Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Simetri İndirgemeleri ve Korunumluluk Kanunları

Arzu Akbulut

**DOKTORA TEZİ**

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Temmuz 2017

The Symmetry Reductions and Conservation Laws of Fractional Differential Equations

Arzu Akbulut

**DOCTORAL DISSERTATION**

Department of Mathematics and Computer Sciences

July 2017

Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Simetri İndirgemeleri ve Korunumluluk Kanunları

Arzu Akbulut

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Filiz Taşcan Güney

Temmuz 2017

**ONAY**

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Arzu Akbulut'un DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Simetri İndirgemeleri ve Korunumluluk Kanunları" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

**Danışman** **:** Prof. Dr. Filiz Taşcan Güney

**İkinci Danışman** **:** -

**Doktora Tez Savunma Jürisi:**

**Üye :** Prof. Dr. Filiz Taşcan Güney

**Üye :** Prof. Dr. M. Naci Özer

**Üye :** Prof. Dr. Emel Alğın

**Üye :** Doç. Dr. Yılmaz Dereli

**Üye :** Yrd. Doç. Dr. Mustafa Saltan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ............................ tarih ve ....................... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

## ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Filiz Taşcan Güney danışmanlığında hazırlamış olduğum "Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Simetri İndirgemeleri ve Korunumluluk Kanunları" başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 04/07/2017

Arzu AKBULUT

İmza

# ÖZET


Diferensiyel denklemler, matematikte fonksiyonların bir veya birden çok değişkene göre türevleri ile ilişkili denklemlerdir. Fizik, kimya, mühendislik, biyoloji ve ekonomi alanlarında matematiksel modeller genellikle diferensiyel denklemler kullanılarak ifade edilirler. Diferensiyel denklemlerde değişkenlere göre türevler tam sayı olmakla birlikte kesirli de olabilirler. Kesir mertebeli diferensiyel denklemler, diferensiyel denklemlere kesirli analiz uygulanması yoluyla elde edilen bir genellemesidir.

Lie grup dönüşümleri, Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından 19. yüzyılın başlarında çalışılmaya başlanmış ve diferensiyel denklemlerin analizinde önemli bir yere sahip olmuştur. 2007 yılında Nail Ibragimov herhangi bir diferensiyel denklem sistemi için temel korunumluluk teoremini ispat etmiştir. Bu çalışmada, temel korunumluluk teoremi yardımıyla korunumluluk kanunlarını hesaplamak için gerekli olan Euler-Lagrange denklemleri, eşlenik denklem sistemlerinin bulunuşu ve gerekli formüller verilmiştir. Daha sonra bu teorem kesir mertebeli diferensiyel denklemlere uygulanmıştır.

Bu tez çalışmasında, diferensiyel denklemlerle ilgili temel bilgiler, kesir mertebeli diferensiyel denklemler ile ilgili temel kavramlar ve kesir mertebeli türev çeşitleri, Lie simetri üreteçlerinin nasıl bulunacağı, dönüşümlerin Lie grubu, simetri üreteci altında indirgemeler, korunumluluk kanunlarının temel korunumluluk teoremi yardımıyla nasıl bulunacağı verilmiştir.

Zaman kesir mertebeli Sawada-Kotera (SK) denklemi, zaman kesir mertebeli Modified Korteweg-de Vries (mKdV) denklemi, lineer olmayan zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi, zaman kesir mertebeli viscous Burgers denklemi için öncelikle Lie simetri üreteçleri bulunmuştur, daha sonra Erdélyi-Kober fonksiyonları ve karakteristik metot yardımıyla ayrı ayrı indirgeme işlemi yapılmıştır. Son olarak bütün denklemler için korunumluluk kanunları temel korunumluluk teoremi ile elde edilmiştir.


**Anahtar Kelimeler:** Kesir mertebeli diferensiyel denklemler, Lie simetri üreteçleri, Simetri indirgemeleri, Korunumluluk kanunları, Temel korunumluluk teoremi

## SUMMARY

Differential equations are equations related to derivatives of one or more variables of functions in mathematics. In physics, chemistry, engineering, biology and economics, mathematical models are often expressed using differential equations. Derivatives can be fractional or integers in differential equations. Fractional differential equations are a generalization obtained by applying fractional analysis to differential equations.

Lie group transformations have been started by the Norwegian mathematician Sophus Lie in the early 19th century and have an important place in the analysis of differential equations. In 2007, Nail Ibragimov proved the fundamental conservation theorem for any differential equation system. In this study, Euler-Lagrange equations which are necessary to calculate the conservation laws with the help of fundamental conservation theorem, existence of adjoint equation systems and necessary formulas are given. Afterwards, this theorem is applied to time fractional differential equations.

In this thesis study, basic information about differential equations, basic concepts related to fractional differential equations and fractional derivative types, how to find Lie symmetry generators, Lie group of transformations, reductions under symmetry generator, how conservation laws can be found with the help of fundamental conservation theorem.

Lie symmetry generators were found for the time fractional Sawada-Kotera (SK) equation, the time-fractional modified Korteweg-de Vries equation, the nonlinear time-fractional hyperbolic equation, the time-fractional viscous Burgers equation, then by the Erdélyi-Kober functions and the characteristic method, the reduction process was carried out separately. Finally, for all equations, the conservation laws were derived by the fundamental conservation theorem.

**Keywords:** Fractional differential equations, Lie symmetry generators, Symmetry reductions, Conservation laws, Fundamental conservation theorem

**TEŞEKKÜR**

Doktora sürecimin her aşamasında desteğini, bilgisini benden hiç bir zaman esirgemeyen,
bana yol gösteren, güvenen, sabırla destek olan kıymetli danışman hocam
Sayın Prof. Dr. Filiz TAŞCAN GÜNEY' e
sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca daima yanımda olan ve benden maddi, manevi desteklerini
hiçbir zaman esirgemeyen
AİLEME
göstermiş oldukları sevgi, hoşgörü ve anlayış için; en içten sevgi, saygı ve teşekkürlerimi
sunarım.

En zor anlarımda maddi ve manevi olarak yanımda olan, bana her zaman güvenen,
sevgili eşim Levent AKBULUT'a
sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmam sırasında vermiş oldukları maddi destekten dolayı
TÜBİTAK' a
teşekkürlerimi sunarım.

ESKİŞEHİR, 2017 Arzu AKBULUT

# İÇİNDEKİLER

## İÇİNDEKİLER (devam)

**Sayfa**

**İÇİNDEKİLER (devam)**

**Sayfa**

# KISALTMALAR DİZİNİ

| **Kısaltma** | **Açıklama** |
|---|---|
| mKdV | Modified Korteweg- de Vries |
| SK | Sawada-Kotera |

# 1. GİRİŞ VE AMAÇ

Diferensiyel denklemler konusunda yapılan ilk çalışmalar, 17. yüzyılın ikinci yarısında, diferensiyel ve integral hesabın keşfinden hemen sonra, İngiliz doğa bilimci Isaac Newton (1643-1727) ve Alman filozof Leibnitz (1646-1716) ile başlar. 18. yüzyılın sonlarına kadar adi diferensiyel denklemlerin çözümü için birçok basit metodlar keşfedilmiştir. 19. yüzyılda ise kuvvet serileri tabanlı çözüm yöntemleri ile varlık-teklik teoremi gibi konular ilgi odağı olmuştur. Belli tip diferensiyel denklemlerin, belli şartlar altında çözümlerinin varlığının ispatı, diferensiyel denklemler teorisinde varlık teoremi konusunu teşkil etmekte olup, bu da ilk olarak 1820 ile 1830 yılları arasında, Fransız matematikçi A.L. Cauchy tarafından kurulmuş ve bazı bilim adamları tarafından geliştirilmiştir. Bu yüzyılın sonlarına doğru değişmezlik teorisi en gözde araştırma sahalarından olmuştur. Sophus Lie (1842-1899), Felix Klein (1849-1925), David Hilbert, Elie Cartan (1869-1951) gibi birçok ünlü matematikçinin konunun gelişmesine büyük katkıları olmuştur (Özceylan, 2007).

Kesirli hesaplamalar ilk olarak 1695 yılında L'Hospital ın Leibnitz e yazdığı mektupta ortaya atılmıştır. Kısa bir süre sonra birçok akademisyen tarafından yeni teori üretildi. Son yıllarda kesir hesabı hakkında kapsamlı uygulamalar fizik, mekanik, mühendislik, dinamik, kontrol teorisi, modelleme, olasılık, biyoloji, kimya, ekonomi gibi alanlarda yaygınlaştı (Zhai ve Zhang, 2016). Kesir mertebeli türev; bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerinin mertebesinin rasyonel sayı olma durumudur. Kesir mertebeli türevin çok farklı tanımları vardır. Bazıları; Marchaud kesirli türevi, Coimbra kesirli türevi, Canavati kesirli türevi, Riesz kesirli türevi, Cossar kesirli türevi, lokal Yang kesirli türevi, Weyl kesirli türevi, Hadamard kesirli türevi, Chen'in kesirli türevi, Davidson-Essex kesirli türevi, Osler kesirli türevi, k-kesirli Hilfer türevi, Weyl kesirli türevi, Liouville kesirli türevi, Riemann-Liouville kesirli türevi, Caputo kesirli türevi, Grünwald-Letnikov kesirli türevi, modifiye Riemann-Liouville (Jumaire) kesirli türevidir (Olivera ve Machado, 2014; Coimbra, 2003; Yang, 2012; Dorrego ve Cerutti, 2013).

Bu doktora tezinde, bazı kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin kabul ettiği Lie simetri üreteçleri araştırılacaktır. Bulunan bu üreteçler yardımıyla Erdélyi-Kober fonksiyonları ve karakteristik metot yardımıyla ayrı ayrı indirgeme işlemi yapılacaktır. Son olarak bütün denklemler için korunumluluk kanunları temel korunumluluk teoremi ile elde edilecektir ve bulunan korunumluluk kanunlarında sonlu sayıdaki ve sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları verilecektir.

# 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından diferensiyel denklemlerin integrasyon metodları üzerindeki çalışmaları sonucu diferensiyel denklemlerin simetri analizi, Lie grubu adı verilen dönüşümlerin denklemlerin tanımladığı manifoldu değişmez bırakan yerel dönüşüm gruplarını bularak diferensiyel denklemlerin çözümlerini algoritmik metodlarla elde etmiştir. Lie nin çalışmalarının faydası uzun süre anlaşılamamış ve Lie teorisinin diferensiyel denklemlere uygulanışı 1950 li yıllarda ancak başlayabilmiştir. Daha sonra Bluman, Kumei, Ibragimov ve Olver tarafından çeşitli uygulamalar yapılmıştır (Bluman ve Anco, 2002).

Lie simetri analizi diferensiyel denklemler ile ilgili çalışmalarda önemli bir yere sahiptir. Bu metot sayesinde lineer olmayan diferensiyel denklemlere indirgemeler yapılarak bağımsız değişken sayısı azaltılabilir ve daha sonra lineer diferensiyel denklem haline dönüştürülebilir ve böylece çözümleri bulunabilir (Kinani ve Quhadan, 2015).

Lie simetri analizi öncelikle adi ve kısmi diferensiyel denklemlere uygulanmıştır. Son yıllarda bazı çalışmalarda Leibnitz kuralı yardımıyla uzanım formülleri zaman kesir mertebeli diferensiyel denklemlere uygulanmıştır. Kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin Lie simetri üreteçlerinin bulunması tam sayı mertebeli diferensiyel denklemlerin üreteçlerinin hesaplanması ile benzer işlemler içerir. Kesir mertebeli denkleme öncelikle mertebesine göre uzanım uygulanır. Uygulanan uzanımdan sonre gerekli formüller yardımıyla belirleyici denklem sistemine ulaşılır. Son olarak belirleyici denklem sisteminin çözülmesi ile kesir mertebeli denklemin kabul ettiği simetri ailesine ulaşılır.

Korunumluluk kanunu kavramının fizikte uzun ve derin bir tarihi vardır. Klasik mekanik, akışkan mekaniği, katıhal fiziğinin yanı sıra kuantum mekaniği, kuantum alan teorisi gibi hangi fiziksel kanunları düşünürsek düşünelim, bütün hepsi doğayı açıklamak için temel bileşenler olmuştur. Korunumluluk kanunlarını yücelten termo dinamiğin ilk prensibini kurması ve geniş fizik kanunu dizisinden birisini oluşturmasıdır.

