $\mathfrak{L}$ *Leibniz-Rinehart cebir olsun. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\mathfrak{L}_n = \mathcal{L}$ *ve* $d_i = s_j = id$ *olarak alınırsa* $((\mathfrak{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}, d_i, s_j)$ *bir simplisel Leibniz-Rinehart cebir oluşturur. Bu şekilde oluşturulan simplisel Leibniz-Rinehart cebirine sabit simplisel Leibniz-Rinehart cebir denir ve* $\mathbb{K}(\mathcal{L}, 0)$ *ile gösterilir.*

Herhangi bir $\mathfrak{L}_n$ in herhangi bir X elemanına n-boyutlu simpleks denir. Eğer bazı Y ler için $X = s_i(Y)$ oluyorsa, X-simpleksine dejenere olan eleman denir.

$f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ şeklindeki bir simplisel Leibniz-Rinehart cebir morfizmi, d_i ve s_j yüz ve dejenere operatörleri ile değişmeli olan $f_n : \mathfrak{L}_n \longrightarrow \mathfrak{L}'_n$ şeklindeki Leibniz-Rinehart cebir homomorfizmlerinin bir ailesidir. Yani herbir i ve n için

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i \text{ ve } f_n s_i = s_i f_{n-1}$$

dir. Diğer taraftan

$$f_n : \mathfrak{L}_n \longrightarrow \mathfrak{L}'_n$$

Leibniz-Rinehart cebir homomorfizmi olduğundan

$$\alpha'_r f_n = \alpha_r$$

dır. Böylece simplisel Leibniz-Rinehart cebirlerinin kategorisi oluşturulur. Bu kategori $\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR})$ ile gösterilecektir.

5.3.3 Bir simplisel Leibniz-Rinehart cebirin Moore kompleksi

$\mathcal{L}$ bir simplisel Leibniz-Rinehart cebir olsun.

$$N\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_0,\ \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Çek} d_i^n = N\mathfrak{L}_n$$

olmak üzere d_n nın $N\mathfrak{L}_n$ ye kısıtlanmışı olan

$$\partial_n : N\mathfrak{L}_n \longrightarrow N\mathfrak{L}_{n-1}$$

homomorfizmi tanımlansın. Bu durumda

$$N\mathcal{L} : \cdots \longrightarrow N\mathfrak{L}_n \xrightarrow{\partial_n} N\mathfrak{L}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} N\mathfrak{L}_1 \xrightarrow{\partial_1} N\mathfrak{L}_0$$

zinciri bir komplekstir. Gerçekten $x \in N\mathfrak{L}_{n+1} = \bigcap\limits_{i=0}^{n-1} Cekd_i^n$ için

$$\partial_n \partial_{n+1}(x) = d_n^n d_{n+1}^{n+1}(x)$$

olduğundan ve simplisel özelliklerden

$$d_n^n d_{n+1}^{n+1}(x) = d_n^n(0) = 0 \quad (\because x \in N\mathfrak{L}_{n+1})$$

olup $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ dır. O halde $N\mathcal{L}$ bir komplekstir. Bu komplekse $\mathcal{L}$ simplisel Leibniz-Rinehart cebirinin *Moore kompleksi* denir ve $(N\mathcal{L},\partial)$ veya kısaca $N\mathcal{L}$ ile gösterilir. Leibniz-Rinehart cebir homomorfizminin çekirdeği Leibniz A-cebir olduğundan $n \geq 1$ için $N\mathfrak{L}_n$ de bir Leibniz A-cebirdir. Eğer $n > k$ için $N\mathfrak{L}_n = 0$ ise $\mathfrak{L}$ ye Moore kompleksinin boyutu k olan bir simplisel Leibniz-Rinehart cebir denir ve $\leq k$ ile gösterilir. Moore kompleksinin boyutu $\leq k$ olan simplisel cebirlerin kategorisi $\mathfrak{Simp}_{\leq k}(\mathfrak{LR})$ ile gösterilir.

Aşağıdaki tanımın Leibniz cebirler için en genel hali olan durumunun incelemesi (Casas,2010) tarafından da verilmiştir.

Tanım 5.5 *$0 \leq i \leq k$ için $\mathfrak{L}_i$ ler Leibniz-Rinehart cebir olmak üzere*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathfrak{L}_k \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, dotted] \arrow[r, shift right=2, "d_k"'] & \mathfrak{L}_{k-1} \arrow[l, bend left, "s_0"] \arrow[l, bend left=60, "s_{k-1}"] & \cdots & \mathfrak{L}_2 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & \mathfrak{L}_1 \arrow[l, bend left, "s_0"] \arrow[l, bend left=40, "s_1"] \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & \mathfrak{L}_0 \arrow[l, bend left, "s_0"] \end{tikzcd}$$

ile tanımlı olan simplisel Leibniz-Rinehart cebire k-parçalanmış simplisel Leibniz-Rinehart cebir denir. k-parçalanmış simplisel Leibniz-Rinehart cebirler kategorisi $\mathfrak{Tr}_k\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR})$ ile gösterilir. $\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR})$ kategorisinden $\mathfrak{Tr}_k\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR})$ kategorisine kısıtlama ile verilen tr_k

parçalanmış funktoru vardır. Bu funktorun k-iskelet funktor olarak adlandırılan st_k sol eki ve k-koiskelet funktor olarak adlandırılan $cost_k$ sağ eki vardır. Bu ekler diyagram olarak

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Tr}_{\mathfrak{k}}\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR}) \arrow[r, shift left, "tr_k"] & \mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR}) \arrow[l, shift left, "cost_k"] \arrow[r, shift left, "tr_k"] & \mathfrak{Tr}_{\mathfrak{k}}\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR}) \arrow[l, shift left, "st_k"] \end{tikzcd}$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 5.6 *Leibniz-Rinehart cebir çaprazlanmış modülleri kategorisi $\mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR})$ ile Moore kompleksinin boyu 1 olan simplisel Leibniz-Rinehart cebirler kategorisi $\mathfrak{Simp}_{\leq 1}(\mathfrak{LR})$ doğal denktir.*

İspat $\mathfrak{L}_i$ *ler Leibniz-Rinehart cebir olmak üzere*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}: ...\mathfrak{L}_k \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_k"'] & \mathfrak{L}_{k-1}... \arrow[l, bend left, "s_{n-1}"] & \mathfrak{L}_2 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & \mathfrak{L}_1 \arrow[l, bend left, "s_0"] \arrow[l, bend left=50, "s_1"] \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & \mathfrak{L}_0 \arrow[l, bend left, "s_0"] \end{tikzcd}$$

Moore kompleksinin boyu 1 olan Simplisel Leibniz-Rinehart cebir, R bir Leibniz A-cebir, $R =$Çekd_0 ve $\partial = d_1$ (R ye kısıtlanmışı) olarak alınsın. $X \in \mathfrak{L}_0$ ve $r \in R$ olmak üzere $\mathfrak{L}_0$ ın R üzerine etkisi

$$\begin{array}{cccccc} \mathfrak{L}_0 \times R & \longrightarrow & R & R \times \mathfrak{L}_0 & \longrightarrow & R \\ (X, r) & \longmapsto & {}^X r = [\![s_0X, r]\!] & (r, X) & \longmapsto & r^{\ X} = [\![r, s_0X]\!] \end{array}$$

ve

$$\partial({}^X r) = [\![d_1s_0X, d_1r]\!] = [\![X, \partial r]\!], \qquad \partial(r^{\ X}) = [\![d_1r, d_1s_0X]\!] = [\![\partial r, X]\!]$$

şeklinde iki bilineer dönüşümle tanımlansın. Bu etki bir Leibniz-Rinehart etkisidir. Buna göre $\partial : R \longrightarrow \mathfrak{L}_0$ bir Leibniz-Rinehart cebir çaprazlanmış modüldür. Bunu göstermek için sırasıyla etki ve çaprazlanmış modül şartlarının sağlandığı gösterilmelidir.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{L}_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & \mathfrak{L}_0 \arrow[l, bend left, "s_0"] \end{tikzcd}$$

yapısında d_0 d_1 ve s_0 birer Leibniz-Rinehart cebir morfizmi olduğundan,

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{L}_1 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "\alpha'_r"'] & & \mathfrak{L}_0 & \mathfrak{L}_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "\alpha'_r"'] & & \mathfrak{L}_0 & \mathfrak{L}_1 \arrow[rr, "s_0"] \arrow[dr, "\alpha'_r"'] & & \mathfrak{L}_0 \\ & Der(A) \arrow[ur, "\alpha_r"'] & & & Der(A) \arrow[ur, "\alpha_r"'] & & & Der(A) \arrow[ur, "\alpha_r"'] & \end{tikzcd}$$

sırasıyla $\alpha_r d_0 = \alpha'_r$, $\alpha_r d_1 = \alpha'_r$ ve $\alpha_r s_0 = \alpha'_r$ değişmeli diyagramları vardır. Her $X, X' \in \mathfrak{L}_0$, $r, r_1, r_2 \in R$ ve $a \in A$ olsun.

E1).

$$\begin{aligned}
[\![X,[\![X',r]\!]]\!] &= {}^{X}({}^{X'}r)\\
&= {}^{X}([\![s_0X',r]\!])\\
&= [\![s_0X,[\![s_0X',r]\!]]\!]\\
&= [\![[\![s_0X,s_0X']\!],r]\!]-[\![[\![s_0X,r]\!],s_0X']\!] \quad (\because \textit{ Leibniz özdeşliği })\\
&= [\![s_0([\![X,X']\!]),r]\!]-[\![[\![s_0X,r]\!],s_0X']\!] \quad (\because\ s_0 \textit{ Leibniz cebir homomorfizmi})\\
&= {}^{[\![X,X']\!]}(r)-({}^{X}r)^{X'}\\
&= [\![[\![X,X']\!],r]\!]-[\![[\![X,r]\!],X']\!]
\end{aligned}$$

olur.

E2).

$$\begin{aligned}
[\![X,[\![r,X']\!]]\!] &= {}^{X}(r^{X'})\\
&= {}^{X}([\![r,s_0X']\!])\\
&= [\![s_0X,[\![r,s_0X']\!]]\!]\\
&= [\![[\![s_0X,r]\!],s_0X']\!]-[\![[\![s_0X,s_0X']\!],r]\!] \quad (\because \textit{ Leibniz özdeşliği })\\
&= [\![[\![s_0X,r]\!],s_0X']\!]-[\![s_0([\![X,X']\!]),r]\!] \quad (\because\ s_0 \textit{ Leibniz cebir homomorfizmi})\\
&= ({}^{X}r)^{X'}-{}^{[\![X,X']\!]}(r)\\
&= [\![[\![X,r]\!],X']\!]-[\![[\![X,X']\!],r]\!]
\end{aligned}$$

olur.

