Lineer Olmayan Denklemlerin Çok Ölçekli Açılım Metodu ile Çözümleri

Fedakar Çakır

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Mayıs 2017

Solutions of Nonlinear Equations Using

Multiscale Expansion Method

Fedakar Çakır

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

May 2017

Lineer Olmayan Denklemlerin Çok Ölçekli Açılım Metodu ile Çözümleri

Fedakar Çakır

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Naci Özer

Mayıs 2017

ONAY

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Fedakar Çakır'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Lineer Olmayan Denklemlerin Çok Ölçekli Açılım Metodu ile Çözümleri" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER

İkinci Danışman **:** -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER

Üye : Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ömer ÜNSAL

Üye : Prof. Dr. Dursun ESER

Üye : Doç. Dr. Yılmaz DERELİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Mehmet Naci Özer danışmanlığında hazırlamış olduğum "Lineer Olmayan Denklemlerin Çok Ölçekli Açılım Metodu ile Çözümleri" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 03/05/2017

Fedakar Çakır

İmza

ÖZET

Lineer olmayan oluşum denklemleri, bilimin birçok alanında ortaya çıkan problemlerin matemetiksel modelleridir. Bu tür denklemler lineer ve lineer olmayan oluşum denklemleri olarak ikiye ayrılmaktadır. Son yıllarda oluşum denklemleri uygulamalı matematikte önemli bir çalışma alanı olmuştur.

Bu tez çalışmasında, lineer olmayan oluşum denklemleri için tam çözüm yöntemi ve bir pertürbasyon (bozulma) metodu olarak adlandırılan çok ölçekli açılım metodu üzerine çalışılmıştır. Birinci bölümde, çalışılan konu ve tezin amacı hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, literatür araştırması yapılmıştır. Üçüncü bölümde ise tezde çalışılan temel kavramlar tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde, çok ölçekli açılım metodu açıklanmıştır. Bu metotla, integrallenebilir yüksek mertebeden KdV tipi denklemler, Sawada-Kotera denklemi, Kaup-Kupershmidt denklemi ve Caudrey-Dodd-Gibbon denkleminden, integrallenebilir NLS tipi denklemler ve bu denklemlerin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.

Sonraki bölümde lineer olmayan oluşum denklemleri için tam çözüm yöntemlerinden (G’/G)-açılım yöntemi açıklanmıştır. Bu yöntemi kullanarak yüksek mertebeden KdV tipi denklem için tam çözüm elde edilmiştir.

Son olarak “yöntem” başlığı altında kullanılan yöntemler açıklanmış “bulgular ve tartışma’’ başlığı altında yapılan çalışmalardan elde edilen çözümler verilmiş ve “sonuç ve öneriler” bölümünde elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kısmi diferensiyel denklem, Lineer olmayan oluşum denklemi, Çok ölçekli açılım metodu, Tam çözüm yöntemleri.

SUMMARY

Nonlinear evolution equations are the mathematical models of problems that arise in many field of science. These equations are known as linear and nonlinear partial differential equations. In recent years, evolution equations has become an important field of study in applied mathematics.

In this thesis, a scientific work on exact solution method and multiple scale method which is known as a perturbation method for nonlinear evolution equations. In the first chapter, both subject and aim of this thesis are mentioned. In the second chapter, some early studies are considered about the subject. In the third chapter, some definitions about needed in the next chapters are mentioned.

In the fourth chapter, multiple scale method has been explained. By this method, integrable NLS type equations has been derived from integrable high order KdV type equations, Sawada-Kotera equation, Kaup-Kupershmidt equation and Caudrey-Dodd-Gibbon equation and approximate solutions have been obtained for these equations.

The next chapters the exact solution methods like (G'/G)-expansion method have been explained for the nonlinear evolution equations. By using this method, exact solution have been obtained for the high order KdV type equation.

Finally, the results obtained using these methods are compared.

Key Words : Partial differential equation, Nonlinear evolution equation, Multiple scale method, Exact solution methods.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın her aşamasında rehberlik eden, tüm destek ve yardımlarını esirgemeyen, bilgi birikimleriyle teşvik edici olan ve görüşlerinden yararlandığım değerli hocalarım Prof. Dr. Mehmet Naci Özer ve Prof. Dr. Ahmet BEKİR' e; eğitim hayatım boyunca manevi ve maddi desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan sevgili aileme destekleri için teşekkürlerimi sunarım.

Fedakar Çakır

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam)

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
p	Suyun yoğunluğu
T	Yüzey gerilimi

Kısaltmalar	**Açıklama**
CH	Camassa-Holm
DP	Degasperis-Procesi
KdV9	Dokuzuncu mertebeden KdV
KP	Kadomtsev-Petviashvili
KB	Kawahara-Burger
KdV	Korteweg-de Vries
NLS	Lineer olmayan Schrödinger
MKdV	Modifiye Korteweg-de Vries
TSD	Ters saçılım dönüşümü
KdV7	Yedinci mertebeden KdV

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Kısmi türevli diferensiyel denklemler, temel doğa yasalarının formüle edilmesinde; uygulamalı matematik, matematiksel fizik ve mühendislik bilimlerinde karşılaşılan çok sayıda problemin matematiksel analizinde ortaya çıkmaktadır. Bu konu modern matematik bilimlerinde, özellikle fizik, geometri ve analizde önemli bir rol oynar. Fizik bilimlerinin kapsamında çoğu problem, başlangıç ve/veya uygun sınır şartları ile diferensiyel denklemler kullanılarak açıklanmıştır. Bu problemler genellikle başlangıç değer problemleri, sınır değer problemleri ya da başlangıç-sınır değer problemleri olarak ortaya çıkar (Debnath, 2011). Kısmi türevli diferensiyel denklemler, lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemler olarak iki kısma ayrılır. Uygulama alanlarına bağlı olarak da çeşitleri kendi içlerinde artmaktadır. Bahsedilen alanlardaki olguların matematiksel modellemesinde genellikle lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerle karşılaşılır (Debnath, 2011).

Bu yüksek lisans tezinde, bazı lineer olmayan oluşum denklemlerinin çok ölçekli açılım metodu kullanılarak yaklaşık çözümleri araştırılacaktır. Bahsedilen denklemler için (1+1) boyutlu yedinci mertebeden KdV denklemi (KdV7), (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Sawada-Kotera denklemi, (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Kaup-Kupershmidt denklemi, (1+1) boyutlu dokuzuncu mertebeden KdV denklemi (KdV9) ve (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon denklemi alınıp bu denklemlere çok ölçekli açılım metodu uygulanarak yeni integrallenebilir denklemlerin elde edilmesi araştırılacaktır. Daha sonra $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi verilerek (1+1) boyutlu KdV7 denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi kullanılarak tam çözümü incelenecektir. Bu kapsamda amaç; çok ölçekli açılım metodu kullanılarak integrallenebilir oluşum denklemlerinden iyi bilinen yeni integrallenebilir oluşum denklemleri elde etmektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerle ilgili geçmişten günümüze çok önemli gelişmeler olmuştur. Dalgaların lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerle modellenmesi ilk defa 1834 yılında Edinburgh-Glasgow kanalında John Scott Russell tarafından soliter dalganın yer değişiminin keşfedilmesi ile doğmuştur. Russell'ın soliter dalgalarla ilk kez karşılaşması 1844 yılında The British Association'daki ”Dalgalar Üzerine Rapor (Report on Waves)” adlı çalışmasında ifade edilmiştir (Russell, 1844). 1834 yılındaki Russell'ın yaptığı bu çalışma daha sonra 1995 yılında İskoçya Edinburgh'de bulunan Heriott-Watt Üniversitesi tarafından Edinburgh yakınlarındaki Union Kanal'da yeniden canlandırılmıştır (Yang, 2010). 1870'lerde birbirinden bağımsız olarak Lord Rayleigh (1876) ve J. Boussinesq (1871) tarafından Russell'ın öngörüsü ispatlanmıştır. Daha sonra 1895 yılında D. J. Korteweg ve G. de Vries tarafından sığ sulardaki dalga yayılımının gözlenmesiyle lineer olmayan bir oluşum denklemi olan Korteweg-de Vries (KdV) denklemi bulunmuştur. Yirminci yüzyılın ilk yarısına kadar soliter dalgalar ve bağlı oluşum denklemleri bilimsel çalışmaların ana başlıklarından biri değildir. Teorideki modern gelişmeler ve KdV soliter dalgalarının uygulamaları 1955 yılında Enrico Fermi, John Pasta ve Stanislaw Ulam'ın ayrık lineer olmayan kütle-yay sistemi üzerinde yayınladıkları Los Alamos Bilimsel Labaratuar çalışmalarıyla başlamaktadır. Lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi ise kırılım göstergesi dalga genişliğine duyarlı orta bölgedeki lazer ışınının yayılımı, ideal bir akışkanın serbest yüzeyindeki su dalgaları ve plazma dalgaları gibi lineer olmayan dalgaların tanımındaki çeşitli fiziksel durumlardan ortaya çıkmıştır (Sulem ve Sulem, 1999).

İntegrallenebilir KdV denkleminden integrallenebilir NLS denkleminin elde edilmesi ilk kez Zakharov (1986) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu metot, çok ölçekli açılım metodu olarak tanımlanır ve lineer olmayan oluşum denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılan bir pertürbasyon (bozulma) metodudur. KdV denklemine çok ölçekli açılım metodu uygulanarak NLS denkleminin elde edildiği bilinmektedir (Calegora vd., 2000; Degasperis vd., 1997; Osborne ve Boffetta, 1989; Zakharov ve Kuznetsov, 1986). Çok ölçekli açılım metodu kullanılarak, KdV denkleminin ardıştırma operatöründen NLS denkleminin ardıştırma operatörü (Özer, 1999), NLS denklemi ve integrallenebilen beşinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri arasında bir ilişki olduğu (Dağ ve Özer, 2001), yüksek mertebeli NLS denkleminden beşinci mertebeden KdV denklemi (Özer ve Taşcan, 2003), Schrödinger denklemi, 3. mertebeden Schrödinger fark, Kuple Schrödinger fark ve Modifiye Schrödinger fark denklemlerinden KdV tipi fark denklemleri (Ünsal, 2012), mertebesi çift sayı olan KdV tipi denklemlerden NLS denklemi (Ayhan, 2015) elde edilmiştir. Bu metot yardımıyla birçok bilim insanı tarafından NLS ve KdV tipi denklemler arasında farklı ilişkiler olduğu gösterilmiştir (Taşcan, 2002; Koparan, 2008; Özer ve Taşcan, 2009).

Son yıllarda lineer olmayan oluşum denklemlerinin yaklaşık çözümlerinin yanında, tam çözümleri üzerine de önemli gelişmeler görülmüştür. Birinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümleri Lagrange-Charpit yöntemi ile bulunabilir (Koca, 2008). KdV denkleminin tam çözümü ise Gardner, Kruskal, Greene ve Miura 'nın Ters Saçılım Transformasyonu (Inverse Scattering Transform) veya Ters Saçılım Yöntemi (Method of Inverse Scattering) ile 1974 yılında elde edilmiştir. Bu yöntem ile diğer birçok lineer olmayan denklem çözülmüştür (Pava, 2009).

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümünü elde etmek için genel bir yöntem yoktur. Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için birçok tam çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları: tanh yöntemi (Malfliet, 1992), sinüs-kosinüs yöntemi (Wazwaz, 2004), $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi (Wang, 2008), $\frac{1}{G'}$-açılım yöntemi (Yokuş, 2011), genişletilmiş tanh yöntemi (Wazwaz, 2007), kompleks tanh yöntemi (Khuri, 2004), birinci integral yöntemi (Feng, 2002), lineer olmayan diferensiyel fark denklemleri için $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi (Hu ve Ma, 2002), $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$-açılım yöntemi (Li vd., 2010), trial denklem yöntemi (Ma ve Fuchssteiner, 1996), üstel fonksiyon yöntemi (Wu ve He, 2006), ansatz (dark-bright) yöntemi (Biswas, 2008) ve fonksiyonel değişken yöntemi (Zerarka vd., 2010) dir. Bu yöntemlerden Wang vd. (2008) tarafından önerilen $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemine bu çalışmada yer verilmiştir.

$\left(\frac{G'}{G}\right)$- açılım yöntemi bir çok lineer olmayan kısmi diferensiyel denkleme uygulanmıştır: Bekir (2008), Zhang vd. (2008) ve Güner (2014). Bu yöntem üzerinde bir çok bilim insanı çeşitli çalışmalar yapmıştır: Jiao Zhang, Xiaoli Wei ve Yongjie Lu tarafından çalışılan yeni bir Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu (Zhang vd., 2008), Sheng Zhang, Jing-Lin Tong ve Wei Wang tarafından çalışılan Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu (Zhang vd., 2008), Hai-Ling Lü, Xi-Qiang Liu ve Lei Niu tarafından çalışılan Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu (Li vd., 2010), Guo ve Zhou tarafından ilk kez çalışılan Genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu (Guo ve Zhou, 2010), Shimin Guo, Yubin Zhou ve Chenxia Zhao tarafından geliştirilen Geliştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu (Guo vd., 2010), Elsayed M. E. Zayed tarafından çalışılan daha da Geliştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu (Zayed, 2011), A. R. Shehata, E. M. E. Zayed ve K. A. Gepreel tarafından çalışılan yeni bir Geliştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu (Shehata vd., 2011), Yanhong Qiu ve Baodan Tian tarafından çalışılan yine Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu (Qiu ve Tian, 2011) ve Junchao Chen ve Biao Li tarafından çalışılan Çoklu $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu (Chen ve Li, 2012),... dur.

3.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan bazı kavramlar verilmiştir.

3.1 Diferensiyel Denklem

Bir denklemde, belirli bir değişkene göre türev varsa, bu değişkene bağımsız değişken ve denklemde türevi bulunan değişkene de bağımlı değişken denir. Bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevlenmiş bir veya daha fazla bağımlı değişken içeren denkleme diferensiyel denklem denir. Diferensiyel denklemler, adi diferensiyel denklemler ve kısmi diferensiyel denklemler olmak üzere ikiye ayrılır.

3.1.1 Adi diferensiyel denklem

Bir diferensiyel denklemde bağımlı değişken yalnızca bir bağımsız değişkene bağlıysa bu denkleme adi diferensiyel denklem denir. x bağımsız değişken ve y bağımlı değişken olacak şekilde bir adi diferensiyel denklem genel olarak

$$F(x, y, y^{'}, ..., y^{(n)}) = 0 \tag{3.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $y^{(n)}; y$ nin x e göre n. türevidir.

Örnek: y bağımlı değişken ve x bağımsız değişken olmak üzere

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$y^{'} + y = x$$

$$y^{''} + xy^{'} - y = 0$$

denklemleri adi diferensiyel denklemdir.

3.1.2 Kısmi diferensiyel denklem

Kısmi diferensiyel denklemler, doğanın temel kanunlarının formüle edilmesi ve çeşitli fiziksel, kimyasal ve biyolojik modeller üzerinde geniş çalışmalar yapılması ile ortaya çıkmıştır. Bir diferensiyel denklemde bağımlı değişken, iki veya daha fazla bağımsız değişkenin fonksiyonuysa o denklemde kısmi türevler vardır. Bu denklemlere kısmi diferensiyel denklemler denir. u bağımlı; $(x, y, ...)$ bağımsız değişkenler olacak şekilde bir kısmi diferensiyel denklem genel olarak

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, ...) = 0 \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $u = u(x, y, ...)$ dir. Ayrıca $u = u(x, y)$ olmak üzere

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

şeklindeki birinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çalışmaları ilk olarak Lagrange tarafından başlatılmıştır.

Örnek: u bağımlı değişken ve x, y, z, t bağımsız değişkenler olmak üzere

$$xu_x + yu_y = 0$$

$$u_{xx} + 2yu_{xy} + 3xu_{yy} = 4\sin x$$

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

denklemleri birer kısmi diferensiyel denklemdir.

Diferensiyel denklemdeki en yüksek basamaktan türevin mertebesine o diferensiyel denklemin **mertebesi** denir. Bir diferensiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin üssüne o diferensiyel denklemin **derecesi** denir.

Örnek: u bağımlı değişken ve x, y bağımsız değişkenler olmak üzere

$$u_x^2 + u_y^2 = 1$$

denklemi ikinci dereceden ve birinci mertebeden bir kısmi diferensiyel denklemdir.

Örnek: u bağımlı değişken ve x, y bağımsız değişkenler olmak üzere

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

denklemi birinci dereceden ve ikinci mertebeden bir kısmi diferensiyel denklemdir.

Örnek: u bağımlı değişken ve x, t bağımsız değişkenler olmak üzere

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0$$

denklemi birinci dereceden ve dördüncü mertebeden bir kısmi diferensiyel denklemdir.

3.1.2.1 Lineer kısmi diferensiyel denklem

Lineer kısmi diferensiyel denklemler difüzyon denklemi ve dalga denklemi gibi bilimsel birçok alanda ortaya çıkmaktadır. Bir kısmi diferensiyel denklemde her bağımlı değişken ve her mertebeden kısmi türevler birinci dereceden ise ve aynı zamanda bağımlı değişkenler veya kısmi türevler çarpım halinde yer almıyorlarsa böyle denklemlere lineer kısmi diferensiyel denklem denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci mertebeden lineer kısmi diferensiyel denklem genel olarak

$$P(x,y)z_x + Q(x,y)z_y + R(x,y)z = S(x,y) \tag{3.3}$$

formundadır.

Aşağıda bazı önemli lineer kısmi diferensiyel denklem modelleri verilmiştir (Wazwaz, 2009).

1) Isı Denklemi:

$$u_t = k u_{xx}$$

burada k sabit terimdir.

2) Bir boyutlu uzayda dalga denklemi:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

burada c sabit terimdir.

3) Laplace Denklemi:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

4) Klein-Gordon Denklemi:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = \mu^2 u$$

burada c ve μ sabit terimlerdir.

5) Lineer Schrödinger Denklemi:

$$iu_t + u_{xx} = 0, i = \sqrt{-1}$$

6) Telgraf Denklemi:

$$u_{xx} = \alpha u_{tt} + bu_t + cu$$

burada a, b ve c sabit terimlerdir.

Bir kısmi diferensiyel denklem, denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevlere göre (denklemdeki düşük basamaklı türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinden bağımsız olarak) lineer ise bu denkleme **yarı-lineerdir (kuasi lineer)** denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci mertebeden yarı-lineer denklemin en genel hali

$$P(x,y,z)z_x + Q(x,y,z)z_y = R(x,y,z)$$

şeklindedir.

Örnek:

$$uu_x + yu_y = u^2$$

denklemi yarı-lineer kısmi diferensiyel denklemdir.

3.1.2.2 Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler, fiziksel denklemlerin matematiksel analizinde ve doğanın temel kanunlarının formüllendirilmesinde sıklıkla kullanılır. x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere birinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem genel olarak

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

şeklindedir. x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem genel olarak

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}) = 0$$

şeklindedir. Benzer şekilde yüksek mertebeden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler yazılabilir. Genel olarak bu denklemler

$$L_x u(x) = f(x) \tag{3.4}$$

şeklinde operatör formunda yazılabilir. Burada L_x, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem operatörü, $f(x)$, iki ya da daha fazla $x = (x, y, ...)$ bağımsız değişkenine sahip fonksiyondur. Ayrıca $f(x) = 0$ ise (3.4) denklemi lineer olmayan homojen kısmi diferensiyel denklem ve $f(x) \neq 0$ ise (3.4) denklemi lineer ve homojen olmayan kısmi diferensiyel denklem olarak ifade edilir.