Matematikte korunumluluk kanunları simetri dönüşümlerini kabul eden varyasyonel prensibin var olması ile yakından ilgilidir. Bu önemli gerçek Emmy Noether tarafından 1918 de ortaya konuldu. Noether in çalışmaları klasik mekanik ve klasik alan teorisinde korunumluluk kanunlarının anlaşılması için temeller kurdu (Compére, 2007).

Korunumluluk kanunları kütle, enerji, momentum ve açısal momentum gibi fiziksel korunmuş nicelikleri tanımlar. İntegrallenebilirliğin araştırılması, dönüşümlerin doğrusallaştırılması ve çözümlerin varlığının ve tekliğinin kanıtlanması için önemlidir. Kararlılığın analizi ve çözümlerin evrenselliğinde kullanılır. Aynı zamanda nümerik metodların, yerel olmayan ilgili sistemler ve potansiyel değişkenlerinin bulunması için temel bir başlangıç noktası sağlar. Korunumluluk kanunları başlangıç değerleri verilen diferensiyel denklemlerde çalışırken temel oluşturur (Bluman vd., 2010).

Korunumluluk kanunlarının hesaplanmasında bir çok yöntem vardır. Bu yöntemlerden bazıları doğrudan metot, Noether yaklaşımı, karakteristik metot, varyasyonel yaklaşım, diferensiyel denklemlerin çözümlerinin uzayında varyasyonel yaklaşım, simetri ve korunumluluk kanunu ilşkisi, kısmi Noether yaklaşımı, sistemler ve eşlenik sistemleri için Noether yaklaşımıdır. Biz çalışmamızda İbragimov tarafından bulunan temel korunumluluk teoremi yardımıyla diferensiyel denklemlerin korunumluluk kanunlarını hesaplayacağız.

Temel korunumluluk teoremi ile diferensiyel denklemlerin korunumluluk kanunlarının hesaplanabilmesi için öncelikle Lie simetri üreteçlerinin hesaplanması gerekir. Daha sonra yeni bir bağımlı değişken ile denklem çarpılarak denklem için formal Lagrangian hesaplanır. Varyasyonel türev yardımıyla eşlenik denklemi bulunur ve verilen denklemin öz eşlenik olup olmadığına bakılır. Sonrasında denklemin kabul ettiği herbir üreteç için sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları hesaplanır. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunlarından herhangi birini hesaplayabilmek için eşlenik denklemin çözümü bulunur ve sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunlarında yerine yazılarak hesaplanabilir.

# 3. TEMEL TANIMLAR

Diferensiyel denklemler, matematikte fonksiyonların bir veya birden çok değişkene göre türevleri ile ilişkili denklemlerdir. Fizik, kimya, mühendislik, biyoloji ve ekonomi alanlarında matematiksel modeller genellikle diferensiyel denklemler kullanılarak ifade edilirler. Diferensiyel denklemlerde değişkenlere göre türevler tam sayı olmakla birlikte kesirli de olabilirler. Kesir mertebeli diferensiyel denklemler, diferensiyel denklemlere kesirli analiz uygulanması yoluyla elde edilen bir genellemesidir.

## 3.1 Tamsayı Mertebeli Diferensiyel Denklemler

$y = f(x)$ ile verilen bir fonksiyon için $x$ değişkenine göre türevinin

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

şeklinde olduğu bilinmektedir.

İçerisinde türev bulunan denklemlere **diferensiyel denklemler** denir. Örneğin;

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

ifadesi bir diferensiyel denklemdir. Diferensiyel denklemler temel olarak iki kısma ayrılır;

### 3.1.1. Adi diferensiyel denklem

Tek bir değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denkleme **adi diferensiyel denklem** denir. Bu denklemler en genel olarak;

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

şeklinde yazılır. Burada $y^{(n)}$; $y$ nin $x$ e göre $n$. türevi demektir. Örneğin;

$$y^{''} - 2y^{'} + y = 0$$

denklemi bir adi diferensiyel denklemdir (Özer ve Eser, 2010).

### 3.1.2 Kısmi diferensiyel denklem

İki yada daha çok bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren denkleme **kısmi diferensiyel denklem** denir. Birinci mertebeden iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferensiyel denklem en genel olarak;

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

şeklinde yazılır. Burada $u = u\,(x, y)$ ve $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ dir.

Bir diferensiyel denklemdeki en yüksek basamaktan türevin basamağına o denklemin **mertebesi (basamağı)** denir. Örneğin;

$$uu_{xy} - u_x u_y = 0$$

denklemi ikinci mertebeden bir kısmi diferensiyel denklemdir.

Bir diferensiyel denklem denklemdeki tüm türevlere göre tam ve rasyonel olacak şekilde yazıldığında, denklemdeki en yüksek türevin derecesine **denklemin derecesi** denir. Örneğin;

$$u_t - u_{xx} - uu_x = 0$$

denklemi birinci dereceden bir kısmi diferensiyel denklemdir.

Tam ve rasyonel şekilde ifade edilen diferensiyel denklemde, bağımlı değişken ve türevleri yalnız birinci dereceden olup, bunlar denklemde çarpım halinde bulunmuyorlarsa denkleme **lineerdir** denir (Koca, 2008).

### 3.2. Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemler

İçinde kesir mertebeli türevler bulunan ifadelere **kesir mertebeli diferensiyel denklemler** denir. Kesir mertebeli diferensiyel denklemler temel olarak iki kısma ayrılır;

#### 3.2.1 Kesir mertebeli adi diferensiyel denklemler

Tek bir değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkene göre kesir mertebeli türevlerini içeren denkleme **kesir mertebeli adi diferensiyel denklem** denir. Örneğin;

$$D^{\frac{1}{2}}y\left(x\right)+D^{\frac{5}{2}}y\left(x\right)-3y\left(x\right)=0$$

denklemi bir kesir mertebeli adi diferensiyel denklemdir.

#### 3.2.2 Kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemler

Bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre kesir mertebeli türevlerini içeren bir denkleme **kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklem** denir.

$$D_t^{\frac{1}{2}}u(x,t)-3u\left(x,t\right)=0$$

denklemi iki bağımsız değişken ve bir bağımlı değişken içeren kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemdir ve $D_t^{\frac{1}{2}}$ ifadesi $t$ ye göre $\frac{1}{2}$. mertebeden türevi gösterir. Kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemler genel olarak ikiye ayrılır;

**Zaman kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemler**

Sadece zaman değişkeni olan $t$ ye göre kesir mertebeli türevler diğer bağımsız değişkenlere göre tamsayı mertebeli türevler içeren bir denkleme **zaman kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklem** denir.

Örneğin;

$$D_t^{\frac{3}{4}} u\,(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u\,(x,t) + 5u\,(x,t) = 0$$

denklemi bir zaman kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemdir.

**Uzay-zaman kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemler**

Zaman değişkeni olan $t$ ve diğer bağımsız değişken yada değişkenlere göre kesir mertebeli türevler içeren bir denkleme **uzay-zaman kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklem** denir.

Örneğin;

$$D_t^{\frac{3}{2}} u\,(x,t) + D_x^{\frac{1}{2}} u\,(x,u) = 0$$

denklemi bir uzay-zaman kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemdir.

### 3.2.3 Kesir mertebeli diferensiyel denklemin mertebesi

Kesir mertebeli bir diferensiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevin basamağına o denklemin **mertebesi (basamağı)** denir. Örneğin;

$$D_t^{\frac{3}{2}} u\,(x,t) + D_x^{\frac{1}{2}} u\,(x,u) + u\,(x,t)^2 = 0$$

denlemi $\frac{3}{2}$. mertebeden bir kesir mertebeli diferensiyel denklemdir.

### 3.2.4 Kesir mertebeli diferensiyel denklemin derecesi

Kesir mertebeli bir diferensiyel denklemdeki tüm türevlere göre tam ve rasyonel olacak şekilde yazıldığında, denklemdeki en yüksek türevin mertebesine **denklemin derecesi** denir. Örneğin;

$$u(x,t) D_t^{\frac{5}{2}} u\,(x,t) + \left( D_t^{\frac{7}{2}} u\,(x,t) \right)^2 = 0$$

denklemi 2. dereceden kesir mertebeli bir diferensiyel denklemdir (Kurulay, 2009).

### 3.2.5 Lineer kesir mertebeli diferensiyel denklemler

Tam ve rasyonel şekilde ifade edilen diferensiyel denklemde, bağımlı değişken ve türevleri yalnız birinci dereceden olup, bunlar denklemde çarpım halinde bulunmuyorlarsa denkleme **lineerdir** denir aksi halde **lineer değildir** denir (Kurulay, 2009). Örneğin;

$$D_t^{\alpha} u = \lambda^2 u_{xx}$$

denklemi lineer zaman kesir mertebeli bir diferensiyel denklemdir. Kesir mertebeli dalga denklemi olarak adlandırılır ve $\alpha$; kesir mertebeli türevi gösterir (Podlubny,1994).

$$D_t^{\alpha} u + u^2 u_{xx} + u_{xxx} = 0,\ t > 0,\ 0 < \alpha \leq 1$$

denklemi lineer olmayan zaman kesir mertebeli bir diferensiyel denklemdir. Modifiye KdV denklemi olarak adlandırılır ve $\alpha$; kesir mertebeli türevi gösterir (Kurulay ve Bayram, 2010).

## 3.3. Kesir Mertebeli Türev İçin Gerekli Kavramlar

Kesir mertebeli türevi uygularken kullanılacak bazı özel fonksiyonlar vardır. Şimdi bu fonksiyonları vereceğiz.

### 3.3.1 Gamma fonksiyonu

Gamma fonksiyonu $\Gamma(.)$ şeklinde gösterilir ve $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonu $n!$ ifadesinin genelleştirilmesidir, $n$ nin rasyonel yada kompleks değerler almasını mümkün kılar ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$n > 0$ için;

$$i)\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n),$$

$$ii)\ \Gamma(n+1) = n!,\ (\ n \in \mathbb{N}),$$

$n < 0$ için;

$$iii)\ \Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n},$$

$0 < n < 1$ için;

$$iv)\ \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)}.$$

(Kisela, 2008).

### 3.3.2 Beta fonksiyonu

Beta fonksiyonu $B(m,n)$ ile gösterilir ve $m,n > 0$ için;

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

ile tanımlanır ve bu integral $m,n > 0$ için yakınsaktır. Beta fonksiyonu gamma fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine kullanılan bir fonksiyondur. Aşağıdaki özelliklere sahiptir (Yaşar, 2005).

$$i)\ B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\ \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

$$ii)\ B(m,n) = 2\int_0^{1/2} \sin^{2m-1}\phi\cos^{2n-1}\phi d\phi,$$

$$iii)\ B(m,n) = B(n,m).$$

### 3.3.3 Mittag-Leffler fonksiyonu

Üstel $e^z$ fonksiyonu, tamsayı mertebeden diferensiyel denklemler teorisinde önemli bir rol oynar. Bunun bir parametreli genelleştirilmesi ile gösterilen fonksiyon

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

G.M. Mittag-Leffler tarafından tanımlanmıştır. $|z| < 1$ ve belirli $\alpha$ değerleri için bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu

$$\begin{aligned} &E_0(z) = \tfrac{1}{1-z} \\ &E_1(z) = e^z \\ &E_2(z^2) = \cosh(z) \\ &E_2(-z^2) = \cos(z) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Mittag-Leffler fonksiyonunu iki parametreli fonksiyona genelleştirme, kesirli diferensiyel teorisinde önemli rol oynar ve ilk olarak Agarwal ve Erdelyi tarafından tanıtılmıştır. İki parametreli fonksiyon

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha,\ \beta > 0)$$

seri açılımıyla tanımlanır. Bazı $\alpha$ ve $\beta$ değerlerinin seçimiyle

$$E_{1,1}(z) = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{1,n}(z) = \frac{1}{z^{n-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k} \right\}$$

$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$$

elde edilir (Güner, 2014).

