Fuzzy Lineer Dönüşümler Üzerine

Betül Kurtulmuş Uzun

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Mayıs 2017

On the Fuzzy Linear Maps

Betül Kurtulmuş Uzun

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Mathematics and Computer Sciences Department

May 2017

# Fuzzy Lineer Dönüşümler Üzerine

Betül Kurtulmuş Uzun

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Bayar

Mayıs 2017

# ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Betül Kurtulmuş Uzun'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Fuzzy Lineer Dönüşümler Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. Ayşe Bayar

**Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:**

**Üye :** Prof. Dr. Ayşe Bayar

**Üye :** Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

**Üye :** Doç. Dr. Mine Turan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ........................ tarih ve .................. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

# ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ayşe Bayar danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Fuzzy Lineer Dönüşümler Üzerine**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

29/05/2017

Betül Kurtulmuş Uzun

# ÖZET

Bu çalışmada, fuzzy vektör uzayları arasındaki fuzzy lineer dönüşümler ele alınmıştır ve özellikleri incelenmiştir. İlk bölümde klasik grup teori ve fuzzy kümelerle ilgili bazı temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Sonraki bölümde fuzzy vektör uzayının cebirsel özellikleri, fuzzy taban ve fuzzy boyut kavramı incelenmiştir. Tezin son bölümünde ise sonlu boyutlu fuzzy vektör uzayların fuzzy lineer dönüşümleri ve fuzzy lineer dönüşümlerin fuzzy alt uzayı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Küme, Fuzzy Vektör Uzayı, Fuzzy Alt Uzay, Fuzzy Lineer Dönüşüm.

# SUMMARY

In this work, fuzzy vector maps between fuzzy vector spaces are examined. In the first chapter, classic group theory and basic definitions and notions of fuzzy sets are given. In the next chapter, algebraic properties of fuzzy vector space, notion of fuzzy base and fuzzy dimension are examined. In the last chapter, the fuzzy linear maps of finite dimensional spaces and the fuzzy subspace of a space of fuzzy linear maps and are given.

**Keywords**: Fuzzy Set, Fuzzy Vector Space, Fuzzy Subspace, Fuzzy Linear Map.

# TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında deneyimlerini, bilimsel katkılarını ve desteklerini esirgemeyen değerli danışmanım

Prof. Dr. Ayşe BAYAR'a

bu süreçte her zaman yanımda olup maddi, manevi bana destek olan sevgili

AİLEME

ve tez yazım aşamasındaki yardımlarından dolayı

Gizem KAHRIMAN'a

en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2017
Betül Kurtulmuş Uzun

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

**ÖZET** . . . . . . . . . . **vi**

**SUMMARY** . . . . . . . . . . **vii**

**TEŞEKKÜR** . . . . . . . . . . **viii**

**İÇİNDEKİLER** . . . . . . . . . . **ix**

**ŞEKİLLER DİZİNİ** . . . . . . . . . . **x**

**SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ** . . . . . . . . . . **xi**

**1. GİRİŞ VE AMAÇ** . . . . . . . . . . **1**

**2. CEBİRSEL VE GEOMETRİK YAPILAR** . . . . . . . . . . **2**
2.1. Bazı Cebirsel Kavramlar . . . . . . . . . . 2
2.2. Fuzzy Kümeler ve Üyelik Dereceleri . . . . . . . . . . 6
2.3. Fuzzy Kümeler Üzerindeki Temel Kavramlar . . . . . . . . . . 6

**3. FUZZY VEKTÖR UZAYLARI** . . . . . . . . . . **10**
3.1. Fuzzy Vektör Uzayı . . . . . . . . . . 10
3.2. Fuzzy Lineer Bağımsızlık . . . . . . . . . . 12
3.3. Fuzzy Taban . . . . . . . . . . 14
3.4. Fuzzy Vektör Uzayının Boyutu . . . . . . . . . . 15

**4. FUZZY LİNEER DÖNÜŞÜMLER** . . . . . . . . . . **18**
4.1. Giriş . . . . . . . . . . 18
4.2. Fuzzy Lineer Dönüşümlerin Bir Uzayının Fuzzy Alt Uzayı . . . . . . . . . . 25
4.3. Sonlu Boyutlu Uzayların Fuzzy Lineer Dönüşümleri . . . . . . . . . . 30

**5. SONUÇ VE ÖNERİLER** . . . . . . . . . . **33**

**KAYNAKLAR DİZİNİ** . . . . . . . . . . **34**

# ŞEKİLLER DİZİNİ

**Şekil** **Sayfa**

4.1 Fuzzy Lineer Dönüşüm . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
4.2 Fuzzy Sıfır Lineer Dönüşüm . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

# SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Doğal Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{Z}$ | Tam Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{Q}$ | Rasyonel Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{C}$ | Komleks Sayılar Kümesi |
| $\forall$ | Her |
| $\in$ | Eleman |
| $\cup$ | Birleşim |
| $\cap$ | Kesişim |
| $\Rightarrow$ | İse Bağlacı |
| $\Leftrightarrow$ | Gerek ve Yeter Koşul |
| $\emptyset$ | Boş Küme |
| $\sum$ | Toplam Sembolü |
| $<$ | Küçük |
| $>$ | Büyük |
| $\leq$ | Küçük-Eşit |
| $\geq$ | Büyük-Eşit |
| $\vee$ | Veya |
| $\wedge$ | Ve |
| $\infty$ | Sonsuz |

# 1. GİRİŞ VE AMAÇ

Bir vektör uzayının bir fuzzy altuzayı kavramı ilk olarak Katrasas ve Liu (Katsaras ve Liu, 1977) tarafından ortaya atılmıştır. O zamandan beri vektör uzaylarıyla ilgili birçok kavram ve sonuç fuzzy alt uzaylara genişletilmiştir. Bu sonuçlar (Abdukhalikov vd. 1994; Abdukhalikov, 1996; Lubczonok, 1990; Malik ve Mordeson, 1991; Mordeson, 1993; Zadeh, 1965) de bulunabilir. Bu çalışmada ise fuzzy küme, fuzzy vektör uzayı, fuzzy alt uzay, fuzzy taban, fuzzy lineer bağımsızlık kavramları verilmiş ve fuzzy lineer dönüşümler ele alınarak fuzzy vektör uzayları arasında tanımlanan bu dönüşümlerin özellikleri incelenmiştir.

# 2. CEBİRSEL VE GEOMETRİK YAPILAR

## 2.1 Bazı Cebirsel Kavramlar

**Tanım 1.** *(Karakaş, 1998) A boştan farklı bir küme olsun.*

$$\begin{array}{rccc} *: & A \times A & \rightarrow & A \\ & (x,y) & \mapsto & (x*y) \end{array} \tag{2.1}$$

*fonksiyonuna A da bir ikili işlem denir. Bu tanıma göre ikili işlem iki değişkenli bir fonksiyondur.* $A \times A$ *nın herhangi bir (a,b) elemanının ikili işlem denilen böyle bir fonksiyon altındaki görüntüsü genel olarak* $a+b, a \cdot b, a \circ b, a \oplus b, a \odot b$ *gibi biçimlerde gösterilir.*

**Örnek 1.** *Tam sayıların ve gerçel sayıların toplama çıkarma ve çarpma işlemleri en çok bilinen ikili işlemlerdir.*

**Tanım 2.** *(Callıalp, 2011) G boş olmayan bir küme ve* $*$*, G de bir ikili işlem olsun.* $(G,*)$ *cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa* $(G,*)$ *ye grup denir.*

*G1.* $*$*, G de bir ikili işlem olduğundan G kümesi* $*$ *işlemine göre kapalıdır.*

*G2.* $*$ *işleminin G de birleşme özelliği vardır. Yani, her* $x, y, z \in G$ *için*

$$x * (y * z) = (x * y) * z \tag{2.2}$$

*dir.*

*G3. G kümesinin* $*$ *işlemine göre etkisiz (birim) elemanı vardır. Yani, her* $x \in G$ *için*

$$x * e = e * x = x \tag{2.3}$$

*olacak şekilde en az bir* $e \in G$ *vardır.*

*G4. G nin her elemanının* $*$ *işlemine göre tersi vardır. Yani, her* $x \in G$ *için*

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e \tag{2.4}$$

*olacak şekilde en az bir* $x^{-1} \in G$ *vardır.*

**Örnek 2.** $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *kümeleri adi toplama işlemine göre birer gruptur.* $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *kümeleri de adi çarpma işlemine göre birer gruptur.* $(\mathbb{N}, +)$ *ve* $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *cebirsel yapıları ise grup değildir.*

**Tanım 3.** *(Callıalp, 2011)* $(G, *)$ *bir grup olsun. Her* $x, y \in G$ *için* $x * y = y * x$ *özelliği sağlanıyorsa bu gruba değişmeli (abelyen) grup denir.*

**Örnek 3.** $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *kümeleri adi toplama işlemine göre birer değişmeli gruptur.*

**Uyarı 1.** *(Callıalp, 2011) Grubun işlemi "+" ise toplamsal grup, "·" ise çarpımsal grup denir.*

**Tanım 4.** *(Callıalp, 2011)* $(G, *)$ *bir grup olsun. G sonlu bir küme ise* $(G, *)$ *grubuna bir sonlu grup denir ve grubun eleman ayısına da grubun mertebesi denir.*

**Tanım 5.** *(Callıalp, 2011) G bir grup ve G nin boş olmayan bir alt kümesi H olsun. Eğer H, G deki işleme göre kendi başına bir grup ise H ye G nin alt grubu denir ve* $H < G$ *ile gösterilir.*

**Tanım 6.** *(Callıalp, 2011) F boş olmayan bir küme ve bu kümenin elemanları arasında*

$$\begin{array}{rccc} +: & F \times F & \rightarrow & F \\ \cdot: & F \times F & \rightarrow & F \end{array} \tag{2.5}$$

*şeklinde iki tane ikili işlem tanımlanmış olsun. (F,+,·) cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu cebirsel yapıya cisim adı verilir.*

*C1. Her* $a, b \in F$ *için* $a + b = b + a$ *ve* $a \cdot b = b \cdot a$ *dır.*

*C2. Her* $a, b, c \in F$ *için* $(a + b) + c = a + (b + c)$ *ve* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *dir.*

*C3. Her* $a, b, c \in F$ *için* $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ *dir.*

*C4. Her* $a \in F$ *için* $a + 0 = a$ *olacak şekilde bir tek* $0 \in F$ *vardır.*

*C5. Her* $a \in F$ *için* $a + 1 = a$ *olacak şekilde bir tek* $1 \in F$ *vardır.*

*C6. Her* $a \in F$ *için* $a + (-a) = 0$ *olacak şekilde bir tek* $-a \in F$ *vardır.*

*C7. Her* $a \in F$ *ve* $a \neq 0$ *için* $a \cdot a^{-1} = 1$ *olacak şekilde bir tek* $a^{-1} \in F$ *vardır.*

**Örnek 4.** $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *birer cisim iken* $\mathbb{Z}$ *bir cisim değildir.*

**Tanım 7.** *(Callıalp, 2011)* $\langle H, +, \cdot \rangle$ *cebirsel yapısı verilmiş olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa* $\langle H, +, \cdot \rangle$ *ya halka denir.*

*H1.* $\langle H, + \rangle$ *bir değişmeli gruptur. Yani, her* $x, y \in H$ *için* $x + y = y + x$ *dir.*

*H2.* $\langle H, \cdot \rangle$ *nin birleşme özelliği vardır. Yani, her* $x, y, z \in H$ *için*

$$(x + y) + z = x + (y + z) \tag{2.6}$$

*dir.*

*H3.* $\langle H, +, \cdot \rangle$ *de sol ve sağ dağılma özellikleri vardır. Yani, her* $x, y, z \in H$ *için*

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \tag{2.7}$$

*ve*

$$(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x) \tag{2.8}$$

*dir.*

**Örnek 5.** $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ *ve* $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ *yapıları birer halkadır.*

**Tanım 8.** *(Callıalp, 2011) V boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.*

$$\begin{array}{rccc} + : & V \times V & \rightarrow & V \\ \cdot : & F \times V & \rightarrow & V \end{array} \tag{2.9}$$

*iki fonksiyon olmak üzere* $(V, F, +, \cdot)$ *cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa* $V$ *kümesine* $F$ *cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.*

*V1.* $x + y = y + x$ *dir.*

*V2. Her* $x, y, z \in V$ *için* $(x + y) + z = x + (y + z)$ *dir.*

*V3. Her* $x \in V$ *için* $x + 0 = x$ *olacak şekilde V de bir tek* $0 \in V$ *vardır.*

*V4. Her* $x \in V$ *için* $x + y = 0$ *olacak şekilde V de bir tek* $y \in V$ *vardır.*

*V5. Her* $a, b \in F$ *ve her* $x \in V$ *için* $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$ *dir.*

*V6. Her* $a, b \in F$ *ve her* $x \in V$ *için* $(a + b) \cdot x = (a \cdot x) + (b \cdot x)$ *dir.*

*V7. Her* $a \in F$ *ve her* $x, y \in V$ *için* $a \cdot (x + y) = (a \cdot x) + (a \cdot y)$ *dir.*

*V8. Her* $x \in V$ *için* $1 \cdot x = x$ *dir.*

**Örnek 6.** $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *birer vektör uzayıdır.* $n \in \mathbb{N}^+$ *olmak üzere* $\mathbb{R}^n$ *bir vektör uzayıdır.*

**Tanım 9.** *(Callıalp, 2011) V bir vektör uzayı ve W, V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. W kümesi, V kümesinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturuyorsa W ya V nin bir alt uzayı denir.*

Bu tanımdan aşağıdaki sonuçlar elde edillir:

$(i)$ Her vektör uzayı kendisinin bir alt uzayıdır.