E3).

$$\begin{aligned}
[\![r,[\![X,X']\!]]\!] &= r^{([\![X,X']\!])}\\
&= [\![r,s_0([\![X,X']\!])]\!]\\
&= [\![r,[\![s_0X,s_0X']\!]]\!] \quad (\because\ s_0 \textit{ Leibniz cebir homomorfizmi})\\
&= [\![[\![r,s_0X]\!],s_0X']\!]-[\![[\![r,s_0X']\!],s_0X]\!] \quad (\because \textit{ Leibniz özdeşliği })\\
&= (r^{X})^{X'}-(r^{X'})^{X}\\
&= [\![[\![r,X]\!],X']\!]-[\![[\![r,X']\!],X]\!]
\end{aligned}$$

olur.

E4).

$$\begin{aligned}
[\![X,[\![r_1,r_2]\!]]\!] &= {}^{X}([\![r_1,r_2]\!])\\
&= [\![s_0X,[\![r_1,r_2]\!]]\!]\\
&= [\![[\![s_0X,r_1]\!],r_2]\!]-[\![[\![s_0X,r_2]\!],r_1]\!] \quad (\because \textit{ Leibniz özdeşliği })\\
&= [\![({}^{X}r_1),r_2]\!]-[\![({}^{X}r_2),r_1]\!]\\
&= [\![[\![X,r_1]\!],r_2]\!]-[\![[\![X,r_2]\!],r_1]\!]
\end{aligned}$$

olur.

E5).

$$\begin{aligned}
[\![r_1,[\![X,r_2]\!]]\!] &= [\![r_1,({}^{X}r_2)]\!]\\
&= [\![[\![r_1,[\![s_0X,r_2]\!]]\!]\\
&= [\![[\![r_1,s_0X]\!],r_2]\!]-[\![[\![r_1,r_2]\!],s_0X]\!] \quad (\because \textit{Leibniz özdeşliği})\\
&= [\![{r_1}^{X},r_2]\!]-\ [\![r_1,r_2]\!]^{X}\\
&= [\![[\![r_1,X]\!],r_2]\!]-[\![[\![r_1,r_2]\!],X]\!]
\end{aligned}$$

olur.

E6).

$$\begin{aligned}
[\![r_1,[\![r_2,X]\!]]\!] &= [\![r_1,(r_2)^{X}]\!]\\
&= [\![[\![r_1,[\![r_2,s_0X]\!]]\!]\\
&= [\![[\![r_1,r_2]\!],s_0X]\!]-[\![[\![r_1,s_0X]\!],r_2]\!] \quad (\because \textit{Leibniz özdeşliği})\\
&= [\![r_1,r_2]\!]^{X}-[\![{r_1}^{X},r_2]\!]\\
&= [\![[\![r_1,r_2]\!],X]\!]-[\![[\![r_1,X]\!],r_2]\!]
\end{aligned}$$

olur.

E7).

$$\begin{aligned}
[\![aX,r]\!] &= {}^{(aX)}r\\
&= [\![s_0(aX),r]\!]\\
&= [\![as_0X,r]\!] \quad (\because s_0,\ \textit{A-modül homomorfizması})\\
&= a[\![s_0X,r]\!] \quad (\because \textit{Leibniz bracket özelliği})\\
&= a({}^{X}r)\\
&= a[\![X,r]\!]
\end{aligned}$$

olur.

E8).

$$\begin{aligned}
[\![ar,X]\!] &= (ar)^{X}\\
&= [\![ar,s_0X]\!]\\
&= a[\![r,s_0X]\!]-((s_0X)(a))r\\
&= a[\![r,s_0X]\!]-(\alpha'_r(s_0X)(a))r\\
&= a[\![r,s_0X]\!]-(\alpha_r(X)(a))r \quad (\because \alpha'_r s_0=\alpha_r)\\
&= a({}^{X}r)-(\alpha_r(X)(a))r
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\mathfrak{L}_0 \times R \longrightarrow R$ ve $R \times \mathfrak{L}_0 \longrightarrow R$ bilinneer dönüşümleri Leibniz-Rinehart etkisi tanımlar. Şimdi de $\partial : R \longrightarrow \mathfrak{L}_0$ ın bir Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modül olduğu gösterilecektir.

ÇM a).

$$\begin{aligned}\partial[\![X,r]\!] &= \partial({}^{X}r)\\ &= \partial[s_0X,r]\!]\\ &= [\![d_1s_0X,d_1r]\!]\\ &= [\![X,\partial r]\!] \qquad (\because\ d_1s_0=Id)\end{aligned}$$

dir.

ÇM b).

$$\begin{aligned}\partial[\![r,X]\!] &= \partial(r^{X})\\ &= \partial[\![r,s_0X]\!]\\ &= [\![d_1r,d_1s_0X]\!]\\ &= [\![\partial r,X]\!] \qquad (\because\ d_1s_0=Id)\end{aligned}$$

dir.

ÇM c).

$$\begin{aligned}[\![\partial(r'),r]\!] &= {}^{\partial(r')}r\\ &= [\![s_0d_1(r'),r]\!]\\ &= [\![s_0d_1(r')-r'+r',r]\!]\\ &= [\![s_0d_1(r')-r',r]\!]+[\![r',r]\!]\\ &= [\![d_2s_0r'-d_2s_1r',d_2s_1r]\!]+[\![r',r]\!] \quad (\because\ s_0d_1=d_2s_0,d_2s_1=Id)\\ &= d_2[\![s_0r'-s_1r',s_1r]\!]+[\![r',r]\!]\\ &= [\![r',r]\!] \quad (\because\ N\mathfrak{L}_2=0)\end{aligned}$$

bulunur ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}[\![r,\partial(r')]\!] &= r^{\partial(r')}\\ &= [\![r,s_0d_1(r')]\!]\\ &= [\![r,s_0d_1(r')-r'+r']\!]\\ &= [\![r,s_0d_1(r')-r']\!]+[\![r,r']\!]\\ &= [\![d_2s_1r,d_2s_0r'-d_2s_1r']\!]+[\![r,r']\!] \quad (\because\ s_0d_1=d_2s_0,d_2s_1=Id)\\ &= d_2[\![s_1r,s_0r'-s_1r']\!]+[\![r,r']\!]\\ &= [\![r,r'] \quad (\because\ N\mathfrak{L}_2=0)\end{aligned}$$

dır.

ÇM d). $\partial=d_1$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}\partial(ar) &= d_1(ar)\\ &= ad_1(r) \quad (\because d_1 \textit{ Leibniz-Rinehart homomorfimasıdır})\\ &= a\partial(r)\end{aligned}$$

dır.

ÇM e).

$$\begin{aligned}\alpha_r\partial(r)(a) &= (\alpha_r(\partial(r)))(a)\\ &= (\alpha'_r s_0(d_1(r)))(a)\\ &= (\alpha'_r(s_0d_1(r)))(a)\\ &= (\alpha'_r(d_2s_0(r)))(a)\\ &= (\alpha'_r(0))(a) \quad (\because\ N\mathfrak{L}_2=0\ )\\ &= 0\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\partial : R \longrightarrow \mathfrak{L}_0$$

bir Leibniz-Rinehart cebir çaprazlanmış modüldür. Böylece

$$N_1 : \mathfrak{Simp}_{\leq 1}(\mathfrak{LR}) \longrightarrow \mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR})$$

funktoru elde edilir.

Tersine $\partial : R \longrightarrow \mathfrak{L}$ Leibniz-Rinehart cebir çaprazlanmış modül olsun. $\mathfrak{L}$ nin R üzerine sağ ve sol etkisi yardımıyla

$$\mathfrak{L}_1 = R \rtimes \mathfrak{L} \subseteq R \times \mathfrak{L}$$

yarı direkt çarpımı elde edilir. Diğer bir deyişle $\mathfrak{L}_1$ bir Leibniz-Rinehart cebirdir. Her $a \in A$, $X, X' \in \mathfrak{L}$ ve $r, r' \in R$ için toplam, çarpım ve skaler ile çarpma işlemleri

$$\begin{aligned}a(r,X) &= (ar, aX)\\ (r,X)+(r',X') &= (r+r', X+X')\\ [\![(r,X),(r',X')]\!] &= ([\![r,r']\!]+[\![X,r']\!]+[\![r,X']\!], [\![X,X']\!])\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}d_0 : \quad & R \rtimes \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}\\ & (r,X) \longmapsto X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_1 : \quad & R \rtimes \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}\\ & (r,X) \longmapsto (\partial r)+X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_0 : \quad & \mathfrak{L} \longrightarrow R \rtimes \mathfrak{L}\\ & X \longmapsto (0,X)\end{aligned}$$

homomorfizmleri ele alınırsa bu homomorfizmler her $X \in \mathfrak{L}$, $r \in R$ için

$$\begin{aligned}\alpha_r d_0((r,X)) &= \alpha_r(d_0(r,X))\\ &= \alpha_r(X)\\ &= \widetilde{\alpha_r}((r,X))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_r d_1((r,X)) &= \alpha_r(d_1(r,X)) \\
&= \alpha_r((\partial r)+X) \\
&= \alpha_r(\partial r)+\alpha_r(X) \\
&= \alpha_r\partial(r)+\alpha_r(X) \\
&= \alpha_r(X) \quad (\because\ R \xrightarrow{\partial} \mathfrak{L}_0 \textit{ çaprazlanmış modül}) \\
&= \widetilde{\alpha_r}((r,X))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha_r} s_0(X) &= \widetilde{\alpha_r}(s_0(X)) \\
&= \widetilde{\alpha_r}((0,X)) \\
&= \alpha_r(X)
\end{aligned}$$

olduğundan Leibniz-Rinehart cebir homomorfizmlerdir. Ayrıca her $X \in \mathfrak{L}$ için

$$\begin{aligned}
d_0 s_0(X) &= d_0(0,X) \\
&= X
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
d_1 s_0(X) &= d_1(0,X) \\
&= \partial(0)+X \\
&= X
\end{aligned}$$

dır. Diğer bir deyişle $d_0 s_0 = d_1 s_0 = Id$ olur. Bu durumda simplisel özdeşlikler sağlanır. Sonuç olarak

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{L}_1 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, "d_1"'] & \mathfrak{L}_0 \arrow[l, bend left, "s_0"] \end{tikzcd}$$

bir 1-parçalanmış simplisel Leibniz-Rinehart cebirdir. Böylece

$$M : \mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR}) \longrightarrow \mathfrak{Tr}_1\mathfrak{Simp}(\mathfrak{LR})$$

funktoru elde edilir. st_k funktorunu kullanarak 1-parçalanmış simplisel Leibniz-Rinehart cebirler kategorisinden Moore kompleksinin boyu 1 olan simplisel Leibniz-Rinehart cebirler kategorisine ulaşılır. Böylece M ve st_1 in bileşkesi olarak

$$s_1 : \mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR}) \longrightarrow \mathfrak{Simp}_{\leq 1}(\mathfrak{LR})$$

tanımlanır. Sonuç olarak Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisi ile Moore kompleksinin boyu 1 olan simplisel Leibniz-Rinehart cebirler kategorisinin doğal denkliği elde edilir.