### 3.3.4 Laplace dönüşümü

Laplace dönüşümü bir integral dönüşümü olup, fizik, mekanik, mühendislik gibi bazı bilim dallarında kullanılan önemli bir yöntemdir. Bu yöntem diferensiyel denklemlerin çözümünde de yararlanılabilen bir yöntemdir. $F(t)$, $t \geq 0$ ın pozitif değerleri için tanımlı bir fonksiyon olsun. $s > 0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere, $t$ reel değişkeninin bir fonksiyonu $e^{-st}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt$$

ifadesine $F(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir. Genel olarak konvolüsyon

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(t-\tau)\, G(\tau)\, d\tau = G(t) * F(t)$$

ile verilir. $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ve $\mathcal{L}\{G(t)\} = g(s)$ olmak üzere;

$$\mathcal{L}\{F(t) * G(t)\} = f(s)\, g(s)$$

şeklinde tanımlanır (Loverro, 2004).

## 3.4. Kesir Mertebeli Türev Çeşitleri

Kesir mertebeli türev; bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerinin mertebesinin rasyonel sayı olma durumudur. Kesir mertebeli türevin bazı tanımları şunlardır; Marchaud kesirli türevi, Coimbra kesirli türevi, Canavati kesirli türevi, Riesz kesirli türevi, Cossar kesirli türevi, lokal Yang kesirli türevi, Weyl kesirli türevi, Hadamard kesirli türevi, Chen'in kesirli türevi, Davidson-Essex kesirli türevi, Osler kesirli türevi, k-kesirli Hilfer türevi, Weyl kesirli türevi, Liouville kesirli türevi, Riemann-Liouville kesirli türevi, Caputo kesirli türevi, Grünwald-Letnikov kesirli türevi, modifiye Riemann-Liouville (Jumaire) kesirli türevidir (Olivera ve Machado, 2014; Coimbra, 2003; Yang, 2012; Dorrego ve Cerutti, 2013).

### 3.4.1 Riemann-Liouville kesirli türevi

Riemann-Liouville kesirli türevi, kesirli türev ve integral teorisinin gelişmesinde ve kesirli türev ve integral teorisinin matematikteki uygulamalarında önemli rol oynamıştır. Örneğin; yeni fonksiyon sınıflarının tanımlanmasında, seri açılımı sıkça kullanılmıştır. Riemann-Liouville kesirli türevinde sabitin türevi sıfırdan farklıdır.

$f$ zaman değişkenli fonksiyonu, $[a,t]$ aralığında sürekli ve integrallenilebilir olsun. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $n-1 \leq \alpha < n$ ve $t > a$ için $\alpha$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \tag{3.1} $$

ile tanımlanır ve burada integralin yakınsak olması için $\alpha > 0$ olması gerekir. (3.1) ifadesinden anlaşılacağı gibi sabitin türevi sıfırdan farklıdır. Çok değişkenli fonksiyonlar için ise; $x, t$ bağımsız değişkenler, $u$ bağımlı değişken olmak üzere Riemann-Liouville kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır (Sahadevan ve Bakkyaraj, 2012);
$\alpha = n \in \mathbb{N}$ ise;

$$ \frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial^{n} u(x,t)}{\partial t^{n}} \tag{3.2} $$

$n-1 < \alpha < n,\ (n \in \mathbb{N})$ ise;

$$ \frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} u(x,\tau)\, d\tau. \tag{3.3} $$

Riemann-Liouville kesirli türevi aşağıdaki özelliklere sahiptir.
**1.** $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $n-1 \leq \alpha < n$ ve $t > a$ için;

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left( {}_aD_t^{-(n-\alpha)} f(t) \right) \tag{3.4} $$

dir. Yani bir fonksiyonun $(n-a)$. integrali alınır ve bulunan ifadenin $n$. türevi alınırsa ilk verilen fonksiyonun $\alpha$. türevi alınmış gibi olur. ${}_aD_t^{-(n-\alpha)} f(t)$ ifadesi $(n-a)$. integrali göstermektedir. Özel olarak (3.4) ifadesinde $\alpha = n-1$ alınırsa;

$$ {}_aD_t^{n-1} f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{-(n-(n-1))} f(t)\right) = \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{-1} f(t)\right) $$

olur. Ayrıca (3.4) ifadesinde $\alpha = n$ alınırsa;

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{0} f(t)\right) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} $$

olur.

**2.** $a$ ve $b$ sabit sayılar olmak üzere;

$$ {}_aD_t^{\alpha}\left\{af(t) + bg(t)\right\} = a_aD_t^{\alpha} f(t) + b_aD_t^{\alpha} g(t) $$

dir, yani; Riemann-Liouville kesirli türevi lineerdir.

**3.** $m = 0, 1, 2, \ldots$ ve $s = 0, 1, 2, \ldots, m$ iken $f^{(s)}(0) = 0$ ve $n-1 \leq \alpha < n$ olması durumunda;

$$ {}_aD_t^{m}\left({}_aD_t^{\alpha} f(t)\right) =_a D_t^{\alpha}\left({}_aD_t^{m} f(t)\right) =_a D_t^{\alpha+m} f(t) $$

dir yani özel durumlarda türev operatörü yer değiştirebilir.

**4.** $n$ tamsayı ve $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ iken $f^{(k)}(a) = 0$ olması durumunda;

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{\alpha} f(t)\right) =_a D_t^{\alpha}\frac{d^n f(t)}{dt^n} =_a D_t^{\alpha+n} f(t) $$

dir.

**5.** $\alpha > 0$ olması durumunda;

$$ {}_aD_t^{\alpha}\left({}_aD_t^{-\alpha} f(t)\right) = f(t) $$

olur. $m-1 \leq \alpha < m$ olması durumunda;

$$ {}_aD_t^{\alpha}\left({}_aD_t^{-\alpha} f(t)\right) = f(t) - \sum_{k=1}^{m}\left[{}_aD_t^{\alpha-k} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} $$

olur. $0<\alpha<1$ olması durumunda;

$$ {}_aD_t^{\alpha}\left({}_aD_t^{-\alpha}f(t)\right)=f(t)-\left[{}_aD_t^{\alpha-1}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} $$

olur (Podlubny, 1999).

### 3.4.2 Caputo kesirli türevi

Kesir mertebeli türevlerin özellikle mekanik ve viskoelastisite gibi alanlarda materyallerin özelliklerinin tanımlanmasında kullanılmaya başlanmasıyla, diferensiyel denklemlerin başlangıç koşullarının kesir mertebeli türevlerle modellenmesine ihtiyaç duyulmuştur. Başlangıç değer problemleri Riemann-Liouville kesirli türevi ile başarıyla çözülebilir fakat bu çözümler pratikte kullanışlı değildir. Çünkü fiziksel yorumları mevcut değildir. Bu tür gerekliliklerden dolayı M. Caputo yeni bir kesirli türev şekli geliştirmiştir. Caputo kesirli türevi, Riemann-Liouville kesirli türevinde bazı değişiklikler yapılarak geliştirilmiş bir yöntemdir.

$n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere $n-1\leq\alpha<n$ olacak şekilde $\alpha$ herhangi bir pozitif tamsayı ve $f$ fonksiyonu $n$ defa sürekli diferensiyellenebilir olsun. $f$ fonksiyonu için $\alpha$. mertebeden Caputo kesirli türevi

$$ {}_a^CD_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)\,d\tau \tag{3.5} $$

ile tanımlanır. (3.5) ifadesinden anlaşılacağı gibi; Caputo kesirli türevinde sabitin türevi Riemann-Liouville kesirli türevinin aksine sıfırdır.

Caputo kesirli türevi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

**1.** $a$ ve $b$ sabit sayılar olmak üzere;

$$ {}_a^CD_t^{\alpha}\{af(t)+bg(t)\}=a\,{}_a^CD_t^{\alpha}f(t)+b\,{}_a^CD_t^{\alpha}g(t) $$

olduğundan Caputo kesirli türevi lineerdir.

**2.** $m = 0, 1, 2, \ldots$ ve $n - 1 \leq \alpha < n$ olmak üzere;

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\left({}_{a}^{C}D_{t}^{m}f\left(t\right)\right) = {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha+m}f\left(t\right) $$

dir.

**3.** $m = 0, 1, 2, \ldots$ ve $s = n, n+1, n+2, \ldots, m$ iken $f^{(s)}\left(0\right) = 0$ ve $n - 1 \leq \alpha < n$ olmak üzere;

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\left({}_{a}^{C}D_{t}^{m}f\left(t\right)\right) = {}_{a}^{C}D_{t}^{m}\left({}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f\left(t\right)\right) = {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha+m}f\left(t\right) $$

yazılabilir (Kilbas vd., 2006).

### 3.4.3 Modifiye Riemann-Liouville kesirli türevi

Bilindiği gibi Riemann-Liouville kesirli türevinde sabitin türevinin sıfıra eşit olmaması farklı kesirli türev yaklaşımlarının gelişmesine sebep olmuştur. Bu duruma karşılık yeni bir türev olarak Caputo kesirli türevi ortaya çıkmıştır fakat Caputo kesirli türevinde birinci türevi hesaplayabilmek için ikinci türeve ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yüzden Jumaire, Taylor serileri yardımıyla Riemann-Liouville kesirli türevini farklı hale getirerek modifiye Riemann-Liouville kesirli türevini ortaya çıkmıştır. Bu türev tanımı Jumaire'nin Riemann-Liouville kesirli türevi olarakta adlandırılmaktadır (Jumarie, 2009). $t$ bağımsız değişken, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\alpha$ pozitif olmak üzere $\alpha$. mertebeden modifiye Riemann-Liouville kesirli türevi;

$$ \begin{aligned} D_{t}^{\alpha}f\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{-\alpha}\left(f\left(\tau\right)-f\left(0\right)\right)d\tau,\ 0 < \alpha < 1, \\ D_{t}^{\alpha}f\left(t\right) &= \left(f^{(n)}\left(t\right)\right)^{(\alpha-n)},\ n \leq \alpha < n+1,\ n \geq 1 \end{aligned} \tag{3.6} $$

şeklinde tanımlanır. Bu tanım kesirli türevi zorlaştıran durumları ortadan kaldırmaktadır (Jumarie, 2006).

Modifiye Riemann-Liouville kesirli türevi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

**1.** $a$ ve $b$ sabit sayılar olmak üzere;

$$ D_{t}^{\alpha}\left\{af\left(t\right)+bg\left(t\right)\right\} = aD_{t}^{\alpha}f\left(t\right)+bD_{t}^{\alpha}g\left(t\right) $$

olduğundan modifiye Riemann-Liouville kesirli türevi lineerdir.

**2.** $c$ sabit olmak üzere;

$$D_t^{\alpha} c = 0.$$

**3.** $c$ sabit olmak üzere;

$$D_t^{\alpha} \left( cf\left(t\right)\right) = c \left( D_t^{\alpha} f(t)\right).$$

**4.** $0 < \beta < 1$ ve $f\left(t\right) = t^{\beta}$ şeklindeki $\alpha$. mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere;

$$D_t^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma\left(1+\beta\right)}{\Gamma\left(1+\beta-\alpha\right)} t^{\beta-\alpha}, \ 0 < \beta.$$

**5.** $0 < \alpha$ olmak üzere;

$$df\left(x\right) = \frac{D_x^{\alpha} f\left(x\right)\left(dx\right)^{\alpha}}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}.$$

**6.** $u\left(t\right), v\left(t\right)$ ve $u\left(t\right)v\left(t\right),$ $\alpha$. mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere;

$$D_t^{\alpha}(uv) = (D_t^{\alpha} u)v + u(D_t^{\alpha} v).$$

**7.** $0 < \alpha < 1$ ve $\frac{df}{du}$ var olduğunda;

$$D_t^{\alpha} f\left(u(t)\right) = \frac{df}{du} D_t^{\alpha} u(t).$$

**8.**

$$\int \left(dx\right)^{\beta} = x^{\beta}$$

**9.** $0 < \alpha < 1$ ve $f(t)$ fonksiyonu $t_o$ noktasında süreksiz olmak üzere;

$$\Gamma(1+\alpha) df(t_0) = d^{\alpha} f\left(t_0\right)$$

dır (Gaur ve Singh, 2014; Jumaire, 2015).