$(ii)$ $\{0\}$ kümesinin oluşturduğu sıfır vektör uzayı 0 vektör uzayının bir alt uzayıdır. Buna göre sıfır vektör uzayından farklı her vektör uzayının en az iki alt vektör uzayı vardır.

**Teorem 1.** *(Ermiş, 2009) V bir vektör uzayı ve W, V nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. W nın V nin bir alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul;*

$(i)$ $x, y \in W$ *iken* $x + y \in W$ *(*$W$ *toplama işlemine göre kapalı)*

$(ii)$ $x \in W, c \in \mathbb{R}$ *iken* $c \cdot x \in W$ *(*$W$ *skalerle çarpma işlemine göre kapalı)*

*olmasıdır.*

İspat: $W, V$ nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda $(i)$ ve $(ii)$ koşullarının sağlandığı gösterilmelidir. $W$ nin $V$ nin bir alt uzayı olmasından dolayı $W$ nin kendisi de bir vektör uzayıdır. Bu nedenle $(i)$ ve $(ii)$ koşulları sağlanır. Tersine olarak $W$ kümesi $(i)$ ve $(ii)$ koşullarını sağlasın. $(i)$ den $x \in W$ ve $c \in \mathbb{R}$ iken $c \cdot x \in W$ olup $c = 0$ ve $c = -1$ için $0 \in W$ ve $-x \in W$ elde edilir. Buna göre etkisiz eleman ve $W$ daki her x elemanının tersi $W$ nın elemanıdır. Bunun yanında vektör uzayının diğer koşulları $W$ için de sağlanır. Yani, $V$ nin $W$ alt kümesi aynı zamanda bir vektör uzayıdır. Bu da $W$ nın $V$ nin bir alt uzayı olduğunu gösterir.

**Örnek 7.** $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3) : x_3 = 0\}$ *kümesi* $\mathbb{R}^3$ *ün bir alt uzayı mıdır?*

$W$ *nın* $\mathbb{R}^3$ *ün bir alt uzayı olabilmesi için,* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *ve* $y = (y_1, y_2, y_3)$ *iken* $x, y \in W$ *için* $x + y \in W$ *ve* $c \in \mathbb{R}$ *için* $c \cdot x \in W$ *olmalıdır.* $x, y \in W$ *ise* $x = (x_1, x_2, 0)$ *ve* $y = (y_1, y_2, 0)$ *olur. (*$W$ *nin elemanları üçüncü bileşenleri 0 olan vektörlerdir.)*

$x + y = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in W$ $c \in \mathbb{R}$ *ve* $x \in W$ *iken* $c \cdot x = c \cdot (x_1, x_2, 0) = (c \cdot x_1, c \cdot x_2, 0) \in W$ *elde edilir. Böylece* $W$ *kümesinin elemamları alt uzay olma koşullarını sağlar.* $W$*,* $\mathbb{R}^3$ *ün bir alt uzayıdır. Bu alt uzay* $\mathbb{R}^3$ *ün* $xy-$*düzlemidir.*

**Tanım 10.** *(Akman, 2007) $X$ boş kümeden farklı bir küme ve $A,$ $X$ in keyfi bir alt kümesi olsun. Bu takdirde*

$$\begin{aligned} \chi_A \quad &: X \longrightarrow \{0,1\} \\ x \longrightarrow \chi_A(x) &= \begin{cases} 1, \ x \in A \\ 0, \ x \notin A \end{cases} \end{aligned} \tag{2.10}$$

*şeklinde tanımlı $\chi_A$ fonksiyonuna $A$ nın karakteristik fonksiyonu denir.*

Karakteristik fonksiyon $X$ kümesinin herhangi bir alt kümesini belirlemek için kullanılmaktadır. Yani $x \in A$ ile $x$ in $A$ kümesine ait olduğu, $x \notin A$ ile de $x$ in $A$ kümesine ait olmadığı ifade edilir.

## 2.2 Fuzzy Kümeler ve Üyelik Dereceleri

**Tanım 11.** *(Ermiş, 2009) $X$ boş kümeden farklı bir küme ve $X$ üzerinde bir fuzzy küme $A$ ise, bu takdirde $A$ fuzzy kümesi*

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1] \tag{2.11}$$

*şeklinde tanımlı fonsiyon yardımıyla karakterize edilen kümedir. Ayrıca $\mu_A$ fonksiyonuna $A$ nın üyelik fonksiyonu da denir. Burada $\mu_A(x)$, $x \in X$ in üyelik derecesidir. $A$ klasik anlamda bir küme ise $A$ nın üyelik fonksiyonu sadece $0$ ve $1$ değerlerini alır. Yani*

$$\begin{aligned} &\mu_A(x) = 1 \text{ ise } x \in A \text{ dır.} \\ &\mu_A(x) = 0 \text{ ise } x \notin A \text{ dır.} \\ &\mu_A(x) \in [0,1] \ \text{ ise } x, \ A \text{ ya } \ \mu_A(x) \text{ kadar aittir.} \end{aligned} \tag{2.12}$$

*$A$, $X$ üzerinde bir fuzzy küme ise $A = \{(\mu_A(x), x) : x \in X\}$ şeklinde de ifade edilebilir ya da kısaca $\mu_A$ ile gösterilebilir.*

## 2.3 Fuzzy Kümeler Üzerindeki Temel Kavramlar

**Tanım 12.** *(Ermiş, 2009) $A,$ $X$ üzerindeki bir fuzzy küme olsun. Eğer $\mu_A = 0$ ise $A$ ya fuzzy boş küme denir.*

**Tanım 13.** *(Ermiş, 2009) $A$ ve $B,$ $X$ üzerindeki iki fuzzy küme olsun. Eğer $\forall \ x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise $A$ ve $B$ fuzzy kümelerine eşittir denir ve kısaca $\mu_A = \mu_B$ ile gösterilir.*

**Tanım 14.** *(Ermiş, 2009) $X$ üzerindeki bir A fuzzy kümesinin tümleyeni $A^t$ şeklinde gösterilir ve üyelik fonksiyonu*

$$\forall\, x \in X \text{ için } \mu_{A^t}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{2.13}$$

*şeklinde tanımlanır.*

**Tanım 15.** *(De Luca ve Termin, 1970) A ve $B$, $X$ üzerindeki herhangi iki fuzzy küme olsun. Eğer $\forall\, x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise $B$ fuzzy kümesi $A$ fuzzy kümesini kapsar denir ve $A \subset B$ ile gösterilir.*

$A$, $X$ üzerindeki bir fuzzy küme olsun. Bu takdirde; $\forall\, x \in X$ için $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ ve $\mu_X(x) = 1$ olduğundan, $\mu_A(x) \leq \mu_X(x)$ dır. Dolayısıyla $X$ üzerindeki bir $A$ fuzzy kümesine, $X$ in fuzzy alt kümeside denir.

**Tanım 16.** *(Lubczonok, 1990) $X$ üzerindeki üyelik fonksiyonları sırası ile $\mu_A$ ve $\mu_B$ olan herhangi iki fuzzy küme A ve B olsun. Bu taktirde A ve B fuzzy kümelerinin birleşimi de fuzzy kümedir ve $A \cup B$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $A \cup B$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu*

$$\forall\, x \in X \text{ için } \mu_{A\cup B}(x) = Max\,[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{2.14}$$

*şeklinde tanımlanır ve kısaca $\mu_A \vee \mu_B$ şeklinde gösterilir.*

$A$ ve $B$ fuzzy kümelerini kapsayan en küçük fuzzy küme $A \cup B$ dir. Yani $D$, $A$ ve $B$ yi içeren bir fuzzy küme ise $D$, aynı zamanda $A \cup B$ yi de kapsar. $(2.14)$ ifadesine denk olan bu ifadeyi göstermek gerekirse

$$Max\,[\mu_A, \mu_B] \geq \mu_A \quad \text{ve} \quad Max\,[\mu_A, \mu_B] \geq \mu_B \tag{2.15}$$

dir. Eğer $D$, $A$ ve $B$ yi içeren herhangi bir fuzzy küme ise $\mu_D \geq \mu_A$ ve $\mu_D \geq \mu_B$ dir. Böylece

$$\mu_D \geq Max\,[\mu_A, \mu_B] \Longrightarrow A \cup B \subset D \tag{2.16}$$

elde edilir.

**Tanım 17.** *(Lubczonok, 1990) $X$ üzerindeki üyelik fonksiyonları sırası ile $\mu_A$ ve $\mu_B$ olan herhangi iki fuzzy küme A ve B olsun. Bu taktirde A ve B fuzzy kümelerinin kesişimide bir fuzzy kümedir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $A \cap B$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu*

$$\forall\, x \in X \text{ için } \mu_{A\cap B}(x) = Min\,[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{2.17}$$

*şeklinde tanımlanır ve kısaca $\mu_A \wedge \mu_B$ şeklinde gösterilir.*

$A$ ve $B$ fuzzy kümelerinin kapsadığı en büyük fuzzy küme $A \cap B$ dir. Yani $D$, $A$ ve $B$ nin içerdiği bir fuzzy küme ise $D$ yi aynı zamanda $A \cap B$ de içerir. $(2.17)$ ifadesine denk olan bu ifadeyi göstermek gerekirse

$$Min\left[\mu_A, \mu_B\right] \geq \mu_D \tag{2.18}$$

dir. Eğer $D$, $A$ ve $B$ nin içerdiği herhangi bir fuzzy küme ise

$$\mu_A \geq \mu_D \quad \text{ve} \quad \mu_B \geq \mu_D \tag{2.19}$$

dir. Böylece

$$\mu_D \leq Min\left[\mu_A, \mu_B\right] \Longrightarrow D \subset A \cap B \tag{2.20}$$

elde edilir.

**Tanım 18.** *(Ermiş, 2009) $A$, $X$ kümesi üzerinde bir fuzzy küme olmak üzere*

$$day(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} \tag{2.21}$$

*kümesine $A$ kümesinin dayanağı adı verilir.*

**Tanım 19.** *(Ermiş, 2009) $A$, $X$ kümesi üzerinde bir fuzzy kümesi olmak üzere*

$$mer(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\} \tag{2.22}$$

*kümesine $A$ kümesinin merkezi denir.*

**Tanım 20.** *(Ermiş, 2009) $A$, $X$ kümesi üzerinde bir fuzzy küme olsun. Eğer $mer(A) \neq \varnothing$ ise $A$ ya normal fuzzy küme, $mer(A) = \varnothing$ ise $A$ ya altnormal fuzzy küme adı verilir.*

**Tanım 21.** *(Ermiş, 2009) $A$, $X$ kümesi üzerinde bir fuzzy küme olmak üzere*

$$yük(A) = \sup\{\mu_A(x) : x \in X\} \tag{2.23}$$

*reel sayısına $A$ kümesinin yüksekliği denir.*

**Teorem 2.** *Boştan farklı bir $X$ kümesi üzerinde $A$, $B$ ve $C$ fuzzy kümeleri verilsin. Buna göre,*

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

e) $A \cup A = A$

f) $A \cap A = A$

g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

h) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ı) $A \cup (A \cap B) = A$

i) $A \cap (A \cup B) = A$

j) $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$

k) $(A \cap B)^t = A^t \cup B^t$

l) $(A^t)^t = A$

m) $(A^t \cup B) \cap (A \cup B^t) = (A^t \cap B^t) \cup (A \cap B)$

n) $(A^t \cap B) \cup (A \cap B^t) = (A^t \cup B^t) \cap (A \cup B)$

o) $A \cap \varnothing = \varnothing$

ö) $A \cup X = X$

p) $A \cup \varnothing = A$

r) $A \cap X = A$ .

# 3. FUZZY VEKTÖR UZAYLARI

Bu bölümde fuzzy vektör uzaylarının cebirsel özellikleri (Lubczonok, 1990) temel alınarak verilecektir. Burada ortaya atılan fikirler kolaylıkla diğer fuzzy cebirsel kavramlara da uygulanabilir.