5.4 Cat^1 Leibniz-Rinehart Cebirler

5.4.1 Giriş

Cat^1-gruplar kavramı ilk olarak homotopi n-tipler için cebirsel model olarak (Loday, 1982) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra (Ellis, 1988) K-cebir kategorisinde cat^1-cebir kavramını tanımlamıştır. Bu tanımlamalar yardımıyla (Casas vd, 2008) çalışmasında cat^1-Leibniz n-cebirleri tanımlayarak araştırmacılara yeni bir bakış açısı sunmuşlardır. Bu bölümde cat^1 Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisi oluşturularak, bu kategorinin Leibniz-Rinehart çaprazlanmış modüller kategorisiyle denk olduğu gösterilecektir.

5.4.2 Cat^1 Leibniz-Rinehart cebirler

Tanım 5.6 $\mathfrak{L}$ *bir Leibniz-Rinehart cebir,* $s, t : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ *Leibniz-Rinehart cebir homomorfizmaları olsun. Bu durumda*

$$\begin{array}{ll} \textbf{\textit{i).}} & st = t \textit{ and } ts = s \\ \textbf{\textit{ii).}} & [\![\text{Çeks},\text{Çekt}]\!] = 0 = [\![\text{Çekt},\text{Çeks}]\!] \end{array}$$

şartları sağlanıyorsa $(\mathfrak{L}, s, t)$ *üçlüsüne Cat*^{1} *Leibniz-Rinehart cebir denir. Morfizmler tanım ve görüntü kümesiyle uyumlu Leibniz-Rinehart cebir homomorfizmleri olmak üzere Cat*^{1} *Leibniz-Rinehart cebirler kategorisi oluşturulur ve bu kategori* $\mathfrak{Cat}^1(\mathfrak{LR})$ *ile gösterilir.*

Aşağıdaki teoremin değişmeli cebir durumu için (Shammu,1992) ve Lie-Rinehart cebir durumu için (Aytekin,2010) bakılabilir.

Teorem 5.7 *Cat*^{1} *Leibniz-Rinehart cebirler kategorisi* $\mathfrak{Cat}^1(\mathfrak{LR})$ *ile Leibniz-Rinehart cebirlerin çaprazlanmış modülleri kategorisi* $\mathfrak{Xmod}(\mathfrak{LR})$ *denktir.*

İspat $(\mathfrak{L}, s, t)$ *bir Cat*^{1} *Leibniz-Rinehart cebir,* $M =$ *Çeks,* $N =$*Görs ve* $\partial = t|_M$ *olsun. Öncelikle* $\alpha_r s = \alpha_r$ *ve* $\alpha_r t = \alpha_r$ *olduğundan* $\alpha_r s = \alpha_r t$ *elde edilir.* N *nin* M *üzerine sağ ve sol etkisi* ${}^n m = [\![n, m]\!]$ *ve* $m^n = [\![m, n]\!]$ *olarak tanımlansın.*

ÇM a). $n \in N$ *ve* $m \in M$ *için*

$$\begin{aligned} \partial({}^n m) &= \partial[n, m]\!] \\ &= [\![\partial n, \partial m]\!] \\ &= [\![(\partial n) + n - n, \partial m]\!] \\ &= [\![(\partial n) - n, \partial m]\!] + [\![n, \partial m]\!] \end{aligned}$$

olur. $n \in$*Görs olduğundan* $s(n') = n$ *olacak şekilde* $n' \in \mathfrak{L}$ *vardır. Bu durumda*

$$\begin{aligned} \partial({}^{n}m) &= [\![(\partial n) - n, \partial m]\!] + [\![n, \partial m]\!] \\ &= [\![(\partial n) - s(n'), \partial m]\!] + [\![n, \partial m]\!] \\ &= [\![tn - ts(n'), tm]\!] + [\![n, \partial m]\!] \\ &= t[\![n - s(n'), m]\!] + [\![n, \partial m]\!] \\ &= t[\![n - n, m]\!] + [\![n, \partial m]\!] \\ &= t[\![0, m]\!] + [\![n, \partial m]\!] \\ &= [\![n, \partial m]\!] \end{aligned}$$

elde edilir.

ÇM b). $n \in N$ *ve* $m \in M$ *için*

$$\begin{aligned} \partial(m^{n}) &= \partial[\![m, n]\!] \\ &= [\![\partial m, \partial n]\!] \\ &= [\![\partial m, (\partial n) + n - n]\!] \\ &= [\![\partial m, (\partial n) - n]\!] + [\![\partial m, n]\!] \end{aligned}$$

olur. $n \in$*Görs olduğundan* $s(n') = n$ *olacak şekilde* $n' \in \mathfrak{L}$ *vardır. Bu durumda*

$$\begin{aligned} \partial(m^{n}) &= [\![\partial m, (\partial n) - n]\!] + [\![\partial m, n]\!] \\ &= [\![\partial m, (\partial n) - s(n')]\!] + [\![\partial m, n]\!] \\ &= [\![tm, tn - ts(n')]\!] + [\![\partial m, n]\!] \\ &= t[\![m, n - s(n')]\!] + [\![\partial m, n]\!] \\ &= t[\![m, n - n]\!] + [\![\partial m, n]\!] \\ &= t[\![m, 0]\!] + [\![\partial m, n]\!] \\ &= [\![\partial m, n]\!] \end{aligned}$$

elde edilir.

ÇM c). $m, m' \in M$ *için*

$$\begin{aligned} {}^{\partial m}m' &= [\![\partial m, m']\!] \\ &= [\![m - m + \partial m, m']\!] \\ &= [\![-m + \partial m, m']\!] + [\![m, m']\!] \end{aligned}$$

olur. $\partial m \in$ *Görs olduğundan* $s(X) = \partial(m)$ *olacak şekilde* $X \in \mathfrak{L}$ *vardır.*

$$\begin{aligned} t(\partial m - m) &= t(sX - m) \\ &= tsX - tm \\ &= sX - tm \\ &= tm - tm \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $(\partial m, m) \in$ *Çekt dir.* $m' \in$ *Çeks ve* $[\![$*Çekt*$,$ *Çeks*$]\!] = 0$ *olduğundan* $[\![\partial m - m, m']\!] = 0$ *dır. O halde*

$$^{\partial m}m' = [\![m, m']\!]$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $m, m' \in M$ *için*

$$\begin{aligned} m'^{\ \partial m} &= [\![m', \partial m]\!] \\ &= [\![m', m - m + \partial m]\!] \\ &= [\![m', -m + \partial m]\!] + [\![m', m]\!] \end{aligned}$$

olur. $\partial m \in$ *Görs olduğundan* $s(X) = \partial(m)$ *olacak şekilde* $X \in \mathfrak{L}$ *vardır.*

$$\begin{aligned} t(\partial m - m) &= t(sX - m) \\ &= tsX - tm \\ &= sX - tm \\ &= tm - tm \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $(\partial m, m) \in$ *Çekt dir.* $m' \in$ *Çeks ve* $[\![$*Çekt*$,$ *Çeks*$]\!] = 0$ *olduğundan* $[\![m', \partial m - m]\!] = 0$ *dır. O halde*

$$m'^{\ \partial m} = [\![m', m]\!]$$

elde edilir.

ÇM d). ∂*, aynı zamanda* A*-modül homomorfizmi olduğundan* $m \in M$ *ve* $a \in A$ *için*

$$\partial(am) = a\partial(m)$$

dir.

ÇM e). $m \in M$ *ve* $a \in A$ *için*

$$\begin{aligned} \alpha_r \partial(m)(a) &= (\alpha_r(\partial m))(a) \\ &= (\alpha_r(tm))(a) \\ &= (\alpha_r(sm))(a) \\ &= (\alpha_r(0))(a) \quad (\ \because\ m \in \text{Çeks}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak $\partial : M \longrightarrow N$ *Leibniz-Rinehart cebir çaprazlanmış modüldür.*