# 4. LİE NOKTA SİMETRİ ÜRETEÇLERİ

Dönüşüm grupları ile ilgili ilk çalışmalar 19. yüzyılda Sophus Lie tarafından başlatılmıştır. Lie, adi diferensiyel denklemlerin çözüm tekniklerinin belirlenmesinde dönüşüm gruplarını kullanmıştır ve diferensiyel denklemler için daha önce verilmiş olan özel çözüm yöntemlerinin, diferensiyel denklemin sürekli bir simetri grubu altındaki değişmesine dayalı genel integrasyon yöntemlerinin özel durumları olduğunu göstermiştir. Lie grupları olarak bilinen dönüşüm grupları fizik, mühendislik ve diğer matematiğe dayalı tüm bilimler üzerinde önemli bir etki yaratmıştır.

Lie, adi diferensiyel denklemin bir parametreli dönüşüm grubu altında değişmez kalması halinde diferensiyel denklemin mertebesinin bir derece düşürülebileceğini göstermiştir. Mertebesi bir derece azaltılmış denklemin çözümlerinden orjinal denklemin çözümlerine geçmek mümkün olmaktadır. Diferensiyel denklemin çok parametreli simetri gruplarına sahip olması mertebenin daha çok azaltılmasına olanak tanınması anlamına gelmekle birlikte, diferensiyel denklemin sahip olduğu dönüşüm grubu çözümlenebilen grup şartlarına sahip olmadığı müddetçe mertebesi düşürülmüş denklemin çözümlerinden orjinal denklemin çözümlerine geçiş mümkün olmayabilir.

Yirminci yüzyılda diferensiyel denklemlerde Lie gruplarının uygulamaları matematikçilerin ilgisini çekmiştir. Fiziksel problemlerle ilgilenmiş ve çalışmalar yapmış bazı matematikçiler Ibragimov, Bluman ve Olver dir (Yaşar, 2009). Bu bölümde tamsayı ve kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemler için Lie nokta simetri üreteçlerinin bulunmasında gerekli temel bilgileri vereceğiz.

## 4.1. Tamsayı Mertebeli Kısmi Diferensiyel Denklemler İçin Lie Nokta Simetrileri

### 4.1.1 Grup

$G$, boş olmayan herhangi bir küme ve $G$ nin elemanları üzerinde $\phi$ ikili işlemi tanımlansın. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa $G$ ye gruptur denir.

1) Kapalılık Özelliği;

$G$ nin herhangi $a$ ve $b$ elemanları için $\phi(a,b)$ $G$ nin elemanıdır.

2) Birleşme özelliği;

$G$ nin herhangi $a, b$ ve $c$ elemanları için

$$\phi(a, \phi(b,c)) = \phi(\phi(a,b), c).$$

3) Birim eleman;

$G$ nin herhangi $a$ elemanı için tek bir $e$ birim elemanı vardır. Yani;

$$\phi(a,e) = \phi(e,a) = a.$$

4) Ters eleman;

$G$ nin herhangi $a$ elemanı için tek bir $a^{-1}$ ters elemanı vardır. Yani;

$$\phi\left(a, a^{-1}\right) = \phi\left(a^{-1}, a\right) = e.$$

Eğer $G$ deki her $a, b$ elemanları için

$$\phi(a,b) = \phi(b,a)$$

sağlanıyorsa $G$ ye **değişmeli (abelyan) grup** denir.

$G$ nin herhangi bir alt kümesi aynı kurallardaki $\phi$ işlemi ile grup oluyorsa bu alt kümeye $G$ nin bir **alt grubu** denir (Bluman ve Kumei, 1989).

### 4.1.2 Dönüşüm grupları

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde olsun. $D$ bölgesindeki herbir $x$ için dönüşüm grupları

$$x^* = X(x;\varepsilon)$$

şeklinde tanımlansın. $\varepsilon$ parametresi $S \subset \mathbb{R}$ bölgesinde olmak üzere $\phi(\varepsilon,\delta)$ dönüşümü, $S$ bölgesindeki $\varepsilon$ ve $\delta$ parametreleri ile tanımlı olsun. Bu durumda $\phi$ dönüşümü $D$

bölgesinde aşağıdaki şartları sağlıyorsa **dönüşüm grubudur** denir.

1) $S$ bölgesindeki herbir $\varepsilon$ parametresi için dönüşümler $D$ bölgesinde bire-bir dir. Özellikle $x^*$, $D$ bölgesindedir.

2) $S$ bölgesi $\phi$ dönüşümünün kuralları ile $G$ grup formunu alır.

3) Eğer $\varepsilon = e$ ise $x^* = x$ tir. Yani

$$X\left(x;\varepsilon\right) = x$$

dir.

4) Eğer $x^* = X\left(x;\varepsilon\right), x^{**} = X\left(x^*;\delta\right)$ ise

$$x^{**} = X\left(x;\phi\left(\varepsilon,\delta\right)\right)$$

dir (Bluman ve Kumei, 1989).

### 4.1.3 Bir parametreli Lie grup dönüşümleri

Yukarıdaki dönüşüm gruplarında verilen aksiyomlarla beraber aşağıdaki aksiyomlarda sağlanırsa $\phi$ dönüşüme **bir parametreli Lie grup dönüşümü** denir.

5) $\varepsilon$ sürekli bir parametre yani; $S$ bölgesi $\mathbb{R}$ de bir aralık olsun. Bu durumda $\varepsilon = 0$, $e$ etkisiz elemanına karşılık gelir.

6) $X$; $x$ e göre $D$ bölgesinde her mertebeden sürekli türevlere sahip ve $S$ bölgesinde $\varepsilon$ un analitik fonksiyonudur.

7) $\varepsilon \in S$ ve $\delta \in S$ olmak üzere $\phi\left(\varepsilon,\delta\right)$, $\delta$ ve $\varepsilon$ un analitik fonksiyonudur (Bluman ve Anco, 2002).

### 4.1.4 Sonsuz küçük dönüşümler

$$x^* = X\left(x;\varepsilon\right) \tag{4.1}$$

$\varepsilon$ parametreli Lie grup dönüşümünü $\varepsilon = 0$ birimi ve $\phi$ ikili işleminin kuralları ile düşünelim. (4.1) denklemini $\varepsilon = 0$ civarında seriye açarsak;

$$
\begin{aligned}
x^* &= x + \varepsilon \left( \frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \underset{\varepsilon=0}{|} \right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \underset{\varepsilon=0}{|} \right) + ... \\
&= x + \varepsilon \left( \frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \underset{\varepsilon=0}{|} \right) + o\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

elde ederiz.

$$
\xi(x) = \frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \underset{\varepsilon=0}{|} \tag{4.3}
$$

olsun.

$x + \varepsilon\xi(x)$ dönüşümüne (4.1) ile verilen Lie grup dönüşümünün **sonsuz küçük dönüşümü** denir. $\xi(x)$ 'e de (4.1) denkleminin **sonsuz küçüğü (infinitesimali)** denir (Bluman vd., 2010).

**Lie Birinci Temel Teoremi**

**Yardımcı teorem:**

$$
x^* = X(x;\varepsilon)
$$

*bir parametreli Lie grup dönüşümü*

$$
X(x;\varepsilon + \Delta\varepsilon) = X\left(X(x;\varepsilon);\phi\left(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \varepsilon\Delta\right)\right) \tag{4.4}
$$

*eşitliğini sağlar.*

**Teorem:**

$$
\tau = 0 \quad iken \quad x^* = x \tag{4.5}
$$

*ile*

$$
\frac{dx^*}{d\tau} = \xi(x^*) \tag{4.6}
$$

*şeklindeki birinci mertebeden adi diferensiyel denklem sistemleri için başlangıç değer probleminin çözümü;*

$$
x^* = X(x;\varepsilon)
$$

*Lie grup dönüşümlerine eşit olacak şekilde $\tau(\varepsilon)$ parametrizasyonu ile vardır. Burada*

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \Gamma\left(\varepsilon'\right) d\varepsilon' \tag{4.7}$$

*şeklindedir ve*

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\partial \phi(a,b)}{\partial b} \Big|_{(a,b)=\left(\varepsilon^{-1},\varepsilon\right)} \tag{4.8}$$

*ve*

$$\Gamma(0) = 1 \tag{4.9}$$

*dir. Ayrıca $\varepsilon^{-1}$, $\varepsilon$ un ters elemanını gösterir (Bluman ve Anco, 2002).*

### 4.1.5 Sonsuz küçük üreteç

(4.1) ile verilen bir parametreli Lie grup dönüşümünün sonsuz küçük üreteci

$$X = X(x) = \xi(x)\nabla = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4.10}$$

operatörü ile gösterilir. Buradaki $\nabla$ gradient operatörüdür ve

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \tag{4.11}$$

şeklinde gösterilir (Ibragimov, 1993).

### 4.1.6 Değişmez fonksiyon

$F(x)$ sürekli ve her mertebeden türevlenebilir fonksiyon olmak üzere (4.1) ile verilen Lie grup dönüşümünün değişmez (invaryant) fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart herhangi (4.1) ile verilen grup dönüşümü için

$$F(x^*) = F(x)$$

olmasıdır (Olver, 1993).

### 4.1.7 Bir parametreli Lie grup nokta dönüşümleri

$n$ bağımsız değişkeni $x$ ile, $m$ bağımlı değişkeni $u$ ile gösterelim. Bu durumda;

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, ..., x_n) \\ u &= (u^1, u^2, ..., u^m) \end{aligned}$$

şeklindeki $n+m$ değişkenli uzay üzerinde $i = 1, 2, \ldots, n$ ve $\mu = 1, 2, \ldots, m$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} x_i^* &= X_i (x, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon \xi_i (x, u) + o (\varepsilon^2) \\ (u^\mu)^* &= U^\mu (x, u; \varepsilon) = u^\mu + \varepsilon \eta^\mu (x, u) + o (\varepsilon^2) \end{aligned}$$

formundaki grup dönüşümlerine bir parametreli **Lie grup nokta dönüşümleri** denir (Nadjafikhah ve Shirvani-Sh, 2012).

### 4.1.8 Uzanım (prolangasyon) formülleri

**Bir bağımlı ve $n$ bağımsız değişken için uzanım formülleri**

$u$ bağımlı değişken, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bağımsız değişkenler ve $u = u(x)$ olsun.

$$x_i^* = X_i (x, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon \xi_i (x, u) + o \left(\varepsilon^2\right) \tag{4.12}$$

$$u^* = U (x, u; \varepsilon) = u + \varepsilon \eta (x, u) + o \left(\varepsilon^2\right) \tag{4.13}$$

bir parametreli Lie grup dönüşümleri verilsin. $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere $(x, u)$ uzayında sonsuz küçük üreteci

$$X = \xi^i (x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta (x, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

şeklinde olur.

(4.12) ve (4.13) için $k$. uzanım

$$x_i^* = X_i (x, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon \xi_i (x, u) + o \left(\varepsilon^2\right)$$

$$u^* = U (x, u; \varepsilon) = u + \varepsilon \eta (x, u) + o \left(\varepsilon^2\right)$$

$$u_i^* = U_i\left(x, u, \partial u; \varepsilon\right) = u_i + \varepsilon\eta_i^{(1)}\left(x, u, \partial u\right) + o\left(\varepsilon^2\right)$$

..............................................

$$\begin{aligned} u^*_{i_1 i_2 \ldots i_k} &= U_{i_1 i_2 \ldots i_k}\left(x, u, \partial u, ..., \partial^k u; \varepsilon\right) \\ &= u_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \varepsilon\eta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k}\left(x, u, \partial u, ..., \partial^k u\right) + o\left(\varepsilon^2\right) \end{aligned}$$

dır. Burada $i = 1, 2, ..., n$ ve $l = 1, 2, ..., k$ için $i_l = 1, 2, ..., n$ ayrıca $k \geq 1$ dir. $\partial^k u$, $u$ nun $x$ e göre bütün $k$. mertebeden kısmi türev bileşenlerini gösterir. $k$. uzanımın sonsuz küçükleri

$$\xi\left(x, u\right), \eta\left(x, u\right), \eta^{(1)}\left(x, u, \partial u\right), ..., \eta^{(k)}\left(x, u, \partial u, ..., \partial^k u\right)$$

olur ve sonsuz küçük üreteci de

$$X^{(k)} = \xi^i\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)}\frac{\partial}{u_i} + ... + \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k}\frac{\partial}{u_{i_1 i_2 \ldots i_k}},\ k \geq 1$$

şeklinde olur.