Taban kavramı klasik vektör uzayı çalışmalarında temel bir kavramdır, gerçekten bu kavram sayesinde tüm klasik vektör uzaylarının iyi bir temsili yapılabilir. Bu bölümde fuzzy taban kavramı tanımlanıp, bu kavrama sahip olan fuzzy vektör uzaylarının geniş bir sınıfına yer verilecektir.

Son olarak fuzzy boyut kavramı tanımlanarak, bazı kavramların özellikleri incelenecektir.

$A$ kümesinin kardinalitesi $|A|$ ile, $V_1$ vektör uzayı $V_2$ vektör uzayının bir alt uzayı olması $V_1 < V_2$ ile gösterilecektir.

## 3.1 Fuzzy Vektör Uzayı

**Tanım 22.** *(Lubczonok, 1990) $E$ bir vektör uzayı ve $\forall\, x,\ y \in E$ ve $\forall\, a,\ b \in \mathbb{R}$ için*

$$\begin{aligned} &\mu : E \longrightarrow [0,1] \\ &\mu(ax+by) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

*şeklinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $\widetilde{E} = (E, \mu)$ çiftine fuzzy vektör uzayı denir.*

Bir $\widetilde{E} = (E, \mu)$ fuzzy vektör uzayı için,

$$\begin{aligned} &\bullet\ T_\mu^\alpha = \mu_\alpha^{-1} = \{x \in E : \mu(x) = \alpha\} \\ &\bullet\ H_\mu^\alpha = \mu^{-1}((\alpha,1]) = \{x \in E : \mu(x) > \alpha\} \\ &\bullet\ E_\mu^\alpha = \mu^{-1}([\alpha,1]) = \{x \in E : \mu(x) \geq \alpha\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

notasyonları kullanılacaktır.

**Önerme 1.** *(Lubczonok, 1990) $\widetilde{E} = (E, \mu)$ fuzzy vektör uzayı ise,*

$i)\;\; H_\mu^\alpha < E_\mu^\alpha < E$
$ii)\;\; \forall\, a \in \mathbb{R} - \{0\}\,,\; \mu(ax) = \mu(x)$
$iii)\;\; u,\; v \in E$ *ve* $\mu(u) > \mu(v)$ *ise* $\mu(u+v) = \mu(v)$ *dir.*

İspat: İspata geçmeden önce klasik vektör uzayındaki altvektör uzayı tanımını vermek yerinde olacaktır.

$V$, $E$ nin alt kümesi olsun. Eğer $\forall\, x,\; y \in V$ ve $a,\; b \in \mathbb{R}$ için $ax + by \in V$ ise $V$, $E$ nin altvektör uzayıdır.

Şimdi önermenin $(i)$ ifadesinin ispatı verilirse;
$i)\;\; H_\mu^\alpha \subset E_\mu^\alpha \subset E$ olduğu açıktır. Şimdi $\forall\, x,\; y \in H_\mu^\alpha$ ve $a,\; b \in \mathbb{R}$ için $ax + by \in H_\mu^\alpha$ olduğu gösterilmelidir:

$$\left.\begin{array}{l} x \in H_\mu^\alpha \Rightarrow \mu(x) > \alpha \\ y \in H_\mu^\alpha \Rightarrow \mu(y) > \alpha \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

dir.

$$\begin{array}{lll} \mu(ax+by) & \geq \mu(x) \wedge \mu(y) & \text{(fuzzy vektör uzayı tanımından)} \\ & > \alpha \wedge \alpha & \text{((3.3) den)} \end{array} \tag{3.4}$$

dolayısıyla $\mu(ax + by) > \alpha \Rightarrow ax + by \in H_\mu^\alpha$ dır. Ohalde $H_\mu^\alpha < E_\mu^\alpha$ dir.
Yukarıdaki ispata benzer şekilde,
$\mu(ax + by) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \geq \alpha \wedge \alpha = \alpha$ dır. Buradan $\mu(ax + by) \geq \alpha$ olup $ax + by \in E_\mu^\alpha$ dır. Ohalde $E_\mu^\alpha < E$ dir. Böylece $(i)$ geçerlidir.
$ii)\;\; \forall\, a \in \mathbb{R} - \{0\}\,,\; \mu(ax) = \mu(x)$ olduğunu gösterelim:
Bunun için öncelikle $\widetilde{E} = (E, \mu)$ fuzzy vektör uzayı olmak üzere;
$\mu(0) = \sup\limits_{x \in E} \mu(x) = \sup\,[\mu(E)]$ önermesinin doğruluğunu gösterelim:

$$\forall\, x \in E \text{ için } \mu(0) = \mu(x - x) = \mu(1.x + (-1)x) \geq \mu(x) \wedge \mu(x) = \mu(x) \tag{3.5}$$

dir. O halde $a \in \mathbb{R} - \{0\}\,,\; b \in \mathbb{R}$ ve $0 \in E$ için

$$\mu(ax) = \mu(ax + b0) \geq \mu(x) \wedge \mu(0) = \mu(x) \tag{3.6}$$

dir.
$iii)\;\; u,\; v \in E$ için $\mu(u) > \mu(v)$ olsun. Göstermemiz gereken $\mu(u + v) = \mu(v)$ olduğudur. Fuzzy vektör uzayı tanımı ve hipotez gereği

$$\mu(u+v) \geq \mu(u) \wedge \mu(v) = \mu(v) \Rightarrow \mu(u+v) \geq \mu(v) \tag{3.7}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mu(v) & = \mu((u+v) - u) \\ & \geq \mu(u+v) \wedge \mu(u) \\ & = \mu(u+v) \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(v) \geq \mu(u+v) \tag{3.8}$$

olur. Aksi halde; yani $\mu(u+v) > \mu(u)$ olsa idi $\mu(u) < \mu(v)$ olurdu ki bu ise hipotezde verilen $\mu(u) > \mu(v)$ olması durumu ile çelişirdi. O halde (3.7) ve (3.8) den $\mu(u+v) = \mu(v)$ dir.

**Önerme 2.** *(Lubczonok, 1990) $\widetilde{E} = (E, \mu)$ fuzzy vektör uzayı ve $\mu(u) \neq \mu(v)$ olacak şekilde $u,\ v \in E$ olsun. Bu takdirde $\mu(u+v) = \mu(u) \wedge \mu(v)$ dir.*

İspat: $\mu(u) \neq \mu(v) \Rightarrow \mu(u) < \mu(v)$ veya $\mu(u) > \mu(v)$ dir.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \mu(u) > \mu(v) \Rightarrow \mu(u+v) = \mu(v) \\ \bullet\ \mu(u) < \mu(v) \Rightarrow \mu(u+v) = \mu(u) \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(u+v) = \mu(u) \wedge \mu(v)$$

yazılabilir

## 3.2 Fuzzy Lineer Bağımsızlık

**Tanım 23.** *(Lubczonok, 1990) $\widetilde{E} = (E, \mu)$ fuzzy vektör uzayı olsun. Bu takdirde $\forall\ a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ için $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset E$ lineer bağımsız kümesi*

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \bigwedge_{i=1}^{n} (\mu(a_i x_i)) \tag{3.9}$$

*özelliğini sağlar ise $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ lineer bağımsız kümesine fuzzy lineer bağımsız denir.*

Ayrıca $\widetilde{E}$ da verilmiş herhangi bir vektör kümesinin tüm alt kümeleri fuzzy lineer bağımsız ise verilmiş olan vektör kümesi de fuzzy lineer bağımsızdır.

**Örnek 8.** *$\widetilde{E} = (\mathbb{R}^2, \mu)$ fuzzy vektör uzayı ve*

$$\mu\left[(x,y)\right] = \begin{cases} 1, & (x,y) = (0,0) \text{ ise} \\ \frac{1}{3}, & (x,y) = (0, \mathbb{R} - \{0\}) \text{ ise} \\ \frac{1}{5}, & (x,y) = (\mathbb{R}^2 - (0, \mathbb{R})) \text{ ise} \end{cases} \tag{3.10}$$

*olarak tanımlı üyelik fonksiyonu verilsin. O zaman kolaylıkla gösterilebilir ki $x$=$(1,0)$, $y$=$(-1,1)$ vektörleri $\mathbb{R}^2$ de lineer bağımsız olmalarına rağmen $\widetilde{E}$ da fuzzy lineer bağımsız değildir. Çünkü; $x + y = (1,0) + (-1,1) = (0,1)$ dir. O halde*

$$\mu(x+y) = \mu(0,1) = \frac{1}{3} \tag{3.11}$$

*dir. Diğer yandan*

$$\left.\begin{array}{l} \mu(x) = \mu((1,0)) = \frac{1}{5} \\ \mu(y) = \mu((-1,1)) = \frac{1}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(x) \wedge \mu(y) = \frac{1}{5} \tag{3.12}$$

*dir.* (3.11) *ve* (3.12) *den* $\mu(x+y) \neq \mu(x) \wedge \mu(y)$ *dir.*

**Önerme 3.** *(Lubczonok, 1990)* $\widetilde{E} = (E, \mu)$ *fuzzy vektör uzayı olsun. Bu takdirde, farklı üyelik derecelerine sahip olan* $E$ *nin* $\{x_i\}_{i=1}^{N} \subset E - \{0\}$ *vektör kümesi, hem lineer bağımsız hem de fuzzy lineer bağımsızdır.*

İspat: $N$ üzerinden indüksiyonla ifadeyi ispatlayalım:

$N = 1$ için, bir tane sıfırdan farklı vektör olur ki bu da lineer bağımsız demektir.

Şimdi varsayalım ki ifade $N$ için doğru olsun. $N+1$ için ifadenin doğruluğunu gösterelim.

$\{x_i\}_{i=1}^{N+1} \subset E - \{0\}$ farklı üyelik derecelerine sahip vektörlerden oluşan küme olsun. İndüksiyon prensibinden $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ kümesi lineer bağımsız ve fuzzy lineer bağımsız idi. Varsayalım ki $\{x_i\}_{i=1}^{N+1}$ kümesi lineer bağımsız olmasın. O halde $\varnothing \neq S = \{1, 2, \ldots, N\}$ kümesi ve $\forall\, i \in S,\ a_i \neq 0$ için $x_{N+1} = \sum\limits_{i \in S} a_i x_i$ dir. Buradan

$$\mu(x_{N+1}) = \mu(\sum_{i \in S} a_i x_i) = \bigwedge_{i \in S} \mu(a_i x_i) = \bigwedge_{i \in S} \mu(x_i) \tag{3.13}$$

ve böylece $\mu(x_{N+1}) \in \{\mu(x_i)\}_{i=1}^{N}$ olur ki bu $\{x_i\}_{i=1}^{N+1}$ farklı üyelik derecelerine sahip vektörlerden oluşması kabulüyle çelişir. Dolayısıyla verilen $\{x_i\}_{i=1}^{N+1}$ kümesi lineer bağımsızdır.

Son olarak $\{x_i\}_{i=1}^{N+1} \subset E - \{0\}$ farklı üyelik derecelerine sahip vektör kümesinin $\widetilde{E}$ da fuzzy lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

$\mu(x_{N+1}) \neq \mu(x_i)\ \ (i = 1, \ldots, N)$ olduğundan $\forall\, i$ için $\mu(x_{N+1}) > \mu(x_i)$ yazmak genelliği bozmayacaktır. Buradan da $\mu(a_{N+1} x_{N+1}) > \mu(a_i x_i)$ dir. Sonuç olarak $\forall\, i \in \{1, \ldots, N\}$ için

$$\mu(a_{N+1} x_{N+1} + a_i x_i) = \mu(a_i x_i) \tag{3.14}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mu(a_{N+1} x_{N+1} + a_i x_i) &= \mu(a_i x_i) \\ &= \mu(a_{N+1} x_{N+1} + a_i x_i) \wedge \mu(a_i x_i) \end{aligned} \tag{3.15}$$

buradan $\mu\left(\sum\limits_{i \in S}^{N+1} a_i x_i\right) = \bigwedge\limits_{i=1}^{N+1} \mu(a_i x_i)$ elde edilir.

**Uyarı 2.** *boy*$E = n$ *olmak üzere* $\widetilde{E} = (E, \mu)$ *fuzzy vektör uzayı ise,* $\mu(E)$ *nin kardinalitesi olan* $|\mu(E)|$ *sayısı için* $|\mu(E)| \leq n + 1$ *dir.*

## 3.3 Fuzzy Taban

Fuzzy tabansız fuzzy vektör uzayları vardır. Ayrıca basit bir koşul koyarak tüm fuzzy vektör uzaylarının bir fuzzy tabana sahip olduğu görülebilir.