Örnek:

$$u_t - cu_{xx} = 0$$

ısı denklemi homojen olup

$$u_t - ku_{xx} = f(x,t)$$

denklemi ($k > 0$ ve $f(x,t)$ bilinen bir fonksiyon olmak üzere) homojen olmayan kısmi diferensiyel denklemdir.

Aşağıda bazı önemli kısmi diferensiyel denklem modelleri verilmiştir (Wazwaz, 2009).

1) Advection Denklemi:

$$u_t + uu_x = f(x,t)$$

2) Burgers Denklemi:

$$u_t + uu_x = \alpha u_{xx}$$

3) Korteweg-de Vries Denklemi (KdV):

$$u_t + \alpha uu_x + bu_{xxx} = 0$$

4) Modifiye KdV (mKdV) Denklemi:

$$u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

5) Boussinesq Denklemi:

$$u_{tt} - u_{xx} + 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0$$

6) Sine-Gordon Denklemi:

$$u_{tt} - u_{xx} = \alpha \sin u$$

7) Sinh-Gordon Denklemi:

$$u_{tt} - u_{xx} = \alpha \sinh u$$

8) Liouville Denklemi:

$$u_{tt} - u_{xx} = e^{\mp u}$$

9) Fisher Denklemi:

$$u_t = Du_{xx} + u(1-u)$$

10) Kadomtsev-Petviashvili (KP) Denklemi:

$$(u_t + \alpha u u_x + b u_{xxx})_x + u_{yy} = 0$$

11) K(n,n) Denklemi:

$$u_t + \alpha(u^n)_x + b(u^n)_{xx} = 0, n > 1$$

12) Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi (NLS):

$$iu_t + u_{xx} + \gamma \left| u \right|^2 u = 0$$

13) Camassa-Holm Denklemi (CH):

$$u_t - u_{xxt} + \alpha u_x + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}$$

14) Degasperis-Procesi Denklemi (DP):

$$u_t - u_{xxt} + \alpha u_x + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}$$

Çalışmamızda, bu denklemler arasından KdV ve NLS tipi denklemleri ve ayrıca yedinci mertebeden Sawada-Kotera, Kaup-Kupershmidt ve Caudrey-Dodd-Gibbon denklemleri ile ilgilenilecektir.

3.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Bağımsız değişkenlerinden biri zaman t olan kısmi türevli diferensiyel denklemlere oluşum denklemleri denilmektedir. $K[u]$, u ve u'nun x değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere oluşum denklemleri

$$u_t = K[u] \tag{3.5}$$

formundadır. Eğer $K[u]$; u terimine göre lineer ise, bu tip denklemlere lineer oluşum denklemleri ve $K[u]$; u terimine göre lineer değil ise, bu tip denklemlere lineer olmayan oluşum denklemleri denir.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{3.6}$$

dalga denklemi,

$$u_t - k u_{xx} = 0 \tag{3.7}$$

ve ısı denklemi lineer oluşum denklemleridir.

Lineer olmayan oluşum denklemlerinin en bilineni bir kanalda su yüzeyindeki dalgalanmaları ifade eden ve Korteweg-de Vries tarafından bulunan

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0 \tag{3.8}$$

KdV (Korteweg-de Vries) denklemidir. Bu denklem fizik, plazma fiziği, akışkanlar mekaniği gibi birçok çalışma alanında yer almaktadır.

3.3 Yayılma (Dispersiyon) Bağıntısı

Lineer olmayan dispersive dalgalar üzerine çalışmalar 1847'de Stokes'un öncülüğünde su dalgaları üzerine başlamıştır. Stokes lineer olmayan dispersive dalga sistemlerindeki periyodik dalgalanmaların varlığını kanıtlamıştır. Ayrıca genlik üzerindeki dispersiyon ilişkisinin lineer olmayan dalgaların hareketlerinde önemli değişiklikler oluşturduğunu belirlemiştir.

Lineer kısmi diferensiyel denklemler ve dispersiyon bağıntısı arasında birebir ilişki vardır. Lineer, sabit katsayılı bir kısmi diferensiyel denklem için bir dinamik sistemi ele alalım. t zaman ve $x = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ uzay bağımsız değişkenleri olmak üzere,

$$P\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right]\phi(x,t) = F(x,t)$$

formunda olsun. Burada, $F(x,t)$ dinamik sistem üzerindeki dış kuvvetlerin hareketlerini temsil eder ve genellikle kuvvetlendirme terimi olarak adlandırılır.

$$P\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right]\phi(x,t) = 0 \tag{3.9}$$

homojen denkleminin çözümünü, A genlik, $k = (k_1, k_2, k_3) \equiv (k, l, m)$ dalga sayısı vektörü ve w frekans olmak üzere

$$\phi(x,t) = Ae^{i\theta(x,t)} = Ae^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3-w(k)t)} \tag{3.10}$$

olarak ele alalım. Bu durumda (3.10) eşitliği, (3.9)'da yerine yazılırsa,

$$P\left[-iw, ik_1, ik_2, ik_3\right] Ae^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3-w(k)t)} = 0 \tag{3.11}$$

elde edilir. Ayrıca $e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3-w(k)t)}$ sıfırdan farklı olduğundan,

$$P\left[-iw, ik_1, ik_2, ik_3\right] = 0 \tag{3.12}$$

bulunur. Eğer (3.12) sağlanırsa, (3.10), (3.9) denkleminin bir çözümüdür. Böylece (3.12) yayılma bağıntısı olarak adlandırılır (Debnath, 2005). Burada, $\theta = (x,t)$ faz olmak üzere, verilen her k için $w = w(k)$ yayılma bağıntısından faz hızı,

$$c = \frac{w(k)}{k}$$

ve grup hızı ise

$$c_g = \frac{dw(k)}{dk}$$

şeklinde tanımlanır.

i) $w(k)$, gerçel ve c faz hızı sabit olmayan bir değer ise (3.9) denkleminin çözümü bir yayılma terimine sahiptir.

ii) $w(k)$; $w = w_R + iw_I$ şeklinde kompleks bir ifade ise çözüm

$$\phi = e^{w_I t} e^{i(kx - w_R t)}$$

şeklindedir. Burada $e^{w_I t}$ durduran terim ve $e^{i(kx-w_R t)}$ salınıma devam eden terimdir.

$$t \to \infty \text{ iken } \theta_k = \begin{cases} 0, & w_I < 0 \text{ dağıtma} \\ \\ \infty, & w_I < 0 \text{ kararsız} \end{cases}$$

olur (Özer, 1995). Verilen kısmi diferensiyel denklem lineer değil ise, denklemin lineer kısmı alınarak dispersiyon bağıntısı elde edilir.

Örnek: Uzun su dalgaları için KdV denklemi

$$\phi_t + c_0\phi\phi_x + \alpha\phi_{xxx} = 0$$

olsun. Denklem lineer olduğundan dispersiyon bağıntısı

$$\phi = e^{i(kx-wt)}$$

olmak üzere

$$(-iw + c_0 ik + \alpha i^3 k^3)e^{i(kx-wt)} = 0$$

$$\Rightarrow -iw + c_0 ik + \alpha i^3 k^3 = 0$$

$$\Rightarrow w = c_0 k - \alpha k^3$$

şeklinde bulunur. Buradan faz hızı

$$c = \frac{w}{k} = \frac{c_0 k - \alpha k^3}{k} = c_0 - \alpha k^2$$

ve grup hızı

$$c_g = \frac{dw}{dk} = c_0 - 3\alpha k^2$$

şeklinde sabit olmayan bir değer ve $w(k) = c_0 k - \alpha k^3$ gerçel bir değer olduğundan denklemin çözümü yayılma terimine sahiptir.

Örnek:

$$u_t + u_x + u^2 u_x - u_{xxt} = 0$$

Modifiye Benjamin-Bona-Mohony denklemi için dispersiyon ilişkisi bulunurken denklemin lineer kısmı

$$u_t + u_x - u_{xxt} = 0$$

alınarak

$$u = e^{i(kx-wt)}$$

ifadesi denklemin lineer kısmında yerine yazılırsa

$$(-iw + ik - i^3k^3)e^{i(kx-wt)} = 0$$

$$\Rightarrow w = \frac{k}{1+k^2}$$

şeklinde dispersiyon bağıntısı elde edilir.

Örnek:

$$u_t = \mu u_{xx}$$

ısı denklemi lineer olduğundan

$$u = e^{i(kx-wt)}$$

denklemde yerine yazılırsa

$$(-iw - i^2\mu k^2)e^{i(kx-wt)} = 0$$

$$\Rightarrow w = -i\mu k^2$$

şeklinde dispersiyon bağıntısı bulunur. Buradan,

$$u_k = e^{-\mu k^2 t}e^{ikx}$$

çözümü, e^{ikx} uzaysal olarak salınıma devam eden terime ve $e^{-\mu k^2 t}$ teriminden dolayı bir dağıtma enerjisine sahiptir.

Örnek:

$$u_t + u_x - u_{xx} + uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} - u_{xxxxx} = 0$$

(2+1) boyutlu Kawahara-Burger (KB) denklemi için dispersiyon ilişkisi bulunurken denklemin lineer kısmı

$$u_t + u_x - u_{xx} + u_{xxx} + u_{xyy} - u_{xxxxx} = 0$$

alınarak

$$u = e^{i(kx+ry-wt)}$$

ifadesi denklemin lineer kısmında yerine yazılırsa

$$(-iw + ik - i^2k^2 + i^3k^3 + iki^2r^2 - i^5k^5)e^{i(kx+ry-wt)} = 0$$

$$\Rightarrow w = (k - k^3 - k^5 - kr^2) - ik^2$$

şeklinde dispersiyon bağıntısı elde edilir.

3.4 İntegrallenebilirlik

İntegrallenebilirlik kavramı ilk olarak Fuchs tarafından ortaya atılmış olup bir çok bilim insanı bu kavram hakkında halen çalışmalar yapmaktadır. Bu çalışmalar neticesinde integrallenebilirliğin en önemli özelliklerinden de, denklem sisteminin davranışları hakkında genel bir bilgi vermesi olduğu görülmüştür. Ayrıca lineer olmayan bir kısmi diferensiyel denklem, lineer denklem sistemine indirgenebilmektedir. Bu lineer denklem sistemi integre edilebilir özelliklere sahiptir. Bu lineer denklemlerin genel çözümlerinin bir integral gösterimi vardır. Eğer uygun sayıda integraller elde edilirse bu durumda integrallenebilirlik tam integrallenebilirlik olarak adlandırılır.

İntegrallenebilirliğin ne olduğu ve onun ne zaman bulunabileceği soruları doğal olarak ortaya çıkmaktadır. İntegrallenebilirlik kavramı bazı bakımlardan, iyi tanımlı olmadığından, hangi şartlar altında ne zaman tam integrallenebilir olduğu hakkında kesin bir şey söylenemez. Ayrıca integrallenebilirlik hallerini ortaya çıkaracak iyi tanımlı bir ölçütün yokluğu nedeni ile ne zaman düzensiz hareket alanına geçerek integrallenemez olduğu hakkında bir şeyler söylemek çok daha zordur (Yokuş, 2011).

3.5 Ardıştırma (Recursion) Operatörü

Genelleştirilmiş simetrileri, başka genelleştirilmiş simetrilere dönüştüren ardıştırma operatörü ilk olarak Olver (1977) tarafından tanıtılmıştır.

Bir $v = P[u]$ fonksiyonu,

$$v_t = K^{'}[u]v \tag{3.13}$$

lineerleştirilmiş denklemin çözümü olsun. Bu durumda $v = P[u]$ fonksiyonuna (3.13) oluşum denkleminin bir genelleştirilmiş simetrisi denir. Burada $P[u]$, u ve u'nun x-uzaysal değişkenine göre türevlerinin bir fonksiyonu ve $K^{'}[u]$ operatörü de

$$K^{'}[u]v = \frac{d}{d\epsilon}K[u + \epsilon v] \mid_{\epsilon=0}$$

şeklinde tanımlanan $K[u]$'nun Frechet türevidir. u'nun bir diferensiyel fonksiyonunun oluşumu $K[u]$, herhangi bir bağımsız τ değişkenine göre

$$(K[u])_\tau = K^{'}[u]u_\tau$$

ile verilir. Böylece $v = P[u]$'nun, (3.13)' nin bir çözümü olabilmesi için

$$(P[u])_t = (K[u])_\tau$$

denklemini sağlaması gereklidir. Bu durumda (3.13) ve $v_\tau = P[u]$ akışları değişimli olur. Burada u'nun x, t ve τ akış zamanlarının her ikisininde bir fonksiyon olduğuna dikkat edilmelidir.

Ardıştırma operatörü $R[u]$,

$$\begin{aligned} (R[u])_t &= [K^{'}[u], R[u]] \\ &\equiv K^{'}[u]R[u] - R[u]K[u] \end{aligned} \tag{3.14}$$

bağıntısını sağlayan ve genelleştirilmiş simetrileri, genelleştirilmiş simetrilere dönüştüren bir operatördür.

$$[R^{'}, R][v]w \equiv R^{'}[Rv]w - R(R^{'}[v]w)$$

ifadesi v ve w ya göre simetrik ise ardıştırma operatörüne hereditary denir (Fuchsstemer ve Focas, 1981).

Örnek: KdV denkleminin hereditary ardıştırma operatörü

$$R[u] = \partial^2 + 4u + 2u_x\partial^{-1} \tag{3.15}$$

dir (Özer, 1995). Bu ardıştırma operatörüne u_x ifadesini uygularsak,

$$u_{t_1} = u_x$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} u_{t_3} &= R[u]u_x \\ &= u_{xxx} + 6uu_x \end{aligned}$$

şeklinde KdV denklemi elde edilir. Bu denkleme ardıştırma operatörü uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} u_{t_5} &= R^2[u] \\ &= R[u](u_{xxx} + 6uu_x) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$u_{t_5} = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_xu_{xx} + 30u^2u_x \tag{3.16}$$

beşinci mertebeden KdV denklemi bulunur. Bu denkleme ardıştırma operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} u_{t_7} &= R^3[u] \\ &= R[u](u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_xu_{xx} + 30u^2u_x) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &u_{t_7} = u_{xxxxxxx} + 14uu_{xxxxx} + 42u_xu_{xxx} + 70u_{xx}u_{xxx} + 70u^2u_{xxx} + \\ &280uu_xu_{xx} + 140u^3u_x + 70u_x^3 \end{aligned} \tag{3.17}$$

yedinci mertebeden KdV denklemi elde edilir. Benzer şekilde elde edilen denklemlere ardıştırma operatörü uygulanırsa daha yüksek mertebeden KdV tipi denklemlere ulaşılır. Genel formda, ardıştırma operatörü ile akışlar arasındaki bağıntı ise

$$u_{t_{2n+1}} = R^n[u]u_x = K_{2n+1}[u] \quad , \quad n = 0, 1, 2, ...$$

şeklindedir (Özer, 1995).

Örnek:

$$u_t = u_{xxx} + u^2 u_x$$

formundaki modifiye Korteweg-de Vries (MKdV) denkleminin ardıştırma operatörü

$$R[u] = \partial^2 + \frac{2}{3}u^2 + \frac{2}{3}u_x \partial^{-1} u$$

şeklindedir (Olver, 1977). Akış hiyerarşisi ise

$$u_{t_{2n+1}} = R^n[u]u_x = K_{2n+1}[u] \quad , \quad n = 0, 1, ...$$

olarak yazılabilir.

Örnek: Burger denkleminin ardıştırma operatörü

$$R[u] = \partial + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u_x \partial^{-1}$$

formundadır (Olver, 1977). Genel olarak, ardıştırma operatörü ile akışlar arasındaki bağıntı ise

$$u_{t_{n+1}} = R^n[u]u_x = K_{n+1}[u] \quad , \quad n = 0, 1, ...$$

şeklindedir.

3.6 Pertürbasyon Metodu

Lineer olmayan problemler için geliştirilen yaklaşık analitik yöntemlerden bazıları **pertürbasyon yöntemleri** olarak adlandırılır ve geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu yöntemler sayesinde pek çok lineer olmayan problemin önemli özellikleri ortaya çıkarılmıştır. Pertürbasyon yöntemleri, **pertürbasyon miktarı** denilen küçük ya da büyük parametrelerin varlığına dayanır. Pertürbasyon yöntemleri bu parametreleri lineer olmayan problemleri sonlu sayıda lineer alt problemlere indirgemek için kullanılır ve yaklaşık çözümü bu alt problemlerin ilk birkaç tanesinin çözümlerinin toplamı olarak ifade eder. Bu parametrelerin varlığı bu yöntemin en ciddi kısıtlamasıdır. Çünkü her lineer olmayan problem bu tür parametreler içermek zorunda değildir. Ayrıca bu yöntemlerde eğer lineer olmama kuvvetli ise analitik yaklaşım bozulabilir. Bu yüzden pertürbasyon yöntemleri sadece zayıf lineer olmama durumunda kullanılır. Bunun en önemli sebebi olarak pertürbasyon yöntemlerinin yakınsaklık aralığını ayarlamaya olanak vermemesi gösterilebilir (Kadakal, 2011).

3.6.1 Çok ölçekli açılım metodu

Bir pertürbasyon yöntemi olan çok ölçekli açılım metodu, lineer olmayan oluşum denklemlerinin ϵ ölçek parametresi ve yavaş değişkenler

$$\xi_i = \xi_i(x,t,\epsilon)$$

$$\tau_i = \tau_i(x,t,\epsilon)$$

olmak üzere

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n u_n(\xi_i,\tau_i)$$

şeklinde yaklaşık çözümleri aramaktır. Ayrıca bu metot yardımıyla integrallenebilen sistemler yeni integrallenebilen sistemlere indirgenir. Bu metot ve uygulamaları, ilerleyen bölümlerde KdV tipi, Sawada-Kotera, Kaup-Kupershmidt ve Caudrey-Dodd-Gibbon denklemlerine uygulanarak ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

3.7 Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Tam Çözümleri

Birinci mertebeden ve yüksek mertebeden lineer kısmi diferensiyel denklemler için genel çözümler farklı yöntemlerle elde edilebilir. Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümlerini bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Birinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümleri Lagrange-Charpit yöntemi ile bulunabilir. Fakat yüksek mertebeden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümünün bulunması için belirli bir yöntem yoktur. Bu nedenle bu denklemleri sağlayan çözümler tam çözümler olarak adlandırılır (Kaplan, 2013). Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için birçok tam çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Bunlardan bazıları: tanh yöntemi, sinüs-kosinüs yöntemi, $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi, $\frac{1}{G'}$-açılım yöntemi, üstel fonksiyon yöntemi ve ansatz yöntemidir. Bu yöntemlerin çoğu, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin, hareketli dalga dönüşümü sonucu lineer olmayan adi diferensiyel denkleme indirgenmesi ve sonrasında belirlenmiş olan bir lineer diferensiyel denklemin genel çözümünden yola çıkılarak hareketli dalga çözümlerinin bulunması esasına dayanır.

İlerleyen bölümlerde $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi ve KdV7 denklemine bu yöntemin uygulanması ele alınmıştır.

3.8 Soliter Dalgalar ve Solitonlar

Soliter dalgalar, ilk olarak İskoçyalı mühendis John Scott Russell tarafından 1834 yılında gözlemlenmiştir (Russell, 1844). Russell, Edinburg-Glasgow kanalında dalganın yapısında herhangi bir değişiklik olmaksızın yavaş bir şekilde hareket eden suyun çıkışını gözlemlemiştir. Soliter dalgalarının özellikleri hakkında Russell aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır:

(a) Soliter dalgalar, $d \sec h^2(k(x - vt))$ şeklindedir. Burada k dalga sayısını, d dalganın genliğini, v dalganın hızını, t zamanı ve x ise dalganın yayılım yönündeki uzay koordinatını göstermektedir.