$k \geq 2$ için uzanımın $\eta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ şeklindeki sonsuz küçükleri

$$\begin{aligned} \eta_i^{(1)} &= D_i\eta - \left(D_i\xi_j\right)u_j, i = 1, 2, ..., n \\ \eta^{(k)}_{i_1 i_2 \ldots i_k} &= D_{i_k}\eta^{(k-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} - \left(D_{i_k}\xi_j\right)u_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j} \end{aligned} \tag{4.14}$$

$l = 1, 2, ..., k$ için $i_l = 1, 2, ..., n$ dir.

Buradaki $D_i$ ifadesi total türev operatörü olarak adlandırılır ve

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\mu\frac{\partial}{\partial u^\mu} + u_{ij}^\mu\frac{\partial}{\partial u_j^\mu} + ... + u^\mu_{i i_1 i_2 \ldots i_n}\frac{\partial}{\partial u^\mu_{i_1 i_2 \ldots i_n}} + ... \tag{4.15}$$

şeklinde gösterilir.

$x_1$ ve $x_2$ bağımsız değişkenler ve $u$ bağımlı değişken olmak üzere $\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \eta_{11}^{(2)}$, $\eta_{12}^{(2)}, \eta_{22}^{(2)}$ aşağıdaki gibidir.

$$\eta_1^{(1)} = \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\right] u_1 - \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} u_2 - \frac{\partial \xi^1}{\partial u} (u_1)^2 - \frac{\partial \xi^2}{\partial u} u_1 u_2 \tag{4.16}$$

$$\eta_2^{(1)} = \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2}\right] u_2 - \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} u_1 - \frac{\partial \xi^2}{\partial u} (u_2)^2 - \frac{\partial \xi^1}{\partial u} u_1 u_2 \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} \eta_{11}^{(2)} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \left[2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial x_1^2}\right] u_1 - \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x_1^2} u_2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - 2\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\right] u_{11} - 2\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} u_{12} - 2\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x_1 \partial u} u_1 u_2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial x_1 \partial u}\right] (u_1)^2 - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial u^2} (u_1)^3 \\ &\quad -3\frac{\partial \xi^1}{\partial u} u_1 u_{11} - \frac{\partial \xi^2}{\partial u} u_2 u_{11} - 2\frac{\partial \xi^2}{\partial u} u_1 u_{12} - \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial u^2} (u_1)^2 u_2 \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} \eta_{12}^{(2)} &= \eta_{21}^{(2)} \\ &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right] u_2 + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial x_1 \partial x_2}\right] u_1 \\ &\quad -\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} u_{22} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2}\right] u_{12} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} u - \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x_1 \partial u} (u_2)^2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x_2 \partial u}\right] u_1 u_2 - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial x_2 \partial u} (u_1)^2 \\ &\quad -\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial u^2} u_1 (u_2)^2 - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial u^2} (u_1)^2 u_2 - 2\frac{\partial \xi^2}{\partial u} u_2 u_{12} \\ &\quad -2\frac{\partial \xi^1}{\partial u} u_1 u_{12} - \frac{\partial \xi^1}{\partial u} u_2 u_{11} - \frac{\partial \xi^2}{\partial u} u_1 u_{22} \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{22}^{(2)} &= \frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2} + \left[2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2\partial u} - \frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_2^2}\right]u_2 - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_2^2}u_1 - 2\frac{\partial\xi^1}{\partial x_2}u_{12} \\
&+ \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - 2\frac{\partial\xi^2}{\partial x_2}\right]u_{22} + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_2\partial u}\right](u_2)^2 \\
&-2\frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_2\partial u}u_1u_2 - \frac{\partial^2\xi^2}{\partial u^2}(u_2)^3 - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial u^2}u_1(u_2)^2 \\
&-3\frac{\partial\xi^2}{\partial u}u_2u_{22} - \frac{\partial\xi^1}{\partial u}u_1u_{22} - 2\frac{\partial\xi^1}{\partial u}u_2u_{12}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

burada

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \\
u_{11} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}
\end{aligned}
$$

şeklindedir (Bluman ve Kumei, 1989).

**$m$ bağımlı ve $n$ bağımsız değişken için uzanım formülleri**

$u = (u^1, u^2, ..., u^m)$ bağımlı değişkenler, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bağımsız değişkenler olmak üzere $u = u(x)$ ve $m \geq 2, n \geq 2$ olsun.

$$x_i^* = X_i(x, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon\xi_i(x, u) + o(\varepsilon^2) \tag{4.21}$$

$$(u^\mu)^* = U^\mu(x, u; \varepsilon) = u^\mu + \varepsilon\eta^\mu(x, u) + o(\varepsilon^2) \tag{4.22}$$

bir parametreli Lie grup dönüşümleri verilsin.

(4.21) ve (4.22) nin $k$. uzanımı

$$x_i^* = X_i(x, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon\xi_i(x, u) + o(\varepsilon^2)$$

$$(u^\mu)^* = U^\mu(x, u; \varepsilon) = u^\mu + \varepsilon\eta^\mu(x, u) + o(\varepsilon^2)$$

$$(u_i^\mu)^* = U_i^\mu(x, u, \partial u; \varepsilon) = u_i^\mu + \varepsilon\eta_i^{(1)\mu}(x, u, \partial u) + o(\varepsilon^2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\left(u^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k}\right)^* &= U^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k}\left(x,u,\partial u,...,\partial^k u;\varepsilon\right) \\ &= u^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \varepsilon \eta^{(k)\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k}\left(x,u,\partial u,...,\partial u^k\right) + o\left(\varepsilon^2\right)\end{aligned}$$

dır. Burada $\mu = 1,2,...,m$, $i = 1,2,...,n$ ve $l = 1,2,...,k$ için $i_l = 1,2,...,n$ ayrıca $k \geq 2$ dir. $\partial^k u$, $u$ nun $x$ e göre bütün $k$. mertebeden kısmi türev bileşenlerini gösterir. $k$. uzanımın sonsuz küçük üreteci

$$X^{(k)} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^{\mu} \frac{\partial}{\partial u^{\mu}} + \eta^{(1)\mu}_i \frac{\partial}{u^{\mu}_i} + ... + \eta^{(k)\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \frac{\partial}{u^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k}},\ k \geq 1$$

şeklinde olur.

$k \geq 2$ için uzanımın $\eta^{(k)\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ile ifade edilen sonsuz küçükleri

$$\begin{aligned}\eta^{(1)\mu}_i &= D_i \eta^{\mu} - \left(D_i \xi_j\right) u^{\mu}_j \\ \eta^{(k)\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_k} &= D_{i_k} \eta^{(k-1)\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} - \left(D_{i_k} \xi_j\right) u^{\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j}\end{aligned}$$

şeklindedir. $l = 1,2,...,k$ için $i_l = 1,2,...,n$ dir.

$k$. mertebeden diferensiyel denkleme sonsuz küçük üreteci uygulayabilmek için $k$. uzanıma ihtiyaç vardır (Yaşar ve Özer, 2011).

### 4.1.9 Lie cebiri

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $\varepsilon$ parametresi $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r)$ şeklinde olmak üzere;

$$x^* = X\left(x;\varepsilon\right)$$

$r$ parametreli Lie grup dönüşümünü

$$\xi^{\alpha j}\left(x\right) = \frac{\partial x^*_j}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial X_j\left(x;\varepsilon\right)}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=0}$$
$$\left(\alpha = 1,...,r,\ j = 1,...,n\right)$$

olduğunda

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi^{\alpha j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \ \alpha = 1, ..., r$$

sonsuz küçük üreteci ile düşünelim. Bu durumda $X_\gamma$ ve $X_\beta$ nın komütatörü $[X_\gamma, X_\beta]$ ile ifade edilir ve

$$\begin{aligned}
[X_\gamma, X_\beta] &= X_\gamma X_\beta - X_\beta X_\gamma \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[ \left( \xi^{\gamma i}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left( \xi^{\beta j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \left( \xi^{\beta i}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left( \xi^{\gamma j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \eta^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\eta^j(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[ \xi^{\gamma i}(x) \frac{\partial \xi^{\beta j}(x)}{\partial x_i} - \xi^{\beta i}(x) \frac{\partial \xi^{\gamma j}(x)}{\partial x_i} \right]$$

dir.

$\mathcal{F}$ bir cisim ve $\mathcal{L}$ bu cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $\mathcal{L}$ vektör uzayı komütatör işlemine göre kapalı ise $\mathcal{L}$ ye $r$ boyutlu **Lie cebiri** denir. $\mathcal{L}^r$ ile gösterilir. Lie cebiri aşağıdaki özellikleri sağlar.

$X_\alpha, X_\beta, X_\gamma \in \mathcal{L}$ ve $a, b \in \mathcal{F}$ olmak üzere;

1) Anti simetri özelliği;

$$[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha].$$

2) Bi-lineerlik özelliği;

$$[X_\alpha, aX_\beta + bX_\gamma] = a[X_\alpha, X_\beta] + b[X_\alpha, X_\gamma]$$

ve

$$[aX_\beta + bX_\gamma, X_\alpha] = a[X_\beta, X_\alpha] + b[X_\gamma, X_\alpha].$$

3) Jakobi özdeşliği;

$$[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta, [X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = 0.$$

4) $\forall X_\alpha \in \mathcal{L}$ için;

$$[X_\alpha, X_\alpha] = 0$$

olur.

Eğer herhangi bir $X_\beta, X_\gamma \in \mathcal{L}^r$ için;

$$[X_\beta, X_\gamma] = 0$$

ise Lie cebirine **değişmeli (abelyan)** denir.

Özel olarak $\mathcal{L}$ vektör uzayı $\mathbb{R}$ cismi üzerinde Lie cebiri ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

$X_\alpha, X_\beta, X_\gamma \in \mathcal{L}^r, a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

**1**) $aX_\alpha + bX_\beta \in \mathcal{L}^r$

**2**) $X_\alpha + X_\beta = X_\beta + X_\alpha$

**3**) $X_\alpha + (X_\beta + X_\gamma) = (X_\alpha + X_\beta) + X_\gamma$

**4**) $[X_\alpha, X_\beta] \in \mathcal{L}^r$

**5**) $[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha]$

**6**) $[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta, [X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = 0$

**7**) $[aX_\alpha, bX_\beta, X_\gamma] = a[X_\alpha, X_\gamma] + b[X_\beta, X_\gamma]$

(Ahmad, 2005; Kiraz, 2007).

$n$. mertebeden bir diferensiyel denklemin bir Lie grubunu kabul etmesi, Lie grubunun sonsuz küçük üretecinin diferensiyel denkleme uygulanmasının diferensiyel denklemin tanımlandığı manifold üzerinde sonucun sıfır vermesi anlamına gelir. Bununla birlikte bir diferensiyel denklemin bir Lie grubunu kabul etmesi, Lie grubunun diferensiyel denklemin çözümlerini denklemin başka çözümlerine dönüştürmesi anlamını taşır. Eğer diferensiyel denklemin mertebesi birden büyükse sonsuz küçük üretecinin ilgili diferensiyel denkleme uygulanması sonucu sonsuz küçük üretecinin katsayıları cinsinden belirli bir kısmi diferensiyel denklem takımına ulaşılır. Bu denklem takımının çözümleri diferensiyel denklemin kabul ettiği Lie gruplarının tamamını verir. Eğer bir adi diferensiyel denklemin $r$ parametreli bir Lie grubu varsa diferensiyel denklem $(n-r)$. mertebeden bir diferensiyel denkleme indirgenebilir. Eşleşen $r$ parametreli Lie cebiri, çözümlenebilir Lie cebiri ise ve $(n-r)$. mertebeden diferensiyel denklemin integrali bulunuyorsa bu integralden esas diferensiyel denklemin çözümü $r$ kere ardışık kuadratür ile bulunur. Çözümlenebilen $n$ elemanlı bir Lie cebirinin $(n-1)$ elemanlı bir alt cebiri vardır ve bu alt cebirin elemanları ile Lie cebirinin elemanlarının çarpımı yine alt cebir içerisinde kalır. $(n-1)$ elemanlı Lie cebirinin aynı özelliği taşıyan $(n-2)$ elemanlı bir alt cebiri vardır. Böylece devam ederek 2 elemanlı bir alt cebire ulaşılabilir (Yaşar, 2009).

