Süpermanifold ve Süpersimetri Üzerinde Kinematik Yapılar

Hatice Tozak

DOKTORA TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Temmuz 2017

Kinematic Structures on Supermanifold and Supersymmetry

Hatice Tozak

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Sciences

July 2017

Süpermanifold ve Süpersimetri Üzerinde Kinematik Yapılar

Hatice Tozak

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Cumali Ekici

”Bu Tez ESOGÜ BAP tarafından 2013-291 no’lu proje çerçevesinde desteklenmiştir.”

Temmuz 2017

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı doktora öğrencisi Hatice Tozak' ın DOKTORA TEZİ olarak hazırladığı "**Süpermanifold ve Süpersimetri Üzerinde Kinematik Yapılar**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Cumali Ekici

İkinci Danışman : Doç. Dr. Cansel Yormaz

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Cumali Ekici

Üye : Prof. Dr. Ali Görgülü

Üye : Prof. Dr. Nedim Değirmenci

Üye : Prof. Dr. Nülifer Özdemir

Üye : Doç. Dr. Özcan Gelişgen

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet Erşahan

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Cumali Ekici danışmanlığında hazırlamış olduğum "Süpermanifold ve Süpersimetri Üzerinde Kinematik Yapılar" başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

13/07/2017

Hatice Tozak

ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı, süpermanifold ve süpersimetri üzerinde kinematik yapıları incelemek, uzay-zaman parametresi ile süperuzay formlarında kinematik sistemleri elde ederek geometrik ve fiziksel sonuçlar üretmektir.

Çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır. İlk olarak, giriş bölümünde konunun başlangıcı ve amacından bahsedilmiştir. İkinci bölüm konunun tarihsel gelişimi ile ilgili bazı bilgiler içermektedir. Üçüncü bölümde ise süpersayılar, süpermanifoldlar, total süper-Öklid uzayı, süpervektör uzayı ve operatörler için temel tanım ve teoremler ile çalışmamızın sonraki bölümlerinde kullanılacak tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde süperdüzgün süpereğri kinematiği, süperuzayın daha özel hali olan total süper-Öklid uzayının tek ve çift kısımlarında Frenet süpervektörleri ve onların türevleri yardımıyla araştırılmıştır. Bu konuyla ilgili bazı uygulamalara yer verilmiştir. Son bölümde de, total süper-Öklid uzayında involüt-evolüt, Bertrand ve Mannheim gibi bazı süpereğri çiftleri tanımlanmış ve total süper-Öklid uzayının tek ve çift olma durumunda bu süpereğri çiftleri için, hareketli parçacığın kinematiğini tanımlayan, Frenet çatıları araştırılmıştır. Ayrıca, bu süpereğri çiftleri için bazı teoremler elde edilmiş ve uygulamalara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Süpermanifold, süperuzay, süpersimetri, süpereğri, Bertrand çifti.

SUMMARY

The aim of this thesis is to investigate kinematic structures on supermanifold and supersymmetry, to obtain geometric and physical results by getting kinematical systems in superspace forms by using space-time parameter.

The study consists of five chapters. Firstly, the beginning and the aim of the topic are mentioned in the introduction section. Second chapter contains some information about the historical development of the topic. The basic definitions and theorems for supernumbers, supermanifolds, total super-Euclidean space, supervector space and operations are given and also,definitions and theorems to be used in the next sections of our thesis are included in the third chapter. In the fourth chapter, kinematic of a super smooth supercurve is investigated by dealing with Frenet supervectors and their derivatives of it on even and odd parts of total super-Euclidean space which is a special case of the superspace. Moreover, some examples are given in this case. In the last chapter, some curve couples such as involute-evolute, Bertrand and Mannheim are defined and Frenet frames, which describe the kinematic properties of a particle moving along a continuous, for these supercurve couples are investigated on even and odd parts of total super-Euclidean space. Also, several theorems for these supercurve couples are obtained and examples are given.

Keywords: Supermanifold, superspace, supersymmetry, supercurve, Bertrand couple.

TEŞEKKÜR

Süpermanifold ve süpersimetri üzerinde kinematik yapılar adlı tez çalışmamda, engin bilgisi ve deneyimleri ile bana emek harcayan, çok kıymetli danışmanım Sayın

Prof. Dr. Cumali Ekici

hocama, benim bu tez çalışmamda başarılı olacağıma inanan ve bu anlamda bana desteklerini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Cansel Yormaz'a, beni sevgiyle yetiştirip buralara getiren ve desteklerini her zaman üzerimde hissettiğim değerli aileme, tüm kalbimle teşekkürlerimi ifade etmeyi bir borç bilirim.

Ayrıca, doktora tez çalışmam esnasında 201319A213 (ESOGU-BAP: 2013-291) no'lu proje kapsamındaki destekleri ve yardımları için Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu'na teşekkürlerimi sunarım.

Hatice Tozak

Temmuz 2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
M	Süpermanifold
ψ_*	Türev Dönüşümü
E,B,F	C^∞ – manifoldlar
π	C^∞ – dönüşüm
$\xi=(E,\pi,B,F)$	Diferensiyellenebilir Lif Demeti
$\xi^1\times\xi^2$	ξ^1 ve ξ^2 Demetlerinin Çarpım Demeti
$T(^kM)$	^kM C^∞ – manifoldunun Tanjant Demeti
$\wedge V^*$	$\mathcal{F}$ Cismi Üzerinde Bir Cebir
B_L	Gradded Cebiri
B_L^{m+n}	(m,n) – boyutlu Total Süper-Öklid Uzayı
$\left(B_L^{m+n}\right)_0$	Süperuzayın Çift Kısmı
$\left(B_L^{m+n}\right)_1$	Süperuzayın Tek Kısmı
∇	Levi-Civita Koneksiyon (Chern Koneksiyon)
$_ie=(\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^i}})_p$	Çift Baz Süpervektörleri
$e_i=(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^i}})_p$	Tek Baz Süpervektörleri
$\varepsilon^{(L)}$	Çift Dönüşüm
s	Tek Dönüşüm
$\|.\|$	B_L Üzerinde Norm
G_if	f Fonksiyonunun i-yinci Türevi
$c(t,\theta)$	Süpereğri
$M(t,\theta)$	Süpermatris
(V,c)	Süperkoordinat Komşuluğu
d	Süper Noktalar Arasındaki Uzaklık
$A(t,\theta)$	Süpersayı

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Yaşadığımız dünyada, enerji ve harekete dayalı olayların veya hareketlerin modellenmesi gerektiğini düşünen bilim adamları bu konulara oldukça ilgi duymaktadırlar. Yakın zamanda genel diferensiyel geometriye anti değişmeli değişkenler eklenerek süpersimetrideki fermion ve bason çalışmalarındaki gibi süper öneki konularak genişletilmiştir. Süpermanifold çalışmalarının tarihi başlangıcı iki ayrı yapıda toplanır. İlki, 1970 yıllarında Berezin, Leites ve Konstant isimli matematikçiler tarafından, kuantum teorisi çalışmalarına matematiksel bir katkı getirmek amacıyla çalışılmaya başlanmıştır. İkincisi ise Rogers, DeWitt ve Jadezyk tarafından geliştirilen, daha geometrik yapıya dayanan Grasman cebirinin çift ve tek elemanları olarak tanımlanan noktaların oluşturduğu süperuzay çalışmalarıdır.

Minkowski, 1909 yılında Maxwell'in elektrodinamigi ile Einstein'in özel görelilik teorilerinden yararlanarak, doğanın, bilinen üç boyutuna bir dördüncü boyut ekleyerek tasvir edilebileceğini belirtmiştir. Einstein ise bu görüşü destekleyecek şekilde 1915 yılında yayınladığı Genel Görelilik Teorisinde, genelleştirerek uzay-zaman kavramı kullanarak doğayı tasvir etmiştir. Parçacık fiziğinin standart modeli, fizik yasalarını değişmez bırakan iç dönmelerin grubu ile tanımlanır ve bu dönmelere ayar (gauge) dönüşümleri denir. Süpersimetri, farklı istatistiksel dağılımlarda olan fermiyonlar ve bozonlar arasındaki dönmelerin uzay zaman simetrileriyle birleştirilmesidir. Başka bir deyişle, süpersimetri, belirli Lagrange alan teorisi modellerinin bozonik ile fermiyonik alanları arasındaki simetridir. Ayrıca süpersimetri, her parçacığın ve onun süper eşinin aynı kütleye sahip olması gerektiğini öngörür. Şimdiye kadar süpersimetrik bir eş parçacığın gözlenememiş olmasını ise gözlemlediğimiz uzayda süpersimetrinin kırılmış olmasına bağlanır. Bu nedenle parçacık fiziğindeki uzay-zaman simetrileri süpersimetri konusunu önemli kılar. Süpersimetri, dört boyutlu relativistik parçacık teorisinde S-matrisinin iç simetrileri ile birleştirebilen tek simetridir. Bu uzayın çeşitli geometrik özellikleri, özellikle 1990 sonrasında önemli bir çalışma alanına dönüşmüştür (Salam ve Strathdee, 1974; Aitchson, 2007; Bagchi, 2001; Bellucci, 2006; Bellucci ve Krivonos, 2006). Hatta süpersimetrinin tanımlanması ile bu çalışmalar birleşince fiziksel gerçekliğe matematiksel yorum katmak mümkün olmuştur. Uzay-zaman parametresi ile süperuzay formlarında kinematik sistemlerin elde edilmesi geometrik ve fiziksel sonuçlar üretmektedir. Böylelikle içinde bulunduğumuz uzay yapısında, hareket ve enerji korunumu fiziksel ve grafiksel yöntemlerle daha kolay modellenecektir. Ayrıca, son zamanlarda atom parçalanmasıyla gündemde olan boson ve fermion alanlarına dair çalışmaları da matematiksel olarak kolaylaştıracaktır.

Süpermanifold konusundaki çalışmalar Rogers (1980) ve De Witt (1992) tarafından geliştirilmiştir. Aynı zamanda Rogers tarafından tanımlanan yapılar temel alınarak, total süper-Öklid uzayı tanımlanmış süperdüzgün süpereğri yapıları kurulmuştur. Cristea (2005) yayınladığı makalede bu süpereğriler üzerinde Frenet çatıları oluşturmuştur.

Eğri ve yüzey teorisinde özel eğri çiftleri, önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle, eğri çiftleri hakkında farklı uzay yapıları üzerinde de birçok çalışma bulunmaktadır. Bu eğri çiftlerinden biri involüt-evolüt eğri çiftidir. 1658 yılında optikteki çalışmalarıyla da bilinen Christian Huygens involüt fikrini ortaya atmıştır (As ve Sarıoğlugil, 2014). Huygens (1963), daha doğru bir saat oluşturmaya çalışırken involütleri bulmuştur. Boyer, 1968 yılında $\mathbb{R}^3$ Öklidyen uzayında bir eğri çifti için bir eğrinin tanjantı ile diğer eğrinin asal normali arasında lineer bağımlı olduğu noktalar arasında bire-bir eşleme yapıldığında bu eğri çiftini, involüt-evolüt eğri çifti olarak tanımlamıştır. İnvolüt-evolüt eğri çifti, $\mathbb{R}^3$ Öklidyen uzayında iyi bilinen bir kavramdır.

Eğri çiftlerinden bir diğeri de Venant (1845) tarafından, bir eğrinin asli normal vektör alanı olarak tanımlanabilmesi problemiyle ortaya çıkmıştır. Bertrand, (1850) yayınladığı bir makalesinde bu problemi cevaplandırmıştır, böyle bir eğrinin var olması için gerek ve yeter koşulun verilen eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri arasındaki belirli bir bağıntının varlığı ile mümkün olduğunu göstermiştir. Bu bağıntı, verilen bir eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri sırasıyla k_1 ve k_2 ile gösterilmek üzere, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için diğer bir deyişle $\lambda k_1 + \mu k_2 = 1$ şeklindedir. Ayrıca bu şartı sağlayan eğriye Bertrand eğrisi ve ikinci eğriye ise bu eğrinin Bertrand eşlenik eğrisi adı verilmiştir (Kuhnel, 2006). Eğriler ve yüzeyler teorisinin önemli bir konusu olmakla birlikte Bertrand eğrileri günümüzde farklı uzaylarda da hala aktif bir çalışma alanıdır (Ekmekçi ve İlarslan, 2001).

Eğri çiftlerinden en son değinilen ise ilk olarak, 1878 yılında Mannheim tarafından $k_1^2 + k_2^2 = w^2 = sabit$ bağıntısı ile tanımlanan eğri sınıfıdır. Bu eğriler, Mannheim eğrileri olarak adlandırılmıştır (Azak, 2009). Blum (1966), Mannheim eğrilerini 3-boyutlu Öklid uzayında Riccati denklemlerini kullanarak çalışmıştır. Wang ve Liu, 2007 yılında bu eğri çiftine yeni bir tanım vererek Mannheim eğri çifti olarak isimlendirmiştir. $\mathbb{R}^3$ Öklidyen uzayında ve $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayında birçok çalışmada Mannheim eğri çifti için gerek ve yeter koşullar elde edilmiş ve hala farklı uzaylarda da yeni çalışmalar yapılmaktadır. A. Einstein' ın teorisi, 20. yüzyılın başlarında yeni geometrilerin kullanımı için bir yol açmıştır. Bunlardan biri özel görecelilik geometrisi ve diğeri keyfi bir Lorentzian manifoldunun teğet uzayını oluşturan geometridir (Öztürk vd., 2013).

Valentin Gabriel Cristea (2005) tarafından yapılan “Existence and Uniqueness Theorem for Frenet Frame Supercurves” başlıklı makalesinde süperuzayın daha özel hali olan total süper-Öklid uzayında süperdüzgün süpereğri için Frenet çatıları araştırılmıştır. Bu makalede Valentin, A. Rogers tarafından yapılan makalelerindeki (m,n)-boyutlu süper-Öklid uzayından yararlanmış ve bu uzayın üzerinde yeni skalar çarpım ile ortogonallik tanıtmıştır. Buna ek olarak, genel durumda süperdüzgün süpereğrilerle ilişkilendirilen Frenet çatı tanımını vermiştir.

Bu tez çalışmasının amacı süpermanifold ve süpersimetri üzerine kinematik yapıları incelemek, uzay-zaman parametresi ile süperuzay formlarında kinematik sistemleri elde ederek geometrik ve fiziksel sonuçlar üretmektir. Buna yardımcı olmak adına ilk olarak süpersayılar, süpermanifoldlar, süpervektör uzayı ve onun üzerinde tanımlı işlemler ele alınacaktır. Süperuzayda kinematik yapılar uygulanacağından bir eğrinin kinematiğini ele alarak onun kinematiğini irdelenecektirr. Bu nedenle eğrinin ve eğri çiftlerinin birbirine göre hareketlerini incelemek tezimizin bütününde özgünlüğü ve önemli bir parçayı oluşturmaktadır. Genel durumda süperdüzgün süpereğrilerle ilişkilendirilen Frenet çatısına ait yeni tanımlar vermektir. Bu tanımlar ve teorik yapılar, eğriler üzerinde hareketi incelememizde yardımcı olacağından süper-Öklid uzayında inceleme yapılabilecektir. Son olarak ise süperuzayın daha özel hali olan total süper-Öklid uzayında süperdüzgün süpereğrilerle ilgili çalışmalar ele alınıp involüt-evolüt, Bertrand ve Mannheim gibi bazı eğri çiftleri için Frenet çatılarını araştırılacak ve bu eğri çiftleri için yeni teoremler verilecektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde temel diferensiyellenebilir elemanların diğer manifoldlara genişletilmesi ve M üzerindeki geometrik yapılarla diğer manifoldlar üzerindeki geometrik yapılar arasındaki ilişki diferensiyel geometri açısından önemli bir problemdir. Bunun çözümünde, öncelikle M üzerinde geometri yapmak için gerekli bazı diferensiyellenebilir elemanların diğer manifoldlara taşınması gerekmektedir. Bu yolla, M ve diğer manifoldların geometrisi arasında ilişkiler elde edilebilir. M manifolduna diffeomorfik manifoldlar haricinde, M ile en yakın ilişkili olan, M nin tanjant demetinin total uzayı olan TM manifoldudur. M üzerinde bir diferensiyellenebilir yapı TM üzerine daima bir diferensiyellenebilir yapı indirgemektedir. 1966 da K. Yano ve S. Kobayashi, ”Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles” isimli çalışmalarında, M üzerinde bazı diferensiyellenebilir elemanları TM ye taşımışlardır. Bu çalışmadan yararlanılarak Tani (1969) tarafından yapılan ”Prolongations of Hypersurfaces to Tangent Bundles” isimli çalışma M nin bir S hiperyüzeyinin TS tanjant demeti ile TM arasında bazı ilişkiler elde edilmiştir. Bu anlamda, 2003 yılına kadar yapılan birçok çalışmada M manifoldundan TM tanjant demetine taşımalar esas alınarak önemli yapılar elde edilmiştir.

De Leon, Salgodo, Rodrugues, Wang, Sardanashvily, Mangiarotti, Ishihara, Udwadia, Aycan ve Rızaoğlu gibi araştırmacıların 1980’den bu yana olan çalışmalarında ise kinematik ve mekanik enerji sistemleri incelenmektedir. Minkowski, 1909 yılında Maxwell’in elektrodinamiği ile Einstein’in özel görelilik teorilerinden yararlanarak, doğanın, bilinen üç boyutuna dördüncü bir boyut ekleyerek tasvir edilebileceğini belirtmiştir. Einstein ise bu görüşü destekleyecek şekilde 1915 yılında yayınladığı Genel Görelilik Teorisi’nde, genelleştirerek uzay-zaman kavramı kullanarak doğayı tasvir etmiştir. Bu uzayın çeşitli geometrik özellikleri, özellikle 1990 sonrasında önemli bir çalışma alanına sahip olmuştur. Hatta süpersimetrinin tanımlanması ile bu çalışmalar birleşince fiziksel gerçekliğe matematiksel yorum katmak mümkün olmuştur.

İki temel parçacıktan oluşan parçacık fiziğinde uzay-zaman simetrisinin karşılığı süpersimetri olarak ifade edilir. Bu parçacıklar, açısal momentumu olan bozonlar ve yarı değerli açısal momentumu olan fermiyonlardır. Süpersimetri, kuantum fiziği ve klasik fizik arasında oluşan simetri olduğundan bilinen simetrilere benzemez. Süpersimetri her parçacığın ve onun süper eşinin aynı kütleye sahip olması esasına dayanır. Süpersimetrik bir eş parçacığın gözlenememiş olması onun için uzayda süpersimetrinin kırılmış olmasına bağlanır. Parçacık fiziğindeki uzay-zaman simetrileri, süpersimetri konusunun önemini ortaya çıkarır. Süpersimetri, dört boyutlu relativistik parçacık teorisinde S-matrisinin iç simetrileri ile birleştirebilen tek simetridir. Süpersimetride ilk olarak dört boyutlu lineer ayar dönüşümlerini Wess ve Zumino 1974 yılında genelleştirmiştir. Süpersimetrinin yerel ayar teorisi olarak ifade edilmesiyle süpergaravite teorisi, kütle çekimini diğer temel kuvvetlerle birleştirmesiyle çalışmalar başlamıştır (Salam ve Strathdee, 1974; Fayet ve Ferrara, 1976; Freed, 1999). Bu uzayın çeşitli geometrik özellikleri, özellikle 1990 sonrasında bir çok bilim insanına çalışma alanı oluşturmuştur (Aitchison, 2007; Bagchı, 2001; Bellucci, 2006; Cortes, 2006; Bellucci ve Krivonos, 2006). ise Süpersimetrideki bozon (çift) ve fermiyon (tek) çalışmalarındaki gibi anti değişmeli değişkenler eklenerek diferensiyel geometrideki konular süper önadı kullanılarak genişletilmiştir.

Tarihsel olarak süpermanifoldun değerlendirilmesi iki başlangıçta toplanır. Birinci çalışmaya 1970 yıllarında Berezin, Leites ve Konstant isimli matematikçiler tarafından, kuantum teorisi çalışmalarına matematiksel bir katkı getirmek amacıyla başlanmıştır. İkinci çalışmanın başlangıcı olarak daha geometrik yapıya dayanan Grasman cebirinin çift ve tek elemanları olarak tanımlanan noktaların oluşturduğu süperuzay, Dewitt (1992), Rogers (1980), Jadczyk ve Pilch (1981) tarafından yapılan çalışmalardır. Bir çok çalışma, süpermanifold tanımlamasını hem sheaf teorisi hem de manifold teorisi şeklinde yapmıştır. Fakat aralarındaki ilişkilendirmeyi en iyi Rogers (1980), Batchelor (1979), Bartocci vd. (1991) bilim insanları yapmışlardır. Supermanifold'un bu yaklaşım, bir manifoldun bilinen tanımını, Öklid uzayını süper-Öklid uzayıyla, değiştirerek tanımlar. Burada süper-Öklid uzayı, m tane çift bileşeni ile n tane tek bileşenin dış cebir çarpımıdır. Batchelor (1979), süper-Öklid uzayda kaba topoloji ve fonksiyonların sağ kümesi kullanılırsa, kategoride bu iki yaklaşım arasında denk olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca, Konstant tarafından tanımlanan Gradded manifoldların izomorfizm sınıflarının bazı vektör demetleri üzerindeki dış demet kesitinin üreteç kümesiyle 1-1 eşlendiğini göstermiştir. Fakat, bu eşleme kanonik olmadığından vektör demeti daha fazla yapı içerir. Rogers tarafından geliştirilen metot ise fizikçiler için daha kullanışlıdır. Süper-Öklid uzayını, Banach uzayının ince topolojisi olarak verir. Bu durumda fonksiyonların farklı kümeleri ortaya çıkar. Buna ek, önceki yaklaşımlarda, elinde bulunan sadece antideğişmeli elemanlar, manifoldun tek koordinatları olarak bilinen dış cebirin üreteçleridir. Bu yüzden bu yaklaşımda fizikteki süpersimetri dönüşümlerinin türünü açıkça ele almaz. Dış cebirdeki değerlerin sabit olması gerekir. Fonksiyonların kümesindeki gereken bu fazla elemanlar, Rogers tarafından kullanılır. Fakat bu tek elemanların türevleri sadece bir tane değildir. Bu durum birçok soruna yol açar. Boyer ve Gitler (1984) makalesinde Rogers'ın tanımladığı G^{∞}-süpermanifoldu üzerine çalışmıştır. Bu konuda bir çok bilim adamı çalışmalar yapmıştır Rabin ve Crane, 1985; Tuynman, 2004; Witten, 2012).

Süpersayılar, Grassman cebirin üreteçleri tarafından toplam ve çarpımlarla oluşturulur. Bu şekilde ifade edilen sayılar sonsuz yapıdadır. Fakat literatürdeki birçok çalışmalar, sonlu üretilen süpersayıları göz önüne almıştır. Bunlardan Rabin ve Crane (1985) sonlu süpersayılarla çalışmış ve sonsuz alınan süpersayılar için benzer sonuçlar görülmüştür. B_L cebiri, gerenleri $\{\zeta^a \mid a = 1,...,N\}$ cümlesi $\forall a,b$ için

$$\zeta^a\zeta^b = -\zeta^b\zeta^a \text{ ve } (\zeta^a)^2 = 0 \tag{2.1}$$

antikomütatif özelliğe sahip ise Grassmann cebiri olarak adlandırılır. ve $\wedge_N$ olarak gösterilir. Her bir L pozitif tamsayılar için B_L,

$$\begin{aligned} 1^{(L)}\beta_i^{(L)} &= \beta_i^{(L)}1^{(L)} = \beta_i^{(L)} \qquad i = 1,2,...,L \\ \beta_i^{(L)}\beta_j^{(L)} &= -\beta_j^{(L)}\beta_i^{(L)} \qquad i,j = 1,2,...L \end{aligned} \tag{2.2}$$

bağıntılı (Rogers, 1986) ve $1^{(L)}, \beta_1^{(L)}, ..., \beta_L^{(L)}$ üreteçli reel sayılar üzerinde Grasmann cebiri olarak gösterilsin. B_L, Gradded cebiri (Scheunert, 1979) $B_L = (B_L)_0 \oplus (B_L)_1$ direkt toplam şeklinde yazılır. Burada

$$(B_L)_0 = \left\{ x \mid x \in B_L,\ x = \sum_{\lambda \in M_{L_0}} x_\lambda \beta_{|\lambda|} \right\} \tag{2.3}$$

ve

$$(B_L)_1 = \left\{ \xi \mid \xi \in B_L,\ \xi = \sum_{\lambda \in M_{L_1}} \xi_\lambda \beta_{|\lambda|} \right\}, \tag{2.4}$$

sırasıyla, B_L Gradded cebirinin çift ve tek kısımlarıdır. M_{L_0} ve M_{L_1}, sırasıyla M_L çoklu indis kümesinin çift ve tek sayıları içeren kümeleridir. (m,n)-boyutu için

$$B_L^{m+n} = \underbrace{(B_L)_0 \times ... \times (B_L)_0}_{m\text{-tane}} \times \underbrace{(B_L)_1 \times ... \times (B_L)_1}_{n\text{-tane}} \tag{2.5}$$

şeklinde ifade edilir. 2005 yılında V.G. Cristea, Rogers tarafından verilen yapılar temel alarak (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayı tanımlamış ve burada süperdüzgün süpereğri yapıları kurmuştur. Ayrıca total süper-Öklid uzayında yeni süperskalar çarpım ile ortogonallik tanıtmış ve süperdüzgün süpereğri için Frenet çatıları incelemiştir.

Eğrilerin diferensiyel geometrisindeki önemli çalışma konularından biri özel eğri çiftleri üzerine olan çalışmalardır. Bertrand eğri çifti bu çalışma konularından bir tanesidir. Bu eğri çifti Bertrand (1850) tarafından ilk olarak tanımlanmıştır. Zayıflatılmış Bertrand eğriler üzerine ise çalışma, Lai (1967) tarafından yapılmıştır. Matsuda ve Yorozu (2003), Bertrand eğrilerinin Öklidyen 4-uzayındaki genelleştirilmesi konusunda fikir sunmuştur. Tunçer ve Ünal (2012), Bertrand eğrilerinin küresel göstergelerinin özelliklerini Öklidyen 3-uzayında incelemiş ve buna ek olarak küresel göstergelerin Bertrand, Mannheim ve involüt-evolüt çiftleri için yeni eğri çiftlerinden olup olmadığını araştırmışlardır. Bertrand eğrileri *n*-boyutlu Öklid uzayında Sabuncuoğlu ve Hacısalihoğlu tarafından incelenmiştir. Benzer çalışmalar Lorentz (Lorentzian veya Minkowski) uzayında ve çeşitli uzaylarda da çalışılmıştır (Öğrenmiş vd., 2009; Balgetir vd., 2004; Balgetir vd., 2004a).

Mannheim 1878 yılında $k_1^2 + k_2^2 = w^2 = sabit$ bağıntısı ile tanımlanan eğri sınıfını, Mannheim eğrileri olarak adlandırmıştır (Azak, 2009). Blum (1966), Mannheim eğrilerini 3-boyutlu Öklid uzayında Riccati denklemlerini kullanarak çalışmıştır. 2007 yılında bu eğri çifti yeni bir tanım ile verilerek Mannheim eğri çifti olarak Wang ve Liu tarafından isimlendirmiştir. Liu ve Wang (2008), Minkowski uzayında ve Öklidyen uzayında Mannheim eğri çifti için gerek ve yeter koşulları elde etmişlerdir. Orbay ve Kasap (2009) tarafından Mannheim eğri çiftlerinin 3-boyutlu Öklidyen uzayındaki eğrilikleri ve torsiyonları arasındaki bazı bağıntılar elde edilmiştir.

Başka bir eğri çifti olan involüt-evolüt eğrileri hakkında literatürde birçok çalışma bulunmaktadır. C. Huygens (1658) tarafından optik çalışmalarda bilinen involüt ifadesi daha sonra involüt-evolüt eğri çifti olarak tanımlanmıştır. İnvolüt-evolüt eğri çiftinin Serret Frenet çatılarıyla olan ilişkileri, 3-boyutlu Öklidyen uzayında değerlendirilmiştir (Hacısalihoğlu, 1998). Turgut ve Esin (1992) tarafından ise *n*-boyutlu uzayda sonuçlar araştırılmıştır. 3-boyutlu Öklidyen uzayında Bishop çatısı kullanılarak involüt-evolüt eğri çifti, 2014 yılında As ve Sarıoğlugil tarafından çalışılmıştır. Farklı uzaylarda da çalışmalar yapılmıştır. Bilici ve Çalışkan (2009), Minkowski 3-uzayında binormali timelike olan spacelike eğrilerin involütlerini incelemişlerdir. Bilici ve Çalışkan (2011), Minkowski 3-uzayında ise timelike eğrilerin involütlerini çalışarak timelike ve spacelike eğriler arasındaki uzaklığın sabitliğini göstermişlerdir. 2007 yılında Bükcü ve Karacan, Minkowski 3-uzayında spacelike binormal ile verilen spacelike eğrilerin involüt-evolütlerini incelemişlerdir. Turgut ve Yılmaz (2008), Minkowski space-time uzayında spacelike eğriler için involüt-evolütleri çalışmışlardır. 3-boyutlu Galilean uzayında da involüt-evolüt eğri çifti araştırılmıştır (Akyiğit vd., 2010). Bununla beraber *n*-boyutlu izotropik uzayda tanımlar verilmiş ve 3-boyutlu izotropik uzayda Frenet çatılarıyla involüt-evolüt eğrileri incelenmiştir (Divjak ve Šipuš, 1999). Dual uzay ve dual Lorentzian uzayda da involüt-evolüt eğri çiftleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır (Ekici ve Tozak, 2015; Gür ve Şenyurt, 2012; Şenyurt ve Gür, 2012; Şenyurt vd., 2015).

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir.

3.1 Öklid Uzayı ve Manifold

Tanım 3.1.1 n-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^n$ afin uzayını ele alalım. $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$ iki vektör olsun. Öklid iç çarpımı, $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında

$$\langle x, y \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{3.1}$$

biçiminde tanımlanır. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ afin uzayına n-boyutlu Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir (Hacısalioğlu, 1998).

Tanım 3.1.2 M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir $m-$boyutlu topolojik manifold veya $m-$manifold dur denir:

1) M bir Hausdorff uzayıdır.

2) M, $m-$boyutlu lokal Öklriddir.

3) M açık cümlelerin sayılabilir bir tabanına sahiptir (Boothby, 1986; Şahin, 2012).

Örnek 3.1.1 E^n in kendisi bir topolojik n-manifolddur (Hacısalihoğlu, 1988).

Tanım 3.1.3 M, bir $m-$boyutlu topolojik manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M manifolduna C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir (Boothby, 1986; Şahin, 2012).

M_m ve M_p sırasıyla C^k ve C^q sınıfından diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. $G \subset M_m$ açık küme olmak üzere $f : G \to M_p$ sürekli dönüşüm kabul edelim ki, φ, $U \subset G$ bölgesi için harita, ψ ise $f(U) \subset V$ bölgesi olan harita olsun.

Keyfi (U, φ), $U \subset G$ haritası için,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V),\ \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m,\ \psi(V) \subset \mathbb{R}^p \tag{3.2}$$

dönüşümü C^m sınıfından ise f dönüşümüne $(m \leq \min(k,q))$ sınıfından diferensiyellenebilirdir denir (Salimov ve Mağden, 2008; Şahin, 2012).

Tanım 3.1.4 Tanjant vektörler ile tanımlı $T_p(M)$ tanjant uzayının cebirsel duali olan uzay $T_p^*(M)$ ile gösterilsin. Bu $p \in M$ noktasındaki kotanjant uzay olarak adlandırılır. $T_p^*(M)$ kotanjant uzayının her bir elemanına bir kotanjant vektör denir (Bartocci, vd. 1991).

Tanım 3.1.5 M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerinde tanımlı tanjant uzayların birleşimi $TM = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$ olsun ve

$$\begin{aligned} \chi : \quad & M \to TM \\ & p \mapsto \chi(p) \in T_p(M) \end{aligned} \tag{3.3}$$

dönüşümü verilsin. Bir $\pi : TM \to M$ dönüşümü $\pi \circ \chi = I_M$ olacak şekilde χ dönüşümüne M üzerinde vektör alanı denir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} W : \quad & M \to T^*M \xrightarrow{\pi^*} M \\ & p \to w(p) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$\pi^* \circ W = I_M$ ise W ya M üzerinde bir kotanjant vektör alanı denir (Bartocci, vd. 1991).

3.2 Öklid Uzayında Eğriler ve Frenet Formülleri

Diferensiyel geometride Frenet çatısı önemli konular arasındadır. Özel eğri çiftleri, küresel eğriler gibi klasik konular Frenet çatısından yararlanılarak çalışılmıştır. Bu başlık altında bir uzay eğrisi üzerinde Frenet çatısı ile ilgili iyi bilinen temel kavramlara değinilmiştir.

Tanım 3.2.1 $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere, $M = \alpha(I) \subset E^n\mathbb{E}^n$ kümesine, (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan ve

$$\begin{aligned} \alpha : \quad & I \quad \to E^n, \\ & t \quad \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t)) \end{aligned} \tag{3.5}$$

parametrik ifadesi ile verilen bir uzay eğrisi denir. Bu eğri ifadesi α olarak gösterilecektir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.2.2 M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuna sahip olsun. Eğer $\forall s \in I$ için, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir ve s elemanına da yay-parametresi denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.2.3 $M \subset E^n\mathbb{E}^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğuna sahip olsun. $s \in I$ yay parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s),...,V_r(s)\}$ olarak tanımlansın. Buna göre $1 < i < r$ olmak üzere

$$\begin{aligned} k_i : \quad & I \rightarrow \mathbb{R} \\ & s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s)\rangle \end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i-yinci eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.2.1 $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğuna sahip olsun. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında i-yinci eğrilik fonksiyonu $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s),...,V_r(s)\}$ ise

$$\begin{aligned} V_1'(s) &= k_1(s)V_2(s) \\ V_i(s) &= -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s) \qquad 1 < i < r \\ V_r'(s) &= -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s) \end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklinde gösterilir (Bloomenthal, 1990; Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.2.4 $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında α,

$$\begin{aligned} \alpha : \quad & I \rightarrow \mathbb{E}^3 \\ & s \mapsto \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)) \end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde ifade edilen s yay-parametreli birim hızlı bir eğri olsun. Burada $t = V_1$ birim teğet, $n = V_2$ birim normal, $b = V_3$ binormal ve $\{t,n,b\}$ vektör kümesi ise Frenet 3-ayaklısı adını alır. Buna göre

$$t = \alpha'(s) \tag{3.9}$$

eşitliğiyle tanımlanan $t(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü,

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{1}{k_1(s)} t'(s) \tag{3.10}$$

eşitliğiyle belirli $n(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektörü,

$$b(s) = t(s) \wedge n(s) \tag{3.11}$$

eşitliğiyle tanımlı $b(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektörü adı verilir. Burada $k_1 : \; I \rightarrow \mathbb{R}$, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu, $\{t(s),n(s),b(s)\}$ kümesine de Frenet çatısı denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.2.5 $s \in I$ yay parametresi olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : \quad & I \rightarrow E^3 \\ & s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)) \end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklindeki bir eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$ olarak ifade edilsin. O halde,

$$\begin{aligned} t'(s) &= k_1(s)n(s) \\ n'(s) &= -k_1(s)t(s)+k_2(s)b(s) \\ b'(s) &= -k_2(s)n(s) \end{aligned} \tag{3.13}$$

formüllerine Frenet formülleri denir. Burada $k_1 = \kappa$ ve $k_2 = \tau$ için

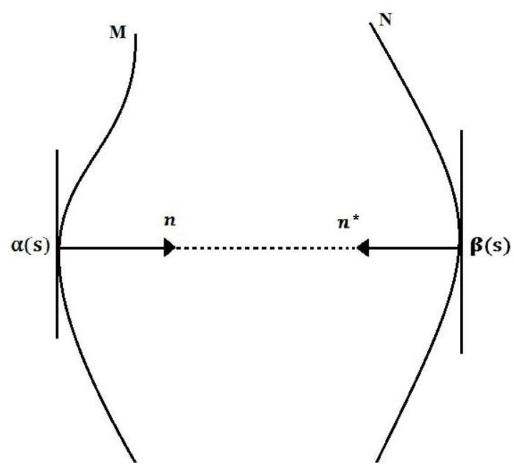
$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

eşitliği mevcuttur (Hacısalihoğlu, 1998). Bu durumda

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa t+\tau b \\ b' &= -\tau n. \end{aligned} \tag{3.15}$$

eşitlikleri yazılabilir. τ ya kısaca α eğrisinin burulması denir.

Sonuç 3.2.1 $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. $k_1(s) = \|\alpha''(s)\|$ değerine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Carmo, 1976).



Şekil 3.1: Bertrand çifti

3.3 Eğri Çiftleri

Bu kısımda, özel eğri çiftlerinden olan involüt-evolüt, Bertrand ve Mannheim eğri çiftlerinin tanımları verilmiş ve sonrasında bu eğri çiftleri ile ilgili bazı teoremlere değinilmiştir.

Tanım 3.3.1 $M,\ N \subset E^n$ eğrileri, sırasıyla, $(I,\alpha),(I,\beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin

$\{V_1(s),\ldots,V_r(s)\},\{V_1^*(s),\ldots,V_r^*(s)\}$ Frenet r-ayaklıları verildiğinde $\forall s \in I$ için $\{V_2(s),V_2^*(s)\}$ vektör kümesi lineer bağımlı ise $(M,\,N)$ eğri ikilisine bir Bertrand çifti denir (Hacısalihoğlu, 1998). Bertrand eğri çifti, (Şekil 3.1.) deki gibi görülmektedir.

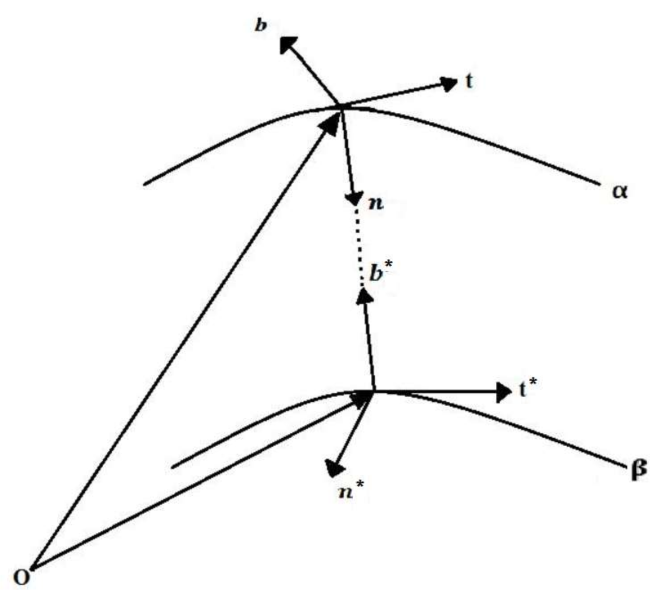
Teorem 3.3.1 $(M,\,N)$ Bertrand eğri çifti verilsin. M ve N sırasıyla, (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları ile verildiğine göre, $\forall s \in I$ için $d(\alpha(s),\beta(s)) = sabit$tir (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.3.2 $M,\,N \subset E^3$ eğrileri $(I,\alpha),(I,\beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. M nin eğrilikleri k_1 ve k_2 ise (M,N) Bertrand çiftidir.$\Leftrightarrow$ $\exists\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda k_1 + \mu k_2 = 1 \tag{3.16}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1998; Choi vd., 2012).

Tanım 3.3.2 3-boyutlu Öklid uzayında α ve β eğrileri, birim hızlı eğriler olsun. Eğer α eğrisinin asli normali ile β eğrisinin binormali lineer bağımlı ise, α eğrisine Mannheim eğrisi, β eğrisine de Mannheim eğri ortağı denir (Liu ve Wang, 2008). Mannheim eğri çifti, aşağıdaki (Şekil 3.2.) ile görülmektedir.



Şekil 3.2: Mannheim eğrileri

Teorem 3.3.3 E^3 Öklid uzayında Mannheim eğrilerinin verilen noktaları arasındaki uzaklıkları sabittir (Orbay ve Kasap, 2009).

Teorem 3.3.4 E^3 Öklid uzayında bir uzay eğrisi Mannheim eğri çiftidir ancak ve ancak eğrinin eğriliği κ ve burulması τ olmak üzere $\kappa = \lambda(\kappa^2 + \tau^2)$ olmasıdır, burada λ sıfırdan farklı bir sabittir (Wang ve Liu, 2007).

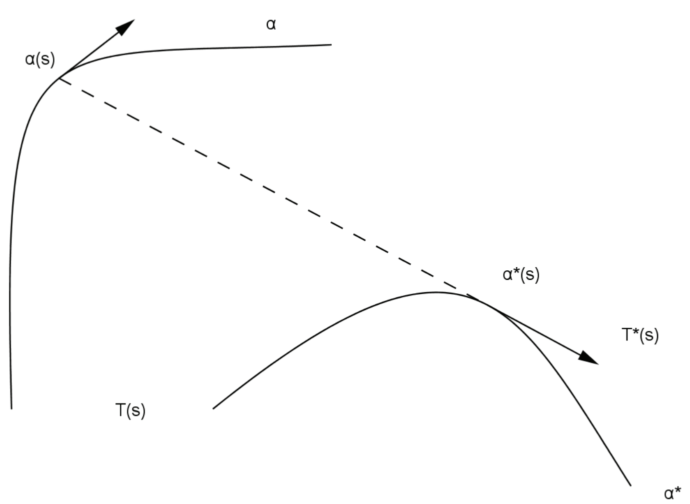
Tanım 3.3.3 Birim hızlı $\alpha: \ I \ \rightarrow E^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı,

$$\alpha^*: \ I \ \rightarrow E^3, \ I \subseteq \mathbb{R} \tag{3.17}$$

eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki teğeti $\alpha(s)$ noktasından geçiyorsa ve

$$\langle T^*(s), T(s) \rangle = 0 \tag{3.18}$$

ise α^* eğrisine α eğrisinin bir evolütü denir (Sabuncuoğlu, 2010). Evolüt eğrisi için görsel (Şekil 3.3.) ile verilmiştir. **Tanım 3.3.4** Birim hızlı $\alpha: \ I \ \rightarrow E^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı,



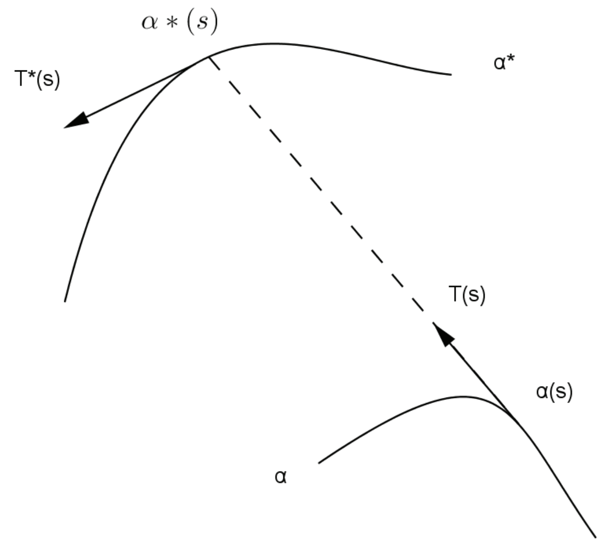
Şekil 3.3: Evolüt eğrisi

$$\alpha^*: \ I \ \rightarrow E^3, \ I \subseteq \mathbb{R} \tag{3.19}$$

eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğeti $\alpha^*(s)$ noktasından geçiyorsa ve

$$\langle T^*(s), T(s) \rangle = 0 \tag{3.20}$$

ise α^* eğrisine α eğrisinin bir involütü denir (Sabuncuoğlu, 2010). İnvolüt eğrisi için görsel (Şekil 3.4.) ile verilmiştir.



Şekil 3.4: İnvolüt eğrisi

Teorem 3.3.5 M, $N \subset E^n$ eğrileri $(I,\alpha),(I,\beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. Eğer, N,M nin involütü ise $d(\alpha(s),\beta(s)) = |c-s|, \forall s \in I,\ c = sabit$tir (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.3.6 M, $N \subset E^3$ involüt-evolüt eğrileri (I,α), (I,β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\forall s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında, M ve N nin Frenet r-ayaklıları, sırasıyla,

$$\{V_1(s),V_2(s),V_3(s)\},\ \{V_1^*(s),V_2^*(s),V_3^*(s)\} \tag{3.21}$$

ve M nin eğrilik fonksiyonları k_i, $1 \le i \le 2$, N nin eğrilik fonksiyonları k_i^*, $1 \le i \le 2$ ise

$$k_1^{*2}(s) \quad = \frac{k_1^2(s)\ +\ k_2^2(s)}{k_1^2(s)\ (c-s)^2} \tag{3.22}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1998).

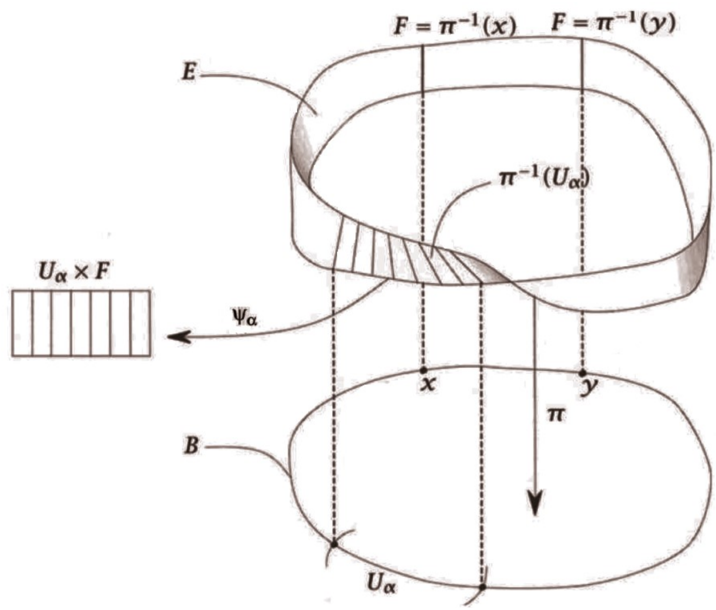
3.4 Diferensiyellenebilir Demet Yapıları

M üzerinde geometri yapmak için gerekli bazı diferensiyellenebilir elemanların diğer manifoldlara taşınması gerekmektedir. Bu nedenle, M ve diğer manifoldların geometrisi arasında ilişkiler elde edilebilir. M manifolduna diffeomorfik manifoldlar haricinde, M ile en yakın ilişkili olan, M nin tanjant demetinin total uzayı olan TM manifoldudur. M üzerinde bir diferensiyellenebilir yapı TM üzerine daima bir diferensiyellenebilir yapı indirgemektedir. M manifoldundan TM tanjant demetine taşımalar esas alınarak önemli yapılar elde edilebilir. Bu kısımda, manifoldlar arasındaki dönüşümlere yer verilip fizik uygulamalarında en çok kullanılan lif ve demet yapıları hakkında temel tanım ve örneklere değinilmiştir.