Tersine, $\partial : R \longrightarrow \mathfrak{L}$ *çaprazlanmış modül olsun.* $K = R \rtimes \mathfrak{L}$ *nin Leibniz-Rinehart* A*-cebir olduğunu bilinmektedir. s ve t ;*

$$\begin{aligned} s : \quad R \rtimes \mathfrak{L} &\longrightarrow R \rtimes \mathfrak{L} \\ (r, X) &\longmapsto (0, X) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrcl} t: & R \rtimes \mathfrak{L} & \longrightarrow & R \rtimes \mathfrak{L} \\ & (r,X) & \longmapsto & (0, \partial r + X) \end{array}$$

olarak tanımlansın. Her $(r,X),(r_1,X_1),(r_2,X_2) \in R \rtimes \mathfrak{L}$ *ve* $a \in A$ *için*

$$\begin{aligned} s(a(r,X)) &= s(ar,aX) \\ &= (0,aX) \\ &= a(0,X) \\ &= a(s(r,X)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} s[\![(r_1,X_1),(r_2,X_2)]\!] &= s([\![r_1,r_2]\!],[\![X_1,X_2]\!]) \\ &= (0,[\![X_1,X_2]\!]) \\ &= ([\![0,0]\!],[\![X_1,X_2]\!]) \\ &= [\![(0,X_1),(0,X_2)]\!] \\ &= [\![s(r_1,X_1),s(r_2,X_2)]\!] \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} t(a(r,X)) &= t(ar,aX) \\ &= (0,\partial(ar)+aX) \\ &= (0,a\partial(r)+aX)\ (\because\ \partial\ A\text{-modül morfizmi}) \\ &= (0,a(\partial(r)+X)) \\ &= a(0,(\partial(r)+X)) \\ &= a(t(r,X)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t[\![(r_1,X_1),(r_2,X_2)]\!] &= s([\![r_1,r_2]\!],[\![X_1,X_2]\!]) \\ &= (0,\partial([\![r_1,r_2]\!])+[\![X_1,X_2]\!]) \\ &= (0,[\![\partial(r_1),\partial(r_2)]\!]+[\![X_1,X_2]\!])\ (\because\ \partial\ \text{Leibniz cebir homomorfizmi}) \\ &= ([\![0,0]\!],[\![\partial(r_1)+X_1,\partial(r_2)+X_2]\!]) \\ &= [\![(0,\partial(r_1)+X_1),(0,\partial(r_2)+X_2)]\!] \\ &= [\![t(r_1,X_1),t(r_2,X_2)]\!] \end{aligned}$$

olduğundan s *ve* t *A-modül homomorfizmi ve Leibniz* $\mathbb{K}$*-cebir homomorfizmidirler. Aynı zamanda*

$$\begin{aligned} (\widetilde{\alpha_r}(s))(r,X) &= \widetilde{\alpha_r}(0,X) \\ &= \alpha_r(X) \\ &= \widetilde{\alpha_r}(r,X) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\widetilde{\alpha_r}(t))(r,X) &= \widetilde{\alpha_r}(0,\partial r+X) \\ &= \alpha_r(\partial r+X) \\ &= \alpha_r\partial r+\alpha_r X \\ &= 0+\alpha_r X \\ &= \widetilde{\alpha_r}(r,X) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{tikzcd} R \rtimes \mathfrak{L} \arrow[rr, shift left, "s"] \arrow[rr, shift right, "t"'] \arrow[dr, "\tilde{\alpha}_r"'] & & R \rtimes \mathfrak{L} \\ & Der(A) \arrow[ur, "\tilde{\alpha}_r"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olup s ve t Leibniz-Rinehart cebir homomorfizmdir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} s(t(r,X)) &= s(0, \partial r + X) \\ &= (0, \partial r + X) \\ &= t(r,X) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t(s(r,X)) &= t(0, X) \\ &= (0, X) \\ &= s(r,X) \end{aligned}$$

olup $st = t$ ve $ts = s$ elde edilir. s ve t nin tanımından

$$\text{\textit{Çeks}} = \{(r,0) | r \in R\} \text{ \textit{ve} } \text{\textit{Çekt}} = \{(r', -\partial r') | r' \in R\}$$

olup

$$\begin{aligned} [\![(r,0), (r', -\partial(r'))]\!] &= ([\![r, r']\!] + r^{-\partial r'} +^0 r', [\![0, -\partial r']\!]) \\ &= ([\![r, r']\!] - r^{\partial r'} + 0, 0) \\ &= ([\![r, r']\!] - [\![r, r']\!], 0) \\ &= (0,0) \end{aligned}$$

olur. Buradan $[\![\text{\textit{Çeks}}, \text{\textit{Çekt}}]\!] = 0$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} [\![(r', -\partial(r')), (r,0)]\!] &= ([\![r', r]\!] +^{-\partial r'} r + r'^{0}, [\![-\partial r', 0]\!]) \\ &= ([\![r', r]\!] -^{\partial r'} r + 0, 0) \\ &= ([\![r', r]\!] - [\![r', r]\!], 0) \\ &= (0,0) \end{aligned}$$

$[\![\text{\textit{Çekt}}, \text{\textit{Çeks}}]\!] = 0$ elde edilir. Sonuç olarak Cat^1 Leibniz-Rinehart cebirler kategorisi ile Leibniz-Rinehart cebirlerin çaprazlanmış modülleri kategorisinin denkliği gösterilmiş olur.

6. YÜKSEK MERTEBEDEN LEİBNİZ-RİNEHART ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

6.1 Giriş

Gruplar için 2-çaprazlanmış modüller kavramı (Conduché, 1984) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Lie cebir versiyonunu (Ellis, 1993) de ve Leibniz cebir versiyonu (Emir vd.,) de tanımlanılmıştır. Bu bölümde Leibniz-Rinehart 2-çaprazlanmış modüller tanımlanarak kategorisi oluşturulacaktır. Ayrıca bu kategorinin simplisel Leibniz-Rinehart cebirler kategorisiyle denk olduğu gösterilecektir.

6.2 Leibniz-Rinehart 2-Çaprazlanmış Modüller

Tanım 6.1 *P ve R birer Leibniz A-cebir, $\mathfrak{L}$ Leibniz-Rinehart cebir olmak üzere, $\mathfrak{L}$ nin R ve P üzerine etkisi var ve*

$$\{,\}_1 : R \times R \longrightarrow P \quad \{,\}_2 : R \times R \longrightarrow P$$

Peiffer Lifting (taşıyıcı) diye adlandırılan ve

$$\begin{aligned} \{r_0, r_1\}_1 &= \overline{[\![s_1(r_0), s_0(r_1) - s_1(r_1)]\!]} \\ \{r_0, r_1\}_2 &= \overline{[\![s_0(r_0) - s_1(r_0), s_1(r_1)]\!]} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen $\mathbb{K}$-bilineer fonksiyonları

$$P \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{L}$$

kompleksi ve her $p, p_1, p_2 \in P$, $r, r_0, r_1, r_2 \in R$, $a \in A$ ve $X \in \mathfrak{L}$ için

1). $\partial_2, \mathfrak{L}$ *nin* P *üzerine etkisini korur ve* $R \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{L}$ *bir ön çaprazlanmış modüldür.*

2). $\partial_2\{r_0, r_1\}_1 = r_0 \cdot \partial_1(r_1) - [\![r_0, r_1]\!],$

3). $\partial_2\{r_0, r_1\}_2 = \partial_1(r_0) \cdot r_1 - [\![r_0, r_1]\!],$

4). $\{\partial_2(p_1), \partial_2(p_2)\}_i = -[\![p_1, p_2]\!],\ i = 1, 2$

5). $\{\partial_2(p), r\}_1 = p \cdot \partial_1(r) - p \cdot r,$

$\{\partial_2(p), r\}_2 = -p \cdot r,$

6). $\{r, \partial_2(p)\}_1 = \partial_1(r) \cdot p - r \cdot p,$

$\{r, \partial_2(p)\}_2 = -r \cdot p,$

7). $\{r_1, r_2\}_i \cdot X = \{r_1 \cdot X, r_2\}_i - \{r_1, X \cdot r_2\}_i\ ,\ i = 1, 2$

8). $X \cdot \{r_1, r_2\}_1 = \{X \cdot r_1, r_2\}_1 - \{X \cdot r_2, r_1\}_2\ ,$

$X \cdot \{r_1, r_2\}_2 = \{X \cdot r_1, r_2\}_2 - \{X \cdot r_2, r_1\}_1\ ,$

9). $\{r_0, [\![r_1, r_2]\!]\}_1 = \{[\![r_0, r_1]\!], r_2\}_1 - \{[\![r_0, r_2]\!], r_1\}_1 + \{r_0, r_1\}_1 \cdot \partial_1(r_2) - \{r_0, r_2\}_1 \cdot \partial_1(r_1)$

10). $\{[\![r_0, r_1]\!], r_2\}_1 = r_0 \cdot \{r_1, r_2\}_1 + \{r_0, r_2\}_1 \cdot r_1$

11). $\{r_0, [\![r_1, r_2]\!]\}_2 = \{r_0, r_1\}_2 \cdot r_2 - \{r_0, r_2\}_2 \cdot r_1$

12). $\{[\![r_0, r_1]\!], r_2\}_2 = \{r_0, [\![r_1, r_2]\!]\}_2 + \{[\![r_0, r_2]\!], r_1\}_1 + \{r_0, r_2\}_2 \cdot \partial_1(r_1) + \partial_1(r_0) \cdot \{r_1, r_2\}_2$

13). *i)* $\partial_1(ar) = a\partial_1(r)$

ii) $\partial_2(ap) = a\partial_2(p)$

iii) $\alpha_r \partial_1(r)(a) = 0$

iv) $\alpha'_r \partial_2(p)(a) = 0$

şartları sağlanıyorsa bu liftinglerle beraber

$$P \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{L}$$

kompleksine Leibniz-Rinehart cebir 2-çaprazlanmış modül denir ve $(P, R, \mathfrak{L}, \partial_1, \partial_2)$ *şeklinde gösterilir (Yukarıdaki liftinglerin tanımındaki üst çizgiler cosetleri göstermektedir).*

6.3 Leibniz-Rinehart 2-Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

Tanım 6.2

$$P \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{L} \text{ ve } P_1 \xrightarrow{\partial'_2} R_1 \xrightarrow{\partial'_1} \mathfrak{L}_1$$

iki 2-çaprazlanmış modül,

$$f_2 : P \longrightarrow P'_1 \text{ ve } f_1 : R \longrightarrow R_1$$

iki Leibniz A*-cebir homomorfizması ve*

$$f_0 : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}_1$$

Leibniz-Rinehart cebir homomorfizması olsun. Bu durumda

$$P \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{L}$$

den

$$P_1 \xrightarrow{\partial_2'} R_1 \xrightarrow{\partial_1'} \mathfrak{L}_1$$

e 2-çaprazlanmış modül homomorfizmi

$$f_0\partial_1 = \partial_1' f_1, \;\; f_1\partial_2 = \partial_2' f_2$$

şartlarını sağlayan (f_2, f_1, f_0) *üçlüsüdür. Ayrıca* f_1 *ve* f_2 f_0*-equivariantdır. Böylece Leibniz-Rinehart cebirler için 2-çaprazlanmış modüller kategorisi oluşturulabilir. Bu kategori* $\mathfrak{X}_2\mathfrak{mod}(\mathfrak{LR})$ *ile gösterilir.*

Teorem 6.1 *Leibniz-Rinehart 2-çaprazlanmış modüller kategorisi* $\mathfrak{X}_2\mathfrak{mod}(\mathfrak{LR})$ *ile Moore kompleksinin boyu 2 olan simplisel Leibniz-Rinehart cebirler kategorisi* $\mathfrak{Simp}_{\leq 2}(\mathfrak{LR})$ *doğal denktir.*