### 4.2. Kesir Mertebeli Kısmi Diferensiyel Denklemler İçin Lie Nokta Simetri Üreteçleri

Kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemlerin Lie nokta simetri üreteçlerinin bulunması tamsayı mertebeli kısmi diferensiyel denklemlerinin Lie nokta simetri üreteçlerinin bulunuşuna benzemektedir. Biz bu tez çalışmasında iki bağımsız değişkeni ve bir bağımlı değişkeni içeren zaman kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemlerin Lie nokta simetri üreteçlerinin bulunuşu ile ilgileneceğiz. Bunun için öncelikle iki bağımsız değişken $x,\ t$ ve bir bağımlı değişken içeren $u(x,t)$ şeklindeki zaman kesir mertebeli denklemin en genel halini $\alpha > 0$ olmak üzere;

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}} = F(x,t,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},\ldots) \tag{4.23}$$

şeklinde düşünelim. Burada $\dfrac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}}$ ifadesi $u_t^{\alpha}$ ve $D_t^{\alpha} u$ şekillerinde yazılabilir ve bu ifadeler $u(x,t)$ nin $t$ ye göre $\alpha$. mertebeden türevini göstermektedir.

### 4.2.1 Leibnitz kuralı

Tamsayı mertebeli türevler için Leibnitz kuralı;

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(u\left(t\right)v\left(t\right)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}\left(t\right)v^{(n-k)}\left(t\right)$$

şeklinde verilmektedir.

Kesir mertebeli türevler için Leibnitz kuralı;

$$D_t^{\alpha}\left(u\left(t\right)v\left(t\right)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}D_t^{\alpha-n}\left(u\left(t\right)\right)D_t^{n}\left(v\left(t\right)\right),\ \ \alpha>0 \tag{4.24}$$

ile verilir ve burada

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\left(-1\right)^{n-1}\alpha\Gamma\left(n-\alpha\right)}{\Gamma\left(1-\alpha\right)\Gamma\left(n+1\right)}$$

dir (Podlubny, 1999).

### 4.2.2 Uzanım (prolangasyon) formülleri

4.1.8 alt bölümünde özel olarak $x_i$ şeklindeki bağımsız değişkenler $x$ ve $t$, bağımlı değişken $u$ olarak seçilirse;

$$\begin{aligned} x^* &= x+\varepsilon\xi\left(x,t,u\right)+o\left(\varepsilon^2\right) \\ t^* &= t+\varepsilon\tau\left(x,t,u\right)+o\left(\varepsilon^2\right) \\ u^* &= u+\varepsilon\eta\left(x,t,u\right)+o\left(\varepsilon^2\right) \end{aligned} \tag{4.25}$$

formundaki grup dönüşümlerine bir parametreli **Lie grup nokta dönüşümleri** denir (Hu vd., 2014). O halde (4.23) denklemi için sonsuz küçük üreteç

$$X=\xi\left(x,t,u\right)\frac{\partial}{\partial x}+\tau\left(x,t,u\right)\frac{\partial}{\partial t}+\eta\left(x,t,u\right)\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.26}$$

şeklinde verilsin. Buradaki $\xi\left(x,t,u\right),\ \tau\left(x,t,u\right)$ ve $\eta\left(x,t,u\right);$ **sonsuz küçükler (infinitesimaller)** olarak adlandırılırlar, bunlar bağımlı ve bağımsız değişkenleri içeren fonksiyonlardır. Ayrıca; $t^*$, $x^*$, $u^*$ Lie grup nokta dönüşümleri biliniyorsa sonsuz küçükler

$$\xi = \frac{dx^*}{d\varepsilon} \underset{\varepsilon=0}{|}, \ \tau = \frac{dt^*}{d\varepsilon} \underset{\varepsilon=0}{|}, \ \eta = \frac{du^*}{d\varepsilon} \underset{\varepsilon=0}{|} \tag{4.27}$$

ile bulunabilirler (Huang ve Zhdanov, 2014). Lie grup nokta dönüşümleri bilinmiyorsa $k$. mertebeden verilen bir (4.23) denkleminin sonsuz küçük üretecini hesaplayabilmek için genel formdaki (4.26) üretecinin $k$. uzanımını hesaplamaya ihtiyacımız vardır.

(4.25) için uzanım

$$\begin{aligned}
t^* &= t + \varepsilon\tau(x,t,u) + o(\varepsilon^2), \\
x^* &= x + \varepsilon\xi(x,t,u) + o(\varepsilon^2), \\
u^* &= u + \varepsilon\eta(x,t,u) + o(\varepsilon^2), \\
(u^*)_t^\alpha &= u_t^\alpha + \varepsilon\eta^{\alpha,t} + o(\varepsilon^2), \\
(u^*)_x &= u_x + \varepsilon\eta^x + o(\varepsilon^2), \\
(u^*)_{xx} &= u_x + \varepsilon\eta^{xx} + o(\varepsilon^2) \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots
\end{aligned} \tag{4.28}$$

ile verilir. $\eta^{\alpha,t}$, $\eta^x$, $\eta^{xx}$ değerlerine **sonsuz küçüklerin uzanımları** denilmektedir (Wang ve Xu, 2013). Riemann –Liouville türev operatörünü koruyan (4.28) formundaki dönüşümü ele alalım. Riemann-Liouville kesirli türevinde integralin en alt limiti sabittir ve bu yüzden (4.28) dönüşümünün integrali değişmez bırakması gerekir. Değişmezlik koşulu gereği;

$$\tau(x,t,u) \underset{t=0}{|} = 0 \tag{4.29}$$

olması gerekir (Wang ve Xu, 2014).

Örneğin; 3. mertebeden (4.23) formundaki bir kesir mertebeli diferensiyel denklemin kabul ettiği (4.26) üretecinin 3.uzanımını

$$\begin{aligned}
X^{(\alpha,3)} &= \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \\
&\quad + \eta^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial u_t^\alpha} + \eta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Verilen (4.23) denkleminde tamsayı ve kesirli mertebeden türevler olduğu için Lie nokta simetri üreteçlerinin bulunmasında tamsayı mertebeli kısmi diferensiyel denklemlerin Lie nokta simetri üreteçlerinin bulunmasından farklı olan noktalar vardır. Şimdi bu farklı durumları ve ayrıntılarını vereceğiz.

### $t$ değişkeni için uzanım formülleri

Şimdi $\eta^{\alpha,t}$ uzanımını bulmaya çalışacağız. (4.29) ile Riemann-Liouville kesirli türevi ile ilişkili olan $\alpha$. uzanım $\eta^{a,t}$ aşağıdaki şekilde verilir;

$$\eta^{a,t} = D_t^{\alpha}(\eta) + \xi D_t^{\alpha}(u_x) - D_t^{\alpha}(\xi u_x) + D_t^{\alpha}(uD_t(\tau)) - D_t^{\alpha+1}(\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1}(u) \quad (4.30)$$

burada $D_t^{\alpha}$, $t$ ye göre total kesirli türev operatörünü ifade eder. (4.30) ifadesini daha açık bir şekilde elde etmek için (4.24) şeklindeki Leibnitz kuralını kullanarak aşağıdaki eşitlikleri elde edilir.

$$\xi D_t^{\alpha}(u_x) - D_t^{\alpha}(\xi u_x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{n}(\xi) D_t^{\alpha-n}(u_x), \quad (4.31)$$

ve

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha}(uD_t^{\alpha}(\tau)) - D_t^{\alpha+1}(\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1}(u) &= -\alpha D_t(\tau) D_t^{\alpha}(u) \\ &\quad -\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) D_t^{\alpha-n}(u). \end{aligned} \quad (4.32)$$

(4.31) and (4.32) değerlerini (4.30) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \eta^{a,t} &= D_t^{\alpha}(\eta) - \alpha D_t(\tau) D_t^{\alpha}(u) - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{n}(\xi) D_t^{\alpha-n}(u_x) \\ &\quad -\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) D_t^{\alpha-n}(u). \end{aligned} \quad (4.33)$$

elde edilir.

**Not:** *Bileşke fonksiyon şeklindeki fonksiyonlar için zincir kuralı;*

$$\frac{d^m f(g(t))}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\frac{1}{k!}\left[-g(t)\right]^r \frac{d^m}{dt^m}\left[g(t)^{k-r}\right]\frac{d^k f(g)}{dg^k}, \tag{4.34}$$

*ile ifade edilir.*

O halde $f(t)=1$ iken (4.24) ve (4.34) beraber kullanılırsa;

$$D_t^\alpha(\eta) = \partial_t^\alpha \eta + \eta_u \partial_t^\alpha u - u\partial_t^\alpha(\eta_u) + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\partial_t^n(\eta_u)\,\partial_t^{\alpha-n}u + \mu \tag{4.35}$$

bulunur ve

$$\mu = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=2}^{m}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{\alpha}{n}\binom{n}{m}\binom{k}{r}\frac{1}{k!}\frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}\left[-u\right]^r\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left[u^{k-r}\right]\frac{\partial^{n-m+k}\eta}{\partial t^{n-m}\partial u^k}$$

olur. Yukarıdaki ifadede $\frac{\partial^k \eta}{\partial u^k}$ türevleri olduğundan $\eta$; sonsuz küçüğü $u$ değişkenine göre lineer ise $k \geq 2$ için $\mu = 0$ olur. O halde;

$$\begin{aligned}\eta^{a,t} &= \partial_t^\alpha \eta + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha}{n}\partial_t^n \eta_u - \binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}(\tau)\right]\partial_t^{\alpha-n}u \\ &\quad -\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}D_t^n(\xi)\,\partial_t^{\alpha-n}(u_x) + (\eta_u - \alpha D_t(\tau))\,\partial_t^\alpha u - u\partial_t^\alpha(\eta_u)\end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilir (Jafari vd., 2015). Bulduğumuz $\eta^{a,t}$ ifadesi $\alpha$; Riemann-Liouville kesirli türevini ifade ettiği zaman geçerlidir.

**$x$ değişkeni için uzanım formülleri**

(4.23) formundaki denklemde $x$ bağımsız değişkenine göre kesir mertebeli türev yada türevler bulunmadığı için tamsayı mertebeli kısmi diferensiyel denklemler kısmında verilen $\eta^x$, $\eta^{xx}$, $\eta^{xxx}$ ifadelerini kullanırız. (4.14) formülü açılırsa;

$$\begin{aligned}\eta^x &= D_x(\eta) - u_x D_x(\xi) - u_t D_x(\tau), \\ \eta^{xx} &= D_x(\eta^x) - u_{xx} D_x(\xi) - u_{xt} D_x(\tau), \\ \eta^{xxx} &= D_x(\eta^{xx}) - u_{xxx} D_x(\xi) - u_{xxt} D_x(\tau), \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots\end{aligned} \tag{4.37}$$

elde edilir. (4.37) formülünü ileride kullanmak amacıyla daha da açarsak;

$$\eta^{x} = \eta_x + [\eta_u - \xi_x] u_x - \tau_x u_t - \xi_u (u_x)^2 - \tau_u u_x u_t, \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} \eta^{xx} = {} & \eta_{xx} + [2\eta_{xu} - \xi_{xx}] u_x - \tau_{xx} u_t + [\eta_{uu} - 2\xi_{xu}] (u_x)^2 \\ & -2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu} (u_x)^3 - \tau_{uu} (u_x)^2 u_t + (\eta_u - 2\xi_x) u_{xx} \\ & -2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx} u_t - 2\tau_u u_x u_{xt} \end{aligned} \tag{4.39}$$

ve

$$\begin{aligned} \eta^{xxx} = {} & \eta_{xxx} + (3\eta_{xxu} - \xi_{xxx}) u_x - \tau_{xxx} u_t + 3(\eta_{xuu} - \xi_{xxu}) u_x^2 \\ & -3\tau_{xxu} u_x u_t + (\eta_{uuu} - 3\xi_{xuu}) u_x^3 + 3(\eta_{xu} - \xi_{xx}) u_{xx} \\ & -3\tau_{xx} u_{xt} - 3\tau_{xuu} u_x^2 u_t + 3(\eta_{uu} - 3\xi_{xu}) u_x u_{xx} - 3\tau_{xu} u_t u_{xx} \\ & -6\tau_{xu} u_{xt} u_x - 3\tau_x u_{xxt} + (\eta_u - 3\xi_x) u_{xxx} - \xi_{xxx} u_x^4 - 6\xi_{uu} u_x^2 u_{xx} \\ & -3\tau_{uu} u_x^2 u_{xt} - \tau_{uuu} u_x^3 u_t - 3\xi_u u_{xx}^2 - 3\tau_u u_{xxt} u_x - 3\tau_u u_{xt} u_{xx} \\ & -3\tau_{uu} u_{xx} u_x u_t - 4\xi_u u_{xxx} u_x - \tau_u u_{xxx} u_t \end{aligned} \tag{4.40}$$

elde ederiz.