Tanım 3.4.1 E, B, F C^∞-manifold ve $\pi : E \to B$ C^∞-dönüşüm olsun. B nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ olmak üzere, eğer

$$(\pi\circ\psi_\alpha)(x,y) = x \qquad x\in U_\alpha,\ y\in F \tag{3.23}$$

olacak biçimde $\psi_\alpha : U_\alpha\times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ diffeomorfizmlerinin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ailesi varsa π, F ye göre lokal çarpım özelliğine sahiptir. $D = \{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ sistemine de π nin lokal ayrışması denir. Lokal ayrışımın geometrik anlamı aşağıdaki (Şekil 3.5.) te gösterilmektedir. Eğer



Şekil 3.5: Möbius halkası

$C^\infty(E,B) = \{F \mid F : E \to B\}$ modülünün herhangi bir elemanı lokal çarpım özelliğine sahipse o zaman bu dönüşüm örten ve açık bir dönüşümdür (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.2 $\pi : E \to B$ C^∞-dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\xi = (E,\pi,B,F)$ dörtlüsüne bir diferensiyellenebilir lif demeti adı verilir (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.3 $\xi = (E,\pi,B,F)$ bir C^∞-demeti olsun. O zaman π dönüşümünün D lokal ayrışmasına ξ lif demetinin bir lokal koordinat temsilcisi denir. $\xi = (E,\pi,B,F)$ bir lif demetinde

E ifadesine ξ lif demetinin total uzayı, B ye ξ lif demetinin baz uzayı, F uzayına lif modeli ve π dönüşümüne fibrasyon veya projeksiyon denir. Burada $rank\xi = boyF$ dir (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.4 $\pi : E \to B$ bir lif demeti olsun. $\forall x \in B$ için $\pi^{-1}(x) = F_x = \{u \in E \mid \pi(u) = x\}$ cümlesine x üzerinde lif denir (Greub vd., 1972).

Örnek 3.4.1. Tüm F_x liflerinin ayrık birleşimi E total uzayı yani $E = \cup F_x$ olacağından herhangi bir $x \in B$ için F_x lifi, E de kapalı imbedded altmanifolddur (Greub vd., 1972).

Örnek 3.4.2 $\pi_M : TM \to M$ doğal projeksiyon olmak üzere buna M manifoldunun tanjant demeti denir. $p \in M$ için $\pi^{-1}(p)$ lifi $T_p(M)$ tanjant uzayıdır. $\xi = (E,\pi,B,F)$ lif demetinin $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ lokal koordinat temsilcisini ele alınsın. $\forall x \in U_\alpha$ için

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha,x} :\ & F \to F_x \\ & y \mapsto \psi_{\alpha,x}(y) = \psi_\alpha(x,y) \end{aligned} \tag{3.24}$$

olarak tanımlanan $\psi_{\alpha,x}$ ler, $\psi_\alpha$diffeomorfizm olduklarından, diffeomorfizim D lokal koordinat temsilcisinden $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ olacak biçimde(U_α, ψ_α) ve $\left(U_\alpha, \psi_\beta\right)$ ikililerini seçilsin. Bu durumda $\psi_\alpha, \psi_\beta : U_{\alpha\beta} \times F \to \pi^{-1}\left(U_{\alpha\beta}\right)$ şeklinde tanımlanan ψ_α ve ψ_β dönüşümleri diffeomorfizm olduklarından $\psi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$ dönüşümü,

$$\begin{aligned} \psi_{\beta\alpha} :\ & U_{\alpha\beta} \times F \to U_{\alpha\beta} \times F \\ & (x,y) \mapsto \psi_{\beta\alpha}(x,y) = \left(x, \psi_{\beta,x}^{-1} \circ \psi_{\alpha,x} \circ \psi_{\alpha,x}(y)\right) \end{aligned} \tag{3.25}$$

şeklinde tanımlanan bir diffeomorfizmdir. Böylece $\forall x \in U_{\alpha\beta}$ için $\psi_{\beta\alpha,x} = \psi_{\beta,x}^{-1} \circ \psi_{\alpha,x} : F \to F$ dönüşümleri diffemorfizmdir (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.5 $\xi = (E,\pi,B,F)$ herhangi bir lif demeti olsun. $\pi \circ \phi = I_\beta$ (özdeşlik) olacak biçimde, $\phi : B \to E$ olan C^∞ dönüşümüne ξ lif demetinin bir çapraz kesiti denir (Greub vd., 1972).

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\phi} & E \\ {\scriptstyle \pi\circ\phi = I_B} & \searrow & \downarrow \pi \\ & & B \end{array} \tag{3.26}$$

Örnek 3.4.3 $\tau_M = (TM, \pi_M, M, \mathbb{R}^{n'})$ lif demeti alındığında $\forall X \in \chi(M)$ vektör alanı ve $\forall p \in M$ için $X : M \to TM$, $X(p) = X_p \in T_p(M)$ olsun. π_M kanonik projeksiyonu $\forall X_p \in TM$ ve $\pi_M(X_p) = p$ için

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & TM \\ {\scriptstyle \pi_M\circ X = I_M} & \searrow & \downarrow \pi_M \\ & & M \end{array} \tag{3.27}$$

diyagramı değişmeli olur. Böylece $X \in \chi(M)$, C^{∞}-vektör alanları τ_M üzerinde çapraz kesitlerdir (Aycan, 2003).

Tanım 3.4.6 $\xi = (E, \pi, B, F)$ ve $\xi' = (E', \pi', B', F')$ iki lif demeti ve $\varphi : E \to E'$ C^{∞}-dönüşüm olsun. Eğer $Z_1, Z_2 \in E$ için $\pi(Z_1) = \pi(Z_2)$ iken $\pi'(\varphi(Z_1)) = \pi'(\varphi(Z_2))$ oluyorsa φ ye lif koruyan dönüşüm denir (Greub vd., 1972).

Örnek 3.4.4 M ve N birer C^{∞}-manifold ve π_M, π_N de kanonik projeksiyonlar olmak üzere $\tau_M = (TM, \pi_M, M, \mathbb{R}^n)$ ve $\tau_N = \left(TN, \pi_N, N, \mathbb{R}^k\right)$ lif demetleri ele alınsın. $\psi \in C^{\infty}(M, N)$ dönüşümünün türev dönüşümü,

$$\psi_* : TM \to TN \tag{3.28}$$

olmak üzere $X_P, Y_P \in T_p(M)$ için $\pi_M(Xp) = \pi_M(Y_p) = p$ iken

$$\begin{aligned} \pi_N(\psi_*(X_p)) &= \pi_N(X_{\psi(p)}) = \psi(p) \\ \pi_N(\psi_*(Y_p)) &= \pi_N(Y_{\psi(p)}) = \psi(p) \end{aligned} \tag{3.29}$$

olduğundan $\pi_N(\psi_*(X_p)) = \pi_N\left(\psi_*(Y_p)\right)$ dir.

O halde ψ nin ψ_*türev dönüşümü lif koruyan dönüşümdür (Saunders, 1989).

Tanım 3.4.7 $\xi = (E, \pi, B, F)$ ve $\xi' = (E', \pi', B', F')$ iki lif demeti olsun. $\varphi : E \to E'$ bir lif koruyan dönüşüm olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow[\varphi_\beta]{} & B' \end{array} \tag{3.30}$$

diyagram değişmeli $\pi' \circ \varphi = \varphi_\beta \circ \pi$ olacak biçimdeki $\varphi_\beta = B \to B'$, C^{∞}-dönüşümüne φ nin belirttiği dönüşüm denir. π nin lokal ayrışması $D = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ olsun. $Y \in F$ sabitlenmiş bir nokta olmak üzere φ_β dönüşümü $\forall x \in U_\alpha$için $\varphi_\beta(x) = (\pi' \circ \varphi \circ \varphi_\alpha)(x, y)$ şeklinde tanımlanır (Greub vd., 1972).

Örnek 3.4.5 $\psi_* : TM \to TN$ türev dönüşümü bir TN lif demetlerinin arasındaki lif koruyan dönüşüm,

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\psi_*} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow[\psi]{} & N \end{array} \tag{3.31}$$

değişmeli diyagram $\forall X_p \in TM$ için

$$\begin{aligned} (\psi \circ \pi_M)(X_p) &= \psi(\pi_M(X_p)) = \psi(p) \\ \left(\pi_{N \circ \psi_*}\right)(X_p) &= \pi_N(\psi_*(X_p)) = \psi(p) \end{aligned} \tag{3.32}$$

$\Longrightarrow \psi \circ \pi_M = \pi_N \circ \psi_*$ dir. O halde $\psi \in C^\infty(M;N)$ C^∞-dönüşümü, ψ_* dönüşümünün belirttiği dönüşümdür (Saunders, 1989).

Tanım 3.4.8 $\xi = (E, \pi, B, F)$ bir C^∞-lif demeti olsun. Eğer,

i) $\forall x \in B$ için, $\pi^{-1}(x) = F_x$ F reel vektör uzayları
ii) $\forall x \in B$ için, $\psi_{\alpha,x} : F \to F_x$ dönüşümleri lineer izomorfizm

özelliklerini sağlayan $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ lokal koordinat temsilcisi var ise ξ ye bir vektör demeti denir. (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.9 $\xi = (E, \pi, B, F)$ dörtülüsü bir vektör demeti ve U, B de bir komşuluk olsun. Eğer $\pi\psi_u(x,y) = x;\ x \in U,\ y \in F$ olacak biçimde

i) $\psi_u : U \times F \to \pi^{-1}(U)$ dönüşümü diffeomorfizm
ii) $x \in U; \psi_{u,x} : F \to F_x$ indirgenmiş dönüşümleri lineer izormorfizm

şartları var ise, bu durumda U ya ξ vekör demeti için aşikar komşuluk ve ψ_u ya da ξ için bir aşikar dönüşüm denir (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.10 $\xi = (E, \pi, B, F)$ ve $\xi' = (E', \pi', B', F')$ iki vektör demeti olsun. Eğer

i) $B' = B$,
ii) $\forall x \in B'$ için F'_x lifi, F_x lifinin bir lineer altvekör uzayı,
iii) $i : E' \to E$ inclusion dönüşüm diferensiyellenebilir dönüşüm

ise ξ' vektör demetine, ξ vektör demetinin bir altdemeti denir (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.11 $\xi = (E, \pi, B, F)$ ve $\xi' = (E', \pi', B', F')$ iki vektör demeti olsun. $\psi : \xi \to \xi'$ C^∞-dönüşümü için

i) $\psi : E \to E'$ bir lif koruyan dönüşüm
ii) $\forall x \in B;\ \psi_x : F_x \to F'_{\psi_\beta}$ dönüşümleri lineer

sağlıyor ise ψ ye bir demet dönüşüm denir. Eğer $\psi : \xi \to \xi'$ demet dönüşümü diffeomorfizm ise ψ bir demet izormorfizmidir (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.12 $\xi = (E, \pi, B, F)$ bir vektör demeti olsun. Eğer $E = B \times F$ ve π birinci izdüşüm fonkiyonu ise, ξ vektör demetine bir aşikar demet denir (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.13 $\xi = (E, \pi, B, F)$ bir vektör demeti olsun. $\theta \subset B$ bir açık altmanifold olmak üzere, $\xi|_\theta = (\pi^{-1}(\theta), \pi|_\theta, \theta, F)$ dörtlüsü bir vektör demeti olup bu vektör demetine, kısıtlanmış vektör demeti denir. $\pi|_{\theta}$, π nin $\pi^{-1}(\theta)$ açık cümlesi üzerine kısıtlanmışıdır (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.14 $\xi^1 = \left(E^1, \pi^1, B^1, F^1\right)$ ve $\xi^2 = (E^2, \pi^2, B^2, F^2)$ iki vektör demeti olsun. $\xi^1 \times \xi^2 = (E^1 \times E^2, \pi^1 \times \pi^2, B^1 \times B^2, F^1 \times F^2)$ bir vektör demeti yapısına sahip olup $\xi^1 \times \xi^2$ vektör demetine, ξ^1 ve ξ^2 vektör demetlerinin çarpım demeti (product bundle) denir (Greub vd., 1972).

$\xi^1 \times \xi^2$ vektör demetinin herhangi bir $(x,y) \in B^1 \times B^2$ noktasındaki lifi

$$(\pi^1 \times \pi^2)^{-1}(x,y) = F_x^1 \oplus F_y^2 \tag{3.33}$$

şeklinde F_x^1 ve F_y^2 liflerinin direkt toplamıdır. ξ^1 vektör demetinin koordinat temsilcisi $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ve ξ^2 vektör demetinin koordinat temsilcisi $\left\{\left(U_\beta, \psi_\beta\right)\right\}_{\beta \in I}$ ise $\left\{(U_\alpha \times U_\beta, \psi_\alpha, \psi_\beta)\right\}_{\alpha \in I_{\beta \in I}}$ sistemi $\xi^1 \times \xi^2$ nin koordinat temsilcisi olup

$$\begin{array}{rlcl} \psi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \times \psi_\beta : & \left(U_\alpha \times U_\beta\right) \times (F^1 \oplus F^2) & \rightarrow & (\pi^1)^{-1}(U_\alpha) \times (\pi^2)^{-1}(U_\beta) \\ & ((x_1, x_2), (y_1, \oplus y_2)) & \mapsto & \psi_{\alpha\beta}(x_1, x_2; y, \oplus y_2) = (\psi_\alpha(x_1, y_1), \psi_\beta(x_2, y_2)) \end{array} \tag{3.34}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca,

$$\begin{array}{rlcl} p^1 : & E^1 \times E^2 & \rightarrow & E^1 \\ & (x,y) & \mapsto & p^1(x,y) = x \end{array} \tag{3.35}$$

ve

$$\begin{array}{rlcl} p^2 : & E^1 \times E^2 & \rightarrow & E^2 \\ & (x,y) & \mapsto & p^2(x,y) = y \end{array} \tag{3.36}$$

şeklinde tanımlı p^1 ve p^2 projeksiyonları aynı zamanda

$$\begin{array}{rcl} p^1 & : & \xi^1 \times \xi^2 \rightarrow \xi^1, \\ p^2 & : & \xi^1 \times \xi^2 \rightarrow \xi^2 \end{array} \tag{3.37}$$

şeklinde tanımlanan demet dönüşümleridir (Aycan, 1998).

Örnek 3.4.6 $\xi = (E, \pi, M, F)$ bir keyfi vektör demeti olsun. Ayrıca $rank\xi = boyF = r$ ve $boyM = n$ olmak üzere $boyE = boyM + boyF = n + r$, $\pi : E \rightarrow M$ projeksiyonunun türev dönüşümü $d\pi = \pi_*, \tau_E$ ve τ_M tanjant demetleri arasında bir demet dönüşümüdür (Aycan, 2003).

Tanım 3.4.15 $\forall Z \in E$ için

$$V_Z(E) = Ker(\pi_{*Z}) = \{A_Z \in T_Z(E) \mid \pi_{*Z}(A_Z) = 0\} \tag{3.38}$$

uzayına, $T_Z(E)$ tanjant uzayının düşey altuzayı ve $V_Z(E)$ nin her elemanına da düşey tanjant vektörü denir (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.16 $\tau_v \subset \tau_E$ vektör demetine, τ_E vektör demetinin düşey altdemeti denir (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.17 $X \in \chi(E)$ bir C^{∞}-vektör alanı olsun. $\forall Z \in E$ için $X_Z \in T_Z(E)$ tanjant vektörü, düşey tanjant vektör ise bu taktirde X vektör alanına düşey vektör alanı denir (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.18 $\xi = (E, \pi, M, F)$ bir vektör demeti, E nin tanjant demeti τ_E ve $\tau_E$nin düşey altdemeti τ_V olsun. $\overset{w}{\oplus}$ whitney toplamı olmak üzere,

$$\tau_E = \tau_V \overset{w}{\oplus} \tau_H \tag{3.39}$$

olacak biçimde tanımlanan τ_H vektör demetine τ_E nin yatay altdemeti denir (Saunders, 1989).

Tanım 3.4.19 E üzerinde bir vektör alanı X olsun. Eğer $Z \in E$ için $X_Z \in H_Z(E)$ olursa, X vektör alanına yatay vektör alanı denir. E üzerindeki yatay vektör alanlarının cümlesi $\chi_H(E)$, $C^{\infty}(E)$ üzerinde bir sonlu doğruculu projektif modüldür.

$$\chi(E) = \chi_V(E) \oplus \chi_H(E) \tag{3.40}$$

olarak yazılabilir. $X_V \in \chi_V(E)$, $X_H \in \chi_H(E)$ olacak şekilde

$$\chi = \chi_V + \chi_H \tag{3.41}$$

olarak yazılabilir. Burada X_V ve X_H, χ vektör alanının yatay ve düşey bileşenlerini oluşturur (Aycan, 2003).

Tanım 3.4.20 TM den M manifoldu üzerine

$$\begin{pmatrix} \pi_M: & TM \to M \\ & Z \to \pi_M(Z) = p \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \forall Z \in TM;\ \exists p \in M,\ Z \in T_p(m) \\ \text{ve böyle } Z = Z_p \text{ dir.} \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

şeklinde tanımlı π_M dönüşümü, sürekli ve örten bir dönüşümdür. π_M dönüşümüne kanonik (doğal) projeksiyon denir (Greub vd., 1972).

M, C^{∞}-manifoldu için (U, x) ikilisi bir harita olsun. $U \subset M$ açık alt cümle olduğundan $\pi_M^{-1}(U) = U'$cümlesi, TM nin açık alt cümlesi olur. U üzerindeki lokal koordinat sistemi $x = (x^1, \ldots, x^n)$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} U' \subset TM & \overset{\pi_M}{\to} & U \subset M \\ {\scriptstyle \pi \circ \pi_M = v^i} & \searrow & \downarrow_{x^i} \\ & & \mathbb{R} \end{array} \tag{3.43}$$

$1 \leq i \leq n$ için diyagram değişmelidir. v^i reel değerli fonksiyonlarını $\forall Z \in U'$ için

$$\begin{array}{rlcl} v^i: & U' \subset TM & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & Z & \rightarrow & v^i(Z) = (x^i \circ \pi_M)(Z) = x^i(\pi_M(Z)) = x^i(p) = p^i \end{array} \tag{3.44}$$

şeklinde tanımlansın. v^{n+i} reel değerli fonksiyonlarını $\forall Z \in U'$, $1 \leq i \leq n$ için

$$\begin{array}{rlcl} v^{n+i}: & U' \subset TM & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & Z & \rightarrow & v^{n+i}(Z) = dx^i(Z) = Z\left[x^i\right] \end{array} \tag{3.45}$$

olarak tanımlansın. Buradaki d, M üzerinde tanımlı diferensiyel operatördür. Böylece,

$$\begin{aligned} v^i &= x^i \circ \pi_M \\ v^{n+i}(Z) &= dx^i(Z) = Z\left[x^i\right] : Z \in U^1 \end{aligned} \tag{3.46}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemi kısaca $\{v\}$; $v = (v^1, v^2 ..., v^{2n})$ şeklinde gösterilirse $\{v\}$ sistemi, TM için bir lokal koordinat sistemidir. O halde $\{v\}$ lokal koordinat sistemine bağlı olan

$$\begin{array}{rlcl} v: & U' \subset TM & \rightarrow & E^{2n} \\ & Z & \rightarrow & v(Z) = (v^1(Z), v^2(Z), ..., v^{2n}(Z)) \end{array} \tag{3.47}$$

şeklinde tanımlı v dönüşümü elde edilir. (3.46) sistemi ele alınarak

$$\begin{aligned} v(Z) &= (x^1(\pi_B(Z)), ..., x^n(\pi_m(Z)), \quad Z\left[x^1\right], ..., Z\left[x^n\right]) \\ &= (x^1(p), x^2(p), ..., x^n(p), Z_p\left[x^1\right], ..., Z_p\left[x^n\right]) \end{aligned} \tag{3.48}$$

şeklinde tanımlanır. $Z \in T_p(M) \subset U'$ tanjant vektörü için $x(p) = (p^1, p^2, ..., p^n)$ ve $Z = \sum\limits_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v(Z) &= (x^1(p), ..., x^n(p), Z\left[x^1\right], ..., Z\left[x^n\right]) \\ &= (p^1, ..., p^n, a^1 ..., a^n) \end{aligned} \tag{3.49}$$

olur.

$\forall Z, Y \in U' ve\ Z \neq Y \quad (Z_p \neq Y_p \Longleftrightarrow p \neq q,\ Z \neq Y)$ olmak üzere $1 \leqslant i \leqslant n$ için

$$\begin{aligned} v(Z) &= (p^1, ...p^n, a^1 ... a^n) \qquad p^i \neq q^i \\ v(Y) &= \left(q^1 ... q^n, b^1 ... b^n\right) \qquad a^i \neq b^i \end{aligned}$$

olduğundan $v(Z) \neq v(Y)$ bulunur. Bu durumda v dönüşümü $1-1$ dir.

$\forall a \in V(U') \subset E^{2n}\mathbb{E}^{2n}$ için $\exists Z \in U'; v(Z) = a \in E^{2n}\mathbb{E}^{2n}$ olduğundan örtendir. $1-1$ ve örten ise tersi v^{-1} vardır ve süreklidir. Tanımlanan bu v dönüşümü TM cümlesi ile E^{2n} Öklid uzayı arasında topolojik yapıları korunduğundan bir homomorfizmdir. (U', V) ikilisi de TM için bir haritadır. O halde TM bir topolojik $2n-$manifoldu yapısına sahiptir. TM nin bir Z noktası,

$$\begin{aligned} Z &= \left(v^1(Z),...,v^n(Z),v^{n+1}(Z),...v^{2n}(Z)\right) \\ &= \sum_{i=\imath}^{2n} v^i(Z)\frac{\partial}{\partial v^i}\,|_z \\ &= (x^1(p),...,x^n(p),v^{n+1}(Zp),...,v^{2n}(Zp)) \\ &= (p^1,...,p^n,v^{n+1}(Zp),...,v^{2n}(Zp)) \end{aligned} \tag{3.50}$$

şeklinde ifade edilir. v homeomorfizmi aynı zamanda bir diffeomorfzm olduğundan $TM = \mathbb{R}^{2n} \cong U'$ olur. Ayrıca, $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n \cong U \cong M$ olduğundan $\mathbb{R}^{2n} \cong U \times \mathbb{R}^n$ yazılabilir. O halde lokal olarak $TM \cong U \times \mathbb{R}^n$ izomorfizmi yazılabilir.

V diffeomorfizmi, $\forall Z \in TM$ için

$$\begin{array}{rrcl} v: & U' \subset TM & \to & U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ & Z & \to & v(Z) \end{array} \tag{3.51}$$

şeklinde tanımlı olup

$$\begin{aligned} Z &= (p,Z) \quad p \in M \quad Z \in \mathbb{R}^n \\ Z &= (p,Z_p) \quad p \in M, Z_p \in T_p(M) \qquad (\mathbb{R}^n \cong T_p(M)) \text{ veya} \\ Z &= Z_P = \sum_{i=1}^{n} \quad v^{n+1}(Z_P)\frac{\partial}{\partial x_i}\,|_p \end{aligned} \tag{3.52}$$

şeklinde ifade edilir. $v^{n+1} = y^1,...,v^{2n} = y^n$ alınırsa

$$\begin{aligned} Z \quad &: \quad (x^1(p),x^2(p),...,y^1(Z_p),y^2(Z_p),...,y^n(Z_p)) \\ Z_p \quad &= \quad (x(p),y(Z_p)) = (x(p),dx(Zp)) \\ (x,y) \quad &\longleftrightarrow \quad (x,dx). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Bu özdeşleme sayesinde $\{v\} = \{x,y\}$ sistemi elde edilir ki TM topolojik $2n$-manifoldu üzerinde yapılacak tüm cebirsel ve topolojik işlemlerde $\{x,y\}$ lokal koordinat sistemi kullanılır (Aycan, 2003).

Teorem 3.4.1 TM topolojik $2n$-manifoldu bir C^∞-manifolddur (Aycan, 2003).

İspat TM nin bir C^∞-manifold yapısında olduğunu göstermek için TM nin bir C^∞-atlası elde edilmelidir. M nin $A = \{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ $\alpha \in I$ maximal atlası kullanılarak elde edilir. A maximal atlas olduğundan $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ örtüsü M nin bir bazı olup U_α lar da M nin temel açıklarıdır.

$$\begin{array}{rl} \pi_M: & TM \to M \\ & U'_\alpha \to \pi_M(U'_\alpha) = U_\alpha \end{array} \tag{3.54}$$

kanonik projeksiyonu için $\pi_M^{-1}(U_\alpha) = U'_\alpha \subset TM$ açık altkümeleri de TM topolojik $2n-$manifoldunun temel açıklarıdır. $TM = \underset{\alpha\in I}{\cup} U'$ dir. v_α sürekli dönüşümlerini

$$\begin{array}{llll} v_\alpha : & U'_\alpha \subset TM & \rightarrow & E^{2n} \\ & Z & \rightarrow & v_\alpha(Z) = (X_\alpha(p), Y_\alpha(Zp)) \end{array} \tag{3.55}$$

şekilde tanımlansın. X_α, M manifoldunun bir homeomorfizmidir.

$$Y^i_\alpha(Zp) = Zp\left[x^i_\alpha\right] = dx^i_\alpha(Zp) \tag{3.56}$$

olup X^i_α lar da, X_α homeomorfizminin Öklid koordinat fonksiyonlarıdır. Bu durumda v_α homeomorfizmdir. Bu nedenle (U'_α, v_α) ikilisi, TM için bir haritadır. Tüm haritaların kolleksiyonu $A' = \{(U'_\alpha, v_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ dir. v_α lar (x_α, y_α) özdeşlenebilir. A dan $U'_\alpha \cap U'_\beta = U'_{\alpha\beta} \neq \varnothing$ olacak biçimde (U'_α, U'_α) ve $\left(U'_\beta, v_\beta\right)$ haritalarını seçelim. $v_{\alpha\beta} : v_\beta\left(U'_{\alpha\beta}\right) \rightarrow v_\alpha\,(U')_{\alpha\beta}$ şeklinde tanımlı geçiş dönüşümü $v_{\alpha\beta} = v_\alpha \circ v_\beta^{-1} = (x_\alpha, y_\alpha) \circ \left(x_\beta, x_\beta\right)^{-1} = \left(x_\alpha \circ x_\beta, y_\alpha \circ y_\beta^{-1}\right)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\forall Z \in U^{-1}_{\alpha\beta}$ için

$$\begin{aligned} v_{\alpha\beta}(Z) &= (x_\alpha \circ x_\beta^{-1}, y_\alpha \circ y_\beta^{-1})(Z) \quad Z = (p,z), Z \in R^n \\ v_{\alpha\beta}(Z) &= (x_{\alpha\beta}(p), y_{\alpha\beta}(Z)) \qquad\quad p \in M \cong \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.57}$$

şeklinde tanımlanır. $x_{\alpha\beta} = x_\alpha \circ x_B^{-1}$, M nin C^∞-atlasa sahip olmasından dolayı C^∞-dönüşümdür. $y_{\alpha\beta}$ da $x_{\alpha\beta}$ ya özdeş olduğundan C^∞-dönüşümdür. Böylece $x_{\alpha\beta}$ ve $y_{\alpha\beta}$ C^∞-dönüşüm olduğundan $v_{\alpha\beta}$ bir C^∞-dönüşüm olur. A' atlasından seçeceğimiz $\left(v'_{\alpha\beta} \neq \varnothing\right)$ tüm haritalar için $v_{\alpha\beta}$ geçiş dönüşümü diferensiyellenebilirdir. A' bir C^∞-atlas ve TM topolojik manifoldu C^∞-manifold olur.

Teorem 3.4.2 $\tau_M = (TM, \pi_M, M, \mathbb{R}^n)$ dörtlüsü bir vektör demetidir (Saunders, 1989).

Tanım 3.4.21 M, C^∞-manifoldu baz alınarak oluşturulmuş $\tau_M = (TM, \pi_m, M, \mathbb{R}^n)$ vektör demetine, M manifoldunun tanjant demeti denir. Lokal olarak,

$$TM = \left\{(p,Z) \mid p \in M,\ Z \in T_p(M)\right\} \tag{3.58}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.4.22 $\forall Z \in T_pM$ ve $B \in \mathbb{R}^{2n}$ için (Z,B) sıralı ikilisi B_Z ile gösterilsin.

$$B_Z : C^\infty(TM) \rightarrow \mathbb{R} \tag{3.59}$$

dönüşümü için $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \overline{f}, \overline{g} \in C^\infty(Z)$ olmak üzere

$i) B_Z(a\overline{f} + b\overline{g}) = aB_Z(\overline{f}) + bB_Z(\overline{g})$ (lineerlik)
$ii) B_Z(\overline{f.g}) = B_Z(\overline{f})\overline{g}(Z) + \overline{f}(Z)B_Z(\overline{g})$ (Leibniz kuralı)

şartları sağlanıyorsa, $(Z,B) = B_Z$ ye TM nin Z noktasındaki tanjant vektörü denir (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.23 TTM den TM manifoldu üzerine

$$\begin{pmatrix} \pi_{TM} : TTM \to TM \\ B \to Z \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \forall B \in TTM; \exists ZGTM \\ \pi_{TM}(B) = Z; B \in T_Z TM \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

şeklinde tanımlı π_{TM} dönüşümü, sürekli ve örten bir dönüşüm olup bu π_{TM} ye TTM üzerinde doğal projeksiyon denir (Greub vd., 1972).

Tanım 3.4.24 $\tau_{TM} = (TTM, \pi_{TM}, TM, \mathbb{R}^{2n})$ dörtlüsüne TM manifoldunun tanjant demeti veya M manifoldunun ikinci mertebeden tanjant demeti denir. τ_{TM} vektör demetinin TTM total uzayı,

$$TTM = \{(Z,B) \mid Z \in TM, B \in T_Z TM\} \tag{3.61}$$

şeklindedir. $\pi_M : TM \to M$ doğal projeksiyonunun türev dönüşümü,

$$(\pi_M)_* : TTM \to TM \tag{3.62}$$

olur. $T'_{TM} = (TTM, (\pi_M)_*, TM, R^{2n})$ dörtlüsü de bir vektör demeti olup TM nin tanjant demetidir. Aynı zamanda M manifoldunun ikinci mertebeden tanjant demeti τ_{TM} den farklı bir yapıya sahip olur (Greub vd., 1972).

3.5 Manifold Genişletmeleri

Bir M diferensiyellenebilir manifoldu verildiğinde, M üzerinde temel diferensiyellenebilir elemanların (fonksiyon, vektör alanı, 1-form, konneksiyon, metrik ve tensör alanı) diğer manifoldlara genişletilmesi ve M üzerindeki geometrik yapılarla diğer manifoldlar üzerindeki geometrik yapılar arasındaki ilişki diferensiyel geometri açısından önemli bir problemdir. Bunun çözümünde, öncelikle M üzerinde geometri yapmak için gerekli bazı diferensiyellenebilir elemanların diğer manifoldlara taşınması gerekmektedir. Bu kısımda, M ve diğer manifoldların geometrisi arasında ilişkileri elde edebileceğimiz kavramlar verilmiştir.

Tanım 3.5.1 M bir C^∞-manifold olsun. $M = {}^\circ M, {}^1M, {}^2M$; C^∞-manifoldlar ve ${}^\circ\pi$, ${}^1\pi$, C^∞-dönüşümler olmak üzere

$${}^\circ M \underset{{}^\circ\pi}{\longleftarrow} {}^1M \underset{{}^1\pi}{\longleftarrow} {}^2M$$

şeklinde tanımlı C^{∞}-manifoldlar dizisi için, ${}^{\circ}\pi$ ın tanım cümlesi ile ${}^{1}\pi$ in görüntü cümlesi eşit ise yani

$$D({}^{\circ}\pi) = R({}^{1}\pi) \tag{3.63}$$

ise M manifoldunun bir kısa tam dizisi denir (Bowman, 1970).

Tanım 3.5.2 M bir C^{∞}-manifold ve M üzerinde

$${}^{\circ}M \xleftarrow[{}^{\circ}\pi]{} {}^{1}M \xleftarrow[{}^{1}\pi]{} {}^{2}M \xleftarrow[{}^{2}\pi]{} \ldots$$

bir C^{∞}-manifoldlar dizisi olsun. $\forall i \in Z^{+}$ için

$${}^{i-1}M \xleftarrow[{}^{i-1}\pi]{} {}^{i}M \xleftarrow[{}^{i}\pi]{} {}^{i+1}M$$

dizileri kısa tam dizi ise yani $D({}^{i-1}\pi) = R({}^{i}\pi)$ ise M manifoldunun bir tam dizisi denir. Dizinin en son manifoldu ${}^{m}M$ ise; dizinin uzunluğu m, sonsuz tane manifoldu varsa dizinin uzunluğu sonsuz olacaktır. $\forall k \in Z^{+} \cup \{0\}$ için ${}^{k}\pi$ dönüşümünün türev dönüşümü ${}^{k}\pi_{*}$ ve ${}^{k}M$ C^{∞}-manifoldunun tanjant demeti de $T({}^{k}M)$ ile gösterilsin.

$${}^{k}T_{\pi} : T({}^{k}M) \to^{k} M \tag{3.64}$$

dönüşümü de kanonik projeksiyondur (Bowman, 1970).

Tanım 3.5.3 M bir C^{∞}-manifold ve M nin bir tam dizisinin uzunluğu $m \leqslant \infty$ olsun.

$$i)\quad \begin{tikzcd} {}^{k}M \arrow[r, "{}^{k-1}\pi"] \arrow[dr, "{}^{k-1}I"'] & {}^{k-1}M \\ & T({}^{k-1}M) \arrow[u, "{}^{k}T_{\pi}"'] \end{tikzcd}$$

diyagram değişmeli olacak biçimde ${}^{k-1}I : {}^{k}M \to T({}^{k-1}M)$ imbedding dönüşümleri,

$$ii)\quad \begin{tikzcd} T({}^{k}M) \arrow[r, "{}^{k-1}\pi_{*}"] \arrow[d, "{}^{k}T_{\pi}"'] & T({}^{k-1}M) \\ {}^{k}M \arrow[ur, "{}^{k-1}I"'] & \end{tikzcd}$$

$1 \leqslant k \leqslant m$ tamsayıları için diyagram ${}^{k}I({}^{k+1}M)$ üzerinde tamamen değişmeli ise, M nin bu $\{{}^{\circ}M, {}^{1}M, \ldots\}$ manifoldlar dizisine, M nin m-uzunluklu genişletilmiş dizisi ve ${}^{m}M$ C^{∞}-manifoldunda M nin m. genişletmesi denir (Bowman, 1970).

Tanım 3.5.4

$$M \xleftarrow[\pi_M]{} TM \xleftarrow[\tilde{\pi}]{} {}^{2}M \subset TTM$$

dizisine, M manifoldunun 2-uzunluklu kanonik genişletme dizisi ve ${}^{2}M \subset TTM$ C^{∞}-manifolduna da, M nin ikinci kanonik genişletmesi denir (Aycan, 2003).

3.6 Dış Cebir

Tanım 3.6.1 $\mathcal{F}$, reel sayılar cismi $\mathbb{R}$ veya kompleks sayılar cismi $\mathbb{C}$ olsun. $\mathcal{F}$ üzerinde r tane vektör uzayı $V_1, V_2, ..., V_r$ olmak üzere

$$f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \to \mathcal{F} \tag{3.65}$$

dönüşümü $r-$lineer ise f ye $V_1 \times V_2 \times ... \times V_r$ çarpım cümlesi üzerinde $r-$lineer fonksiyondur denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 3.6.2 $V_1 \times V_2 \times ... \times V_r$ çarpım cümlesi üzerindeki bütün r-lineer fonksiyonlar cümlesi,

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, ..., V_r; \mathcal{F}) = \left\{ f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \overset{r-lineer}{\to} \mathcal{F} \right\} \tag{3.66}$$

ile gösterilsin. Bu cümle $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına $V_1^*, V_2^*, ..., V_r^*$ dual vektör uzaylarının tensör çarpımı denir ve

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, ..., V_r; \mathcal{F}) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^* \tag{3.67}$$

ile gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$ tensör uzayının elemanına r. mertebeden kovaryant tensör adı verilir. $V_1^* = V_2^* = ... = V_r^* = V^*$ olacak şekilde kovaryant tensörlerin cümlesi $\otimes^r V^*$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 3.6.3 p tane elemanının permütasyonlar cümlesi δ_p ile gösterilsin. $\forall \delta \in \delta_p$ permütasyonu ve bir V vektör uzayı üzerindeki p-lineer f fonksiyonu için $\delta f = s(\delta) f$ yani $f(U_{\delta(1)}, ..., U_{\delta(p)}) = s(\delta)\ f(U_1, ..., U_p)$ ise p-lineer f fonksiyonuna p. mertebeden alterne kovaryant tensör denir ve bunların cümlesine

$$\wedge^p V^* = \left\{ f \mid \delta f = s(\delta) f,\ \delta \in \delta_p,\ f \in \otimes^p V^* \right\} \tag{3.68}$$

denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 3.6.4 $A_p : \otimes^p V^* \overset{lineer}{\to} \otimes^p V^*$ dönüşümü $\forall\ f \in \otimes^p V^*$ için $A_p f = \sum\limits_{\delta \in \delta_p} s(\delta) \delta f$ olarak tanımlanırsa A_p ye $\otimes^p V^*$ vektör uzayı üzerinde bir alterneleyen operatör denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 3.6.5 $f \in \wedge^p V^*$ ve $g \in \wedge^q V^*$ olmak üzere

$$f \wedge g = -\frac{1}{p!q!} A_{p+q} (f \otimes g) \tag{3.69}$$

ile tanımlanan $f \wedge g \in \wedge^{p+q} V^*$ elemanına f ile g nin dış çarpımı denir.

$\wedge : \wedge V^* \times \wedge V^* \to \wedge V^*$ dış çarpım işlemi $\forall \sum\limits_{p=0}^{n} f_p, \sum\limits_{q=0}^{n} g_q \in \wedge V^*$ için

$$\sum_{p=0}^{n} f_p \wedge \sum_{q=0}^{n} g_q = \sum_{p+q=r=0}^{n} (f_p \wedge g_q) \tag{3.70}$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 3.6.6 $\wedge V^*$ cümlesinde $\wedge$ dış çarpım işlemi için,

$$\begin{array}{ll} 1) & \left[\sum\limits_{p=0}^{n} f_p \wedge \sum\limits_{q=0}^{n} g_q\right] \wedge \left(\sum\limits_{r=0}^{n} h_r\right) = \left(\sum\limits_{p=0}^{n} f_p\right) \wedge \left[\sum\limits_{q=0}^{n} g_q \wedge \sum\limits_{r=0}^{n} h_r\right] \\ 2) & \left[\sum\limits_{p=0}^{n} f_p + \sum\limits_{q=0}^{n} g_q\right] \wedge \left(\sum\limits_{r=0}^{n} h_r\right) = \left(\sum\limits_{p=0}^{n} f_p \wedge \sum\limits_{r=0}^{n} h_r\right) + \left(\sum\limits_{q=0}^{n} g_q \wedge \sum\limits_{r=0}^{n} h_r\right) \\ 3) & \lambda\left[\sum\limits_{p=0}^{n} f_p \wedge \sum\limits_{q=0}^{n} g_q\right] = \left[\left(\lambda \sum\limits_{p=0}^{n} f_p\right) \wedge \sum\limits_{q=0}^{n} g_q\right] = \left[\left(\sum\limits_{p=0}^{n} f_p\right) \wedge \left(\lambda \sum\limits_{q=0}^{n} g_q\right)\right] \end{array}$$

özelliklerine sahip $\wedge V^*$vektör uzayı, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir cebirdir. Bu cebire V^* vektör uzayının dış cebiri denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

3.7 Süperuzay

Bu kısımda süper uzay olarak adlandırılan $\mathbb{Z}_2$-Gradded vektör uzayı ve $\mathbb{Z}_2$-Gradded cebiri verilmiştir.

Tanım 3.7.1 V bir vektör uzayı olsun. V_0 ve V_1 lineer altuzay olmak üzere $V = V_0 \oplus V_1$ oluyorsa V vektör uzayına $\mathbb{Z}_2$-Gradded vektör uzayı denir (Leites, 1980).

Tanım 3.7.2 V bir $\mathbb{Z}_2$-Gradded vektör uzayı olsun. V, $V_iV_j \subset V_{i+j(\text{mod}\,2)}$ olacak biçimde bir cebir ise V ye $\mathbb{Z}_2$-Gradded cebir denir.

Örnek 3.7.1 V bir vektör uzayı $V = V_0 \oplus V_1$ olmak üzere

$$End(V) = \left\{ s \mid s : V \overset{lineer}{\to} V \right\} \tag{3.71}$$

kümesi için $End(V)$,

$$\begin{aligned} (End(V))_0 &= \left\{ s_0 \mid s_0(v_j) \in V_j; i = 0, 1 \right\} \\ &= \{ s_0 \mid s_0(v_0) \in V_0; s_0(v_1) \in V_1 \} \end{aligned} \tag{3.72}$$

ve

$$\begin{aligned}(End(V))_1 &= \left\{s_1 \mid s_1(v_j) \in V_{j+1}(\bmod 2)\right\} \\ &= \{s_1 \mid s_1(v_0) \in V_1; s_1(v_1) \in V_0\}\end{aligned} \tag{3.73}$$

biçimde çift ve tek kısım olarak yazılır.

$$End(V) = (End(V))_0 \oplus (End(V))_1 \tag{3.74}$$

$\mathbb{Z}_2$-Gradded vektör uzayıdır. $f \in End(V)$ olsun. Bu durumda $f : V \overset{lineer}{\to} V$ dir. V, $\mathbb{Z}_2$-Gradded vektör uzayı olduğundan $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$ olacak biçimde $\alpha_0 \in V_0$ ve $\alpha_1 \in V_1$ vardır. f lineer olduğundan

$$f(\alpha) = f(\alpha_0 + \alpha_1) \overset{lineer}{=} f(\alpha_0) + f(\alpha_1) \tag{3.75}$$

dir.

$$\begin{aligned}f(\alpha_0) &= (f(\alpha_0))_0 + (f(\alpha_0))_1 = s_0(\alpha_0) + s_1(\alpha_0) \\ f(\alpha_1) &= (f(\alpha_1))_0 + (f(\alpha_1))_1 = s_0(\alpha_1) + s_1(\alpha_1)\end{aligned} \tag{3.76}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= f(\alpha_0 + \alpha_1) \\ &= f(\alpha_0) + f(\alpha_1) \\ &= (f(\alpha_0))_0 + (f(\alpha_0))_1 + (f(\alpha_1))_0 + (f(\alpha_1))_1 \\ &= s_0(\alpha_0) + s_1(\alpha_0) + s_0(\alpha_1) + s_1(\alpha_1) \\ &= s_0(\alpha_0 + \alpha_1) + s_1(\alpha_0 + \alpha_1) \\ &= s_0(\alpha) + s_1(\alpha) \\ &= (s_0 + s_1)(\alpha)\end{aligned} \tag{3.77}$$

bulunur. $\forall\alpha$ için doğru olduğundan

$$f = s_0 + s_1 \tag{3.78}$$

olur. O halde $End(V)$, $\mathbb{Z}_2$-Gradded vektör uzayıdır (Uğurlu, 1987).

Örnek 3.7.2 $End(V)$, $\mathbb{Z}_2$-Gradded cebirıdir. Bu durumda

$$(End(V))_i \cdot (End(V))_j \subset (End(V))_{i+j(\bmod 2)} \tag{3.79}$$

özelliğini sağladığı gösterilmelidir.

i) $\forall s_0 \in (End(V))_0$ ve $\forall s_1 \in (End(V))_1$ için

$$\begin{aligned} (s_0 s_1)(v_0) &= s_0(s_1(v_0)) = s_0(v_1) = v_1 \\ (s_0 s_1)(v_1) &= s_0(s_1(v_1)) = s_0(v_0) = v_0 \end{aligned} \tag{3.80}$$

olup buradan $s_0 s_1 \in (End(V))_1$ dir.

ii) $\forall s_0 \in (End(V))_0$ ve $\forall s_1 \in (End(V))_1$ için

$$\begin{aligned} (s_1 s_0)(v_0) &= s_1(s_0(v_0)) = s_1(v_0) = v_1 \\ (s_1 s_0)(v_1) &= s_1(s_0(v_1)) = s_1(v_1) = v_0 \end{aligned} \tag{3.81}$$

olup buradan $s_1 s_0 \in (End(V))_1$ dir.

iii) $\forall s_1 \in (End(V))_1$ için

$$\begin{aligned} (s_1 s_1)(v_0) &= s_1(s_1(v_0)) = s_1(v_1) = v_0 \\ (s_1 s_1)(v_1) &= s_1(s_1(v_1)) = s_1(v_0) = v_1 \end{aligned} \tag{3.82}$$

olup buradan $s_1 s_1 \in (End(V))_0$ dir.

iv) $\forall s_0 \in (End(V))_0$ için

$$\begin{aligned} (s_0 s_0)(v_0) &= s_0(s_0(v_0)) = s_0(v_0) = v_0 \\ (s_0 s_0)(v_1) &= s_0(s_0(v_1)) = s_0(v_1) = v_1 \end{aligned} \tag{3.83}$$

olup buradan $s_0 s_0 \in (End(V))_0$ dir.

O halde $End(V)$, bir $\mathbb{Z}_2$-Gradded cebirıdir (Uğurlu, 1987).

Tanım 3.7.3 V bir $\mathbb{Z}_2$-Gradded vektör uzayı olsun. V nin herhangi bir elemanı, V_0 veya V_1 uzayına ait ise bu elemana homogen eleman adı verilir (Leites, 1980).

Tanım 3.7.4 $\forall v \in V$, bir homogen eleman olsun. Eğer $v \neq 0$ ve $v \in V_0$ ise v derecesi 0, v$\neq$ 0 ve $v \in V_1$ ise v nin derecesi 1 olup $|v|$ notasyonuyla gösterilir (Leites, 1980).

Tanım 3.7.5 V herhangi bir cebir olsun. Eğer $a \in V_0$, $b \in V_1$ için

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba \tag{3.84}$$

ise V cebirine $\mathbb{Z}_2$-Gradded komütatif cebir adı verilir (Leites, 1980).

3.8 Süpersayılar

Bir cebir için $\{\zeta^a \mid a = 1, ..., N\}$ üreteçlerinin cümlesi $\forall a, b$ için

$$\begin{aligned} \zeta^a \zeta^b &= -\zeta^b \zeta^a \\ (\zeta^a)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.85)$$

antikomütatif özelliğe sahip ise bununla ilgili cebir Grassmann cebiri olarak adlandırılır ve $\wedge_N$ olarak gösterilir.

N sonlu olduğu zaman sonlu elemana sahip $\left\{1, \zeta^a, ..., \zeta^N\right\}$ cümlesi göz önüne alındığında $\wedge_N$ nin 2^N tane baz elemanına sahip olduğu görülür.

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N \quad (3.86)$$

olduğundan *boy* $\wedge_N = 2^N$ dir. N sonsuz için $\left\{1, \zeta^a, \zeta^a\zeta^b, ...\right\}$ cümlesindeki her bir çarpımındaki indislerin hepsi farklı olup bu cümle, $\wedge_\infty$ için bir bazdır. (DeWitt, 1992).

Tanım 3.8.1 $\wedge_\infty$ un her bir elemanına süpersayı adı verilir. $Z \in \wedge_\infty$ süpersayısı, ζ^a bazları ve $\mathbb{C}$ kompleks sayıları yardımıyla

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C_{a_1...a_n} \zeta^{a_n} ... \zeta^{a_1} \\ &= \frac{1}{0!} C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} C_{a_1...a_n} \zeta^{a_n} ... \zeta^{a_1} \end{aligned} \quad (3.87)$$

biçimde yazılabilir. Bu durumda Z nin Z_B ve Z_S kısımları

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{1}{0!} C_0 \\ Z_S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} C_{a_1...a_n} \zeta^{a_n} ... \zeta^{a_1} \end{aligned} \quad (3.88)$$

şeklinde alınır (DeWitt, 1992).

Tanım 3.8.2 Bir $Z = Z_B + Z_S$ süpersayısıı için Z_B ye çift (body) kısmı, Z_S ye tek (soul) kısmı denir.