(b) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız soliter dalga üretir.

(c) Normal dalgaların aksine soliter dalgalar asla birleşmezler. Bu nedenle küçük genlikli bir soliter dalga ile büyük genlikli bir soliter dalga çarpıştıktan sonra, bu iki soliter dalga birbirlerinden ayrılarak ve şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar ya da dikleşerek sönecek şekilde hareket ederken, soliter dalgalar kararlıdır ve daha uzun mesafede yol alabilirler.

(d) g yerçekimi ivmesi olmak üzere, h yüksekliğine sahip olan ve bir kanalda hareket eden d genliğindeki bir soliter dalga

$$v = \sqrt{g(d+h)}$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı; genliğine, suyun yüksekliğine ve derinliğine bağlıdır.

Önceki yıllarda Russell'ın sonuçları deneysel olarak kalmış ve bir denklemin çözümü olarak soliter dalgalar elde edilememiştir. Bununla birlikte bir denklemin çözümünü veren soliter dalga problemleri yıllarca araştırmalara konu olmuştur. 1895 yılında ünlü Hollandalı matematikçi Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi Gustav de Vries,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \gamma u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{3.18}$$

şeklinde sığ su dalgalarının hareketini modelleyen denklem üzerine çalışmaya başlamışlardır. Denklemde;

$u(x,t)$	,	dalga genliğine
$c = \sqrt{ga}$	,	küçük genlikli dalganın hızına
$\varepsilon = c(d^2/6 - T/2pg)$	,	dağılma parametresine
γ	,	lineer olmayan parametreye
T	,	yüzey gerilimine
p	,	suyun yoğunlığuna

karşılık gelmektedir. (3.18) denkleminin

$$u(x,t) = \widetilde{u}(x - vt) \tag{3.19}$$

formunda ve şekli değişmeyen bir **hareketli dalga çözümüne** sahip olduğu gösterilmiştir. (3.19) ifadesi, Russell'ın soliter dalga tanımına uymaktadır. Böylece Korteweg ve de Vries soliter dalgaların varlığını kanıtlamışlardır ve çalışmalarını Korteweg'in danışmanlığında de Vries'ın doktora tezinde yayınlamışlardır (Korteweg ve de Vries, 1895). Bununla birlikte dalgaların kararlılıkları ve iki soliter dalganın çarpışma sonrası şekillerinin değişip değişmediği konusu netlik kazanmamıştır. Bu konu Kruskal ve Zabusky tarafından incelenmiş, KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümleri araştırılırken, soliter dalgaların çarpışma sonrası şekillerini değiştirmedikleri görülmüştür. Bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediği bulunarak bu tip dalgalara **soliton** adı verilmiştir (Zabusky ve Kruskal, 1965). Bu çalışma, soliton teorisi tarihinde önemli bir yere sahiptir. Sonraki yıllarda Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından ters saçılım dönüşümü (TSD) geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümleri analitik olarak da verilmiştir.

Solitonlar aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilirler (Wadati, 2001).

(1) Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.

(2) Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdırlar ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, soliter dalga şartıdır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir (Irk, 2007).

3.9 Lineer Olmayan Bazı Kısmi Diferensiyel Denklemler

Aşağıda lineer olmayan bazı kısmi diferensiyel denklem modelleri verilmiştir:

(1) KdV denklemi, John Scott Russell'ın gözlemlerine karşılık bir model oluşturmak amacıyla, Diederik Johannes Korteweg ve Gustav de Vries tarafından 1895 yılında ortaya çıkarılmıştır. KdV denklemi üzerine yıllardır yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. KdV denklemi sığ su dalgaları, elastik ortamlardaki boyuna dalgalar, hidrodinamiklerde, iç dalgalarda, plazma fiziğinde ve fen bilimlerinin pek çok alanında ortaya çıkmaktadır. KdV denklemi en basit haliyle

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \tag{3.20}$$

şeklindedir. Burada, x konumu, t zamanı ve $u = u(x,t)$ dalga yüzeyini gösterir.

(2) Yedinci mertebeden lineer olmayan KdV denklemi (KdV7) nin genel formu

$$u_t + au^3u_x + bu_x^3 + cuu_xu_{2x} + du^2u_{3x} + eu_{2x}u_{3x} + fu_xu_{4x} + guu_{5x} + u_{7x} = 0 \tag{3.21}$$

şeklindedir. Burada a, b, c, d, e, f, g keyfi parametreler ve $u_{kx} = \frac{\partial^k}{\partial x^k}$ dır. Standart KdV7 denkleminin üç özel integrallenebilen formu aşağıda verilmiştir:

(a) Yedinci mertebeden KdV denklemi (KdV7)

$$
\begin{aligned}
&u_t + 140u^3u_x + 70u_x^3 + 280uu_xu_{2x} + 70u^2u_{3x} + 70u_{2x}u_{3x} + 42u_xu_{4x} \\
&+14uu_{5x} + u_{7x} = 0
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

şeklindedir.

(b) Yedinci mertebeden Sawada-Kotera denklemi

$$
\begin{aligned}
&u_t + 252u^3u_x + 63u_x^3 + 378uu_xu_{2x} + 126u^2u_{3x} + 63u_{2x}u_{3x} \\
&+42u_xu_{4x} + 14uu_{5x} + u_{7x} = 0
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

formundadır.

(c) Yedinci mertebeden Kaup-Kupershmidt denklemi

$$
\begin{aligned}
&u_t + 2016u^3u_x + 630u_x^3 + 2268uu_xu_{2x} + 504u^2u_{3x} + 252u_{2x}u_{3x} \\
&+147u_xu_{4x} + 42uu_{5x} + u_{7x} = 0
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

şeklindedir (Wazwaz, 2009).

Farklı bir Lax operatöründen elde edilen yeni bir anlamda KdV denkleminden gerçekten farklı olan Sawada-Kotera ve Kaup-Kupershmidt denklemleri 1970'li yıllarda Sawada Kotera Kaup tarafından bulunan ve beşinci mertebeden başlayan denklem hiyerarşileridir (Kaup, 1980).

KdV, Sawada-Kotera ve Kaup-Kupershmidt denklemleri en iyi bilinen integre edilebilir KdV tipi denklemlerdir. Bu denklemler, tek mertebeli denklemlerin dizisi olan KdV hiyerarşisindeki yüksek mertebeli denklemlerden sadece katsayı değerleri ile farklılık göstermektedir (Lax, 1968).

(3) Dokuzuncu mertebeden KdV denklemi (KdV9)

$$u_t + 45u_x u_{6x} + 45uu_{7x} + 210u_{3x}u_{4x} + 210u_{2x}u_{5x} + 1575u_x(u_{2x})^2$$
$$+3150uu_{2x}u_{3x} + 1260uu_xu_{4x} + 630u^2u_{5x} + 9450u^2u_xu_{2x} \tag{3.25}$$
$$+3150u^3u_{3x} + 4725u^4u_x + u_{9x} = 0$$

formundadır.

(4) Yedinci mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon denklemi

$$u_t + 420u^3u_x + 210u^2u_{3x} + 420uu_xu_{2x} + 28uu_{5x} + 28u_xu_{4x}$$
$$+70u_{2x}u_{3x} + u_{7x} = 0 \tag{3.26}$$

şeklindedir.

3.10 Lineer Olmayan Schrödinger (NLS) Denklemi

Lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi

$$iu_t + \beta u_{xx} + \gamma \left|u\right|^2 u = 0 \quad , \quad x \in R, t > 0 \tag{3.27}$$

formundadır. Burada γ sabit bir terimdir. NLS denklemi lineer olmayan optiklerde, hidromanyetik ve plazma dalgalarında, katı bir cisimdeki ısı iletiminde, sıvı ile dolu elastik bir tüpteki lineer olmayan dalgalarda, lineer olmayan kararsızlık problemlerinde, piezoelektrik yarı iletkenlerdeki soliter dalga yayılımında ortaya çıkar. NLS denkleminin en yaygın uygulamaları, lineer olmayan optik tellerinde elektromanyetik titreşimlerin yayılmasının modellenmesini ve suda Stokes dalgalarının kararlılığını kapsar. NLS denkleminin bazı türetilmiş modelleri çok ölçekli açılım metodu, asimtotik metot, Whitham (1965)'ın ortalama varyasyon denklemleri ve Phillips (1981)'ın rezonans etkileşim denklemleri gibi çeşitli yöntemlerle elde edilebilir. Zakharov ve Shabat tarafından 1972'de NLS denkleminin tam integrallenebilirliğini göstermek için ters saçılım dönüşümü geliştirilmiştir. NLS denklemi lineer olmayan dispersive dalgaların teorisinde büyük öneme sahiptir. Korteweg de Vries denklemi ve lineer olmayan Schrödinger denklemi zayıf ve güçlü lineer olmayan dalga sistemleri için pertürbasyon yaklaşımının sonuçlarıdır. 4. bölümde KdV tipi, Sawada-Kotera, Kaup-Kupershmidt ve Caudrey-Dodd-Gibbon denklemlerinden, çok ölçekli açılım metodu ile (3.27) formundaki NLS denklemlerinin elde edilişi ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

KdV denkleminin aksine, NLS denklemi sabit bir hızla birlikte düzenli bir dalga yayılmasına karşılık gelen bir soliton çözüm içermez. NLS denklemi

$$u(\xi,\tau)=\sqrt{-\frac{2v}{\gamma}}\sec h\left[\sqrt{\frac{-v}{\beta}}\xi\right]e^{(-iv\tau)}$$

soliter dalga çözümüne sahiptir. Burada v sabit bir parametre, $\beta,\gamma>0$ ve $|\xi|\longrightarrow\infty$ dır (Debnath, 2005).

4. LİNEER OLMAYAN OLUŞUM DENKLEMLERİNE ÇOK ÖLÇEKLİ AÇILIM METODUNUN UYGULANMASI

KdV denklemine çok ölçekli açılım metodu uygulanarak NLS denkleminin elde edildiği bilinmektedir (Calegora vd., 2000; Degasperis vd., 1997; Osborne ve Boffetta, 1989; Zakharov ve Kuznetsov, 1986). Çok ölçekli açılım metodu KdV denkleminin ardıştırma operatöründen NLS denkleminin ardıştırma operatörünü elde etmek için kullanılmıştır (Özer, 1999). Dağ ve Özer (2001) tarafından NLS denklemi ve integrallenebilen beşinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri arasında bir ilişki olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, yüksek mertebeli NLS denkleminden beşinci mertebeden KdV denklemi elde edilmiştir (Özer ve Taşcan, 2003). Diğer yandan, mertebesi çift sayı olan KdV tipi denklemlerden NLS denklemi türetilmiştir (Ayhan, 2015). Bu metot yardımıyla birçok bilim insanı tarafından NLS ve KdV tipi denklemler arasında farklı ilişkiler elde edilmiştir (Taşcan, 2002; Koparan, 2008; Özer ve Taşcan, 2009).

4.1 Çok Ölçekli Açılım Metodu

Çok ölçekli açılım metodu, bir bozulma (pertürbasyon) metodudur. İlk olarak Zakharov ve Kuznetsov (1986) tarafından önerilen çok ölçekli açılım metodunda, Zakharov ve Kuznetsov, KdV denklemini NLS denklemine indirgemek ve lineer olmayan oluşum denklemlerinin bir sınıfına uygulamak için bu metodu kullanmışlardır. Bu metodu kullanarak integrallenebilen sistemlerin diğer integrallenebilen sistemlere indirgenebileceğini göstermişlerdir. Eğer başlangıçta aldığımız sistem integrallenebilen bir sistem değilse de metodun uygulanması sonucu indirgenen sistemin de integrallenebilir ya da integrallenemez olduğu görülmüştür. Ancak metot uygun bir integrallenebilen sisteme uygulanırsa analizin sonucunda elde edilen sistemin daima integrallenebilen bir sistem olduğu görülmüştür. Bu durum, çok ölçekli açılım metodunun integrallenebilen sistemlere uygulanmasındaki temel amaçtır (Ayhan, 2015).

Bu bölümde lineer olmayan oluşum denklemlerine çok ölçekli açılım metodu uygulanacaktır. Zakharov ve Kuznetsov (1986) tekniği uygulanarak bu metotla KdV tipi, Sawada-Kotera, Kaup-Kupershmidt ve Caudrey-Dodd-Gibbon denklemlerinden NLS tipi denklemlerin elde edilmesi gösterilecektir.

$$u_t = K(u, u_x, u_y, ...) \tag{4.1}$$

genel oluşum denklemini ele alalım. Genel lineer olmayan oluşum denklemleri $K[u]$, u ve u'nun x-uzaysal değişkenine göre türevlerinin fonksiyonudur. En iyi bilinenleri ise bir kanalda su yüzeyindeki dalgalanmaları ifade eden ve Korteweg-de Vries tarafından bulunan KdV denklemidir.

$L[\partial_x, \partial_y]u$, $K[u]$'nun lineer kısmı olsun. Buradan (4.1) denklemi için dispersiyon ilişkisi bulunur.

$$\begin{aligned} u_k &= Ae^{i(kx+ry-w(k,r)t)} \\ &\equiv Ae^{i\theta} \end{aligned} \tag{4.2}$$

dalga çözüm uzayı (4.1) denkleminin lineer kısmı olan

$$u_t = L[\partial_x, \partial_y]u \tag{4.3}$$

denkleminde yerine yazılarak

$$w(k, r) = iL[ik, ir] \tag{4.4}$$

dispersiyon ilişkisi elde edilir. (4.4) dispersiyon ilişkisi, (4.2)'de yerine yazılır. Bir lineer olmayan denklem, bu dalga çözüm uzayının genliğini değiştirir ve bunun

$$\begin{aligned} \xi &= \epsilon(x - \tfrac{dw(k,r)}{dk}t) \\ \eta &= \epsilon(y - \tfrac{dw(k,r)}{dr}t) \\ \tau &= -\tfrac{1}{2}\epsilon^2(\tfrac{d^2w(k,r)}{dk^2} + \tfrac{d^2w(k,r)}{dr^2})t \end{aligned} \tag{4.5}$$

yavaş değişkenlerine bağlı olduğu düşünülebilir.

$$u(x, y, t) = U(x, y, t, \xi, \eta, \tau) \tag{4.6}$$

dönüşümünü ve U'nun çözümünün

$$U(x, y, t, \xi, \eta, \tau) = \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \epsilon^3 U_3 + ... \tag{4.7}$$

formunda olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (4.6) ve (4.7) çözümü göz önünde bulundurulup (4.4) ve (4.5) kullanılarak (4.1) denklemindeki türevli terimler elde edilir. Elde edilen terimler, (4.6) ve (4.7), (4.1) denkleminde yerine yazılır. İndirgenen denklem ϵ'nun artan kuvvetlerine göre yazılır. Bu denklemde ϵ'nun aynı kuvvetten katsayıları sıfıra eşitlenir. Buradan elde edilen denklemler, (4.2) dalga çözüm uzayı kullanılarak iterasyon yoluyla çözülür ve NLS tipi denklem elde edilir.

Örnek:

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \tag{4.8}$$

KdV denklemine çok ölçekli açılım metodu uygulanarak KdV denkleminden NLS denklemi elde edilmiştir (Fordy ve Özer, 1998). (4.8) denklemindeki dispersiyon ilişkisini bulmak için (4.8) denkleminin lineer kısmı olan

$$u_t = u_{xxx} \tag{4.9}$$

denklemini ele alalım. Bu durumda (4.9) lineer diferensiyel denklemi (4.2) dalga çözüm uzayını sağlar. Buradan

$$u(x, t) = e^{i\theta} \quad , \quad \theta = kx - w(k)t \tag{4.10}$$

çözümü (4.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$we^{i(kx-wt)} = k^3 e^{i(kx-wt)} \tag{4.11}$$

elde edilir ve buradan

$$w(k) = k^3 \tag{4.12}$$

şeklinde dispersiyon ilişkisi elde edilir. Böylece (4.10),

$$u(x,t) = e^{i(kx-k^3t)} \tag{4.13}$$

olarak elde edilir. (4.8) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = U(x,t,\xi,\tau) \quad , \quad U(x,t,\xi,\tau) = \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \epsilon^3 U_3 + ... \tag{4.14}$$

şeklinde olmak üzere yavaş değişkenler,

$$\begin{aligned} \xi &= \epsilon(x - \tfrac{dw(k)}{dk}t) \\ &= \epsilon(x - 3k^2 t) \\ \tau &= -\tfrac{1}{2}\epsilon^2(\tfrac{d^2w(k)}{dk^2})t \\ &= -3\epsilon^2 kt \end{aligned} \tag{4.15}$$

olsun. Bu durumda (4.8) denklemindeki türevli terimler (4.12)-(4.15) kullanılarak

$$\begin{aligned} D_x &= (\partial_x + \epsilon\partial_\xi) \\ D_t &= (\partial_t - 3k^2\epsilon\partial_\xi - 3k\epsilon^2\partial_\tau) \\ D_{xxx} &= (\partial_{xxx} + 3\epsilon\partial_{xx\xi} + 3\epsilon^2\partial_{x\xi\xi} + \epsilon^3\partial_{\xi\xi\xi}) \end{aligned} \tag{4.16}$$

formunda elde edilir. (4.14) ve (4.16) kullanılarak (4.8) denkleminde yerine yazılır ve ϵ'nun artan kuvvetlerine göre elde edilir. Bu denklemde ϵ'nun aynı kuvvetten katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\epsilon \ : \ u_{1t} - u_{1xxx} = 0 \tag{4.17}$$

$$\epsilon^2 \ : \ u_{2t} - 3k^2 u_{1\xi} - u_{2xxx} - 3u_{1xx\xi} + 6u_1 u_{1x} \tag{4.18}$$

$$\epsilon^3 \quad : \quad u_{3t} - 3k^2 u_{2\xi} - 3k u_{1\tau} - u_{3xxx} - 3u_{2xx\xi} - 3u_{1x\xi\xi}$$

$$+6u_1(u_{2x} + u_{1\xi}) + 6u_2 u_{1x} \tag{4.19}$$

$$\vdots$$

denklemleri elde edilir. (4.17) denkleminin çözümü

$$u_1(x,t,\xi,\tau) = v_1(\xi,\tau)e^{i(kx-k^3t)} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^3t)} \tag{4.20}$$

formundadır. Bu çözüm (4.18) denkleminde yerine yazılırsa, $f_1(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere, (4.18) denkleminin çözümü,

$$u_2(x,t,\xi,\tau) = v_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^3t)} + v_{-2}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^3t)} + f_1(\xi,\tau) \tag{4.21}$$

şeklinde bulunur. (4.20), (4.21) çözümleri (4.18) denkleminde yerine yazılır. Buradan

$$v_2(\xi,\tau) = \frac{-v_1^2(\xi,\tau)}{k^2} \quad , \quad v_{-2}(\xi,\tau) = \frac{-v_{-1}^2(\xi,\tau)}{k^2} \tag{4.22}$$

bulunur. (4.20), (4.21) ve (4.22), (4.19) denkleminde yerine yazılırsa, $f_2(\xi,\tau)$ ve $f_3(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere, (4.19) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u_3(x,t,\xi,\tau) \quad &= \quad v_3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^3t)} + v_{-3}(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^3t)} \\ &\quad +f_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^3t)} + f_3(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^3t)} \end{aligned} \tag{4.23}$$

şeklindedir. O halde,

$$v_3(\xi,\tau) = \frac{3v_1^3(\xi,\tau)}{4k^4} \quad , \quad v_{-3}(\xi,\tau) = \frac{3v_{-1}^3(\xi,\tau)}{4k^4} \tag{4.24}$$

ve

$$\begin{aligned} f_1(\xi,\tau) \quad &= \quad \frac{-2v_1 v_{-1}}{k^2} \\ f_2(\xi,\tau) \quad &= \quad \frac{2iv_{-1}v_{-1\xi}}{k^3} \\ f_3(\xi,\tau) \quad &= \quad \frac{-2iv_1 v_{1\xi}}{k^3} \end{aligned} \tag{4.25}$$

olarak elde edilir. Böylece (4.17)-(4.19) denklemlerinin çözümleri $\theta = (kx - k^3 t)$ için,

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v_1(\xi,\tau)e^{i\theta} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i\theta} \\
u_2 &= k^{-2}(-2v_1(\xi,\tau)v_{-1}(\xi,\tau) + v_1^2(\xi,\tau)e^{2i\theta} + v_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i\theta}) \\
u_3 &= k^{-3}(2iv_{-1}(\xi,\tau)v_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i\theta} - 2iv_1(\xi,\tau)v_{1\xi}(\xi,\tau)e^{2i\theta}) \\
&\quad + \tfrac{3}{4}k^{-4}(v_1^3(\xi,\tau)e^{3i\theta} + v_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i\theta})
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

şeklinde bulunur. Son olarak (4.26) çözümlerinin (4.19) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$
iv_{1\tau} = v_{1\xi\xi} - \frac{2}{k^2}v_1 v_{-1} \tag{4.27}
$$

bulunur. $q = \frac{v_1}{k}$ olarak ele alınırsa (4.27) denkleminden

$$
iq_\tau = q_{\xi\xi} - 2q\left|q\right|^2 \tag{4.28}
$$

lineer olmayan Schrödinger denklemi elde edilir. O halde q, Schrödinger denkleminin çözümü ve q_{-1} de q'nun kompleks eşleniği olmak üzere (4.8) KdV denkleminin yaklaşık çözümü

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \epsilon k(q(\xi,\tau)e^{i(kx-k^3t)} + q_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^3t)}) \\
&\quad + \epsilon^2(-2q(\xi,\tau)q_{-1}(\xi,\tau) + q^2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^3t)} \\
&\quad + q_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^3t)}) + k\epsilon^3(2iq(\xi,\tau)q_\xi(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^3t)} \\
&\quad - 2iq_{-1}(\xi,\tau)q_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^3t)}) \\
&\quad + \tfrac{3}{4}k\epsilon^3(q_1^3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^3t)} + q_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^3t)}) + ...
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

şeklinde bulunur (Fordy ve Özer, 1998).