İspat $\mathcal{L}$ *Moore kompleksinin boyu 2 olan simplisel Leibniz-Rinehart cebir ve* $\mathcal{L}$ *nin Moore kompleksi*

$$\cdots \longrightarrow 1 \longrightarrow 1 \longrightarrow N\mathfrak{L}_2 \longrightarrow N\mathfrak{L}_1 \longrightarrow N\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_0$$

olsun. Bu durumda $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0$, $R = N\mathfrak{L}_1$ *ve* $P = N\mathfrak{L}_2$ *olarak alalım ve Peiffer taşıyıcıyı*

$$\begin{array}{rcl} \{,\} : R \times R & \longrightarrow & P \\ (r_1, r_2) & \longmapsto & \{r_1, r_2\} = [\![s_1 r_1, s_1 r_2 - s_0 r_2]\!] \end{array}$$

olarak tanımlansın. Ayrıca ∂_2 *ve* ∂_1 *sırasıyla* d_2 *ve* d_1 *in* $N\mathfrak{L}_2$ *ve* $N\mathfrak{L}_1$ *e kısıtlanmışı olsun. Aynı zamanda* $N\mathfrak{L}_0$ *ın* $N\mathfrak{L}_1$ *üzerine etkilerini* $X \in N\mathfrak{L}_0$, $r \in N\mathfrak{L}_1$ *için*

$$^{X}r = [\![s_0 X, r]\!], \;\; r^X = [\![r, s_0 X]\!],$$

$N\mathfrak{L}_0$ *ın* $N\mathfrak{L}_2$ *üzerine etkilerinini* $X \in N\mathfrak{L}_0$, $p \in N\mathfrak{L}_2$ *için*

$$^{X}p = [\![s_1 s_0 X, p]\!] \;\; p^X = [\![p, s_1 s_0 X]\!],$$

ve $N\mathfrak{L}_1$ *in* $N\mathfrak{L}_2$ *üzerine etkilerini* $r \in N\mathfrak{L}_1$ *ve* $p \in N\mathfrak{L}_2$ *için*

$$r \cdot p = [\![s_1 r, p]\!], \;\; p \cdot r = [\![p, s_1 r]\!]$$

olarak alınsın. Öncelikle ispatlarda yardımcı olacağından Leibniz 2-çaprazlanmış modüller kategorisinde elde edilen aşağıdaki sonuçlar verilsin. Her $r \in R$ *ve* $p, p_1, p_2 \in R'$ *için*

$$[\![s_1 d_2 p_1, s_1 d_2 p_2 - s_0 d_2 p_2]\!] = [\![p_1, p_2]\!] = [\![s_1 d_2 p_1 - s_0 d_2 p_1, s_1 d_2 p_2]\!]$$

$$[\![s_0r - s_1r, s_1d_2p]\!] = [\![s_0r - s_1r, p]\!] \text{ ve } [\![s_1d_2p, s_0r - s_1r]\!] = [\![p, s_0r - s_1r]\!]$$

$$[\![s_1s_0d_1r - s_0r, p]\!] = 0 = [\![p, s_1s_0d_1r - s_0r]\!]$$

$$[\![s_1r, s_1d_2p - s_0d_2p]\!] = [\![s_1r, p]\!] \text{ ve } [\![s_1d_2p - s_0d_2p, s_1r]\!] = [\![p, s_1r]\!]$$

dir. Bu eşitlikler ve yukarıda verilen tanımlamalar yardımıyla

$$P \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{L}$$

nin Leibniz-Rinehart 2-çaprazlanmış modül olduğunu gösterilsin. Her $p, p_1, p_2 \in R'$, $r, r_0, r_1, r_2 \in R$ *ve* $X \in \mathfrak{L}$ *için*

1). ∂_2, $\mathfrak{L}$ *nin* P *üzerine etkisini korur.* $\mathfrak{L}$ *nin* R *üzerine etkisi var ve*

$$\begin{aligned} \partial_1\{r_0, X\} &= \partial_1[\![r_0, s_0X]\!] \\ &= [\![d_1r_0, d_1s_0X]\!] \\ &= [\![d_1r_0, X]\!] \quad (\because d_1s_0 = Id\,) \\ &= [\![\partial_1r_0, X]\!] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \partial_1\{X, r_0\} &= \partial_1[\![s_0X, r_0]\!] \\ &= [\![d_1s_0X, d_1r_0]\!] \\ &= [\![X, d_1r_0]\!] \quad (\because d_1s_0 = Id\,) \\ &= [\![X, \partial_1r_0]\!] \end{aligned}$$

olduğundan $R \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{L}$ *bir ön çaprazlanmış modüldür.*

2).

$$\begin{aligned} \partial_2\{r_0, r_1\}_1 &= \partial_2[\![s_1r_0, s_0r_1 - s_1r_1]\!] \\ &= [\![d_2s_1r_0, d_2s_0r_1 - d_2s_1r_1]\!] \\ &= [\![r_0, s_0d_1r_1 - r_1]\!] \quad (\because d_2s_1 = Id \text{ ve } d_2s_0 = s_0d_1) \\ &= [\![r_0, s_0d_1r_1]\!] - [\![r_0, r_1]\!] \\ &= r_0 \cdot \partial_1(r_1) - [\![r_0, r_1]\!] \end{aligned}$$

olur.

3).

$$\begin{aligned} \partial_2\{r_0, r_1\}_2 &= \partial_2[\![s_0r_0 - s_1r_0, s_1r_1]\!] \\ &= [\![d_2s_0r_0 - d_2s_1r_0, d_2s_1r_1]\!] \\ &= [\![s_0d_1r_0 - r_0, r_1]\!] \quad (\because d_2s_1 = Id \text{ ve } d_2s_0 = s_0d_1) \\ &= [\![s_0d_1r_0, r_1]\!] - [\![r_0, r_1]\!] \\ &= \partial_1(r_0) \cdot r_1 - [\![r_0, r_1]\!] \end{aligned}$$

olur.

4).

$$\begin{aligned}\{\partial_2(p_1),\partial_2(p_2)\}_1 &= [\![s_1d_2p_1, s_0d_2p_2 - s_1d_2p_2]\!] \\ &= [\![p_1, p_2]\!]\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}\{\partial_2(p_1),\partial_2(p_2)\}_2 &= [\![s_0d_2p_1 - s_1d_2p_1, s_1d_2p_2]\!] \\ &= [\![p_1, p_2]\!]\end{aligned}$$

olur.

5).

$$\begin{aligned}\{\partial_2(p), r\}_1 &= [\![s_1d_2p, s_0r - s_1r]\!] \\ &= [\![p, s_0r - s_1r]\!] \\ &= [\![p, s_0(r)]\!] - [\![p, s_1(r)]\!] \\ &= p\cdot\partial_1(r) - p\cdot r\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}\{\partial_2(p), r\}_2 &= [\![s_0d_2p - s_1d_2p, s_1r]\!] \\ &= [\![-p, s_1r]\!] \\ &= -p\cdot r\end{aligned}$$

olur.

6).

$$\begin{aligned}\{r, \partial_2(p)\}_1 &= [\![s_1r, s_0d_2p - s_1d_2p]\!] \\ &= [\![s_1(r), -p]\!] \\ &= -r\cdot p\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}\{r, \partial_2(p)\}_2 &= [\![s_0r - s_1r, s_1d_2p]\!] \\ &= [\![s_0r - s_1r, p]\!] \\ &= [\![s_0(r), p]\!] - [\![s_1(r), p]\!] \\ &= \partial_1(r)\cdot p - r\cdot p\end{aligned}$$

olur.

7).

$$
\begin{aligned}
& \{r_0, r_1\}_1 \cdot X \\
= \;& [\![s_1r_0, s_0r_1 - s_1r_1]\!] \cdot X \\
= \;& [\![[\![s_1r_0, s_0r_1 - s_1r_1]\!], s_1s_0X]\!] \\
= \;& [\![[\![s_1r_0, s_1s_0X]\!], s_0r_1 - s_1r_1]\!] - [\![s_1r_0, [\![s_1s_0X, s_0r_1 - s_1r_1]\!]]\!] \;\; (\because \textit{ Leibniz şartı}) \\
= \;& [\![[\![s_1r_0, s_1s_0X]\!], s_0r_1 - s_1r_1]\!] - [\![s_1r_0, [\![s_1s_0X, s_0r_1]\!] - [\![s_1s_0X, s_1r_1]\!]]\!] \\
= \;& [\![[\![s_1r_0, s_1s_0X]\!], s_0r_1 - s_1r_1]\!] - [\![s_1r_0, [\![s_0s_0X, s_0r_1]\!] - [\![s_1s_0X, s_1r_1]\!]]\!] \; (\because \; s_0s_0 = s_1s_0) \\
= \;& [\![s_1([\![r_0, s_0X]\!]), s_0r_1 - s_1r_1]\!] - [\![s_1r_0, s_0[\![s_0X, r_1]\!] - s_1[\![s_0X, r_1]\!]]\!] \\
= \;& \{[\![r_0, s_0X]\!], r_1\}_1 - \{r_0, [\![s_0X, r_1]\!]\}_1 \\
= \;& \{r_0 \cdot X, r_1\}_1 - \{r_0, X \cdot r_1\}_1
\end{aligned}
$$

olur ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
& \{r_0, r_1\}_2 \cdot X \\
= \;& [\![s_0r_0 - s_1r_0, s_1r_1]\!] \cdot X \\
= \;& [\![[\![s_0r_0 - s_1r_0, s_1r_1]\!], s_1s_0X]\!] \\
= \;& [\![[\![s_0r_0 - s_1r_0, s_1s_0X]\!], s_1r_1]\!] - [\![s_0r_0 - s_1r_0, [\![s_1s_0X, s_1r_1]\!]]\!] \;\; (\because \textit{ Leibniz şartı}) \\
= \;& [\![[\![s_0r_0, s_1s_0X]\!] - [\![s_1r_0, s_1s_0X]\!], s_1r_1]\!] - [\![s_0r_0 - s_1r_0, [\![s_1s_0X, s_1r_1]\!]]\!] \\
= \;& [\![[\![s_0r_0, s_0s_0X]\!] - [\![s_1r_0, s_1s_0X]\!], s_1r_1]\!] - [\![s_0r_0 - s_1r_0, [\![s_1s_0X, s_1r_1]\!]]\!] \; (\because \; s_0s_0 = s_1s_0) \\
= \;& [\![s_0([\![r_0, s_0X]\!]) - s_1([\![r_0, s_0X]\!]), s_1r_1]\!] - [\![s_0r_0 - s_1r_0, s_1[\![s_0X, r_1]\!]]\!] \\
= \;& \{[\![r_0, s_0X]\!], r_1\}_2 - \{r_0, [\![s_0X, r_1]\!]\}_2 \\
= \;& \{r_0 \cdot X, r_1\}_2 - \{r_0, X \cdot r_1\}_2
\end{aligned}
$$

elde edilir.