Özellik 3.8.1 $\wedge_\infty$ yerine $\wedge_N$ (N sonlu) alındığında Z_S daima nilpotenttir.

Z_S nin nilpotent olması için $Z_S^{n+1} = 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} Z_S^{n+1} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} C_{a_1...a_n} \zeta^{a_n} ... \zeta^{a_1} \right)^{N+1} \\ &= \sum_{n=1}^{N} F(n).G(C_{a_1...a_n}) (\zeta^{a_n} ... \zeta^{a_1})^n \end{aligned} \quad (3.89)$$

dir. Burada $\zeta^{a_{N+1}}\zeta^{a_N}...\zeta^{a_1}$ çarpımındaki $\zeta^{a_{N+1}}$ elemanı, $\zeta^{a_N},...,\zeta^{a_1}$ elemanlarından biri olmak zorundadır. Bu durumda $(N+1)$-li çarpan, her bir terimde geleceği için $Z_S^{n+1}=0$ bulunur. $Z=Z_\beta+Z_s$ nin tersi $Z^{-1}=Z_\beta^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{Z_S}{Z_\beta}\right)^n$ dir.

$Z.Z^{-1}=1$ gösterilmesi için $Z_B\neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
Z.Z^{-1} &= (Z_B+Z_s).Z_B^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{Z_S}{Z_B}\right)^n \qquad (3.90)\\
&= (Z_B+Z_s).Z_B^{-1}(\pm-\frac{Z_s}{Z_B}+\frac{Z_s^2}{Z_B^2}-...)\\
&= (Z_B+Z_S).(\frac{1}{Z_B}-\frac{Z_s}{Z_B^2}+\frac{Z_s^2}{Z_B^3}-...)\\
&= \left(1-\frac{Z_s}{Z_B}+\frac{Z_s^2}{Z_B^2}-...\right)+\left(\frac{Z_s}{Z_B}-\frac{Z_s^2}{Z_B^2}+\frac{Z_s^3}{Z_B^3}-...\right)\\
&= 1
\end{aligned}$$

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun $Z=Z_B+Z_s$ olacak şekilde Z_B noktasındaki Taylor açılımı,

$$\begin{aligned}
f(Z) &= f(Z_B)+f'(Z_B).(Z-Z_s)+\frac{1}{2!}f''(Z_B)'(Z-Z_s)^2...+\frac{1}{n!}f^{(n)}(Z_B).(Z-Z_s)^n+... \qquad (3.91)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(Z_B)\ (Z-Z_s)^n
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilir (Uğurlu,1987).

Tanım 3.8.3 (DeWitt, 1992) Herhangi bir $Z\in\wedge_\infty$ süpersayının

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}C_{a_1,...,a_n}\xi^{a_n}...\xi^{a_1} \qquad (3.92)$$

şeklinde yazılabildiği ifade edilmiştir. n sayısının tek veya çift olmasına bağlı olarak Z süpersayısı,

$$Z=\frac{1}{0!}C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}C_{a_1,\cdots a_{2n}}\ \xi^{a_{2n}}...\xi^{a_1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\ C_{a,\cdots a_{2n+1}}\ \xi^{a_{2n+1}}...\xi^{a_1} \qquad (3.93)$$

toplam biçiminde ifade edilebilir. Burada çift ve tek kısım aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned}
U &= Z_B+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\ C_{a_1\cdots a_{2n}}\ \xi^{a_{2n}}...\xi^{a_1} \qquad (3.94)\\
V &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\ C_{a,\cdots a_{2n+1}}\ \xi^{a_{2n+1}}...\xi^{a_\prime}
\end{aligned}$$

Tanım 3.8.4 (3.94) denklemindeki çift sayı indisli süpersayılara çift süpersayı, tek sayı indisli süpersayılara tek süpersayı denir. Çift süpersayılar c-sayıları ve tek süpersayılar a-sayıları olarak da adlandırılır ve cümleleri sırayla C_c ve C_a ile gösterilir (DeWitt, 1992).

Özellik 3.8.2 İki tek süpersayının veya iki çift süpersayının çarpımı bir çift süpersayıdır.

v ve $v\acute{}$ tek sayılar olsun.

$$\begin{aligned} v.\acute{v} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} C_{a,\cdots a_{2n+1}} \; \xi^{a_{2n+1}} ... \xi^{a,} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \; C_{a\cdots a_{2m+1}} \xi^{a_{2m+1}} ... \xi^{a_1} \\ &= \sum_n \sum_m \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{(2m+1)!} C_{a_1 \cdots a_{2n+1}} \acute{C}_{a_1 \cdots a_{2n+1}} \; \xi^{a_{2n+1}} ... \xi^{a_1.} \; \xi^{a_{2m+1}} ... \xi^{a_1} \end{aligned} \tag{3.95}$$

$(2n+1)+(2m+1) = 2(n+m+1) = 2k$ ve $C_{a_1 \cdots a_{2n+1}} \;\; C'_{a_1 ... a_{2m+1}} = C_{a_1 \cdots a_{2k}}$

$\xi^{a_{2n+1}} ... \xi^{a_1} \;\; \xi^{a_{2m+1}} ... \xi^{a_1}$ gerenleri $\xi^{a_{2k}} ... \xi^{a_1}$ olmak üzere

$$v.\acute{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} C_{a_1} ... C_{a_{2k}} \;\; \xi^{a_{2k}} ... \xi^{a_1} \tag{3.96}$$

olur. v ve $\acute{v}$ çift sayılar olsun.

$$\begin{aligned} v.\acute{v} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \; C_{a_1 \cdots a_{2n}} \xi^{a_{2n}} ... \xi^{a_1} . \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \; C_{a_1 \cdots a_{2m}} \xi^{a_{2m}} ... \xi^{a_1} \\ &= \sum_n \sum_m \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{(2m)!} \;\; C_{a_1 \cdots a_{2m}} \xi^{a_{2n}} ... \xi^{a_1} \xi^{a_{2m}} ... \xi^{a_1} \end{aligned} \tag{3.97}$$

$C_{a_1 \cdots a_{2n}} C'_{a_1 \cdots a_{2m}} = C_{a_1 \cdots a_{2k}} \xi^{a_{2n}} ... \xi^{a_1} \xi^{a_{2m}} ... \xi^{a_1} = \xi^{a_{2k}} ... \xi^{a_1}$ ve $2n+2m = 2(n+m) =$ $2k$ olmak üzere

$$v.\acute{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \;\; C_{a_1} ... C_{a_{2k}} \;\;\; \xi^{a_{2k}} ... \xi^{a_1} \tag{3.98}$$

bulunur (West, P. C, 1986; Uğurlu,1987).

Sonuç 3.8.1 Tek süpersayılar cümlesi çarpma işlemine göre antikomutatif ve çift süpersayılar cümlesi çarpma işlemine göre komütatiftir**.**

Özellik 3.8.3 Bir tek süpersayı ile bir çift süpersaysının çarpımı bir tek süpersayıdır.

$U \in C_c$ ve $V \in C_a$ ve $2n+1m+1 = 2(n+m)+1 = 2k+1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} u.v &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \;\; C_{a_1 \cdots a_{2n}} \;\;\; \xi^{a_{2n}} ... \xi^{a_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} C'_{a_1 \cdots a_{2m+1}} \xi^{a_{2m+1}} ... \xi^{a_1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \;\;\; C_{a_1 \cdots a_{2k+1}} \xi^{a2k+1} ... \xi^{a_1} \end{aligned} \tag{3.99}$$

elde edilir (West, P. C, 1986; Uğurlu,1987).

Tanım 3.8.5 $\wedge_\infty$ üzerinde $*$ ile gösterilen operatör $\forall Z, Z' \in \wedge_\infty$ için

1) $\left(Z+Z'\right)^* = Z^* + Z'^*$
2) $\left(Z.Z'\right)^* = Z'^*.Z^*$

özelliklerini sağlıyor ise $*$ operatörüne $\wedge_\infty$ üzerinde bir kompleks eşlenik denir. Bazlar için

$$\begin{aligned}(\xi^a)^* &= \xi^a, \qquad \forall a \\ \left(\xi^a\xi^b...\xi^c\right)^* &= \left(\xi^c...\xi^b\xi^a\right)\end{aligned} \tag{3.100}$$

kabul edilir. $Z \in \wedge_\infty$ olsun. Z_B nin katsayılardaki kompleks eşleniği, kompleks sayılardaki eşlenik işlemiyle aynıdır (DeWitt,1992).

Örnek 3.8.1

$$Z = \underset{\text{çift}}{C_0} + \underset{\text{tek}}{C_1\xi^1} + \underset{\text{çift}}{C_{12}\xi^2\xi^1} \tag{3.101}$$

şeklinde ifade edilen bir süper sayının $Z^* = \overline{C}_0 + \overline{C}_1\xi^1 - \overline{C}_{12}\xi^2\xi^1$ süpersayısıdır.

Tanım 3.8.6 $Z \in \wedge_\infty$ olsun. Eğer $Z^* = Z$ ise Z süpersayısına reel, $Z^* = -Z$ ise Z süpersayısına imajiner denir.

Özellik 3.8.5 $\xi^{a_1}...\xi^{a_n}$ baz elemanı; $\frac{n(n-1)}{2}$ çift olduğu zaman reel, $\frac{n(n-1)}{2}$ tek olduğu zaman imajinerdir.

$(\xi^{a_1}...\xi^{a_n})^* = (\xi^{a_n}...\xi^{a_1})$ olduğu biliniyor. $\xi^a\xi^b = -\xi^b\xi^a$ antikomütatif özelliğinden

$$\xi^{a_n}...\xi^{a_1} = \frac{n(n-1)}{2}\xi^{a_1}...\xi^{a_n} \tag{3.102}$$

yazılabilir. $\dfrac{n(n-1)}{2}$ tek ise

$$(\xi^{a_1}...\xi^{a_n})^* = -\xi^{a_n}...\xi^{a_1} \tag{3.103}$$

dir. $\dfrac{n(n-1)}{2}$ çift ise

$$(\xi^{a_1}...\xi^{a_n})^* = \xi^{a_n}...\xi^{a_1} \tag{3.104}$$

elde edilir (Uğurlu,1987).

Sonuç 3.8.1 (Uğurlu,1987) $Z_S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} C_{a_1,...,a_n}\, \xi^{a_n}...\xi^{a_1}$ olmak üzere

$$Z_S \text{ reeldir } \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} C_{a_1,...,a_n} \text{ reel} & \frac{n(n-1)}{2}\text{çift tamsayı} \\ C_{a_1,...,a_n} \text{ imajiner} & \frac{n(n-1)}{2}\text{tek tamsayı}\end{array}\right\}. \tag{3.105}$$

Tanım 3.8.7 $Z \in \wedge_\infty$ herhangi bir eleman olsun. Z reeldir $\Leftrightarrow$ Z_B ve Z_S reeldir.

$Z \in \wedge_\infty$ süpersayısı tek ve çift kısımların toplamı olarak $Z = u + v$ biçiminde yazılır. Burada sırasıyla u ve v çift ve tek kısımları oluşturmaktadır.

C_c cümlesindeki bütün reel elemanların cümlesi $\mathbb{R}_c$ ve C_a cümlesindeki bütün reel elemanların cümlesi $\mathbb{R}_a$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_c &= \{Z \in C_c \mid Z^* = Z\} \\ \mathbb{R}_a &= \{Z \in C_a \mid Z^* = -Z\} \end{aligned} \tag{3.106}$$

şeklinde tanımlanır (Rogers, 2007).

Özellik 3.8.6 Reel çift süpersayılar ile reel tek süpersayılar arasında aşağıdaki bağıntılar vardır (Uğurlu,1987):

1) İki reel çift süpersayının çarpımı bir reel çift süpersayıdır.

2) Bir reel çift süpersayı ile bir reel tek süpersayının çarpımı bir reel tek süpersayıdır.

3) İki reel tek süpersayının çarpımı bir imajiner çift süpersayıdır.

4) $\mathbb{R}_c$ cümlesi C_c cümlesinin bir alt cebiridir.

3.9 Süper Analitik Fonksiyonlar

c ve a sayı fonksiyonlarının analitik teorisi, sırasıyla, C_c ve C_a dan $\wedge_N$analitik dönüşümlerle inşa edilir. Bunlar

$f_1 : C_a \to \wedge_N$ ve $f_2 : C_c \to \wedge_N$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.9.1 v, dv ile yer değiştirebilen çok küçük a-sayısı olsun. Bu durumda v nin $\wedge_\infty$ daki $f(v)$ görüntüsü için $df(v)$, $dv\left[\frac{d}{dv}f(v)\right] = \left[f(v)\frac{d}{dv}\right]dv$ dir. Burada v ye bağlı olan $\frac{d}{dv}f(v)$ ve $f(v)\frac{d}{dv}$ katsayılarına sırasıyla f fonksiyonunun sırasıyla sol türevi ve sağ türevi denir.

$\wedge_\infty$ keyfi sabit iki elemanı a ve b olmak üzere $f(v) = a + bv$ elde edilir. Eğer $b \in \wedge_\infty$ elemanı $b = b_e + b_\circ$ tek ve çift kısımlara ayrılıyorsa,

$$f(v)\frac{\overrightarrow{d}}{dv} = b_e + b_\circ \; ve \frac{\overrightarrow{d}}{dv}f(v) = b_e - b_\circ \tag{3.107}$$

dir (DeWitt,1992)..

Teorem 3.9.1 f nin değer bölgesi C_c de kalıyor ise a çift, b tek ve

$$\frac{\overrightarrow{d}}{dv}f(v) = -f(v)\frac{\overrightarrow{d}}{dv} \tag{3.108}$$

dir (DeWitt,1992).

İspat f nin değer bölgesi C_c olsun. Bu durumda $\forall v \in C_a$ için $f(v) \in C_c$ olacağından a, $bv \in C_c$ olmalıdır. Bu durumda $a \in C_c$, $bv \in C_c$ olması için $b \in C_a$ olmalıdır.

Teorem 3.9.2 f nin değer bölgesi C_a da kalıyor ise a tek, b çift ve

$$\frac{\overrightarrow{d}}{dv}f(v) = f(v)\frac{\overrightarrow{d}}{dv} \tag{3.109}$$

dir (DeWitt,1992).

İspat f nin değer bölgesi C_c olsun. Bu durumda $\forall \in C_a$, $bv \in C_a$ olması için $b \in C_c$ olmalıdır.

$$\frac{\overrightarrow{d}}{dv}f(v) = f(v)\frac{\overrightarrow{d}}{dv} \tag{3.110}$$

olduğu görülür.

Tanım 3.9.2 C_c cümlesi göz önüne alınsın. Bu durumda

$$f_1 : C_a \to \wedge_\infty \tag{3.111}$$

süperanalitik dönüşümü benzer olarak

$$df(u) = du\left[\frac{\overrightarrow{d}}{du}f(u)\right] = \left[f(v)\frac{\overrightarrow{d}}{dv}\right]du \tag{3.112}$$

biçiminde tanımlanır (DeWitt,1992).

Özellik 3.9.1 f nin değer bölgesi C_c de ise n tek olmak üzere $f_{a_1 \ldots a_n}$ sıfırdır (Uğurlu, 1987).

Özellik 3.9.2 f nin değer bölgesi C_a de ise n çift olmak üzere $f_{a_1 \ldots a_n}$ sıfırdır (Uğurlu, 1987).

3.10 Süpervektör Uzayı ve Süperdeterminant

Bu kısımda süpervektör uzayı için gerekli olan bazı kavramlar ile süpervektörler yardımıyla oluşturulan matris yapısı kullanılarak süperdeterminant (Berezinian) özellikleri verilmiştir. Süpermatris yapısı her bir satır ve sütuna eklenen paritelerle oluşan matris yapısıdır. Bu yapı, satır ve sütun sayılarını içeren ikililer tarafından oluşan hücrelerin dikdörtgensel dizilişidir.

Tanım 3.10.1 Bir G cümlesi üzerinde $+$ iç işlemi, $\cdot$ dış işlemi ve $*$ kompleks konjuge işlemi verilsin. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan G cümlesine süpervektör uzayı denir ve G nin her bir elemanına bir süpervektör denir.

1) $+: G\times G\rightarrow G$ grup aksiyomlarını sağlar.

2) $\alpha\in\wedge_\infty$ ve $\forall x\in G$ için sırasıyla sol ve sağ çarpım adı verilen α_L ve α_R dönüşümleri vardır. Bu dönüşümler sırasıyla

$$\begin{array}{rccl} \alpha_L: & G & \rightarrow & G \\ & X & \mapsto & \alpha_L(X)=\alpha X \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccl} \alpha_R: & G & \rightarrow & G \\ & X & \mapsto & \alpha_R(X)=X\alpha \end{array} \tag{3.113}$$

biçiminde tanımlanır. α_L ve α_R dönüşümleri, $\forall X,Y\in G$ ve $\forall\alpha,\beta\in\wedge_\infty$ için

$$\begin{array}{ll} i)\ (\alpha+\beta)X=Xx+\beta X & X(\alpha+\beta)=X\alpha+X\beta \\ ii)\ \alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y & (X+Y)\alpha=X\alpha+Y\alpha \\ iii)\ (\alpha\beta)X=\alpha(\beta X) & X(\alpha\beta)=(X\alpha)\beta \\ iv) 1X=X & X1=X \end{array}$$

aksiyomları sağlar.

3) Sol ve sağ çarpım bağımlıdır.

i) $\forall\alpha,\beta\in\wedge_\infty$ ve $\forall X\in G$ için $(\alpha X)\beta=\alpha(X\beta)$

ii) α, bir c-sayısı ise $\forall X\in G$ için $\alpha X=X\alpha$

iii) α, bir a-sayısı ise $\forall X\in G$ için $X=u+v$ alındığında $\alpha u=u\alpha$, $\alpha v=-v\alpha$ eşitlikleri yazılabilecek şekilde vardır. Bu durumda u ve v ye sırasıyla çift ve tek kısım denir.

4) G üzerinde $*$ ile gösterilen ve

$$\begin{array}{rccl} *: & G & \rightarrow & G \\ & X & \mapsto & ^*(x)=X^* \end{array} \tag{3.114}$$

biçiminde tanımlanan operatör için aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $\forall X \in G$ için $x^{**} = x$,

ii) $\forall X, Y \in G$ için $(X+Y)^* = X^* + Y^*$,

iii) $\forall X \in G$ ve $\forall \alpha \in \wedge_\infty$ için $(\alpha X)^* = X^* \alpha^*$ ve $(X\alpha)^* = \alpha^* X^*$ (Dewitt,1992).

Tanım 3.10.2 X bir süpervektör, $X = u + v$ süpervektörünün çift ve tek kısmı sırasıyla u ve v olsun. $u = 0$ ise X e tek ($a-$tipi) süpervektör, $v = 0$ ise X e çift ($c-$tipi) süpervektör adı verilir (Dewitt,1992).

Tanım 3.10.3 Çift ve tek olan bir süpervektöre pure süpervektör denir (Dewitt,1992).

Tanım 3.10.4 Bir Z süpervektörü için $Z^* = Z$ ise Z ye reel süpervektör, $Z^* = -Z$ ise Z ye imajiner süpervektör denir (Dewitt,1992).

Tanım 3.10.5 $X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ şeklinde matris olsun. Burada i.satır ve j. sütun pariteleri sırasıyla $p_{satır}(i)$ ve $p_{sütun}(j)$ ifade edilsin. p çift ve q tek satır, r çift ve s tek sütun matris yapısı $(p,q)\times(r,s)$ tipinde matris olsun. X süpermatris yapısı, $\left\{ \left[X_{ij} \right] <| \, X_{ij} \in A \right\}$ kümesine A üzerinde matris denir.

$$\begin{array}{lcl} p(X_{ij}) + p_{satır}(i) + p_{sütun}(j) = \overline{0} & \Rightarrow & p(X) = \overline{0} \\ p(X_{ij}) + p_{satır}(i) + p_{sütun}(j) = \overline{1} & \Rightarrow & p(X) = \overline{1} \end{array} \tag{3.115}$$

şeklindedir. Yani $X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ için

$$\begin{array}{lcl} p(R_{ij}) = p(U_{ij}) = \overline{0},\, p(S_{ij}) = p(T_{ij}) = \overline{1} & \Rightarrow & p(X) = \overline{0} \\ p(R_{ij}) = p(U_{ij}) = \overline{1},\, p(S_{ij}) = p(T_{ij}) = \overline{0} & \Rightarrow & p(X) = \overline{1} \end{array} \tag{3.116}$$

olur.

X ve Y matrislerinin çarpımının hesaplanması

$$(XY)_{ij} = \sum_k X_{ik} Y_{kj} \qquad X_{sütun} = Y_{satır} \tag{3.117}$$

şeklindedir. $(p,q)\times(m,n)$ tipindeki bir matris sadece $(m,n)\times(r,s)$ tipindeki matrisle sağdan çarpılabilir. Bu durumda $p(XY) = p(X) + p(Y)$ elde edilir.

$(p,q)\times(m,n)$ değişmeli A üzerinde matris süperuzayı

$$\begin{array}{rl} (Xa)_{ij} = & (-1)^{p(a)\; p_{sütun}(j)} X_{ij} a \\ (aX)_{ij} = & (-1)^{p(a)\; p_{ssatır}(j)} a X_{ij} \end{array} \tag{3.118}$$

tanımlanarak A-modüle dönüşür. Satır(sütun) vektörü, sadece satır(sütun) olan matristir ve $\overline{0}$ paritesine sahiptir (Inoque ve Maeda, 1991; Leites,1980).

Tanım 3.10.6 $\mathcal{A}$, değişmeli süpercebir ve $GL_{p,q}(\mathcal{A})$, $Mat_{p,q}(\mathcal{A})$ matris yapısının çift tersinir çarpım grubu olsun. $\mathcal{A}_0^*$, $\mathcal{A}_0$ süpercebirinin tersinir grubu olacak şekilde

$$GL_{p,q}(\mathcal{A}) \longrightarrow GL_{1,0}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0^*$$

homomorfizmi, $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL_{p,q}(\mathcal{A})$ için D tersinir olacak şekilde

$$Ber\, X = \det(A - BD^{-1}C)(\det D)^{-1} \tag{3.119}$$

ifade edilir. Burada $A - BD^{-1}C$ ve D, $\mathcal{A}_0$ elemanlarıdır. Bu fonksiyona Berezinian ya da süperdeterminant denir (Leites,1980).

Tek durumunda ise; çift ve tek boyutlarının eşit olduğu X tek matrisi tersinirdir. Bu durumda X matrisin tersinirliği JX matrisin tersinirliğine eşit olur. Burada

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \tag{3.120}$$

matrisidir. Buna göre, X matrisinin süperdeterminantı

$$Ber\, X = \det(C - DB^{-1}A)(\det -B)^{-1} \tag{3.121}$$

şeklinde tanımlanır (Anonim, 2017;Varadarajan, 2004; Berezin, 1987).

Tanım 3.10.7 $X, Y \in GL_{p,q}(\mathcal{A})$ ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Frappat L vd., 2010; Berezin, 1987);

i) $Ber\, \left(X^{-1}\right) = Ber\, (X)^{-1}$

ii) $Ber\, (XY) = Ber\, X . Ber\, Y.$

3.11 Süpermanifoldlar

Süpermanifold kavramı iki başlangıçta toplanır. İlk tanımlama kuantum teori çalışmalarına matematiksel bir katkı getirmek amacıyla yapılmıştır. İkinci olarak ise daha geometrik yapıya dayanan Grasman cebirinin çift ve tek elemanları olarak tanımlanan noktaların oluşturduğu süperuzay oluşturularak yapılan çalışmalarıdır. Bir çok çalışma, süpermanifold tanımını hem sheaf teorisi hem de manifold teorisi şeklinde tanımlayan yaklaşım, Öklid uzayında bilinen manifoldun tanımını, süper-Öklid uzayıyla değiştirerek tanımlar. Burada süper-Öklid uzayı, m tane çift bileşeni ile n tane tek bileşenin dış cebir çarpımıdır.

Kartezyen çarpım kavramı altında $\mathbb{R}_c^m$ ve $\mathbb{R}_a^n$ cümleleri

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_c^m &= \mathbb{R}_c \times ... \times \mathbb{R}_c = \{Z \mid Z = (U_1, ..., U_m) : U_i \in \mathbb{R}_c, 1 \leq i \leq m\} \\ \mathbb{R}_a^n &= \mathbb{R}_a \times ... \times \mathbb{R}_a = \{Z \mid Z = (V_1, ..., V_n) : V_i \in \mathbb{R}_a, 1 \leq i \leq n\} \end{aligned} \tag{3.122}$$

olsun. ε ile gösterilen reel sayı değerli bir fonksiyon reel sayılar cümlesi $\mathbb{R}$ ve $\forall Z \in \mathbb{R}_c$ için

$$Z = Z_{\mathbb{R}} \frac{1}{(2n)!} C_{a_1 ... a_{2n}} \zeta^{a_{2n}} ... \zeta^{a_1} \tag{3.123}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & \mathbb{R}_c & \to & \mathbb{R} \\ & Z & \mapsto & \varepsilon(Z) = Z_{\mathbb{R}} \end{array} \tag{3.124}$$

şeklinde tanımlanır (Rogers,1980).

$\mathbb{R}^m$ uzayındaki bilinen manifoldlar gibi $\mathbb{R}_c^m \times \mathbb{R}_a^n$ süperuzayında da süpermanifold konusu tanımlanır. Yani, bir süpermanifoldun lokal bölgesi, $\mathbb{R}_c^m \times \mathbb{R}_a^n$ süperuzayının lokal bölgelerine benzerdir. Aynı lokal topolojiye sahiplerdir. Λ_∞ yerine Λ_N alındığında $\mathbb{R}_c^m \times \mathbb{R}_a^n$ süperuzayı, $2^{N-1}(m+n)$-boyutlu vektör uzayı olduğundan bir doğal topolojiye sahiptir. Bilinen vektör uzayı topolojisinin $\mathbb{R}_c^m \times \mathbb{R}_a^n$ süperuzayının cebirsel yapısıyla benzer değildir. Limit $N \to \infty$ durumunu sağlamak için düzenleme yapılsa da genişletilemez. Bir diğer topoloji, kaba topoloji, $\mathbb{R}_c^m \times \mathbb{R}_a^n$ süperuzayına doğal yolla eşlenebilir. Bu topoloji cebirsel yapısını da yansıtır. N sonlu veya sonsuz olma durumu için uygulanabilir. Bu son ifade edilen topoloji, süpermanifold teorisi için en uygun olanıdır (DeWitt, 1992).

$\mathbb{R}_L^{m+n}$ süperuzay için bir çok topoloji tanımı yapılmıştır. En kullanışlı olanı Hausdorf uzayı olmamasına rağmen DeWitt tarafından tanımlanır. DeWitt topolojisindeki özel cebirsel özellikler, süpermanifold teorisindeki görüşleri kullanmak için uygun topolojiyi oluşturur. Bunun yanısıra tanımlanan bir başka topoloji de Jadczyk ve Pilch (1981) tarafından $\mathbb{R}_L$ Banach cebirine kısıtlanarak da tanımlanmıştır (Rogers,2007).

Tanım 3.11.1 U, $\mathbb{R}_L^{m+n}$ süperuzayın altkümesi olsun. U altkümesi, DeWitt topolojisine göre açıktır ancak ve ancak

$$U = \varepsilon_{(m,n)}^{(L)^{-1}}(V) \tag{3.125}$$

olacak şekilde V, $\mathbb{R}^m$ açık altkümesi vardır (DeWitt, 1992).

Tanım 3.11.2 $\forall U = (U_1, ..., U_m) \in \mathbb{R}_c^m$ ve $V = (V_1, ..., V_n) \in \mathbb{R}_a^n$ için

$$\begin{array}{rlll} \pi: & \mathbb{R}_c^m \times \mathbb{R}_a^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (U,V) & \mapsto & \pi(U,V) = (\varepsilon(U_1), ..., \varepsilon(U_m)) \end{array} \tag{3.126}$$

şeklinde tanımlı dönüşüme doğal izdüşüm denir (Uğurlu,1987).

Tanım 3.11.3 $\phi : R_c^m \times R_a^n \rightarrow R_c^m \times R_a^n$ bir fonksiyon ve $x \in R_c^m \times R_a^n$ olsun. $\phi(x)$ noktasının $\overset{-i}{x}\,(i = 1, ..., \bar{m}, -1, ..., -\bar{n})$ koordinatları, x noktasının x^i $(i = 1, ..., m, -1, ..., n)$ koordinatlarına bağlı olarak diferensiyellenebilir ise ϕ dönüşümü diferensiyellenebilirdir denir.

$$\begin{array}{rcccc} R_c^m \times R_a^n & \overset{\phi}{\rightarrow} & R_c^m & \times & R_a^n \\ P(i,j) = (R_i \times H_j) \circ \phi & \searrow & \downarrow R_i & & \downarrow H_j \\ & & R_c & \times & R_a \end{array}$$

Burada $\overset{-i}{x}$ ler ϕ dönüşümü ile tanımlı x in koordinatları olup

$$x \mapsto \phi(x) = \left(x^1(x), ..., x^{\bar{m}}(x), x^{-1}(x), ..., x^{-\bar{n}}(x) \right) \tag{3.127}$$

dir. $\forall i, j$ için $P(i, j)$ dönüşümleri diferensiyellenebilir ise ϕ dönüşümü diferensiyellenebilirdir denir (Uğurlu,1987).

Tanım 3.11.4 $x \in R_c^m \times R_a^n$ elemanı için $\pi^{-1}(\pi(x))$ cümlesine, x üzerinde tek altsüperuzayı denir. $\mathbb{R}^m$ Öklid uzayında bir açık cümle ϑ olsun. Bu durumda $\pi^{-1}(\vartheta) \subset R_c^m \times R_a^n$ açığı ϕ nin jakobien matrisinin ϑ üzerinde regüler olmasından dolayı

$$\pi^{-1}\left(\pi(x')\right) = \phi\left(\pi^{-1}(\pi(x))\right) \tag{3.128}$$

eşitliği yazılabilir. Bu ifade de tek altsüperuzayın diferensiyellenebilir bir (1-1) dönüşümü koruduğunu gösterir.

U, $R_c^m \times R_a^n$ süperuzayında bir altcümle olsun. U açıktır$\Leftrightarrow$ $\vartheta \subset \mathbb{R}^m$ açık altcümlesi için $U = \pi^{-1}(\vartheta)$ dir. Bu açık cümle tanımı $U = \pi^{-1}(\vartheta)$ üzerinde bir cümle tanımlar. $R_c^m \times R_a^n$ uzayı bir Hausdorff uzayı değildir (Uğurlu,1987).

Tanım 3.11.5 $R_c^m \times R_a^n$ uzayının $\mathbb{R}^m$ dışında kalan farklı soul uzayda bulunan iki farklı elemanı x_1 ve x_2 olsun. $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$ dir. $\pi(x_1)$, $\pi(x_2) \in \mathbb{R}^m$ ve $\mathbb{R}^m$ bir Hausdorff uzayı olduğundan $\pi(x_1)$ ve $\pi(x_2)$ nin ayrık komşulukları bulunabilir. Bu durumda $R_c^m \times R_a^n$ uzayına projektif Hausdorff uzayı denir (Uğurlu,1987).

Tanım 3.11.6 Bir M süperuzayının herhangi bir altsüpercümlesi U_A ve V, $R_c^m \times R_a^n$ süperuzayında herhangi bir açık süpercümle olsun.

$$\phi_A : U_A \rightarrow V \subset R_c^m \times R_a^n \tag{3.129}$$

dönüşümü $(1-1)$ olmak üzere $(U_A,\ \phi_A)$ ikilisine M süperuzayında harita denir (Dewitt,1992).

Tanım 3.11.7 $(U_A,\ \phi_A)$ haritalarının iki özelliğini sağlayan A kolleksiyonuna M de bir atlas denir:

1) $\bigcup_A U_A = M$

2) $\forall A, B$ için $U_A \cap U_B \neq \varnothing$ olmak üzere $\phi_A \circ \phi_B^{-1}$, $U_A \cap U_B$ üzerinde diferensiyellenebilirdir (Dewitt,1992).

Tanım 3.11.8 A atlasıyla birlikte M uzayına bir (m,n)-boyutlu süpermanifold adı verilir (Anonim, 2016).

Örnek 3.11.1 R_c^m ve R_a^n cümleleri olmak üzere $R_c^m \times R_a^n$ kartezyen çarpım cümlesi bir süpermanifolddur. Yani; $R_c^m \times R_a^n$ açık örtüsü olarak kendisi alınabilir.

$$i_d : R_c^m \times R_a^n \to R_c^m \times R_a^n \tag{3.130}$$

özdeşlik dönüşümü bir homomorfizm olduğundan $R_c^m \times R_a^n$ için bir atlas $A = \{(R_c^m \times R_a^n, i_d)\}$ olarak alınabilir ve bu atlas diferensiyellenebilirdir (Uğurlu,1987).

Tanım 3.11.9 M cümlesi üzerinde verilen herhangi bir atlas ile diğer bir atlasın birleşimi, M üzerinde bir atlas ise bu iki atlasa uyumludur denir (Rogers,2007).

Tanım 3.11.10 A, M süpermanifoldunda herhangi bir atlas olsun. A atlası ile uyumlu bütün atlasların birleşimi, M nin tam atlası olarak adlandırılır (Rogers, 2007).

Tanım 3.11.11 M bir süpermanifold ve M nin bir atlası A olsun. A nın tam atlasının koordinat bölgelerinin cümlesini bir baz kabul eden topolojiye M nin A atlasıyla belirli diferensiyellenebilir yapıdan indirgenmiş topolojisi denir ve τ_C ile gösterilir (Uğurlu,1987).

Teorem 3.11.1 M bir süpermanifold ve M nin A atlasından indirgediği topolojisi τ_C olsun. $(U,x) \in A$ için

$$x : M \to \mathbb{R}_c^m \times \mathbb{R}_a^n \tag{3.131}$$

τ_C-homeomorfizmdir (Uğurlu,1987).

Teorem 3.11.2 (M,τ) bir topolojik uzay ve M de A atlasının indirgediği topoloji τ_C olsun. $\forall (U,x) \in A$ için $\tau = \tau_C \iff$ A atlası, $x : U \to R_c^m \times R_a^n$, τ-homeomorfizmdir (Uğurlu,1987).

Tanım 3.11.12 Manifoldların her biri $\wedge_\infty$ile $\wedge_N$ yer değiştirerek N nin lokal cebirsel yağısı ihmal edilerek ve M nin (U_A,ϕ_A) haritası için $\phi_A(U_A)$ görüntüsünü $R^{2^n-1(m+n)}$ vektör uzayının alışılagelmiş topolojisinde bir açık cümle tanımlanır. Bu şekilde elde edilen manifolda M süpermanifoldunun $N-$iskeleti denir ve $S_N(M)$ ile gösterilir (Dewitt,1992).

Teorem 3.11.3 M ile $S_N(M)$ arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur:

a) M nin bir atlası $S_N(M)$ nin de bir atlasıdır.

b) M nin bir tam atlası $S_N(M)$ nin tam atlası değildir (Dewitt,1992).

Tanım 3.11.13 M bir süpermanifold ve M üzerinde diferensiyellenebilir yapı $A = \{(U_A,\phi_A)\}$ olsun. $U_A \cap U_B \neq \varnothing$ olmak üzere (U_A,ϕ_A) ve (U_B,ϕ_B) haritalarını göz önüne alalım. $x \in U_A \cap U_B$ ve x noktasının görüntü noktaları $\phi_A(x)$ ve $\phi_B(x)$ üzerindeki tek altsüperuzaylar sırasıyla $\pi^{-1}(\pi\circ\phi_A(x))$ ve $\pi^{-1}(\pi\circ\phi_B(x))$ olsun.

$$\phi_A^{-1}(\pi^{-1}(\pi\circ\phi_A(p))) = \phi_B^{-1}(\pi^{-1}(\pi\circ\phi_B(p))) \tag{3.132}$$

ile belli olan görüntü cümlesine, M süpermanifoldun p noktası üzerinde tek altsüperuzayı denir (Dewitt,1992).

Teorem 3.11.4 M süpermanifoldunun bir p noktası bir U açığı içindedir$\Leftrightarrow$ p noktası üzerindeki tek altsüperuzayı U açığı içerisindedir (Uğurlu,1992).

Tanım 3.11.14 Tek altsüperuzayı oluşturduğu manifold için $(\overline{U},\pi\circ\phi)$ şeklindeki haritalar olup $\overline{U}_A$ cümlesi, U_A daki Tek altsüperuzayı eleman kabul eden cümledir. Bu manifolda M süpermanifoldunun çift kısmı denir ve M_B ile gösterilir. Bu manifoldun boyutu, R^m Öklid uzayına homeomorf olduğundan m dir (Uğurlu,1987).

Teorem 3.11.5 $\phi_A : M \to M_B$ dönüşümü iyi tanımlıdır (Dewitt,1992).

3.12 Süpermanifoldlar Üzerinde Süpervektör Yapıları

Tanım 3.12.1 M bir süpermanifold ve (U_A,ϕ_A), M de bir harita olsun.

$$f : M \to \mathbb{R}_c^m \times \mathbb{R}_a^n \tag{3.133}$$

dönüşümü için $f\circ\phi_A^{-1}:\phi_A(U_A)\to\mathbb{R}_c^m\times\mathbb{R}_a^n$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} U_A\subset M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_c^m\times\mathbb{R}_a^n \\ \phi_A\searrow & & \nearrow_{f\circ\phi_A^{-1}} \\ & \phi_A(U_A) & \subset\mathbb{R}_c\times\mathbb{R}_a \end{array}$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise f diferensiyellenebilirdir denir (Berezin, 1987).

Tanım 3.12.2 M bir süpermanifold ve $f:M\to R_c^m\times R_a^n$ bir dönüşüm olsun. $m=1$ ve $n=0$ ise f dönüşümüne M üzerinde reel çift ($c-$tipi) süperskalar alan, $m=0$ ve $n=1$ ise f dönüşümüne M üzerinde reel tek ($a-$tipi) süperskalar alan denir (Berezin, 1987).

Tanım 3.12.3 M bir süpermanifold ve (U_A,ϕ_A), M de bir harita, $\vartheta\subset R_c^m\times R_a^n$ açığı ve $\lambda:\vartheta\longrightarrow M$ dönüşümü olsun.

$$\begin{array}{ccc} \vartheta\subset R_c^m\times R_a^n & \xrightarrow{f} & M \\ \phi_A\circ\lambda\searrow & & \nearrow\phi_A \\ & \phi_A(U_A) & \subset\mathbb{R}_c\times\mathbb{R}_a \end{array}$$

diyagram ile verilen

$$\phi_A\circ\lambda:\vartheta\longrightarrow\phi_A(U_A)\subset R_c^m\times R_a^n \tag{3.134}$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise λ dönüşümü diferensiyellenebilirdir denir (Berezin, 1987).

Teorem 3.12.1 M bir süpermanifold ve M den $\wedge_\infty$ a bütün skalar alanların cümlesi $\mathcal{F}(M)$ olsun. $\mathcal{F}(M)$ bir süpervektör uzayıdır (Dewitt,1992).

Tanım 3.12.4 $\{e^A\}$, (M) kümesinin $(p,q)-$boyutlu altbazı olsun.

$$F:x_Ae^A(M)\longrightarrow\wedge_\infty \tag{3.135}$$

dönüşümünün diferensiyellenebilir olduğunu kabul edilsin. Bu şekildeki her bir dönüşüm $\forall p\in M$ için $\overline{F}(p)=F(e(p))$ olacak şekilde bir $\overline{F}$ skalar alanı tanımlanır (Dewitt,1992).

Tanım 3.12.5 $\forall f\in\mathcal{F}(M)$ için

$$\begin{array}{rlcl} X: & \mathcal{F}(M) & \longrightarrow & \mathcal{F}(M) \\ & f & \longmapsto & X(f)=Xf \end{array} \tag{3.136}$$

dönüşümü her $F:x_Ae^A(M)\longrightarrow\wedge_\infty$, $\mathcal{F}(M)$ kümesinin sonlu boyutlu $\{e^A\}$ altbazı ve $\forall p\in M$ için

$$(X\overline{F})(p)=(xe^A)(p)\left[\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial e^A}F(y)\right]_{y=e(p)} \tag{3.137}$$

zincir kuralını sağlarsa, M üzerinde bir kontravaryant vektör alanı olarak adlandırılır (Dewitt,1992).

Teorem 3.12.2 M bir süpermanifoldolsun. $\forall x \in \chi(M)$, $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ ve $\forall \alpha \in \wedge_\infty$ için aşağıdaki bağıntılar mevcuttur.

i) $x(f\alpha) = (xf)\alpha$

ii) $x(f+g) = xf + xg$

iii) f ve g pure ise $x(fg) = (xf)g + (-1)^{fg}(xg)f$

dir (Uğurlu,1987).

Tanım 3.12.6 X bir kontravaryant vektör alanı ve $f \in \mathcal{F}(M)$ olsun. f nin çift ve tek kısımlar sırasıyla f_e ve f_o olmak üzere

$$\begin{aligned} x(f) &= x(f_e + f_o) \\ &= x(f_e) + x(f_o); x(f_e),\ x(f_o) \in \mathcal{F}(M) \\ &= [x(f_e)]_e + [x(f_e)]_o + [x(f_o)]_e + [x(f_o)]_o \\ &= [x(f_e)]_e + [x(f_o)]_e + [x(f_e)]_o + [x(f_o)]_o \\ &= Uf + Vf \end{aligned} \tag{3.138}$$

olacak şekilde U ve V kontravaryant vektör alanları, sırasıyla X in çift ve tek kısımlarıdır. Eğer $V = 0$ ise X alanına tek ($c-$tipi) kontravaryant süpervektör alanı, $U = 0$ ise X alanına çift ($a-$tipi) kontravaryant süpervektör alanı denir (Uğurlu,1987).

Tanım 3.12.7 Çift veya teklerden oluşan bir kontravaryant süpervektör alanına pure kontravaryant süpervektör alanı denir (Uğurlu,1987).

Teorem 3.12.3 M bir süpermanifold ve M üzerindeki bütün kontravaryant süpervektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olsun. $\chi(M)$ bir süpervektör uzayıdır (Dewitt,1992).

Tanım 3.12.8 M bir süpermanifold, (U,ϕ), M de bir harita ve X, M üzerinde kontravaryant süpervektör alanı olsun. X in U açık altcümlesine kısıtlanışı X_u ile gösterilir ve $p \in U$, $f \in \mathcal{F}(U)$ olmak üzere

$$(X_u f_u)(p) = (Xf)(p) \tag{3.139}$$

biçiminde tanımlanır (Dewitt,1992).

Tanım 3.12.9 M bir süpermanifold ve X, M üzerinde bir kontravaryant süpervektör alanı olsun. (U,ϕ), M de bir harita olmak üzere U üzerinde süperskalar alanlar olan X^i lere ϕ ile tanımlanmış koordinat sisteminde kontravaryant süpervektör alanlarının bileşeni denir.

Zincir kuralı esas alındığından

$$fX = f\frac{\partial}{\partial x^i}{}^i X = {}_{f,i}^{\;i} X;\ {}^iX = X^i \tag{3.140}$$

tir (Dewitt,1992).

Teorem 3.12.4 X bir pure kontravaryant süpervektör alanı olsun. Bu durumda

$${}^iX = (-1)^{Xi}X^i \tag{3.141}$$

dir. Ayrıca X kontravaryant süpervektör alanı için

$$X = X^i\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i} \text{ veya } X = \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i}\,{}^iX \tag{3.142}$$

dir (Dewitt,1992).

Tanım 3.12.10 $X \in \chi(M)$ ve $p \in M$ olsun. Bu durumda $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ için

$$\begin{array}{llll} X_p: & \mathcal{F}(M) & \longrightarrow & \wedge_\infty \\ & f & \longmapsto & \begin{array}{l} X_pf = (xf)(p) \text{ veya} \\ fX_p = (fx)(p) \end{array} \end{array} \tag{3.143}$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüm, p noktasında bir kontravaryant süpervektör olarak adlandırılır ve p noktasındaki bütün kontravaryant süpervektör alanlarının cümlesi T_pM şeklinde gösterilir ve p noktasındaki M süpermanifoldunun tanjant uzayı denir (Uğurlu,1987).

Tanım 3.12.11 M bir süpermanifold ve $p \in M$ olsun. p noktasını içeren her bir (U,ϕ) haritası için x^i, ϕ ile tanımlı koordinatlar olmak üzere baz süpervektörleri

$${}_ie = (\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^i})_p \text{ veya } e_i = (\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i})_p \tag{3.144}$$

olarak seçilebilir $\{{}_ie\}$ veya $\{e_i\}$ cümlesine koordinat baz denir (Dewitt,1992).

Tanım 3.12.12 ϑ, $R_c^m \times R_a^n$ uzayının bir açık altcümlesi ve λ, ϑ açığından M süpermanifolduna bir dönüşüm olsun. ϑ, R_c nin irtibatlı açık altcümlesi ise λ dönüşümü çift ($c-$tipi) süpereğri; R_a uazayının irtibatlı açık altcümlesi ise λ dönüşümü tek ($a-$tipi) süpereğri denir (Uğurlu,1987).

Tanım 3.12.13 λ bir süpereğri olsun. λ süpereğrisinin teğetleri $(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial s})_\lambda$ veya $(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s})_\lambda$ ile gösterilir, $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ ve $\forall s \in R_c$ için

$$\left[(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial s})_\lambda f\right](\lambda(s)) = \frac{\overrightarrow{d}}{ds}f(\lambda(s)) \text{ ve } \left[f(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s})_\lambda\right](\lambda(s)) = f(\lambda(s))\frac{\overleftarrow{d}}{ds} \tag{3.145}$$

biçiminde tanımlanan dönüşümlerdir (Rogers,1986).

Teorem 3.12.5 λ süpereğrisi ile onun teğetleri arasında

1) λ çift (c-tipi) süpereğrisi ise λ süpereğrisinin teğetleri çift (c-tipi), reel ve aynı işaretlidir.

2) λ tek (a-tipi) süpereğrisi ise λ süpereğrisinin teğetleri tek (a-tipi), imajiner ve zıt işaretlidir (Uğurlu,1987).

Tanım 3.12.14 λ bir süpereğri olsun. λ süpereğrisinin bir noktadaki teğetleri $(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial s})_p$ veya $(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s})_p$ notasyonlarıyla gösterilir ve

$$\begin{aligned} (\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial s})_p f &= \left[\frac{\overrightarrow{d}}{ds} f(\lambda(s))\right]_{s=\lambda^{-1}(p)} \\ f(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s})_p &= \left[f(\lambda(s))\frac{\overleftarrow{d}}{ds}\right]_{s=\lambda^{-1}(p)} \end{aligned} \tag{3.146}$$

ile tanımlanır (Rogers,1986).

Tanım 3.12.15 ϑ, $R_c^m \times R_a^n$ uzayının bir açık altcümlesi ve λ, ϑ açığından M süpermanifolduna bir dönüşüm olsun. ϑ, $\mathbb{R}$ reel doğrusunun irtibatlı açık aralığı ise λ dönüşümü M süpermanifoldu üzerinde diferensiyellenebilir eğri olarak adlandırılır (Uğurlu,1987).

Tanım 3.12.16 ϑ, $R_c^m \times R_a^n$ uzayının bir açık altcümlesi ve λ, ϑ açığından M süpermanifolduna bir dönüşüm olsun. ϑ, R_c uzayının irtibatlı açık altcümlesi ise λ dönüşümü çift ($c-$tipi) süpereğri; R_a uzayının irtibatlı açık altcümlesi ise λ dönüşümü tek ($a-$tipi) süpereğri denir (Uğurlu,1987).