**Tanım 24.** *(Lubczonok, 1990) $\widetilde{E} = (E, \mu)$ fuzzy vektör uzayı olmak üzere $E$ nin herhangi bir tabanı aynı zamanda fuzzy lineer bağımsız oluyorsa bu tabana $\widetilde{E}$ nın fuzzy tabanı denir.*

**Teorem 3.** *(Lubczonok, 1990) $E$ tabanı $B = \{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ olan bir vektör uzayı olsun. $\mu_0 \in (0,1]$ sabit ve $\forall \alpha \in A$ için $\mu_0 \geq \mu_\alpha$ olacak şekilde sabitlerin herhangi bir $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset (0,1]$ kümesi verilsin. $0 \neq z \in E$, $a_i \neq 0$ olmak üzere $z = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i v_{\alpha_i}$ şeklinde tek türlü yazılabilen $z$ için $\mu$,*

$$\begin{aligned} \mu: \quad & E \to [0,1] \\ & z \to \mu(z) = \bigwedge_{i=1}^{N} \mu(v_{\alpha_i}) = \bigwedge_{i=1}^{N} \mu_{\alpha_i} \quad ve \quad \mu(0) = \mu_0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

*şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\widetilde{E} = (E, \mu)$, $B$ fuzzy tabanlı bir fuzzy vektör uzayıdır.*

**Tanım 25.** *(Lubczonok, 1990) Bir $B$ kümesinin boştan farklı her $C$ alt kümesi için,* $\sup C \in C$ *ise $B$ kümesine üstten iyi sıralı denir.*

Şimdi $[0,1]$ kapalı aralığının üstten iyi sıralı alt kümelerine bakalım.

**Tanım 26.** *(Lubczonok, 1990) $B \subset [0,1]$ kümesi verilsin. Eğer $x_n \to x$ olacak şekilde $B$ kümesinde monoton artan en az bir $(x_n)$ dizisi varsa $B$ kümesi $x$ de monoton artan bir limite sahiptir denir.*

**Önerme 4.** *(Lubczonok, 1990) $B \subset [0,1]$ alt kümesi herhangi monoton artan limitine sahip olmaması için gerek ve yeter koşul $B$ kümesinin üstten iyi sıralı bir küme olmasıdır.*

**Önerme 5.** *(Lubczonok, 1990) $[0,1]$ in üstten iyi sıralı tüm alt kümeleri sayılabilirdir.*

**Yardımcı Teorem 1.** *(Lubczonok, 1990) $\mu(E)$ üstten iyi sıralı olmak üzere, $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bir fuzzy vektör uzayı ve $V$, $E$ nin bir özalt uzayı ise,*

$$\forall v \in V, \exists w \in E - V \ni \mu(w+v) = \mu(w) \wedge \mu(v) \tag{3.17}$$

*dir.*

**Yardımcı Teorem 2.** *(Lubczonok, 1990) $\mu(E)$ üstten iyi sıralı, $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bir fuzzy vektör uzay ve $V$, $E$ nin özaltuzayı olmak üzere $B^*$, $V = (V, \mu_{|V})$ nin bir tabanı olsun. Bu takdirde $B^+$ tarafından gerilen vektör uzay $\langle B^+ \rangle$ olmak üzere,*
*$\exists\, w \in E - V \ \ni \ B^+ = B^* \cup \{w\}$, $\widetilde{W} = (W = \langle B^+ \rangle, \mu_{|W})$ nin bir fuzzy tabanıdır.*

**Teorem 4.** *(Lubczonok, 1990) $\mu(E)$ üstten iyi sıralı olmak üzere, $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bir fuzzy vektör uzayı bir fuzzy tabana sahiptir.*

**Sonuç 1.** *(Lubczonok, 1990) $E$ sonlu boyutlu olmak üzere, $\widetilde{E} = (E, \mu)$ fuzzy vektör uzayı bir fuzzy tabana sahiptir.*

**Tanım 27.** *(Lubczonok, 1990) $\widetilde{E}_1 = (E, \mu_1)$ ve $\widetilde{E}_2 = (E, \mu_2)$, $E$ üzerinde iki fuzzy vektör uzayı olsun.*

$$\begin{array}{c} \widetilde{E}_1 \text{ ve } \widetilde{E}_2 \text{ nın arakesiti } \widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2 = (E, \mu_1 \wedge \mu_2) \\ \widetilde{E}_1 \text{ ve } \widetilde{E}_2 \text{ nın toplamı } \widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2 = (E, \mu_1 + \mu_2) \end{array} \tag{3.18}$$

*olarak tanımlanır. Burada*

$$\begin{aligned} (\mu_1 + \mu_2)(x) &= \sup \{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) : x = x_1 + x_2\} \\ &= \sup \{\mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x - x_1)\} \\ &= \bigvee_{x = x_1 + x_2} \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) \end{aligned}$$

*dir.*

**Önerme 6.** *(Lubczonok, 1990) $E$ vektör uzayı üzerinde iki fuzzy vektör uzayı $\widetilde{E}_1 = (E, \mu_1)$ ve $\widetilde{E}_2 = (E, \mu_2)$ olsun. Bu takdirde,*

$i)$ $\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2,$ $E$ üzerinde bir fuzzy vektör uzayıdır.

$ii)$ $\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2,$ $E$ üzerinde bir fuzzy vektör uzayıdır.

$iii)$ $\mu_1(E)$ ve $\mu_2(E)$ üstten iyi sıralı ise $\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2$ ve $\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2$ fuzzy tabana sahiptir.

## 3.4 Fuzzy Vektör Uzayının Boyutu

**Tanım 28.** *(Lubczonok, 1990) $E$ tabanı $X$ olan bir vektör uzayı ve $\widetilde{E} = (E, \mu)$ bir fuzzy vektör uzayı olmak üzere;*

$$\sup \sum_{v \in X} \mu(v) \tag{3.19}$$

*ifadesine $\widetilde{E}$ fuzzy vektör uzayının boyutu denir ve $boy(\widetilde{E})$ ile gösterilir.*

Burada $boy$, fuzzy vektör uzayı ailesinden $[0, \infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ aralığına tanımlı bir fonksiyondur. Ayrıca bir fuzzy vektör uzayı sonlu boyutlu olması için gerek ve yeter koşul $boy(\widetilde{E}) = M < \infty$ olmasıdır.

**Önerme 7.** *(Lubczonok, 1990) Tüm sonlu boyutlu* $\widetilde{E} = (E, \mu)$ *fuzzy vektör uzayları bir fuzzy tabana sahiptir.*

**Önerme 8.** *(Lubczonok, 1990)* $boyE = n < \infty$ *olmak üzere* $\widetilde{E} = (E, \mu)$ *fuzzy vektör uzayı olsun. Eğer* $B,\ \widetilde{E}$ *nın bir fuzzy tabanı ve* $B^*,\ E$ *nin herhangi bir tabanı ise*

$$\sum_{v \in B^*} \mu(v) \leq \sum_{v \in B} \mu(v) \tag{3.20}$$

*dır.*

**Yardımcı Teorem 3.** *(Lubczonok, 1990)* $\widetilde{E} = (E, \mu)$ *fuzzy vektör uzay ise,* $\forall\, \alpha \in \mu(E) - \{0\}$ *için* $E_\mu^\alpha$ *sonlu boyutludur.*

**Teorem 5.** *(Lubczonok, 1990)* $\widetilde{E} = (E, \mu)$ *sonlu bir fuzzy vektör uzayı ve* $B,\ \widetilde{E}$ *nın herhangi bir fuzzy taban olsun. Bu takdirde*

$$boy\left(\widetilde{E}\right) = \sum_{v \in B} \mu(v)$$

*dır.*

**Yardımcı Teorem 4.** *(Lubczonok, 1990)* $E$ *sonlu boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere,* $\widetilde{E} = (E, \mu)$ *herhangi bir fuzzy vektör uzayı olsun. Bu takdirde* $\widetilde{E}$ *için herhangi bir* $B$ *fuzzy tabanı şu şekilde inşa edilebilir;* $\mu\,(E - \{0\}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ *olsun.*
$\forall\ i\ \in\ \{1, 2, \ldots, k\},\ \alpha_i$ *için* $T_\mu^{\alpha_i}$ , $H_j^{\alpha_i}$ *nin* $\bigcup\limits_{i<j} B\alpha_j$ *tabanın* $E_\mu^{\alpha_i}$ *nin* $\bigcup\limits_{i \leq j} B\alpha_j$ *tabanına genişlemesi olmak üzere,* $B_{\alpha_i}$ , $T_\mu^{\alpha_i}$ *deki maksimal lineer bağımsız kümesini tanımlayalım. Bu takdirde:* $B = \bigcup\limits_{i \leq k}^{m} B\alpha_j$ , $\widetilde{E}$ *nın bir fuzzy tabanıdır.*

**Teorem 6.** *(Lubczonok, 1990)* $E$ *sonlu boyutlu bir vektör uzayı,* $\mu_1\,(0) \geq \sup\,[\mu_2\,(E \backslash \{0\})]$ *ve*
$\mu_2\,(0) \geq \sup\,[\mu_1\,(E \backslash \{0\})]$ *olmak üzere,* $\widetilde{E}_1 = (E, \mu_1)$ *ve* $\widetilde{E}_2 = (E, \mu_2)$ *fuzzy vektör uzayları verilsin. Bu takdirde* $\widetilde{E}_1,\ \widetilde{E}_2,\ \widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2$ *ve* $\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2$ *için bir fuzzy tabanı olan* $E$ *nin bir* $B$ *tabanı vardır. Ayrıca* $A_1 = \{x \in E : \mu_1\,(x) < \mu_2\,(x)\}$ , $A_2 = E \backslash A_1$ *ise*

$$\begin{array}{llll} \forall\, v \in B \cap A_1 & , & (\mu_1 \wedge \mu_2)\,(v) = \mu_1\,(v) & , & (\mu_1 + \mu_2)\,(v) = \mu_2\,(v) \\ \forall\, v \in B \cap A_2 & , & (\mu_1 \wedge \mu_2)\,(v) = \mu_2\,(v) & , & (\mu_1 + \mu_2)\,(v) = \mu_1\,(v) \end{array} \tag{3.21}$$

*dir.*

**Sonuç 2.** *(Lubczonok, 1990)* $E$ *sonlu boyutlu bir vektör uzayı,* $\mu_1\,(0) \geq \sup\,\{\mu_2\,(E - \{0\})\}$ *ve*
$\mu_2\,(0) \geq \sup\,\{\mu_1\,(E \backslash \{0\})\}$ *olmak üzere,* $E$ *üzerinde iki fuzzy vektör uzayı*
$\widetilde{E}_1 = (E, \mu_1)$ *ve* $\widetilde{E}_2 = (E, \mu_2)$ *olsun. Bu taktirde*

$$boy\left(\widetilde{E}_1 + \widetilde{E}_2\right) = boy\left(\widetilde{E}_1\right) + boy\left(\widetilde{E}_2\right) - boy\left(\widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_1\right) \tag{3.22}$$

**Örnek 9.** *$E=\mathbb{R}^2$ olsun. $\mu_1$ ve $\mu_2$ aşağıdaki gibi tanımlayalım.*

$$\begin{array}{lll} \mu_1(0)=\frac{5}{6} & , \mu_1(0,\mathbb{R}-\{0\})=\frac{1}{2} & , \mu_1(E-\mathbb{R})=\frac{1}{4} \\ \mu_2(0)=1 & , \mu_2\left(\{(x,x):x\in\mathbb{R}-\{0\}\}\right)=\frac{1}{3} & , \mu_2\left(E-\{(x,x):x\in\mathbb{R}\}\right)=\frac{1}{3} \end{array} \tag{3.23}$$

*kolaylıkla görülebilir ki $\widetilde{E}_1=(E,\mu_1)$ ve $\widetilde{E}_2=(E,\mu_2)$ fuzzy vektör uzayıdır ve $\mu_1(0)\geq$ $\sup\{\mu_2(E-\{0\})\}$ ve $\mu_2(0)\geq\sup\{\mu_1(E-\{0\})\}$ dır. Aynı zamanda*

$$\begin{array}{ll} (\mu_1\wedge\mu_2)(0)=\frac{5}{6} & , (\mu_1+\mu_2)((0,\mathbb{R}-\{0\}))=\frac{1}{2} \\ (\mu_1\wedge\mu_2)(E-\{(x,x):x\in\mathbb{R}\})=\frac{1}{4} & , (\mu_1+\mu_2)(0)=\frac{5}{6} \\ (\mu_1\wedge\mu_2)(\{(x,x):x\in\mathbb{R}-\{0\}\})=\frac{1}{4} & , (\mu_1+\mu_2)(E-(0,\mathbb{R}))=\frac{1}{3} \end{array} \tag{3.24}$$

*ve $B=\{(0,1),(1,1)\}$, $\widetilde{E}_1$, $\widetilde{E}_2$, $\widetilde{E}_1\cap\widetilde{E}_2$ ve $\widetilde{E}_1+\widetilde{E}_2$ için bir taban olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece,*

$$\begin{array}{ll} \mathit{boy}\left(\widetilde{E}_1\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} & , \mathit{boy}\left(\widetilde{E}_2\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12} \\ \mathit{boy}\left(\widetilde{E}_1+\widetilde{E}_2\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6} & , \mathit{boy}\left(\widetilde{E}_1\cap\widetilde{E}_2\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \end{array} \tag{3.25}$$

*dolayısıyla*

$$\mathit{boy}\left(\widetilde{E}_1\right)+\mathit{boy}\left(\widetilde{E}_2\right)-\mathit{boy}\left(\widetilde{E}_1\cap\widetilde{E}_1\right)=\frac{3}{4}+\frac{7}{12}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}=\mathit{boy}\left(\widetilde{E}_1+\widetilde{E}_2\right) \tag{3.26}$$

*bulunur.*

# 4. FUZZY LİNEER DÖNÜŞÜMLER

## 4.1 Giriş

Bu bölümde fuzzy vektör uzaylarının fuzzy lineer dönüşümleri incelenmiştir.