4.2 Çok Ölçekli Açılım Metodunun Uygulamaları

İlk olarak Zakharov ve Kuznetsov (1986) tarafından geliştirilen çok ölçekli açılım metodu ile KdV ve NLS denklemleri ve bu denklemlerin spektral problemleri arasında ilişkiye ulaşılmıştır. Sonraki yıllarda Özer (1995, 2001) bazı oluşum denklemlerinden NLS tipi denklemler elde etmiştir. Taşcan (2002) ve Koparan (2008), yüksek mertebeden KdV ve NLS tipi denklemlere bu metodu uygulamıştır, NLS tipi denklemlerden KdV akış denklemlerine ulaşmışlardır. Bu bölümde 3. bölümde tanıtılan denklemlerden (1+1) boyutlu KdV7 denklemi, (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Sawada-Kotera denklemi, (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Kaup-Kupershmidt denklemi, (1+1) boyutlu KdV9 denklemi ve (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon denklemine çok ölçekli açılım metodu uygulanmıştır. Bu denklemlerin herbirinden $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere, (3.27) formunda NLS tipi denklem elde edilmiştir.

4.2.1 (1+1) boyutlu KdV7 denklemine çok ölçekli açılım metodunun uygulanması

Yedinci mertebeden (1+1) boyutlu KdV tipi denklem (KdV7), (3.22) formundadır. (3.22) denklemindeki dispersiyon ilişkisini bulmak için (3.22) denkleminin lineer kısmı olan

$$u_t + u_{xxxxxxx} = 0 \tag{4.30}$$

denklemini ele alalım. Burada (4.30) lineer diferensiyel denklemi

$$u(x,t) = e^{i\theta} \quad , \quad \theta = kx - w(k)t \tag{4.31}$$

şeklindeki çözümü sağlar. Buradan (4.31), (4.30) lineer diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa,

$$we^{i(kx-wt)} = k^7 e^{i(kx-wt)} \tag{4.32}$$

bulunur ve buradan

$$w(k) = k^7 \tag{4.33}$$

formunda dispersiyon ilişkisi elde edilir. O halde (4.31),

$$u(x,t) = e^{i(kx-k^7t)} \tag{4.34}$$

olarak bulunur. Böylece (3.22) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = U(x,t,\xi,\tau) \quad , \quad U(x,t,\xi,\tau) = \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \epsilon^3 U_3 + ... \tag{4.35}$$

formundadır. Yavaş değişkenler ise

$$\begin{aligned} \xi &= \epsilon(x - \tfrac{dw(k)}{dk}t) \\ &= \epsilon(x - 7k^6 t) \\ \tau &= -\tfrac{1}{2}\epsilon^2(\tfrac{d^2w(k)}{dk^2}t) \\ &= -21\epsilon^2 k^5 t \end{aligned} \tag{4.36}$$

olarak bulunur. Buradan (3.22) denklemindeki türevli terimler (4.33)-(4.36) kullanılarak

$$\begin{aligned} D_x &= \partial_x + \epsilon\partial_\xi \\ D_t &= \partial_t - 7\epsilon k^6 \partial_\xi - 21\epsilon^2 k^5 \partial_\tau \\ D_{xx} &= \partial_{xx} + 2\epsilon\partial_{x\xi} + \epsilon^2\partial_{\xi\xi} \\ D_{xxx} &= \partial_{xxx} + 3\epsilon\partial_{xx\xi} + 3\epsilon^2\partial_{x\xi\xi} + \epsilon^3\partial_{\xi\xi\xi} \\ D_{xxxx} &= \partial_{xxxx} + 4\epsilon\partial_{xxx\xi} + 6\epsilon^2\partial_{xx\xi\xi} + 4\epsilon^3\partial_{x\xi\xi\xi} + \epsilon^4\partial_{\xi\xi\xi\xi} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_{xxxxx} &= \partial_{xxxxx} + 5\epsilon\partial_{xxxx\xi} + 10\epsilon^2\partial_{xxx\xi\xi} + 10\epsilon^3\partial_{xx\xi\xi\xi} \\
&\quad +5\epsilon^4\partial_{x\xi\xi\xi\xi} + \epsilon^5\partial_{\xi\xi\xi\xi\xi} \\
D_{xxxxxxx} &= \partial_{xxxxxxx} + 7\epsilon\partial_{xxxxxx\xi} + 21\epsilon^2\partial_{xxxxx\xi\xi} + 35\epsilon^3\partial_{xxxx\xi\xi\xi} \\
&\quad +35\epsilon^4\partial_{xxx\xi\xi\xi\xi} + 21\epsilon^5\partial_{xx\xi\xi\xi\xi\xi} + 7\epsilon^6\partial_{x\xi\xi\xi\xi\xi\xi} \\
&\quad +\epsilon^7\partial_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi}
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

olarak bulunur. (4.35) ve (4.37) kullanılarak (3.22) denkleminde yerine yazılır. Buradan ϵ'nun artan kuvvetlerine göre bulunur. Bu denklemde ϵ'nun aynı kuvvetten olan katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$
\epsilon \;:\; u_{1t} - u_{1xxxxxxx} = 0 \tag{4.38}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon^2 \;:\; & u_{2t} - 7k^6u_{1\xi} - u_{2xxxxxxx} - 7u_{1xxxxxx\xi} - 14u_1u_{1xxxxx} \\
& -42u_{1x}u_{1xxxx} - 70u_{1xx}u_{1xxx} = 0
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon^3 \;:\; & u_{3t} - 7k^6u_{2\xi} - 21k^5u_{1\tau} - u_{3xxxxxxx} - 7u_{2xxxxxx\xi} \\
& -21u_{1xxxxx\xi\xi} - 14u_1(u_{2xxxxx} + 5u_{1xxxx\xi}) - 14u_2u_{1xxxxx} \\
& -42u_{1x}(u_{2xxxx} + 4u_{1xxx\xi}) - 42(u_{2x} + u_{1\xi})u_{1xxxx} \\
& -70u_{1xx}(u_{2xxx} + 3u_{1xx\xi}) - 70(u_{2xx} + 2u_{1x\xi})u_{1xxx} \\
& -70u_1^2u_{1xxx} - 280u_1u_{1x}u_{1xx} - 70u_{1x}^3 = 0
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

denklemleri bulunur. Buradan (4.38) denkleminin çözümü

$$
u_1(x,t,\xi,\tau) = v_1(\xi,\tau)e^{i(kx-k^7t)} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^7t)} \tag{4.41}
$$

olacak şekilde bulunur. Bu çözüm (4.39) denkleminde yerine yazılırsa ve $f_1(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere (4.39) denkleminin çözümü,

$$u_2(x,t,\xi,\tau) = v_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} + v_{-2}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} + f_1(\xi,\tau) \tag{4.42}$$

şeklindedir. O halde,

$$v_2(\xi,\tau) = \frac{v_1^2(\xi,\tau)}{k^2} \quad , \quad v_{-2}(\xi,\tau) = \frac{v_{-1}^2(\xi,\tau)}{k^2} \tag{4.43}$$

olarak elde edilir. (4.41), (4.42) ve (4.43), (4.40) denkleminde yerine yazılırsa ve $f_2(\xi,\tau)$ ve $f_3(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere (4.40) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u_3(x,t,\xi,\tau) &= v_3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^7t)} + v_{-3}(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^7t)} \\ &\quad + f_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} + f_3(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} \end{aligned} \tag{4.44}$$

şeklindedir. O halde,

$$v_3(\xi,\tau) = \frac{3v_1^3(\xi,\tau)}{4k^4} \quad , \quad v_{-3}(\xi,\tau) = \frac{3v_{-1}^3(\xi,\tau)}{4k^4} \tag{4.45}$$

ve

$$\begin{aligned} f_1(\xi,\tau) &= \frac{-2v_1v_{-1}}{k^2} \\ f_2(\xi,\tau) &= \frac{-2iv_{-1}v_{-1\xi}}{k^3} \\ f_3(\xi,\tau) &= \frac{2iv_1v_{1\xi}}{k^3} \end{aligned} \tag{4.46}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (4.38)-(4.40) denklemlerinin yaklaşık çözümleri

$$\theta = (kx - k^7t) \tag{4.47}$$

için

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1(\xi,\tau)e^{i\theta} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i\theta} \\
u_2 &= k^{-2}(-2v_1(\xi,\tau)v_{-1}(\xi,\tau) + v_1^2(\xi,\tau)e^{2i\theta} + v_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i\theta}) \\
u_3 &= k^{-3}(-2iv_{-1}(\xi,\tau)v_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i\theta} + 2iv_1(\xi,\tau)v_{1\xi}(\xi,\tau)e^{2i\theta}) \\
&\quad +\tfrac{3}{4}k^{-4}(v_1^3(\xi,\tau)e^{3i\theta} + v_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i\theta})
\end{aligned} \tag{4.48}$$

olarak bulunur. (4.48) çözümlerinin (4.40) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
iv_{1\tau} &= v_{1\xi\xi} - \tfrac{2}{k^2}v_1v_{-1} \\
iv_{1\tau} &= v_{1\xi\xi} - \tfrac{2}{k^2}v_1\left|v_1\right|^2
\end{aligned} \tag{4.49}$$

bulunur. $q = \frac{v_1}{k}$ olarak alınırsa (4.49) denkleminden

$$iq_\tau = q_{\xi\xi} - 2q\left|q^2\right| \tag{4.50}$$

lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi elde edilir. O halde q, Schrödinger denkleminin çözümü ve q_{-1} de q'nun kompleks eşleniği olacak şekilde (3.22) KdV7 denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \epsilon k(q(\xi,\tau)e^{i(kx-k^7t)} + q_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^7t)}) \\
&\quad +\epsilon^2(-2q(\xi,\tau)q_{-1}(\xi,\tau) + q^2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} \\
&\quad +q_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)}) + k\epsilon^3(-2iq_{-1}(\xi,\tau)q_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} \\
&\quad +2iq(\xi,\tau)q_\xi(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)}) \\
&\quad +\tfrac{3}{4}k\epsilon^3(q_1^3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^7t)} + q_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^7t)})
\end{aligned} \tag{4.51}$$

olarak elde edilir.

4.2.2 (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Sawada-Kotera denklemine çok ölçekli açılım metodunun uygulanması

Yedinci mertebeden (1+1) boyutlu Sawada-Kotera denklemi (3.23) formundadır. (3.23) denklemindeki dispersiyon ilişkisini bulmak için (3.23) denkleminin lineer kısmı olan

$$u_t + u_{xxxxxxx} = 0 \tag{4.52}$$

denklemini ele alalım. Burada (4.52) lineer diferensiyel denklemi

$$u(x,t) = e^{i\theta} \quad , \quad \theta = kx - w(k)t \tag{4.53}$$

şeklindeki çözümü sağlar. Buradan (4.53), (4.52) lineer diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa,

$$we^{i(kx-wt)} = k^7 e^{i(kx-wt)} \tag{4.54}$$

bulunur ve buradan

$$w(k) = k^7 \tag{4.55}$$

formunda dispersiyon ilişkisi elde edilir. O halde (4.52),

$$u(x,t) = e^{i(kx-k^7 t)} \tag{4.56}$$

olarak bulunur. Böylece (3.23) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = U(x,t,\xi,\tau) \quad , \quad U(x,t,\xi,\tau) = \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \epsilon^3 U_3 + ... \tag{4.57}$$

şeklindedir. Yavaş değişkenler ise

$$\begin{aligned}
\xi &= \epsilon(x - \tfrac{dw(k)}{dk}t) \\
&= \epsilon(x - 7k^6 t) \\
\tau &= -\tfrac{1}{2}\epsilon^2(\tfrac{d^2w(k)}{dk^2}t) \\
&= -21\epsilon^2 k^5 t
\end{aligned} \tag{4.58}$$

şeklinde bulunur. Buradan (3.23) denklemindeki türevli terimler (4.55)-(4.58) kullanılarak (4.37) olarak bulunur. (4.57) ve (4.37) kullanılarak (3.23) denkleminde yerine yazılır. Buradan ϵ'nun artan kuvvetlerine göre bulunur. Bu denklemde ϵ'nun aynı kuvvetten olan katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\epsilon \;:\; u_{1t} - u_{1xxxxxxx} = 0 \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 \;:\; & u_{2t} - 7k^6 u_{1\xi} - 63u_{1xx}u_{1xxx} - 42u_{1x}u_{1xxxx} - 21u_1u_{1xxxxx} \\
& -u_{2xxxxxxx} - 7u_{1xxxxxx\xi} = 0
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^3 \;:\; & u_{3t} - 7k^6 u_{2\xi} - 21k^5 u_{1\tau} - 63u_{1x}^3 - 378u_1u_{1x}u_{1xx} \\
& -126u_1^2u_{1xxx} - 63u_{1xx}(u_{2xxx} + 3u_{1xx\xi}) \\
& -63(u_{2xx} + 2u_{1x\xi})u_{1xxx} - 42u_{1x}(u_{2xxxx} + 4u_{1xxx\xi}) \\
& -42(u_{2x} + u_{1\xi})u_{1xxxx} - 21u_1(u_{2xxxxx} + 5u_{1xxxx\xi}) \\
& -21u_2u_{1xxxxx} - u_{3xxxxxxx} - 7u_{2xxxxxx\xi} - 21u_{1xxxxx\xi\xi} = 0
\end{aligned} \tag{4.61}$$

denklemleri elde edilir. Buradan (4.59) denkleminin çözümü

$$u_1(x,t,\xi,\tau) = v_1(\xi,\tau)e^{i(kx-k^7t)} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^7t)} \tag{4.62}$$

formundadır. Bu çözüm (4.60) denkleminde yerine yazılırsa ve $f_1(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere (4.60) denkleminin çözümü,

$$u_2(x,t,\xi,\tau) = v_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} + v_{-2}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} + f_1(\xi,\tau) \qquad (4.63)$$

şeklindedir. O halde,

$$v_2(\xi,\tau) = \frac{v_1^2(\xi,\tau)}{k^2} \quad , \quad v_{-2}(\xi,\tau) = \frac{v_{-1}^2(\xi,\tau)}{k^2} \qquad (4.64)$$

olarak elde edilir. (4.62), (4.63) ve (4.64), (4.61) denkleminde yerine yazılırsa ve $f_2(\xi,\tau)$ ve $f_3(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere (4.61) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u_3(x,t,\xi,\tau) &= v_3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^7t)} + v_{-3}(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^7t)} \\ &\quad + f_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} + f_3(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} \end{aligned} \qquad (4.65)$$

şeklindedir. O halde,

$$v_3(\xi,\tau) = \frac{3v_1^3(\xi,\tau)}{4k^4} \quad , \quad v_{-3}(\xi,\tau) = \frac{3v_{-1}^3(\xi,\tau)}{4k^4} \qquad (4.66)$$

ve

$$\begin{aligned} f_1(\xi,\tau) &= \frac{-3v_1v_{-1}}{k^2} \\ f_2(\xi,\tau) &= \frac{-2iv_{-1}v_{-1\xi}}{k^3} \\ f_3(\xi,\tau) &= \frac{2iv_1v_{1\xi}}{k^3} \end{aligned} \qquad (4.67)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (4.59)-(4.61) denklemlerinin yaklaşık çözümleri

$$\theta = (kx - k^7t) \qquad (4.68)$$

için

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1(\xi,\tau)e^{i\theta} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i\theta} \\
u_2 &= k^{-2}(-3v_1(\xi,\tau)v_{-1}(\xi,\tau) + v_1^2(\xi,\tau)e^{2i\theta} + v_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i\theta}) \\
u_3 &= k^{-3}(-2iv_{-1}(\xi,\tau)v_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i\theta} + 2iv_1(\xi,\tau)v_{1\xi}(\xi,\tau)e^{2i\theta}) \\
&\quad +\tfrac{3}{4}k^{-4}(v_1^3(\xi,\tau)e^{3i\theta} + v_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i\theta})
\end{aligned} \tag{4.69}$$

olarak bulunur. (4.69) çözümlerinin (4.61) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
iv_{1\tau} &= v_{1\xi\xi} - \tfrac{2}{k^2}v_1v_{-1} \\
iv_{1\tau} &= v_{1\xi\xi} - \tfrac{2}{k^2}v_1\left|v_1\right|^2
\end{aligned} \tag{4.70}$$

bulunur. $q = \frac{v_1}{k}$ olarak alınırsa (4.70) denkleminden

$$iq_\tau = q_{\xi\xi} - 2q\left|q^2\right| \tag{4.71}$$

lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi elde edilir. O halde q, Schrödinger denkleminin çözümü ve q_{-1} de q'nun kompleks eşleniği olacak şekilde (3.23) yedinci mertebeden Sawada-Kotera denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \epsilon k(q(\xi,\tau)e^{i(kx-k^7t)} + q_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^7t)}) \\
&\quad +\epsilon^2(-3q(\xi,\tau)q_{-1}(\xi,\tau) + q^2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} \\
&\quad +q_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)}) + k\epsilon^3(-2iq_{-1}(\xi,\tau)q_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} \\
&\quad +2iq(\xi,\tau)q_\xi(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)}) \\
&\quad +\tfrac{3}{4}k\epsilon^3(q_1^3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^7t)} + q_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^7t)})
\end{aligned} \tag{4.72}$$

olarak elde edilir.