8).

$$
\begin{aligned}
& X \cdot \{r_0, r_1\}_1 \\
= \;& X \cdot [\![s_1r_0, s_0r_1 - s_1r_1]\!] \\
= \;& [\![s_1s_0X, [\![s_1r_0, s_0r_1 - s_1r_1]\!]]\!] \\
= \;& [\![[\![s_1s_0X, s_1r_0]\!], s_0r_1 - s_1r_1]\!] - [\![[\![s_1s_0X, s_0r_1 - s_1r_1]\!], s_1r_0]\!] \;\; (\because \textit{ Leibniz şartı}) \\
= \;& [\![[\![s_1s_0X, s_1r_0]\!], s_0r_1 - s_1r_1]\!] - [\![[\![s_1s_0X, s_0r_1]\!] - [\![s_1s_0X, s_1r_1]\!], s_1r_0]\!] \\
= \;& [\![[\![s_1s_0X, s_1r_0]\!], s_0r_1 - s_1r_1]\!] - [\![[\![s_0s_0X, s_0r_1]\!] - [\![s_1s_0X, s_1r_1]\!], s_1r_0]\!] \; (\because \; s_0s_0 = s_1s_0) \\
= \;& [\![s_1([\![s_0X, r_0]\!]), s_0r_1 - s_1r_1]\!] - [\![s_0[\![s_0X, r_1]\!] - s_1[\![s_0X, r_1]\!], s_1r_0]\!] \\
= \;& \{[\![s_0X, r_0]\!], r_1\}_1 - \{[\![s_0X, r_1]\!], r_0\}_2 \\
= \;& \{X \cdot r_0, r_1\}_1 - \{X \cdot r_1, r_0\}_2
\end{aligned}
$$

olur ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
& X \cdot \{r_0, r_1\}_2 \\
= \; & X \cdot [\![s_0r_0 - s_1r_0, s_1r_1]\!] \\
= \; & [\![s_1s_0X, [\![s_0r_0 - s_1r_0, s_1r_1]\!]]\!] \\
= \; & [\![[\![s_1s_0X, s_0r_0 - s_1r_0]\!], s_1r_1]\!] - [\![[\![s_1s_0X, s_1r_1]\!], s_0r_0 - s_1r_0]\!] \;\; (\because \textit{ Leibniz şartı}) \\
= \; & [\![[\![s_1s_0X, s_0r_0]\!] - [\![s_1s_0X, s_1r_0]\!], s_1r_1]\!] - [\![[\![s_1s_0X, s_1r_1]\!], s_0r_0 - s_1r_0]\!] \\
= \; & [\![[\![s_0s_0X, s_0r_0]\!] - [\![s_1s_0X, s_1r_0]\!], s_1r_1]\!] - [\![[\![s_1s_0X, s_1r_1]\!], s_0r_0 - s_1r_0]\!] \;\; (\because \; s_0s_0 = s_1s_0) \\
= \; & [\![s_0([\![s_0X, r_0]\!]) - s_1([\![s_0X, r_0]\!]), s_1r_1]\!] - [\![s_1[\![s_0X, r_1]\!], s_0r_0 - s_1r_0]\!] \\
= \; & \{[\![s_0X, r_0]\!], r_1\}_2 - \{[\![s_0X, r_1]\!], r_0\}_1 \\
= \; & \{X \cdot r_0, r_1\}_2 - \{X \cdot r_1, r_0\}_1
\end{aligned}
$$

elde edilir.

9).

$$
\begin{aligned}
\{r_0, [\![r_1, r_2]\!]\}_1 \; = \; & [\![s_1r_0, s_0([\![r_1, r_2]\!]) - s_1([\![r_1, r_2]\!])]\!] \\
= \; & [\![s_1r_0, [\![s_0r_1, s_0r_2]\!] - [\![s_1r_1, s_1r_2]\!]]\!] \\
= \; & [\![s_1r_0, [\![s_0r_1, s_0r_2]\!]]\!] - [\![s_1r_0, [\![s_1r_1, s_1r_2]\!]]\!] \\
= \; & ([\![[\![s_1r_0, s_0r_1]\!], s_0r_2]\!] - [\![[\![s_1r_0, s_0r_2]\!], s_0r_1]\!]) \\
& -([\![[\![s_1r_0, s_1r_1]\!], s_1r_2]\!] - [\![[\![s_1r_0, s_1r_2]\!], s_1r_1]\!]) \;\; (\because \textit{ Leibniz şartı}) \\
= \; & [\![[\![s_1r_0, s_0r_1]\!], s_0r_2]\!] - [\![[\![s_1r_0, s_0r_2]\!], s_0r_1]\!] \\
& -[\![[\![s_1r_0, s_1r_1]\!], s_1r_2]\!] + [\![[\![s_1r_0, s_1r_2]\!], s_1r_1]\!] \\
= \; & ([\![[\![s_1r_0, s_0r_1]\!], s_0r_2]\!] - [\![[\![s_1r_0, s_0r_2]\!], s_0r_1]\!] \\
& -[\![[\![s_1r_0, s_1r_1]\!], s_1r_2]\!] + [\![[\![s_1r_0, s_1r_2]\!], s_1r_1]\!]) \\
& +([\![[\![s_1r_0, s_1r_1]\!], d_2s_0r_2]\!] - [\![[\![s_1r_0, s_1r_1]\!], d_2s_0r_2]\!] \\
& +[\![[\![s_1r_0, s_1r_2]\!], d_2s_0r_1]\!] - [\![[\![s_1r_0, s_1r_2]\!], d_2s_0r_1]\!]) \\
= \; & [\![[\![s_1r_0, s_1r_1]\!], s_0r_2 - s_1r_2]\!] - [\![[\![s_1r_0, s_1r_2]\!], s_0r_1 - s_1r_1]\!] \\
& +[\![[\![s_1r_0, s_0r_1 - s_1r_1]\!], d_2s_0r_2]\!] - [\![[\![s_1r_0, s_0r_2 - s_1r_2]\!], d_2s_0r_1]\!] \\
= \; & [\![s_1([\![r_0, r_1]\!]), s_0r_2 - s_1r_2]\!] - [\![s_1([\![r_0, r_2]\!]), s_0r_1 - s_1r_1]\!] \\
& +[\![[\![s_1r_0, s_0r_1 - s_1r_1]\!], s_0d_1r_2]\!] - [\![[\![s_1r_0, s_0r_2 - s_1r_2]\!], s_0d_1r_1]\!] \; (\because \; d_2s_0 = s_0d_1) \\
= \; & \{[\![r_0, r_1]\!], r_2\}_1 - \{[\![r_0, r_2]\!], r_1\}_1 + [\![\{r_0, r_1\}_1, s_0d_1(r_2)]\!] - [\![\{r_0, r_2\}_1, s_0d_1(r_1)]\!] \\
= \; & \{[\![r_0, r_1]\!], r_2\}_1 - \{[\![r_0, r_2]\!], r_1\}_1 + \{r_0, r_1\}_1 \cdot \partial_1(r_2) - \{r_0, r_2\}_1 \cdot \partial_1(r_1)
\end{aligned}
$$

olur.

10).

$$
\begin{aligned}
\{\llbracket r_0, r_1\rrbracket, r_2\}_1 &= \llbracket s_1(\llbracket r_0, r_1\rrbracket), s_0r_2 - s_1r_2\rrbracket \\
&= \llbracket\llbracket s_1r_0, s_1r_1\rrbracket, s_0r_2 - s_1r_2\rrbracket \\
&= \llbracket\llbracket s_1r_0, s_1r_1\rrbracket, s_0r_2\rrbracket - \llbracket\llbracket s_1r_0, s_1r_1\rrbracket, s_1r_2\rrbracket \\
&= (\llbracket s_1r_0, \llbracket s_1r_1, s_0r_2\rrbracket\rrbracket + \llbracket\llbracket s_1r_0, s_0r_2\rrbracket, s_1r_1\rrbracket) \\
&\quad -(\llbracket s_1r_0, \llbracket s_1r_1, s_1r_2\rrbracket\rrbracket + \llbracket\llbracket s_1r_0, s_1r_2\rrbracket, s_1r_1\rrbracket) \;\; (\because \textit{ Leibniz şartı}) \\
&= (\llbracket s_1r_0, \llbracket s_1r_1, s_0r_2\rrbracket\rrbracket - \llbracket s_1r_0, \llbracket s_1r_1, s_1r_2\rrbracket\rrbracket) \\
&\quad +(\llbracket\llbracket s_1r_0, s_0r_2\rrbracket, s_1r_1\rrbracket - \llbracket\llbracket s_1r_0, s_1r_2\rrbracket, s_1r_1\rrbracket) \\
&= (\llbracket s_1r_0, \llbracket s_1r_1, s_0r_2\rrbracket - \llbracket s_1r_1, s_1r_2\rrbracket\rrbracket) + (\llbracket\llbracket s_1r_0, s_0r_2\rrbracket - \llbracket s_1r_0, s_1r_2\rrbracket, s_1r_1\rrbracket) \\
&= (\llbracket s_1r_0, \llbracket s_1r_1, s_0r_2 - s_1r_2\rrbracket\rrbracket) + (\llbracket\llbracket s_1r_0, s_0r_2 - s_1r_2\rrbracket, s_1r_1\rrbracket) \\
&= (\llbracket s_1r_0, \{r_1, r_2\}_1\rrbracket) + (\llbracket\{r_0, r_2\}_1, s_1r_1\rrbracket) \\
&= r_0 \cdot \{r_1, r_2\}_1 + \{r_0, r_2\}_1 \cdot r_1
\end{aligned}
$$

olur.