Vektör uzayları arasında tanımlanan ve vektör uzayları üzerinde vektör toplamını ve bir vektörün bir sayı ile çarpımını koruyan fonksiyonlar lineer dönüşümlerdir. İki vektör uzayı arasına pek çok lineer dönüşüm tanımlanabilir. Lineer dönüşümlerin çokluğu ve çeşitliliği lineer cebiri zenginleştirir. Önceki bölümde bir F cismi üzerindeki vektör uzayı X olmak üzere, X in $\mu$ fuzzy alt kümesi

$$\mu : S \to [0,1] \tag{4.1}$$

şartını sağladığında $\mu$ nün X in bir fuzzy alt uzayını tanımladığını gördük. Vektör uzayları arasındaki lineer dönüşüm kavramı fuzzy vektör uzayları arasında nasıl tanımlanabileceği de önemli bir sorudur.

Bu bölümde fuzzy vektör uzayları üzerinde fuzzy lineer dönüşüm kavramı tanımlanıyor ayrıca fuzzy lineer dönüşümlerinin uzayının fuzzy alt uzayları inceleniyor. Vektör uzayları sonlu boyutlu iken fuzzy lineer dönüşümlerinin fuzzy alt uzayının fuzzy tabanları bulunur. Fuzzy lineer dönüşümlerinin fuzzy alt uzayının, dual dönüşümlerin fuzzy lt uzayına izomorf olduğu görülmektedir.

**Tanım 29.** *(Lubczonok, 1990) $\overset{\sim}{E} = (E, \mu)$ bir fuzzy vektör uzayı ve $f : E \longrightarrow F$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu taktirde,*

$$f(\mu)(x) = \begin{cases} \sup\{(\mu)(z) : z \in f^{-1}(x)\} & , f^{-1}(x) \neq \varnothing \\ 0 & , f^{-1}(x) = \varnothing \end{cases} \tag{4.2}$$

*$\overset{\sim}{cekf} = \left(cekf, \mu_{|_{cekf}}\right)$ ve $\overset{\sim}{görf} = \left(görf, \mu_{|_{görf}}\right)$ şeklinde tanımlanr.*

**Teorem 7.** *(Lubczonok, 1990) $E$ sonlu boyutlu vektör uzayı olmak üzere $\overset{\sim}{E} = (E, \mu)$ bir fuzzy vektör uzayı ve $f : E \longrightarrow F$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu taktirde,*

$$boy\left(\overset{\sim}{cekf}\right) + boy\left(\overset{\sim}{görf}\right) = boy\left(\overset{\sim}{E}\right) \tag{4.3}$$

*dir.*

İspat: Varsayalım ki $cekf \neq \varnothing$ olsun. $cekf = \{0\}$ ise ispat benzer şekilde yapılır $B_{cek},\ \overset{\sim}{cekf}$ nin bir fuzzy tabanı ve $B_{gen},\ B_{cek}$ in $\overset{\sim}{E}$ için bir fuzzy tabana genişlemesi olsun. $B_{cek} \cup B_{gen} = B,\ \overset{\sim}{E}$ için bir fuzzy tabandır ve $B_{cek} \cap B_{gen} = \varnothing$ dir.

İlk olarak $f\left(B_{gen}\right)=B_{gör}$ nün $\widetilde{görf}$ için bir fuzzy taban olduğunu gösterelim. $B_{gör}$ ün $görf$ nin bir tabanı olduğu açıktır.

$v_1,\ v_2,\ldots,\ v_n\in B_{gen}$ ve hepsi birden sıfır olmayan $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n\in\mathbb{R}$ verilsin. Tanımdan

$$f\left(\mu\right)\left(\sum_{i=1}^{k}a_i f\left(v_i\right)\right)=\begin{cases}\sup\left\{\left(\mu\right)\left(x\right):x\in f^{-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}a_i f\left(v_i\right)\right)\right\} & ,\ f^{-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}a_i f\left(v_i\right)\right)\neq\varnothing\\ 0 & ,\ f^{-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}a_i f\left(v_i\right)\right)=\varnothing\end{cases}\tag{4.4}$$

$\sum\limits_{i=1}^{k}a_i f\left(v_i\right)\in görf$ olduğundan

$$f\left(\mu\right)\left(\sum_{i=1}^{k}a_i f\left(v_i\right)\right)=\sup\left\{\left(\mu\right)\left(x\right):x\in f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i f\left(v_i\right)\right)\right\}\tag{4.5}$$

$f$ nin lineerliliği ve $f^{-1}$ özelliğinden

$$f\left(\mu\right)\left(\sum_{i=1}^{k}a_i f\left(v_i\right)\right)=\sup\left\{\left(\mu\right)\left(x\right):x\in cekf+f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i f\left(v_i\right)\right)\right\}\tag{4.6}$$

dir. $z\in cekf$ ise $z=0$ yada $b_i$ lerin hepsi birden sıfır olmamak üzere, $u_i\in B_{cek}$ için $z=\sum\limits_{i=1}^{p}b_iu_i$ dir. Dolayısıyla $z\in cekf+\sum\limits_{i=1}^{k}a_iv_i$ ise ya $\left(\mu\right)\left(x\right)=\mu\left(0+\sum\limits_{i=1}^{k}a_iv_i\right)$ ya da $\left(\mu\right)\left(x\right)=\sum\limits_{i=1}^{p}b_iu_i+\sum\limits_{i=1}^{k}a_iv_i$ dir. Böylece

$$\left(\mu\right)\left(x\right)=\min\left(\bigwedge_{i=1}^{p}\mu\left(b_iu_i\right),\bigwedge_{i=1}^{k}\mu\left(a_iv_i\right)\right)\tag{4.7}$$

olur ki bu ifade $\mu\left(\sum\limits_{i=1}^{k}a_iv_i\right)$ ifadesine eşit ya da daha küçüktür. Böylece

$$f\left(\mu\right)\left(\sum_{i=1}^{k}a_i f\left(v_i\right)\right)=\bigwedge_{i=1}^{n}\mu\left(a_iv_i\right)\tag{4.8}$$

dir. Benzer şekilde $f\left(\mu\right)\left(f\left(v_i\right)\right)=\mu\left(v_i\right)$ elde edilir. Böylece

$$f\left(\mu\right)\left(\sum_{i=1}^{k}a_i f\left(v_i\right)\right)=\bigwedge_{i=1}^{k}f\left(\mu\right)\left(a_iv_i\right)\tag{4.9}$$

dir ve dolayısıyla $B_{gör},\ görf$ için bir fuzzy tabandır. Şimdi fuzzy boyut tanımından

$$boy\left(\widetilde{E}\right)=\sum_{v\in B_{cek}\cup B_{gen}}\mu\left(v\right)=\sum_{v\in B_{cek}}\mu\left(v\right)+\sum_{v\in B_{gen}}\mu\left(v\right)\tag{4.10}$$

elde edilir. Fakat $z \in \langle B_{gen} \rangle$ ise, $f(\mu)(f(z)) = \mu(z)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} boy\left(\widetilde{E}\right) &= \sum_{v \in B_{cek}} \mu(v) + \sum_{v \in B_{gen}} f(\mu)(f(v)) \\ &= \sum_{v \in B_{cek}} \mu(v) + \sum_{v \in B_{gör}} f(\mu)(v) \\ &= boy\left(\widetilde{cekf}\right) + boy\left(\widetilde{görf}\right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Teorem 7 nin sonucu sonlu boyutlu fuzzy vektör uzaylarına genişletilebilir.

İki vektör uzayı arasında tanımlanan izomorfizmler, bire-bir ve örten lineer dönüşümlerdir. İzomorf vektör uzayları eşyapılıdır. İzomorfizmler bir vektör uzayında geçerli olan teoremleri izomorf olduğu vektör uzayındaki geçerli teoremlere dönüştürür. İki vektör uzayı arasındaki izomorfizm kavramı fuzzy vektör uzayları arasındaki izomorfizme aşağıdaki gibi genişletilebilir.

**Tanım 30.** *(Abdukhalikov ve Kim, 1998) $(E_1, \mu_1)$ ve $(E_2, \mu_2)$ iki fuzzy alt uzay olsun. Bir $\varphi : E_1 \to E_2$ izomorfizmi her $x \in E_1$ için*

$$\mu_1(x) = \mu_2(\varphi(x)) \tag{4.12}$$

*şartını sağlayacak şekilde varsa $(E_1, \mu_1)$ ve $(E_2, \mu_2)$ alt uzayları izomorfiktir denir.*

İzomorf vektör uzayları arasında tanımlanan birim dönüşüm yukarıdaki şartı aşikar olarak sağlar.

X, F cismi üzerinde tanımlı vektör uzayı iken X den F ye giden tüm lineer fonksiyonların kümesi bir vektör uzayıdır. Bu uzaya X in dual uzayı denir ve $X^*$ ile gösterilir.

Benzer şekilde $X^*$ üzerinde $\mu^*$ fuzzy alt kümesi aşağıdaki gibi verilebilir.

**Tanım 31.** *(Abdukhalikov, 1996) $\mu : X \to [0,1]$ X vektör uzayı üzerinde bir fuzzy alt küme olsun. $X^*$ üzerinde $\mu^*$ fuzzy alt kümesi her $f \in X^*$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$\mu^* : X^* \to [0,1] \tag{4.13}$$

$$\mu^*(f) = \begin{cases} 1 - \sup\{\mu(x) : x \in X, f(x) \neq 0\}, & f \neq 0 \\ 1 - \inf\{\mu(x) : x \in X\}, & f = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

**Teorem 8.** *(Abdukhalikov, 1996) $\mu^*$ fuzzy alt kümesi $X^*$ ın bir fuzzy alt uzayıdır.*

İspat: Her $a, b \in F$ ve $f, g \in X$ ve $f, g \in X^*$için

$$\mu(af + bg) \geq \mu(f) \wedge \mu(g) \tag{4.15}$$

şartı sağlandığı için $\mu^*$ fuzzy alt kümesi $X^*$ ın bir fuzzy alt uzayıdır.

Eğer $\{e_j : j \in J\}$ X vektör uzayının bir tabanı ise bu takdirde $\{e^j : j \in J\}$ dual lineer fonksiyonlar $e^i(e_j) = \delta_{ij}$ ile tanımlanır. Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{4.16}$$

dir.

**Teorem 9.** *(Abdukhalikov, 1996) $\mu : X \to [0, 1]$ fuzzy alt uzayının bir fuzzy tabanı $\{e_j : j \in J\}$ olsun. O zaman $X^*$ dual uzayında tanımlı*

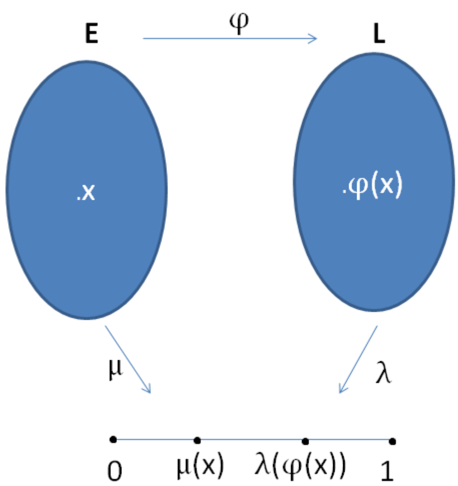
$$\mu^* : X^* \to [0, 1], \mu^*(e^j) = 1 - \mu(e_j) \tag{4.17}$$

*fuzzy alt uzayında $\{e^j : j \in J\}$ vektörleri fuzzy lineer bağımsızdır.*

İspat: $\{e^j : j \in J\}$ lineer bağımsız olduğundan ve

$$\mu(\sum_{i=1} a_i e^i) = \wedge_{i=1}^{n} \mu(a_i e^i) \tag{4.18}$$

eşitliği sağlandığından $\{e^j : j \in J\}$ fuzzy lineer bağımsızdır.