4.2.3 (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Kaup-Kupershmidt denklemine çok ölçekli açılım metodunun uygulanması

Yedinci mertebeden (1+1) boyutlu Kaup-Kupershmidt denklemi (3.24) formundadır. (3.24) denklemindeki dispersiyon ilişkisini bulmak için (3.24) denkleminin lineer kısmı olan

$$u_t + u_{xxxxxxx} = 0 \tag{4.73}$$

denklemini ele alalım. Burada (4.73) lineer diferensiyel denklemi

$$u(x,t) = e^{i\theta} \quad , \quad \theta = kx - w(k)t \tag{4.74}$$

şeklindeki çözümü sağlar. Buradan (4.74), (4.73) lineer diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa,

$$we^{i(kx-wt)} = k^7 e^{i(kx-wt)} \tag{4.75}$$

bulunur ve buradan

$$w(k) = k^7 \tag{4.76}$$

formunda dispersiyon ilişkisi elde edilir. O halde (4.74),

$$u(x,t) = e^{i(kx-k^7 t)} \tag{4.77}$$

olarak bulunur. Böylece (3.24) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = U(x,t,\xi,\tau) \quad , \quad U(x,t,\xi,\tau) = \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \epsilon^3 U_3 + ... \tag{4.78}$$

formundadır. Yavaş değişkenler ise

$$\begin{aligned} \xi &= \epsilon(x - \tfrac{dw(k)}{dk}t) \\ &= \epsilon(x - 7k^6 t) \\ \tau &= -\tfrac{1}{2}\epsilon^2(\tfrac{d^2w(k)}{dk^2}t) \\ &= -21\epsilon^2 k^5 t \end{aligned} \tag{4.79}$$

olarak bulunur. Buradan (3.24) denklemindeki türevli terimler (4.76)-(4.79) kullanılarak (4.37) olarak bulunur. (4.78) ve (4.37) kullanılarak (3.24) denkleminde yerine yazılır. Buradan ϵ'nun artan kuvvetlerine göre bulunur. Bu denklemde ϵ'nun aynı kuvvetten olan katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\epsilon \;:\; u_{1t} - u_{1xxxxxxx} = 0 \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \;:\; & u_{2t} - 7k^6 u_{1\xi} - 252u_{1xx}u_{1xxx} - 147u_{1x}u_{1xxxx} - 42u_1u_{1xxxxx} \\ & -u_{2xxxxxxx} - 7u_{1xxxxxx\xi} = 0 \end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^3 \;:\; & u_{3t} - 7k^6 u_{2\xi} - 21k^5 u_{1\tau} - 630u_{1x}^3 - 2268u_1u_{1x}u_{1xx} \\ & -504u_1^2u_{1xxx} - 252u_{1xx}(u_{2xxx} + 3u_{1xx\xi}) \\ & -252(u_{2xx} + 2u_{1x\xi})u_{1xxx} - 147u_{1x}(u_{2xxxx} + 4u_{1xxx\xi}) \\ & -147(u_{2x} + u_{1\xi})u_{1xxxx} - 42u_1(u_{2xxxxx} + 5u_{1xxxx\xi}) \\ & -42u_2u_{1xxxxx} - u_{3xxxxxxx} - 7u_{2xxxxxx\xi} - 21u_{1xxxxx\xi\xi} = 0 \end{aligned} \tag{4.82}$$

denklemleri bulunur. Buradan (4.80) denkleminin çözümü

$$u_1(x,t,\xi,\tau) = v_1(\xi,\tau)e^{i(kx-k^7t)} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^7t)} \tag{4.83}$$

şeklinde bulunur. Bu çözüm (4.81) denkleminde yerine yazılırsa ve $f_1(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere (4.81) denkleminin çözümü,

$$u_2(x,t,\xi,\tau) = v_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} + v_{-2}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} + f_1(\xi,\tau) \tag{4.84}$$

şeklindedir. O halde,

$$v_2(\xi,\tau) = \frac{7v_1^2(\xi,\tau)}{2k^2} \quad , \quad v_{-2}(\xi,\tau) = \frac{7v_{-1}^2(\xi,\tau)}{2k^2} \tag{4.85}$$

olarak elde edilir. (4.83), (4.84) ve (4.85), (4.82) denkleminde yerine yazılırsa ve $f_2(\xi,\tau)$ ve $f_3(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere (4.82) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u_3(x,t,\xi,\tau) &= v_3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^7t)} + v_{-3}(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^7t)} \\ &\quad + f_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} + f_3(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} \end{aligned} \tag{4.86}$$

şeklindedir. O halde,

$$v_3(\xi,\tau) = \frac{39v_1^3(\xi,\tau)}{4k^4} \quad , \quad v_{-3}(\xi,\tau) = \frac{39v_{-1}^3(\xi,\tau)}{4k^4} \tag{4.87}$$

ve

$$\begin{aligned} f_1(\xi,\tau) &= \frac{-6v_1v_{-1}}{k^2} \\ f_2(\xi,\tau) &= \frac{-7iv_{-1}v_{-1\xi}}{k^3} \\ f_3(\xi,\tau) &= \frac{7iv_1v_{1\xi}}{k^3} \end{aligned} \tag{4.88}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (4.80)-(4.82) denklemlerinin yaklaşık çözümleri

$$\theta = (kx - k^7t) \tag{4.89}$$

için

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1(\xi,\tau)e^{i\theta} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i\theta} \\
u_2 &= k^{-2}(-6v_1(\xi,\tau)v_{-1}(\xi,\tau) + v_1^2(\xi,\tau)e^{2i\theta} + v_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i\theta}) \\
u_3 &= k^{-3}(-7iv_{-1}(\xi,\tau)v_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i\theta} + 7iv_1(\xi,\tau)v_{1\xi}(\xi,\tau)e^{2i\theta}) \\
&\quad +\tfrac{39}{4}k^{-4}(v_1^3(\xi,\tau)e^{3i\theta} + v_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i\theta})
\end{aligned} \tag{4.90}$$

olarak bulunur. (4.90) çözümlerinin (4.82) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
iv_{1\tau} &= v_{1\xi\xi} - \tfrac{2}{k^2}v_1v_{-1} \\
iv_{1\tau} &= v_{1\xi\xi} - \tfrac{2}{k^2}v_1\left|v_1\right|^2
\end{aligned} \tag{4.91}$$

bulunur. $q = \frac{v_1}{k}$ olarak alınırsa (4.91) denkleminden

$$iq_\tau = q_{\xi\xi} - 2q\left|q^2\right| \tag{4.92}$$

lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi elde edilir. O halde q, Schrödinger denkleminin çözümü ve q_{-1} de q'nun kompleks eşleniği olacak şekilde (3.24) yedinci mertebeden Kaup-Kupershmidt denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \epsilon k(q(\xi,\tau)e^{i(kx-k^7t)} + q_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^7t)}) \\
&\quad +\epsilon^2(-6q(\xi,\tau)q_{-1}(\xi,\tau) + q^2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} \\
&\quad +q_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)}) + k\epsilon^3(-7iq_{-1}(\xi,\tau)q_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} \\
&\quad +7iq(\xi,\tau)q_\xi(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)}) \\
&\quad +\tfrac{39}{4}k\epsilon^3(q_1^3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^7t)} + q_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^7t)})
\end{aligned} \tag{4.93}$$

olarak elde edilir.

4.2.4 (1+1) boyutlu KdV9 denklemine çok ölçekli açılım metodunun uygulanması

Dokuzuncu mertebeden (1+1) boyutlu KdV tipi denklem (KdV9), (3.25) formundadır. (3.25) denklemindeki dispersiyon ilişkisini bulmak için (3.25) denkleminin lineer kısmı olan

$$u_t + u_{xxxxxxxxx} = 0 \tag{4.94}$$

denklemini ele alalım. Burada (4.94) lineer diferensiyel denklemi

$$u(x,t) = e^{i\theta} \quad , \quad \theta = kx - w(k)t \tag{4.95}$$

şeklindeki çözümü sağlar. Buradan (4.95), (4.94) lineer diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa,

$$we^{i(kx-wt)} = k^9 e^{i(kx-wt)} \tag{4.96}$$

bulunur ve buradan

$$w(k) = k^9 \tag{4.97}$$

şeklinde dispersiyon ilişkisi elde edilir. O halde (4.95),

$$u(x,t) = e^{i(kx-k^9 t)} \tag{4.98}$$

olarak bulunur. Böylece (3.25) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = U(x,t,\xi,\tau) \quad , \quad U(x,t,\xi,\tau) = \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \epsilon^3 U_3 + ... \tag{4.99}$$

formundadır. Yavaş değişkenler ise

$$\begin{aligned}
\xi &= \epsilon(x - \tfrac{dw(k)}{dk}t) \\
&= \epsilon(x - 9k^8 t) \\
\tau &= -\tfrac{1}{2}\epsilon^2(\tfrac{d^2w(k)}{dk^2}t) \\
&= -36\epsilon^2 k^7 t
\end{aligned} \tag{4.100}$$

olarak bulunur. Buradan (3.25) denklemindeki türevli terimler (4.97)-(4.100) kullanılarak

$$\begin{aligned}
D_t &= \partial_t - 9\epsilon k^8 \partial_\xi - 36\epsilon^2 k^7 \partial_\tau \\
D_{xxxxxx} &= \partial_{xxxxxx} + 6\epsilon\partial_{xxxxx\xi} + 15\epsilon^2\partial_{xxxx\xi\xi} + 20\epsilon^3\partial_{xxx\xi\xi\xi} \\
&\quad +15\epsilon^4\partial_{xx\xi\xi\xi\xi} + 6\epsilon^5\partial_{x\xi\xi\xi\xi\xi} + \epsilon^6\partial_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi} \\
D_{xxxxxxxxx} &= \partial_{xxxxxxxxx} + 9\epsilon\partial_{xxxxxxxx\xi} + 36\epsilon^2\partial_{xxxxxxx\xi\xi} \\
&\quad +84\epsilon^3\partial_{xxxxxx\xi\xi\xi} + 126\epsilon^4\partial_{xxxxx\xi\xi\xi\xi} \\
&\quad +126\epsilon^5\partial_{xxxx\xi\xi\xi\xi\xi} + 84\epsilon^6\partial_{xxx\xi\xi\xi\xi\xi\xi} \\
&\quad +36\epsilon^7\partial_{xx\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + 9\epsilon^8\partial_{x\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \epsilon^9\partial_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi\xi}
\end{aligned} \tag{4.101}$$

ve (4.37) gibi bulunur. (4.99),(4.37) ve (4.101) kullanılarak (3.25) denkleminde yerine yazılır. Buradan ϵ'nun artan kuvvetlerine göre bulunur. Bu denklemde ϵ'nun aynı kuvvetten olan katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\epsilon \ : \ u_{1t} + u_{1xxxxxxxxx} = 0 \tag{4.102}$$

$$\begin{aligned}\epsilon^2 \quad : \quad & -9k^8 u_{1\xi} + u_{2t} + 45u_{1x}u_{1xxxxxx} + 45u_1 u_{1xxxxxxx} \\ & +210u_{1xxx}u_{1xxxx} + 210u_{1xx}u_{1xxxxx} + u_{2xxxxxxxxx} \\ & +9u_{1xxxxxxxx\xi} = 0\end{aligned} \tag{4.103}$$

$$\begin{aligned}\epsilon^3 \quad : \quad & -36k^7 u_{1\tau} - 9k^8 u_{2\xi} + 3150u_1 u_{1xx}u_{1xxx} \\ & +1260u_1 u_{1x}u_{1xxxx} + u_{3t} + 45u_{1x}(u_{2xxxxxx} + 6u_{1xxxxx\xi}) \\ & +45(u_{2x} + u_{1\xi})u_{1xxxxxx} + 45u_1(u_{2xxxxxxx} + 7u_{1xxxxxx\xi}) \\ & +45u_2 u_{1xxxxxxx} + 210u_{1xxx}(u_{2xxxx} + 4u_{1xxx\xi}) \\ & +210(u_{2xxx} + 3u_{1xx\xi})u_{1xxxx} + 210u_{1xx}(u_{2xxxxx} + 5u_{1xxxx\xi}) \\ & +210(u_{2xx} + 2u_{1x\xi})u_{1xxxxx} + 1575u_{1x}u_{1xx}^2 + 630u_1^2 u_{1xxxxx} \\ & +u_{3xxxxxxxxx} + 9u_{2xxxxxxxx\xi} + 36u_{1xxxxxxx\xi\xi} = 0\end{aligned} \tag{4.104}$$

denklemleri bulunur. Buradan (4.102) denkleminin çözümü

$$u_1(x,t,\xi,\tau) = v_1(\xi,\tau)e^{i(kx-k^9t)} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^9t)} \tag{4.105}$$

olacak şekilde bulunur. Bu çözüm (4.103) denkleminde yerine yazılırsa ve $f_1(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere (4.103) denkleminin çözümü,

$$u_2(x,t,\xi,\tau) = v_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^9t)} + v_{-2}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^9t)} + f_1(\xi,\tau) \tag{4.106}$$

şeklindedir. O halde,

$$v_2(\xi,\tau) = \tfrac{v_1^2(\xi,\tau)}{k^2} \quad , \quad v_{-2}(\xi,\tau) = \tfrac{v_{-1}^2(\xi,\tau)}{k^2} \tag{4.107}$$

olarak elde edilir. (4.105), (4.106) ve (4.107), (4.104) denkleminde yerine yazılırsa ve $f_2(\xi,\tau)$ ve $f_3(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere (4.104) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u_3(x,t,\xi,\tau) &= v_3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^9t)} + v_{-3}(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^9t)} \\ &\quad + f_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^9t)} + f_3(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^9t)} \end{aligned} \tag{4.108}$$

şeklindedir. O halde,

$$v_3(\xi,\tau) = \tfrac{3v_1^3(\xi,\tau)}{4k^4} \quad , \quad v_{-3}(\xi,\tau) = \tfrac{3v_{-1}^3(\xi,\tau)}{4k^4} \tag{4.109}$$

ve

$$\begin{aligned} f_1(\xi,\tau) &= \tfrac{-15v_1v_{-1}}{k^2} \\ f_2(\xi,\tau) &= \tfrac{-2iv_{-1}v_{-1\xi}}{k^3} \\ f_3(\xi,\tau) &= \tfrac{2iv_1v_{1\xi}}{k^3} \end{aligned} \tag{4.110}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (4.102)-(4.104) denklemlerinin yaklaşık çözümleri

$$\theta = (kx - k^9t) \tag{4.111}$$

için

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1(\xi,\tau)e^{i\theta} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i\theta} \\ u_2 &= k^{-2}(-15v_1(\xi,\tau)v_{-1}(\xi,\tau) + v_1^2(\xi,\tau)e^{2i\theta} + v_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i\theta}) \\ u_3 &= k^{-3}(-2iv_{-1}(\xi,\tau)v_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i\theta} + 2iv_1(\xi,\tau)v_{1\xi}(\xi,\tau)e^{2i\theta}) \\ &\quad + \tfrac{3}{4}k^{-4}(v_1^3(\xi,\tau)e^{3i\theta} + v_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i\theta}) \end{aligned} \tag{4.112}$$

olarak bulunur. (4.112) çözümlerinin (4.104) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} iv_{1\tau} &= v_{1\xi\xi} - \tfrac{2}{k^2}v_1v_{-1} \\ iv_{1\tau} &= v_{1\xi\xi} - \tfrac{2}{k^2}v_1\left|v_1\right|^2 \end{aligned} \tag{4.113}$$

bulunur. $q = \frac{v_1}{k}$ olarak alınırsa (4.113) denkleminden

$$iq_{\tau} = q_{\xi\xi} - 2q\left|q^2\right| \tag{4.114}$$

lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi elde edilir. O halde q, Schrödinger denkleminin çözümü ve q_{-1} de q'nun kompleks eşleniği olacak şekilde (3.25) KdV9 denkleminin yaklaşık çözümü

$$\begin{aligned}
u(x,t) \quad = \quad & \epsilon k(q(\xi,\tau)e^{i(kx-k^9t)} + q_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^9t)}) \\
& +\epsilon^2(-15q(\xi,\tau)q_{-1}(\xi,\tau) + q^2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^9t)} \\
& +q^2_{-1}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^9t)}) + k\epsilon^3(-2iq_{-1}(\xi,\tau)q_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^9t)} \qquad (4.115) \\
& +2iq(\xi,\tau)q_{\xi}(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^9t)}) \\
& +\tfrac{3}{4}k\epsilon^3(q^3_1(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^9t)} + q^3_{-1}(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^9t)})
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

4.2.5 (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon denklemine çok ölçekli açılım metodunun uygulanması

Yedinci mertebeden (1+1) boyutlu Caudrey-Dodd-Gibbon denklemi (3.26) formundadır. (3.26) denklemindeki dispersiyon ilişkisini bulmak için (3.26) denkleminin lineer kısmı olan

$$u_t + u_{xxxxxxx} = 0 \tag{4.116}$$

denklemini ele alalım. Burada (4.116) lineer diferensiyel denklemi

$$u(x,t) = e^{i\theta} \quad , \quad \theta = kx - w(k)t \tag{4.117}$$

şeklindeki çözümü sağlar. Buradan (4.117), (4.116) lineer diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa,

$$we^{i(kx-wt)} = k^7 e^{i(kx-wt)} \tag{4.118}$$

bulunur ve buradan

$$w(k) = k^7 \tag{4.119}$$

şeklinde dispersiyon ilişkisi elde edilir. O halde (4.116),

$$u(x,t) = e^{i(kx-k^7t)} \tag{4.120}$$

olarak bulunur. Böylece (3.26) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = U(x,t,\xi,\tau) \quad , \quad U(x,t,\xi,\tau) = \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \epsilon^3 U_3 + ... \tag{4.121}$$

şeklindedir. Yavaş değişkenler ise

$$\begin{aligned} \xi &= \epsilon(x - \tfrac{dw(k)}{dk}t) \\ &= \epsilon(x - 7k^6 t) \\ \tau &= -\tfrac{1}{2}\epsilon^2(\tfrac{d^2w(k)}{dk^2}t) \\ &= -21\epsilon^2 k^5 t \end{aligned} \tag{4.122}$$

olarak bulunur. Buradan (3.26) denklemindeki türevli terimler (4.119)-(4.122) kullanılarak (4.37) olarak bulunur. (4.121) ve (4.37) kullanılarak (3.26) denkleminde yerine yazılır. Buradan ϵ'nun artan kuvvetlerine göre bulunur. Bu denklemde ϵ'nun aynı kuvvetten olan katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\epsilon \quad : \quad u_{1t} - u_{1xxxxxxx} = 0 \tag{4.123}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \quad : \quad & u_{2t} - 7k^6 u_{1\xi} - 28u_1 u_{1xxxxx} - 28u_{1x}u_{1xxxx} - 70u_{1xx}u_{1xxx} \\ & -u_{2xxxxxxx} - 7u_{1xxxxxx\xi} = 0 \end{aligned} \tag{4.124}$$

$$\epsilon^3 \quad : \quad u_{3t} - 7k^6 u_{2\xi} - 21k^5 u_{1\tau} - 210u_1^2 u_{1xxx} - 420u_1 u_{1x} u_{1xx}$$

$$-28u_1(u_{2xxxxx} + 5u_{1xxxx\xi}) - 28u_2 u_{1xxxxx}$$

$$-28u_{1x}(u_{2xxxx} + 4u_{1xxx\xi}) - 28(u_{2x} + u_{1\xi})u_{1xxxx} \tag{4.125}$$

$$-70u_{1xx}(u_{2xxx} + 3u_{1xx\xi}) - 70(u_{2xx} + 2u_{1x\xi})u_{1xxx}$$

$$-u_{3xxxxxxx} - 7u_{2xxxxxx\xi} - 21u_{1xxxxx\xi\xi} = 0$$

denklemleri elde edilir. Buradan (4.123) denkleminin çözümü

$$u_1(x,t,\xi,\tau) = v_1(\xi,\tau)e^{i(kx-k^7t)} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^7t)} \tag{4.126}$$

formundadır. Bu çözüm (4.124) denkleminde yerine yazılırsa ve $f_1(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere (4.124) denkleminin çözümü,

$$u_2(x,t,\xi,\tau) = v_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} + v_{-2}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} + f_1(\xi,\tau) \tag{4.127}$$