11).

$$
\begin{aligned}
\{r_0, \llbracket r_1, r_2\rrbracket\}_2 &= \llbracket s_0r_0 - s_1r_0, s_1(\llbracket r_1, r_2\rrbracket)\rrbracket \\
&= \llbracket s_0r_0 - s_1r_0, \llbracket s_1r_1, s_1r_2\rrbracket\rrbracket \\
&= \llbracket\llbracket s_0r_0 - s_1r_0, s_1r_1\rrbracket, s_1r_2\rrbracket - \llbracket\llbracket s_0r_0 - s_1r_0, s_1r_2\rrbracket, s_1r_1\rrbracket \;\; (\because \textit{ Leibniz şartı}) \\
&= \llbracket\{r_0, r_1\}_2, s_1r_2\rrbracket - \llbracket\{r_0, r_2\}_2, s_1r_1\rrbracket \\
&= \{r_0, r_1\}_2 \cdot r_2 - \{r_0, r_2\}_2 \cdot r_1
\end{aligned}
$$

elde edilir.

12).

$$
\begin{aligned}
\{[\![r_0,r_1]\!],r_2\}_2 &= [\![s_0([\![r_0,r_1]\!])-s_1([\![r_0,r_1]\!]),s_1r_2]\!]\\
&= [\![[\![s_0r_0,s_0r_1]\!]-[\![s_1r_0,s_1r_1]\!],s_1r_2]\!]\\
&= [\![[\![s_0r_0,s_0r_1]\!],s_1r_2]\!]-[\![[\![s_1r_0,s_1r_1]\!],s_1r_2]\!]\\
&= ([\![s_0r_0,[\![s_0r_1,s_1r_2]\!]]\!]+[\![[\![s_0r_0,s_1r_2]\!],s_0r_1]\!])\\
&\quad -([\![s_1r_0,[\![s_1r_1,s_1r_2]\!]]\!]+[\![[\![s_1r_0,s_1r_2]\!],s_1r_1]\!])\ \ (\because\ \textit{Leibniz şartı})\\
&= [\![s_0r_0,[\![d_2s_1s_0r_1,s_1r_2]\!]]\!]+[\![[\![d_2s_1s_0r_0,s_1r_2]\!],s_0r_1]\!]\ \ (\because d_2s_1=Id)\\
&\quad -[\![s_1r_0,[\![s_1r_1,s_1r_2]\!]]\!]-[\![[\![s_1r_0,s_1r_2]\!],s_1r_1]\!]\\
&= [\![s_0r_0,[\![d_2s_1s_1r_1,s_1r_2]\!]]\!]+[\![[\![d_2s_1s_1r_0,s_1r_2]\!],s_0r_1]\!]\ \ (\because s_1s_0=s_1s_1)\\
&\quad -[\![s_1r_0,[\![s_1r_1,s_1r_2]\!]]\!]-[\![[\![s_1r_0,s_1r_2]\!],s_1r_1]\!])\\
&= [\![s_0r_0,[\![s_1r_1,s_1r_2]\!]]\!]+[\![[\![s_1r_0,s_1r_2]\!],s_0r_1]\!]\ \ (\because d_2s_1=Id)\\
&\quad -[\![s_1r_0,[\![s_1r_1,s_1r_2]\!]]\!]-[\![[\![s_1r_0,s_1r_2]\!],s_1r_1]\!])\\
&\quad +([\![d_2s_0r_0,[\![s_1r_1,s_1r_2]\!]]\!]-[\![d_2s_0r_0,[\![s_1r_1,s_1r_2]\!]]\!])\\
&\quad +([\![[\![s_1r_0,s_1r_2]\!],d_2s_0r_1]\!]-[\![[\![s_1r_0,s_1r_2]\!],d_2s_0r_1]\!])\\
&= [\![s_0r_0-s_1r_0,[\![s_1r_1,s_1r_2]\!]]\!]+[\![[\![s_1r_0,s_1r_2]\!],s_0r_1-s_1r_1]\!]\\
&\quad +[\![[\![s_0r_0-s_1r_0,s_1r_2]\!],d_2s_0r_1]\!]+[\![d_2s_0r_0,[\![s_0r_1-s_1r_1,s_1r_2]\!]]\!]\\
&= [\![s_0r_0-s_1r_0,s_1([\![r_1,r_2]\!])]\!]+[\![s_1([\![r_0,r_2]\!]),s_0r_1-s_1r_1]\!]\\
&\quad +[\![[\![s_0r_0-s_1r_0,s_1r_2]\!],s_0d_1r_1]\!]+[\![s_0d_1r_0,[\![s_0r_1-s_1r_1,s_1r_2]\!]]\!]\ (\because\ d_2s_0=s_0d_1)\\
&= \{r_0,[\![r_1,r_2]\!]\}_2+\{[\![r_0,r_2]\!],r_1\}_1+[\![\{r_0,r_2\}_2,s_0d_1(r_1)]\!]+[\![s_0d_1(r_0),\{r_1,r_2\}_2]\!]\\
&= \{r_0,[\![r_1,r_2]\!]\}_2+\{[\![r_0,r_2]\!],r_1\}_1+\{r_0,r_2\}_2\cdot\partial_1(r_1)+\partial_1(r_0)\cdot\{r_1,r_2\}_2
\end{aligned}
$$

şartlarıda sağlanır. Aynı zamanda her $a\in A$, $r\in R$ için,

i).

$$
\begin{aligned}
\partial_1(ar) &= d_1(ar)\\
&= ad_1(r)\\
&= a\partial_1(r)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

ii). *Her $p\in P$ için*

$$
\begin{aligned}
\partial_2(ap) &= d_2(ap)\\
&= ad_2(p)\\
&= a\partial_2(p)
\end{aligned}
$$

olur.

iii). *$\mathcal{L}$ Moore kompleksinin boyu 2 olan simplisel Leibniz-Rinehart cebir olduğundan*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathfrak{L}_2 \arrow[r, shift left=3, "d_0"] \arrow[r, shift left=1, "d_1"] \arrow[r, shift right=1, "d_2"] \arrow[d, "\alpha''_r"] & \mathfrak{L}_1 \arrow[l, bend left, "s_0"] \arrow[l, bend left=40, "s_1"] \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\alpha'_r"] & \mathfrak{L}_0 \arrow[l, bend left, "s_0"] \arrow[d, "\alpha_r"] \\
 & Der(A) \arrow[r, equal] & Der(A) \arrow[r, equal] & Der(A)
\end{tikzcd}$$

diyagramı vardır. Bu diyagram normalizasyon funktor sayesinde

$$\begin{tikzcd}
N\mathfrak{L}_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\alpha''_r=0"] & N\mathfrak{L}_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\alpha'_r=0"] & N\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_0 \arrow[d, "\alpha_r=0"] \\
Der(A) \arrow[r, equal] & Der(A) \arrow[r, equal] & Der(A)
\end{tikzcd}$$

haline gelir. d_1 Leibniz-Rinehart homomorfizmi olduğundan

$$\alpha'_r = \alpha_r d_1$$

dir. Bu ifade ikinci diyagram için de geçerli olacağından

$$\alpha'_r = \alpha_r \partial_1 = 0$$

olacaktır. Yani,

$$\begin{aligned}
(\alpha_r(\partial_1(r)))(a) &= (\alpha_r\partial_1(r))(a) \\
&= (\alpha'_r(r))(a)(\because \textit{ Diyagram değişmeli}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur.

iv). *Benzer şekilde,*

$$\begin{aligned}
(\alpha'_r(\partial_2(p)))(a) &= (\alpha'_r\partial_2(p))(a) \\
&= (\alpha''_r(p))(a)(\because \textit{ Diyagram değişmeli}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$P \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{L}$$

Leibniz-Rinehart 2-çaprazlanmış modüldür.

Tersine, $P \xrightarrow{\partial_2} R \xrightarrow{\partial_1} \mathfrak{L}$ Leibniz-Rinehart 2-çaprazlanmış modül olsun. Öncelikle $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0$ olarak alınsın. $\mathfrak{L}$ nin R üzerine etkisi yardımıyla $\mathfrak{L}_1 = R \rtimes \mathfrak{L}$ yarı-direkt çarpımını *oluşturulabilir. Bu durumda*

$$\begin{array}{rccl} d_0: & R \rtimes \mathfrak{L} & \longrightarrow & \mathfrak{L} \\ & (r,X) & \longmapsto & X \\ d_1: & R \rtimes \mathfrak{L} & \longrightarrow & \mathfrak{L} \\ & (r,X) & \longmapsto & \partial_1(r)+X \\ s_0: & \mathfrak{L} & \longrightarrow & R \rtimes \mathfrak{L} \\ & X & \longmapsto & (0,X) \end{array}$$

homomorfizmaları vardır. Ayrıca $r \in R$ nin $p \in P$ üzerine etkileri

$$r \cdot p = ^{\partial_1 r} p - \{r, \partial_2 p\}_2$$

$$p \cdot r = p^{\partial_1 r} - \{\partial_2 p, r\}_1$$

olarak verilmektedir. Bu etki yardımıyla $P \rtimes R$ yarı-direkt çarpımını oluşturulabilir. Bu durumda $(r,X) \in R \rtimes \mathfrak{L}$ nin $(p,r_1) \in P \rtimes R$ üzerine etkisi

$$^{(r,X)}(p,r_1) = (^X p + ^{\partial_1 r} p + \{r,r_1\}_2, ^X r_1 + [\![r,r_1]\!])$$

şeklindedir. Bu etki yardımıyla $\mathfrak{L}_2 = (P \rtimes R) \rtimes (R \rtimes \mathfrak{L})$ yarı-direkt çarpımını oluşturulabilir. O halde

$$\begin{array}{rccl} d_0: & (P \rtimes R) \rtimes (R \rtimes \mathfrak{L}) & \longrightarrow & R \rtimes \mathfrak{L} \\ & (p,r_1,r_2,X) & \longmapsto & (r_2,X) \\ d_1: & (P \rtimes R) \rtimes (R \rtimes \mathfrak{L}) & \longrightarrow & R \rtimes \mathfrak{L} \\ & (p,r_1,r_2,X) & \longmapsto & (r_1+r_2,X) \\ d_2: & (P \rtimes R) \rtimes (R \rtimes \mathfrak{L}) & \longrightarrow & R \rtimes \mathfrak{L} \\ & (p,r_1,r_2,X) & \longmapsto & (r_1,\partial_1(r_2)+X) \\ s_0: & R \rtimes \mathfrak{L} & \longrightarrow & (P \rtimes R) \rtimes (R \rtimes \mathfrak{L}) \\ & (r,X) & \longmapsto & (0,0,r,X) \\ s_1: & R \rtimes \mathfrak{L} & \longrightarrow & (P \rtimes R) \rtimes (R \rtimes \mathfrak{L}) \\ & (r,X) & \longmapsto & (0,r,0,X) \end{array}$$

homomorfizmleri vardır.