Teorem 3.12.16 Her tek süpereğri sadece tek altsüperuzay içerisinde kalır (Uğurlu,1987).

İspat λ bir tek süpereğri olsun.

$$\lambda : R_a \longrightarrow R_c^m \times R_a^n \tag{3.147}$$

şeklinde diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. R_a, C_a nın bütün reel elemanlarının cümlesi

$$C_a = \left\{ V \mid V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, C_{a_1 \ldots a_{2n+1}}\, \xi^{a_{2n+1}} \ldots \xi^{a_1} \right\} \tag{3.148}$$

ve iki reel tek süpersayısının çarpımının bir imajiner çift süpersayısı olduğundan $\lambda(\mathbb{R}_a)$ nın her elemanı, çiftleri sıfır olan süpersayıların herhangi kombinasyonlarının bir sıralı (m,n)-lisidir. Dolayısıyla π tanımından

$$\pi(\lambda(\mathbb{R}_a)) = (0,0,...0) \in \mathbb{R}^m \tag{3.149}$$

olur.

Tanım 3.12.17 M ve $\overline{M}$ iki süpermanifold ve $\phi : M \longrightarrow \overline{M}$ bir dönüşüm olsun. M süpermanifoldundaki her (U_A,ϕ_A) ve $\overline{M}$ süpermanifoldundaki her bir $\left(\overline{U_B},\overline{\phi_B}\right)$ haritaları için $\phi_A\left(U_A\right)\cap\overline{U_B} \neq \oslash$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & \overline{M} \\ \phi_A \downarrow & & \downarrow \overline{\phi_B} \\ \mathbb{R}_c^m \times \mathbb{R}_a^n & \underset{\psi}{\longrightarrow} & \mathbb{R}_c^{\overline{m}} \times \mathbb{R}_a^{\overline{n}} \end{array}$$

şeklindeki

$$\overline{\phi_B} \circ \phi \circ \phi_A^{-1} : \phi_A(U_A) \subset \mathbb{R}_c^m \times \mathbb{R}_a^n \longrightarrow \overline{\phi_B}\left(\overline{U_B}\right) \subset \mathbb{R}_c^{\overline{m}} \times \mathbb{R}_a^{\overline{n}} \tag{3.150}$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise ϕ dönüşümü diferensiyellenebilirdir denir (Dewitt,1992).

Tanım 3.12.18 M, (m,n)-boyutlu bir süpermanifold; (U,ϕ), M de bir harita; $M^{'}$, M nin bir altcümlesi ve $m^{'} < m, n^{'} < n$ olsun. $\forall x \in U \cap M^{'}$ için $R_c^{m-m^{'}} \times R_a^{n-n^{'}}$ uzayının belli bir elemanı $\left(a^{m^{'}+1},...,a^m,a^{-n^{'}+1},...,a^{-n}\right)$ olmak üzere

$$\phi(x) = \left(x^1,...,x^{m^{'}},a^{m^{'}+1},...,a^m,x^{-1},...,x^{-n^{'}}a^{-n^{'}+1},...,a^{-n}\right) \tag{3.151}$$

özelliğine sahip haritaların birleşimi cümlesi $A = \{(U,\phi)\}$ tarafından kapsanıyorsa $M^{'}$ ye M süpermanifoldunun $(m^{'},n^{'})-$boyutlu bir altsüpermanifoldu denir (Dewitt,1992).

Tanım 3.12.19 M, (m,n)-boyutlu bir süpermanifold ve $M^{'}$, M nin bir altmanifoldu olsun. M nin diferensiyellenebilir yapıdan indirgediği topoloji τ_C, $M^{'}$ nün diferensiyellenebilir yapıdan indirgediği topoloji $\tau_{C'}$ ile gösterilsin. $\tau_{C'}$ ile $M^{'}$ nün altcümle olarak indirgediği topoloji aynı ise $M^{'}$ ye M nin regüler altsüpermanifoldu denir (Uğurlu,1987).

Teorem 3.12.7 M, bir süpermanifold ve $M^{'}$, M nin bir altsüpermanifoldu olsun. Bu durumda $M^{'}$, M süpermanifoldunun regüler altsüpermanifoldudur (Uğurlu,1987).

İspat $M^{'}$ altsüpermanifoldunun topolojisi $\tau_{A'}$ ile $M^{'}$ altsüpermanifoldunun M süpermanifoldundaki diferensiyellenebilir yapıdan indirgediği topoloji $\tau_{C'}$ ile gösterilsin.

$$\begin{array}{ccccc} M & & \xrightarrow{\pi} & & M^{'} \\ & {\scriptstyle x^{'}=x\circ\pi} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle x} & \\ & & \mathbb{R}_c^m \times \mathbb{R}_a^n & & \end{array}$$

(U,x), M de bir harita ise $\left(U\cap M^{'},x\circ\pi\right)$, $M^{'}$ de bir haritadır. $U\cap M^{'}=U^{'}$ ve $x\circ\pi=x^{'}$ alınırsa $(U^{'},x^{'})$, $M^{'}$ de bir haritadır. Ayrıca

$$\begin{aligned} x\circ y^{-1} &= x\circ\pi\circ\pi^{-1}\circ y^{-1} \\ &= (x\circ\pi)\circ(y\circ\pi)^{-1} \\ &= x^{'}\circ y^{'-1} \end{aligned} \tag{3.152}$$

$x\circ y^{-1}$ diferensiyellenebilir olduğundan $x^{'}\circ y^{'-1}$ diferensiyellenebilirdir ve böylece $(U^{'},x^{'})$ haritaları $M^{'}$ de diferensiyellenebilir yapı oluştururlar. Bu atlas, $A^{'}$ ile gösterilsin. $(U^{'},x^{'})\in A^{'}$ için $x^{'}:U^{'}\longrightarrow\mathbb{R}_c^m\times\mathbb{R}_a^n$ ve $x:U\longrightarrow\mathbb{R}_c^m\times\mathbb{R}_a^n$ τ_A-homeomorfizm olduğundan x in $U^{'}$ açığına kısıtlanışı $x^{'}$, süreklidir. Dolayısıyla

$$x^{-1}:x(U)\longrightarrow U \tag{3.153}$$

süreklidir. $U^{'}\subset U$ açık olduğundan x^{-1} süreklidir. O halde $x^{'}$, $\tau_{A'}-$homeomorfizmdir.

Tanım 3.12.20 M ve $\overline{M}$ iki süpermanifold ve $\phi:M\longrightarrow\overline{M}$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki iki özelliği sağlıyor ise ϕ ye imbedding denir:

i) $\phi(M)$, $\overline{M}$ nin altsüpermanifoldudur.

ii) $\phi:M\longrightarrow\phi(M)$ diffeomorfizmdir (Uğurlu,1987).

Teorem 3.12.8 M ve $\overline{M}$ aynı boyutlu iki süpermanifold olsun. Bu durumda $\phi:M\longrightarrow\overline{M}$ imbedding ise $\phi(M)$, $\overline{M}$ nin açık altcümlesidir (Uğurlu,1987).

Tanım 3.12.21 M bir süpermanifold, M üzerinde çift kontravaryant süpervektör alanı X ve M nin keyfi bir noktası p olsun. M deki süpereğri $\lambda_{X,p}$ ile gösterilsin ve

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_{\lambda_{X,p(s)}}=X_{\lambda_{X,p(s)}} \tag{3.154}$$

denklemi ve $\lambda_{X,p(0)}=p$ sınır şartı ile tanımlanır. $\lambda_{X,p}$ süpereğrisi, X in integral süpereğrisi olarak adlandırılır (Uğurlu,1987).

3.13 Total Süper-Öklid Uzayı

Her bir L pozitif tamsayılar için B_L,

$$\begin{aligned} 1^{(L)}\beta_i^{(L)} &= \beta_i^{(L)}1^{(L)}=\beta_i^{(L)} && i=1,2,...,L \\ \beta_i^{(L)}\beta_j^{(L)} &= -\beta_j^{(L)}\beta_i^{(L)} && i,j=1,2,...L \end{aligned} \tag{3.155}$$

bağıntılı (Rogers, 1986) ve $1^{(L)}, \beta_1^{(L)}, ..., \beta_L^{(L)}$ üreteçli reel sayılar üzerinde Grasmann cebiri olarak gösterilsin. B_L, gradded cebiridir (Scheunert, 1979) ve

$$B_L = (B_L)_0 \oplus (B_L)_1 \tag{3.156}$$

direkt toplam şeklinde yazılır. Burada $(B_L)_0$ ve $(B_L)_1$, sırasıyla B_L, Gradded cebirinin çift ve tek kısımlarıdır (Konstant, 1977). M_L, $1 \leq \mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_k \leq L$ şeklindeki $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k)$ pozitif tamsayıların sonlu dizilerinin bir kümesi olsun. M_L kümesinin hiç elemanı olmayan dizisi $\varnothing$ ile gösterilir. M_L kümesindeki her bir μ için

$$\begin{aligned} \beta_\mu^{(L)} &= \beta_{\mu_1}^{(L)} ... \beta_{\mu_k}^{(L)} \\ \beta_\varnothing^{(L)} &= 1^{(L)} \end{aligned} \tag{3.157}$$

bağıntısı sağlanır ve B_L Gradded cebirinin b elemanı, b^μ katsayısı reel sayı olacak şekilde

$$b = \sum_{\mu \in M_L} b^\mu \beta_\mu^{(L)} \tag{3.158}$$

şeklinde ifade edilir. DeWitt'e (1992) göre

$$\varepsilon^{(L)}(b) = b^\varnothing \tag{3.159}$$

şeklinde verilmiş

$$\varepsilon : B_L \to \mathbb{R} \tag{3.160}$$

dönüşümüne body dönüşüm denir. B_L üzerinde norm,

$$\|b\| = \sum_{\mu \in M_L} |b^\mu| \tag{3.161}$$

şeklinde tanımlanır (Rogers, 2007). Ayrıca, B_L Banach cebiridir. $L \geq L'$ olacak şekilde L' pozitif tamsayı alındığında

$$\begin{aligned} i_{L',L}\left(\beta_i^{(L')}\right) &= \beta_i^{(L)} \qquad i = 1, 2, ...L \\ i_{L',L}\left(1^{(L')}\right) &= 1^{(L)} \end{aligned} \tag{3.162}$$

özelliklerini sağlayan

$$i_{L',L} : B_{L'} \to B_L \tag{3.163}$$

bir tek cebir homomorfizmi olan doğal injeksiyon vardır. B_L,

$$ab = i_{L',L}(a)b \qquad a \in B_{L'},\ b \in B_L \tag{3.164}$$

şeklindeki $B_{L'}$ modül yapısına sahiptir (Rogers, 1986).

Tanım 3.13.1 B_L, Gradded cebirinin $m+n$ bileşenli kartezyen çarpımı olan

$$B_L^{m+n} = \left(B_L^{m+n}\right)_0 \oplus \left(B_L^{m+n}\right)_1 \tag{3.165}$$

bağıntılı uzayına (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayı denir. B_L^{m+n} (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayının elemanları $\left(x^1, x^2, ..., x^m, \theta^1, \theta^2, ..., \theta^n\right)$ veya (x,θ) şeklinde gösterilir. $\left(B_L^{m+n}\right)_0$ uzayının elemanlarına c-tipi veya çift eleman denir ve $x'^1, x'^2, ..., x'^m \in (B_L)_0$ ve $\theta'^1, \theta'^2, ..., \theta'^n \in (B_L)_1$ olan $\left(x'^1, x'^2, ..., x'^m, \theta'^1, \theta'^2, ..., \theta'^n\right)$ formunda yazılır. $\left(B_L^{m+n}\right)_1$ uzayının ise elemanlarına a-tipi veya tek eleman denir ve $x''^1, x''^2, ..., x''^m \in (B_L)_1$ ve $\theta''^1, \theta''^2, ..., \theta''^n \in (B_L)_0$ olan $\left(x''^1, x''^2, ..., x''^m, \theta''^1, \theta''^2, ..., \theta''^n\right)$ formunda yazılır. Çift elemanların paritesi 0, tek elemanlarının ise 1 dir (Bartocci, vd. 1991).

Tanım 3.13.2 W, DeWitt tanımlarından hatırlanacağı üzere bir G cümlesi üzerinde $+$ iç işlemi, $\cdot$ dış işlemi ve $*$ kompleks konjuge işlemi verilsin. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan G cümlesine süpervektör uzayı denir ve G nin her bir elemanına bir süpervektör denir (Cristea, 2005).

1) $+ : G \times G \to G$ grup aksiyomlarını sağlar.

2) $\alpha \in \wedge_\infty$ ve $\forall x \in G$ için sırasıyla sol ve sağ çarpım adı verilen α_L ve α_R dönüşümleri vardır. Bu dönüşümler sırasıyla

$$\begin{array}{llll} \alpha_L : & G & \to & G \\ & X & \mapsto & \alpha_L(X) = \alpha X \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \alpha_R : & G & \to & G \\ & X & \mapsto & \alpha_R(X) = X\alpha \end{array}$$

biçiminde tanımlanır. α_L ve α_R dönüşümleri, $\forall X, Y \in G$ ve $\forall \alpha, \beta \in \wedge_\infty$ için

$$\begin{array}{ll} i)\ (\alpha+\beta)X = \alpha X + \beta X & X(\alpha+\beta) = X\alpha + X\beta \\ ii)\ \alpha(X+Y) = \alpha X + \alpha Y & (X+Y)\alpha = X\alpha + Y\alpha \\ iii)\ (\alpha\beta)X = \alpha(\beta X) & X(\alpha\beta) = (X\alpha)\beta \\ iv)\ 1X = X & X1 = X \end{array}$$

aksiyomlarını sağlar.

3) Sol ve sağ çarpım bağımlıdır, yani

i) $\forall \alpha, \beta \in \wedge_\infty$ ve $\forall X \in G$ için $(\alpha X)\beta = \alpha(X\beta)$

ii) α, bir c-sayısı ise $\forall X \in G$ için $\alpha X = X\alpha$

iii) α, bir a-sayısı ise $\forall X \in G$ için $X = u + v$ alındığında $\alpha u = u\alpha$, $\alpha v = -v\alpha$

eşitlikleri yazılabilecek şekilde vardır. Bu durumda u ve v ye sırasıyla çift ve tek kısmı denir.

4) G üzerinde $*$ ile gösterilsin ve

$$\begin{array}{rccl} *: & G & \to & G \\ & X & \mapsto & ^{*}(X) = X^{*} \end{array} \tag{3.166}$$

biçiminde tanımlanan operatör için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $\forall X \in G$ için $X^{**} = X$

ii) $\forall X, Y \in G$ için $(X+Y)^{*} = X^{*} + Y^{*}$

iii) $\forall X \in G$ ve $\forall \alpha \in \wedge_{\infty}$için $(\alpha X)^{*} = X^{*}\alpha^{*}$ ve $(X\alpha)^{*} = \alpha^{*}X^{*}$

şeklinde ifade edilen süpervektör uzayı kavramında $\wedge_{\infty}$ yerinde B_L konulan bir süpervektör uzayıdır. Bu durumda B_L^{m+n} (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayı, (m,n)-boyutlu süpervektör uzayıdır.

Sonuç 3.13.1 B_L^{m+n} (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayı, DeWitt tarafından değerlendirildiğinde B_L üzerinde süpervektör uzayı değildir.

Tanım 3.13.3 ε dönüşümü,

$$\varepsilon_{(m,n)}^{(L)} \quad : \left(B_L^{m+n}\right)_0 \quad \to \quad \mathbb{R}^m \tag{3.167}$$

$\left(x'^1, x'^2, ..., x'^m, \theta'^1, \theta'^2, ..., \theta'^n\right) \in \left(B_L^{m+n}\right)_0$ olmak üzere

$$\varepsilon_{(m,n)}^{(L)} \left(x'^1, x'^2, ..., x'^m, \theta'^1, \theta'^2, ..., \theta'^n\right) = \left(\varepsilon^{(L)}(x'^1), ...\varepsilon^{(L)}(x'^m)\right) \tag{3.168}$$

ve ε' dönüşümü de,

$$\varepsilon'^{(L)}_{(m,n)} \quad : \left(B_L^{m+n}\right)_1 \quad \to \quad \mathbb{R}^n \tag{3.169}$$

$\left(x''^1, x''^2, ..., x''^m, \theta''^1, \theta''^2, ..., \theta''^n\right) \in \left(B_L^{m+n}\right)_1$ için

$$\varepsilon'^{(L)}_{(m,n)} \left(x''^1, x''^2, ..., x''^m, \theta''^1, \theta''^2, ..., \theta''^n\right) = \left(\varepsilon'^{(L)}(\theta''^1), ...\varepsilon'^{(L)}(\theta''^n)\right) \tag{3.170}$$

şeklinde tanımlanır (Cristea, 2005).

Tanım 3.13.4 U, B_L^{m+n} uzayındaki açık küme, $f : U \to B_L^{m+n}$ olsun. Bu durumda

a) f, U üzerinde sürekli ise f fonksiyonu U üzerinde G^0 olarak ifade edilir.

b) $G_k f : U \to B_L$, $k = 1,...,m+n$ ve $\eta : B_L^{m+n} \to B_L$ fonksiyonları öyleki (a,b), $(a+h,\ b+k) \in U$ için

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{m} h_i (G_i f)(a,b) + \sum_{j=1}^{n} k_j (G_{j+m} f)(a,b) + \|(h,k)\|\ \eta(h,k) \quad (3.171)$$

$\|\eta(h,k)\| \to 0$ $\|(h,k)\| \to 0$ var ise f, G^1 olarak adlandırılır.

c) p sonlu pozitif tamsayısı için G^p tanımı tümevarımsaldır. f, U üzerinde G^1 ve U üzerinde G^{p-1} şeklinde $G_k f \quad 1 \le k \le m+n$ şeklinde seçim yapılabilir.

d) Herhangi p pozitif tamsayısı için f, U üzerinde G^p ise f fonksiyonuna G^∞ dur denir.

e) Verilen herhangi $p \in U$ için p nin N_p komşuluğu var ise öyle ki $\forall q \in N_p$ için

$$f(q) = \sum_{k_{1=0}...k_{m+n=0}} a_{k_1...k_{m+n}} (q_1 - p_1)^{k_1} ... (q_{m+n} - p_{m+n})^{k_{m+n}} \quad (3.172)$$

formunun $(p-q)$ daki genişletilmiş kuvvet serilerinin toplamına eşit ise f ye U üzerinde G^∞ dur denir.

f) s, sonlu pozitif tamsayı,

$$g : U \to B_L^s \quad (3.173)$$

(yani B_L uzayının s tane kartezyen çarpımı) ve p_k, k. izdüşüm fonksiyonu

$$p_k(c_1,...,c_s) = c_k \quad (3.174)$$

olsun. Bu durumda $k = 1,...,s$ için

$$p_k \circ g : U \to B_L \quad (3.175)$$

U üzerinde G^r ise g ye G^r dir denir, r pozitif tamsayı veya ∞ olabilir.

G^r fonksiyonunun tanımı, C^r fonksiyonunun genel tanımının başkalaşmış halidir. Çarpılan reel sayıların çarpımlarındaki yer değişiminin önemli olmasından dolayı daha kısıtlı bir tanımdır (Rogers, 1986).

Bu tanımlanan diferensiyel form, Salam ve Strathdee (1974) tarafından ifade edildi ve L sonlu olduğu durumda DeWitt (1992) tarafından kullanılanla aynı etkide olduğu ifade edildi. Fakat DeWitt, Grassmann cebiri üzerinde normu kullanmadığından ve kullandığı sonsuz boyutlu cebir genel kuvvet serinin oluşturduğu cebir, Banach cebiri olmadığı kabul edildiğinden iki tanımı karşılaştırmak zordur. Süperalanın doğal seçimi yapılmasına bağlı olarak G^∞ fonksiyonları fiziksel açıdan en kullanışlı sınıftır.

Örnek 3.13.1 G^{∞} fonksiyonunun basit örneği

$$\begin{array}{rccl} f: & B_L^{(2,2)} & \longrightarrow & B_L \\ & (x_1,x_2,y_1,y_2) & \longrightarrow & f(x_1,x_2,y_1,y_2) = a\, x_1^3 x_2 y_1^2 y_2 \end{array} \tag{3.176}$$

$a \in B_{L,0}$ sabit diferensiyel alındığında

$$\begin{array}{l} G_1 f(a_1,a_2,b_1,b_2) = 3c x_1^2 x_2 y_1^2 y_2 \\ G_2 f(a_1,a_2,b_1,b_2) = a x_1^3 y_1^2 y_2 \\ G_3 f(a_1,a_2,b_1,b_2) = 2a x_1^3 x_2 y_1 y_2 \\ G_4 f(a_1,a_2,b_1,b_2) = -a x_1^3 x_2 y_1^2 \end{array} \tag{3.177}$$

elde edilir.

Sonuç 3.13.2 $(1,1)$-boyutlu B_L^2 total süper-Öklid uzayını, $(2,0)$-boyutlu B_L^2 total süper-Öklid uzayını ve $(0,2)$-boyutlu B_L^2 total süper-Öklid uzayına göre $(1,0)$ elemanı değerlendirildiğinde ilk iki uzay için c-tipi ve son uzay için a-tipidir. $(1,0)$ süpervektörü standart bazda $(1,1)$-boyutlu B_L^2 total süper-Öklid uzayı ve $(0,2)$-boyutlu B_L^2 total süper-Öklid uzayı için

$$(1,0) = 1.(1,0) + 0.(0,\beta^1) \tag{3.178}$$

formunda yazılır. Burada $(1,0)$ c-tipi ve $(0,\beta^1)$ a-tipi süpervektörler olacak şekilde $\left\{(1,0),(0,\beta^1)\right\}$ standart bazıdır. $(2,0)$-boyutlu B_L^2 total süper-Öklid uzayı için

$$(1,0) = 1.(1,0) + 0.(0,1) \tag{3.179}$$

formunda yazılır. Burada $(1,0)$ c-tipi ve $(0,1)$ a-tipi süpervektörler olacak şekilde $\{(1,0),(0,1)\}$ standart bazıdır (Cristea, 2005).

Tanım 3.13.5 $U \subset R^m$ açık ve L', $L' \leq L$ olan pozitif tamsayı kabul edilsin. $C^{\infty}(U, B_{L'})$, U açığının $B_{L'}$uzayına C^{∞} fonksiyonlarının kümesi $B_{L'}$ modülünü belirtsin ($B_{L'}$, Banach cebiri ve bu yüzden Banach uzayıdır). Bu durumda

$$Z_{L',L}(f)(X) = \sum_{i_1=0 \ldots i_m=0} \frac{1}{i_1! \ldots i_m!} \cdot i_{L',L}\left(\partial_1^{i_1} \ldots \partial_m^{i_m} f\left(\varepsilon^{(L)}(x^1), \ldots, \varepsilon^{(L)}(x^m)\right)\right) \times s(x^1)^{i_1} \ldots s(x^m)^{i_m} \tag{3.180}$$

olacak şekilde

$$Z_{L',L} : C^{\infty}(U, B_{L'}) \to \left[\varepsilon^{(L)}_{(m,0)}(U)\right]^{B_L} \tag{3.181}$$

dönüşümü tanımlanır. Burada $(X) = \left(x^1, \ldots, x^m\right)$ ve $s(x^i) = x^i - \varepsilon^{(L)}(x^i)1 \quad i = 1,2,\ldots m$ olarak ifade edilir (Rogers, 1980).

Tanım 3.13.6 $U \subset R^n$ açık ve L', $L' \leq L$ olan pozitif tamsayı kabul edilsin. $C^{\infty}(U, B_{L'})$, U açığının $B_{L'}$uzayına C^{∞} fonksiyonlarının kümesi $B_{L'}$ modülünü belirtsin ($B_{L'}$, Banach cebiri ve bu yüzden Banach uzayıdır). Bu durumda

$$Z_{L',L}(f)(X) = \sum_{i_1=0...i_n=0} \frac{1}{i_1!...i_n!} \cdot i_{L',L}\left(\partial_1^{i_1}...\partial_m^{i_m} f\left(\varepsilon'^{(L)}(x^1),...,\varepsilon'^{(L)}(x^m)\right)\right) \times s'(x^1)^{i_1}...s'(x^m)^{i_m} \tag{3.182}$$

olacak şekilde

$$Z_{L',L} : C^{\infty}(U, B_{L'}) \to \left[\varepsilon'^{(L)}_{(n,0)}(U)\right]^{B_L} \tag{3.183}$$

dönüşümü tanımlanır. Burada $(X) = \left(x^1,...,x^n\right)$ ve $s'(x^i) = x^i - \varepsilon'^{(L)}(x^i)1 \quad i = 1,2,...n$ olarak ifade edilir

Tanım 3.13.7 $V \subset B_L^{m+n}$ açık ve $U = \varepsilon^{(L)}_{(m,n)}(V)$ kabul edilsin. $L > 2n$ ve $L' = \left[\frac{1}{2}L\right]$ son tamsayı $\frac{1}{2}L$ sayısından daha küçük olmayacak şekilde $GH^{\infty}(V)$,

$$f : V \to B_L \tag{3.184}$$

fonksiyonlarının kümesini gösterir. $f_m \in C^{\infty}(U, B_{L'})$ öyleki

$$f(x,\theta) = \sum_{\mu \in M_n} Z_{L',L}(\partial_i f_m)(x)\theta^{\mu} \tag{3.185}$$

dir. Burada $\theta^{\mu} = \theta^{\mu_1}...\theta^{\mu_k}$ ve $\theta^{\varnothing} = 1^L$ dir (Rogers, 2007; Inoque ve Maeda, 1991).

Tanım 3.13.8 $f \in GH^{\infty}(V)$ olsun. Bu durumda $i = 1,2,...,m$ için

$$\begin{array}{rlcl} G_i f : & V & \to & B_L \\ & (x,\theta) & \mapsto & G_i f(x,\theta) = \sum_{\mu \in M_n} Z_{L',L}(\partial_i f_{\mu})(x)\ \theta^{\mu} \end{array} \tag{3.186}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $j = 1,2,...,n$ için

$$\begin{array}{rlcl} G_{j+m} f : & V & \to & B_L \\ & (x,\theta) & \mapsto & G_{j+m} f(x,\theta) = \sum_{\mu \in M_n} Z_{L',L}(f_{\mu})(x)\ \theta^{\mu/j} \times (-1)^{\left|f_{\mu}(x)\right|} \end{array} \tag{3.187}$$

şeklindedir. Burada $\left|f_{\mu}(x)\right|$, $f_{\mu}(x)$ bileşeninin paritesidir ve bazı $1 \le i \le k$ için $\theta^{\mu/j} = \theta^{\mu_1}...\theta^{\mu_k}(-1)^{i-1}$, diğer durumda $\theta^{\mu/j} = 0$ dır (Rogers, 1986).

Tanım 3.13.9 $n = 2r$ alınarak B_L^{m+n} üzerinde skalar çarpım, $v = \left(x^1, x^2, ..., x^m, \theta^1, \theta^2, ..., \theta^n\right)$ ve $w = \left(y^1, y^2, ..., y^m, \theta_1^1, \theta_1^2, ..., \theta_1^n\right)$ olmak üzere

$$\langle v,w \rangle = x^1y^1 + ... + x^ny^n + \theta^1\theta_1^{r+1} + ... + \theta^r\theta_1^n - \theta^{r+1}\theta_1^1 - ... - \theta^n\theta_1^r$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar: $\forall u,v,w \in B_L^{m+n}$ için

a) $\langle v,w \rangle = (-1)^{|v||w|}\langle w,v \rangle$ (süpersimetri)
b) $\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$ (lineerlik)
c) $\langle v,\cdot \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Teorem.3.13.1 $n=2r$ olacak şekilde B_L^{m+n} üzerinde $r \geq 1$ farklı skalar çarpımlar $r!$ olarak verilir (Cristea, 2005).

Tanım 3.13.10 Her bir f fonksiyonu için

$$\begin{aligned} v &= \left(x^1, x^2, ..., x^m, \theta^1, \theta^2, ..., \theta^n\right) \\ w &= \left(y^1, y^2, ..., y^m, \theta_1^1, \theta_1^2, ..., \theta_1^n\right) \end{aligned} \tag{3.188}$$

arasında $\langle v,w\rangle_f = \sum_{k=1}^{m} x^k y^k + \sum_{j_1=1}^{r}\left(\theta^{j_1}\theta_1^{f(j_1)} - \theta^{f(j_1)}\theta_1^{j_1}\right)$ skalar çarpımına sahiptir (Cristea, 2005).

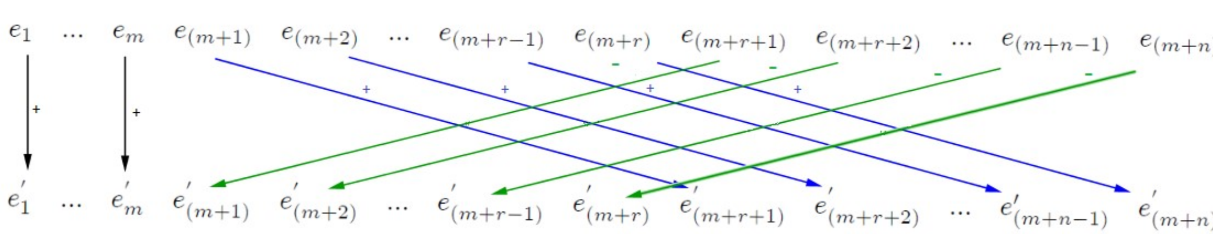
Bu skalar çarpım, $\forall u,v,w \in B_L^{m+n}$ için

a) $\langle v,w\rangle = (-1)^{|v||w|}\langle w,v\rangle$ (süpersimetri)
b) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$ (lineerlik)
c) $\langle v,\cdot\rangle = 0 \Leftrightarrow v=0$

bağıntılarını sağlar. $\forall u,v \in \left(B_L^{m+n}\right)_1$ için a) bağıntısının ispatı için (3.188) alındığında

$$\begin{aligned} \langle v,w\rangle_f &= \sum_{k=1}^{m} x^k y^k + \sum_{j_1=1}^{r}\left(\theta^{j_1}\theta_1^{f(j_1)} - \theta^{f(j_1)}\theta_1^{j_1}\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{m} y^k x^k + \sum_{j_1=1}^{r}\left(\theta_1^{j_1}\theta^{f(j_1)} - \theta_1^{f(j_1)}\theta^{j_1}\right) \\ &= -\left(\sum_{k=1}^{m} y^k x^k + \sum_{j_1=1}^{r}\theta_1^{f(j_1)}\theta^{j_1} - \theta_1^{j_1}\theta^{f(j_1)}\right) \\ &= -\langle w,v\rangle_f \end{aligned} \tag{3.189}$$

şeklinde bulunur (Cristea, 2005). Süperskalar çarpım yapısı (Şekil 3.6.) ile verilmiştir. **Örnek**



Şekil 3.6: Süperskalar çarpım yöntemi

3.13.2 $\forall u,v \in B_L^{2+2}$ süpervektörleri için $u = \left(t, a\theta^2, t+3a^2\theta, \theta t\right)$ ve $v = \left(t^3, \theta+at, \theta t, \theta^2 t\right)$ verilsin. Bu durumda

$$\langle u,v\rangle_f = t^4 + a\theta^3 + 4a^2\theta^2 t \tag{3.190}$$

skalar çarpımı elde edilir.

Tanım 3.13.11 $v,w \in B_L^{m+n}$ süpervektörleri ortogonaldir ancak ve ancak $\varepsilon^L(\langle v,w \rangle) = 0$ dır. B_L^{m+n} üzerinde standart bazlar;

$$\begin{aligned} E_1 &= (1,0,...,0),\ E_2 = (0,1,...,0),...,E_m = (0,...,1,...,0) \\ E_{m+1} &= (0,...,0,-1,0,...,0),...,E_{m+r} = (0,0,...,-1) \\ E_{m+r+1} &= (0,...,0,1,0,...,0),...,E_{m+n} = (0,...,0,1,0,...,0) \end{aligned} \tag{3.191}$$

formundadır. Burada ilk m bileşeni çift süpervektörler ve son n bileşeni tek süpervektörlerdir (Cristea, 2005).

Tanım 3.13.12 $L > 2n$ ve B_L^{m+n} (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayı ve $V \subset B_L^{1,1}$ açık ve $c : V \subset B_L^{1,1} \to B_L^{m+n}$ fonksiyonu olmak üzere $\forall\theta \in V \cap (B_L)_1$ için

$$\begin{array}{llll} c_{\theta,0}: & V \cap (B_L)_0 & \to & \left(B_L^{m+n}\right)_0 \\ & t & \mapsto & c_{\theta,0}(t) = (c(t,\theta))_0 \qquad (c(t,\theta))_0,\ c(t,\theta) \text{ nın çift kısmı} \\ c_{\theta,B}: & V \cap (B_L)_0 & \to & R^m \\ & t & \mapsto & c_{\theta,B}(t) = \varepsilon_{(m,n)}^{(L)} \circ c_{\theta,0}(t) \end{array} \tag{3.192}$$

olsun. c fonksiyonuna süpereğri denir ancak ve ancak $c_{\theta,B}\,|_{V\cap R}$ eğri olacaktır. c fonksiyonuna süperdüzgün denir ancak ve ancak

$$\begin{aligned} c^i &\in GH^\infty(V) \qquad i \in \{1,2,...,m\} \\ c^{j+m} &\in GH^\infty(V) \qquad j \in \{1,2,...,n\} \end{aligned} \tag{3.193}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} c^i &= x^i \circ c \qquad \forall i \in \{1,2,...,m\} \\ c^{j+m} &= \theta^j \circ c \qquad \forall j \in \{1,2,...,n\} \end{aligned} \tag{3.194}$$

dir (Cristea, 2005).

4. TOTAL SÜPER-ÖKLİD UZAYI ÜZERİNDE SÜPEREĞRİLERİN FRENET ÇATISI

Bu bölümde eğrinin kinematiği göz önünde bulundurularak düzgün bir şekilde hareket eden parçacığın kinematik özelliklerini tanımlayan Frenet formülleri incelendi. Frenet çatısı zamanda eğri boyunca hareketin gözlenmesini sağlar ve fizikte birçok kullanım alanına sahiptir (örneğin görelilik teorisi) (Anonim, 2016). Bu durumda, Valentin Gabriel Cristea (2005) tarafından yapılan "Existence and Uniqueness Theorem for Frenet Frame Supercurves" çalışmasındaki süperuzayın daha özel hali olan total süper-Öklid uzayında Tanım 3.13.1 de ifade edilen süperdüzgün süpereğrilerin çift kısımları için Frenet çatıları araştırılmış ve uygulamalarına yer verilmiştir. Bu bölümde bu çalışmaya ek olarak süperuzayın tek kısmı için Frenet hesabı ile ilgili sonuçlar incelenmiştir.

4.1 Süpereğrilerin Frenet Çatısının Varlık ve Tekliği

Bu kısımda süperdüzgün süpereğri ve onun türevleri kullanılarak aralarındaki bağıntılar bulunmuştur.

Tanım 4.1.1 $L > 2n$ ve B_L^{m+n} (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayı ve $V \subset B_L^{1+1}$ açık ve $c : V \subset B_L^{1+1} \to B_L^{m+n}$ süperdüzgün süpereğri olsun. Genel durumda c süpereğri ancak ve ancak $G_1^{(0)}c(t,\theta) = c(t,\theta), G_1^{(1)}c(t,\theta) = G_1^{(1)}c(t,\theta), ..., G_1^{(s)}c(t,\theta) = G_1...G_1c(t,\theta)$ olmak üzere

$$\left\{G_1c(t,\theta), ..., G_1^{(m-1)}c(t,\theta), G_2c(t,\theta), G_1G_2c(t,\theta), ..., G_1^{(n-1)}G_2c(t,\theta)\right\}$$

$\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ lineer bağımsızdır ve $G_1c(t,\theta)$ tarafından

$$\left(G_1c^1(t,\theta), ..., G_1c^m(t,\theta), G_1c^{m+1}(t,\theta), ..., G_1c^{m+n}(t,\theta)\right) \qquad \forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1},$$

$G_2c(t,\theta)$ tarafından ise

$$\left(G_2c^1(t,\theta), ..., G_2c^m(t,\theta), G_2c^{m+1}(t,\theta), ..., G_2c^{m+n}(t,\theta)\right) \qquad \forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$$

ifade edilir (Cristea, 2005).

Tanım 4.1.2 $L > 2n$ ve B_L^{m+n} (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayı ve $V \subset B_L^{1+1}$ açık ve

$c : V \subset B_L^{1+1} \to B_L^{m+n}$ süperdüzgün süpereğri olsun. $c : V \subset B_L^{1+1} \to B_L^{m+n}$ süperdüzgün süpereğri ile Frenet Çatısı ilişkisi olarak c süperdüzgün süpereğriye bağlı $\{e_1, ..., e_{m+n}\}$ $m+n$ süpervektör alanlarının sistemi öyle ki $\forall (t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$

$$\begin{aligned}
\langle e_k(t,\theta), e_h(t,\theta)\rangle &= \delta_{kh} \qquad \forall k,h \in \{1,2,...,m\} &(4.1)\\
\left\langle e_{m+r-j_1}(t,\theta), e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= -\delta_{j_1 j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\}\\
\left\langle e_{m+j_1}(t,\theta), e_{m+r+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= \delta_{j_1 j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\}\\
\left\langle e_{m+j_1}(t,\theta), e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= 0 \qquad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\}\\
\left\langle e_{m+r+j_1}(t,\theta), e_{m+r+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= 0 \qquad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\}\\
\left\langle e_i(t,\theta), e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= 0 \qquad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\}
\end{aligned}$$

özelliklerine sahiptir. Burada $\forall i \in \{1,2,...,m\}$ ve $\forall j \in \{1,2,...,n\}$, $\forall (t,\theta) \in VB_L^{1+1}$ için

$$Sp\left(G_1 c(t,\theta), ..., G_1^{(k)} c(t,\theta)\right) = Sp\left(e_1(t,\theta), ..., e_k(t,\theta)\right) \quad \forall k \in \{1,2,...,m-1\} \tag{4.2}$$

ve

$$Sp\left(G_2 c(t,\theta), G_1 G_2 c(t,\theta), ..., G_1^{(j-1)} G_2 c(t,\theta)\right) = Sp\left(e_{m+1}(t,\theta), ..., e_{m+j}(t,\theta)\right) \tag{4.3}$$

$\forall j \in \{1,2,...,n\}$ şeklinde germelere sahiptir (Cristea, 2005).

Teorem 4.1.1 $L > 2n$ ve B_L^{m+n} (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayı ve $V \subset B_L^{1+1}$ açık ve $c : V \subset B_L^{1+1} \to B_L^{m+n}$ genel durumdaki süperdüzgün süpereğri olsun. Buna göre aşağıdaki özellikler sağlanır: $\forall (t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için

$$\begin{aligned}
\varepsilon^L\left(\left\langle G_1 c(t,\theta), G_1^{(r)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle\right) &> 0 &(4.4)\\
\varepsilon^L\left(\left\langle G_1^{j_1} c(t,\theta), G_1^{(r+j_1)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle\right) &> 0 \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r-1\}\\
\varepsilon^L\left(\left\langle G_2 c(t,\theta), G_1^{(j)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle\right) &= 0 \quad \forall j \in \{1,2,...,n-1\}\\
\varepsilon^L\left(\left\langle G_1^{j\prime} G_2 c(t,\theta), G_1^{(r+j_1)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle\right) &= 0 \quad \forall j\prime,\ j \in \{1,2,...,r-1\}, j\prime \neq\ j, j\prime <\ j.
\end{aligned}$$

Bu durumda c süpereğrisiyle ilişkili bir tek $\{e_1, ..., e_{m+n}\}$ Frenet çatısı vardır ve

$$\begin{aligned}
G_1 e_k(t,\theta) &= \sum_{h=1}^{m} a_{kh}(t,\theta) e_h(t,\theta) \qquad \forall k \in \{1,2,...,m\} &(4.5)\\
G_1 e_{m+j}(t,\theta) &= \sum_{l=1}^{m} a_{m+j \ \ m+l}(t,\theta) e_{m+l}(t,\theta) \qquad \forall j \in \{1,2,...,n\}
\end{aligned}$$

öyle ki

$$
\begin{aligned}
a_{kh}(t,\theta)+a_{hk}(t,\theta) &= 0 \quad \forall k,h \in \{1,2,...,m\} \\
a_{kh}(t,\theta) &= 0 \quad h>k \; ve \; \forall k,h \in \{1,2,...,m\} \\
a_{(m+j_1)(m+j_2)}(t,\theta)+a_{(m+r+j_2)(m+r+j_1)}(t,\theta) &= 0 \quad \forall j_1,j_2 \in \{1,2,...,r\} \\
a_{(m+r+j_1)(m+j_2)}(t,\theta)-a_{(m+j_2)(m+r+j_1)}(t,\theta) &= 0 \quad \forall j_1,j_2 \in \{1,2,...,r\} \\
a_{i(m+j)}(t,\theta) &= 0 \quad \forall i \in \{1,2,...,m\} \\
a_{(m+j)i}(t,\theta) &= 0 \quad j \in \{1,2,...,n\} \\
a_{(m+j)(m+l)}(t,\theta) &= 0 \quad l \neq j+1
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

elde edilir. Bu durumda $\forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\}$ ve $\forall k,h \in \{1,2,...,m\}$ için

$$
\begin{aligned}
a_{(m+j_1)(m+j_2)}(t,\theta) &= \left\langle G_1 e_{m+j_1}(t,\theta), e_{m+r+j_2}(t,\theta)\right\rangle \\
a_{(m+j_1)(m+r+j_2)}(t,\theta) &= -\left\langle G_1 e_{m+j_1}(t,\theta), e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle \\
a_{(m+r+j_1)(m+j_2)}(t,\theta) &= \left\langle G_1 e_{m+r+j_1}(t,\theta), e_{m+r+j_2}(t,\theta)\right\rangle \\
a_{(m+r+j_1)(m+r+j_2)}(t,\theta) &= -\left\langle G_1 e_{m+r+j_1}(t,\theta), e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle \\
a_{kh}(t,\theta) &= \langle G_1 e_k(t,\theta), e_h(t,\theta)\rangle \\
a_{k(m+j)}(t,\theta) &= \left\langle G_1 e_k(t,\theta), e_{m+j}(t,\theta)\right\rangle \\
a_{(m+j)k}(t,\theta) &= \left\langle G_1 e_{m+j}(t,\theta), e_k(t,\theta)\right\rangle
\end{aligned}
$$

bağıntıları bulunur (Cristea, 2005).

İspat Frenet çatı eğrileri için varlık teklik teoremini ispatlamak için

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^L\left(\left\langle G_1 c(t,\theta), G_1^{(r)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle\right) &> 0 \\
\varepsilon^L\left(\left\langle G_1^{j_1} c(t,\theta), G_1^{(r+j_1)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle\right) &> 0 \quad \forall j_1,j_2 \in \{1,2,...,r-1\}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

bağıntılarından

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^L\left(\left\langle G_2 c(t,\theta), G_1^{(r)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle\right) &\neq 0 \quad \forall j \in \{1,2,...,n-1\} \\
\varepsilon^L\left(\left\langle G_1^{j_1} c(t,\theta), G_1^{(r+j_1)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle\right) &\neq 0 \quad \forall j_1,j_2 \in \{1,2,...,r-1\}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(t,\theta) &= \left\langle G_2 c(t,\theta), G_1^{(r)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle \\
\lambda_{j_1}(t,\theta) &= \left\langle G_1^{j_1} c(t,\theta), G_1^{(r+j_1)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle \quad \forall j_1 \in \{2,...,r\}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

alındığında $\forall j_1 \in \{1,2,...,r\}$ ve $\forall (t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için

$$\varepsilon^L\left(\lambda_{j_1} c(t,\theta)\right) \neq 0 \tag{4.10}$$

denkleminden $\left(\lambda_{j_1}(t,\theta)\right)^{-1}$ varlığı gelir. Her adım (4.3) denklemi uygulandığında

$$\begin{aligned} e_{m+1}(t,\theta) &= (\lambda_1(t,\theta))^{-1} G_2 c(t,\theta) \\ e_{m+j_1}(t,\theta) &= \left(\lambda_{j_1}(t,\theta)\right)^{-1} G_1^{(j_1-1)} G_2 c(t,\theta) \quad \forall j_1 \in \{2,...,r\} \\ e_{m+r+j_2}(t,\theta) &= G_1^{(r+j_2-1)} G_2 c(t,\theta) \quad j_2 \in \{1,2,...,r\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

bağıntıları bulunur. c süperdüzgün süpereğri olduğundan (4.11) denklemine göre $\{e_{m+1}(t,\theta),...,e_{m+n}(t,\theta)\}$ süpervektörleri lineer bağımsızdır. Bu süpervektörlerin tanımından $\forall (t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$, $\forall k \in \{1,2,...,m-1\}$ ve $\forall j \in \{1,2,...,n\}$ için

$$\begin{aligned} Sp\left(G_1 c(t,\theta),...,G_1^{(k)} c(t,\theta)\right) &= Sp\left(e_1(t,\theta),...,e_k(t,\theta)\right) \\ Sp\left(G_2 c(t,\theta), G_1 G_2 c(t,\theta),...,G_1^{(j-1)} G_2 c(t,\theta)\right) &= Sp\left(e_{m+1}(t,\theta),...,e_{m+j}(t,\theta)\right) \end{aligned}$$

germeye sahiptir.

$$\begin{aligned} \varepsilon^L\left(\left\langle G_1 c(t,\theta), G_1^{(r)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle\right) &> 0 \\ \varepsilon^L\left(\left\langle G_1^{j_1} c(t,\theta), G_1^{(r+j_1)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle\right) &> 0 \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r-1\} \end{aligned}$$

eşitsizliklerinden $\varepsilon^L\left(\lambda_{j_1}(t,\theta)\right) > 0$ elde edilir. $\left\{G_2 c(t,\theta), G_1 G_2 c(t,\theta),...,G_1^{(j-1)} G_2 c(t,\theta)\right\}$ sisteminden $\left\{e_{m+1}(t,\theta),...,e_{m+j}(t,\theta)\right\}$ sistemi ile değiştirildiğinde matrislerin determinantının çift kısmı

$$\begin{aligned} &\varepsilon^L \det \begin{pmatrix} (\lambda_1(t,\theta))^{-1} & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & ... & \left(\lambda_j(t,\theta)\right)^{-1} & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon^L\left((\lambda_1(t,\theta))^{-1} ... \left(\lambda_j(t,\theta)\right)^{-1}\right) \\ &= \varepsilon^L\left((\lambda_1(t,\theta))^{-1}\right) ... \varepsilon^L\left(\left(\lambda_j(t,\theta)\right)^{-1}\right) > 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

olur. $\forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\}$ ve $\forall t \in I$ için (4.9) denkleminden yararlanarak

$$\begin{aligned} \left\langle e_{m+j_1}(t,\theta), e_{m+r+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= (\lambda_1(t,\theta))^{-1} \cdot \left\langle G_1^{(j_1-1)} G_2 c(t,\theta), G_1^{(r+j_1-1)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle \\ &= (\lambda_1(t))^{-1} \cdot \lambda_{j_1}(t) = 1 \end{aligned} \tag{4.13}$$

denklemi elde edilir. Sonuç olarak

$$\left\langle e_{m+j_1}(t,\theta), e_{m+r+j_2}(t,\theta)\right\rangle = \delta_{j_1 j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\} \tag{4.14}$$

formülü elde edilir. Süperskalar çarpımın süpersimetri özelliğinden

$$\left\langle e_{m+r+j_1}(t,\theta), e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle = -\delta_{j_1 j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\} \tag{4.15}$$

formülü bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \varepsilon^L\left(\left\langle G_2 c(t,\theta), G_1^{(j)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle\right) &= 0 \quad \forall j \in \{1,2,...,n-1\} \\ \varepsilon^L\left(\left\langle G_1^{j\prime} G_2 c(t,\theta), G_1^{(r+j_1)} G_2 c(t,\theta)\right\rangle\right) &= 0 \quad \forall j\prime,\ j \in \{1,2,...,r-1\}, j\prime \neq\ j, j\prime <\ j \end{aligned}$$

bağıntılarından

$$\begin{aligned} \left\langle e_{m+j_1}(t,\theta), e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= 0 \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\} \\ \left\langle e_{m+r+j_1}(t,\theta), e_{m+r+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= 0 \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\} \end{aligned} \tag{4.16}$$

formüllerine ulaşılır. Burada bağıntı ilk kısma aitse özelleştirme yapılabilir; fakat ikinci kısıma aitse özelleştirme yapılamaz.