*k. mertebeden (4.23) denklemi için* $\Delta = \frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}} - F(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \ldots)$ *olmak üzere sonsuz küçük üreteç değişmezlik kriteri*

$$X^{(\alpha,k)} \Delta \underset{\Delta=0}{|} = 0 \tag{4.41}$$

*şeklinde yazılır (Wang ve Xu, 2015).*

**Örnek:** $\gamma,\ x > 0,\ x, t$ bağımsız değişkenler ve $u$ bağımlı değişken olmak üzere;

$$\partial_t^{\alpha} u(x,t) = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma x}{1 + \frac{1}{2}\gamma x} \frac{\partial u}{\partial x},\ 0 < \alpha < 1 \tag{4.42}$$

ile verilen denkleme zaman kesir mertebeli Kolmogorov diferensiyel denklemi adı verilir. Bu denklem için Lie simetri üreteçlerini bulunuz.

(4.42) denklemi (4.26) ile verilen üreteci kabul ederse, $X^{(\alpha,2)}$ uzanımı

$$X^{(\alpha,2)} = X + \eta^{x}\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial u_t^{\alpha}} \tag{4.43}$$

olur. $\frac{\gamma x}{1+\frac{1}{2}\gamma x} = f(x)$ olmak üzere $F = \partial_t^{\alpha} u(x,t) - x u_{xx} + f(x) u_x$ denirse $X^{(\alpha,2)}F$

$$\eta^{\alpha,t} - \left(u_{xx} - f'(x)\, u_x\right)\xi - f(x)\,\eta^{x} - x\eta^{xx} = 0 \tag{4.44}$$

elde edilir. (4.36), (4.38), (4.39) değerleri (4.44) denkleminde yerine yazılırsa ve $\partial_t^{\alpha} u(x,t) = x u_{xx} + \frac{\gamma x}{1+\frac{1}{2}\gamma x} u_x$ yazılırsa, daha sonra $u_x,\ u_{xx},\ u_t,\ u_{xt},\ldots$ ve $D_t^{\alpha-n}u,\ D_t^{\alpha-n}u_x$ türevlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki belirleyici denklem sistemine ulaşılır.

$$\begin{aligned}
&\xi_t = \xi_u = \tau_x = \tau_u = \eta_{uu} = 0,\\
&x\eta_u - \alpha x \tau_t - \xi - x\left(\eta_u - 2\xi_x\right) = 0,\\
&-\alpha f(x)\,\tau_t - f'(x)\,\xi + f(x)\,\xi_x - x\left(2\eta_{xu} - \xi_{xx}\right) = 0,\\
&\eta_t^{\alpha} - u\left(\eta_u\right)_t^{\alpha} - f(x)\,\eta_x - x\eta_{xx} = 0,\\
&\binom{\alpha}{n}\left(\eta_u\right)_t^{n} - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) = 0,\ n = 0,1,\ldots
\end{aligned} \tag{4.45}$$

(4.45) deklem sisteminin çözülmesiyle

$$\begin{aligned}
\xi &= a\alpha x,\\
\tau &= at + b,\\
\eta &= \left(\frac{2a\alpha}{2+\gamma x} + c\right) u + h(x,t)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

bulunur ve $a,\ b,\ c$ keyfi sabitlerdir.

O halde (4.42) dekleminin kabul ettiği üreteçler

$$X_1 = u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_2 = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2\alpha}{2+\gamma x}u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4.47}$$

$$X_h = h\left(x,t\right)\frac{\partial}{\partial u}$$

olarak bulunur (Quhadan ve Kinani, 2014).

# 5. KORUNUMLULUK KANUNLARININ BULUNMASI

Korunumluluk kanunları diferensiyel denklemler yada diferensiyel denklem sistemlerinin çözümünde önemli bir rol oynar. Kısmi diferensiyel denklemlerin korunumluluk kanunlarının her zaman fiziksel bir anlamı yoktur fakat kısmi diferensiyel denklemlerin integrallenebilmesi ile ilgili çalışmalarda önemli bir yere sahiptirler. Matematiksel anlamda korunumluluk kanunlarının simetri dönüşümlerinin varlığıyla yakından ilgili oldukları 1918 yılında Emmy Noether tarafından ortaya atılmıştır daha sonra diferensiyel denklemlerin korunumluluk kanunlarıyla ilgili çalışmalar günden güne artmıştır.

## 5.1. Tamsayı Mertebeli Kısmi Diferensiyel Denklemler İçin Korunumluluk Kanunları

### 5.1.1 Euler-Lagrange operatörü

$\mathcal{A}$ uzayında Euler-Lagrange operatörü

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u^{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{i_1 \dots i_s}} \\ & (\alpha = 1, \dots, m) \end{aligned} \tag{5.1}$$

olarak tanımlanır. Örneğin; $f$ fonksiyonunda en yüksek türevin mertebesi 2, $u$ bağımlı değişken ve $x, y, z$ bağımsız değişkenler olmak üzere Euler-Lagrange operatörü;

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u} &= \frac{\partial}{\partial u} + (-1)\left[D_x \frac{\partial}{\partial u_x} + D_y \frac{\partial}{\partial u_y} + D_z \frac{\partial}{\partial u_z}\right] \\ &+ (-1)^2 \left[D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + D_y^2 \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + D_z^2 \frac{\partial}{\partial u_{zz}}\right] \\ &+ (-1)^2 \left[D_x D_y \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + D_x D_z \frac{\partial}{\partial u_{xz}} + D_y D_z \frac{\partial}{\partial u_{yz}}\right] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $D_x,\ D_y,\ D_z,\ D_x^2\ , D_y^2\ , D_z^2\ , D_xD_y\ , D_xD_z\ , D_yD_z$ total türevi gösterir (Eriksson, 2008).

$\dfrac{\delta}{\delta u^{\alpha}}$ türevine **varyasyonel türev** denir ve

$$\frac{\delta}{\delta u^{\alpha}}=\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}+\sum_{s\geq 1}\left(-1\right)^{s}D_{i_1}\dots D_{i_s}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{i_1\dots i_s}},\left(\alpha=1,2,\dots,m\right) \tag{5.2}$$

olarak tanımlanır (Olver, 1993).

### 5.1.2 Euler-Lagrange denklemi

Lagrangian

$$L=L\left(x,u,u_1,\dots,u_k\right)\in\mathcal{A} \tag{5.3}$$

olmak üzere aşağıdaki diferensiyel denkleme **Euler-Lagrange denklemi** denir,

$$\frac{\delta L}{\delta u^{\alpha}}=0,\left(\alpha=1,...,m\right) \tag{5.4}$$

(Ibragimov, 1993).

**Teorem:** *Bir parametreli nokta dönüşüm grubu $G$;*

$$\begin{aligned}\overline{x}_i &= f^{i}\left(x,u,a\right)\\ \overline{u}^{\alpha} &= \varphi^{\alpha}\left(x,u,a\right)\end{aligned} \tag{5.5}$$

*şeklinde tanımlansın ve kabul ettiği sonsuz küçük üreteç;*

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi^{i}\left(x,u\right)\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{\alpha=1}^{m}\eta^{\alpha}\left(x,u\right)\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \tag{5.6}$$

*olsun. $G$ grubu altında herhangi bir $u\left(x\right)$ fonksiyonu $\overline{u}\left(\overline{x}\right)$ fonksiyonuna ve $\Omega\subset\mathbb{R}^{n}$ alanı $\overline{\Omega}\subset\mathbb{R}^{n}$ alanına dönüşür.*

*Eğer her bir $\Omega$ alanı ve bütün $u\left(x\right)$ düzgün fonksiyonları için*

$$\int_{\Omega}L\left(x,u\left(x\right),u_{(1)}\left(x\right),\dots,u_{(k)}\left(x\right)\right)dx = \int_{\overline{\Omega}}L\left(\overline{x},\overline{u}\left(\overline{x}\right),\overline{u}_{(1)}\left(\overline{x}\right),\dots,\overline{u}_{(k)}\left(\overline{x}\right)\right)d\overline{x} \tag{5.7}$$

*türünde integral varsa* (5.5) *dönüşümlerinin G grubunun altında*

$$\int_{\Omega} L dx \quad , \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

*integralinin değişmez olduğu söylenir.*

**Teorem:** (5.6) *sonsuz küçük üreteci ile verilen G nokta dönüşümlerinin grubu altında*

$$\int_{\Omega} L dx \quad , \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

*integralinin değişmez olması için gerek ve yeter şart*

$$X^{(k)}(L) + LD_i\left(\xi^i\right) = 0 \tag{5.8}$$

*olmasıdır (Akbulut vd., 2016).*

### 5.1.3 Eşlenik (Adjoint) denklemler

$L$, herhangi bir mertebeden lineer diferensiyel operatör olsun. $L$ nin $L^*$ olan eşlenik operatörü $\forall u, w$ için

$$wL[u] - uL^*[w] = D_i\left(P^i\right)$$

olarak verilir. Burada $P = (p^1, ..., p^n)$ şeklinde vektör alanıdır. $L^*[w] = 0$ ifadesine $L[u] = 0$ ın **eşlenik denklemi** denir.

Genel olarak ikinci mertebeden $L$ oparatörü;

$$L = a^{ij}(x) D_i D_j + b^i(x) D_i + c(x)$$

şeklindedir. Burada $i, j = 1, 2, ..., n$ ve katsayılar simetriktir yani $a^{ij} = a^{ji}$.

**Teorem:** *$L$ nin $L^*$ olan eşlenik operatörü*

$$L^*[w] = D_i D_j\left(a^{ij}w\right) - D_i\left(b^i w\right) + cw$$

*formundadır (Yakut, 2012).*

**Öz eşlenik (self-adjoint) denklemler**

Herhangi bir $u$ fonksiyonu için

$$L[u] = L^*[u]$$

oluyorsa $L$ operatörüne **öz eşleniktir** denir.

**Teorem:** *$L = a^{ij}(x)\,D_iD_j + b^i(x)\,D_i + c(x)$ operatörünün öz eşlenik olması için gerek ve yeter şart $b^i(x) = D_j\left(a^{ij}\right)$ olmasıdır (Yakut, 2012).*

### 5.1.4 Diferensiyel denklemlerin formal Lagrangianları

$$F_\alpha\left(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(k)}\right) = 0 \quad ,(\alpha = 1, \ldots, m) \tag{5.9}$$

şeklinde $k$.mertebeden kısmi diferensiyel denklem sistemi ele alınsın. Burada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bağımsız değişkenler ve $u = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$ bağımlı değişkenler olsun. Bu durumda (5.9) denklemi için **formal Lagrangian**

$$L = \sum_{\alpha=1}^{m} w^\alpha F_\alpha \tag{5.10}$$

şeklinde tanımlanır ve buradaki $w^\alpha = (w^1, w^2, ..., w^m)$ yeni bağımsız değişkenlerdir ve **eşlenik değişkeni** adı verilir (Taşcan ve Yakut, 2015). Formal Lagrangian ifadesi Lagrangianı yada kısmi Lagrangianı elde edilemeyen kısmi diferensiyel denklemler için alternatif bir Lagrangiandır ayrıca bütün diferensiyel denklemler formal Lagrangiana sahiptirler.