şeklindedir. O halde,

$$v_2(\xi,\tau) = \frac{v_1^2(\xi,\tau)}{k^2} \quad , \quad v_{-2}(\xi,\tau) = \frac{v_{-1}^2(\xi,\tau)}{k^2} \tag{4.128}$$

olarak elde edilir. (4.126), (4.127) ve (4.128), (4.125) denkleminde yerine yazılırsa ve $f_2(\xi,\tau)$ ve $f_3(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere (4.125) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u_3(x,t,\xi,\tau) &= v_3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^7t)} + v_{-3}(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^7t)} \\ &\quad + f_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} + f_3(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} \end{aligned} \tag{4.129}$$

şeklindedir. O halde,

$$v_3(\xi,\tau) = \frac{3v_1^3(\xi,\tau)}{4k^4} \quad , \quad v_{-3}(\xi,\tau) = \frac{3v_{-1}^3(\xi,\tau)}{4k^4} \tag{4.130}$$

ve

$$\begin{aligned} f_1(\xi,\tau) &= \tfrac{-4v_1v_{-1}}{k^2} \\ f_2(\xi,\tau) &= \tfrac{-2iv_{-1}v_{-1\xi}}{k^3} \\ f_3(\xi,\tau) &= \tfrac{2iv_1v_{1\xi}}{k^3} \end{aligned} \tag{4.131}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (4.123)-(4.125) denklemlerinin yaklaşık çözümleri

$$\theta = (kx - k^7 t) \tag{4.132}$$

için

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1(\xi,\tau)e^{i\theta} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i\theta} \\ u_2 &= k^{-2}(-4v_1(\xi,\tau)v_{-1}(\xi,\tau) + v_1^2(\xi,\tau)e^{2i\theta} + v_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i\theta}) \\ u_3 &= k^{-3}(-2iv_{-1}(\xi,\tau)v_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i\theta} + 2iv_1(\xi,\tau)v_{1\xi}(\xi,\tau)e^{2i\theta}) \\ &\quad + \tfrac{3}{4}k^{-4}(v_1^3(\xi,\tau)e^{3i\theta} + v_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i\theta}) \end{aligned} \tag{4.133}$$

olarak bulunur. (4.133) çözümlerinin (4.125) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} iv_{1\tau} &= v_{1\xi\xi} - \tfrac{2}{k^2}v_1v_{-1} \\ iv_{1\tau} &= v_{1\xi\xi} - \tfrac{2}{k^2}v_1\left|v_1\right|^2 \end{aligned} \tag{4.134}$$

bulunur. $q = \frac{v_1}{k}$ olarak alınırsa (4.134) denkleminden

$$iq_\tau = q_{\xi\xi} - 2q\left|q^2\right| \tag{4.135}$$

lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi elde edilir. O halde q, Schrödinger denkleminin çözümü ve q_{-1} de q'nun kompleks eşleniği olacak şekilde (3.26) yedinci mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon denkleminin yaklaşık çözümü

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \epsilon k(q(\xi,\tau)e^{i(kx-k^7t)} + q_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^7t)}) \\
&+\epsilon^2(-4q(\xi,\tau)q_{-1}(\xi,\tau) + q^2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} \\
&+q_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)}) + k\epsilon^3(-2iq_{-1}(\xi,\tau)q_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} \\
&+2iq(\xi,\tau)q_\xi(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)}) \\
&+\tfrac{3}{4}k\epsilon^3(q_1^3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^7t)} + q_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^7t)})
\end{aligned} \tag{4.136}
$$

olarak elde edilir.

5. LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN $\left(\frac{G'}{G}\right)$-AÇILIM YÖNTEMİ VE KDV7 DENKLEMİNE UYGULANMASI

Bu bölümde, tam çözüm yöntemlerinden $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi tanıtılmış ve (1+1) boyutlu KdV7 denklemine uygulanmıştır. Bu kısmi diferensiyel denkleme hareketli dalga dönüşümü uygulanarak adi diferensiyel denkleme indirgenmiştir. Daha sonra homojen dengeleme işleminin ardından (1+1) boyutlu KdV7 denkleminin tam çözümü elde edilmiştir.

5.1 Dengelenme Sayısı

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denkleme hareketli dalga dönüşümü uygulanması sonucu, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem, lineer olmayan adi diferensiyel denkleme dönüşmektedir. Elde edilen bu lineer olmayan adi diferensiyel denklemin hareketli dalga çözümünün bir seri toplamı şeklinde olduğu kabul edilmekte ve bu seri toplamının üst sınırına dengelenme sayısı adı verilmektedir. Dengelenme sayısı, lineer olmayan herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasında elde edilen bir sayıdır.

$$P(U, U^{'}, U^{''}, U^{'''}, ...) = 0 \tag{5.1}$$

şeklinde verilen lineer olmayan bir adi diferensiyel denklem için

$$U^{'} = \tfrac{dU}{d\xi}, \quad U^{''} = \tfrac{d^2U}{d\xi^2}, \quad U^{'''} = \tfrac{d^3U}{d\xi^3}, ...$$

ve $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ olmak üzere (5.1) denkleminde en yüksek mertebeden lineer terim

$$\frac{d^qU}{d\xi^q}$$

ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim

$$\left(\frac{d^pU}{d\xi^p}\right)^r .(U)^s$$

formunda verilsin. Bu durumda ”m” dengelenme sayısı olmak üzere

$$U = \tau^m$$

dönüşümü yapılırsa

$$m + q = r(m + p) + ms$$

şeklinde elde edilir ve buradan bulunan m sayısına dengelenme sayısı adı verilir.

5.2 $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Yöntemi

$\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi, M. Wang, X. Li ve J. Zhang (Wang vd., 2008) tarafından tanımlanmış ve birçok lineer olmayan kısmi diferensiyel denkleme uygulanmıştır (Bekir, 2008; Zhang vd., 2008; Güner, 2014). $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerinin bulunmasında oldukça etkili bir yöntemdir.

$\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi aşağıdaki adımlarla tanımlanmıştır.

P, $u(x,t)$ ve kısmi türevlerinin bir polinomu olmak üzere

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, ...) = 0 \tag{5.2}$$

şeklinde lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi verilsin.

1. Adım: (5.2) denkleminin hareketli dalga çözümleri için

$$u(x,t) = U(\xi) \quad , \quad \xi = kx - ct \tag{5.3}$$

hareketli dalga dönüşümünü ele alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= k\frac{\partial}{\partial \xi} \\
\frac{\partial}{\partial t} &= -c\frac{\partial}{\partial \xi} \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= k^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \qquad (5.4) \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde gerekli kısmi türevler hesaplanır. (5.4) dönüşümlerinin (5.2) denkleminde yerine yazılmasıyla lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi

$$Q(U, -cU^{'}, kU^{'}, c^2U^{''}, k^2U^{''}, ...) = 0 \qquad (5.5)$$

formunda adi diferensiyel denkleme indirgenir.

2. Adım: (5.5) adi diferensiyel denklemin çözümü m dengelenme sayısı ve α_i'ler daha sonra belirlenecek sabitler olmak üzere

$$U(\xi) = \sum_{l=0}^{m} \alpha_l \left(\frac{G^{'}(\xi)}{G(\xi)}\right)^l, \alpha_m \neq 0 \qquad (5.6)$$

şeklindedir. λ ve μ keyfi sabitler olmak üzere $G(\xi)$,

$$G^{''}(\xi) + \lambda G^{'}(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \qquad (5.7)$$

ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemini sağlar. (5.7) denkleminin karakteristik denklemi

$$m^2 + \lambda m + \mu = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri

$$m_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}$$

kullanılarak

$$G(\xi) = \begin{cases} c_1 e^{\frac{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi} & , \quad \lambda^2-4\mu > 0 \\ c_1 e^{\frac{-\lambda+i\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda-i\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi} & , \quad \lambda^2-4\mu < 0 \\ c_1 \xi e^{\frac{-\lambda}{2}\xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda}{2}\xi} & , \quad \lambda^2-4\mu = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

genel çözümü bulunur.

$$\begin{aligned} e^{\frac{i\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi} &= \cos(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi) + i\sin(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi) \\ e^{\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi} &= \cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi) + \sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi) \end{aligned} \tag{5.9}$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} G(\xi) &= e^{\frac{-\lambda}{2}\xi}(c_1(\cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi) + \sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi)) + \quad , \quad \lambda^2-4\mu > 0 \\ & c_2(\cosh(\frac{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi) + \sinh(\frac{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi))) \\ G(\xi) &= e^{\frac{-\lambda}{2}\xi}(c_1(\cos(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi) + i\sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi)) + \quad , \quad \lambda^2-4\mu < 0 \\ & c_2(\cos(\frac{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi) + i\sin(\frac{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi))) \\ G(\xi) &= e^{\frac{-\lambda}{2}\xi}(c_1\xi + c_2) \quad , \quad \lambda^2-4\mu = 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

olarak elde edilir. Böylece $C_1 = c_1 + c_2$ ve $C_2 = c_1 - c_2$ keyfi sabitler olmak üzere

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left(\frac{C_1\sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi)+C_2\cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi)}{C_1\cosh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi)+C_2\sinh(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi)}\right) - \frac{\lambda}{2} & , \quad \lambda^2-4\mu > 0 \\ \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\frac{-C_1\sin(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi)+C_2\cos(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi)}{C_1\cos(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi)+C_2\sin(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi)}\right) - \frac{\lambda}{2} & , \quad \lambda^2-4\mu < 0 \\ \frac{C_1}{C_1\xi+C_2} - \frac{\lambda}{2} & , \quad \lambda^2-4\mu = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

olarak elde edilir.

3. Adım: (5.5) denkleminde en yüksek mertebeden türevli terimlerin ve en yüksek dereceden lineer olmayan terimlerin dengelenmesiyle (5.6) denklemi için m dengelenme sayısı bulunur.

4. Adım: (5.6) denklemi (5.7) ile birlikte (5.5) denkleminde yerine yazılırsa $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ 'ye bağlı homojen bir denklem bulunur. Örneğin $m = 1$ için (5.7) denkleminde

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \implies G''(\xi) = -\lambda G'(\xi) - \mu G(\xi)$$

kullanılarak

$$U(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} U' &= \alpha_1 \left(\frac{G''G - G'G'}{G^2}\right) \\ &= \alpha_1 \left(\frac{(-\lambda G' - \mu G)G - (G')^2}{G^2}\right) \\ &= \alpha_1 \left(-\lambda \frac{G'}{G} - \mu - (\frac{G'}{G})^2\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} U'' &= \alpha_1 \left(-\lambda \left(-\lambda \frac{G'}{G} - \mu - (\frac{G'}{G})^2\right) - 2(\frac{G'}{G}) \left(-\lambda \frac{G'}{G} - \mu - (\frac{G'}{G})^2\right)\right) \\ &= \alpha_1 \left(\left(\lambda^2 \frac{G'}{G} + \lambda\mu + \lambda(\frac{G'}{G})^2\right) + 2\left(\lambda(\frac{G'}{G})^2 + \mu(\frac{G'}{G}) + (\frac{G'}{G})^3\right)\right) \\ &= \alpha_1 \left(\lambda\mu + (\lambda^2 + 2\mu)(\frac{G'}{G}) + 3\lambda(\frac{G'}{G})^2 + 2(\frac{G'}{G})^3\right) \end{aligned}$$

türevleri, $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ polinomları şeklinde elde edilebilir. Benzer şekilde, Maple kullanılarak daha yüksek mertebeden türevler ve $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ polinomları şeklinde bulunabilir. (5.6) denklemi (5.7) ile birlikte (5.5) denkleminde yerine yazılır ve bu denklemde $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$'nin aynı dereceden tüm terimleri toplanırsa (5.5) denkleminin sol tarafı $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ şeklinde bir polinom elde edilir. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek lineer olmayan cebirsel denklem sistemi bulunur. Elde edilen cebirsel denklem sistemi Maple yardımıyla çözülürse

$\alpha_l \ (l = 0,1,2,...,m), k, c$ katsayıları bulunabilir. O halde bu değerler (5.6) denkleminde yerine yazılırsa (5.2) denkleminin tam çözümleri elde edilir.

5.3 (1+1) Boyutlu KdV7 Denklemine $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Yönteminin Uygulanması

$$\begin{aligned} & u_t + 140u^3u_x + 70u_x^3 + 280uu_xu_{2x} + 70u^2u_{3x} + 70u_{2x}u_{3x} + 42u_xu_{4x} \\ & +14uu_{5x} + u_{7x} = 0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

formundaki (1+1) boyutlu KdV7 denklemine (5.3) hareketli dalga dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & -cU' + 140kU^3U' + 70k^3(U')^3 + 280k^3UU'U'' + 70k^3U^2U''' \\ & +70k^5U''U''' + 42k^5U'U^{(4)} + 14k^5UU^{(5)} + k^7U^{(7)} = 0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. (5.13) adi diferensiyel denkleminin çözümünü (5.6) seri açılımı şeklinde kabul edelim. Burada m dengelenme katsayısı ve α_i'ler daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir. λ ve μ keyfi sabitler olmak üzere $G(\xi)$, (5.7) ikinci mertebeden lineer adi diferensiyel denklemini sağlar. "m" dengelenme sayısını bulmak için, (5.13) denkleminde en yüksek mertebeden lineer terim $U^{(7)}$ ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim $UU^{(5)}$ 'nin homojen dengeleme prensibine göre dengelenmesinden, m dengelenme sayısı,

$$U^{(7)} \sim UU^{(5)} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} & m+7 = m+m+5 \\ & m = 2 \end{aligned} \tag{5.15}$$

olarak bulunur. Buradan (5.13) denkleminin dalga çözümü

$$U = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right) + \alpha_2 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2 \quad , \quad \alpha_1, \alpha_2 \neq 0 \tag{5.16}$$

şeklinde elde edilir. (5.7) ve (5.16) kullanılarak (5.13) denklemindeki türevli terimler $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ 'ye bağlı olarak

$$U' = -\alpha_1(\lambda(\tfrac{G'}{G}) + \mu + (\tfrac{G'}{G})^2) - 2\alpha_2(\lambda(\tfrac{G'}{G})^2 + \mu(\tfrac{G'}{G}) + (\tfrac{G'}{G})^3)$$

$$\begin{aligned} U'' &= \alpha_1(\lambda\mu + (\lambda^2+2\mu)(\tfrac{G'}{G}) + 3\lambda(\tfrac{G'}{G})^2 + 2(\tfrac{G'}{G})^3) + 2\alpha_2(2\lambda^2(\tfrac{G'}{G})^2 \\ &\quad +3\lambda\mu(\tfrac{G'}{G}) + 5\lambda(\tfrac{G'}{G})^3 + \mu^2 + 4\mu(\tfrac{G'}{G})^2 + 3(\tfrac{G'}{G})^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U''' &= -\alpha_1(\lambda^3\tfrac{G'}{G} + \lambda^2\mu + 8\lambda\mu\tfrac{G'}{G} + 2\mu^2 + 7(\tfrac{G'}{G})^2\lambda^2 + 8(\tfrac{G'}{G})^2\mu \\ &\quad +12(\tfrac{G'}{G})^3\lambda + 6(\tfrac{G'}{G})^4) - 2\alpha_2(4\lambda^3(\tfrac{G'}{G})^2 + 7\lambda^2\mu(\tfrac{G'}{G}) \\ &\quad +19\lambda^2(\tfrac{G'}{G})^3 + 3\lambda\mu^2 + 26\lambda\mu(\tfrac{G'}{G})^2 + 27\lambda(\tfrac{G'}{G})^4 \\ &\quad +8\mu^2(\tfrac{G'}{G}) + 20\mu(\tfrac{G'}{G})^3 + 12(\tfrac{G'}{G})^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U^{(4)} &= \alpha_1(15\lambda^3(\tfrac{G'}{G})^2 + \lambda^4(\tfrac{G'}{G}) + \lambda^3\mu + 22\lambda^2\mu(\tfrac{G'}{G}) + 60\lambda\mu(\tfrac{G'}{G})^2 \\ &\quad +8\lambda\mu^2 + 16\mu^2(\tfrac{G'}{G}) + 50\lambda^2(\tfrac{G'}{G})^3 + 40\mu(\tfrac{G'}{G})^3 + 60\lambda(\tfrac{G'}{G})^4 \\ &\quad +24(\tfrac{G'}{G})^5) + 2\alpha_2(8\lambda^4(\tfrac{G'}{G})^2 + 15\lambda^3\mu(\tfrac{G'}{G}) + 65\lambda^3(\tfrac{G'}{G})^3 \\ &\quad +7\lambda^2\mu^2 + 116\lambda^2\mu(\tfrac{G'}{G})^2 + 165\lambda^2(\tfrac{G'}{G})^4 + 60\lambda\mu^2(\tfrac{G'}{G}) \\ &\quad +220\lambda\mu(\tfrac{G'}{G})^3 + 168\lambda(\tfrac{G'}{G})^5 + 8\mu^3 + 68\mu^2(\tfrac{G'}{G})^2 \\ &\quad +120\mu(\tfrac{G'}{G})^4 + 60(\tfrac{G'}{G})^6) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U^{(5)} &= -\alpha_1(180\lambda^3(\tfrac{G'}{G})^3 + 16\mu^3 + 120(\tfrac{G'}{G})^6 + 52\lambda^3\mu(\tfrac{G'}{G}) \\
&\quad +136\lambda\mu^2(\tfrac{G'}{G}) + 480\lambda\mu(\tfrac{G'}{G})^3 + 292\lambda^2\mu(\tfrac{G'}{G})^2 + 31\lambda^4(\tfrac{G'}{G})^2 \\
&\quad +22\lambda^2\mu^2 + 136\mu^2(\tfrac{G'}{G})^2 + \lambda^5(\tfrac{G'}{G}) + 390\lambda^2(\tfrac{G'}{G})^4 + \lambda^4\mu \\
&\quad +360\lambda(\tfrac{G'}{G})^5 + 240\mu(\tfrac{G'}{G})^4) - 2\alpha_2(16\lambda^5(\tfrac{G'}{G})^2 + 31\lambda^4\mu(\tfrac{G'}{G}) \\
&\quad +211\lambda^4(\tfrac{G'}{G})^3 + 15\lambda^3\mu^2 + 442\lambda^3\mu(\tfrac{G'}{G})^2 + 855\lambda^3(\tfrac{G'}{G})^4 \\
&\quad +292\lambda^2\mu^2(\tfrac{G'}{G}) + 1552\lambda^2\mu(\tfrac{G'}{G})^3 + 1500\lambda^2(\tfrac{G'}{G})^5 + 60\lambda\mu^3 \\
&\quad +856\lambda\mu^2(\tfrac{G'}{G})^2 + 1980\lambda\mu(\tfrac{G'}{G})^4 + 1200\lambda(\tfrac{G'}{G})^6 \\
&\quad +136\mu^3(\tfrac{G'}{G}) + 616\mu^2(\tfrac{G'}{G})^3 + 840\mu(\tfrac{G'}{G})^5 + 360(\tfrac{G'}{G})^7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U^{(6)} &= \alpha_1(63\lambda^5(\tfrac{G'}{G})^2 + 720(\tfrac{G'}{G})^7 + 1176\lambda^3\mu(\tfrac{G'}{G})^2 + 1848\lambda\mu^2(\tfrac{G'}{G})^2 \\
&\quad +3584\lambda^2\mu(\tfrac{G'}{G})^3 + 4200\lambda\mu(\tfrac{G'}{G})^4 + 720\lambda^2\mu^2(\tfrac{G'}{G}) + 114\lambda^4\mu(\tfrac{G'}{G}) \\
&\quad +602\lambda^4(\tfrac{G'}{G})^3 + 1232\mu^2(\tfrac{G'}{G})^3 + 2100\lambda^3(\tfrac{G'}{G})^4 + 272\lambda\mu^3(\tfrac{G'}{G}) \\
&\quad +52\lambda^3\mu^2 + 136\lambda\mu^3 + \lambda^6(\tfrac{G'}{G}) + \lambda^5\mu + 3360\lambda^2(\tfrac{G'}{G})^5 \\
&\quad +1680\mu(\tfrac{G'}{G})^5 + 2520\lambda(\tfrac{G'}{G})^6) + 2\alpha_2(32\lambda^6(\tfrac{G'}{G})^2 + 63\lambda^5\mu(\tfrac{G'}{G}) \\
&\quad +665\lambda^5(\tfrac{G'}{G})^3 + 31\lambda^4\mu^2 + 1548\lambda^4\mu(\tfrac{G'}{G})^2 + 4053\lambda^4(\tfrac{G'}{G})^4 \\
&\quad +1176\lambda^3\mu^2(\tfrac{G'}{G}) + 8960\lambda^3\mu(\tfrac{G'}{G})^3 + 10920\lambda^3(\tfrac{G'}{G})^5 + 292\lambda^2\mu^3 \\
&\quad +6660\lambda^2\mu^2(\tfrac{G'}{G})^2 + 20076\lambda^2\mu(\tfrac{G'}{G})^4 + 14700\lambda^2(\tfrac{G'}{G})^6
\end{aligned}
$$