$\forall (t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için c genel durumda süperdüzgün süpereğri olduğundan $f_1(t,\theta) = G_1 c(t,\theta)$ süpervektörü sıfırdan farklıdır. $\forall v \in B_L^{m+n}$ için

$$\|v\|^S = \sqrt{\varepsilon^L(\langle v, v\rangle)}$$

normu ele alındığında

$$e_1(t,\theta) = f_1(t,\theta) \cdot \left(\|f_1(t,\theta)\|^S\right)^{-1} \tag{4.17}$$

yazılır. $\forall (t,\theta) \in B_L^{1+1}$ için

$$f_2(t,\theta) = G_1^{(2)} c(t,\theta) + \left(\varepsilon^L(A(t,\theta)) + s(A(t,\theta))\right) \cdot e_1(t,\theta) \tag{4.18}$$

eşitliği alındığında ve

$$\varepsilon^L(\langle f_2(t,\theta), e_1(t,\theta)\rangle) = 0$$

olan ortogonallik kullanıldığında

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^L\left(\left\langle G_1^{(2)} c(t,\theta) + \left(\varepsilon^L(A(t,\theta)) + s(A(t,\theta))\right) \cdot e_1(t,\theta), e_1(t,\theta)\right\rangle\right) \\ &= \varepsilon^L\left(\left\langle G_1^{(2)} c(t,\theta), e_1(t,\theta)\right\rangle + \left\langle\left(\varepsilon^L(A(t,\theta)) + s(A(t,\theta))\right) \cdot e_1(t,\theta), e_1(t,\theta)\right\rangle\right) \\ &= \varepsilon^L\left\langle G_1^{(2)} c(t,\theta), e_1(t,\theta)\right\rangle + s\left(\left\langle G_1^{(2)} c(t,\theta), e_1(t,\theta)\right\rangle\right) \\ &\quad + \varepsilon^L(A(t,\theta)) \cdot \varepsilon^L(\langle e_1(t,\theta), e_1(t,\theta)\rangle) + \varepsilon^L(A(t,\theta)) \cdot s(\langle e_1(t,\theta), e_1(t,\theta)\rangle) \\ &\quad + s(A(t,\theta)) \cdot s(\langle e_1(t,\theta), e_1(t,\theta)\rangle) + s(A(t,\theta)) \cdot \varepsilon^L(\langle e_1(t,\theta), e_1(t,\theta)\rangle) \end{aligned} \tag{4.19}$$

eşitliği bulunur. Böylece (4.19) denklemi çift ve tek kısım olarak ayrıldığında

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^L \left\langle G_1^{(2)} c(t,\theta), e_1(t,\theta) \right\rangle + \varepsilon^L (A(t,\theta)) \cdot \varepsilon^L (\langle e_1(t,\theta), e_1(t,\theta) \rangle) \\ 0 &= s\left(\left\langle G_1^{(2)} c(t,\theta), e_1(t,\theta) \right\rangle \right) + \varepsilon^L (A(t,\theta)) \cdot s(\langle e_1(t,\theta), e_1(t,\theta) \rangle) \\ &\quad + s(A(t,\theta)) \cdot s(\langle e_1(t,\theta), e_1(t,\theta) \rangle) + s(A(t,\theta)) \cdot \varepsilon^L (\langle e_1(t,\theta), e_1(t,\theta) \rangle) \end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.20) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} \varepsilon^L (A(t,\theta)) &= -\varepsilon^L \left\langle G_1^{(2)} c(t,\theta), e_1(t,\theta) \right\rangle \\ s(A(t,\theta)) &= \left(-s\left(\left\langle G_1^{(2)} c(t,\theta), e_1(t,\theta) \right\rangle \right) - \varepsilon^L \left\langle G_1^{(2)} c(t,\theta), e_1(t,\theta) \right\rangle \right) \\ &\quad \cdot s(\langle e_1(t,\theta), e_1(t,\theta) \rangle) \cdot (1 + s(\langle e_1(t,\theta), e_1(t,\theta) \rangle))^{-1} \end{aligned} \tag{4.21}$$

sonuçları bulunur. (4.21), (4.18) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$f_2(t,\theta) = G_1^{(2)} c(t,\theta) + \left(-\varepsilon^L \left\langle G_1^{(2)} c(t,\theta), e_1(t,\theta) \right\rangle + s(A(t,\theta)) \right) \cdot e_1(t,\theta) \tag{4.22}$$

olur. $\forall (t,\theta) \in B_L^{1+1}$ için $G_1 c(t,\theta)$ ve $G_1^{(2)} c(t,\theta)$ süpervektörleri lineer bağımsız olduğundan

$$\varepsilon^L (\langle f_2(t,\theta), f_2(t,\theta) \rangle) \neq 0 \tag{4.23}$$

elde edilir. Bu yüzden $\forall (t,\theta) \in B_L^{1+1}$ için $\|f_2(t,\theta)\|^S \neq 0$ bulunur. Baz vektörünü

$$e_2(t,\theta) = f_2(t,\theta) \cdot \|f_2(t,\theta)\|^S \tag{4.24}$$

eşitliği olarak alınırsa

$$\|e_1(t,\theta)\|^S = \|e_2(t,\theta)\|^S = 1 \tag{4.25}$$

ifadesi elde edilir. Burada $\langle e_1(t,\theta), e_1(t,\theta) \rangle = 1 + s(\langle e_1(t,\theta), e_1(t,\theta) \rangle)$ olup $s(\langle e_1(t,\theta), e_1(t,\theta) \rangle)$ ifadesi dikkate alınmaz. Aynı durum $s(\langle e_2(t,\theta), e_2(t,\theta) \rangle)$ için geçerlidir. Böylece

$$\begin{aligned} G_1 c(t,\theta) &= \|G_1 c(t,\theta)\|^S \cdot e_1(t,\theta) \\ G_1^{(2)} c(t,\theta) &= \varepsilon^L \left\langle G_1^{(2)} c(t,\theta), e_1(t,\theta) \right\rangle - s(A(t,\theta)) \cdot e_1(t,\theta) + \|f_2(t,\theta)\|^S \cdot e_2(t,\theta) \end{aligned} \tag{4.26}$$

denklemleri elde edilir. Bu durumda $Sp\left(G_1 c(t,\theta), G_1^{(2)} c(t,\theta) \right) = Sp(e_1(t,\theta), e_2(t,\theta))$ olur. $\forall (t,\theta) \in B_L^{1+1}$ için

$$\varepsilon^L \left(\begin{vmatrix} \|G_1 c(t,\theta)\|^S & 0 \\ \varepsilon^L \left\langle G_1^{(2)} c(t,\theta), e_1(t,\theta) \right\rangle - s(A(t,\theta)) & \|f_2(t,\theta)\|^S \end{vmatrix} \right) > 0 \tag{4.27}$$

olduğundan $\left\{ G_1 c(t,\theta), G_1^{(2)} c(t,\theta) \right\}$ ve $\{e_1(t,\theta), e_2(t,\theta)\}$ süpervektörlerin sistemi sonucu gelir. (4.2) sistemi için genelleştirildiğinde

$$f_h(t,\theta) = G_1^{(h)} c(t,\theta) + \sum_{k=1}^{h-1} \left(\varepsilon^L (A_k(t,\theta)) + s(A_k(t,\theta)) \right) \cdot e_k(t,\theta) \qquad h < m \tag{4.28}$$

süpervektörleri kurulur. Burada $(t,\theta) \to (A_k(t,\theta))$,

$$\langle f_h(t,\theta), e_i(t,\theta)\rangle = 0 \quad h < m \ ve \ i \in \{1,2,...,h-1\} \tag{4.29}$$

şartını sağlayan süperdüzgün fonksiyonlardır. Bu durumda $i \in \{1,2,...,h-1\}$ için düzenleme yapıldığında

$$\begin{aligned} G_1^{(h)}c(t,\theta) + \sum_{k=1}^{h-1}\left(\varepsilon^L(A_k(t,\theta)) + s(A_k(t,\theta))\right)\cdot e_k(t,\theta) &= 0 \\ \left\langle G_1^{(h)}c(t,\theta), e_i(t,\theta)\right\rangle + & \\ \left(\varepsilon^L(A_i(t,\theta)) + s(A(t,\theta))\right)\cdot(1+s(\langle e_i(t,\theta), e_i(t,\theta)\rangle)) &= 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

elde edilir. (4.30) denkleminden çift ve tek kısımlara ayrılırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon^L\left\langle G_1^{(h)}c(t,\theta), e_i(t,\theta)\right\rangle + \varepsilon^L(A_i(t,\theta)) &= 0 \\ s\left(\left\langle G_1^{(h)}c(t,\theta), e_i(t,\theta)\right\rangle\right) + \varepsilon^L((A_i(t,\theta))\cdot s(\langle e_i(t,\theta), e_i(t,\theta)\rangle)) & \\ + s(A_i(t,\theta))\cdot(1+s(\langle e_i(t,\theta), e_i(t,\theta)\rangle)) &= 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

denklemleri bulunur. $G_1c(t,\theta),...,Gc(t,\theta)$ $(h<m)$ lineer bağımsız olduğundan $f_h(t,\theta) \neq 0$ olur.

$$e_h(t,\theta) = f_h(t,\theta)\cdot\left(\|f_h(t,\theta)\|^S\right)^{-1} \quad h < m \tag{4.32}$$

denklemi yazılırsa $e_1(t,\theta),...,e_{m-1}(t,\theta)$ sistemi iki süpervektörler birim ve ortogonal olacak şekilde yapılandırılır. Diğer bir deyişle, (4.28) ve (4.32)denklemlerinden $\forall h < m$ için

$$\begin{aligned} G_1^{(h)}c(t,\theta) \;=\; & \left(\varepsilon^L\left(\left\langle G_1^{(h)}c(t,\theta), e_1(t,\theta)\right\rangle\right)\right) - s(A(t,\theta))\cdot e_1(t,\theta) + ... \\ & + \left(\varepsilon^L\left(\left\langle G_1^{(h)}c(t,\theta), e_{h-1}(t,\theta)\right\rangle\right)\right) - s(A_{h-1}(t,\theta))\cdot e_{h-1}(t,\theta) \\ & + \|f_h(t,\theta)\|'\cdot e_h(t,\theta) \end{aligned} \tag{4.33}$$

bağıntısı elde edilir. (4.26) ve (4.33) denklemlerinden yararlanarak $\{e_1(t,\theta),...,e_h(t,\theta)\}$ bazından $\left\{G_1c(t,\theta),...,G_1^{(h)}c(t,\theta)\right\}$ $(h<m)$ bazına değiştirildiğinde lineer dönüşümün çift kısmı elde edilir. $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için

$$\varepsilon^L(\Delta(t,\theta)) = \|f_1(t,\theta)\|' ... \|f_h(t,\theta)\|' \tag{4.34}$$

şeklinde verilir. Bu yüzden $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için (4.34) denkleminden

$$\varepsilon^L(\Delta(t,\theta)) > 0$$

olur. Bu durumda $\{e_1(t,\theta),...,e_h(t,\theta)\}$ ve $\left\{G_1c(t,\theta),...,G_1^{(h)}c(t,\theta)\right\}$ süpervektörlerinin sistemi aynı doğrultuludur ve oluşturulan

$$\begin{aligned} (t,\theta) &\to e_k(t,\theta) \quad \forall k \in \{1,2,...,m-1\} \\ (t,\theta) &\to e_{m+j}(t,\theta) \quad \forall j \in \{1,2,...,n\} \end{aligned} \tag{4.35}$$

fonksiyonları süperdüzgün olur. $\forall(t,\theta)\in V\subset B_L^{1+1}$ için $e_m(t,\theta)$,

$$\begin{aligned}\langle e_m(t,\theta),e_h(t,\theta)\rangle &= 0 \quad \forall k\in\{1,2,...,m-1\} \\ \left\langle e_m(t,\theta),e_{m+j}(t,\theta)\right\rangle &= 0 \quad \forall j\in\{1,2,...,n\}\end{aligned} \tag{4.36}$$

bağıntılarından elde edilir. Böylece (4.34) denkleminin açılımı,

$$\begin{aligned}& e_m^1(t,\theta)\cdot e_1^1(t,\theta)+...+e_m^m(t,\theta)\cdot e_1^m(t,\theta) \\ & +e_m^{m+1}(t,\theta)\cdot e_1^{m+r+1}(t,\theta)+...+e_m^{m+r}(t,\theta)\cdot e_1^{m+n}(t,\theta) \\ & -e_m^{m+r-1}(t,\theta)\cdot e_1^{m+1}(t,\theta)-...-e_m^{m+n}(t,\theta)\cdot e_1^{m+r}(t,\theta) \quad =0 \\ & \vdots \\ & e_m^1(t,\theta)\cdot e_{m+n}^1(t,\theta)+...+e_m^m(t,\theta)\cdot e_{m+n}^m(t,\theta) \\ & +e_m^{m+1}(t,\theta)\cdot e_{m+n}^{m+r+1}(t,\theta)+...+e_m^{m+r}(t,\theta)\cdot e_{m+n}^{m+n} \\ & -e_m^{m+r-1}(t,\theta)\cdot e_{m+n}^{m+1}(t,\theta)-...-e_m^{m+n}(t,\theta)\cdot e_{m+n}^{m+r}(t,\theta) \quad =0\end{aligned} \tag{4.37}$$

şeklinde olur. Burada $\forall k\in\{1,2,...,m\}$ için her bir $e_k^1(t,\theta),...,e_k^{m+n}(t,\theta)$; $e_k(t,\theta)$ süpervektörlerinin bileşenidir.

$\forall(t,\theta)\in V\subset B_L^{1+1}$ için $e_1(t,\theta),...,e_{m-1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta),...,e_{m+n}(t,\theta)$ süpervektörleri lineer bağımsız olduğundan $M(t,\theta)$,

$$\begin{pmatrix} e_1^1 & \dots & e_1^m & e_1^{m+r+1} & \dots & e_1^{m+n} & e_1^{m+1} & \dots & e_1^{m+r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m-1}^1 & \dots & e_{m-1}^m & e_{m-1}^{m+r+1} & \dots & e_{m-1}^{m+n} & e_{m-1}^{m+1} & \dots & e_{m-1}^{m+r} \\ e_{m+1}^1 & \dots & e_{m+1}^m & e_{m+1}^{m+r+1} & \dots & e_{m+1}^{m+n} & e_{m+1}^{m+1} & \dots & e_{m+1}^{m+r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{m+n}^1 & \dots & e_{m+n}^m & e_{m+n}^{m+r+1} & \dots & e_{m+n}^{m+n} & e_{m+n}^{m+1} & \dots & e_{m+n}^{m+r} \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

matrisi $m+n-1$ boyutludur. Burada $s\in\{1,2,...,m+n\}$ ve $q\in\{1,...,m-1,m+1....,m+n\}$ olan e_q^s, $e_q^s(t,\theta)$ anlamına gelir. $\Delta_q(t,\theta)$, $q\in\{1,...,m+n\}$ ve $\forall(t,\theta)\in V\subset B_L^{1+1}$ için M matrisinden q sütun kaldırılarak elde edilen $m+n-1$ dereceden minör olsun. Bu durumda (4.37) denkleminden

$$e_m^q(t,\theta)=(-1)^{q-1}\cdot v(t,\theta)\cdot\Delta_q(t,\theta) \qquad q\in\{1,...,m+n\} \tag{4.39}$$

elde edilir. Burada $v(t,\theta)$,

$$\|e_m(t,\theta)\|^S=1 \tag{4.40}$$

denklemini sağlamalıdır. *Rank* $(M(t,\theta))=m+n-1$ olduğundan

$$\varepsilon^L\left(\Delta_q(t,\theta)\right)=\left(\varepsilon^L\left(\Delta_1(t,\theta)\right)\right)^2+...+\left(\varepsilon^L\left(\Delta_m(t,\theta)\right)\right)^2>0 \tag{4.41}$$

sahip olunur. (4.39) ve (4.41) denklemlerinden

$$v(t,\theta)=\eta\cdot\left(\sqrt{\Delta_q(t,\theta)}\right)^{-1} \tag{4.42}$$

elde edilir. Burada $\eta=\pm1$ dir. Bu sonuç şartlarından $\{e_1(t,\theta),...,e_{m+n}(t,\theta)\}$ çatısı pozitiftir. (4.39) ve (4.42) denklemleri alınarak

$$e_m^q(t,\theta)=(-1)^{q-1}\cdot\eta\cdot.\Delta_q(t,\theta)\cdot\left(\sqrt{\Delta_q(t,\theta)}\right)^{-1} \qquad q\in\{1,...,m+n\} \tag{4.43}$$

denklemi bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \|\eta\| &= 1 \\ \varepsilon^L\left(s\det\left(e_q^s(t,\theta)\right)\right)_{1\le s,q\le m+n} &> 0 \end{aligned} \tag{4.44}$$

şartlarını sağlar. (4.40) ve (4.43) denklemleri alınırsa

$$\begin{aligned} (t,\theta) &\to e_q^s(t,\theta) \quad \forall s\in\{1,2,...,m+n\} \\ (t,\theta) &\to e_m(t,\theta) \end{aligned} \tag{4.45}$$

fonksiyonları süperdüzgün olur. Bu yapıdan $\forall k\in\{1,2,...,m\},\forall j\in\{1,2,...,n\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left\langle e_i(t,\theta),e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= 0 \\ a_{k\ \ m+j}(t,\theta) &= \left\langle G_1e_k(t,\theta),e_{m+j}(t,\theta)\right\rangle, \end{aligned} \tag{4.46}$$

ve Frenet çatısının tekliği sonucuna ulaşılır. $k\in\{1,2,...,m\}$ indisini sabitleyerek $\{e_1(t,\theta),...,e_{m+n}(t,\theta)\}$ çatısındaki

$$G_1e_k(t,\theta)=\sum_{h=1}^{m}a_{kh}(t,\theta)\cdot e_h(t,\theta)+\sum_{j=1}^{n}a_{kj}(t,\theta)\cdot e_{m+j}(t,\theta) \tag{4.47}$$

eşitliği yazılır. (4.47) bağıntıları ve $i\in\{1,2,...,m\}$ için $e_i(t,\theta)$ arasında süperskalar çarpım hesaplandığında

$$a_{ki}(t,\theta)=\langle G_1e_k(t,\theta),e_i(t,\theta)\rangle \tag{4.48}$$

denklemi elde edilir. $\forall i\in\{1,2,...,n\}$ ve $\forall(t,\theta)\in V\subset B_L^{1+1}$ için süperskalar çarpım özelliğinden

$$\left\langle e_{m+j}(t,\theta),e_i(t,\theta)\right\rangle=0$$

eşitliği vardır. Böylece $\forall(t,\theta)\in V\subset B_L^{1+1}$ için

$$a_{kh}(t,\theta)=\langle G_1e_k(t,\theta),e_i(t,\theta)\rangle \quad \forall k,i\in\{1,2,...,m\} \tag{4.49}$$

eşitliği ispatlanır. $\forall l\in\{1,2,...,n\}$ için (4.47) bağıntılarına $e_{m+l}(t,\theta)$ arasında süperskalar çarpım uygulandığında ve süperskalar çarpım eşitliklerinden

$$a_{k\ (m+l)}(t,\theta)=\langle G_1e_k(t,\theta),e_{m+l}(t,\theta)\rangle \quad \forall k\in\{1,2,...,m\},\forall j\in\{1,2,...,n\} \tag{4.50}$$

bulunur. Süperskalar çarpımın simetri özelliğine sahip olan kısmındaki

$$\langle e_k(t,\theta), e_h(t,\theta)\rangle = \delta_{kh} \qquad \forall k,h \in \{1,2,...,m\}$$

bağıntısı G_1 alınarak türevlendiğinde $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ ve $\forall k,h \in \{1,2,...,m\}$ için

$$\langle G_1 e_k(t,\theta), e_h(t,\theta)\rangle + \langle e_k(t,\theta), G_1 e_h(t,\theta)\rangle = 0 \tag{4.51}$$

elde edilir. (4.50) denklemi kullanılırsa

$$a_{kh}(t,\theta) + a_{hk}(t,\theta) = 0 \tag{4.52}$$

ifadesi ispatlanmış olur.

$\{e_1(t,\theta),...,e_k(t,\theta)\}$ Frenet çatısı olduğundan $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için

$$\begin{aligned} G_1^k c(t,\theta) &\in Sp\left(e_1(t,\theta),...,e_k(t,\theta)\right) \qquad \forall k \in \{1,2,...,m-1\} \\ e_k(t,\theta) &\in Sp\left(G_1 c(t,\theta),...,G_1^{(k)} c(t,\theta)\right) \quad \forall k \in \{1,2,...,m-1\} \end{aligned} \tag{4.53}$$

olur. (4.53) denklemlerinden $\forall k \in \{1,2,...,m-1\}$ olmak üzere

$$G_1 e_k(t,\theta) \in Sp\left(G_1 c(t,\theta),...,G_1^{(k)} c(t,\theta), G_1^{(k+1)} c(t,\theta)\right) \tag{4.54}$$

denklemi elde edilir. (4.53) ve (4.54) denklemlerinden $\forall k \in \{1,2,...,m-1\}$ olmak üzere

$$G_1 e_k(t,\theta) \in Sp\left(e_1(t,\theta),...,e_{k+1}(t,\theta)\right) \tag{4.55}$$

denklemi bulunur. (4.55) denkleminden $\forall k \in \{1,2,...,m\}$, $\forall j \in \{1,2,...,n\}$ için

$$G_1 e_k(t,\theta) = \sum_{h=1}^{m} a_{kh}(t,\theta)\cdot e_h(t,\theta) + \sum_{j=1}^{n} a_{k\ \ m+j}(t,\theta)\cdot e_{m+j}(t,\theta) \tag{4.56}$$

olur. $h > k+1$ ve $a_{k\,(m+j)}(t,\theta) = 0$ ise $a_{kh}(t,\theta)$ katsayıları sıfırdır. Böylece $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ ve $\forall k \in \{1,2,...,m\}$ için

$$G_1 e_k(t,\theta) = \sum_{h=1}^{m} a_{kh}(t,\theta)\cdot e_h(t,\theta) \tag{4.57}$$

formülü elde edilir. $h > k+1$ ve $\forall k,h \in \{1,2,...,m\}$ ise $a_{kh}(t,\theta) = 0$ olur.

$\{e_1(t,\theta),...,e_{m+n}(t,\theta)\}$ çatı yapısından

$$\begin{aligned} G_1^{(j-1)} G_2 c(t,\theta) &\in Sp\left(e_{m+j}(t,\theta)\right) \\ e_{m+j}(t,\theta) &\in Sp\left(G_1^{(j-1)} G_2 c(t,\theta)\right) \end{aligned} \tag{4.58}$$

denklemi verilir. $\forall j \in \{1,2,...,n\}$ ve $\forall (t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için

$$G_1 e_{m+j}(t,\theta) \in Sp\left(G_1^{(j)} G_2 c(t,\theta)\right)$$

var olduğundan

$$G_1 e_{m+j}(t,\theta) \in Sp\left(e_{m+j+1}(t,\theta)\right) \tag{4.59}$$

bulunur. (4.57) denklemi kullanılarak

$$G_1 e_{m+j}(t,\theta) = \sum_{k=1}^{m} a_{m+j \quad k}(t,\theta) \cdot e_k(t,\theta) + \sum_{j=1}^{n} a_{m+j \quad m+l}(t,\theta) \cdot e_{m+j}(t,\theta)$$

denklemi yazılır. Bu durumda $j_1 \in \{1,2,...,r\}$ sabit indisi alınarak

$$G_1 e_{m+j_1}(t,\theta) = \sum_{h=1}^{m} a_{m+j_1 \quad h}(t,\theta) \cdot e_h(t,\theta) + \sum_{j=1}^{n} a_{m+j_1 \quad m+j}(t,\theta) \cdot e_{m+j}(t,\theta) \tag{4.60}$$

bulunur. Aynı şekilde (4.60) denklemi ile $e_k(t,\theta)$ süperskalar çarpım yapıldığında $\forall k \in \{1,2,...,m\}$ ve $\forall (t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için

$$a_{(m+j_1)\ h}(t) = \left\langle G_1 e_{m-j_1}(t,\theta), e_k(t,\theta) \right\rangle \tag{4.61}$$

denklemi bulunur.

Sonuç 4.1.1. Eğriler için

$$\begin{aligned} G_1 e_k(t,\theta) &= \sum_{h=1}^{m} a_{kh}(t,\theta) \cdot e_h(t,\theta) \\ G_1 e_{m+j}(t,\theta) &= \sum_{h=1}^{m} a_{m+j \quad m+l}(t,\theta) \cdot e_{m+l}(t,\theta) \end{aligned} \tag{4.62}$$

bağıntıları Frenet formüllerine genişletilir (Cristea, 2005).

Sonuç 4.1.2. Frenet formüllerinin eğrilikleri

$$A = \left(a_{sq}\right)_{1 \le s,q \le m+n} = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

şeklinde yazılır. Burada matrisler,

$$A_{1=} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(m-1)m} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{(m-1)m} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{2=} \begin{pmatrix} a_{(m+1)(m+1)} & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & a_{(m+r)(m+r)} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & -a_{(m+1)(m+1)} & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & -a_{(m+r)(m+r)} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

eşitlikleridir (Cristea, 2005).

Tanım 4.1.3 $L > 2n$ ve B_L^{m+n} (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayı, $V \subset B_L^{1+1}$ açık ve $c : V \subset B_L^{1+1} \to B_L^{m+n}$ fonksiyon ve $\forall\theta \in V \cap \left(B_L^{1+1}\right)_1$ için

$$\begin{array}{llll} c_{\theta,0}: & V \cap \left(B_L^{1+1}\right)_0 & \to & \left(B_L^{m+n}\right)_1 \\ & t & \mapsto & c_{\theta,0}(t) = (c\,(t,\theta))_0 \qquad (c\,(t,\theta))_0,\ c\,(t,\theta) \text{ nın çift kısmı} \\ c_{\theta,B}: & V \cap \left(B_L^{1+1}\right)_0 & \to & R^n \\ & t & \mapsto & c_{\theta,B}(t) = \varepsilon_{m,n}^{\prime(L)} \circ c_{\theta,0}(t) \end{array} \tag{4.64}$$

olsun. c fonksiyonuna süpereğri denir ancak ve ancak $c_{\theta,B}\,|_{V\cap R}$ eğri olacaktır. c fonksiyonuna süperdüzgün denir ancak ve ancak

$$\begin{array}{lll} c^i & \in & GH^\infty(V) \qquad\qquad i \in \{1,2,...,m\} \\ c^{j+m} & \in & GH^\infty(V) \qquad\qquad j \in \{1,2,...,n\} \end{array}$$

dir. Burada

$$\begin{array}{lll} c^i & = & \theta^i \circ c \qquad \forall i \in \{1,2,...,m\} \\ c^{j+m} & = & x^j \circ c \qquad \forall j \in \{1,2,...,n\} \end{array}$$

dır

Tanım 4.1.4 $L > 2n$ ve $\left(B_L^{m+n}\right)_1$, (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayının tek kısmı ve $V \subset B_L^{1+1}$ açık ve $c : V \subset B_L^{1+1} \to \left(B_L^{m+n}\right)_1$ süperdüzgün süpereğri olsun. $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için $G_1^{(0)}c(t,\theta) = c(t,\theta), G_1^{(1)}c(t,\theta) = G_1^{(1)}c(t,\theta), ..., G_1^{(s)}c(t,\theta) = G_1...G_1c(t,\theta)$ olmak üzere

$$\left\{G_2c(t,\theta), G_1G_2c(t,\theta), ..., G_1^{(n-1)}G_2c(t,\theta), G_1c(t,\theta), ..., G_1^{(m-1)}c(t,\theta)\right\}$$

lineer bağımsız ve $G_1c(t,\theta)$ tarafından

$$\left(G_1c^1(t,\theta), ..., G_1c^m(t,\theta), G_1c^{m+1}(t,\theta), ..., G_1c^{m+n}(t,\theta)\right) \qquad \forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1},$$

$G_2c(t,\theta)$ tarafından ise

$$\left(G_2c^1(t,\theta), ..., G_2c^m(t,\theta), G_2c^{m+1}(t,\theta), ..., G_2c^{m+n}(t,\theta)\right) \qquad \forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$$

olacak şekildeki süpereğriye genel durumdaki bir c süpereğrisi adı verilir.

Tanım 4.1.5 $L > 2n$ ve $\left(B_L^{m+n}\right)_1$ (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayının tek kısmı ve $V \subset B_L^{1+1}$ açık ve $c : V \subset B_L^{1+1} \to \left(B_L^{m+n}\right)_1$ süperdüzgün süpereğri olsun. $c : V \subset B_L^{1+1} \to \left(B_L^{m+n}\right)_1$ süperdüzgün süpereğri ile Frenet Çatısı ilişkisi olarak c süperdüzgün süpereğriye bağlı $\{e_1, ..., e_{m+n}\}$ $m+n$ süpervektör alanlarının sistemi öyle ki $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$

$$\begin{aligned}
\langle e_k(t,\theta), e_h(t,\theta)\rangle &= 0 \qquad \forall k,h \in \{1,2,...,r\} \\
\left\langle e_{r+j_1}(t,\theta), e_{r+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= 0 \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\} \\
\left\langle e_{j_1}(t,\theta), e_{r+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= \delta_{j_1 j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\} \\
\left\langle e_{r+j_1}(t,\theta), e_{j_2}(t,\theta)\right\rangle &= -\delta_{j_1 j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\} \\
\left\langle e_{m+j_1}(t,\theta), e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= \delta_{j_1 j_2} \qquad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,n\} \\
\left\langle e_{j_1}(t,\theta), e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= 0 \qquad \forall j_1 \in \{1,2,...,r\},\ \forall j_2 \in \{1,2,...,n\} \\
\left\langle e_{r+j_1}(t,\theta), e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= 0 \qquad \forall j_1 \in \{1,2,...,r\},\ \forall j_2 \in \{1,2,...,n\}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

özelliklerine sahiptir. $\forall k \in \{1,2,...,m\}$ ve $\forall j \in \{1,2,...,n\}$ ve $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ olmak üzere

$$Sp\left(G_2c(t,\theta), G_1G_2c(t,\theta), ..., G_1^{(j-1)}G_2c(t,\theta)\right) = Sp\left(e_1(t,\theta), ..., e_j(t,\theta)\right) \tag{4.66}$$

ve

$$Sp\left(G_1c(t,\theta), ..., G_1^{(k)}c(t,\theta)\right) = Sp\left(e_{m+1}(t,\theta), ..., e_{m+k}(t,\theta)\right) \tag{4.67}$$

şeklinde germelere sahiptir.

Teorem 4.1.2 $L > 2n$ ve $\left(B_L^{m+n}\right)_1$ (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayının tek kısmı ve $V \subset B_L^{1+1}$ açık ve $c : V \subset B_L^{1+1} \to \left(B_L^{m+n}\right)_1$ genel durumdaki süperdüzgün süpereğri olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikleri sağlar: $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$,

$$\begin{aligned}
\varepsilon'^L\left(\left\langle G_2c(t,\theta), G_1^{(r)}G_2c(t,\theta)\right\rangle\right) &> 0 \\
\varepsilon'^L\left(\left\langle G_1^{j_1}G_2c(t,\theta), G_1^{(r+j_1)}G_2c(t,\theta)\right\rangle\right) &> 0 \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r-1\} \\
\varepsilon'^L\left(\left\langle G_2c(t,\theta), G_1^{(j)}G_2c(t,\theta)\right\rangle\right) &= 0 \quad \forall j \in \{1,2,...,n-1\} \\
\varepsilon'^L\left(\left\langle G_1^{j\prime}G_2c(t,\theta), G_1^{(r+j_1)}G_2c(t,\theta)\right\rangle\right) &= 0 \quad \forall j\prime,\ j \in \{1,2,...,r-1\}, j\prime \neq\ j, j\prime <\ j.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Bu durumda c süpereğrisiyle ilişkili bir tek $\{e_1, ..., e_{m+n}\}$ Frenet çatısı vardır ve

$$\begin{aligned}
G_1e_k(t,\theta) &= \sum_{h=1}^{m} a_{kh}(t,\theta)e_h(t,\theta) \qquad \forall k \in \{1,2,...,m\} \\
G_1e_{m+j}(t,\theta) &= \sum_{l=1}^{m} a_{(m+j)\ (m+l)}(t,\theta)e_{m+l}(t,\theta) \qquad \forall j \in \{1,2,...,n\}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

öyle ki

$$
\begin{aligned}
a_{j_1\ j_2}(t,\theta)+a_{(r+j_2)(r+j_1)}(t,\theta) &= 0 \quad \forall j_1,j_2\in\{1,2,...,r\} \\
a_{(r+j_1)j_2}(t,\theta)-a_{(r+j_2)j_1}(t,\theta) &= 0 \quad \forall j_1,j_2\in\{1,2,...,r\} \\
a_{j_1(r+j_2)}(t,\theta)-a_{j_2(r+j_1)}(t,\theta) &= 0 \quad \forall j_1,j_2\in\{1,2,...,r\} \\
a_{j_1(m+j_2)}(t,\theta) &= a_{(m+j_2)j_1}(t,\theta)=0 \quad \forall j_1\in\{1,2,...,m\} \text{ ve } \forall j_2\in\{1,2,...,n\} \\
a_{kh}(t,\theta) &= 0 \quad h\neq k+1 \ ve\ \forall k,h\in\{1,2,...,n\}
\end{aligned} \tag{4.70}
$$

elde edilir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
a_{j_1j_2}(t,\theta) &= \left\langle G_1e_{j_1}(t,\theta),e_{r+j_2}(t,\theta)\right\rangle \quad \forall j_1,j_2\in\{1,2,...,r\} \\
a_{j_1(r+j_2)}(t,\theta) &= -\left\langle G_1e_{j_1}(t,\theta),e_{j_2}(t,\theta)\right\rangle \quad \forall j_1,j_2\in\{1,2,...,r\} \\
a_{(r+j_1)j_2}(t,\theta) &= \left\langle G_1e_{r+j_1}(t,\theta),e_{r+j_2}(t,\theta)\right\rangle \quad \forall j_1,j_2\in\{1,2,...,r\} \\
a_{(r+j_1)(r+j_2)}(t,\theta) &= -\left\langle G_1e_{r+j_1}(t,\theta),e_{j_2}(t,\theta)\right\rangle \quad \forall j_1,j_2\in\{1,2,...,r\} \\
a_{(m+j_1)(m+j_2)}(t,\theta) &= \left\langle G_1e_{m+j_1}(t,\theta),e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle \quad \forall j_1,\ j_2\in\{1,2,...,n\} \\
a_{j_1(m+j_2)}(t,\theta) &= \left\langle G_1e_{j_1}(t,\theta),e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle \quad \forall j_1\in\{1,2,...,m\},\forall j_2\in\{1,2,...,n\} \\
a_{(m+j_1)j_2}(t,\theta) &= \left\langle G_1e_{m+j}(t,\theta),e_k(t,\theta)\right\rangle \quad \forall j_1\in\{1,2,...,n\},\forall j_2\in\{1,2,...,m\}
\end{aligned} \tag{4.71}
$$

bağıntıları bulunur.

İspat Frenet çatı eğrileri için varlık teklik teoremini ispatlamak için

$$
\begin{aligned}
\varepsilon'^L\left(\left\langle G_1c(t,\theta),G_1^{(r)}G_2c(t,\theta)\right\rangle\right) &> 0 \\
\varepsilon'^L\left(\left\langle G_1^{j_1}c(t,\theta),G_1^{(r+j_1)}G_2c(t,\theta)\right\rangle\right) &> 0 \quad \forall j_1,j_2\in\{1,2,...,r-1\}
\end{aligned} \tag{4.72}
$$

bağıntılarından

$$
\begin{aligned}
\varepsilon'^L\left(\left\langle G_2c(t,\theta),G_1^{(r)}G_2c(t,\theta)\right\rangle\right) &\neq 0 \\
\varepsilon'^L\left(\left\langle G_1^{j_1}c(t,\theta),G_1^{(r+j_1)}G_2c(t,\theta)\right\rangle\right) &\neq 0 \quad \forall j_1,j_2\in\{1,2,...,r-1\}
\end{aligned} \tag{4.73}
$$

elde edilir. $\forall j_1\in\{1,2,...,r\}$ ve $\forall(t,\theta)\in V\subset B_L^{1+1}$ için

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(t,\theta) &= \left\langle G_2c(t,\theta),G_1^{(r)}G_2c(t,\theta)\right\rangle \\
\lambda_{j_1}(t,\theta) &= \left\langle G_1^{j_1}c(t,\theta),G_1^{(r+j_1)}G_2c(t,\theta)\right\rangle \quad \forall j_1\in\{2,...,r\}
\end{aligned} \tag{4.74}
$$

alındığında

$$\varepsilon'^L\left(\lambda_{j_1}(t,\theta)\right)\neq 0$$

olduğunundan $\left(\lambda_{j_1} e(t,\theta)\right)^{-1}$ var olduğu sonucu bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} e_1(t,\theta) &= (\lambda_1(t,\theta))^{-1} G_2 e(t,\theta) \\ e_{j_1}(t,\theta) &= \left(\lambda_{j_1}(t,\theta)\right)^{-1} G_1^{(j_1-1)} G_2 c(t,\theta) \quad \forall j_1 \in \{2,...,r\} \\ e_{r+j_2}(t,\theta) &= G_1^{(r+j_2-1)} G_2 c(t,\theta) \quad j_2 \in \{1,2,...,r\} \end{aligned} \tag{4.75}$$

bağıntıları değerlendirildiğinde c süperdüzgün süpereğri olduğundan $\{e_1(t,\theta),...,e_m(t,\theta)\}$ süpervektörleri lineer bağımsızdır. Bu süpervektörlerin tanımından $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$, $\forall k \in \{1,2,...,n-1\}$ ve $\forall j \in \{1,2,...,m\}$ için (4.66) ve (4.67) germelere sahiptir. (4.72) ve (4.74) denklemlerinden $\varepsilon'^L\left(\lambda_{j_1} e(t,\theta)\right) > 0$ elde edilir. $\left\{G_2 c(t,\theta), G_1 G_2 c(t,\theta), ..., G_1^{(j-1)} G_2 c(t,\theta)\right\}$ sisteminden $\left\{e_{m+1}(t,\theta),...,e_{m+j}(t,\theta)\right\}$ sistemine değiştirildiğinde matrisin determinantının çift kısmı

$$\begin{aligned} &\varepsilon'^L \det \begin{pmatrix} (\lambda_1(t,\theta))^{-1} & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & ... & \left(\lambda_j(t,\theta)\right)^{-1} & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon'^L \left((\lambda_1(t,\theta))^{-1} ... \left(\lambda_j(t,\theta)\right)^{-1} \right) \\ &= \varepsilon'^L \left((\lambda_1(t,\theta))^{-1} \right) ... \varepsilon'^L \left(\left(\lambda_j(t,\theta)\right)^{-1} \right) > 0 \end{aligned} \tag{4.76}$$

olur. $\forall j_1, \in \{1,2,...,r\}$ ve $\forall t \in I$ için (4.74) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} \left\langle e_{j_1}(t,\theta), e_{r+j_2}(t,\theta) \right\rangle &= \left(\lambda_{j_1}(t,\theta)\right)^{-1} \cdot \left\langle G_1^{(j_1-1)} G_2 c(t,\theta), G_1^{(r+j_1-1)} G_2 c(t,\theta) \right\rangle \\ &= \left(\lambda_{j_1}(t,\theta)\right)^{-1} \cdot \lambda_{j_1}(t,\theta) = 1 \end{aligned} \tag{4.77}$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak

$$\left\langle e_{j_1}(t,\theta), e_{r+j_2}(t,\theta) \right\rangle = \delta_{j_1 j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\} \tag{4.78}$$

formülü elde edilir. Süperskalar çarpımın süpersimetri özelliğinden

$$\left\langle e_{r+j_1}(t,\theta), e_{j_2}(t,\theta) \right\rangle = -\delta_{j_1 j_2} \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\} \tag{4.79}$$

formülü bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \varepsilon'^L \left(\left\langle G_2 c(t,\theta), G_1^{(j)} G_2 c(t,\theta) \right\rangle \right) &= 0 \quad \forall j \in \{1,2,...,n-1\} \\ \varepsilon'^L \left(\left\langle G_1^{j\prime} G_2 c(t,\theta), G_1^{(r+j_1)} G_2 c(t,\theta) \right\rangle \right) &= 0 \quad \forall j\prime, j \in \{1,2,...,r-1\}, j\prime \neq j, j\prime < j. \end{aligned}$$

bağıntılarından

$$\begin{aligned} \left\langle e_{j_1}(t,\theta), e_{j_2}(t,\theta) \right\rangle &= 0 \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\} \\ \left\langle e_{r+j_1}(t,\theta), e_{r+j_2}(t,\theta) \right\rangle &= 0 \quad \forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,r\} \end{aligned} \tag{4.80}$$

formüllerine ulaşılır. Burada bağıntı ilk kısıma aitse özelleştirme yapılabilir fakat ikinci kısıma aitse özelleştirme yapılamaz.

c genel durumda süperdüzgün süpereğri olduğundan $\forall(t,\theta)\in V\subset B_L^{1+1}$ için $f_{m+1}(t,\theta)=G_1c(t,\theta)$ süpervektörü sıfırdan farklıdır. $\forall v\in B_L^{m+n}$ için

$$\|v\|^S=\sqrt{\varepsilon'^L(\langle v,v\rangle)}$$

normu ele alındığında

$$e_{m+1}(t,\theta)=f_{m+1}(t,\theta)\cdot\left(\|f_{m+1}(t,\theta)\|^S\right)^{-1} \tag{4.81}$$

yazılır. $\forall(t,\theta)\in B_L^{1+1}$ için

$$f_{m+2}(t,\theta)=G_1^{(2)}c(t,\theta)+\left(\varepsilon'^L(A(t,\theta))+s'(A(t,\theta))\right)\cdot e_{m+1}(t,\theta) \tag{4.82}$$

alındığında

$$\varepsilon'^L(\langle f_{m+2}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\rangle)=0$$

ortogonallik kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= \varepsilon'^L\left(\left\langle G_1^{(2)}c(t,\theta)+\left(\varepsilon'^L(A(t,\theta))+s'(A(t,\theta))\right)\cdot e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle\right) \qquad (4.83)\\
&= \varepsilon'^L\left(\left\langle G_1^{(2)}c(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle+\left\langle\left(\varepsilon'^L(A(t,\theta))+s'(A(t,\theta))\right)\cdot e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle\right)\\
&= \varepsilon'^L\left\langle G_1^{(2)}c(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle+s'\left(\left\langle G_1^{(2)}c(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle\right)\\
&\quad+\varepsilon'^L(A(t,\theta))\cdot\varepsilon'^L(\langle e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\rangle)+\varepsilon'^L(A(t,\theta))\cdot s'(\langle e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\rangle)\\
&\quad+s'(A(t,\theta))\cdot s'(\langle e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\rangle)+s'(A(t,\theta))\cdot\varepsilon'^L(\langle e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\rangle)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (4.83) denklemi çift ve tek kısımlara ayrılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= \varepsilon'^L\left\langle G_1^{(2)}c(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle+\varepsilon'^L(A(t,\theta))\cdot\varepsilon'^L(\langle e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\rangle) \qquad (4.84)\\
0 &= s'\left(\left\langle G_1^{(2)}c(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle\right)+\varepsilon'^L(A(t,\theta))\cdot s'(\langle e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\rangle)\\
&\quad+s'(A(t,\theta))\cdot s'(\langle e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\rangle)+s'(A(t,\theta))\cdot\varepsilon'^L(\langle e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\rangle)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
\varepsilon'^L(A(t,\theta)) &= -\varepsilon'^L\left\langle G_1^{(2)}c(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle \qquad (4.85)\\
s'(A(t,\theta)) &= \left(-s'\left(\left\langle G_1^{(2)}c(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle\right)-\varepsilon'^L\left\langle G_1^{(2)}c(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle\right)\\
&\quad\cdot s'(\langle e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\rangle)\cdot\left(1+s'(\langle e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\rangle)\right)^{-1}
\end{aligned}$$

sonuçları bulunur. (4.85) eşitlikleri (4.82) denkleminde yerine yazılırsa

$$f_{m+2}(t,\theta)=G_1^{(2)}c(t,\theta)+\left(-\varepsilon'^L\left\langle G_1^{(2)}c(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle+s'(A(t,\theta))\right)\cdot e_{m+1}(t,\theta) \tag{4.86}$$

bulunur. $\forall(t,\theta) \in B_L^{1+1}$ için $G_1c(t,\theta)$ ve $G_1^{(2)}c(t,\theta)$ süpervektörleri lineer bağımsız olduklarından

$$\varepsilon'^L\left(\langle f_{m+2}(t,\theta), f_{m+2}(t,\theta)\rangle\right) \neq 0 \tag{4.87}$$

olur. Bu yüzden $\forall(t,\theta) \in B_L^{1+1}$ için $\|f_{m+2}(t,\theta)\|^S \neq 0$ bulunur. Bu durumda

$$e_{m+2}(t,\theta) = f_{m+2}(t,\theta) \cdot \|f_{m+2}(t,\theta)\|^S \tag{4.88}$$

denklemini alındığında

$$\|e_{m+1}(t,\theta)\|^S = \|e_{m+2}(t,\theta)\|^S = 1 \tag{4.89}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\langle e_{m+1}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta)\rangle = 1 + s'\left(\langle e_{m+1}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta)\rangle\right)$ ifadesinde $s'\left(\langle e_{m+1}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta)\rangle\right)$ dikkate alınmaz. Aynı durum $s'\left(\langle e_{m+2}(t,\theta), e_{m+2}(t,\theta)\rangle\right)$ için geçerlidir. Böylece

$$\begin{aligned} G_1c(t,\theta) &= \|G_1c(t,\theta)\|^S \cdot e_{m+1}(t,\theta) \\ G_1^{(2)}c(t,\theta) &= \varepsilon'^L\left\langle G_1^{(2)}c(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle - s'\left(A\left(t,\theta\right)\right) \cdot e_{m+1}(t,\theta) \\ &\quad + \|f_{m+2}(t,\theta)\|^S \cdot e_{m+2}(t,\theta) \end{aligned} \tag{4.90}$$

denklemleri elde edilir. Bu durumda $Sp\left(G_1c(t,\theta), G_1^{(2)}c(t,\theta)\right) = Sp\left(e_{m+1}(t,\theta), e_{m+2}(t,\theta)\right)$ olduğu görülür. (4.85) denklemi kullanılarak

$$\varepsilon'^L\left(\begin{vmatrix} \|G_1c(t,\theta)\|' & 0 \\ \varepsilon'^L\left\langle G_1^{(2)}c(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle - s'\left(A\left(t,\theta\right)\right) & \|f_{m+2}(t,\theta)\|' \end{vmatrix}\right) > 0 \tag{4.91}$$

olduğundan $\forall(t,\theta) \in B_L^{1+1}$ için $\left\{G_1c(t,\theta), G_1^{(2)}c(t,\theta)\right\}$ ve $\{e_{m+1}(t,\theta), e_{m+2}(t,\theta)\}$ süpervektörler sistemi bulunur.