Şekil 4.1 Fuzzy Lineer Dönüşüm

**Tanım 32.** *(Abdukhalikov, 1996) E ve L, F cismi üzerinde birer vektör uzayı ve* $\mu : E \to [0,1]$ *ve* $\lambda : L \to [0,1]$ *birer fuzzy alt uzay olsun.* $\varphi : E \to L$ *bir lineer dönüşüm olmak üzere eğer her* $x \in E$ *için*

$$\lambda(\varphi(x)) \geq \mu(x) \tag{4.19}$$

*şartı sağlanıyorsa* $\varphi$ *ye fuzzy lineerdir denir. (Şekil 4.1)*

$\mu$ *den* $\lambda$ *ya fuzzy lineer dönüşümlerin uzayı* $FHom(\mu, \lambda)$ *ile gösterilir.*

**Örnek 10.** $\mathbb{R}^3$ *ün* $\mu : X \to [0,1]$ *fuzzy alt kümesi her* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *için* $\mu(x,y,z) = 1$ *ve* $\mathbb{R}^2$ *nin* $\lambda : X \to [0,1]$ *fuzzy alt kümesi her* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *için* $\lambda(x,y) = \dfrac{1}{2}$ *biçiminde tanımlansın.*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y) \end{array} \tag{4.20}$$

*biçiminde tanımlanan dönüşüm* $\mathbb{R}^3$ *üzerinde fuzzy lineer dönüşümdür.*

Çözüm: $\mu$ ve $\lambda$ nın $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^2$ üzerinde sırasıyla fuzzy alt uzay olduklarını gösterelim. Her $a, b \in F$ ve $A, B \in \mathbb{R}^3$ ve $\mu$ için,

$$\begin{aligned} \mu(aA + bB) &= \text{sup}\{\text{min}\{\mu(aA), \mu(bB)\}\}, \\ &\geq \text{sup}\{\text{min}\{\mu(A), \mu(B)\}\}, \\ &\geq \text{min}\{\mu(A), \mu(B)\}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

şartını sağladığından $\mathbb{R}^3$ üzerinde ve benzer biçimde $\lambda$, $\lambda(aA+bB) \geq \text{min}\, \lambda(A), \lambda(B)$ şartını sağladığından $\mathbb{R}^2$ üzerinde fuzzy alt uzaydır.

$\mu$ ve $\lambda$, $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^2$ üzerinde sırasıyla iki alt uzay olsun.

Her $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ için $\varphi(x,y,z) = (x,y)$ olacak şekilde $\varphi : \mu \to \lambda$ dönüşümü vardır.

Her $(x,y,z), A, B, s, d \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned} \varphi(aA + bB) &= \text{sup}(\text{min}\{\mu(aA), \mu(bB)\}), \\ &= \text{sup}\{\text{min}\{\varphi(s), \varphi(d)\} : s = aA, d = bB\}, \\ &= \text{sup}\{\text{min}\{\varphi(s), \varphi(d)\} : s = (ax_1, ay_1, az_1), d = (bx_2, by_2, bz_2)\}, \\ &\geq \text{sup}\{\text{min}\{\varphi(A), \varphi(B)\}\}, \\ &\geq \text{min}\{\varphi(x), \varphi(y)\}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

olduğundan $\varphi$, $\mu$ fuzzy alt uzayı üzerinde bir fuzzy lineer dönüşümdür.

**Örnek 11.** *$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineer dönüşümü $L(x) = 2x$ şartıyla verilsin. $\mu$ ve $\nu$ fuzzy alt kümeleri, $x \in \mathbb{R}$ için*

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} \tag{4.23}$$

$$\nu(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \tag{4.24}$$

*ile veriliyor. $\mu$ ve $\nu$ alt uzay değildir. Çünkü, $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{7}, A = 3, B = 6$ seçilirse,*

$$\mu(aA + bB) \geq \mu(A) \wedge \mu(B) \tag{4.25}$$

*şartı*

$$\mu(\frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{7} \cdot 6) = \frac{1}{2} \tag{4.26}$$

*ve*

$$\mu(3) \wedge \mu(6) = 1 \tag{4.27}$$

*ve $\frac{1}{2} \ngeq 1$ olduğundan sağlanmaz. Benzer biçimde*

$$\nu(\frac{1}{10} \cdot 5 + \frac{1}{21} \cdot 7) = \frac{2}{3}, \nu(5) \wedge \nu(7) = 1 \tag{4.28}$$

*ve $\frac{2}{3} \ngeq 1$ olduğundan lineer alt uzay değildir. Dolayısıyla L fonksiyonu fuzzy lineer değildir.*

**Önerme 9.** *(Abdukhalikov, 1996) $\lambda(0) \geq \mu(0)$ ise $\mu$ den $\lambda$ ya tanımlanan tüm lineer dönüşümlerin kümesi bir vektör uzayıdır.*

**Örnek 12.** *(Abdukhalikov ve Kim, 1998) $\mu(0) \leq \inf \lambda(L)$ ise $FHom(\mu, \lambda) = Hom(E, L)$ dir.*

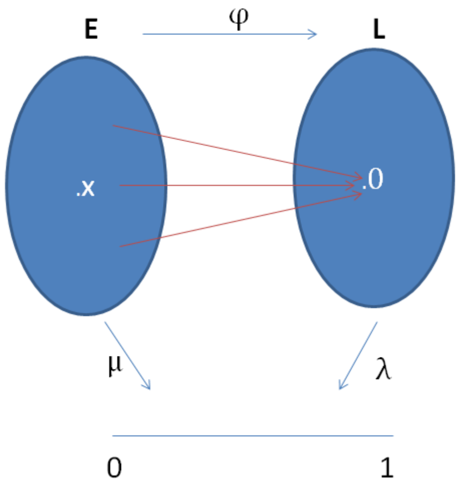
**Örnek 13.** *(Abdukhalikov ve Kim, 1998) $\inf \mu(E \setminus 0) > \sup \lambda(L \setminus 0)$, $\lambda(0) \geq \mu(0)$ ise $FHom(\mu, \lambda) = 0$ dır.*

$\varphi : E \to L$, $E$ ve $L$ vektör uzayları arasında bir lineer dönüşüm ise her $g \in L^*$ ve $x \in E$ için

$$(\varphi'(g))(x) = g(\varphi(x)) \tag{4.29}$$

olacak şekilde bir tek $\varphi' : L^* \to E^*$ lineer dönüşümü vardır. ($\varphi'$, $\varphi$ nin dualini ifade eder.)

**Teorem 10.** *(Abdukhalikov, 1996) Lineer dönüşüm $\varphi \in FHom(\mu, \lambda)$ ve $\inf \lambda(L) \geq \inf \mu(E)$ ise $\varphi' \in FHom(\lambda^*, \mu^*)$ dır.*




Şekil 4.2 Fuzzy Sıfır Lineer Dönüşüm

**Tanım 33.** *$E$ den $L$ ye tanımlanan sıfır lineer dönüşümü $(E,\mu) \rightarrow (L,\lambda)$ fuzzy uzayları arasında fuzzy lineer dönüşüm ise fuzzy sıfır lineer dönüşüm denir. (Şekil 4.2)*

**Tanım 34.** *$E$ den $L$ ye tanımlanan birim lineer dönüşümü $(E,\mu) \rightarrow (L,\lambda)$ fuzzy uzayları arasında fuzzy lineer dönüşüm ise fuzzy özdeşlik lineer dönüşüm denir. Yani, her $X \in E$ için $\lambda(x) \leq \mu(0(x))$ olmalıdır.*

**Örnek 14.** *(Abdukhalikov ve Kim, 1998) Eğer $\mu(0) \leq \inf \lambda(L)$ ise*

$$FHom(\mu,\lambda) = Hom(E,L) \tag{4.30}$$

*dir.*

**Örnek 15.** *(Abdukhalikov ve Kim, 1998) Eğer $\inf \mu(E\ (0)) > \sup \lambda(L\ (0)), \lambda(0) \geq \mu(0)$ ise*

$$FHom(\mu,\lambda) = 0 \tag{4.31}$$

*dır.*

**Teorem 11.** *(Abdukhalikov, 1996) Eğer $\mu : E \rightarrow [0,1]$ ve $\lambda : L \rightarrow [0,1]$ fuzzy alt uzaylar, $\dim E < \infty, \dim L < \infty, \lambda(0) = \sup(L\ (0)) \geq \sup \mu(E\ (0)) = \mu(0), \inf \lambda(L) \geq \inf(E)$ ise*

$$\begin{array}{ll} FHom(\mu,\lambda) & \rightarrow FHom(\lambda^*,\mu^*) \\ \varphi & \mapsto \varphi' \end{array} \tag{4.32}$$

*dönüşümü bir izomorfizmdir.*

**Önerme 10.** *$E$ ve $L$ sonlu boyutlu vektör uzayı $E = x_{t_1}, x_{t_2}, ..., x_{t_n}$ sonlu vektör uzayı üzerindeki fuzzy alt uzay $\mu$, $L = y_{t_1}, y_{t_2}, ..., y_{t_n}$ sonlu vektör uzayı üzerindeki fuzzy alt uzay*

*$\lambda$ olsun. $\mu$ den $\lambda$ ya her $i = 1, 2, ..., n$ ve $t \in [0, 1]$ için $\varphi(x_{t_i}) = y_{t_i}$ biçiminde tanımlanan dönüşüm fuzzy lineer dönüşümdür.*

İspat: $E$ ve $L$ sonlu boyutlu vektör uzayları ve $E = x_{t_1}, x_{t_2}, ..., x_{t_n}$ ve $L = y_{t_1}, y_{t_2}, ..., y_{t_n}$ $F$ cismi üzerinde sonlu vektör uzayı olduğundan $i = 1, 2, ..., n$ için $f : E \to L$, $f(x_i) = y_i$ şeklinde bir lineer dönüşüm vardır. $\mu_t, E$ nin bir fuzzy alt uzayı olduğundan $0 \leq t \leq \mu(0)$ için $\mu, E$ nin bir fuzzy alt uzayıdır. $\varphi$, fuzzy lineer olduğundan

$$\lambda(\varphi(x_i)) = \lambda(y_i) = y_{it} = x_{it} = \mu(x_i) \tag{4.33}$$

bulunur.

## 4.2 Fuzzy Lineer Dönüşümlerin Bir Uzayının Fuzzy Alt Uzayı

Bu bölümde $FHom(\mu, \lambda)$ dan $[0, 1]$ birim aralığına giden $\nu$ fonksiyonunu tanımlayacağız. $\mu : E \to [0, 1]$ ve $\lambda : L \to [0, 1]$, E ve L vektör uzaylarının fuzzy alt uzaylarıdır ve $\nu$, $FHom(\mu, \lambda)$ nin fuzzy alt uzayını belirler.

**Tanım 35.** *(Abdukhalikov ve Kim, 1998) $FHom(\mu, \lambda)$ nin $\nu$ fuzzy alt kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır;*

$$\nu(\varphi) = \begin{cases} 1 - \inf\{\lambda(\varphi(x)) - \mu(x) : x \in E, \varphi(x) \neq 0\}, & \varphi \neq 0 \\ 1 - \sup\{\lambda(\varphi(x)) - \mu(x) : x \in E\}, & \varphi = 0 \end{cases} \tag{4.34}$$

Dolayısıyla eğer $\varphi \neq 0$ ise $\nu(\varphi)$, E den alınan her $x$ vektörü için ya

$$\lambda(\varphi(x)) - \mu(x) \geq \alpha \tag{4.35}$$

ya da $\varphi(x) = 0$ olacak şekilde en büyük $\alpha$ reel sayısıdır.

**Sonuç 3.** *(Abdukhalikov ve Kim, 1998) $\nu(0) = \lambda(0) - \inf\{\mu(x) : x \in E\}$ dir.*

İspat: (Abdukhalikov, 1996)

$\nu(0) = \sup\{\lambda(0) - \mu(x) : x \in E\} = \lambda(0) - \inf\{\mu(x) : x \in E\}$ olur.

**Teorem 12.** *(Abdukhalikov ve Kim, 1998) $\nu$ fuzzy alt kümesi, $FHom(\mu, \lambda)$ nin bir fuzzy alt uzayıdır.*

İspat: (Abdukhalikov ve Kim, 1998) $\nu(\varphi) = \alpha, \nu(\psi) = \beta$ ve $\varphi + \psi \neq 0$ olsun. $\nu(\varphi+\psi) \geq \alpha \wedge \beta$ yani, her $x \in E$ için ya $(\varphi+\psi)(x) = 0$ ya da $\lambda((\varphi+\psi)(x)) - \mu(x) \geq \alpha \wedge \beta$ olduğu gösterilmelidir. $(\varphi + \psi)(x) \neq 0$, $\varphi(x) \neq 0$ ve $\psi(x) \neq 0$ ise bu takdirde tanımdan

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi(x)) - \mu(x) &\geq \alpha \\ \lambda(\psi(x)) - \mu(x) &\geq \beta \end{aligned} \tag{4.36}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \lambda((\varphi+\psi)(x)) - \mu(x) &= \lambda((\varphi) + (\psi)(x)) - \mu(x) \\ &\geq \lambda(\varphi(x)) + \lambda(\psi(x)) - \mu(x) \\ &= (\lambda(\varphi(x)) - \mu(x)) \wedge (\lambda(\psi(x)) - \mu(x)) \\ &\geq \alpha \wedge \beta \end{aligned} \tag{4.37}$$

olur. $(\varphi + \psi)(x) \neq 0$, $\varphi(x) = 0$ ve $\psi(x) \neq 0$ ise

$$\lambda((\varphi+\psi)(x)) - \mu(x) = \lambda(\psi(x)) - \mu(x) \geq \beta \geq \wedge\beta \tag{4.38}$$

dir. Benzer şekilde $(\varphi + \psi)(x) \neq 0$, $\varphi(x) \neq 0$ ve $\psi(x) = 0$ ise

$$\lambda((\varphi+\psi)(x)) - \mu(x) \geq \alpha \wedge \beta \tag{4.39}$$

bulunur.