$$+1848\lambda\mu^3(\tfrac{G'}{G}) + 11480\lambda\mu^2(\tfrac{G'}{G})^3 + 19320\lambda\mu(\tfrac{G'}{G})^5$$

$$+9720\lambda(\tfrac{G'}{G})^7 + 136\mu^4 + 1984\mu^3(\tfrac{G'}{G})^2 + 6048\mu^2(\tfrac{G'}{G})^4$$

$$+6720\mu(\tfrac{G'}{G})^6 + 2520(\tfrac{G'}{G})^8)$$

$$\begin{aligned}
U^{(7)} \;=\;& -\alpha_1(127\lambda^6(\tfrac{G'}{G})^2 + 240\lambda^5\mu(\tfrac{G'}{G}) + 1986\lambda^5(\tfrac{G'}{G})^3 + 20160\lambda(\tfrac{G'}{G})^7 \\
& +13440\mu(\tfrac{G'}{G})^6 + 5040(\tfrac{G'}{G})^8 + 4326\lambda^4\mu(\tfrac{G'}{G})^2 + 3072\lambda^3\mu^2(\tfrac{G'}{G}) \\
& +21504\lambda^3\mu(\tfrac{G'}{G})^3 + 15168\lambda^2\mu^2(\tfrac{G'}{G})^2 + 3696\lambda\mu^3(\tfrac{G'}{G}) \\
& +24192\lambda\mu^2(\tfrac{G'}{G})^3 + 44352\lambda^2\mu(\tfrac{G'}{G})^4 + 40320\lambda\mu(\tfrac{G'}{G})^5 + 720\lambda^2\mu^3 \\
& +114\lambda^4\mu^2 + 1860\lambda^4(\tfrac{G'}{G})^2 + 3696\mu^3(\tfrac{G'}{G})^2 + 12096\mu^2(\tfrac{G'}{G})^4 \\
& +8400\lambda^4(\tfrac{G'}{G})^4 + 25200\lambda^3(\tfrac{G'}{G})^5 + 272\lambda^2\mu^3(\tfrac{G'}{G}) + 272\lambda\mu^4 \\
& +272\lambda\mu^3(\tfrac{G'}{G})^2 + \lambda^7(\tfrac{G'}{G}) + \lambda^6\mu + 31920\lambda^2(\tfrac{G'}{G})^6) \qquad (5.17) \\
& -2\alpha_2(64\lambda^7(\tfrac{G'}{G})^2 + 127\lambda^6\mu(\tfrac{G'}{G}) + 2059\lambda^6(\tfrac{G'}{G})^3 + 63\lambda^5\mu^2 \\
& +5154\lambda^5\mu(\tfrac{G'}{G})^2 + 18207\lambda^5(\tfrac{G'}{G})^4 + 4272\lambda^4\mu^2(\tfrac{G'}{G}) + 46188\lambda^4\mu(\tfrac{G'}{G})^3 \\
& +70812\lambda^4(\tfrac{G'}{G})^5 + 1176\lambda^3\mu^3 + 41376\lambda^3\mu^2(\tfrac{G'}{G})^2 + 161784\lambda^3\mu(\tfrac{G'}{G})^4 \\
& +142800\lambda^3(\tfrac{G'}{G})^6 + 15168\lambda^2\mu^3(\tfrac{G'}{G}) + 128064\lambda^2\mu^2(\tfrac{G'}{G})^3 \\
& +265104\lambda^2\mu(\tfrac{G'}{G})^5 + 156240\lambda^2(\tfrac{G'}{G})^7 + 1848\lambda\mu^4 + 40256\lambda\mu^3(\tfrac{G'}{G})^2 \\
& +155232\lambda\mu^2(\tfrac{G'}{G})^4 + 204960\lambda\mu(\tfrac{G'}{G})^6 + 88200\lambda(\tfrac{G'}{G})^8 + 3968\mu^4(\tfrac{G'}{G})
\end{aligned}$$

$$+28160\mu^3(\frac{G'}{G})^3+64512\mu^2(\frac{G'}{G})^5+60480\mu(\frac{G'}{G})^7+20160(\frac{G'}{G})^9)$$

olarak elde edilir. Bu türevler ve (5.16), (5.7) ile birlikte (5.13) denkleminde yerine yazılarak, payda yok edilerek ve $\left(\frac{G'(\xi_n)}{G(\xi_n)}\right)^i$ katsayıları sıfıra eşitlenerek $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, k, c$ için $\left(\frac{G'(\xi_n)}{G(\xi_n)}\right)$'nin artan kuvvetlerine göre bir cebirsel denklem elde edilir. Bu cebirsel denklemde $\left(\frac{G'(\xi_n)}{G(\xi_n)}\right)$'nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned}
\left(\frac{G'(\xi_n)}{G(\xi_n)}\right)^0 \quad : \quad & -140k\alpha_1\mu\alpha_0^3+(-70k^3\mu(\lambda^2+2\mu)\alpha_1-420k^3\alpha_2\mu^2\lambda)\alpha_0^2 \\
& +(-280k^3\mu^2\lambda\alpha_1^2+(-560k^3\mu^3\alpha_2-14k^5\mu(\lambda^4+22\mu\lambda^2 \\
& +16\mu^2))\alpha_1-420k^5\mu^2\lambda(\lambda^2+4\mu)\alpha_2)\alpha_0-70k^3\alpha_1^3\mu^3 \\
& -28k^5\mu^2\lambda(4\lambda^2+17\mu)\alpha_1^2+(-28k^5\mu^3(41\lambda^2+34\mu)\alpha_2 \\
& -\mu(272k^7\mu^3+720\lambda^2k^7\mu^2+114\lambda^4k^7\mu+c+\lambda^6k^7))\alpha_1 \\
& -840k^5\alpha_2^2\mu^4\lambda-42k^7\mu^2\lambda(3\lambda^4+56\mu\lambda^2+88\mu^2)\alpha_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{G'(\xi_n)}{G(\xi_n)}\right)^1 \quad : \quad & (-140k\lambda\alpha_1-280k\alpha_2\mu)\alpha_0^3+(-420k\alpha_1^2\mu-70k^3\lambda(\lambda^2 \\
& +8\mu)\alpha_1-140k^3\mu(7\lambda^2+8\mu)\alpha_2)\alpha_0^2+(-140k^3\mu(5\lambda^2 \\
& +6\mu)\alpha_1^2+(-3640k^3\alpha_2\mu^2\lambda-14k^5\lambda(\lambda^4+52\mu\lambda^2 \\
& +136\mu^2))\alpha_1-1120k^3\alpha_2^2\mu^3-28k^5\mu(31\lambda^4+292\mu\lambda^2 \\
& +136\mu^2)\alpha_2)\alpha_0-490k^3\mu^2\lambda\alpha_1^3+(-980k^3\mu^3\alpha_2 \\
& -14k^5\mu(17\lambda^4+172\mu\lambda^2+84\mu^2))\alpha_1^2+(-56k^5\mu^2\lambda(77\lambda^2
\end{aligned}$$

$$+214\mu)\alpha_2 - \lambda(\lambda^6 k^7 + 240\lambda^4 k^7 \mu + 3072\lambda^2 k^7 \mu^2 + c$$

$$+3968k^7\mu^3))\alpha_1 - 56k^5\mu^3(101\lambda^2 + 64\mu)\alpha_2^2$$

$$-2\mu(3968k^7\mu^3 + 15168\lambda^2 k^7\mu^2 + 4272\lambda^4 k^7\mu + c$$

$$+127\lambda^6 k^7)\alpha_2$$

$$\left(\frac{G'(\xi_n)}{G(\xi_n)}\right)^2 \quad : \quad (-140k\alpha_1 - 280k\alpha_2\lambda)\alpha_0^3 + (-420k\lambda\alpha_1^2 + (-1260k\alpha_2\mu$$

$$-70k^3(7\lambda^2 + 8\mu))\alpha_1 - 280k^3\lambda(2\lambda^2 + 13\mu)\alpha_2)\alpha_0^2$$

$$+(-420k\alpha_1^3\mu - 140k^3\lambda(3\lambda^2 + 20\mu)\alpha_1^2 + (-140k^3\mu(43\lambda^2$$

$$+46\mu)\alpha_2 - 14k^5(31\lambda^4 + 292\mu\lambda^2 + 136\mu^2))\alpha_1$$

$$-5320k^3\alpha_2^2\mu^2\lambda - 56k^5\lambda(8\lambda^4 + 221\mu\lambda^2 + 428\mu^2)\alpha_2)\alpha_0$$

$$-70k^3\mu(12\lambda^2 + 13\mu)\alpha_1^3 + (-4760k^3\alpha_2\mu^2\lambda$$

$$-14k^5\lambda(266\mu\lambda^2 + 538\mu^2 + 9\lambda^4))\alpha_1^2 + (-2520k^3\alpha_2^2\mu^3$$

$$-14k^5\mu(1160\mu^2 + 373\lambda^4 + 2844\mu\lambda^2)\alpha_2 - 3968k^7\mu^3$$

$$-15168\lambda^2 k^7\mu^2 - 4272\lambda^4 k^7\mu - c - 127\lambda^6 k^7)\alpha_1$$

$$-28k^5\mu^2\lambda(457\lambda^2 + 1088\mu)\alpha_2^2 - 2\lambda(64\lambda^6 k^7$$

$$+5154\lambda^4 k^7\mu + 41376\lambda^2 k^7\mu^2 + c + 40256k^7\mu^3)\alpha_2$$

$$\left(\frac{G'(\xi_n)}{G(\xi_n)}\right)^3 \quad : \quad -280k\alpha_2\alpha_0^3 + (-420k\alpha_1^2 + (-1260k\alpha_2\lambda - 840k^3\lambda)\alpha_1$$

$$-840k\alpha_2^2\mu - 140k^3(19\lambda^2 + 20\mu)\alpha_2)\alpha_0^2 + (-420k\lambda\alpha_1^3$$

$$+(-1680k\alpha_2\mu - 140k^3(16\mu + 15\lambda^2))\alpha_1^2$$

$$+(-420k^3\lambda(7\lambda^2 + 44\mu)\alpha_2 - 840k^5\lambda(3\lambda^2 + 8\mu))\alpha_1$$

$$-280k^3\mu(27\lambda^2 + 28\mu)\alpha_2^2 - 28k^5(211\lambda^4 + 1552\mu\lambda^2$$

$$+616\mu^2)\alpha_2)\alpha_0 - 140k\alpha_1^4\mu - 140k^3\lambda(3\lambda^2 + 19\mu)\alpha_1^3$$

$$+(-140k^3\mu(49\lambda^2 + 51\mu)\alpha_2 - 14k^5(129\lambda^4 + 988\mu\lambda^2$$

$$+404\mu^2))\alpha_1^2 + (-10640k^3\alpha_2^2\mu^2\lambda - 42k^5\lambda(2080\mu^2$$

$$+49\lambda^4 + 1180\mu\lambda^2)\alpha_2 - 84k^7\lambda(23\lambda^4 + 256\mu\lambda^2$$

$$+288\mu^2))\alpha_1 - 1680k^3\alpha_2^3\mu^3 - 28k^5\mu(429\lambda^4$$

$$+2950\mu\lambda^2 + 1112\mu^2)\alpha_2^2 + (-4118\lambda^6k^7 - 92376\lambda^4k^7\mu$$

$$-256128\lambda^2k^7\mu^2 - 56320k^7\mu^3 - 2c)\alpha_2$$

$$\left(\frac{G'(\xi_n)}{G(\xi_n)}\right)^4 \quad : \quad ((-1260k\alpha_2 - 420k^3)\alpha_1 - 840k\alpha_2^2\lambda - 3780k^3\alpha_2\lambda)\alpha_0^2$$

$$+(-420k\alpha_1^3 + (-1680k\alpha_2\lambda - 3080k^3\lambda)\alpha_1^2$$

$$+(-2100k\alpha_2^2\mu - 140k^3(89\lambda^2 + 92\mu)\alpha_2 - 420k^5(13\lambda^2$$

$$+8\mu))\alpha_1 - 560k^3\lambda(6\lambda^2 + 37\mu)\alpha_2^2 - 1260k^5\lambda(19\lambda^2$$

$$+44\mu)\alpha_2)\alpha_0 - 140k\lambda\alpha_1^4 + (-700k\alpha_2\mu - 70k^3(26\lambda^2$$

$$+27\mu))\alpha_1^3 + (-280k^3\lambda(11\lambda^2 + 68\mu)\alpha_2$$

$$-140k^5\lambda(55\lambda^2 + 131\mu))\alpha_1^2 + (-70k^3\mu(201\lambda^2$$

$$+206\mu)\alpha_2^2 - 14k^5(3832\mu^2 + 10194\mu\lambda^2 + 1487\lambda^4)\alpha_2$$

$$-126k^7(81\lambda^4 + 352\mu\lambda^2 + 96\mu^2))\alpha_1 - 6580k^3\alpha_2^3\mu^2\lambda$$

$$-56k^5\lambda(2672\mu^2 + 72\lambda^4 + 1609\mu\lambda^2)\alpha_2^2 - 126k^7\lambda(289\lambda^4$$

$$+2568\mu\lambda^2 + 2464\mu^2)\alpha_2$$

$$\left(\frac{G'(\xi_n)}{G(\xi_n)}\right)^5 \quad : \quad (-840k\alpha_2^2 - 1680k^3\alpha_2)\alpha_0^2 + ((-1400k^3 - 1680k\alpha_2)\alpha_1^2$$

$$+(-16520k^3\alpha_2\lambda - 2100k\alpha_2^2\lambda - 5040k^5\lambda)\alpha_1$$

$$-840k\alpha_2^3\mu - 280k^3(47\lambda^2 + 48\mu)\alpha_2^2 - 1680k^5(25\lambda^2$$

$$+14\mu)\alpha_2)\alpha_0 - 140k\alpha_1^4 + (-700k\alpha_2\lambda - 2450k^3\lambda)\alpha_1^3$$

$$+(-1260k\alpha_2^2\mu - 140k^3(87\lambda^2 + 89\mu)\alpha_2 - 56k^5(143\mu$$

$$+250\lambda^2))\alpha_1^2 + (-350k^3\lambda(17\lambda^2 + 104\mu)\alpha_2^2$$

$$-112k^5\lambda(650\lambda^2 + 1441\mu)\alpha_2 - 5040k^7\lambda(5\lambda^2$$

$$+8\mu))\alpha_1 - 140k^3\mu(59\lambda^2 + 60\mu)\alpha_2^3 - 28k^5(1229\lambda^4$$

$$+8038\mu\lambda^2 + 2904\mu^2)\alpha_2^2 - 504k^7(281\lambda^4$$

$$+1052\mu\lambda^2 + 256\mu^2)\alpha_2$$

$$\left(\frac{G'(\xi_n)}{G(\xi_n)}\right)^6 \; : \; ((-7000k^3\alpha_2 - 2100k\alpha_2^2 - 1680k^5)\alpha_1 - 16520k^3\alpha_2^2\lambda$$

$$-840k\alpha_2^3\lambda - 33600k^5\alpha_2\lambda)\alpha_0 + (-700k\alpha_2 - 1050k^3)\alpha_1^3$$

$$+(-11508k^5\lambda - 15400k^3\alpha_2\lambda - 1260k\alpha_2^2\lambda)\alpha_1^2$$

$$+(-980k\alpha_2^3\mu - 70k^3(324\mu + 319\lambda^2)\alpha_2^2$$

$$-112k^5(563\mu + 1036\lambda^2)\alpha_2 - 1680k^7(19\lambda^2 + 8\mu))\alpha_1$$

$$-280k^3\lambda(12\lambda^2 + 73\mu)\alpha_2^3 - 28k^5\lambda(3845\lambda^2 + 8248\mu)\alpha_2^2$$

$$-3360k^7\lambda(85\lambda^2 + 122\mu)\alpha_2$$

$$\left(\frac{G'(\xi_n)}{G(\xi_n)}\right)^7 \; : \; (-6720k^3\alpha_2^2 - 840\alpha_2^3 - 10080k^5\alpha_2)\alpha_0 + (-6300k^3\alpha_2$$

$$-1260k\alpha_2^2 - 3528k^5)\alpha_1^2 + (-27160k^3\alpha_2^2\lambda - 980k\alpha_2^3\lambda$$

$$-86688k^5\alpha_2\lambda - 20160k^7\lambda)\alpha_1 - 280k\alpha_2^4\mu$$

$$-140k^3(87\lambda^2 + 88\mu)\alpha_2^3 - 168k^5(943\lambda^2 + 500\mu)\alpha_2^2$$

$$-10080k^7(31\lambda^2 + 12\mu)\alpha_2$$

$$\left(\frac{G'(\xi_n)}{G(\xi_n)}\right)^8 \; : \; (-10780k^3\alpha_2^2 - 980k\alpha_2^3 - 24696k^5\alpha_2 - 5040k^7)\alpha_1$$

$$-280k\alpha_2^4\lambda - 111384k^5\alpha_2^2\lambda - 14420k^3\alpha_2^3\lambda - 176400k^7\alpha_2\lambda$$

$$\left(\frac{G'(\xi_n)}{G(\xi_n)}\right)^9 \quad : \quad -280k\alpha_2^4 - 5600k^3\alpha_2^3 - 30240k^5\alpha_2^2 - 40320k^7\alpha_2 \tag{5.18}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar sıfıra eşitlenirse $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, k, c$'ye bağlı bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, k, c$ için MAPLE yardımıyla çözülürse

$$\alpha_0 = \alpha_0 \quad , \quad \alpha_1 = -2k^2\lambda \quad , \quad \alpha_2 = -2k^2 \quad , \quad k = k$$

$$\begin{aligned} c \;=\; & -k(70\lambda^2k^2\alpha_0^2 + 14\lambda^4k^4\alpha_0 + 560\alpha_0^2k^2\mu + 104\lambda^2k^6\mu^2 \\ & +16\lambda^4k^6\mu + 784\alpha_0k^4\mu^2 + 384k^6\mu^3 + \lambda^6k^6 \\ & +168\lambda^2k^4\alpha_0\mu + 140\alpha_0^3) \end{aligned} \tag{5.19}$$

olarak bulunur. Bu durumda, (5.13) denklemi için hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel çözümler aşağıdaki gibi elde edilir:

$\lambda^2 - 4\mu > 0$ iken,

(5.19) ve (5.11) değerleri, (5.16)'da yerine yazılarak hiperbolik fonksiyon çözümleri C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} U(\xi) \;=\; & \alpha_0 - 2k^2\lambda\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\,\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi\right)}{C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi\right)+C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi\right)} - \frac{\lambda}{2}\right) \\ & -2k^2\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\,\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi\right)}{C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi\right)+C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\xi\right)} - \frac{\lambda}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{5.20}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \xi \;=\; & kx - (-k(70\lambda^2k^2\alpha_0^2 + 14\lambda^4k^4\alpha_0 + 560\alpha_0^2k^2\mu \\ & +104\lambda^2k^6\mu^2 + 16\lambda^4k^6\mu + 784\alpha_0k^4\mu^2 + 384k^6\mu^3 + \lambda^6k^6 \\ & +168\lambda^2k^4\alpha_0\mu + 140\alpha_0^3)t) \end{aligned}$$

ve $\xi = \theta$ için,

$$v(x,t) = \frac{C_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\theta\right) + C_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\theta\right)}{C_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\theta\right) + C_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\theta\right)}$$

olmak üzere

$$u(x,t) = \alpha_0 - 2k^2\lambda\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}v(x,t) - \frac{\lambda}{2}\right) - 2k^2\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}v(x,t) - \frac{\lambda}{2}\right)^2 \quad (5.21)$$

şeklinde elde edilir.