$$Sp\left(G_1c(t,\theta), ..., G_1^{(h-1)}c(t,\theta)\right) = Sp\left(e_{m+1}(t,\theta), ..., e_{m+h-1}(t,\theta)\right) \qquad \forall h \in \{1,2,...,n\} \tag{4.92}$$

alındığında

$$f_{m+h}(t,\theta) = G_1^{(h)}c(t,\theta) + \sum_{k=1}^{h-1}\left(\varepsilon'^L\left(A_k\left(t,\theta\right)\right) + s'\left(A_k\left(t,\theta\right)\right)\right) \cdot e_{m+k}(t,\theta) \qquad h < n \tag{4.93}$$

süpervektörleri kurulur. Burada $(t,\theta) \to \left(A_k\left(t,\theta\right)\right)$,

$$\left\langle f_{m+h}(t,\theta), e_{m+j}(t,\theta)\right\rangle = 0 \quad h < n \ ve \ j \in \{1,2,...,h-1\} \tag{4.94}$$

şartını sağlayan süperdüzgün fonksiyonlardır. Bu durumda (4.93) ve (4.94) denklemleri kullanılır ve açıldığında $e_{m+j}(t,\theta)$ ile süperskalar çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} &G_1^{(h)}c(t,\theta) + \sum_{k=1}^{h-1}\left(\varepsilon'^L\left(A_k\left(t,\theta\right)\right) + s'\left(A_k\left(t,\theta\right)\right)\right) \cdot e_{m+k}(t,\theta) = 0 \\ &\left\langle G_1^{(h)}c(t,\theta), e_{m+j}(t,\theta)\right\rangle + \\ &\left(\varepsilon'^L\left(A_k\left(t,\theta\right)\right) + s'\left(A_k\left(t,\theta\right)\right)\right) \cdot \left(1 + s'\left(\left\langle e_{m+j}(t,\theta), e_{m+j}(t,\theta)\right\rangle\right)\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.95}$$

elde edilir. (4.95) denklemi çift ve tek kısımlara ayrılırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon'^{L}\left\langle G_1^{(h)}c(t,\theta), e_{m+j}(t,\theta)\right\rangle + \varepsilon'^{L}\left(A_j(t,\theta)\right) &= 0 \\ s'\left(\left\langle G_1^{(h)}c(t,\theta), e_{m+j}(t,\theta)\right\rangle\right) + \varepsilon'^{L}\left(\left(A_j(t,\theta)\right)\cdot s'\left(\left\langle e_{m+j}(t,\theta), e_{m+j}(t,\theta)\right\rangle\right)\right) & \\ + s'\left(A_j(t,\theta)\right)\cdot\left(1 + s'\left(\left\langle e_{m+j}(t,\theta), e_{m+j}(t,\theta)\right\rangle\right)\right) &= 0 \end{aligned} \tag{4.96}$$

eşitlikleri bulunur. $G_1c(t,\theta),...,G_1^hc(t,\theta)$ $(h<n)$ lineer bağımsız olduğundan $f_{m+h}(t,\theta)\neq 0$ bulunur.

$$e_{m+h}(t,\theta) = f_{m+h}(t,\theta)\cdot\left(\|f_{m+h}(t,\theta)\|^{S}\right)^{-1} \quad h<n \tag{4.97}$$

denklemini kullanıldığında $\{e_{m+1}(t,\theta),...,e_{m+n-1}(t,\theta)\}$ sistemi süpervektör ikilileri birim ve ortogonal olacak şekilde oluşturulur. Diğer bir deyişle

$$\begin{aligned} f_{m+h}(t,\theta) &= G_1^{(h)}c(t,\theta) + \sum_{k=1}^{h-1}\left(\varepsilon'^{L}\left(A_k(t,\theta)\right) + s'\left(A_k(t,\theta)\right)\right)\cdot e_{m+k}(t,\theta), \;\; h<n \\ e_{m+h}(t,\theta) &= f_{m+h}(t,\theta)\cdot\left(\|f_{m+h}(t,\theta)\|^{S}\right)^{-1}, \quad h<n \end{aligned} \tag{4.98}$$

denklemlerinden $\forall h<n$ için

$$\begin{aligned} G_1^{(h)}c(t,\theta) &= \left(\varepsilon'^{L}\left(\left\langle G_1^{(h)}c(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle\right)\right) - s'\left(A(t,\theta)\right)\cdot e_{m+1}(t,\theta) + ... \\ &+ \left(\varepsilon'^{L}\left(\left\langle G_1^{(h)}c(t,\theta), e_{m+h-1}(t,\theta)\right\rangle\right)\right) - s'\left(A_{h-1}(t,\theta)\right)\cdot e_{m+h-1}(t,\theta) \\ &+ \|f_{m+h}(t,\theta)\|^{S}\cdot e_{m+h}(t,\theta) \end{aligned} \tag{4.99}$$

bağıntısı elde edilir. (4.90) ve (4.99) kullanılırsa $\{e_{m+1}(t,\theta),...,e_{m+h}(t,\theta)\}$ bazı yerine $\left\{G_1c(t,\theta),...,G_1^{(h)}c(t,\theta)\right\}$ $(h<n)$ baz değişikliği yapılırsa lineer dönüşümün matris determinantının çift kısmı bulunur. Bu, $\forall(t,\theta)\in V\subset B_L^{1+1}$ için

$$\varepsilon'^{L}\left(\Delta(t,\theta)\right) = \|f_{m+1}(t,\theta)\|'...\|f_{m+h}(t,\theta)\|' \tag{4.100}$$

şeklinde verilir. Bu yüzden $\forall(t,\theta)\in V\subset B_L^{1+1}$

$$\varepsilon'^{L}\left(\Delta(t,\theta)\right) > 0 \tag{4.101}$$

olur ve $\{e_{m+1}(t,\theta),...,e_{m+h}(t,\theta)\}$ ve $\left\{G_1c(t,\theta),...,G_1^{(h)}c(t,\theta)\right\}$ süpervektör sistemleri aynı doğrultulu ve oluşturulan

$$\begin{aligned} (t,\theta) &\to e_k(t,\theta) \quad \forall k\in\{1,2,...,m\} \\ (t,\theta) &\to e_{m+j}(t,\theta) \quad \forall j\in\{1,2,...,n-1\} \end{aligned}$$

fonksiyonları süperdüzgün olur. $e_{m+n}(t,\theta)$ süpervektörü, $\forall k\in\{1,2,...,m\}$ ve $\forall j\in\{1,2,...,n-1\}$ için

$$\begin{aligned} \langle e_{m+n}(t,\theta), e_k(t,\theta)\rangle &= 0 \\ \langle e_{m+n}(t,\theta), e_{m+j}(t,\theta)\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{4.102}$$

bağıntılarından elde edilir. Böylece (4.90) denkleminden

$$
\begin{array}{rl}
+e_{m+n}^{1}(t,\theta)\cdot e_{1}^{r+1}(t,\theta)+...+e_{m+n}^{r}(t,\theta)\cdot e_{1}^{m}(t,\theta) & \\
-e_{m+n}^{r+1}(t,\theta)\cdot e_{1}^{1}(t,\theta)-...-e_{m+n}^{m}(t,\theta)\cdot e_{1}^{r}(t,\theta) & \\
+e_{m+n}^{m+1}(t,\theta)\cdot e_{1}^{m+1}(t,\theta)+...+e_{m+n}^{m+n}(t,\theta)\cdot e_{1}^{m+n}(t,\theta) & =0 \\
\vdots & \\
+e_{m+n}^{1}(t,\theta)\cdot e_{m+n}^{r+1}(t,\theta)+...+e_{m+n}^{r}(t,\theta)\cdot e_{m+n}^{m}(t,\theta) & \\
-e_{m+n}^{r+1}(t,\theta)\cdot e_{m+n}^{1}(t,\theta)-...-e_{m+n}^{m}(t,\theta)\cdot e_{m+n}^{r}(t,\theta) & \\
+e_{m+n}^{m+1}(t,\theta)\cdot e_{m+n}^{m+1}(t,\theta)+...+e_{m+n}^{m+n}(t,\theta)\cdot e_{m+n}^{m+n}(t,\theta) & =0
\end{array}
\tag{4.103}
$$

denklem sistemi elde edilir. Burada $\forall j \in \{1,2,...,n\}$ için $e_{m+j}^{1}(t,\theta),...,e_{m+j}^{m+n}(t,\theta)$; $e_{m+j}(t,\theta)$ süpervektörlerinin bileşenidir.

$\forall(t,\theta) \in V \subset B_{L}^{1+1}$ için $e_1(t,\theta),...,e_{m-1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta),...,e_{m+n}(t,\theta)$ süpervektörleri lineer bağımsız olduğundan $M(t,\theta)$ matrisi,

$$
\begin{pmatrix}
e_{1}^{r+1} & \cdots & e_{1}^{m} & -e_{1}^{1} & \cdots & -e_{1}^{r} & e_{1}^{m+1} & \cdots & e_{1}^{m+n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e_{m}^{r+1} & \cdots & e_{m}^{m} & -e_{m}^{1} & \cdots & e_{m}^{r} & e_{m}^{m+1} & \cdots & e_{m}^{m+n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e_{m+n-1}^{r+1} & \cdots & e_{m+n-1}^{m} & -e_{m+n-1}^{1} & \cdots & e_{m+n-1}^{r} & e_{m+n-1}^{m+1} & \cdots & e_{m+n-1}^{m+n}
\end{pmatrix}
\tag{4.104}
$$

$m+n-1$ boyutludur. Burada $s \in \{1,2,...,m+n\}$ ve $q \in \{1,...,m,...,m+n\}$ olan e_{q}^{s} anlamına gelir. $q \in \{1,...,m+n\}$ ve $\forall(t,\theta) \in V \subset B_{L}^{1+1}$ için $\Delta_q(t,\theta)$, M matrisinden q. sütun kaldırılarak elde edilen $m+n-1$ dereceden minör olsun. Bu durumda (4.103) denkleminden

$$
e_{m+n}^{q}(t,\theta)=(-1)^{q-1}\cdot v(t,\theta)\cdot\Delta_q(t,\theta) \qquad q \in \{1,...,m+n\}
\tag{4.105}
$$

elde edilir. Burada $v(t,\theta)$,

$$
\|e_{m+n}(t,\theta)\|^{S}=1
\tag{4.106}
$$

eşitliğini sağlamalıdır. *Rank* $(M(t,\theta))=m+n-1$ olduğundan

$$
\varepsilon'^{L}\left(\Delta_q(t,\theta)\right)=\left(\varepsilon'^{L}\left(\Delta_{m+1}(t,\theta)\right)\right)^{2}+...+\left(\varepsilon'^{L}\left(\Delta_{m+n}(t,\theta)\right)\right)^{2}>0
\tag{4.107}
$$

eşitsizliği bulunur. (4.105) ve (4.106) denklemlerinden

$$
v(t,\theta)=\eta\cdot\left(\sqrt{\Delta_q(t,\theta)}\right)^{-1}
\tag{4.108}
$$

elde edilir. Burada $\eta=\pm 1$ dir. Bu sonuç şartlarından $\{e_1(t,\theta),...,e_{m+n}(t,\theta)\}$ çatısı pozitiftir. (4.105) ve (4.108) denklemleri alınırsa

$$
e_{m+n}^{q}(t,\theta)=(-1)^{q-1}\cdot\eta\cdot.\Delta_q(t,\theta)\cdot\left(\sqrt{\Delta_q(t,\theta)}\right)^{-1} \qquad q \in \{1,...,m+n\}
\tag{4.109}
$$

bulunur. Burada (4.109) denklemi

$$\begin{aligned} \|\eta\| &= 1 \\ \varepsilon'^{L}\left(s\det\left(e_q^s(t,\theta)\right)\right)_{1\leq s,q\leq m+n} &> 0 \end{aligned} \tag{4.110}$$

şartlarını sağlar. Bu durumda $q \in \{1,...,m+n\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|e_{m+n}(t,\theta)\|^S &= 1 \\ e_m^q(t,\theta) &= (-1)^{q-1}\cdot\eta\cdot.\Delta_q(t,\theta)\cdot\left(\sqrt{\Delta_q(t,\theta)}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{4.111}$$

denklemleri alınırsa

$$\begin{aligned} (t,\theta) &\to e_q^s(t,\theta) \quad \forall s \in \{1,2,...,m+n\} \\ (t,\theta) &\to e_{m+n}(t,\theta) \end{aligned} \tag{4.112}$$

fonksiyonları süperdüzgün olur. Bu yapıdan $\forall k \in \{1,2,...,n\}$, $\forall j \in \{1,2,...,m\}$ için

$$\begin{aligned} \left\langle e_{j_1}(t,\theta), e_{m+j_2}(t,\theta)\right\rangle &= 0 \\ a_{m+k \quad j}(t,\theta) &= \left\langle G_1 e_{m+k}(t,\theta), e_j(t,\theta)\right\rangle, \end{aligned} \tag{4.113}$$

ve Frenet çatısının tekliği sonucuna ulaşılır. $k \in \{1,2,...,n\}$ indisini sabitleyerek $\{e_1(t,\theta),...,e_{m+n}(t,\theta)\}$ çatısındaki

$$G_1 e_{m+k}(t,\theta) = \sum_{h=1}^{m} a_{m+k \quad h}(t,\theta)\cdot e_h(t,\theta) + \sum_{j=1}^{n} a_{m+k \quad j}(t,\theta)\cdot e_{m+j}(t,\theta) \tag{4.114}$$

olur. (4.114) bağıntıları ve $e_{m+j_1}(t,\theta)$ $j_1 \in \{1,2,...,n\}$ arasında süperskalar çarpım uygulandığında

$$a_{(m+k)\ (m+j_1)}(t,\theta) = \left\langle G_1 e_{m+k}(t,\theta), e_{m+j_1}(t,\theta)\right\rangle \tag{4.115}$$

elde edilir. $\forall j_1, j_2 \in \{1,2,...,n\}$ ve $\forall (t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$

$$\left\langle e_{m+j}(t,\theta), e_{m+j_1}(t,\theta)\right\rangle = 0$$

olduğundan

$$a_{(m+k)\ (m+j_1)}(t,\theta) = \left\langle G_1 e_{m+k}(t,\theta), e_{m+j_1}(t,\theta)\right\rangle \quad \forall k,j \in \{1,2,...,n\} \tag{4.116}$$

elde edilir. (4.71) bağıntıları ve $\forall l \in \{1,2,...,n\}$ için $e_j(t,\theta)$ arasında süperskalar çarpım uygulanıp özellikleri kullanıldığında

$$a_{(m+k)\ j}(t,\theta) = \left\langle G_1 e_{m+k}(t,\theta), e_j(t,\theta)\right\rangle \quad \forall k \in \{1,2,...,n\}, \forall j \in \{1,2,...,r\} \tag{4.117}$$

bulunur. Bu durumda

$$\langle e_k(t,\theta), e_{r+h}(t,\theta)\rangle = \delta_{kh} \qquad \forall k,h \in \{1,2,...,r\} \tag{4.118}$$

bağıntısı, G_1 yardımıyla türevlendiğinde $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ ve $\forall k,h \in \{1,2,...,m\}$ için,

$$\langle G_1 e_k(t,\theta), e_{r+h}(t,\theta)\rangle + \langle e_k(t,\theta), G_1 e_{r+h}(t,\theta)\rangle = 0 \tag{4.119}$$

elde edilir. (4.119) denklemi alındığında

$$a_{k\ (r+h)}(t,\theta) + a_{(r+h)\ k}(t,\theta) = 0 \tag{4.120}$$

bulunur. $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için $\{e_{m+1}(t,\theta), ..., e_{m+k}(t,\theta)\}$ Frenet çatısı,

$$\begin{aligned} G_1^k c(t,\theta) &\in Sp\left(e_{m+1}(t,\theta), ..., e_{m+k}(t,\theta)\right) \qquad \forall k \in \{1,2,...,n-1\} \\ e_{m+k}(t,\theta) &\in Sp\left(G_1 c(t,\theta), ..., G_1^{(k)} c(t,\theta)\right) \quad \forall k \in \{1,2,...,n-1\} \end{aligned} \tag{4.121}$$

olur. (4.121) denklemlerinden $\forall k \in \{1,2,...,n-1\}$ olmak üzere

$$G_1 e_{m+k}(t,\theta) \in Sp\left(G_1 c(t,\theta), ..., G_1^{(k)} c(t,\theta), G_1^{(k+1)} c(t,\theta)\right) \tag{4.122}$$

denklemi elde edilir. (4.121) ve (4.122) denklemlerinden

$$G_1 e_k(t,\theta) \in Sp\left(e_1(t,\theta), ..., e_{k+1}(t,\theta)\right) \qquad \forall k \in \{1,2,...,m-1\} \tag{4.123}$$

bulunur. $\forall k \in \{1,2,...,m\}$, $\forall j \in \{1,2,...,n\}$ için (4.123) denkleminden

$$G_1 e_k(t,\theta) = \sum_{h=1}^{m} a_{kh}(t,\theta) \cdot e_h(t,\theta) + \sum_{j=1}^{n} a_{k\ \ m+j}(t,\theta) \cdot e_{m+j}(t,\theta) \tag{4.124}$$

eşitliği yazılır. $j > k+1$ ve $a_{kh}(t,\theta) = 0$ ise $a_{kh}(t,\theta)$ katsayıları sıfırdır. Böylece $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ ve $\forall k \in \{1,2,...,m\}$

$$G_1 e_k(t,\theta) = \sum_{h=1}^{m} a_{k\ \ m+j}(t,\theta) \cdot e_{m+j}(t,\theta) \tag{4.125}$$

formülü elde edilir. $j > k+1$ ve $\forall k,h \in \{1,2,...,n\}$ ise $a_{k\ \ m+j}(t,\theta) = 0$ olur.

$\{e_1(t,\theta), ..., e_{m+n}(t,\theta)\}$ çatı yapısından

$$\begin{aligned} G_1^{(j-1)} G_2 c(t,\theta) &\in Sp\left(e_j(t,\theta)\right) \\ e_j(t,\theta) &\in Sp\left(G_1^{(j-1)} G_2 c(t,\theta)\right) \end{aligned} \tag{4.126}$$

denklemi yazılır. $\forall j \in \{1,2,...,r\}$ ve $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için

$$G_1 e_j(t,\theta) \in Sp\left(G_1^{(j)} G_2 c(t,\theta)\right) \tag{4.127}$$

var olduğundan

$$G_1 e_j(t,\theta) \in Sp\left(e_{j+1}(t,\theta)\right) \tag{4.128}$$

bulunur. (4.124) denklemi kullanıldığında

$$G_1 e_j(t,\theta) = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(t,\theta)\cdot e_k(t,\theta) + \sum_{j=1}^{n} a_{j\ (m+j)}(t,\theta)\cdot e_{m+j}(t,\theta) \tag{4.129}$$

denklemi yazılır. Bu durumda $j_1 \in \{1,2,...,r\}$ sabit indisi alınırsa

$$G_1 e_{j_1}(t,\theta) = \sum_{h=1}^{m} a_{(m+j_1)\ h}(t,\theta)\cdot e_h(t,\theta) + \sum_{j=1}^{n} a_{(m+j_1)\ (m+j)}(t,\theta)\cdot e_{m+j}(t,\theta) \tag{4.130}$$

bulunur. Aynı şekilde $e_{m+k}(t,\theta)$ ile süperskalar çarpım yapıldığında, $\forall k \in \{1,2,...,n\}$ ve $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için

$$a_{j_1\ (m+h)}(t) = \left\langle G_1 e_{j_1}(t,\theta), e_{m+k}(t,\theta)\right\rangle \tag{4.131}$$

denklemi bulunur.

Sonuç 4.1.3. Eğriler için

$$\begin{aligned} G_1 e_k(t,\theta) &= \sum_{h=1}^{m} a_{kh}(t,\theta)\cdot e_h(t,\theta) \\ G_1 e_{m+j}(t,\theta) &= \sum_{h=1}^{m} a_{j\quad m+l}(t,\theta)\cdot e_{m+l}(t,\theta) \end{aligned} \tag{4.132}$$

bağıntıları Frenet formüllerine genişletilir.

Sonuç 4.1.4 Frenet formüllerinin eğrilikleri matris formunda

$$A = \left(a_{sq}\right)_{1\le s,q\le m+n} = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix} \tag{4.133}$$

şeklinde yazılır. Burada matrisler

$$A_{1=} \begin{pmatrix} a_{11} & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & a_{rr} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & -a_{r+1\quad r+1} & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & -a_{mm} \end{pmatrix}$$

$$A_{2=} \begin{pmatrix} 0 & a_{m+1\quad m+2} & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{m+1\quad m+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1\quad n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1\quad n} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

eşitlikleridir.

4.2 Süpereğrilerin Frenet Çatı Uygulaması

Bu kısımda bazı süpereğri örnekleri için Frenet çatısı hesaplanmıştır.

Örnek 4.2.1. B_L^{1+1} $(2,2)$-boyutlu total süper-Öklid uzayı, $V \subset B_L^{1+1}$ açık ve

$$\begin{array}{llll} c: & V \subset B_L^{1+1} & \to & B_L^{2,2} \\ & (t,\theta) & \mapsto & c(t,\theta) = \left(t^2, \theta\cdot\beta^2, \theta + 2\beta^1 \cdot t, \theta.t^2\right) \end{array} \tag{4.134}$$

süperdüzgün süpereğrisi için Frenet çatısı oluşturulur.

$c(t,\theta)$ süpereğrisi için

$$c^1(t,\theta) = t^2,\ c^2(t,\theta) = \theta\cdot\beta^2,\ c^3(t,\theta) = \theta + 2\beta^1,\ c^4(t,\theta) = \theta.t^2$$

bileşen fonksiyonları süperdüzgün olduğundan c süpereğrisi de süperdüzgün olur. B_L^{1+1} $(2,2)$-boyutlu total süper-Öklid uzayı için $\left\{G_1 c(t,\theta), G_1^{(2)} c(t,\theta)\right\}$ sistemmini çiftler ve $\{G_2 c(t,\theta), G_1 G_2 c(t,\theta)\}$ sistemini tekler olarak ele alınsın.

$$\begin{aligned} G_1 c(t,\theta) &= \left(2t, 0, 2\beta^1, 2\theta\cdot t\right) \\ G_2 c(t,\theta) &= \left(0, \beta^2, 1, t^2\right) \\ G_1 G_2 c(t,\theta) &= (0,0,,2t) \end{aligned} \tag{4.135}$$

şeklinde sonuçlar bulunur. Bu durumda $\forall (t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için, (4.8) ve (4.9) denklemleri kullanılırsa $e_3(t,\theta), e_4(t,\theta)$ Frenet süpervektörleri,

$$Sp\left(G_2 c(t,\theta), G_1 G_2 c(t,\theta)\right) = Sp\left(e_3(t,\theta), e_4(t,\theta)\right)$$

eşitliğini sağlar. (4.4) denklem koşulları

$$\varepsilon^L\left(\langle G_2 c(t,\theta), G_1 G_2 c(t,\theta)\rangle\right) = \varepsilon^L\left(0\cdot 0 + \beta^2\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot t - t^2\cdot 0\right) = 2t > 0 \tag{4.136}$$

$$\varepsilon^L\left(\langle G_2 c(t,\theta), G_2 c(t,\theta)\rangle\right) = \varepsilon^L\left(0\cdot 0 + \beta^2\cdot\beta^2 + 1\cdot t^2 - t^2\cdot 1\right) = 0 \tag{4.137}$$

$$\varepsilon^L\left(\langle G_1 G_2 c(t,\theta), G_1 G_2 c(t,\theta)\rangle\right) = \varepsilon^L\left(0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 2t - 2t\cdot 0\right) = 0 \tag{4.138}$$

şeklindeki gibi sağladığından

$$\lambda_1(t,\theta) = \langle G_2c(t,\theta), G_1G_2c(t,\theta)\rangle = 2t \tag{4.139}$$

ve

$$\begin{aligned} e_3(t,\theta) &= (\lambda_1(t,\theta))^{-1} \cdot G_2c(t,\theta) \\ &= (2t)^{-1} \cdot \left(0, \beta^2, 1, t^2\right) \\ &= \left(0, \beta^2 \cdot (2t)^{-1}, (2t)^{-1}, 2^{-1}t\right) \end{aligned} \tag{4.140}$$

elde edilir. $e_4(t,\theta)$ için ise

$$\begin{aligned} e_4(t,\theta) &= G_1G_2c(t,\theta) \\ &= (0,0,0,2t) \end{aligned} \tag{4.141}$$

olarak bulunur. (4.135) denkleminden $\{G_1c(t,\theta), G_2c(t,\theta), G_1G_2c(t,\theta)\}$ lineer bağımsızdır. $\{e_1(t,\theta), e_2(t,\theta), e_3(t,\theta), e_4(t,\theta)\}$ süpervektör sistemleri, c süpereğrisinin Frenet çatısı olsun. $e_1(t,\theta)$ süpervektörünü bulmak için $f_1(t,\theta) = G_1c(t,\theta)$ alınarak (4.17) denklemi kullanılırsa. $\|f_1(t,\theta)\|^S = \sqrt{\varepsilon^L\left(\langle G_1c(t,\theta), G_1c(t,\theta)\rangle\right)} = \sqrt{4t^2} = 2t$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} e_1(t,\theta) &= (2t)^{-1} \cdot \left(2t, 0, 2\beta^1, 2\theta \cdot t\right) \\ &= \left(1, 0, 2\beta^1 \cdot (2t)^{-1}, \theta\right) \end{aligned} \tag{4.142}$$

olarak bulunur. $e_2(t,\theta)$ çıkartılarak elde edilen $M(t,\theta)$ matrisi,

$$\begin{aligned} M(t,\theta) &= \begin{bmatrix} e_1^1(t,\theta) & e_1^2(t,\theta) & e_1^4(t,\theta) & \text{-}e_1^3(t,\theta) \\ e_3^1(t,\theta) & e_2^2(t,\theta) & e_2^4(t,\theta) & \text{-}e_2^3(t,\theta) \\ e_4^1(t,\theta) & e_2^2(t,\theta) & e_2^4(t,\theta) & \text{-}e_2^3(t,\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta & -2\beta^1, 2\theta \cdot t \\ 0 & \beta^2 \cdot (2t)^{-1} & (2t)^{-1} & 2^{-1}t \\ 0 & 0 & 2t & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.143}$$

şeklinde ifade edilir. $\triangle_k(t,\theta)$, k. sütun çıkarılarak bulunan matrisin determinantı olarak tanımlanır. Buna göre $e_2^1(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_2^1(t,\theta) = (-1)^0 \cdot \vartheta \cdot \triangle_1(t,\theta) = -2\beta^1 \cdot (2t)^{-1} \cdot \beta^2 \tag{4.144}$$

bulunur. Burada $\triangle_1(t,\theta)$,

$$\begin{aligned} \triangle_1(t,\theta) &= \begin{vmatrix} 0 & \theta & -2\beta^1 \cdot (2t)^{-1} \\ \beta^2 & 2^{-1} & -(2t)^{-1} \\ 0 & 2t & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\beta^2 \cdot \beta^1 \cdot (2t)^{-1} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $e_2^2(t,\theta)$ bileşeni için

$$\begin{aligned} e_2^2(t,\theta) &= (-1)^1 \cdot \vartheta \cdot \triangle_2(t,\theta) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{4.145}$$

bulunur. Burada $\triangle_2(t,\theta)$,

$$\triangle_2(t,\theta) = \begin{vmatrix} 1 & \theta & -2\beta^1 \cdot (2t)^{-1} \\ 0 & 2^{-1}t & -(2t)^{-1} \\ 0 & 2t & 0 \end{vmatrix} = 1$$

elde edilir. $e_2^3(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_2^3(t,\theta) = (-1)^2 \cdot \vartheta \cdot \triangle_3(t,\theta) = 0 \tag{4.146}$$

bulunur. Burada $\triangle_3(t,\theta)$,

$$\triangle_3(t,\theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2\beta^1 \cdot (2t)^{-1} \\ 0 & \beta^2 \cdot (2t)^{-1} & -(2t)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir. $e_2^4(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_2^4(t,\theta) = (-1)^3 \cdot \vartheta \cdot \triangle_4(t,\theta) = -\beta^2 \tag{4.147}$$

bulunur. Burada $\triangle_4(t,\theta)$,

$$\triangle_4(t,\theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & \beta^2 \cdot (2t)^{-1} & 2^{-1}t \\ 0 & 0 & 2t \end{vmatrix} = \beta^2$$

olur. Böylece

$$e_2(t,\theta) = \left(-\beta^2 \cdot \beta^1 \cdot (2t)^{-1}, 1, 0, -\beta^2\right) \tag{4.148}$$

olarak bulunur. Son olarak, süpereğrilikler

$$a_{12}(t,\theta) = \langle G_1 e_1\,(t,\theta), e_2(t,\theta)\rangle = \beta^1\beta^2 \cdot t^{-2} \tag{4.149}$$

ve

$$a_{33}(t,\theta) = \langle G_1 e_3\,(t,\theta), e_4(t,\theta)\rangle = -t^{-1} \tag{4.150}$$

olarak bulunur. Böylece

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta^1\beta^2 \cdot t^{-2} & 0 & 0 \\ -\beta^1\beta^2 \cdot t^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^{-1} \end{pmatrix} \tag{4.151}$$

şeklinde gösterilir (Cristea, 2005).

Örnek 4.2.2. $\left(B_L^{2+2}\right)_1$ $(2,2)$-boyutlu total süper-Öklid uzayı, $V \subset B_L^{1+1}$ açık ve

$$\begin{array}{rlcl} c: & V \subset B_L^{1+1} & \to & \left(B_L^{2,2}\right)_1 \\ & (t,\theta) & \mapsto & c(t,\theta) = \left(\theta + 2\beta^1 \cdot t, \theta.t^2, t^2, \theta \cdot \beta^2\right) \end{array} \tag{4.152}$$

süperdüzgün süpereğrisi için Frenet çatısı oluşturulur.

$c(t,\theta)$ süpereğrisi için

$$c^1(t,\theta) = \theta + 2\beta,\ c^2(t,\theta) = \theta.t^2,\ c^3(t,\theta) = t^2,\ c^4(t,\theta) = \theta \cdot \beta^2 \tag{4.153}$$

bileşen fonksiyonları süperdüzgün olduğundan c süpereğrisi de süperdüzgün olur. B_L^{1+1} $(2,2)$-boyutlu total süper-Öklid uzayı için $\{G_2c(t,\theta), G_1G_2c(t,\theta)\}$ sistemini tekler ve $\left\{G_1c(t,\theta), G_1^{(2)}c(t,\theta)\right\}$ sistemini çiftler olarak ele alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} G_1c(t,\theta) &= \left(2t, 0, 2\beta^1, 2\theta \cdot t\right) \\ G_2c(t,\theta) &= \left(0, \beta^2, 1, t^2\right) \\ G_1G_2c(t,\theta) &= (0,0,0,2t) \end{aligned} \tag{4.154}$$

şeklinde sonuçlar bulunur. Bu durumda $\forall (t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için, (4.8) ve (4.9) denklemleri kullanılırsa $e_1(t,\theta), e_2(t,\theta)$ Frenet süpervektörleri,

$$Sp\left(G_2c(t,\theta), G_1G_2c(t,\theta)\right) = Sp\left(e_1(t,\theta), e_2(t,\theta)\right) \tag{4.155}$$

eşitliğini sağlar.

$$\varepsilon^L\left(\langle G_2c(t,\theta), G_1G_2c(t,\theta)\rangle\right) = 2t > 0 \tag{4.156}$$

$$\varepsilon^L\left(\langle G_2c(t,\theta), G_2c(t,\theta)\rangle\right) = 0 \tag{4.157}$$

$$\varepsilon^L\left(\langle G_1G_2c(t,\theta), G_1G_2c(t,\theta)\rangle\right) = 0 \tag{4.158}$$

denklemler, koşulları sağladığından

$$\lambda_1(t,\theta) = \langle G_2c(t,\theta), G_1G_2c(t,\theta)\rangle = 2t \tag{4.159}$$

ve

$$\begin{aligned} e_1(t,\theta) &= \left(\lambda_1(t,\theta)\right)^{-1} \cdot G_2c(t,\theta) \\ &= (2t)^{-1} \cdot \left(1, t^2, 0, \beta^2\right) \\ &= \left((2t)^{-1}, 2^{-1}t, 0, \beta^2 \cdot (2t)^{-1}\right) \end{aligned} \tag{4.160}$$

elde edilir. $e_2(t,\theta)$ için ise

$$e_2(t,\theta) = G_1G_2c(t,\theta) = (0,2t,0,0) \tag{4.161}$$

olarak bulunur. (4.154) denkleminden $\{G_1c(t,\theta), G_2c(t,\theta), G_1G_2c(t,\theta)\}$ lineer bağımsızdır. $\{e_1(t,\theta), e_2(t,\theta), e_3(t,\theta), e_4(t,\theta)\}$ süpervektör sistemleri, c süpereğrisinin Frenet çatısı olur. $e_3(t,\theta)$ süpervektörünü bulmak için $f_3(t,\theta) = G_1c(t,\theta)$ alınarak (4.81) denklemi kullanılırsa $\|f_3(t,\theta)\|^s = \sqrt{\varepsilon'^L(\langle G_1c(t,\theta), G_1c(t,\theta)\rangle)} = \sqrt{4t^2} = 2t$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} e_3(t,\theta) &= (2t)^{-1}\cdot\left(2\beta^1, 2\theta\cdot t, 2t, 0\right) \\ &= \left(2\beta^1\cdot(2t)^{-1}, \theta, 1, 0\right) \end{aligned} \tag{4.162}$$

olarak bulunur. $e_4(t,\theta)$ çıkartılarak elde edilen $M(t,\theta)$ matrisi,

$$\begin{aligned} M(t,\theta) &= \begin{bmatrix} e_1^2(t,\theta) & \text{-}e_1^1(t,\theta) & e_1^3(t,\theta) & e_1^4(t,\theta) \\ e_3^2(t,\theta) & \text{-}e_2^1(t,\theta) & e_2^3(t,\theta) & e_2^4(t,\theta) \\ e_4^2(t,\theta) & \text{-}e_2^1(t,\theta) & e_2^3(t,\theta) & e_2^4(t,\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \theta & -2\beta^1, 2\theta\cdot t & 1 & 0 \\ (2t)^{-1} & 2^{-1}t & 0 & \beta^2\cdot(2t)^{-1} \\ 2t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.163}$$

şeklinde ifade edilir. $\triangle_k(t,\theta)$, k. sütun çıkarılarak bulunan matrisin determinantı olarak tanımlanır. Buna göre $e_4^1(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_4^1(t,\theta) = (-1)^2\cdot\vartheta\cdot\triangle_2(t,\theta) = 0 \tag{4.164}$$

bulunur. Burada $\triangle_1(t,\theta)$,

$$\triangle_1(t,\theta) = 0$$

olur. Benzer şekilde $e_4^2(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_4^2(t,\theta) = (-1)^1\cdot\vartheta\cdot\triangle_3(t,\theta) = -\beta^2 \tag{4.165}$$

bulunur. Burada $\triangle_2(t,\theta)$,

$$\triangle_2(t,\theta) = \beta^2$$

elde edilir. $e_2^3(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_4^3(t,\theta) = (-1)^3\cdot\vartheta\cdot\triangle_1(t,\theta) = -2\beta^1\cdot(2t)^{-1}\cdot\beta^2 \tag{4.166}$$

bulunur. Burada $\triangle_3(t,\theta)$,

$$\triangle_3(t,\theta) = -\beta^2\cdot\beta^1\cdot(2t)^{-1}$$

elde edilir. $e_4^4(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_4^4(t,\theta) = (-1)^4\cdot\vartheta\cdot\triangle_2(t,\theta) = 1$$

bulunur. Burada $\triangle_4(t,\theta)$,

$$\triangle_4(t,\theta)=1$$

olur. Böylece,

$$e_4(t,\theta)=\left(-\beta^2\cdot\beta^1\cdot(2t)^{-1},1,0,-\beta^2\right) \tag{4.167}$$

olarak bulunur. Son olarak, süpereğrilikler

$$a_{34}(t,\theta)=\langle G_1e_1\,(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle=\beta^1\beta^2\cdot t^{-2} \tag{4.168}$$

ve

$$a_{11}(t,\theta)=\langle G_1e_3\,(t,\theta),e_4(t,\theta)\rangle=-t^{-1} \tag{4.169}$$

olarak bulunur. Böylece

$$A=\begin{pmatrix} -t^{-1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -t^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \beta^1\beta^2\cdot t^{-2}\\ 0 & 0 & -\beta^1\beta^2\cdot t^{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 4.2.3. B_L^{1+1} $(2,2)$-boyutlu total süper-Öklid uzayı, $V\subset B_L^{1+1}$ açık ve

$$\begin{array}{llll} c^*: & V\subset B_L^{1,1} & \to & B_L^{2,2}\\ & (t,\theta) & \mapsto & c^*(t,\theta)= \left(t,\theta\cdot\beta^3,3\beta^1t^2+\theta,\theta.t\right) \end{array} \tag{4.170}$$

süperdüzgün süpereğrisi için Frenet çatısı oluşturulur.

$c^*(t,\theta)$ süpereğrisi için

$$c^{*1}(t,\theta)=t,\ c^{*2}(t,\theta)=\theta\cdot\beta^3,\ c^{*3}(t,\theta)=3\beta^1\cdot t+\theta,\ c^{*4}(t,\theta)=\theta.t$$

bileşen fonksiyonları süperdüzgün olduğundan c süpereğrisi de süperdüzgün olur. B_L^{1+1} $(2,2)$-boyutlu total süper-Öklid uzayı için $\left\{G_1c^*(t,\theta),G_1^{(2)}c^*(t,\theta)\right\}$ sistemini çiftler ve $\{G_2c^*(t,\theta),G_1G_2c^*(t,\theta)\}$ sistemini tekler olarak ele alınsın.

$$\begin{aligned} G_1c^*(t,\theta) &= \left(1,0,6\beta^1t,\theta\right)\\ G_2c^*(t,\theta) &= \left(0,\beta^3,1,t\right)\\ G_1G_2c^*(t,\theta) &= (0,0,0,1)\,. \end{aligned} \tag{4.171}$$

şeklinde sonuçlar bulunur. Bu durumda $\forall(t,\theta)\in V\subset B_L^{1+1}$ için, (4.8) ve (4.9) denklemlerini kullanılırsa $e_3^*(t,\theta),e_4^*(t,\theta)$ Frenet süpervektörleri,

$$Sp\left(G_2c^*(t,\theta),G_1G_2c^*(t,\theta)\right)=Sp\left(e_3^*(t,\theta),e_4^*(t,\theta)\right)$$

eşitliğini sağlar. (4.4) denklem koşulları

$$\varepsilon^{(L)}\left(\langle G_2c^*(t,\theta), G_1G_2c^*(t,\theta)\rangle\right) = 1 > 0 \tag{4.172}$$

$$\varepsilon^{(L)}\left(\langle G_2c^*(t,\theta), G_2c^*(t,\theta)\rangle\right) = 0 \tag{4.173}$$

$$\varepsilon^{(L)}\left(\langle G_1G_2c^*(t,\theta), G_1G_2c^*(t,\theta)\rangle\right) = 0 \tag{4.174}$$

şeklindeki gibi sağladığından

$$\lambda_1(t,\theta) = \langle G_2c^*(t,\theta), G_1G_2c^*(t,\theta)\rangle = 1 \tag{4.175}$$

ve

$$e_3^*(t,\theta) = (\lambda_1(t,\theta))^{-1}\cdot G_2c^*(t,\theta) = \left(0,\beta^3,1,t\right) \tag{4.176}$$

denklemleri elde edilir. $e_4^*(t,\theta)$ için ise

$$e_4^*(t,\theta) = G_1G_2c^*(t,\theta) = (0,0,0,1) \tag{4.177}$$

olarak bulunur. (4.171) denkleminden $\{G_1c^*(t,\theta), G_2c^*(t,\theta), G_1G_2c^*(t,\theta)\}$ lineer bağımsızdır. $\left\{e_1^*(t,\theta), e_2^*(t,\theta), e_3^*(t,\theta), e_4^*(t,\theta)\right\}$ süpervektör sistemleri, c süpereğrisinin Frenet çatısı olsun. $e_1^*(t,\theta)$ süpervektörünü bulmak için $f_1(t,\theta) = G_1c^*(t,\theta)$ alınarak (4.17) denklemi kullanılırsa. $\|f_1(t,\theta)\|^S = \sqrt{\varepsilon^L\left(\langle G_1c^*(t,\theta), G_1c^*(t,\theta)\rangle\right)} = 1$ elde edilir. Bu durumda

$$e_1^*(t,\theta) = \left(1,0,6\beta^1 t,\theta\right) \tag{4.178}$$

olarak bulunur. $e_2^*(t,\theta)$ çıkartılarak elde edilen $M(t,\theta)$ matrisi,

$$\begin{aligned} M(t,\theta) &= \begin{bmatrix} e_1^{*1}(t,\theta) & e_1^{*2}(t,\theta) & e_1^{*4}(t,\theta) & \text{-}e_1^{*3}(t,\theta) \\ e_3^{*1}(t,\theta) & e_2^{*2}(t,\theta) & e_2^{*4}(t,\theta) & \text{-}e_2^{*3}(t,\theta) \\ e_4^{*1}(t,\theta) & e_2^{*2}(t,\theta) & e_2^{*4}(t,\theta) & \text{-}e_2^{*3}(t,\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta & -6\beta^1\cdot t \\ 0 & \beta^3 & t & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.179}$$

şeklinde ifade edilir. $\triangle_k(t,\theta)$, k. sütun çıkarılarak bulunan matrisin determinantı olarak tanımlanır. Buna göre $e_2^{*1}(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_2^{*1}(t,\theta) = (-1)^0\cdot\vartheta\cdot\triangle_1(t,\theta) = -6\beta^3\cdot\beta^1\cdot t \tag{4.180}$$

bulunur. Burada $\triangle_1(t,\theta)$,

$$\triangle_1(t,\theta) = \begin{vmatrix} 0 & \theta & -6\beta^1\cdot t \\ \beta^3 & t & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6\beta^3\cdot\beta^1\cdot t$$

olur. Benzer şekilde $e_2^{*2}(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_2^{*2}(t,\theta) = (-1)^1 \cdot \vartheta \cdot \triangle_2(t,\theta) = -1 \tag{4.181}$$

bulunur. Burada $\triangle_2(t,\theta)$,

$$\triangle_2(t,\theta) = \begin{vmatrix} 1 & \theta & -6\beta^1 \cdot t \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

elde edilir. $e_2^{*3}(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_2^{*3}(t,\theta) = (-1)^2 \cdot \vartheta \cdot \triangle_3(t,\theta) = 0 \tag{4.182}$$

bulunur. Burada $\triangle_3(t,\theta)$,

$$\triangle_3(t,\theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -6\beta^1 \cdot t \\ 0 & \beta^3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir. $e_2^{*4}(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_2^{*4}(t,\theta) = (-1)^3 \cdot \vartheta \cdot \triangle_4(t,\theta) = -\beta^3 \tag{4.183}$$

bulunur. Burada $\triangle_4(t,\theta)$,

$$\triangle_4(t,\theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & \beta^3 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \beta^3$$

olur. Böylece

$$e_2^{*}(t,\theta) = \left(-6\beta^3 \cdot \beta^1 \cdot t, -1, 0, -\beta^3\right) \tag{4.184}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.2.4. $\left(B_L^{2+2}\right)_1$ $(2,2)$-boyutlu total süper-Öklid uzayı, $V \subset B_L^{1+1}$ açık ve

$$\begin{array}{llll} c^* : & V \subset B_L^{1,1} & \to & B_L^{2,2} \\ & (t,\theta) & \mapsto & c^*(t,\theta) = \left(3\beta^1 t^2 + \theta, \theta.t, t, \theta \cdot \beta^3\right) \end{array} \tag{4.185}$$

süperdüzgün süpereğrisi için Frenet çatısı oluşturulur.

$c^*(t,\theta)$ süpereğrisi için

$$c^{*1}(t,\theta) = 3\beta^1 \cdot t^2 + \theta,\ c^{*2}(t,\theta) = \theta.t,\ c^{*3}(t,\theta) = t,\ c^{*4}(t,\theta) = \theta \cdot \beta^3$$

bileşen fonksiyonları süperdüzgün olduğundan c süpereğrisi de süperdüzgün olur. B_L^{1+1} $(2,2)$-boyutlu total süper-Öklid uzayı için $\{G_2 c^*(t,\theta), G_1 G_2 c^*(t,\theta)\}$ sistemini tekler ve

$\left\{G_1c^*(t,\theta), G_1^{(2)}c^*(t,\theta)\right\}$ sistemini çiftler olarak ele alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} G_1c^*(t,\theta) &= \left(6\beta^1 t, \theta, 1, 0\right) \\ G_2c^*(t,\theta) &= \left(1, t, 0, \beta^3\right) \\ G_1G_2c^*(t,\theta) &= (0,1,0,0)\,. \end{aligned} \tag{4.186}$$

sonuçları bulunur. Bu durumda $\forall(t,\theta) \in V \subset B_L^{1+1}$ için, (4.8) ve (4.9) denklemlerini kullanılırsa $e_1^*(t,\theta), e_2^*(t,\theta)$ Frenet süpervektörleri,

$$Sp\,(G_2c^*(t,\theta), G_1G_2c^*(t,\theta)) = Sp\,(e_1^*(t,\theta), e_2^*(t,\theta))$$

eşitliğini sağlar.

$$\varepsilon^{(L)}\left(\langle G_2c^*(t,\theta), G_1G_2c^*(t,\theta)\rangle\right) = 1 > 0 \tag{4.187}$$

$$\varepsilon^{(L)}\left(\langle G_2c^*(t,\theta), G_2c^*(t,\theta)\rangle\right) = 0 \tag{4.188}$$

$$\varepsilon^{(L)}\left(\langle G_1G_2c^*(t,\theta), G_1G_2c^*(t,\theta)\rangle\right) = 0 \tag{4.189}$$

denklemleri koşulları sağladığından

$$\lambda_1(t,\theta) = \langle G_2c^*(t,\theta), G_1G_2c^*(t,\theta)\rangle = 1 \tag{4.190}$$

ve

$$e_1^*(t,\theta) = (\lambda_1(t,\theta))^{-1} \cdot G_2c^*(t,\theta) = \left(1, t, 0, \beta^3\right) \tag{4.191}$$

elde edilir. $e_2^*(t,\theta)$ için ise

$$\begin{aligned} e_2^*(t,\theta) &= G_1G_2c^*(t,\theta) \\ &= (0,1,0,0) \end{aligned} \tag{4.192}$$

olarak bulunur. (4.154) denkleminden $\{G_1c^*(t,\theta), G_2c^*(t,\theta), G_1G_2c^*(t,\theta)\}$ lineer bağımsızdır. $\left\{e_1^*(t,\theta), e_2^*(t,\theta), e_3^*(t,\theta), e_4^*(t,\theta)\right\}$ süpervektör sistemleri, c^* süpereğrisinin Frenet çatısı olur. $e_3^*(t,\theta)$ süpervektörünü bulmak için $f_3(t,\theta) = G_1c^*(t,\theta)$ alınarak (4.81) denklemi kullanılırsa

$$e_3^*(t,\theta) = \left(1, 0, 6\beta^1 t, \theta\right) \tag{4.193}$$

süpervektörü bulunur. $e_4^*(t,\theta)$ çıkartılarak elde edilen $M(t,\theta)$ matrisi,

$$\begin{aligned} M(t,\theta) &= \begin{bmatrix} e_1^{*2}(t,\theta) & \text{-}e_1^{*1}(t,\theta) & e_1^{*3}(t,\theta) & e_1^{*4}(t,\theta) \\ e_3^{*2}(t,\theta) & \text{-}e_2^{*1}(t,\theta) & e_2^{*3}(t,\theta) & e_2^{*4}(t,\theta) \\ e_4^{*2}(t,\theta) & \text{-}e_2^{*1}(t,\theta) & e_2^{*3}(t,\theta) & e_2^{*4}(t,\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \theta & -6\beta^1 \cdot t & 1 & 0 \\ t & -1 & 0 & \beta^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.194}$$

şeklinde ifade edilir. $\triangle_k(t,\theta)$, k. sütun çıkarılarak bulunan matrisin determinantı olarak tanımlanır. Buna göre $e_4^{*1}(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_4^{*1}(t,\theta) = (-1)^0 \cdot \vartheta \cdot \triangle_2(t,\theta) = 0 \tag{4.195}$$

bulunur. Burada $\triangle_1(t,\theta)$,

$$\triangle_1(t,\theta) = 0$$

olur. Benzer şekilde $e_4^{*2}(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_4^{*2}(t,\theta) = (-1)^1 \cdot \vartheta \cdot \triangle_3(t,\theta) = -\beta^3 \tag{4.196}$$

bulunur. Burada $\triangle_2(t,\theta)$,

$$\triangle_2(t,\theta) = \beta^3$$

elde edilir. $e_2^{*3}(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_4^{*3}(t,\theta) = (-1)^2 \cdot \vartheta \cdot \triangle_1(t,\theta) = -6\beta^3 \cdot \beta^1 \cdot t \tag{4.197}$$

bulunur. Burada $\triangle_3(t,\theta)$,

$$\triangle_3(t,\theta) = -6\beta^3 \cdot \beta^1 \cdot t$$

elde edilir. $e_4^{*4}(t,\theta)$ bileşeni için

$$e_4^{*3}(t,\theta) = (-1)^3 \cdot \vartheta \cdot \triangle_1(t,\theta) = -1 \tag{4.198}$$

bulunur. Burada $\triangle_4(t,\theta)$,

$$\triangle_4(t,\theta) = 1$$

olur. Böylece

$$e_4^{*}(t,\theta) = \left(0, -\beta^3, -6\beta^3 \cdot \beta^1 \cdot t, -1\right) \tag{4.199}$$

olarak bulunur.