Her $y \in L$ için $boyL = 1$ ve $\lambda(y) = 1$ olduğu durumu düşünelim. Bu durumda $FHom(\mu, \lambda) = Hom(E, L)$ olur. $f$, L nin bir tabanı ve $g_\varphi$, E den F cismine bir lineer dönüşüm olmak üzere her $\varphi \in FHom(\mu, \lambda)$ için $\varphi(x) = g_\varphi(x) f$ olur. Ayrıca $\varphi \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} \nu(\varphi) &= \inf\{\lambda(\varphi(x)) - \mu(x) : x \in E, \varphi(x) \neq 0\} \\ &= \inf\{1 - \mu(x) : x \in E, g_\varphi(x) \neq 0\} \\ &= 1 - \sup\{\mu(x) : x \in E, g_\varphi(x) \neq 0\} \\ &= \mu^*(g_\varphi) \end{aligned} \tag{4.40}$$

olup sonuç olarak

$$\begin{aligned} \nu(0) &= \lambda(0) - \inf\{\mu(x) : x \in E\} \\ &= 1 - \inf\{\mu(x) : x \in E\} \\ &= \mu^*(0) \end{aligned} \tag{4.41}$$

olur. Böylece $\nu$ nün tanımı, $\mu^*$ ın tanımı ile uyumludur.

**Sonuç 4.** *(Abdukhalikov ve Kim, 1998) $\mu$ ve $\lambda$ sırasıyla E ve L nin fuzzy alt uzayları ve*

$$\mu(E \setminus 0) = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}, \alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_n \tag{4.42}$$

*ve*

$$\lambda(L \setminus 0) = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m\}, \beta_1 > \beta_2 > ... > \beta_m \tag{4.43}$$

*ve* $\lambda(0) = \beta_0$ *olsun.* $FHom(\mu, \lambda) \neq \emptyset$ *olmak üzere*

$$Im\nu = \{\beta_i - \alpha_j : \beta_i \geq \alpha_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{\beta_0 - \alpha_n\} \tag{4.44}$$

*dir.*

İspat: (Abdukhalikov ve Kim, 1998)

$$Im\nu \subset \{\beta_i - \alpha_j : \beta_i \geq \alpha_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{\beta_0 - \alpha_n\} \tag{4.45}$$

olduğu görülebilir.

Ters kapsamayı ispatlayalım. $Im\mu < \infty$ ve $Im\lambda < \infty$ olduğundan $\mu$ ve $\lambda$ fuzzy alt uzayları sırasıyla $\{e_p\}_{p\in P}$ ve $\{f_q\}_{q\in Q}$ fuzzy tabanlarına sahiptirler. $\beta_i \geq \alpha_j$ ve $\mu(e_{p_j}) = \alpha_j$ ve $\lambda(f_{q_i}) = \beta_i$ özelliğindeki $e_{p_j}$ ve $f_{q_i}$ vektörlerini alalım. $p \neq p_j$ için $\varphi(e_{p_j}) = f_{q_i}$ ve $\varphi(e_p) = 0$ olacak şekildeki $\varphi : E \to L$ lineer dönüşümünü düşünelim. $\varphi \in FHom(\mu, \lambda)$ olduğu görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\nu(\varphi) &= \inf\{\lambda(\varphi(x)) - \mu(x) : x \in E, \varphi(x) \neq 0\} \\
&= \inf\{\lambda(\varphi(\textstyle\sum_{p\in A} x_p e_p)) - \mu(\textstyle\sum_{p\in A} x_p e_p) : A \subset P, |A| < \infty, \varphi(\textstyle\sum_{p\in A} x_p e_p) \neq 0\} \\
&= \inf\{\lambda(x_{p_j f_{q_i}}) - \textstyle\bigwedge_{p\in A} \mu(x_p e_p) : A \subset P, |A| < \infty, x_{p_j} \neq 0, p_j \in A\} \\
&= \lambda(f_{q_i}) - \mu(e_{p_j}) \\
&= \beta_i - \alpha_j
\end{aligned} \tag{4.46}$$

olur.

$$\nu(0) = \lambda(0) - \inf\{\mu(x) : x \in E\} = \beta_0 - \alpha_n \tag{4.47}$$

bulunur.

Şimdi de bir fuzzy tabana sahip olan fuzzy vektör alt uzaylarının fuzzy lineer dönüşümlerini düşünelim.

**Teorem 13.** *(Abdukhalikov ve Kim, 1998)* $\mu : E \to [0,1]$ *fuzzy alt uzayının bir fuzzy tabanı* $\{e_j : j \in J\}$ *ve* $\lambda : E \to [0,1]$ *fuzzy alt uzayının bir fuzzy tabanı da* $\{f_i : i \in I\}$ *ve* $\lambda(0) \geq \mu(0)$ *olsun.*

$$\{\varphi_{ij} : \varphi_{ij}(e_k) = \delta_{jk} f_i, \lambda(f_i) \geq \mu(e_j), i \in I, j \in J\} \tag{4.48}$$

*lineer dönüşümü fuzzy lineer dönüşümdür ve* $FHom(\mu, \lambda)$ *fuzzy alt uzayında fuzzy lineer bağımsızdır. Ayrıca bu dönüşümler için*

$$\nu(\varphi_{ij}) = \lambda(f_i) - \mu(e_j) \tag{4.49}$$

*dir.*

İspat: (Abdukhalikov ve Kim, 1998) $x = \sum_{k\in K} x_k e_k, |K| < \infty$, her $k \in K$ için $x_k \neq 0$ ve $\lambda(f_i) \geq \mu(e_j)$ olsun. $j \in K$ ise

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi_{ij}(x)) &= \lambda(\varphi_{ij}(\sum x_k e_k))\\ &= \lambda(x_j f_i)\\ &= \lambda(f_i) \geq \mu(e_j)\\ &\geq \bigwedge_{k\in K} \mu(x_k e_k)\\ &= \mu(x)\end{aligned} \tag{4.50}$$

olur.

Sonuç olarak $\varphi_{ij} \in FHom(\mu, \lambda)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\nu(\varphi_{ij}) &= \text{inf}\{\lambda(\varphi_{ij}(x)) - \mu(x) : x \in E, \varphi_{ij}(x) \neq 0\}\\ &= \text{inf}\{\lambda(\varphi_{ij}(\sum_{k\in K} x_k e_k)) - \mu(\sum_{k\in K} x_k e_k) : |K| < \infty, j \in K, \forall k \in K, x_k \neq 0\}\\ &= \text{inf}\{\lambda(x_j f_i) \bigwedge_{k\in K} \mu(x_k e_k) : |K| < \infty, j \in K, \forall k \in K, x_k \neq 0\}\\ &= \text{inf}\{\lambda(f_i) \bigwedge_{k\in K} \mu(e_k) : |K| < \infty, j \in K, \forall k \in K, x_k \neq 0\}\\ &= \lambda(f_i) - \mu(e_j)\end{aligned} \tag{4.51}$$

elde edilir.

Son olarak her $(i, j) \in S, |S| < \infty$ için $\varphi = \sum_{(i,j)\in S} a_{ij}\varphi_{ij} \neq 0, a_{ij} \neq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\nu(\varphi) &= \nu(\sum_{(i,j)\in S} a_{ij}\varphi_{ij})\\ &= \text{inf}\{\lambda(\sum_{(i,j)\in S} a_{ij}\varphi_{ij}) - \mu(x) : x \in E, \sum_{(i,j)\in S} a_{ij}\varphi_{ij} \neq 0\}\\ &= \text{inf}\{\lambda(\sum_{(i,j)\in S} a_{ij}\varphi_{ij}) - \mu(x) : x = \sum_{k\in K} x_k e_k \in E, \sum_{(i,j)\in S} a_{ij}\varphi_{ij} \neq 0\}\\ &= \text{inf}\{\lambda(\sum_{(i,j)\in S} a_{ij}x_j f_i) \bigwedge_{k\in K} \mu(x_k e_k) : \sum_{k\in K} x_k e_k \in E, \sum_{(i,j)\in S} a_{ij}x_j f_i \neq 0\}\end{aligned} \tag{4.52}$$

olup,

$$T = \text{inf}\{\lambda(\sum_{(i,j)\in S} a_{ij}x_j f_i) - \bigwedge_{k\in K} \mu(x_k e_k) : \sum_{k\in K} x_k e_k \in E, \sum_{(i,j)\in S} a_{ij}x_j f_i \neq 0\} \tag{4.53}$$

elde edilir.

Şimdi

$$T = \bigwedge_{(i,j)\in S} (\lambda(f_i) - \mu(e_j) \tag{4.54}$$

ifadesini kanıtlayalım.

$\lambda(\sum_{(i,j)\in S} a_{ij}x_j f_i)$ ifadesinin değerleri $\{\lambda(f_i)|i \in I \ni \exists j : (i, j) \in S\}$ kümesinde bulunduğundan ve $\bigwedge_{k\in K} \mu(x_k e_k)$ ifadesinin değerleri de $\{\mu(e_i)|j \in J \ni \exists i : (i, j) \in S\}$

kümesinde bulunduğundan, $\sum_{(i,j)\in S} a_{ij}x_jf_i \neq 0$ olmak şartıyla

$$T \geq \bigwedge_{(i,j)\in S} (\lambda(f_i) - \mu(e_j) \tag{4.55}$$

olur. Diğer taraftan bazı $(i_0, j_0) \in S$ ler için

$$\bigwedge_{(i,j)\in S} (\lambda(f_i) - \mu(e_j) = \lambda(f_{i_0}) - \mu(e_{j_0}) \tag{4.56}$$

olsun. Her $k \neq j_0$ için $x_{j_0} = 1$ ve $x_k = 0$ olacak şekilde $x$ vektörünü seçelim.

$$\sum_{(i,j)\in S} a_{ij}x_jf_i = \sum_{(i,j_0)\in S} a_{ij_0}x_{j_0}f_i = \sum_{(i,j_0)\in S} a_{ij}f_i \neq 0, \tag{4.57}$$

$$\lambda(\sum_{(i,j)\in S} a_{ij}x_jf_i) = \lambda(\sum_{(i,j_0)\in S} a_{ij}f_i) = \bigwedge_{(i,j_0)\in S}, \tag{4.58}$$

$$\bigwedge_{k\in K} \mu(x_ke_k) = \mu(e_{j_0}) \tag{4.59}$$

olur. Dolayısıyla

$$T \leq \bigwedge_{(i,j_0)\in S} (\lambda(f_i) - \mu(e_{j_0})) \leq \lambda(f_{i_0}) - \mu(e_{j_0}) \tag{4.60}$$

bulunur.

Sonuç olarak

$$\nu(\mu) = \bigwedge_{(i,j)\in S} (\lambda(f_i) - \mu(e_j)) = \bigwedge_{(i,j)\in S} \nu(\mu_{ij}) \tag{4.61}$$

elde edilir.

Şimdi $FHom(\mu, \mu)$ fuzzy lineer operatörünün alt uzayını düşünelim.

**Önerme 11.** *(Abdukhalikov ve Kim, 1998) $\mu : E \to [0, 1]$, E nin bir fuzzy alt uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır;*

*(i) Birim operatörü $FHom(\mu, \mu)$ nin elemanıdır ve $\nu(id) = 0$ dır;*

*(ii) $\varphi$, tersi alınabilir ve $\varphi, \varphi^{-1} \in FHom(\mu, \mu)$ ise $\nu(\varphi) = 0$ dır;*

*(iii) $\varphi, \psi \in FHom(\mu, \mu)$ ve $\varphi\psi \neq 0$ ise $\nu(\varphi\psi) \geq \nu(\varphi) + \nu(\psi)$ dir;*

*(iv) $\varphi \in FHom(\mu, \mu)$ ve $\nu(\varphi) > 0$ ise $\varphi$ bir nilpotent operatördür.*

İspat: (Abdukhalikov ve Kim, 1998)

(ii) Her $x \in E$ için $\mu(\varphi(x)) \geq \mu(x) = \mu(\varphi^{-1}\varphi(x)) \geq \mu(\varphi(x))$ ve $\mu(\varphi(x)) = \mu(x)$ olup dolayısıyla $\nu(\varphi) = 0$ olur.