$\lambda^2 - 4\mu < 0$ iken,

(5.19) ve (5.11) değerleri, (5.16)'da yerine yazılarak trigonometrik fonksiyon çözümleri C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \alpha_0 - 2k^2\lambda\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\frac{-C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right)}{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right)} - \frac{\lambda}{2}\right) \\ &\quad -2k^2\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\frac{-C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right)}{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right)} - \frac{\lambda}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \xi &= kx - (-k(70\lambda^2k^2\alpha_0^2 + 14\lambda^4k^4\alpha_0 + 560\alpha_0^2k^2\mu \\ &\quad +104\lambda^2k^6\mu^2 + 16\lambda^4k^6\mu + 784\alpha_0k^4\mu^2 + 384k^6\mu^3 + \lambda^6k^6 \\ &\quad +168\lambda^2k^4\alpha_0\mu + 140\alpha_0^3)t) \end{aligned}$$

ve $\xi = \theta$ için,

$$v(x,t) = \frac{-C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\theta\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\theta\right)}{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\theta\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\theta\right)}$$

olmak üzere

$$u(x,t) = \alpha_0 - 2k^2\lambda\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}v(x,t) - \frac{\lambda}{2}\right) - 2k^2\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}v(x,t) - \frac{\lambda}{2}\right)^2 \tag{5.23}$$

şeklinde elde edilir.

$\lambda^2 - 4\mu = 0$ iken,

(5.19) ve (5.11) değerleri, (5.16)'da yerine yazılarak rasyonel çözüm C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \alpha_0 - 2k^2\lambda\left(\tfrac{C_1}{C_1\xi+C_2} - \tfrac{\lambda}{2}\right) \\ &\quad -2k^2\left(\tfrac{C_1}{C_1\xi+C_2} - \tfrac{\lambda}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{5.24}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \xi &= kx - (-k(70\lambda^2k^2\alpha_0^2 + 14\lambda^4k^4\alpha_0 + 560\alpha_0^2k^2\mu \\ &\quad +104\lambda^2k^6\mu^2 + 16\lambda^4k^6\mu + 784\alpha_0k^4\mu^2 + 384k^6\mu^3 + \lambda^6k^6 \\ &\quad +168\lambda^2k^4\alpha_0\mu + 140\alpha_0^3)t) \end{aligned}$$

ve $\xi = \theta$ için

$$u(x,t) = \alpha_0 - 2k^2\lambda\left(\frac{C_1}{C_1\theta + C_2} - \frac{\lambda}{2}\right) - 2k^2\left(\frac{C_1}{C_1\theta + C_2} - \frac{\lambda}{2}\right)^2 \tag{5.25}$$

şeklinde elde edilir.

6. MATERYAL VE YÖNTEM

Çok ölçekli açılım yöntemi kullanılarak integrallenebilir oluşum denklemlerinden yeni integrallenebilir oluşum denklemleri elde edilmiştir. (1+1) boyutlu KdV7 denklemi, (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Sawada-Kotera denklemi, (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Kaup-Kupershmidt denklemi, (1+1) boyutlu KdV9 denklemi ve (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon denklemine çok ölçekli açılım yöntemi uygulanarak NLS tipi denklemler ve bu denklemlerin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.

Tam çözüm yöntemlerinden $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi açıklanmış ve (1+1) boyutlu KdV7 denklemine uygulanmıştır. Böylece (1+1) boyutlu KdV7 denkleminin tam çözümü elde edilmiştir.

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Çok ölçekli açılım metodu (1+1) boyutlu KdV7, (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Sawada-Kotera, (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Kaup-Kupershmidt, (1+1) boyutlu KdV9 ve (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon denklemlerine uygulanmıştır. Buradan elde edilen yaklaşık çözümler

(1+1) boyutlu KdV7 denklemi için

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \epsilon k(q(\xi,\tau)e^{i(kx-k^7t)} + q_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^7t)}) \\
&+\epsilon^2(-2q(\xi,\tau)q_{-1}(\xi,\tau) + q^2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} \\
&+q_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)}) + k\epsilon^3(-2iq_{-1}(\xi,\tau)q_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} \\
&+2iq(\xi,\tau)q_\xi(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)}) \\
&+\tfrac{3}{4}k\epsilon^3(q_1^3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^7t)} + q_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^7t)})
\end{aligned}$$

(1+1) boyutlu yedinci mertebeden Sawada-Kotera denklemi için

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \epsilon k(q(\xi,\tau)e^{i(kx-k^7t)} + q_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^7t)}) \\
&+\epsilon^2(-3q(\xi,\tau)q_{-1}(\xi,\tau) + q^2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} \\
&+q_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)}) + k\epsilon^3(-2iq_{-1}(\xi,\tau)q_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} \\
&+2iq(\xi,\tau)q_\xi(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)}) \\
&+\tfrac{3}{4}k\epsilon^3(q_1^3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^7t)} + q_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^7t)})
\end{aligned}$$

(1+1) boyutlu yedinci mertebeden Kaup-Kupershmidt denklemi için

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \epsilon k(q(\xi,\tau)e^{i(kx-k^7t)} + q_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^7t)}) \\
&+\epsilon^2(-6q(\xi,\tau)q_{-1}(\xi,\tau) + q^2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} \\
&+q_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)}) + k\epsilon^3(-7iq_{-1}(\xi,\tau)q_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} \\
&+7iq(\xi,\tau)q_\xi(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)}) \\
&+\tfrac{39}{4}k\epsilon^3(q_1^3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^7t)} + q_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^7t)})
\end{aligned}$$

(1+1) boyutlu KdV9 denklemi için

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \epsilon k(q(\xi,\tau)e^{i(kx-k^9t)} + q_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^9t)}) \\
&+\epsilon^2(-15q(\xi,\tau)q_{-1}(\xi,\tau) + q^2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^9t)} \\
&+q_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^9t)}) + k\epsilon^3(-2iq_{-1}(\xi,\tau)q_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^9t)} \\
&+2iq(\xi,\tau)q_\xi(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^9t)}) \\
&+\tfrac{3}{4}k\epsilon^3(q_1^3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^9t)} + q_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^9t)})
\end{aligned}$$

(1+1) boyutlu yedinci mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon denklemi için

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \epsilon k(q(\xi,\tau)e^{i(kx-k^7t)} + q_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^7t)}) \\
&+\epsilon^2(-4q(\xi,\tau)q_{-1}(\xi,\tau) + q^2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)} \\
&+q_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)}) + k\epsilon^3(-2iq_{-1}(\xi,\tau)q_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^7t)} \\
&+2iq(\xi,\tau)q_\xi(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^7t)}) \\
&+\tfrac{3}{4}k\epsilon^3(q_1^3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^7t)} + q_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^7t)})
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir.

Daha sonra tam çözüm yöntemlerinden $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi incelenmiştir.

Son olarak $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi kullanılarak (1+1) boyutlu KdV7 denkleminin hiperbolik,

$$u(x,t) = \alpha_0 - 2k^2\lambda\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}v(x,t) - \frac{\lambda}{2}\right) - 2k^2\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}v(x,t) - \frac{\lambda}{2}\right)^2$$

trigonometrik

$$u(x,t) = \alpha_0 - 2k^2\lambda\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}v(x,t) - \frac{\lambda}{2}\right) - 2k^2\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}v(x,t) - \frac{\lambda}{2}\right)^2$$

ve rasyonel çözümü

$$u(x,t) = \alpha_0 - 2k^2\lambda\left(\frac{C_1}{C_1\theta + C_2} - \frac{\lambda}{2}\right) - 2k^2\left(\frac{C_1}{C_1\theta + C_2} - \frac{\lambda}{2}\right)^2$$

şeklinde elde edilmiştir.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çok ölçekli açılım metodu kullanılarak integrallenebilen (1+1) boyutlu KdV7 denklemi, (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Sawada-Kotera denklemi, (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Kaup-Kupershmidt denklemi, (1+1) boyutlu KdV9 denklemi ve (1+1) boyutlu yedinci mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon denkleminden integrallenebilen NLS denklemleri elde edilmiş ve bu denklemlerin yaklaşık çözümleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Böylece yüksek mertebeden integrallenebilir denklemlerden, integrallenebilir NLS denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra (1+1) boyutlu KdV7 denklemine tam çözüm yöntemlerinden $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi uygulanarak bu denklemin hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel çözümleri elde edilmiştir. Tez boyunca yapılan bütün hesaplamalar Maple paket programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Lineer olmayan oluşum denklemleri için tam çözüm yöntemleri, bu tezde verilenlerle sınırlı değildir. İlerleyen çalışmalarda tezde ele alınmış olan denklemlere farklı tipte tam çözüm yöntemleri uygulanarak farklı tam çözümler elde edilebilir. Lineer olmayan oluşum denklemlerinin tam çözümleri fizik, kimya ve biyoloji bilim insanları için ilerleyen yıllarda da çok yararlı olacaktır. Günümüzde bu yöntemler hala çok ilginç ve önemli çalışma alanlarındandır. Ayrıca daha yüksek mertebeden KdV tipi denklemlere ya da farklı integrallenebilen oluşum denklemlerine çok ölçekli açılım metodu uygulanarak yeni integrallenebilir oluşum denklemleri ve yaklaşık çözümler elde edilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ayhan, B., 2015, Lineer olmayan oluşum denklemlerinin integrallenebilirliği ve tam çözümleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 185s.

Bekir, A., 2008, Application of The (G′/G)- expansion method for nonlinear evolution equations, Physics Letters A, 372, 3400-3406.

Biswas, A., 2008, 1- soliton solution of the K(m,n) equation with generalized evolution, Phys. Lett. A 372, 4601-4602.

Calegora, F., Degasperis, A., Xiaosdo J., 2000, Nonlinear Schrödinger-type equations from multiscale reduction of PDEs I., systematic derivation., Journal of Mathematical Physics, 41(9):6399-443.

Chen, J., Li, B.,2012, Multiple (G′/G)-expansion method and its applications to nonlinear evolution equations in mathematical physics. PRAMANA-journal of physics. Vol. 78, No. 3, pp. 375-388.

Debnath L., 2005, Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers, second edition, Library of congress cataloging-in- publication data, Boston, 1-758.

Debnath, L., 2011, Nonlinear Partial Differential Equations, Birkahauser, p.1-205.

Degasperis, A., Manakov, S. V., Santini, P. M., 1997, Multiple-scale perturbation beyond nonlinear Schrödinger equation I., Physica D, 100, 187-211.

Feng, Z. S., 2002, The first integral method to study the Burgers-Korteweg-de Vries equations, J. Phys. A 35, 2, 343-349.

Fordy, A. P., Özer, M. N., 1998, A new integrable reduction of the matrix NLS equation, Hadronic Journal, 21, 387-404.

Fuchsstemer, B., Focas, S., 1981, Symplectic structures their Backlaund transformations and Hereditary symmetris, Physica D, 4, 47-66.

Guo, S., Zhou, Y., 2010, The extended (G′/G)-expansion method and its applications to the Whitham-Broer-Kaup-Like equations and coupled Hirota-Satsuma KdV equations.

Guo, S., Zhou, Y., Zhao, C., 2010, The improved (G′/G)-expansion method and its applications to the Broer-Kaup equations and approximate long water wave equations. Applied Mathemetics and Computation 216, 1965-1971.

Güner, Ö., 2014, Kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin tam çözümleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 144s.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Hu, X. B., Ma, W. X., 2002, Application of Hirota's bilinear formalism to the Toeplitz lattice-some special soliton-like solutions, Phys. Lett. A, 293, 161-165.

Irk D., 2007, Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-Spline sonlu elemanlar çözümleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 148s.

Kadakal, H., 2011, Diferensiyel denklemlerin homotopi pertürbasyon metodu ile yaklaşık analitik çözümleri, Yüksek lisans tezi, Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 28s.

Kaplan, M., 2013, Lineer olmayan Schrödinger denkleminin tam çözümleri, Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 85s.

Khuri, S. A., 2004, A complex tanh-function method applied to nonlinear equations of Schrödinger type, Chaos, Solitons and Fractals, 20, 5, 1037-1040.

Koca, K., 2008, Kısmi türevli denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara, 1-60.

Koparan, M., 2008, Lineer olmayan kısmi türevli denklemlerden çok ölçekli açılım metodu ile integrallenebilen denklemlerin bulunması, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 80 s.

Korteweg, D. J., De Vries, G., 1895, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, Philosophical Magazine 39, 422-443.

Li, L. X., Li, E. Q., Wang, M. L., 2010, The (G'/G,1/G')- expansion method and its application to travelling wave solutions of the Zakharov equations, Applied Mathematics, B, 25, 454.

Lü, H. L., Liu, X. Q., Niu, L., 2010, A generalized (G′/G)-expansion method and its applications to nonlinear evolution equations. Applied Mathematics and Computation 215, 3811-3816.

Ma, W. X., Fuchssteiner B., 1996, Explicit and exact solutions to a Kolmogorov—Petrovskii-Piskunov equation, Int. J. Non-Linear Mech., 31, 329-338.

Malfliet, W., 1992, Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, Am. J. Phys., 60, 650-654.

Olver, P. J., Evolution equations possessing infinitely many symmetries, Journal of Mathematical Physics, 18, No. 6, 1212-1215.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Osborne, A. R., Boffetta, G., 1989, The Shallow water NLS equation in Lagrangian coordinates, Physics of Fluids A, 7(1), 1200-10.

Özer, M. N., 1995, Related integrable Hamiltonian systems, Doctor of Philosophy Thesis, Üniversity of Leeds.

Özer, M. N., 1999, Derivation of recursion operator of NLS equation, Hadronic Journal, 22, 93-103.

Özer, M. N., Dağ İ., 2001, The famous NLS equation from fifth order integrable nonlinear evolution equations., Hadronic Journal, V-24, 195-206.

Özer, M. N., Taşcan, F., 2003, Derivation of integrable nonlinear evolution equations from the higher order NLS equation, Journal of Physics A: Mathematical and General, 36(2), 2319-23.

Özer, M. N., Taşcan, F., 2009, Derivation of Korteweg-de Vries flow equations from nonlinear Schrödinger equation, Chaos, Solitons and Fractals, 40, 2265-2270.

Pava, J. A., 2009, Nonlinear dispersive and equations: Existance of stability of solitary and periodic travelling wave solutions mathematical surveys and monographs volüme 156. American mathematic society.

Qiu, Y., Tian, B., 2011, Generalized (G′/G)-Expansion Method and its Applications. International Mathematical Forum, Vol. 6, No. 3, 147-157.

Russell, J.S., 1844. Report on Waves, 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London: BAAS.

Shehata, A. R., Zayed, E. M. E.,Gepreel, K. A., 2011, Exact Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics. Journal of Information and Computing Science, Vol. 6, No. 2, pp. 129-142.

Sulem, C., Sulem P. L., 1999, The Nonlinear Schrödinger Equation Self-Focusing and Wave Collapse, Springer, New-York.

Taşcan, F., 2002, İntegrallenebilen hamiltoniyen sistemler ve perturbasyon (bozulma) teori, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 63 s.

Uğurlu, Y., 2010, Bazı linner olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin periyodik dalga çözümleri, Doktara tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 77s.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ünsal, Ö., 2012, Diskrit Oluşum Denklemlerinin İntegrallenebilirliği, Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 80s.

Wadati, M., 2001, Introduction to solitons, Pramana Journal of Physics 57(5), 841-847.

Wang, M. L., Li X., Zhang, J., 2008, The (G′/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, Physics Letters A, 372, 4, 417-423.

Wazwaz, A. M., 2004, A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations, Mathematical and Computer Modelling, 40, 499-508.

Wazwaz, A. M., 2007, The extended tanh method for new soliton solutions for many forms of the fifth-order KdV equations, Applied Mathematics and Computation, 184, 1002-1014.

Wazwaz, A. M., 2009, Partial Differential equations and solitary waves theory, Library of congress control number: 2009920462, Heidelberg, 1-761.

Wu, H. X., He, J. H., 2006, Exp-funtion method and its application to nonlinear equations, Chaos Solitons Fract. 30, 3, 700-708.

Yang, J., 2010, Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems. University of Vermont, The Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA.

Yokuş, A., 2011, Bazı özel lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi ve bu çözümlerin karşılaştırılması, Doktora tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 71s.

Zabusy, N.J., Kruskal, M.D., 1965, Interaction of ” solitons” in collisionless plasma and the recurrence of initial states, Physical Review Letters, 15, 240-243.

Zakharov, V. E., Kuznetsov, E. A., 1986, Multiscale expansions in the theory of systems integrable by the inverse scattering transform, Physica D, 18, 455-63.

Zayed, E. M. E., 2011, A further improved (G′/G)-expansion method and the extended tanh-method for finding exact solutions of nonlinear PDEs. WSEAS TRANSACTIONS ON MATHEMATICS Issue 2, Volume 10.

Zerarka, A., Ouamane, S., 2010, Application of the functional variable method to a class of nonlinear wave equations, World Journal of Modelling and Simulation, 6, (2), 150-160.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Zhang, S., Tong, J. L., Wang, W., 2008, A generalized (G′/G)- expansion method for the mKdV equation with variable coefficients, Physics Letters A, 372, 2254-2257.

Zhang, J., Wei, X., Lu, Y., 2008, Generalized (G′/G)-expansion method and its applications. Physics Letters A, 372, 3653-3658.