5. SÜPERMANİFOLD VE SÜPERSİMETRİ ÜZERİNDE KİNEMATİK YAPILAR

Kinematik, bir nokta veya parçacığın hareketinin geometrik özelliklerini zamana göre değişimini inceler. Dinamik ise hareketi meydana getirir ve değiştirir. Bu nedenle; kinematik, dinamik ile geometri arasında bir aracı bilimdir. Kinematiğin temel aldığı esaslar; büyüklüklerin ölçülmesi, büyüklüklerin uzunluklarının ve zamanlarının ölçülmesiyle sağlanır. Düzlemsel harekette eğrilik teorisi, merkeze ve bunların değişmezlerine dayalı yolun bir noktasının özelliklerini gösterir. Fakat, uzay hareketi üzerindeki eğrilik teorisi, sadece noktaya bağlı bir yörüngeden oluşumunu değil aynı zamanda yörünge çizgisinin geometrik özelliklerini ve invaryantlarını bir yörüngenin çizgisini de gösterir. Bu durumda mekanikte ani harekete bağlı kinematik, geometride benzer önemli bir temeli işgal eder (Anonim, 2016). Eğri kongrüansı ise iki eğrinin öteleme ve dönme bileşimini içeren katı cisim hareketidir (Anonim, 2016).

Hacısalihoğlu'na (2000) göre manifoldlar olarak her bir M hiperyüzeyi aynı zamanda bir $(n-1)$-manifolddur ve dolayısıyla $\forall P \in M$ noktasında M hiperyüzeyinin bir tanjant uzayı $T_M(P)$, tanımlı olup $(n-1)$-boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu sebeple çalıştığımız total süper-Öklid uzayı aynı zamanda bir süpermanifolddur.

Bu bölümde, total süper-Öklid uzayı üzerindeki süpereğri çiftleri incelenecektir. Bu nedenle total süper-Öklid uzayında involüt süpereğri çifti, Bertrand süpereğri çifti ve Mannheim süpereğri çifti tanımlanmıştır. Bu tanımlar kullanılarak bazı teoremler elde edilmiştir. Ayrıca süpereğri çifti ile ilgili uygulamalara yer verilmiştir.

5.1 Total Süper-Öklid Uzayı Üzerindeki Süpereğri Çiftleri

Bu kısımda, total süper-Öklid uzayında involüt-evolüt süpereğri çifti, Bertrand süpereğri çifti ve Mannheim süpereğri çifti tanımlanmıştır.

Cristea (2005) çalışmasında Tanım 3.13.8 de olduğu gibi bir süpereğriyi, $L > 2n$ ve B_L^{m+n} (m,n)-boyutlu total süper-Öklid uzayı olmak üzere $V \subset B_L^{1+1}$ açık ve $c : V \subset B_L^{1+1} \to B_L^{m+n}$

fonksiyonu ile $\forall\theta \in V \cap \left(B_L^{1+1}\right)_1$ için

$$\begin{array}{llll} c_{\theta,0}: & V \cap (B_L)_0 & \rightarrow & \left(B_L^{m+n}\right)_1 \\ & t & \mapsto & c_{\theta,0}(t) = (c\,(t,\theta))_0 \qquad (c\,(t,\theta))_0,\, c\,(t,\theta) \text{ nın çift kısmı} \\ c_{\theta,B}: & V \cap (B_L)_0 & \rightarrow & R^m \\ & t & \mapsto & c_{\theta,B}(t) = \varepsilon_{m,n}^{\prime(L)} \circ c_{\theta,0}(t) \end{array}$$

ve $c_{\theta,B}\,|_{V\cap R}$ eğri olma şartıyla tanımlamıştır.

Sonraki kısımlarda kullanılacak olan total süper-Öklid uzayında süpereğri çiflerini çift veya tek olmasına göre tanımlayalım.

Tanım 5.1.1 $M,N \subset \left(B_L^{(m,n)}\right)_0 \ \left(\left(B_L^{(m,n)}\right)_1\right)$, (V,c) ve (V,c^*) ifadesiyle verilen iki süperdüzgün süpereğri olsun. Her bir $(t,\theta) \in V$ için, c^* süpereğrisinin $c^*(t,\theta)$ noktasındaki, c süpereğrisinin $c(t,\theta)$ noktasındaki M ve N nin Frenet $(m+n)-$ ayaklıları sırasıyla

$$\{e_1(t,\theta),...,e_m(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta),...,e_{m+n}(t,\theta)\}$$

ve

$$\left\{e_1^*(t,\theta),...,e_m^*(t,\theta),e_{m+1}^*(t,\theta),...,e_{m+n}^*(t,\theta)\right\}$$

olmak üzere $\{e_2(t,\theta),e_2^*(t,\theta)\}$ $\left(\left\{e_{m+2}(t,\theta),e_{m+2}^*(t,\theta)\right\}\right)$ lineer bağımlı ise (M,N) süpereğri ikilisine sırasıyla çift (tek) kısım Bertrand süpereğri çifti denir.

Tanım 5.1.2 $M,N \subset \left(B_L^{(m,n)}\right)_0 \ \left(\left(B_L^{(m,n)}\right)_1\right)$, (V,c) ve (V,c^*) ifadesiyle verilen iki süperdüzgün süpereğriler olsun. Her bir $(t,\theta) \in V$ için c süpereğrisinin $c(t,\theta)$ noktasındaki çift (tek) kısmın asal normal doğrusu ile c^* süpereğrisinin $c^*(t,\theta)$ noktasındaki çift (tek) kısmın binormal doğrusu karşılık geliyorsa yani $c(t,\theta)$ ve $c^*(t,\theta)$ noktalarından M ve N in Frenet $(m+n)-$ ayaklıları sırasıyla

$$\{e_1(t,\theta),...,e_m(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta),...,e_{m+n}(t,\theta)\}$$

ve

$$\left\{e_1^*(t,\theta),...,e_m^*(t,\theta),e_{m+1}^*(t,\theta),...,e_{m+n}^*(t,\theta)\right\}$$

olmak üzere

$$\varepsilon^{(L)}\left\langle e_3(t,\theta),e_2^*(t,\theta)\right\rangle = 0 \ \left(\varepsilon^{(L)}\left\langle e_{m+3}(t,\theta),e_{m+2}^*(t,\theta)\right\rangle = 0\right)$$

ise sırasıyla c süpereğrisine çift (tek) kısmın Mannheim süpereğrisi ve c^* süpereğrisine c süpereğrisinin çift (tek) kısmın Mannheim süpereğri eşi denir. $\{c(t,\theta),c^*(t,\theta)\}$ çiftine, Mannheim süpereğri çifti denir.

Tanım 5.1.3. $M,N \subset B_L^{(m,n)}$, (V,c) ve (V,c^*) ifadesiyle verilen iki süperdüzgün süpereğriler olsun. Her bir $(t,\theta) \in V$ için, c^* süpereğrisinin $c^*(t,\theta)$ noktasındaki çift veya tek teğeti, c süpereğrisinin $c(t,\theta)$ noktasındaki teğetine karşılık geliyorsa yani $c(t,\theta)$ ve $c^*(t,\theta)$ noktalarından M ve N in Frenet $(m+n)$- ayaklıları sırasıyla

$$\{e_1(t,\theta),...,e_m(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta),...,e_{m+n}(t,\theta)\}$$

ve

$$\left\{e_1^*(t,\theta),...,e_m^*(t,\theta),e_{m+1}^*(t,\theta),...,e_{m+n}^*(t,\theta)\right\}$$

olmak üzere

$$\varepsilon^{(L)} \langle e_1(t,\theta), e_1^*(t,\theta)\rangle = 0$$

ise N ye M nin süperinvolütü, M ye de N nin superevolütü denir.

5.2 İnvolüt-Evolüt Süpereğri Çifti

Bu kısımda total süper-Öklid uzayında involüt-evolüt süpereğri çifti için bazı teoremler verilmiştir.

Teorem 5.2.1 $M, N \subset \left(B_L^{(m,n)}\right)_0$ eğrileri $V \subset B_L^{(1,1)}$ açığı olacak şekilde (V,c) ve (V,c^*) koordinat komşulukları verilsin. Eğer total süper-Öklid uzayında N,M nin süperinvolütü ise $c(t,\theta) \in M$ ve $c^*(t,\theta) \in N$ noktaları arasındaki uzaklık,

$$d(c(t,\theta),c^*(t,\theta)) = \left|b-(-1)^{|t|}t\right|$$

şeklinde ifade edilir. Burada b bir süpersayıdır.

İspat Tanım 5.1.3 involüt tanımı yardımıyla

$$c^*(t,\theta) = c(t,\theta) + A(t,\theta)e_1(t,\theta) \tag{5.1}$$

olur. Böylece (t,θ) ve $(t^*,\theta^*) \in V$ açık aralığının sırasıyla M ve N için yay parametreleri olduğu kabul edilirse her iki tarafın t ye göre türevi alındığında

$$G_1^*c^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} \quad = G_1c(t,\theta) + G_1A(t,\theta)e_1(t,\theta) + (-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)G_1e_1(t,\theta) \tag{5.2}$$

denklemi elde edilir. (5.2) denklemine (4.5) Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$e_1^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} = (1+G_1A(t,\theta))e_1(t,\theta) + (-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{12}(t,\theta)e_2(t,\theta) \tag{5.3}$$

denklemi bulunur. (5.3) denklemi ile $e_1(t,\theta)$ süpersüperskalar çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle e_1^*(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle \frac{dt^*}{dt} &= \left(1+G_1A(t,\theta)\right)\left\langle e_1(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{12}(t,\theta)\left\langle e_2(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle \end{aligned} \tag{5.4}$$

denklemine ulaşılır. İnvolüt eğri çifti tanımı gereğince $\varepsilon^{(L)}\left\langle e_1^*(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle = 0$ olacağından

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(L)}\left\langle e_1^*(t,\theta),e_1(t,\theta)\frac{dt^*}{dt}\right\rangle &= \left(\left(1+G_1\varepsilon^{(L)}\left(A(t,\theta)\right)+G_1 s\left(A(t,\theta)\right)\right)\right) \\ &\cdot\left(\varepsilon^{(L)}\left\langle e_1(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle\right)+s\left\langle e_1(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\left(\varepsilon^{(L)}\left(A(t,\theta)\right)+s\left(A(t,\theta)\right)\right) \\ &\cdot a_{12}(t,\theta)\cdot\left(\varepsilon^{(L)}\left\langle e_2(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle+s\left\langle e_2(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle\right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir. Bu durumda birim ve denklik eşitlikleri (5.5) denkleminde yerine yazılıp çift ve tek kısımlara ayrılırsa

$$1+G_1\varepsilon^{(L)}A(t,\theta) = 0 \tag{5.6}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} 0 &= s\left\langle e_1(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle+G_1\varepsilon^{(L)}\left(A(t,\theta)\right)\left(s\left\langle e_1(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle\right) \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}\left(A(t,\theta)\right)a_{12}(t,\theta)\left(s\left\langle e_2(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle\right) \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}s\left(A(t,\theta)\right)a_{12}(t,\theta)\left(s\left\langle e_2(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle\right) \\ &+s\left(A(t,\theta)\right)+s\left(A(t,\theta)\right)\left(s\left\langle e_2(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle\right) \end{aligned} \tag{5.7}$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitliklerden (5.6) eşitliği kullanılırsa

$$\varepsilon^{(L)}\left(A(t,\theta)\right) = b-(-1)^{|t|}t \tag{5.8}$$

eşitliği bulunur. Burada b bir süpersayıdır. (5.8) eşitliği (5.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} s\left(A(t,\theta)\right) = & \left[\left(b-(-1)^{|t||A(t,\theta)|}t\right)a_{12}(t,\theta)\left(s\left\langle e_2(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle\right)\right] \\ &\cdot\left[1+s\left\langle e_2(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle\left\{(-1)^{|t||A(t,\theta)|}a_{12}(t,\theta)+1\right\}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{5.9}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $A(t,\theta)$,

$$\begin{aligned} A(t,\theta) = & \left(b-(-1)^{|t||A(t,\theta)|}t\right)+\left[\left(b-(-1)^{|t||A(t,\theta)|}t\right)a_{12}(t,\theta)\left(s\left\langle e_2(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle\right)\right] \\ &\cdot\left[1+s\left\langle e_2(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle\left\{(-1)^{|t||A(t,\theta)|}a_{12}(t,\theta)+1\right\}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{5.10}$$

olarak bulunur. Total süper-Öklid uzayındaki uzaklık tanımından,

$$d\left(c(t,\theta),c^*(t,\theta)\right) = \left|b-(-1)^{|t|}t\right| \tag{5.11}$$

b süpersayı olacak şekilde ifade edilmiş olur.

Teorem 5.2.2 M, $N \subset \left(B_L^{(m,n)}\right)_1$ eğrileri $V \subset B_L^{(1,1)}$ açık olacak şekilde (V,c) ve (V,c^*) koordinat komşulukları ile verilsin. Eğer total süper-Öklid uzayında N, M nin süperinvolütü ise $c(t,\theta) \in M$ ve $c^*(t,\theta) \in N$ noktaları arasındaki uzaklık,

$$d(c(t,\theta), c^*(t,\theta)) = \left| b - (-1)^{|t|} t \right|$$

şeklinde ifade edilir. Burada b bir süpersayıdır.

İspat Tanım 5.1.3 involüt tanımı yardımıyla

$$c^*(t,\theta) = c(t,\theta) + A(t,\theta) e_{m+1}(t,\theta) \tag{5.12}$$

olur. Böylece (t,θ) ve $(t^*,\theta^*) \in V$ açık aralığının sırasıyla M ve N için yay parametreleri olduğu kabul edilirse her iki tarafın t ye göre türevi alındığında

$$G_1^* c^*(t,\theta) \frac{dt^*}{dt} = G_1 c(t,\theta) + G_1 A(t,\theta) e_{m+1}(t,\theta) + (-1)^{|t||A(t,\theta)|} A(t,\theta) G_1 e_{m+1}(t,\theta) \tag{5.13}$$

denklemi elde edilir. (5.13) denklemine (4.69) Frenet türev formülleri uygulandığında

$$e_{m+1}^*(t,\theta) \frac{dt^*}{dt} = (1 + G_1 A(t,\theta)) e_{m+1}(t,\theta) + (-1)^{|t||A(t,\theta)|} A(t,\theta) a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta) e_{m+2}(t,\theta) \tag{5.14}$$

denklemi bulunur. (5.14) denklemi ile $e_{m+1}(t,\theta)$ süpersüperskalar çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle e_{m+1}^*(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \right\rangle \frac{dt^*}{dt} &= (1 + G_1 A(t,\theta)) \langle e_{m+1}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \rangle \\ &\quad + (-1)^{|t||A(t,\theta)|} A(t,\theta) a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta) \langle e_{m+2}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \rangle \end{aligned} \tag{5.15}$$

bulunur. İnvolüt eğri çifti tanımı gereğince $\varepsilon'^{(L)} \left\langle e_{m+1}^*(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \right\rangle = 0$ olacağından

$$\begin{aligned} \varepsilon'^{(L)} \left\langle e_{m+1}^*(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \frac{dt^*}{dt} \right\rangle = \; & \Big((1 + G_1 \varepsilon'^{(L)} (A(t,\theta)) + G_1 s' (A(t,\theta))) \Big) \\ & \cdot \Big(\varepsilon'^{(L)} \langle e_{m+1}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \rangle \Big) + s' \langle e_{m+1}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \rangle \\ & + (-1)^{|t||A(t,\theta)|} \Big(\varepsilon'^{(L)} (A(t,\theta)) + s' (A(t,\theta)) \Big) \\ & \cdot a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta) \cdot (\varepsilon'^{(L)} \langle e_{m+2}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \rangle \\ & + s' \langle e_{m+2}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \rangle) \end{aligned} \tag{5.16}$$

elde edilir. Bu durumda birim ve denklik eşitlikleri (5.16) denkleminde yerine yazılırsa tek ve çift kısımlara ayrıldığında aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$1 + G_1 A(t,\theta) = 0 \tag{5.17}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} 0 = \; & s' \langle e_{m+1}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \rangle + G_1 \varepsilon'^{(L)} (A(t,\theta)) (s' \langle e_{m+1}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \rangle) \\ & + s' (A(t,\theta)) (s' \langle e_{m+2}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \rangle) + s' (A(t,\theta)) \\ & + (-1)^{|t||A(t,\theta)|} \varepsilon'^{(L)} (A(t,\theta)) a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta) (s' \langle e_{m+2}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \rangle) \\ & + (-1)^{|t||A(t,\theta)|} s' (A(t,\theta)) a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta) (s' \langle e_{m+2}(t,\theta), e_{m+1}(t,\theta) \rangle) \end{aligned} \tag{5.18}$$

Bu eşitliklerden (5.17) eşitliği kullanıldığında

$$\varepsilon'^{(L)}\left(A(t,\theta)\right) = b-(-1)^{|t|}t \tag{5.19}$$

eşitliği bulunur. Burada b bir süpersayıdır. (5.19) eşitliği (5.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} s'\left(A(t,\theta)\right) = & \left[\left(-(-1)^{|t||A(t,\theta)|}t+b\right)a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\left(s'\left\langle e_{m+2}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle\right)\right] \\ & \cdot\left[\begin{array}{c} 1+\left(s'\left\langle e_{m+2}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle\right) \\ +(-1)^{|t||A(t,\theta)|}a_{(m+1)(m+2)2}(t,\theta)\left(s'\left\langle e_{m+2}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle\right) \end{array}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{5.20}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $A(t,\theta)$,

$$\begin{aligned} A(t,\theta) = & \ (-t+b)+\left[(-t+b)\,a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\left(s'\left\langle e_{m+2}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle\right)\right] \\ & \cdot\left[\begin{array}{c} 1+\left(s'\left\langle e_{m+2}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle\right) \\ +a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\left(s'\left\langle e_{m+2}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle\right) \end{array}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{5.21}$$

olarak bulunur. Total süper-Öklid uzayındaki uzaklık tanımından,

$$d(c(t,\theta),c^*(t,\theta)) = \left|b-(-1)^{|t|}t\right| \tag{5.22}$$

b süpersayı olacak şekilde bulunur.

Teorem 5.2.3 M, $N \subset \left(B_L^{(m,n)}\right)_0$ eğrileri $V \subset B_L^{(1,1)}$ açık olacak şekilde (V,c) ve (V,c^*) koordinat komşulukları ile verilsin. Eğer total süper-Öklid uzayında N, M nin süperinvolütü ise $c(t,\theta) \in M$ ve $c^*(t,\theta) \in N$ noktalarında M ve N nin Frenet $(m+n)-$ayaklıları, sırasıyla

$$\left\{e_1(t,\theta),\ldots,e_m(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta),\ldots,e_{m+n}(t,\theta)\right\},$$

ve

$$\left\{e_1^*(t,\theta),\ldots,e_m^*(t,\theta),e_{m+1}^*(t,\theta),\ldots,e_{m+n}^*(t,\theta)\right\}$$

olmak üzere M nin eğrilik fonksiyonları çift kısımlar için (5.10) ile verilen eşitlik sağlanmak koşuluyla a_{kh}^*, $1 \leq k,h \leq m+n$ ise

$$\varepsilon^{(L)}\left(a_{12}^*(t,\theta)\right)^2 = \frac{\left(\varepsilon^{(L)}\left(a_{21}(t,\theta)\right)^2+\varepsilon^{(L)}\left(a_{23}(t,\theta)\right)^2\right)}{\left(b-(-1)^{|t|}t\right)\varepsilon^{(L)}\left(a_{12}(t,\theta)\right)^2}$$

ve

$$\varepsilon^{(L)}\left(a_{12}^*(t,\theta)\right)^* = \frac{\left(\varepsilon^{(L)}\left(a_{21}(t,\theta)\right)^2 s\left\langle e_1(t,\theta),e_1(t,\theta)\right\rangle+\varepsilon^{(L)}\left(a_{23}(t,\theta)\right)^2 s\left\langle e_3(t,\theta),e_3(t,\theta)\right\rangle\right)}{\left(b-(-1)^{|t|}t\right)\varepsilon^{(L)}\left(a_{12}(t,\theta)\right)^2 s\left\langle e_2^*(t,\theta),e_2^*(t,\theta)\right\rangle}$$

elde edilir.

İspat Teorem 5.2.1 yardımıyla (5.1) denklemi

$$c^*(t,\theta) = c(t,\theta)+\left(\left(b-(-1)^{|t|}t\right)+s\left(A(t,\theta)\right)\right)e_1(t,\theta) \tag{5.23}$$

şeklinde yazılabilir. (t,θ) ve $(t^*,\theta^*)\in V$ açık aralığının sırasıyla M ve N için yay parametreleri kabul edilirse her iki tarafın t ye göre türevi alınır ve (4.5) Frenet türev formülleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} e_1^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} \quad = \quad & (-1)^{|t|\left|b-(-1)^{|t|}t+s(A(t,\theta))\right|}\left(b-(-1)^{|t|}t+\right)\varepsilon^{(L)}\left(a_{12}(t,\theta)\right)e_2(t,\theta) \\ & +(-1)^{|t|\left|b-(-1)^{|t|}t+s(A(t,\theta))\right|}\left(b-(-1)^{|t|}t\right)s\left(a_{12}(t,\theta)\right)e_2(t,\theta) \\ & +(-1)^{|t|\left|b-(-1)^{|t|}t+s(A(t,\theta))\right|}s\left(A(t,\theta)\right)\varepsilon^{(L)}\left(a_{12}(t,\theta)\right)e_2(t,\theta) \\ & +(-1)^{|t|\left|b-(-1)^{|t|}t+s(A(t,\theta))\right|}s\left(A(t,\theta)\right)s\left(a_{12}(t,\theta)\right)e_2(t,\theta) \\ & +G_1 s\left(A(t,\theta)\right)e_1(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.24}$$

denklemi elde edilir. Bu durumda çift ve tek kısım eşitlendiğinde $\left\{\varepsilon^{(L)}e_1^*(t,\theta),\varepsilon^{(L)}e_1(t,\theta)\right\}$ lineer bağımlıdır. O halde her iki tarafın türevi alındığında

$$G_1\varepsilon^{(L)}\left(e_1^*(t,\theta)\right)=G_1\varepsilon^{(L)}\left(e_2(t,\theta)\right) \tag{5.25}$$

bulunur. Ayrıca (5.25) eşitliği

$$\varepsilon^{(L)}G_1\left(e_1^*(t,\theta)\right)=\varepsilon^{(L)}G_1\left(e_2(t,\theta)\right) \tag{5.26}$$

yazılır. Bu durumda (4.5) Frenet türev denklemlerinden

$$\varepsilon^{(L)}\left(a_{12}^*(t,\theta)\right)e_2^*(t,\theta)\varepsilon^{(L)}\frac{dt^*}{dt}=\varepsilon^{(L)}\left(a_{12}(t,\theta)\right)e_1(t,\theta)+\varepsilon^{(L)}\left(a_{23}(t,\theta)\right)e_3(t,\theta) \tag{5.27}$$

denklemi elde edilir. (5.27) denklemi süperskalar çarpıldığında çift ve tek kısımları cinsinden aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\varepsilon^{(L)}\left(a_{12}^*(t,\theta)\right)^2 \quad = \quad \frac{\left(\varepsilon^{(L)}\left(a_{21}(t,\theta)\right)^2+\varepsilon^{(L)}\left(a_{23}(t,\theta)\right)^2\right)}{\left(b-(-1)^{|t|}t\right)\varepsilon^{(L)}\left(a_{12}(t,\theta)\right)^2} \tag{5.28}$$

ve

$$\varepsilon^{(L)}\left(a_{12}^*(t,\theta)\right)^* \quad = \quad \frac{\left(\varepsilon^{(L)}(a_{21}(t,\theta))^2 s\langle e_1(t,\theta),e_1(t,\theta)\rangle+\varepsilon^{(L)}(a_{23}(t,\theta))^2 s\langle e_3(t,\theta),e_3(t,\theta)\rangle\right)}{\left(b-(-1)^{|t|}t\right)\varepsilon^{(L)}(a_{12}(t,\theta))^2 s\left\langle e_2^*(t,\theta),e_2^*(t,\theta)\right\rangle}. \tag{5.29}$$

Teorem 5.2.4 $M,N\subset\left(B_L^{(m,n)}\right)_1$ eğrileri $V\subset B_L^{(1,1)}$ açık olacak şekilde (V,c) ve (V,c^*) koordinat komşulukları ile verilsin. Eğer total süper-Öklid uzayında N,M nin süperinvolütü ise $c(t,\theta)\in M$ ve $c^*(t,\theta)\in N$ noktalarında M ve N nin Frenet $(m+n)$- ayaklıları sırasıyla

$$\{e_1(t,\theta),\ldots,e_m(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta),\ldots,e_{m+n}(t,\theta)\}$$

ve

$$\left\{e_1^*(t,\theta),\ldots,e_m^*(t,\theta),e_{m+1}^*(t,\theta),\ldots,e_{m+n}^*(t,\theta)\right\}$$

olmak üzere M nin süpereğrilik fonksiyonları tek kısımlar için (5.21) ile verilen eşitliğin sağlanması koşuluyla a^*_{kh}, $1 \leq k,h \leq m+n$ ise

$$\varepsilon'^{(L)}\left(a^*_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)^2 = \frac{\left(\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+2)(m+1)}(t,\theta)\right)^2+\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+2)(m+3)}(t,\theta)\right)^2\right)}{\left(b-(-1)^{|t|}t\right)\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)^2}$$

ve

$$\varepsilon'^{(L)}\left(a^*_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)^* = \frac{\left[\begin{array}{c}(\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+2)(m+1)}(t,\theta)\right)^2 s'\left\langle e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle \\ +\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+2)(m+3)}(t,\theta)\right)^2 s'\left\langle e_{m+3}(t,\theta),e_{m+3}(t,\theta)\right\rangle) \\ \cdot\left(b-(-1)^{|t|}t\right)\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)^{-2}\end{array}\right]}{s'\left\langle e^*_{m+2}(t,\theta),e^*_{m+2}(t,\theta)\right\rangle}$$

elde edilir.

İspat Teorem 5.2.2 yardımıyla (5.18) denklemi

$$c^*(t,\theta)=c(t,\theta)+\left(\left(b-(-1)^{|t|}t\right)+s'\left(A(t,\theta)\right)\right)e_{m+1}(t,\theta) \tag{5.30}$$

şeklinde yazılabilir. (t,θ) ve $(t^*,\theta^*)\in V$ açık aralığının sırasıyla M ve N için yay parametreleri kabul edilirse (5.30) denkleminin her iki tarafının t ye göre türevi alınıp (4.69) Frenet türev formülleri yerine yazıldığında çift ve tek kısımlar aşağıdaki gibi düzenlenir:

$$\begin{aligned} e_{m+1}(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} = {} & (-1)^{|t|\left|b-(-1)^{|t|}t+s'(A(t,\theta))\right|}\left(b-(-1)^{|t|}t\right)\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)e_{m+2}(t,\theta) \\ & +(-1)^{|t|\left|b-(-1)^{|t|}t+s'(A(t,\theta))\right|}\left(b-(-1)^{|t|}t\right)s'\left(a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)e_{m+2}(t,\theta) \\ & +(-1)^{|t|\left|b-(-1)^{|t|}t+s'(A(t,\theta))\right|}s'\left(A(t,\theta)\right)\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)e_{m+2}(t,\theta) \\ & +(-1)^{|t|\left|b-(-1)^{|t|}t+s'(A(t,\theta))\right|}s'\left(A(t,\theta)\right)s'\left(a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)e_{m+2}(t,\theta) \\ & +G_1 s'\left(A(t,\theta)\right)e_{m+1}(t,\theta). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Bu durumda çift ve tek kısım eşitlendiğinde $\left\{\varepsilon'^{(L)}e_{m+1}(t,\theta),\varepsilon'^{(L)}e_{m+1}(t,\theta)\right\}$ lineer bağımlıdır. O halde her iki tarafın türevi alındığında

$$G_1\varepsilon'^{(L)}\left(e_{m+1}(t,\theta)\right)=G_1\varepsilon'^{(L)}\left(e_{m+2}(t,\theta)\right) \tag{5.32}$$

bulunur. Ayrıca (5.32) eşitliği

$$\varepsilon'^{(L)}G_1\left(e_{m+1}(t,\theta)\right)=\varepsilon'^{(L)}G_1\left(e_{m+2}(t,\theta)\right) \tag{5.33}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda (4.69) Frenet türev denklemlerinden

$$\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)e_{m+2}(t,\theta)=\frac{\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)e_{m+1}(t,\theta)+\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+2)(m+3)}(t,\theta)\right)e_{m+3}(t,\theta)}{\varepsilon'^{(L)}\left(\frac{dt^*}{dt}\right)} \tag{5.34}$$

denklemi elde edilir. (5.34) denklemi kendisi ile süperskalar çarpıldığında çift ve tek kısımlar

$$\varepsilon'^{(L)}\left(a^{*}_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)^{2} = \frac{\left(\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+2)(m+1)}(t,\theta)\right)^{2}+\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+2)(m+3)}(t,\theta)\right)^{2}\right)}{\left(b-(-1)^{|t|}t\right)\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)^{2}} \tag{5.35}$$

ve

$$\varepsilon'^{(L)}\left(a^{*}_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)^{*} = \frac{\left[\begin{array}{c}(\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+2)(m+1)}(t,\theta)\right)^{2}s'\left\langle e_{m+1}(t,\theta),e_{m+1}(t,\theta)\right\rangle \\ +\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+2)(m+3)}(t,\theta)\right)^{2}s'\left\langle e_{m+3}(t,\theta),e_{m+3}(t,\theta)\right\rangle) \\ \cdot\left(b-(-1)^{|t|}t\right)\varepsilon'^{(L)}\left(a_{(m+1)(m+2)}(t,\theta)\right)^{-2}\end{array}\right]}{s'\left\langle e^{*}_{m+2}(t,\theta),e^{*}_{m+2}(t,\theta)\right\rangle} \tag{5.36}$$

olarak elde edilir.

5.3 Bertrand Süpereğri Çifti

Bu kısımda total süper-Öklid uzayında Bertrand süpereğri çifti için bazı teoremler verilmiştir.

Teorem 5.3.1 $M,\ N\subset\left(B_L^{(3,4)}\right)_0$ eğrileri $V\subset B_L^{(1,1)}$ açık olacak şekilde (V,c) ve (V,c^*) koordinat komşulukları ile verilsin. Eğer total süper-Öklid uzayında N,M nin Bertrand süpereğrisi ise $c(t,\theta)\in M$ ve $c^*(t,\theta)\in N$ noktaları arasındaki uzaklık,

$$d(c(t,\theta),c^*(t,\theta))=b$$

şeklinde ifade edilir. Burada b bir süpersayıdır.

İspat Tanım 5.1.1 Bertrand süpereğri çifti tanımı yardımıyla

$$c^*(t,\theta)=c(t,\theta)+A(t,\theta)e_2(t,\theta) \tag{5.37}$$

denklemi yazılır. Böylece (t,θ) ve $(t^*,\theta^*)\in V$ açık aralığının sırasıyla M ve N için yay parametreleri olduğu kabul edilirse her iki tarafın t ye göre türevi alındığında

$$G_1^*c^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt}=G_1c(t,\theta)+G_1A(t,\theta)e_2(t,\theta)+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)G_1e_2(t,\theta) \tag{5.38}$$

denklemi elde edilir. (5.38) denklemine (4.5) Frenet türev formülleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} e_1(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= (1+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{21}(t,\theta))e_1(t,\theta)+G_1A(t,\theta)e_2(t,\theta) \\ &\quad +A(t,\theta)a_{23}(t,\theta)e_3(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.39}$$

denklemi bulunur. (5.39) denklemi $e_2(t,\theta)$ ile süpersüperskalar çarpım yapıldığında

$$\begin{aligned}\langle e_1^*(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \frac{dt^*}{dt} &= (1+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{21}(t,\theta))\langle e_1(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ &+G_1A(t,\theta)\langle e_2(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{23}(t,\theta)\langle e_3(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle\end{aligned} \tag{5.40}$$

olur. (5.40) denklemi çift ve tek kısımlarına ayrılıp Bertrand eğri çifti tanımı uygulandığında

$$G_1\varepsilon^{(L)}(A(t,\theta)) = 0 \tag{5.41}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned}0 &= \varepsilon^{(L)}(a_{21}(t,\theta))s\langle e_1(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle + s(a_{21}(t,\theta))s\langle e_1(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}(A(t,\theta))\varepsilon^{(L)}(a_{21}(t,\theta))s\langle e_1(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}(A(t,\theta))s(a_{21}(t,\theta))s\langle e_1(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}s(A(t,\theta))\varepsilon^{(L)}(a_{21}(t,\theta))s\langle e_1(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}s(A(t,\theta))s(a_{21}(t,\theta))s\langle e_1(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ &+G_1\varepsilon^{(L)}(A(t,\theta))(s\langle e_2(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle) \\ &+G_1s(A(t,\theta))(s\langle e_2(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle)+G_1s(A(t,\theta)) \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}(A(t,\theta))\varepsilon^{(L)}(a_{23}(t,\theta))s\langle e_3(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}(A(t,\theta))s(a_{23}(t,\theta))s\langle e_3(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}s(A(t,\theta))\varepsilon^{(L)}(a_{23}(t,\theta))(s\langle e_3(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle) \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}s(A(t,\theta))s(a_{23}(t,\theta))s\langle e_3(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle\end{aligned} \tag{5.42}$$

denklemleri elde edilir. (5.41) denkleminden

$$\varepsilon^{(L)}(A(t,\theta)) = b \tag{5.43}$$

eşitliği bulunur. Burada b bir süpersayıdır. (5.43) eşitliği (5.42) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}s(A(t,\theta)) &= \left[\begin{array}{l} -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}b\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon^{(L)}(a_{21}(t,\theta))s\langle e_1(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ +s(a_{21}(t,\theta))s\langle e_1(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ +\varepsilon^{(L)}(a_{23}(t,\theta))s\langle e_3(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ +s(a_{23}(t,\theta))s\langle e_3(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle\end{pmatrix} \\ -G_1s(A(t,\theta))-G_1s(A(t,\theta))(s\langle e_2(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle) \\ -\varepsilon^{(L)}(a_{21}(t,\theta))s\langle e_1(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ -s(a_{21}(t,\theta))s\langle e_1(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle\end{array}\right] \\ &\cdot\left[1+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\begin{pmatrix}\varepsilon^{(L)}(a_{21}(t,\theta)s\langle e_1(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ +s(a_{21}(t,\theta))s\langle e_1(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle \\ +\dfrac{\varepsilon^{(L)}(a_{23}(t,\theta))s\langle e_3(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle}{(1+s(a_{23}(t,\theta)))^{-1}}\end{pmatrix}\right]^{-1}\end{aligned} \tag{5.44}$$

denklemi elde edilir. Total süper-Öklid uzayındaki uzaklık tanımından,

$$d(c(t,\theta),c^*(t,\theta)) = b \tag{5.45}$$

bulunur.

Teorem 5.3.2 M, $N \subset \left(B_L^{(4,3)}\right)_1$ eğrileri $V \subset B_L^{(1,1)}$ açık olacak şekilde (V,c) ve (V,c^*) koordinat komşulukları ile verilsin. Eğer total süper-Öklid uzayında N, M nin Bertrand süpereğrisi ise $c(t,\theta) \in M$ ve $c^*(t,\theta) \in N$ noktaları arasındaki uzaklık,

$$d(c(t,\theta),c^*(t,\theta)) = b$$

şeklinde ifade edilir. Burada b bir süpersayıdır.

İspat Tanım 5.1.1 Bertrand süpereğri çifti tanımı yardımıyla

$$c^*(t,\theta) = c(t,\theta) + A(t,\theta)e_6(t,\theta) \tag{5.46}$$

denklemi yazılır. Böylece (t,θ) ve $(t^*,\theta^*) \in V$ açık aralığının sırasıyla M ve N için yay parametreleri olduğu kabul edilirse (5.46) denkleminin her iki tarafının t ye göre türevi alındığında

$$G_1^*c^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} = G_1c(t,\theta) + G_1A(t,\theta)e_6(t,\theta) + (-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)G_1e_6(t,\theta) \tag{5.47}$$

denklemi elde edilir. (4.69) Frenet türev formüllerinden

$$\begin{aligned} e_5^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= (1+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{65}(t,\theta))e_5(t,\theta) + G_1A(t,\theta)e_6(t,\theta) \\ &\quad + A(t,\theta)a_{67}(t,\theta)e_7(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.48}$$

denklemi bulunur. (5.48) denklemi, $e_6(t,\theta)$ ile süperskalar çarpım yapıldığında

$$\begin{aligned} \langle e_5^*(t,\theta),e_6(t,\theta)\rangle\frac{dt^*}{dt} &= (1+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{65}(t,\theta))\,\langle e_5(t,\theta),e_6(t,\theta)\rangle \\ &\quad + G_1A(t,\theta)\,\langle e_6(t,\theta),e_6(t,\theta)\rangle \\ &\quad + (-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{67}(t,\theta)\,\langle e_7(t,\theta),e_6(t,\theta)\rangle \end{aligned} \tag{5.49}$$

bulunur. (5.49) denklemi çift ve tek kısımlarına ayrılıp Bertrand eğri çifti tanımı uygulandığında

$$G_1\varepsilon^{(L)}(A(t,\theta)) \quad = 0 \tag{5.50}$$

ve buradan

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \varepsilon^{(L)}\left(a_{65}(t,\theta)\right) s\left\langle e_5(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle + s\left(a_{65}(t,\theta)\right) s\left\langle e_5(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle \\
& +(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}\left(A(t,\theta)\right)\varepsilon^{(L)}\left(a_{65}(t,\theta)\right) s\left\langle e_5(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle \\
& +(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}\left(A(t,\theta)\right) s\left(a_{65}(t,\theta)\right) s\left\langle e_5(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle \\
& +(-1)^{|t||A(t,\theta)|} s\left(A(t,\theta)\right)\varepsilon^{(L)}\left(a_{65}(t,\theta)\right) s\left\langle e_5(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle \\
& +(-1)^{|t||A(t,\theta)|} s\left(A(t,\theta)\right) s\left(a_{65}(t,\theta)\right) s\left\langle e_5(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle \\
& +G_1\varepsilon^{(L)}\left(A(t,\theta)\right)\left(s\left\langle e_6(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle\right) \\
& +G_1 s\left(A(t,\theta)\right)\left(s\left\langle e_6(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle\right) + G_1 s\left(A(t,\theta)\right) \\
& +(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}\left(A(t,\theta)\right)\varepsilon^{(L)}\left(a_{67}(t,\theta)\right) s\left\langle e_7(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle \\
& +(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}\left(A(t,\theta)\right) s\left(a_{67}(t,\theta)\right) s\left\langle e_7(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle \\
& +(-1)^{|t||A(t,\theta)|} s\left(A(t,\theta)\right)\varepsilon^{(L)}\left(a_{67}(t,\theta)\right)\left(s\left\langle e_7(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle\right) \\
& +(-1)^{|t||A(t,\theta)|} s\left(A(t,\theta)\right) s\left(a_{67}(t,\theta)\right) s\left\langle e_7(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle
\end{aligned}
\tag{5.51}
$$

denklemleri elde edilir. (5.50) denkleminden

$$\varepsilon^{(L)}\left(A(t,\theta)\right) = b \tag{5.52}$$

eşitliği bulunur. Burada b bir süpersayıdır. (5.52) eşitliği, (5.51) denkleminde yerine yazıldığında

$$
s\left(A(t,\theta)\right) \;=\; \left[\begin{array}{l}
-(-1)^{|t||A(t,\theta)|} b \cdot \left(\begin{array}{c}
\varepsilon^{(L)}\left(a_{65}(t,\theta)\right) s\left\langle e_5(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle \\
+s\left(a_{65}(t,\theta)\right) s\left\langle e_5(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle \\
+\varepsilon^{(L)}\left(a_{67}(t,\theta)\right) s\left\langle e_7(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle \\
+s\left(a_{67}(t,\theta)\right) s\left\langle e_7(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle
\end{array}\right) \\
-G_1 s\left(A(t,\theta)\right) - G_1 s\left(A(t,\theta)\right)\left(s\left\langle e_6(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle\right) \\
-\varepsilon^{(L)}\left(a_{65}(t,\theta)\right) s\left\langle e_5(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle \\
-s\left(a_{65}(t,\theta)\right) s\left\langle e_5(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle
\end{array}\right]
\cdot \left[1 + (-1)^{|t||A(t,\theta)|}\left(\begin{array}{l}
\varepsilon^{(L)}\left(a_{65}(t,\theta) s\left\langle e_5(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle\right) \\
+s\left(a_{65}(t,\theta)\right) s\left\langle e_5(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle \\
+\varepsilon^{(L)}\left(a_{67}(t,\theta)\right) s\left\langle e_7(t,\theta), e_6(t,\theta)\right\rangle\left(1 + s\left(a_{67}(t,\theta)\right)\right)
\end{array}\right)\right]^{-1}
\tag{5.53}
$$

denklemi elde edilir. Total süper-Öklid uzayındaki uzaklık tanımından,

$$d\left(c(t,\theta), c^*(t,\theta)\right) = b \tag{5.54}$$

bulunur.

Teorem 5.3.3 $M, N \subset \left(B_L^{(3,4)}\right)_0$ eğrileri $V \subset B_L^{(1,1)}$ açık olacak şekilde (V,c) ve (V,c^*) koordinat komşulukları ile verilsin. M süpereğrisinin eğrilikleri $a_{21}(t,\theta)$ ve $a_{23}(t,\theta)$ ise

$$(M,N)\,\text{Bertrand süpereğri çifti} \Leftrightarrow \lambda\varepsilon^{(L)}\left(a_{21}(t,\theta)\right) + \mu\varepsilon^{(L)}\left(a_{23}(t,\theta)\right) = 1$$

olur. Burada λ, μ süpersayılardır.

İspat Bertrand süpereğri çifti tanımı yardımıyla (5.37) denkleminin t ye göre türevi alınıp (4.5) Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} e_1^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= (1-(-1)^{|t||b+s(A(t,\theta))|}(b+s(A(t,\theta)))a_{21}(t,\theta))e_1(t,\theta) \\ &\quad +(-1)^{|t||b+s(A(t,\theta))|}(b+s(A(t,\theta)))a_{23}(t,\theta)e_3(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.55}$$

şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned} G_1^*e_1^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= G_1A_1(t,\theta)e_1(t,\theta)+(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}G_1e_1(t,\theta)+G_1B_1(t,\theta)e_3(t,\theta) \\ &\quad +(-1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)G_1e_3(t,\theta) \end{aligned}$$

(4.5) Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} a_{12}^*(t,\theta)e_2^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= G_1A_1(t,\theta)e_1(t,\theta)+(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}a_{12}(t,\theta)e_2(t,\theta) \\ &\quad +G_1B_1(t,\theta)e_3(t,\theta)-(-1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)a_{23}(t,\theta)e_2(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.56}$$

buradan (5.56) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned} a_{12}^*(t,\theta)e_2^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= G_1A_1(t,\theta)e_1(t,\theta)+G_1B_1(t,\theta)e_3(t,\theta) \\ &\quad +[(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}a_{12}(t,\theta)-(-1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)a_{23}(t,\theta)]e_2(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.57}$$

denklemi elde edilir.

$$e_1^*(t,\theta)=A_1(t,\theta)e_1(t,\theta)+B_1(t,\theta)e_3(t,\theta) \tag{5.58}$$

şeklinde ifade edilir. (5.58) denkleminin t ye göre türevi alınıp (4.5) Frenet formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned} a_{12}^*(t,\theta)e_2^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= G_1A_1(t,\theta)e_1(t,\theta)+G_1B_1(t,\theta)e_3(t,\theta) \\ &\quad +\left[(\text{-}1)^{|t||A_1(t,\theta)|}A_1(t,\theta)a_{12}(t,\theta)\text{-}(\text{-}1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)a_{23}(t,\theta)\right]e_2(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.59}$$

denklemi bulunur. (5.59) denklemi, $\{e_2(t,\theta),e_2^*(t,\theta)\}$ lineer bağımlı olduğundan

$$\varepsilon^{(L)}(G_1A_1(t,\theta))=0 \text{ ve } \varepsilon^{(L)}(G_1B_1(t,\theta))=0 \tag{5.60}$$

eşitlikleri yazılır. Bu durumda $\varepsilon^{(L)}(A_1(t,\theta))=$sabit ve $\varepsilon^{(L)}(B_1(t,\theta))=$sabit olacağından

$$\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)=a \tag{5.61}$$

denklemi bulunur. Burada a bir süpersayıdır. (5.58) denkleminden

$$\frac{1-(-1)^{|t||b+s(A(t,\theta))|}(b+s(A(t,\theta)))a_{21}(t,\theta)}{A_1(t,\theta)}=\frac{(-1)^{|t||b+s(A(t,\theta))|}(b+s(A(t,\theta)))a_{23}(t,\theta)}{B_1(t,\theta)} \tag{5.62}$$

eşitliği yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} B_1(t,\theta) = \quad & (-1)^{|t||A(t,\theta)|}\,(b+s(A(t,\theta)))a_{21}(t,\theta)B_1(t,\theta) \\ & +(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A_1(t,\theta)\,(b+s(A(t,\theta)))a_{23}(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.63}$$

elde edilir. (5.63) denkleminin her iki tarafı $B_1(t,\theta)$ ile bölündüğünde ve çift-tek kısımlar kullanıldığında

$$\begin{aligned} (-1)^{|t||A(t,\theta)|} &= (b+s(A(t,\theta)))\left[\varepsilon^{(L)}\,(a_{21}(t,\theta))+s\,(a_{21}(t,\theta))\right] \\ &\quad +\left[\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)+s\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)\right](b+s(A(t,\theta))) \\ &\quad \cdot\left[\varepsilon^{(L)}\,(a_{23}(t,\theta))+s\,(a_{23}(t,\theta))\right] \end{aligned} \tag{5.64}$$

eşitliği bulunur. (5.64) denkleminin çift-tek eşitliklerinden

$$\lambda\varepsilon^{(L)}\,(a_{21}(t,\theta))+\mu\varepsilon^{(L)}\,(a_{23}(t,\theta))=1 \tag{5.65}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 &= b\cdot s\,(a_{21}(t,\theta))+s(A(t,\theta))\varepsilon^{(L)}\,(a_{21}(t,\theta)) \\ &\quad +s(A(t,\theta))s\,(a_{21}(t,\theta)) \\ &\quad +\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)b\cdot s\,(a_{23}(t,\theta)) \\ &\quad +s\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)b\cdot\varepsilon^{(L)}\,(a_{23}(t,\theta)) \\ &\quad +s\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)b\cdot s\,(a_{23}(t,\theta)) \\ &\quad +s\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)s(A(t,\theta))\cdot s\,(a_{23}(t,\theta)) \\ &\quad +s\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)s(A(t,\theta))\cdot\varepsilon^{(L)}\,(a_{23}(t,\theta)) \end{aligned} \tag{5.66}$$

denklemlerine ulaşılır.