$$\begin{aligned} d_0^1 d_1^2(p,r_1,r_2,X) &= d_0^1(r_1+r_2,X) \\ &= X \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_0^1 d_0^2(p,r_1,r_2,X) &= d_0^1(r_2,X) \\ &= X \end{aligned}$$

olduğu için $d_0^1 d_1^2 = d_0^1 d_0^2$ elde edilir.

$$\begin{aligned} d_0^1 d_2^2(p,r_1,r_2,X) &= d_0^1(r_1,\partial_1(r_2)+X) \\ &= \partial_1(r_2)+X \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_1^1 d_0^2(p, r_1, r_2, X) &= d_1^1(r_2, X) \\ &= \partial_1(r_2) + X \end{aligned}$$

olacağı için $d_0^1 d_2^2 = d_1^1 d_0^2$ *elde edilir.*

$$\begin{aligned} d_1^1 d_2^2(p, r_1, r_2, X) &= d_1^1(r_1, \partial_1(r_2) + X) \\ &= \partial_1(r_1) + \partial_1(r_2) + X \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_1^1 d_1^2(p, r_1, r_2, X) &= d_1^1(r_1 + r_2, X) \\ &= \partial_1(r_1 + r_2) + X \\ &= \partial_1(r_1) + \partial_1(r_2) + X \end{aligned}$$

olduğu için $d_1^1 d_2^2 = d_1^1 d_1^2$ *elde edilir.*

$$\begin{aligned} s_0^2 s_0^1(X) &= s_0^2(0, X) \\ &= (0, 0, 0, X) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} s_1^2 s_0^1(X) &= s_1^2(0, X) \\ &= (0, 0, 0, X) \end{aligned}$$

olacağı için $s_0^2 s_0^1 = s_1^2 s_0^1$ *elde edilir. Bir başka deyişle bu homomorfizmalar simplisel özdeşlikleri sağlar. O halde 2-parçalanmış simplisel Leibniz-Rinehart cebir* $\mathcal{L} = \{\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_0\}$ *bulunur. Sonuç olarak istenilen denklik elde edilir.*

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

7.1 Sonuçlar

Bu tezde öncelikle daha önce tanmlanmış olan Lie-Rinehart cebirlerden yola cıkarak Lie-Rinehart cebirlerin genellemesi olan Leibniz-Rinehart cebirleri, homomorfizmleri ve kategorisi tanımlanmıştır. Leibniz-Rinehart cebirler kategorisinde etki tanımlanıp bu tanım yardımıyla yarı-direkt çarpım ve çaprazlanmış modüller tanımlanmıştır. Cat^1-Leibniz-Rinehart cebirler ve simplisel Leibniz-Rinehart cebirler tanımlanıp çarazlanmış modüllerle aralarındaki kategoriksel olarak denklik gösterilmiş ve yine $Simp_{\leq 2}$ den yola çıkarak 2 çaprazlanmış modüller tanımlanıp kategorisi oluşturulmuştur.

7.2 Öneriler

Lie-Rinehart cebirler üzerinde yapılan tüm çalışmalar bu tezde elde edilen tanım ve kavramlar kullanılarak Leibniz-Rinehart cebirler kategorisi üzerine taşınabilir ve yeni çalışmalar ortaya çıkabilir. Ayrıca yukarıda ispatlanan Cat^1-Leibniz-Rinehart cebirler ve simplisel Leibniz-Rinehart cebirler ve çarazlanmış modüllerle aralarındaki kategoriksel denklik n boyut içinde gösterilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aytekin, A., 2010, Crossed module of Lie-Rinehart Algebras, Phd Tesis, Eskişehir Osmangazi University.

Awodey, S., 2006, Category Theory, Oxford Logic Guides, 49.

Barr, M., Wells, C, 2005, Toposes, Triples and Theories, Reprints in Theory and Applications of Categories, 12: 1-288.

Baues, H.J., 1991, Combinatorial Homotopy and 4-Dimensional Complexes, Berlin etc.: Walter de Gruyter.

Biyogmam, G.R., 2013, A study of n-subracks, Quasigroups Related Systems 21.1, 19-28.

Brieskorn, E., 1988, Automorphic Sets and Singularities, In ”Braids (Santa Cruz, CA, 1986)”, Contemporary Mathematics, 78: 45-115.

Brown, R, 1984, Coproducts of crossed P-modules: Applications to Second Homotopy Groups and to the homology of Groups, Topology, 23: 337-345.

Brown, R., Golasinski, M., 1989, A Model Structure for The Homotopy Theory of crossed complexes, Cah. Topologie Géom. Différ. Catégoriques, 30(1): 61-82.

Brown, R., Higgins, P.J., 1978, On the connection between the second relative homotopy groups of some related spaces, Proceedings of the London Mathematical Society, 3.2: 193-212.

Brown, R., Huebschman, J., 1982, Identities among relations, Low dimensional topology, Ed. R. Brown and TL Thickstun, London Math. Soc. Lecture Notes 46: 153-202.

Cabello, J.G., Garzón, A.R., 1995, Closed Model Structures for Algebraic Models of n-types, Journal of Pure and Applied Algebra, 103: 287-302.

Casas, J. M., Datuashvili,T., Ladra, M.,2004, Crossed modules for Lie-Rinehart algebras, Algebra, 1, 192-201.

Casas, J. M., Datuashvili,T., Ladra, M.,2004, Triple cohomology of Lie-Rinehart algebras and the canonical class of associative algebras., Algebra, 1, 144-163.

Casas, J. M., Datuashvili,T., Ladra, M.,2014, Left-right noncommutative Poisson algebras, Cent. Eur. J. Math., 12, 57-78.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Casas,J. M., Khmaladze E., Ladra, M.,2008, Crossed modules for Leibniz n-algebras,Forum Mathematicum, 20, 841-858.

Cigoli,S., Metere,G, Montoli,A,2013, Obstruction theory in action accessible categories, Journal of Algebra, 1, 27-46.

Conduché, D., 1984, Modules Croisés Généralisés de Longueur 2, Journal of Pure and Applied Algebra, 34, 155-178,

Crans, A., Wagemann, F., 2014, Crossed Modules of Racks, Homology, Homotopy and its Application, 16(2), 85-106.

Emir, K.,Çetin, S., Üçeş, Ö. 2016, 3-Dimensional Leibniz Algebras, Algebras, Groups and Geometries, Hadronic Press, 33, 165-180.

Demir,İ., Misra,K. C.,Stitzinger, E. , On some structures of Leibniz algebras.,2014, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 41-54.

Elvira-Donazar, C., Hernandez-Paricio, L.J., 1995, Closed Model Categories for the n-type of Spaces and Simplicial Sets, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 118: 93-103.

Emir, K., Akay, H.G., 2016, Pullback Crossed Modules in the Category of Racks, arXiv:1611.07007.

Farinati, M., Guccione, J.A., Guccione, J.J., 2014, The Homology of Free Racks and Quandles, Communications in Algebra, 42: 3593-3606.

Fenn, R., Rourke, C., 1992, Racks and Links in Codimension Two, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 1: 343-406.

Grabowska, K. , Grabowski,J.,Urbaǹski, P. ,2006, Geometrical Mechanics on algebroids, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. ,3, 559-575.

Grabowski,J.,2003, Quasi-derivations and QD-algebroids, Rep. Math. Phys., 52, 445-451.

Grabowski,J.,Khudaverdyan, D., Poncin,N.,2013, The supergeometry of Loday algebroids, J. Geom. Mech, 5, 185-213.

Grabowski,J. , Urbaǹski, P., 1999, Algebroids – general differential calculi on vector bundles, J. Geom. Phys.,31, 111-141.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Huebschmann, J. ,1990, Poisson cohomology and quantization, J. Reine Angew. Math., 408, 57-113.

Jubin,B.,Poncin, N., Uchino, K., 2016,Free Courant and Derived Leibniz Pseudoalgebras, J. Geom. Mech., 8, 71-97.

Kauffman, L.H., 1991, Knot-Crystals Classical Knot Theory in Modern Guise, Journal of Knots and Physics, 1.

Loday,J.-L.,1993, Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz, L'Enseignement Mathématique, 39, 269-292.

Loday,J.-L., Pirashvili,T.,1993 , Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology, Math. Ann., 296, 139-158.

Loday, J.L., 1982, Spaces With Finitely Many Non-trivial Homotopy Groups, Journal of Pure and Applied Algebra, 24(2): 179-202.

Ryder, H.J., 1993, The structure of racks, Ph.D .Thesis, University of Warwick.

Shammu, N.M., 1992, Algebraic and categorical structure of categories of crossed modules of algebras, Ph.D. Thesis, University College of North Wales.

Stanovský, D, 2004, Left Distributive Left Quasigroup, PhD Thesis, Charles University.

Whitehead, J.H.C., 1941, On adding Relations to Homotopy Groups, Annals of Mathematics Second Series, 42: 409-428.

Whitehead, J.H.C., 1946, Note on a previous paper entitled On adding relations to homotopy groups, Annals of Mathematics, 2, 47: 806-810.

Winker, S.K., 1984, Quandles, knot invariants, and the n-fold branched cover, PhD Thesis, University of Illinois at Chicago.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Selim Çetin

Uyruğu: T.C

Doğum Yeri, Tarihi: Tavşanlı, 24.12.1983

Medeni Hali: Evli

İş Adresi: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü, F-1 Blok No:208, Eskişehir

E-posta: selimc@ogu.edu.tr

Eğitim Bilgileri

Doktora:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi FBE Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı (2012-)

Yüksek Lisans:

Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (Topoloji) (2007-2010)

Lisans

Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2002-2007)

İş Deneyimi:

Araştırma Görevlisi, Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Topoloji (01.11.2012-02.05.2013)

Araştırma Görevlisi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü (02.05.2013-)

Selim Çetin