(iii) Her $x \in E$ için ya $\mu(\varphi(x)) - \mu(x) \geq \nu(\varphi)$ ya da $\varphi(x) = 0$ dır ve her $y \in E$ için ya $\mu(\psi(x)) - \mu(x) \geq \nu(\psi)$ ya da $\psi(y) = 0$ dır. Dolayısıyla eğer $\varphi\psi(x) \neq 0$ ise $\psi(x) \neq 0$ ve

$$\begin{aligned} \mu((\varphi\psi)(x)) - \mu(x) &= \mu(\varphi(\psi(x))) - \mu(\psi(x)) + \mu(\psi(x)) - \mu(x) \\ &\geq \nu(\varphi) + \nu(\psi) \end{aligned} \tag{4.62}$$

olur.

(iv) Her pozitif $n$ tamsayısı için $\varphi^n \neq 0$ ise (iii) den $\nu(\varphi^n) \geq n\nu(\varphi)$ olur. Fakat $\nu(\varphi) > 0$ için $n\nu(\varphi) > 1$ olacak şekilde bir $n$ sayısı vardır. Elde edilen çelişkiyle ispat tamamlanır.

## 4.3 Sonlu Boyutlu Uzayların Fuzzy Lineer Dönüşümleri

Bu bölümde E ve L sonlu boyutlu vektör uzaylar ve $\mu : E \to [0,1]$ ve $\lambda : E \to [0,1]$, sırasıyla $\{e_1, ..., e_n\}$ ve $f_1, ..., f_m$ fuzzy tabanlarına sahip fuzzy alt uzaylar olarak alınacaktır. Ayrıca $\{e^1, ..., e^n\}$ ve $\{f^1, ..., f^m\}$ dual fonksiyonları, $\mu^* : E^* \to [0,1]$ ve $\lambda^* : L^* \to [0,1]$ fuzzy alt uzaylarının fuzzy tabanlarını oluşturur. $\varphi \in Hom(E, L)$ ise her $g \in L^*$ ve $x \in E$ için dual dönüşüm $\varphi' \in Hom(L^*, E^*)$

$$\varphi'(g)(x) = g(\varphi(x)) \tag{4.63}$$

olarak tanımlıdır.

$$\varphi'_{ij}(f')(e_s) = f'(\varphi_{ij}(e_s)) = f'(\delta_{js} f_i) = \delta_{it}\delta_{js} \tag{4.64}$$

olduğundan

$$\varphi'_{ij}(f') = \delta_{it} e^j \tag{4.65}$$

dır.

**Teorem 14.** *(Abdukhalikov ve Kim, 1998) $\lambda(0) \geq \mu(0)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır;*

*(i) $B = \{\varphi_{ij} : \lambda(f_i) \geq \mu(e_j)\}$ vektörlerinin kümesi $\nu : FHom(\mu, \lambda) \to [0,1]$ fuzzy alt uzayının bir fuzzy tabanıdır.*

*(ii) $\inf \lambda(L) \geq \inf \mu(E)$ ise $B' = \{\varphi'_{ij} : \varphi_{ij} \in B\}$ vektörlerin kümesi $\nu' : FHom(\lambda^*, \mu^*) \to [0,1]$ nin bir fuzzy tabanıdır;*

*(iii)* $\inf \lambda(L) \geq \inf \mu(E)$ *ise her* $\varphi_{ij} \in B$ *için* $\nu(\varphi_{ij}) = \nu'(\varphi'_{ij})$ *dir;*

*(iv)* $\inf \lambda(L) \geq \inf \mu(E)$ *ve* $\sup \lambda(L \setminus \{0\}) = \lambda(0)$, $\sup \mu(E \setminus \{0\}) = \mu(0)$ *ise* $\varphi \mapsto \varphi'$ *dönüşümü,* $FHom(\mu, \lambda)$ *fuzzy alt uzayından* $FHom(\lambda^*, \mu^*)$ *e bir izomorfizm tanımlar.*

İspat: (Abdukhalikov ve Kim, 1998)

(i) $B = \{\varphi_{ij} : \lambda(f_i) \geq \mu(e_j)\}$ vektörlerinin kümesinin $FHom(\mu, \lambda)$ lineer alt uzaylar için bir taban olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $\varphi = \sum a_{ij}\varphi_{ij} \in FHom(\mu, \lambda)$ ve $a_{st} \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} \lambda(f_s) &= \lambda(a_{st}f_s) \geq \textstyle\bigwedge_i (a_{it}f_i) = \lambda(\sum_i (a_{it}f_i) \\ &= \lambda(\textstyle\sum_{ij} a_{ij}\varphi_{ij}(e_t)) = \lambda(\varphi(e_t)) \geq \mu(e_t) \end{aligned} \tag{4.66}$$

dir. Dolayısıyla $\varphi_{st} \in B$ dir. $B$ deki her vektör $FHom(\mu, \lambda)$ ye ait olduğundan $B$, $FHom(\mu, \lambda)$ nin bir tabanıdır.

(ii) $\nu'$, $FHom(\lambda^*, \mu^*)$ nın bir fuzzy alt uzayı olduğundan ve (i) nin $FHom(\lambda^*, \mu^*)$ a uygulanmasından tamamlanır.

(iii) $\nu'$, $FHom(\lambda^*, \mu^*)$ nın bir fuzzy alt uzayı olduğundan

$$\begin{aligned} \nu'(\varphi'_{ij}) &= \mu^*(e^j) - \lambda^*(f^i) = (1 - \mu(e_j)) - (1 - \lambda(f_i)) \\ &= \lambda(f_i) - \mu(e_j) = \nu(\varphi_{ij}) \end{aligned} \tag{4.67}$$

olur.

(iv) $\varphi \mapsto \varphi'$ dönüşümü $FHom(\mu, \lambda)$ lineer alt uzayından $FHom(\lambda^*, \mu^*)$ a bir izomorfizm tanımlar; dolayısıyla her $\varphi \in FHom(\mu, \lambda)$ için sadece $\nu(\varphi) = \nu'(\varphi')$ ifadesinin ispatlanması gerekir. $B$ den alınan $\varphi_{ij}$ elemanlarıyla $\varphi = \sum a_{ij}\varphi_{ij} \neq 0$ için

$$\begin{aligned} \nu(\varphi) &= \textstyle\bigwedge\{\nu(\varphi_{ij}) : a_{ij} \neq 0\} = \bigwedge\{\nu'(\varphi'_{ij}) : a_{ij} \neq 0\} \\ &= \nu'(\textstyle\sum a_{ij}\varphi'_{ij}) = \nu'(\varphi') \end{aligned} \tag{4.68}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \nu'(0) &= \mu^*(0) - \inf \lambda^*(L^*) \\ &= (1 - \inf \mu(E)) - \inf\{1 - \sup\{\lambda(y) : y \in L, g(y) \neq 0\} : g \in L^*, g \neq 0\} \\ &= (1 - \inf \mu(E)) - (1 - \sup_{g \neq 0} \sup\{\lambda(y) : y \in L, g(y \neq 0)\}) \\ &= (1 - \inf \mu(E)) - (1 - \sup\{\lambda(y) : y \neq 0\}) \\ &= \sup \lambda(L \setminus \{0\}) - \inf \mu(E) \\ &= \lambda(0) - \inf \mu(E) \\ &= \nu(0) \end{aligned} \tag{4.69}$$

Şimdi $\mu(e_1) \geq \mu(e_2) \geq ... \geq \mu(e_n)$, $\lambda(f_1) \geq \lambda(f_2) \geq ... \geq \lambda(f_n)$ olduğunu varsayalım. $\varphi = \sum a_{ij}\varphi_{ij}$ ise $\varphi$ fuzzy lineer dönüşümünün $A_\varphi = (a_{ij})$ matrisi özellikle, $\varphi \in FHom(\mu, \mu)$), $\mu(e_1) \geq \mu(e_2) \geq ... \geq \mu(e_n)$ olması durumunda $A_\varphi = (a_{ij})$ üst üçgensel matristir.

$$\begin{aligned} \lambda(f_i) - \mu(e_j) &\leq \lambda(f_k) - \mu(e_j) \quad ,k \leq i \\ \lambda(f_i) - \mu(e_j) &\leq \lambda(f_i) - \mu(e_s) \quad ,s \leq j \end{aligned} \tag{4.70}$$

olduğundan $\varphi = \sum a_{ij}\varphi_{ij} \neq 0$ iken

$$\nu(\varphi) = \inf\{\lambda(f_i) - \mu(e_j) : (i,j) \ni a_{ij} = 0 \forall k > i, \forall s < j\} \tag{4.71}$$

dir.

Son olarak $\varphi \in FHom(\mu, \mu)$ operatörünün işaret fonksiyonunun ilginç bir özelliğini ispatlayalım. $\varphi = \sum a_{ij}\varphi_{ij}$ ise $Tr\varphi = \sum_{i=1}^{n}$ dir ve $Tr$, F cisminde $Hom(E, E)$ şeklinde bir lineer fonksiyondur, yani $Tr \in (Hom(E, E))^*$ dir. Dolayısıyla $\nu^*(Tr)$ yi inceleyebiliriz.

**Önerme 12.** *(Abdukhalikov ve Kim, 1998)* $\nu^*(Tr) = 1$ *dir.*

İspat: (Abdukhalikov ve Kim, 1998) $\nu(\varphi_{ij}) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \nu^*(Tr) &= 1 - \sup\{\nu(\varphi) : \varphi \in FHom(\mu, \mu), Tr(\varphi) \neq 0\} \\ &= 1 - \sup\{\nu(\textstyle\sum a_{ij}\varphi_{ij}) : \sum a_{ij}\varphi_{ij} \in FHom(\mu, \mu), \sum a_{ii} \neq 0\} \\ &= 1 - \sup\{\textstyle\bigwedge \nu(a_{ij}\varphi_{ij}) : \sum a_{ij}\varphi_{ij} \in FHom(\mu, \mu), \sum a_{ii} \neq 0\} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{4.72}$$

olur.

# 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada fuzzy küme, fuzzy vektör uzayı, fuzzy alt uzay, fuzzy taban, fuzzy lineer bağımsızlık kavramları verilmiş ve ayrıntılı olarak fuzzy lineer dönüşümler incelenerek fuzzy vektör uzaylar arasında tanımlanan bu dönüşümlerin özellikleri ele alınmıştır. Başka çalışmalarda fuzzy vektör uzaylarından fuzzy projektif uzayların elde edilişi bilindiğinden, fuzzy lineer dönüşümlerin fuzzy projektif uzaylardaki fuzzy projektif dönüşümlerinin nasıl tanımlandığı sorusuna cevap aranabilir.

# KAYNAKLAR DİZİNİ

Abdukhalikov, K.S. (1996). “The Dual of a Fuzzy Subspace”. İn: *Fuzzy Sets and Systems* 82, pp. 375–381.

Abdukhalikov, K.S. ve C. Kim (1998). “Fuzzy Linear Maps”. İn: *Journal of Mathematical Analsis and Applications* 220, pp. 1–12.

Abdukhalikov, K.S., M.S. Tulenbaev ve U.U. Umirbaev (1994). “On Fuzzy Bases of Vector Spaces”. İn: *Fuzzy Sets and Systems* 63, pp. 201–206.

Akman, Y. (2007). “Fuzzy Metrik Uzayları”. Yüksek Lisans Tezi. Gazi Üniversitesi, p. 72.

Callıalp, F. (2011). *Örneklerle Soyut Cebir*.

De Luca, A. ve S. Termin (1970). “A Definition of Non-Probabilistic Entropy In The Setting of Fuzzy Sets Theory”. İn: *Inform. and Control* 20, pp. 301–312.

Ermiş, T. (2009). “Bulanık Kümeler ve Bulanık Geometriler Üzerine”. Master Thesis. ESOGU FBE.

Karakaş, H.İ. (1998). *Soyut Cebire Giriş*.

Katsaras, A.K. ve D.B. Liu (1977). “Fuzzy Vector and Fuzzy Topological Vector Spaces”. İn: *Journal of Mathematical Analsis and Applications* 58, pp. 135–146.

Lubczonok, P. (1990). “Fuzzy Vector Spaces”. İn: *Fuzzy Sets and Systems* 38, pp. 329–343.

Malik, D.S. ve J.N. Mordeson (1991). “Fuzzy Vector Spaces”. İn: *Inform. Sci.* 55, pp. 271–281.

Mordeson, J.N. (1993). “Bases of Vector Spaces”. İn: *Inform. Sci.* 67, pp. 87–92.

Zadeh, L.A. (1965). “Fuzzy Sets”. İn: *Inform. and Control* 8, pp. 338–353.