Teorem 5.3.4 $M,\,N\subset\left(B_L^{(4,3)}\right)_1$ eğrileri $V\subset B_L^{(1,1)}$ açık olacak şekilde (V,c) ve (V,c^*) koordinat komşulukları ile verilsin. M süpereğrisinin süpereğrilikleri $a_{65}(t,\theta)$ ve $a_{67}(t,\theta)$ ise

$$(M,\ N)\ \text{Bertrand süpereğri çifti}\Leftrightarrow\lambda\varepsilon^{(L)}\,(a_{65}(t,\theta))+\mu\varepsilon^{(L)}\,(a_{67}(t,\theta))=1$$

olur. Burada λ, μ süpersayılardır.

İspat Bertrand süpereğri çifti tanımı yardımıyla (5.46) denkleminin t ye göre türevi alınıp (4.69) Frenet formülleri kullanılırsa aşağıdaki denklem yazılır:

$$\begin{aligned} e_5^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= (1-(-1)^{|t||b+s'(A(t,\theta))|}\,\big(b+s'(A(t,\theta)\big))a_{65}(t,\theta))e_5(t,\theta) \\ &\quad +(-1)^{|t||b+s'(A(t,\theta))|}\,\big(b+s'(A(t,\theta)\big))a_{67}(t,\theta)e_3(t,\theta). \end{aligned} \tag{5.67}$$

Bu durumda (4.69) denkleminin t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} G_1^* e_5^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= G_1 A_1(t,\theta)e_5(t,\theta)+(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}G_1 e_5(t,\theta)+G_1 B_1(t,\theta)e_3(t,\theta) \\ &\quad +(-1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)G_1 e_3(t,\theta) \end{aligned}$$

ve (4.69) Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} a_{56}^*(t,\theta)e_6^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= G_1 A_1(t,\theta)e_5(t,\theta)+(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}a_{56}(t,\theta)e_6(t,\theta) \\ &\quad +G_1 B_1(t,\theta)e_3(t,\theta)-(-1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)a_{67}(t,\theta)e_6(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.68}$$

bulunur. Buradan (5.68) denklemi düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} a_{56}^*(t,\theta)e_6^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= G_1 A_1(t,\theta)e_5(t,\theta)+G_1 B_1(t,\theta)e_3(t,\theta) \\ &\quad +[(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}a_{56}(t,\theta)-(-1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)a_{67}(t,\theta)]e_6(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.69}$$

elde edilir.

$$e_5(t,\theta)=A_1(t,\theta)e_5(t,\theta)+B_1(t,\theta)e_3(t,\theta) \tag{5.70}$$

şeklinde ifade edilir. (5.70) denkleminin t ye göre türevi alınıp (4.69) Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} a_{56}^*(t,\theta)e_6^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= G_1 A_1(t,\theta)e_5(t,\theta)+G_1 B_1(t,\theta)e_3(t,\theta) \\ &\quad +\left[(\text{-}1)^{|t||A_1(t,\theta)|}A_1(t,\theta)a_{56}(t,\theta)\text{-}(\text{-}1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)a_{67}(t,\theta)\right]e_6(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.71}$$

denklemi bulunur. (5.71) denklemi, $\{e_6(t,\theta),e_6(t,\theta)\}$ lineer bağımlı olduğundan

$$\varepsilon^{(L)}\left(G_1 A_1(t,\theta)\right)=0 \text{ ve } \varepsilon^{(L)}\left(G_1 B_1(t,\theta)\right)=0 \tag{5.72}$$

eşitlikleri yazılır. Bu durumda $\varepsilon^{(L)}\left(A_1(t,\theta)\right)=$sabit ve $\varepsilon^{(L)}\left(B_1(t,\theta)\right)=$sabit olacağından

$$\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)=a \tag{5.73}$$

elde edilir. Burada a bir süpersayıdır. (5.70) denkleminden

$$\frac{1-(-1)^{|t||b+s'(A(t,\theta))|}(b+s'(A(t,\theta)))a_{65}(t,\theta)}{A_1(t,\theta)}=\frac{(-1)^{|t||b+s'(A(t,\theta))|}(b+s'(A(t,\theta)))a_{67}(t,\theta)}{B_1(t,\theta)} \tag{5.74}$$

eşitliği yazılır. Bu durumda (5.74) denkleminden

$$\begin{aligned} B_1(t,\theta)= &\ (-1)^{|t||A(t,\theta)|}(b+s'(A(t,\theta)))a_{65}(t,\theta)B_1(t,\theta) \\ &+(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A_1(t,\theta)(b+s'(A(t,\theta)))a_{67}(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.75}$$

eşitliği elde edilir. (5.75) denkleminin her iki tarafı $B_1(t,\theta)$ ile bölündüğünde ve çift-tek kısımlar kullanılırsa

$$\begin{aligned}(-1)^{|t||A(t,\theta)|} &= \left(b+s'(A(t,\theta))\right)\left[\varepsilon^{(L)}\left(a_{65}(t,\theta)\right)+s'\left(a_{65}(t,\theta)\right)\right] \\ &+\left[\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)+s'\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)\right]\left(b+s'(A(t,\theta))\right) \\ &\cdot\left[\varepsilon^{(L)}\left(a_{67}(t,\theta)\right)+s'\left(a_{67}(t,\theta)\right)\right]\end{aligned} \tag{5.76}$$

bulunur. (5.76) denkleminin çift-tek eşitliklerinden

$$\lambda\varepsilon^{(L)}\left(a_{65}(t,\theta)\right)+\mu\varepsilon^{(L)}\left(a_{67}(t,\theta)\right)=1 \tag{5.77}$$

ve

$$\begin{aligned}0 &= b\cdot s'\left(a_{65}(t,\theta)\right)+s'(A(t,\theta))\varepsilon^{(L)}\left(a_{65}(t,\theta)\right) \\ &+s'(A(t,\theta))s'\left(a_{65}(t,\theta)\right) \\ &+\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)b\cdot s'\left(a_{67}(t,\theta)\right) \\ &+s'\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)b\cdot\varepsilon^{(L)}\left(a_{67}(t,\theta)\right) \\ &+s'\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)b\cdot s'\left(a_{67}(t,\theta)\right) \\ &+s'\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)s'(A(t,\theta))\cdot s'\left(a_{67}(t,\theta)\right) \\ &+s'\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)s'(A(t,\theta))\cdot\varepsilon^{(L)}\left(a_{67}(t,\theta)\right)\end{aligned} \tag{5.78}$$

denklemleri bulunur.

Örnek 5.3.1 Örnek 4.2.1 ve Örnek 4.2.3 eğrileri için Frenet çatıları sırasıyla, (4.140), (4.141), (4.142), (4.148) ve (4.176), (4.177), (4.178), (4.184) denklemlerinde verilmiştir. $\varepsilon^{(L)}\langle e_1^*(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle=0$ ve $\varepsilon^{(L)}\{e_2(t,\theta),e_2^*(t,\theta)\}$ lineer bağımsız olduğundan $(c(t,\theta),c^*(t,\theta))$, Bertrand süpereğri çiftidir.

Örnek 5.3.2 Örnek 4.2.2 ve Örnek 4.2.4 eğrileri için Frenet çatıları sırasıyla, (4.160), (4.161), (4.162), (4.167) ve (4.191), (4.192), (4.193), (4.199) denklemlerinde verilmiştir. $\varepsilon^{(L)}\langle e_1^*(t,\theta),e_2(t,\theta)\rangle=0$ ve $\varepsilon^{(L)}\{e_2(t,\theta),e_2^*(t,\theta)\}$ lineer bağımsız olduğundan $(c(t,\theta),c^*(t,\theta))$, Bertrand süpereğri çiftidir.

5.4 Mannheim Süpereğri Çifti

Bu kısımda total süper-Öklid uzayında Mannheim süpereğri çifti ile ilgili bazı teoremlere yer verilmiştir.

Teorem 5.4.1 M, $N \subset \left(B_L^{(3,4)}\right)_0$ eğrileri $V \subset B_L^{(1,1)}$ açık olacak şekilde (V,c) ve (V,c^*) koordinat komşulukları ile verilsin. M eğrisinin eğrilikleri $a_{21}(t,\theta)$ ve $a_{23}(t,\theta)$ ise

$$G_1\left(a_{23}(t,\theta)\right) = \frac{a_{12}(t,\theta)}{(b+s(A(t,\theta)))}\left[(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|} - (b+s(A(t,\theta)))^2 a_{23}^2(t,\theta)\right]$$

denklemini sağlar. Burada $s(A(t,\theta))$, $A(t,\theta)$ değişkeninin tek kısmı ve b süpersayıdır.

İspat Tanım 5.1.2 Mannheim süpereğri çifti tanımı yardımıyla

$$c^*(t,\theta) = c(t,\theta) + A(t,\theta)e_3(t,\theta) \tag{5.79}$$

denklemi yazılır. Böylece (t,θ) ve $(t^*,\theta^*) \in V$ açık aralığının sırasıyla M ve N için yay parametreleri olduğu kabul edilirse (5.79) denkleminin her iki tarafı t ye göre türevi alındığında

$$G_1^* c^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} = G_1 c(t,\theta) + G_1 A(t,\theta)e_3(t,\theta) + (-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)G_1 e_3(t,\theta) \tag{5.80}$$

denklemi elde edilir. (4.5) Frenet türev formüllerinden

$$\begin{aligned} e_1(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= e_1(t,\theta) + G_1 A(t,\theta)e_3(t,\theta) \\ &\quad -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{23}(t,\theta)e_2(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.81}$$

denklemi bulunur. (4.5) denkleminde $e_3(t,\theta)$ ile süperskalar çarpım yapıldığında

$$\begin{aligned} \langle e_1^*(t,\theta), e_3(t,\theta)\rangle \frac{dt^*}{dt} &= \langle e_1(t,\theta), e_3(t,\theta)\rangle + G_1 A(t,\theta)\langle e_3(t,\theta), e_3(t,\theta)\rangle \\ &\quad -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{23}(t,\theta)\langle e_2(t,\theta), e_3(t,\theta)\rangle \end{aligned} \tag{5.82}$$

bulunur. (5.82) denklemi çift ve tek kısımlarına ayrılıp Mannheim süpereğri çifti tanımı uygulandığında

$$\varepsilon^{(L)}\left(G_1\left(A(t,\theta)\right)\right) = 0 \tag{5.83}$$

denklemi elde edilir. O halde $A(t,\theta)$ sıfırdan farklı sabit olduğu anlamına gelir. Diğer bir deyişle

$$e_1^*(t,\theta) = A_1(t,\theta)e_1(t,\theta) + B_1(t,\theta)e_2(t,\theta) \tag{5.84}$$

şeklinde ifade edilir. (5.84) denkleminin t ye göre türevi alınıp (4.5) Frenet formülleri kullanırsa

$$\begin{aligned} a_{21}^*(t,\theta)e_2^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= \left[G_1 A_1(t,\theta) - (-1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)a_{12}(t,\theta)\right]e_1(t,\theta) \\ &\quad + \left[(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}A_1(t,\theta)a_{12}(t,\theta)G_1 B_1(t,\theta)\right]e_2(t,\theta) \\ &\quad + (-1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)a_{23}(t,\theta)e_3(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.85}$$

denklemi bulunur. (5.85) denkleminden $\{e_3(t,\theta), e_2^*(t,\theta)\}$ lineer bağımlı olduğundan

$$G_1 A_1(t,\theta) - B_1(t,\theta) a_{12}(t,\theta) = 0 \tag{5.86}$$

ve

$$A_1(t,\theta) a_{12}(t,\theta) G_1 B_1(t,\theta) = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu durumda (5.84) denkleminden

$$\frac{1}{A_1(t,\theta)} = \frac{-(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\left(b + s(A(t,\theta))\right) a_{23}(t,\theta)}{B_1(t,\theta)} \tag{5.87}$$

b bir süpersayı olacak şekilde eşitliği yazılır. Bu durumda (5.87) denkleminden

$$B_1(t,\theta) = \quad -(-1)^{|t||A(t,\theta)|} A_1(t,\theta)\left(b + s(A(t,\theta))\right) a_{23}(t,\theta) \tag{5.88}$$

elde edilir. (5.88) denkleminin her iki tarafı $B_1(t,\theta)$ ile bölünür ve çift-tek kısımları kullanılırsa

$$\begin{aligned} 1 \quad = \quad & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\left[\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right) + s\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)\right]\left(b + s(A(t,\theta))\right) \\ & \cdot \left[\varepsilon^{(L)}\left(a_{23}(t,\theta)\right) + s\left(a_{23}(t,\theta)\right)\right] \end{aligned} \tag{5.89}$$

bulunur. (5.89) denkleminde eşitliğin iki tarafındaki çift-tek eşitlikleri kullanılırsa

$$-(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right) b \cdot \varepsilon^{(L)}\left(a_{23}(t,\theta)\right) = 1 \tag{5.90}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right) s(A(t,\theta))\varepsilon^{(L)}\left(a_{23}(t,\theta)\right) \\ & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right) s(A(t,\theta)) s\left(a_{23}(t,\theta)\right) \\ & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|} s\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right) b \cdot \varepsilon^{(L)}\left(a_{23}(t,\theta)\right) \\ & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|} s\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right) b \cdot s\left(a_{23}(t,\theta)\right) \\ & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|} s\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right) s(A(t,\theta)) s\left(a_{23}(t,\theta)\right) \\ & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|} s\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right) s(A(t,\theta))\varepsilon^{(L)}\left(a_{23}(t,\theta)\right) \end{aligned} \tag{5.91}$$

eşitlikleri yazılır. (5.81) denkleminde Mannheim süpereğri çifti tanımı uygulandığında

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & \langle e_1(t,\theta), e_3(t,\theta)\rangle + G_1 A(t,\theta)\langle e_3(t,\theta), e_3(t,\theta)\rangle \\ & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|} A(t,\theta) a_{23}(t,\theta)\langle e_2(t,\theta), e_3(t,\theta)\rangle \end{aligned} \tag{5.92}$$

ve

$$0 = s\langle e_1(t,\theta), e_3(t,\theta)\rangle + G_1(A(t,\theta))(1+\langle s(e_3(t,\theta)), e_3(t,\theta)\rangle) \tag{5.93}$$
$$-(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{23}(t,\theta)\langle e_2(t,\theta), e_3(t,\theta)\rangle$$

denklemi elde edilir. (5.93) denkleminin çift ve tek kısımları eşitlendiğinde

$$\varepsilon^{(L)}(A(t,\theta)) = b \tag{5.94}$$

ve

$$\begin{aligned} s(A(t,\theta)) &= -s\langle e_1(t,\theta), e_3(t,\theta)\rangle - G_1 s(A(t,\theta)) \\ &\quad - G_1 s(A(t,\theta))(s\langle e_3(t,\theta), e_{23}(t,\theta)\rangle) \\ &\quad -(-1)^{|t||A(t,\theta)|} b\cdot(a_{23}(t,\theta))\, s\langle e_2(t,\theta), e_3(t,\theta)\rangle \end{aligned}$$

bulunur. Burada b bir süpersayıdır. (5.86) denklemi düzenlendiğinde

$$a_{12}(t,\theta) = -\frac{G_1 A_1(t,\theta)}{(-1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)} = -\frac{G_1 B_1(t,\theta)}{(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}A_1(t,\theta)} \tag{5.95}$$

ve

$$-(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{23}(t,\theta) = \frac{B_1(t,\theta)}{A_1(t,\theta)} \tag{5.96}$$

denklemleri elde edilir. (5.96) denkleminin her iki taraftan türevi alındığında

$$-A(t,\theta)G_1(a_{23}(t,\theta)) = G_1\left(\frac{B_1(t,\theta)}{A_1(t,\theta)}\right) \tag{5.97}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde

$$A(t,\theta)G_1(a_{23}(t,\theta)) = (-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}a_{12}(t,\theta)\left[A(t,\theta)^2 a_{23}^2(t,\theta)+1\right] \tag{5.98}$$

olur. (5.98) denkleminde $A(t,\theta)$ değeri yerine yazılırsa

$$(b+s(A(t,\theta)))G_1(a_{23}(t,\theta)) = a_{12}(t,\theta)[(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}+(b+s(A(t,\theta)))^2 a_{23}^2(t,\theta)]$$

bulunur. Buradan da

$$G_1(a_{23}(t,\theta)) = \frac{a_{12}(t,\theta)}{(b+s(A(t,\theta)))}\left[(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}+(b+s(A(t,\theta)))^2 a_{23}^2(t,\theta)\right] \tag{5.99}$$

elde edilir.

Teorem 5.4.2 $M, N \subset \left(B_L^{(m,n)}\right)_1$ eğrileri $V \subset B_L^{(1,1)}$ açık olacak şekilde (V,c) ve (V,c^*) koordinat komşulukları ile verilsin. M eğrisinin eğrilikleri $a_{65}(t,\theta)$ ve $a_{23}(t,\theta)$ ise

$$G_1(a_{67}(t,\theta)) = \frac{a_{56}(t,\theta)}{(b+s'(A(t,\theta)))}\left[(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}-\left(b+s'(A(t,\theta))\right)^2 a_{67}^2(t,\theta)\right]$$

denklemini sağlar. Burada $s'(A(t,\theta))$, $A(t,\theta)$ değişkeninin tek kısmı ve b süpersayıdır.

İspat Tanım 5.1.2 Mannheim süpereğri çifti tanımı yardımıyla

$$c^*(t,\theta) = c(t,\theta) + A(t,\theta)e_7(t,\theta) \tag{5.100}$$

denklemi yazılır. Böylece (t,θ) ve $(t^*,\theta^*) \in V$ açık aralığının sırasıyla M ve N için yay parametreleri olduğu kabul edilirse (5.100) denkleminin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa

$$G_1^* c^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} = G_1 c(t,\theta) + G_1 A(t,\theta)e_7(t,\theta) + (-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)G_1 e_7(t,\theta) \tag{5.101}$$

denklemi elde edilir. (4.5) Frenet türev formüllerinden

$$\begin{aligned} e_5(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= e_5(t,\theta) + G_1 A(t,\theta)e_7(t,\theta) \\ &\quad -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{67}(t,\theta)e_6(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.102}$$

denklemi bulunur. (5.102) denklemi ile $e_7(t,\theta)$ süperskalar çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle e_5^*(t,\theta), e_7(t,\theta)\rangle \frac{dt^*}{dt} &= \langle e_5(t,\theta), e_7(t,\theta)\rangle + G_1 A(t,\theta)\langle e_7(t,\theta), e_7(t,\theta)\rangle \\ &\quad -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{23}(t,\theta)\langle e_6(t,\theta), e_7(t,\theta)\rangle \end{aligned} \tag{5.103}$$

bulunur. (5.103) denklemi çift ve tek kısımlarına ayrılıp Mannheim süpereğri çifti tanımı uygulandığında

$$\varepsilon^{(L)}\left(G_1\left(A(t,\theta)\right)\right) = 0 \tag{5.104}$$

denklemi elde edilir. O halde $A(t,\theta)$ sıfırdan farklı sabit olduğu anlamına gelir. Diğer bir deyişle

$$e_5^*(t,\theta) = A_1(t,\theta)e_5(t,\theta) + B_1(t,\theta)e_6(t,\theta) \tag{5.105}$$

şeklinde ifade edilir. (5.105) denkleminin t ye göre türevi alınıp (4.5) Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} a_{65}^*(t,\theta)e_6^*(t,\theta)\frac{dt^*}{dt} &= \left[G_1 A_1(t,\theta) - (-1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)a_{56}(t,\theta)\right]e_5(t,\theta) \\ &\quad + \left[(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}A_1(t,\theta)a_{56}(t,\theta)G_1 B_1(t,\theta)\right]e_6(t,\theta) \\ &\quad +(-1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)a_{67}(t,\theta)e_7(t,\theta) \end{aligned} \tag{5.106}$$

denklemi bulunur. (5.106) denkleminden $\left\{e_7(t,\theta), e_6^*(t,\theta)\right\}$ lineer bağımlı olduğundan

$$G_1 A_1(t,\theta) - B_1(t,\theta)a_{56}(t,\theta) = 0 \tag{5.107}$$

ve

$$A_1(t,\theta)a_{56}(t,\theta)G_1 B_1(t,\theta) = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu durumda (5.105) denkleminden

$$\frac{1}{A_1(t,\theta)} = \frac{-(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\,(b+s'(A(t,\theta)))a_{67}(t,\theta)}{B_1(t,\theta)} \tag{5.108}$$

b bir süpersayı olacak şekilde eşitliği yazılır. Bu durumda (5.108) denkleminden

$$B_1(t,\theta) = -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A_1(t,\theta)\,(b+s'(A(t,\theta)))a_{67}(t,\theta) \tag{5.109}$$

elde edilir. (5.109) denkleminin her iki tarafı $B_1(t,\theta)$ ile bölünür ve çift-tek kısımlardan yararlanılırsa

$$\begin{aligned} 1 \;=\;& -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\left[\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)+s'\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)\right]\left(b+s'(A(t,\theta))\right) \\ &\cdot\left[\varepsilon^{(L)}\left(a_{67}(t,\theta)\right)+s'\left(a_{67}(t,\theta)\right)\right] \end{aligned} \tag{5.110}$$

bulunur. (5.110) denkleminde eşitliğin iki tarafındaki çift-tek eşitlikleri kullanılırsa

$$-(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)b\cdot\varepsilon^{(L)}\left(a_{67}(t,\theta)\right)=1 \tag{5.111}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 \;=\;& -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)s'(A(t,\theta))\varepsilon^{(L)}\left(a_{67}(t,\theta)\right) \\ & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}\varepsilon^{(L)}\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)s'(A(t,\theta))s'\left(a_{67}(t,\theta)\right) \\ & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}s'\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)b\cdot\varepsilon^{(L)}\left(a_{67}(t,\theta)\right) \\ & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}s'\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)b\cdot s'\left(a_{67}(t,\theta)\right) \\ & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}s'\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)s'(A(t,\theta))s'\left(a_{67}(t,\theta)\right) \\ & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}s'\left(\frac{A_1(t,\theta)}{B_1(t,\theta)}\right)s'(A(t,\theta))\varepsilon^{(L)}\left(a_{67}(t,\theta)\right) \end{aligned} \tag{5.112}$$

eşitlikleri yazılır. (5.102) denkleminde Mannheim süpereğri çifti tanımı uygulandığında

$$\begin{aligned} 0 \;=\;& \langle e_5(t,\theta),e_7(t,\theta)\rangle+G_1A(t,\theta)\,\langle e_7(t,\theta),e_7(t,\theta)\rangle \\ & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{67}(t,\theta)\,\langle e_6(t,\theta),e_7(t,\theta)\rangle \end{aligned} \tag{5.113}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 \;=\;& s'\,\langle e_5(t,\theta),e_7(t,\theta)\rangle+G_1(A(t,\theta))\left(1+\left\langle s'(e_7(t,\theta)),e_7(t,\theta)\right\rangle\right) \\ & -(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{67}(t,\theta)\,\langle e_6(t,\theta),e_7(t,\theta)\rangle \end{aligned} \tag{5.114}$$

denklemi elde edilir. (5.113) denkleminin çift ve tek kısımları eşitlendiğinde

$$\varepsilon^{(L)}\left(A(t,\theta)\right)=b \tag{5.115}$$

ve

$$\begin{aligned} s'(A(t,\theta)) &= -s'\langle e_5(t,\theta),e_7(t,\theta)\rangle - G_1 s'(A(t,\theta)) \\ &\quad -G_1 s'(A(t,\theta))\left(s'\langle e_7(t,\theta),e_7(t,\theta)\rangle\right) \\ &\quad -(-1)^{|t||A(t,\theta)|} b\cdot(a_{67}(t,\theta))\, s'\langle e_6(t,\theta),e_7(t,\theta)\rangle \end{aligned}$$

bulunur. Burada b bir süpersayıdır. (5.107) denklemi düzenlendiğinde

$$a_{56}(t,\theta) = -\frac{G_1 A_1(t,\theta)}{(-1)^{|t||B_1(t,\theta)|}B_1(t,\theta)} = -\frac{G_1 B_1(t,\theta)}{(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}A_1(t,\theta)} \tag{5.116}$$

ve

$$-(-1)^{|t||A(t,\theta)|}A(t,\theta)a_{67}(t,\theta) = \frac{B_1(t,\theta)}{A_1(t,\theta)} \tag{5.117}$$

denklemleri elde edilir. (5.117) denkleminin her iki tarafının türevi alındığında

$$-A(t,\theta)G_1(a_{67}(t,\theta)) = G_1\left(\frac{B_1(t,\theta)}{A_1(t,\theta)}\right) \tag{5.118}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde

$$A(t,\theta)G_1(a_{67}(t,\theta)) = (-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}a_{56}(t,\theta)\left[A(t,\theta)^2 a_{67}^2(t,\theta)+1\right] \tag{5.119}$$

olur. (5.119) denkleminde $A(t,\theta)$ değeri yerine yazılırsa

$$\left(b+s'(A(t,\theta))\right)G_1(a_{67}(t,\theta)) = a_{56}(t,\theta)[(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}+\left(b+s'(A(t,\theta))\right)^2 a_{67}^2(t,\theta)]$$

bulunur. Buradan da

$$G_1(a_{23}(t,\theta)) = \frac{a_{56}(t,\theta)}{(b+s'(A(t,\theta)))}\left[(-1)^{|t||A_1(t,\theta)|}+\left(b+s'(A(t,\theta))\right)^2 a_{67}^2(t,\theta)\right] \tag{5.120}$$

elde edilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmamız, süperuzayda kinematik yapıları, bir eğrinin kinematiğinden yaralanarak irdelemeye yöneliktir. Bu bağlamda eğrinin ve eğri çiftlerinin birbirine göre hareketlerini incelemek tezimizin bütününde özgünlüğü ve önemli bir parçayı oluşturmaktadır. Valentin Gabriel Cristea (2005) tarafından yayımlanan "Existence and Uniqueness Theorem for Frenet Frame Supercurves" başlıklı çalışmada Frenet çatısı süpereğriler için yapılmıştır. Bu çalışmada Valentin, A. Rogers tarafından yapılan makalelerindeki (m,n)-boyutlu süper-Öklid uzayından yararlanmış ve bu uzayın üzerinde süperskalar çarpım olarak adlandırılan yeni skalar çarpım ile ortogonallik tanıtmıştır. Buna ek olarak, genel durumda süperdüzgün süpereğrilerle ilişkilendirilen Frenet çatı tanımını vermiştir. Bu tanımlar, süper-Öklid uzayında süpereğriler üzerinde hareketi incelememizi sağlayan kavramlardır.

Bir süpereğrinin kinematiği incelenirken total süper-Öklid uzayında süperdüzgün süpereğrilerin çift kısımları için Frenet çatıları Cristea (2005) tarafından verilmiştir. Bu çalışmaya ek olarak süperuzayın tek kısmı için Frenet hesabı ile ilgili sonuçlar incelenmiş ve bazı örnekler yapılmıştır. Süper-Öklid uzayının tek ve çift kısımları için Frenet çatısının kullanılmasıyla süpereğri çiftleri olarak bilinen Bertrand süpereğri çifti, Mannheim süpereğri çifti ve involüt-evolüt süpereğri çifti kavramları tanımlanarak, bu eğri çiftleri için bazı özellikler verilmiştir.

Burada verilen yapılar kullanılarak, süperuzayda süpereğriler üzerine bilinen bazı teoremler uyarlanabilir. Süperuzayda kinematik yapıları incelemek ve sistemin enerji geçiş denklemlerini elde etmek de mümkün olabilir. Süperuzayda paralel transport-öteleme tanımlanmaya çalışılabilir ve gerekli geçiş denklemleri elde edilebilir. Süperuzayda paralel süpereğriler üzerine incelemeler de yapılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aitchison, I. Jr., 2007, Supersymmetry in particle physic an elementary introduction, Cambridge University Press, p.222.

Akyiğit, M., Azak, A. Z., Ersoy, S., 2010, Involute-evolute curves in Galilean space G^3, Scientia Magna, 6, 4, 75-80.

As, E., Sarıoğlugil, A., 2014, On the Bishop curvatures of involute-evolute curve couple in E^3, International Journal of Physical Sciences, 9, 7, 140-145.

Anonim, 2013, Kinematics, https://en.wikipedia.org/wiki/Supermanifold, erişim tarihi: 06.08.2013.

Anonim, 2016, Supermanifold, https://en.wikipedia.org/wiki/Supermanifold, erişim tarihi: 15.04.2016.

Anonim, 2016, Frenet-Serret formulas, https://en.wikipedia.org/wiki/Supermanifold, erişim tarihi: 17.05.2016.

Anonim, 2017, Berezinian, https://en.wikipedia.org/wiki/Berezinian, erişim tarihi: 02.06.2017.

Aycan, C.,1998, Lifts on jet bundles and prolongation relations, M.Sc. Thesis, Pamukkale University, Denizli, s.93.

Aycan, C., 2003, The lifts of Euler-Lagrange and Hamilton equations on the extended jet bundles, D.Sc. Thesis, Osmangazi University, Eskişehir, p.129.

Bagchi, B., 2001, Supersymmetry in quantum and classical mechanics, Chapman & Hall/CRC, Washington, p.224.

Balgetir, H., Bektaş, M. and Ergüt, M., 2004, Bertrand curves for nonnull curves in 3-dimensional Lorentzian space, Hadronic Journal, 27, 229-236.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Balgetir, H., Bektaş, M., Inoguchi, J., 2004a, Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations, Note di Metamatica, 23, 1, 7-13.

Bartocci, C., Bruzzo, U., Ruiperez, D.H., 1991, The geometry of supermanifolds (Mathematics and Its Applications), Springer, p.242.

Batchelor, M., 1979, Structure of supermanifolds, Transactions of the American Mathematical Society, 253, 329-338.

Batchelor, M., 1980, Two approaches to supermanifolds. Transactions of the American Mathematical Society 258, 257-270.

Bellucci S., 2006, Supersymmetric mechanics, supersymmetry, noncommutativity and matrix models, Springer, p.244.

Bellucci, S., Krivonos, S., 2006, Supersymmetric mechanics in superspace, Lecture Notes in Physics, 698, 49-96.

Berezin, F. A , 1987, Introduction to superanalysis, Mathemathical Physics and applied Mathemathics, Holland, p.424.

Berezin, F. A., Leites, D. A., 1975, Supervarieties, Soviet Mathematics. Doklady. 16, 1218-1222.

Bertrand, J.M., 1850, Memoire sur la theorie des courbes a double courbure, Journal de Mathematiques Pures Et Appliquees, 15, 332-350.

Bilici, M., Çalışkan, M., 2009, On the involutes of the spacelike curve with a timelike binormal in Minkowski 3-space, International Mathematical Forum, 4, 31, 1497-1509.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Bilici, M., Çalışkan, M., 2011, Some new notes on the involutes of the timelike curves in Minkowski 3-space, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 6, 41, 2019-2030.

Bloomenthal, J., 1990, Calculation of reference frames along a space curve, Graphics gems, Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA., 567-571.

Blum, R., 1966, A remarkable class of Mannheim-curves, Canadian Mathematical Bulletin, 9, 2, 223-228.

Boothby, W. M., 1986, An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, Academic Press, Florida Inc., Second Edition, p.430.

Bowman, R.H., 1970, On differentiable extensions, Tensor(N.S), 21, 139-150.

Boyer, C., 1968, A history of mathematics, New York: Wiley, p.688.

Boyer, C., 1984, The theory of G^{∞}-supermanifolds, Transactions of the American Mathematical Society, 285, 1, 241-267.

Bükcü, B., Karacan, M.K., 2007, On the involute and evolute curves of the spacelike curve with a spacelike binormal in Minkowski 3-space, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 2, 5, 221-232.

Carmo, do M.P., 2012, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, p.503.

Choi, J., Kang, T., Kim, Y., 2012, Bertrand curves in 3-dimensional space forms, Applied Mathematics and Computation, 219, 3, 1040-1046.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Cortes, V., 2006, Introduction to supersymmetry, Revista De Launi´on Matem´atica Argentina, 47, 1, 23-28.

Cristea, V. G., 2005, Existence and uniqueness theorem for Frenet frame supercurves, Note di Matematica, 24,1, 143-167.

De Leon, M., Salgodo, M., 1986, Diagonal lifts of tensor fields to the frame bundle of second order, Acta Scientiarum Mathematicarum, 50, 67-86.

De Leon, M., Rodrigues, P.R., 2011, Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science Publishers, p.482.

DeWitt, B.,1992, Supermanifolds, Cambridge University Press, p. 264.

Divjak, B., Šipuš, Ž. M., 1999, Involutes and evolutes in n-dımensıonal simply isotropıc space $I_n^{(1)}$, Journal of Information and Organizational Sciences, 23, 1, 71-79.

Ekici C., Tozak H**.**, 2015, On the involutes for dual split quaternionic curves, Konuralp Journal of Mathematics, 3, 2, 190-201.

Ekmekçi, N., İlarslan, K., 2001, On Bertrand curves and their characterization, Differential Geometry Dynamical System, 3, 17-24.

Fayet, P., S. Ferrara, S., 1976, Supersymmetry, Physics Reports, 32, 5, 249-334.

Ferrara S., Fioresi R., Varadarajan V.S., 2011, Supersymmetry in mathematics and physics, Springer, USA, p.273.

Frappat L., Sciarrino A., Sorba, P., 2010, Dictionary on lie algeabras and superalgeabras, Academic press, p.410.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Freed D.S. , 1999, Five lectures on supersymmetry, American Mathematical Society, 1999, p.119.

Freund, P.G.O., 1986, Introduction to supersymmetry. Cambridge Monograph on Mathematical Physics, Cambridge University Press, p.152.

Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R., 1972, Connection, curvature and cohomology, 1, Academic Press, New York, p.445.

Gür, S., Şenyurt,S., 2012, On the dual spacelike-spacelike involute-evolute curve couple on dual Lorentzian space D_1^3, International Journal of Mathematical Engineering and Science,1, 5, 14-29.

Hacısalihoğlu, H. H., 1998, Diferensiyel geometri, Ankara Üniversitesi, 1. Cilt, s.272.

Hacısalihoğlu, H. H., 2000, Diferensiyel geometri, Ankara Üniversitesi, II Cilt, s.340.

Hacısalihoğlu, H. H., Ekmekçi, N., 2003, Tensör geometri, Hacısalihoğlu Yayınları, Ankara, s.251.

Huyghens, C., 1963, Horologium ascillatorium, part III, http://www.17centurymaths.com/contents/huygens/horologiumpart3.pdf, erişim tarihi: 13.02.2015.

Inoque, A., Maeda, Y.,1991, Foundations of calculus on supereuclidean space based on a Frechet-Grassmann algebra, Kodai Mathematical Journal , 14, 72-112.

Jadczyk, A., Pilch, K., 1981 Superspaces and supersymmetries, Communations.in Mathematical. Physics,78, 373-390.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Kazaz, M., Uğurlu, H.H., Önder, M., Oral, S., 2014, Bertrand partner D-curves in the Minkowski 3-space E_1^3, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 2, 1, 68-82.

Konstant, B., 1977, Graded manifolds, Graded lie theory and prequantization, Differential Geometric Methods in Mathematical Physics, in: K. Bleuler and A. Reetz, (Ed.), Lecture Notes in Mathematics 570, Springer, Berlin, pp. 177-306.

Kuhnel, W., 2006, Differential geometry curves-surfaces-manifolds, American Mathematical Society, Second Edition, p.54.

Leites, D. A., 1980, Introduction to the theory of supermanifolds, Russian Mathematical Surveys, 35, 1(httpiopscience.iop.org0036-0279351R01).

Leon, M.D., Rodrigues, P.R., 1989, Medhods of differential geometry in analytical mechanics, North-Holland Mathematics Studies 158, Nort-Holland, p. 482.

Matsuda, H., Yorozu, S.,2003, Notes on Bertrand curves, Yokohama Mathematical Journal, 50, 41-58.

Mangiarotti,L. and Sardanashvily, G., 2000, Connections in classical and quantum field theory, World Scientific Publishing Company, p.504.

Orbay, K., Kasap, E., 2009, On Mannheim partner curves in E^3, International Journal of Physical Sciences, 4, 5, 261-264.

Öğrenmiş, A.O., Öztekin, H., Ergüt, M., 2009, Bertrand curves in Galilean space and their characterizations, Kragujevac Journal of Mathematics, 32, 139-147.

Öztürk, U., Koç Öztürk, E., B., İlarslan, K., 2013, On the involute-evolute of the pseudonull curve in Minkowski 3-space, Journal of Applied Mathematics, 2013, 1-6.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Rabin, J., Crane, L., 1985, Global properties of supermanifolds, Communications in Mathematical Physics, 100, 141-160.

Rogers A., 1980, A global theory of supermanifolds, J. Math. Phys. 21, 6, 1352-1365.

Rogers A., 1986, Graded manifolds, supermanifolds and infinite-dimensional Grassmann algebras, Communications in Mathematical Physics,105, 375-384.

Rogers, A., 2007, Supermanifolds theory and applications, World Scientific Publishing Company, Singapore, p.251.

Sabuncuoğlu, A., 2010, Diferensiyel geometri, Nobel Yayınevi, Ankara, s.515.

Salam, A., Strathdee, J., 1974, Super-gauge transformation, Nuclear Physics, B76, 477-482.

Salam, A., Strathdee J., 1978, Supersymmetry and superfields, Fortschritte Physik 26, p57.

Salimov, A., Mağden, A., 2008, Diferensiyel geometri, Aktif Yayınevi, Erzurum, s.326.

Scheunert, M., 1979, The Theory of lie superalgebras an introduction, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, p.276.

Soni, S. K., Singh, S., 2000, Supersymmetry basic and consepts, Narosa Publishing House, India, p.192.

Sounders, D.J., 1989, The geometry of jet boundles, Cambridge University Press, Cambridge, p 293.

Şahin, B., 2012, Manifoldların diferensiyel geometrisi, Nobel Akademik Yayıncılık, s.294.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Şenyurt, S., Bilici, M., Çaliskan, M., 2015, Some characterizations for the involute curves in dual space, International Journal of Mathematical Combinatorics, 1, 113-125.

Şenyurt, S., Gür, S., 2012, Timelike-spacelike involute-evolute curve couple on dual Lorentzian space, Journal of Mathematical and Computational Science, 2, 6, 1808-1823.

Tani, M., 1969, Prolongations of hypersurfaces to tangent bundles, Kodai Mathematical Seminar Reports, 21, 85-96.

Tunçer, Y., Ünal, S.,2012, New representations of Bertrand pairs in Euclidean 3-space, Applied Mathematics and Computation, 219, 1833-1842.

Turgut, A. and Erdoğan, E., 1992, Involute-evolute curve couples of higher order in Rn and their horizontal lifts in Rn, Common. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A, 41, 3, 125-130.

Turgut, M. and Yilmaz,S. 2008. On The Frenet Frame and A Characterization of space-like Involute-Evolute Curve Couple in Minkowski Space-time. Int. Math. Forum 3(16): 793-801.

Tuynman, G. M., 2004, Supermanifolds and supergroups, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, p.407.

Udwadia, F. E., Kalaba, R. E., Hee-Cheng, E., 1997, Equations of motion for constrained mechanical systems and the extended D'Alembert principle, Quarterly of Applied Mathematics, 56, 321–331.

Uğurlu, H. H., 1987, Süpermanifoldlar üzerinde süper vektör yapıları ve C^{∞}- eğriler, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Ankara, p.97.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Varadarajan, V. S., 2004, Supersymmetry for mathematicia, Courant Institute of Mathematical Sciences and American Mathematical Society, Rhode Island, p.300.

Venant, B.S., 1845, Memoire sur les lignes courbes non planes, Journal de I'Ecole Polytechnique, 18, 1-76.

Vladimirov, V.S., Volovich, I.V., 1984, Superanalysis I: Differential calculus, Theoretical and Mathematical Physics, 60, 317-335.

Wang, F., Liu, H.L., 2007, Mannheim partner curves in 3-Euclidean space, Mathematics in Practice and Theory, 37, 1, 141-43.

Wess, J., Zumino, B., 1974, Supergauge transformations in four dimensions, Nuclear Physics B, 70, 1, 39-50.

West, P. C, 1986, Introduction to supersymmetry and supergravity, World Scientific Publishing, Singapore, p.440.

Witten, E., 2012, Notes on supermanifolds and integration, arXiv:1209.2199v2 [hep-th] erişim tarihi: 21.01.2014.

Yano, K., Kobayashi, S., 1966, Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles, Mathematical Society of Japan , 18, 2, 195-210.

Yano, K., Ishihara, S., 1973, Tangent and Cotangent Bundles, Marcel Dekker Inc., New York, p.434.Journal of the Mathematical Society of Japan

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hatice Tozak

Uyruğu : T.C.

Doğum Yeri, Yılı : Denizli, 1985

Medeni Hali : Bekar

İş Adresi : Dündar Uçar Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, Bağcılar/İstanbul

E-posta : hatice.tozak@gmail.com

Eğitim Bilgileri :

Doktora : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı (2010—)

Yüksek Lisans : Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü Anabilim Dalı (2008-2010)

Lisans : Ege Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2003-2008)

Lise : Denizli Erbakır Fen Lisesi (2000-2003)

Ortaöğrenim : Denizli Türk Eğitim Vakfı Anadolu Lisesi (1996-2000)

İş Deneyimi :

1. Dündar Uçar Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, İstanbul (30.06.2014—)

2. Yusuf Önertoy Çok Programlı Anadolu Lisesi, Antalya (06.09.2011-30.06.2014)

3. Hacı Şakir Meliha Nilüfer Öz İlköğretim Okulu, Denizli (24.09.2008-12.06.2009)

Yayınlar ve Bilimsel Faaliyetler:

1. Dede M., Ekici C., **Tozak H.**, Directional Tubular Surfaces, International Journal of Algebra, 9(12), (2015), 527-535.

2. Ekici C., **Tozak H.**, On The Involutes for dual split quaternionic curves, Konuralp Journal of Mathematics, 3(2), (2015), 190-201.

3. Dede M., **Tozak H.,** Ekici C., Timelike Directional Tubular Surfaces, Journal of Mathematical Analysis, Accepted, (2017).

4. Dede M., **Tozak H.,** Ekici C., Translation surfaces according to q-frame in Euclidean 3-space, Caucasian Mathematics Conference, CMC II, Van Yüzüncü Yıl University, Van-Turkey, 22-24 August 2017.

5. Dede M., **Tozak H.,** Ekici C., On The Parallel Ruled Surfaces With B-Darboux Frame, 13th Algebraic Hyperstructures and its Applications Conference (AHA2017), Yildiz Technical Univercity, İstanbul-Turkey, 24-27 July 2017.

6. Ekici C.,Yormaz C., **Tozak H.**, On the Bertrand Supercurves in Super-Euclidean Space, 15th International Geometry Symposium, Amasya University, Amasya-Turkey, 3-6 July 2017.

7. Dede M., Ekici C., **Tozak H.**, Spacelike Directional Tubular Surfaces, International Conference on Applied Sciences, Engineering and Mathematics, Üsküp-Makedonya, 05-07 Mayıs 2017.

8. Dede M., Ekici C., **Tozak H.**, Timelike Directional Tubular Surfaces, 14. Uluslararası Geometri Sempozyumu, Pamukkale Üniversitesi, 25-28 Mayıs 2016.

9. Ekici C.,Yormaz C., **Tozak H.**, On the Involute Supercurves, 14. Uluslararası Geometri Sempozyumu, Pamukkale Üniversitesi, 25-28 Mayıs 2016.

10. Dede M., Ekici C., **Tozak H.**, Directional Tubular Surfaces, 4th International Eurosian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Atina-Yunanistan, 31 Ağustos-3 Eylül 2015.

11. Ekici C., **Tozak H**., Involute Evolute Dual Split Quaternionic Curves, XI. Geometri Sempozyumu, Ordu Üniversitesi (Yayın No:2603850) 1-5 Temmuz 2013.

12. Aycan C., **Tozak H.**,”Vector Structure On 4-Dimensional Minkowski Space- Time” IX.Geometri Sempozyumu, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, 7-10 Haziran 2011.

13. Tozak H., XIII. Uluslararası Geometri Sempozyumu (Katılımcı), Yıldız Teknik Üniversitesi, 27-30 Temmuz 2015.

14. **Tozak H.**, XII. Uluslararası Geometri Sempozyumu (Katılımcı), Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, 23-26 Haziran 2014.

15. Tozak H., VIII. Geometri Sempozyumu (Katılımcı), Antalya Üniversitesi, 29 Nisan-2 Mayıs 2010.

16. **Tozak H.**, Süpermanifoldlar ve Süpersimetri Üzerinde Kinematik Yapılar, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Bilimsel Araştırma Projesi (ESOGÜ BAP), 201319A213, Araştırmacı, 11/10/2013-25/11/2016.

Seminerler ve Kurslar:

1. Fatih Projesi -Eğitimde Teknoloji Kullanımı Kursu, İstanbul, 23-27.03.2015

2. İş Sağlığı ve Güvenliği Eğitimi Kursu Fatih Projesi, İstanbul, 15-16.06.2015.

3. Çevrimiçi Eğitim Platformu Eğitimleri-Proje Tabanlı Yaklaşımlar Semineri, İstanbul, 22.09.2014-03.10.2014.

4. Fatih Projesi Etkileşimli Tahta Kullanım Semineri, Antalya, 20.06.2013.

5. Bilgisayar - MS Power Point Kursu, Antalya, 27-31.05.2013.

6. Proje Teknikleri Semineri, Antalya, 14-18.05.2012.

7. Eğitim Yönetimi Semineri, Antalya, 16-20.04.2012.

8. Eğitimde Yaratıcı Drama Semineri, Antalya, 02-06.04.2012.

9. Mesleki ve Temel Eğitim Kursu, Antalya, 01.10.2011-31.10.2011.

10. Mesleki ve Hazırlayıcı Eğitim Kursu, Antalya,19.11.2011-23.01.2012.