### 5.1.5 Diferensiyel denklemlerin eşlenik denklemleri

(5.9) denklem sistemi için formal Lagrangianı (5.10) ile verilsin. Bu durumda (5.9) denklem sistemi için **eşlenik denklem sistemi**;

$$\begin{aligned} F_\alpha^*\left(x,u,w,\ldots,u_{(k)},w_{(k)}\right) &= \frac{\delta\left(w^\beta F_\beta\right)}{\delta u^\alpha} = 0 \\ & \beta = 1,2,\ldots,m \end{aligned} \tag{5.11}$$

ile tanımlanır (Eriksson, 2008).

Eğer (5.11) eşlenik denklem sisteminde $w = u$ yazıldığında (5.9) denklem sistemi bulunuyorsa (5.9) denklem sistemine **öz eşleniktir** denir (Eriksson, 2008). Başka bir ifadeyle;

$$F_\alpha^*\left(x,u,w,\ldots,u_{(k)},w_{(k)}\right)\underset{w=u}{|} = \phi\left(x,u,u_{(1)},\ldots\right)F_\alpha\left(x,u,u_{(1)},\ldots,u_{(k)}\right) \tag{5.12}$$

oluyorsa (5.9) denklem sistemi öz eşleniktir denir.

Yukarıdaki tanım, (5.11) eşlenik denklem sisteminin sol tarafı ile (5.9) denklem sisteminin çakışacağı anlamına gelmez. Dolayısıyla genel olarak (5.9) öz eşlenik olsa bile;

$$F_\alpha^* \neq F_\alpha$$

olabilir (Yaşar, 2009).

Eğer (5.11) eşlenik denklem sisteminde $\varphi'(u) \neq 0$ olacak şekilde belirli bir $\varphi(u)$ fonksiyonu için $w = \varphi(u)$ yazıldığında (5.9) denklem sistemi bulunuyorsa (5.9) denklem sistemine **yarı öz eşleniktir (quasi self adjoint)** denir.

Eğer (5.11) eşlenik denklem sisteminde $\varphi_u(x,u) \neq 0$ ve $\varphi_x(x,u) \neq 0$ olacak şekilde belirli bir $\varphi(x,u)$ fonksiyonu için $w = \varphi(x,u)$ yazıldığında (5.9) denklem sistemi bulunuyorsa (5.9) denklem sistemine **zayıf öz eşleniktir (weak self adjoint)** denir.

(5.9) denklem sisteminin bütün $u(x)$ çözümleri için $\varphi(x,u) \neq 0$ olacak şekildeki $w = \varphi(x,u)$ fonksiyonu (5.11) eşlenik denklem sisteminin çözümleri ise (5.9) denklem sistemine l**ineer olmayan öz eşleniktir (nonlinearly self adjoint)** denir (Cao vd., 2014).

### 5.1.6 Temel korunumluluk teoremi

**Teorem:** *$n$ bağımsız $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $m$ bağımlı $u = (u^1, u^2, ..., u^m)$ değişkenli olarak tanımlanan* (5.9) *denklem sisteminin kabul ettiği üreteç;*

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

*olsun. O halde* (5.11) *eşlenik denklem sistemi* (5.9) *denklem sisteminin simetrisini kabul eder. Yani* (5.9) *ile verilen kısmi diferensiyel denklem sistemi $X$ i kabul ederse* (5.11) *ile verilen eşlenik denklem sistemi*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \left( \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \eta_*^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha} \right) \tag{5.13}$$

*şeklindeki uygun $\eta_*^\alpha = \eta_*^\alpha (x_i, u^\alpha, w^\alpha, ...)$ katsayısıyla eşlenik değişkenine* ($w^\alpha$ ya) *genişletilen $X$ i kabul eder (Eriksson, 2008).*

**Temel korunumluluk teoremi:** (5.9) *ile tanımlanan $n$ bağımsız ve $m$ bağımlı değişkenli $k$. mertebeden diferensiyel denklem sisteminin*

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{5.14}$$

*ile verilen üreteci kabul ettiği ve* (5.11) *ile ifade edilen eşlenik denklem sistemine sahip olduğu düşünülsün. Bu durumda* (5.9) *denklem sisteminin her Lie nokta, Lie-Bäcklund ve lokal olmayan simetrisi* (5.9) *ve* (5.11) *denklem sistemlerinden oluşan sistem için korunumluluk kanunu üretir. Korunumluluk vektörünün bileşenleri*

$$L = \sum_{\alpha=1}^{m} w^\alpha F_\alpha \left( x, u, \ldots, u_{(k)} \right)$$

*formal Lagrangian olmak üzere;*

$$T^i = \xi^i L + W^\alpha \frac{\delta L}{\delta u_i^\alpha} + \sum_{s \geq 1} D_{i_1} ... D_{i_s} (W^\alpha) \frac{\delta L}{\delta u_{ii_1 ... i_s}^\alpha} \quad (5.15)$$

*formülü ile bulunabilir. Burada,* $W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha$ ya *Lie karakteristik fonksiyonu denir burada* $i = 1, \ldots, n$ *ve* $\alpha = 1, \ldots, m$ *dir.* (5.15) *formülünden elde edilen korunmuş vektörler,* (5.11) *eşlenik denklem sisteminin keyfi* $w$ *çözümlerini içerir.* (5.9) *denklem sistemi için sonlu sayıdaki korunumluluk kanunlarının bir tanesini* $w$ *belirtilerek bulabiliriz.* (5.9) *denklem sisteminin kabul ettiği bütün simetriler korunumluluk kanunu verir (Yaşar, 2010).*

**Not:** $\mathbf{T} = (T^1, T^2, \ldots, T^n)$ *vektörünün korunmuş vektör olması için korunumluluk şartı olarak adlandırılan aşağıdaki koşulun*

$$\sum_{i=1}^{n} \left( D_i \left( T^i \right) \right) = 0 \quad (5.16)$$

*sağlanması gerekir. Eğer bu koşul sağlanıyorsa bulunan vektörler korunumlu vektörler yada korunumluluk kanunları olarak adlandırılırlar. Bu koşul sağlanmıyorsa sağlaması için bazı işlemler yapılır ve bulunan vektörler modifiye edilmiş korunumlu vektörler yada modifiye edilmiş korunumluluk kanunları olarak adlandırılırlar.*

Son olarak (5.4) ve (5.15) formülünü 3 farklı durum için açalım;
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bağımsız değişkenler ve $u = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$ bağımlı değişkenler olmak üzere;

**1)**

$$L = \left( x, u, u_{(1)} \right)$$

birinci mertebeden Lagrangianı için (5.4) formülünden Euler-Lagrange denklemi;

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i \left( \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

olur. Bu takdirde $\mathbf{T} = (T^1, \ldots, T^n)$ korunumlu vektörleri (5.15) e göre aşağıdaki formül elde edilir.

$$T^i = \xi^i L + \left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right) \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

**2)**

$$L = \left(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}\right)$$

ikinci mertebeden Lagrangianı için (5.4) formülünden Euler-Lagrange denklemi;

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right) + D_i D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\right) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2, ..., m)$$

şeklinde bulunur. $\mathbf{T} = (T^1, \ldots, T^n)$ korunumlu vektörleri (5.15) formülüne göre;

$$T^i = \xi^i L + \left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right) \left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\right)\right] + D_k \left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right) \frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

olur.

**3)**

$$L = \left(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)}\right)$$

üçüncü mertebeden Lagrangianı için (5.4) formülünden Euler-Lagrange denklemi;

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right) + D_i D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\right) - D_i D_j D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right) = 0$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

şeklinde bulunur. $\mathbf{T} = (T^1, \ldots, T^n)$ korunumlu vektörleri (5.15) formülüne göre;

$$T^i = \xi^i L + \left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right) \left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - D_j \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha}\right) + D_j D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right)\right]$$

$$+ D_j \left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha} - D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right)\right]$$

$$+D_jD_k\left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right]$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

olur (Yaşar, 2009).

## 5.2. Kesir Mertebeli Kısmi Diferensiyel Denklemler İçin Korunumluluk Kanunları

Bu bölümde (4.23) formundaki kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemlerin korunumluluk kanunlarının bulunması ile ilgileneceğiz. Kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemlerin korunumluluk kanunlarının bulunması işleminde; tamsayı mertebeli türevleri bulunan değişkenler için önceki bölümde verilen formülleri kullanacağız fakat kesir mertebeli türevi bulunan değişkenler için farklı formül elde edeceğiz.

### 5.2.1 Euler-Lagrange operatörü

(4.23) formundaki kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklem için Euler-Lagrange operatörü;

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta u} &= \frac{\partial}{\partial u} + \left(D_t^\alpha\right)^* \frac{\partial}{\partial\left(D_t^\alpha u\right)} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s D_{i_1}\ldots D_{i_s}\frac{\partial}{\partial\left(u_{i_1\ldots i_s}^\alpha\right)} \\ &\quad (\alpha = 1, \ldots, m)\end{aligned} \tag{5.17}$$

ile verilir. $\left(D_t^\alpha\right)^*$, $D_t^\alpha$ nın eşlenik operatörü (adjoint operatör) olarak adlandırılır. $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n = [\alpha] + 1$ olmak üzere $\alpha$. mertebeden sağ taraf Riemann-Liouville zaman kesirli ifadesi;

$${}_tD_T^\alpha u = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int_t^T \frac{u(\gamma, x)}{(\gamma - t)^{\alpha-n+1}}d\gamma \tag{5.18}$$

ve $\alpha$. mertebeden sağ taraf Caputo zaman kesirli ifadesi;

$${}_t^CD_T^\alpha u = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int_t^T \frac{D_\gamma^n u(\gamma, x)}{(\gamma - t)^{\alpha-n+1}}d\gamma \tag{5.19}$$

şeklinde verilir. Eşlenik operatörün kesirli türevlerinin ifadesine göre değeri farklı olmaktadır. Riemann-Liouville kesirli diferensiyel operatörü için eşlenik operatörün değerleri;

$$\begin{aligned} &1)\ \left({}_0D_t^{\alpha}\right)^* = {}_t^CD_T^{\alpha} \\ &2)\ \left({}_0D_t^{1+\alpha}\right)^* = {}_t^CD_T^{1+\alpha} \\ &3)\ \left({}_0D_t^{\alpha}\ D_t\right)^* = {}_tD_T^{\alpha}\ D_t \end{aligned} \tag{5.20}$$

ve Caputo kesirli diferensiyel operatör için eşlenik operatörün değeri;

$$4)\ \left({}_0^CD_t^{\alpha}\right)^* = {}_tD_T^{\alpha} \tag{5.21}$$

ile verilir (Gazizov vd., 2015).

Ayrıca $n = [|\alpha|] + 1$ iken $(n-\alpha)$ . mertebeden kesirli integralin sağ taraf operatörü

$$\left({}_tJ_T^{n-\alpha}u\right)(t,x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^T \frac{u(\gamma,x)}{(\gamma-t)^{\alpha+1-n}}d\gamma \tag{5.22}$$

ile verilirse;

$$\left({}_0D_t^{\alpha}\right)^* = (-1)^n\ {}_tJ_T^{n-\alpha}\left(D_t^n\right) = {}_t^C\ D_T^{\alpha} \tag{5.23}$$

ve

$$\left({}_0^CD_t^{\alpha}\right)^* = (-1)^n D_t^n\left({}_tJ_T^{n-\alpha}\right) = {}_t\ D_T^{\alpha} \tag{5.24}$$

olur (Lukashchuk, 2014).

### 5.2.2 Formal Lagrangian

Kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemlerde formal Lagrangian tamsayı mertebeli kısmi diferensiyel denklemlerdeki gibi denklemin kapalı formu ile eşlenik değişkeninin çarpılmasıyla elde edilir. Yani;

$$L = w\left(\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial t^{\alpha}} - F(x,t,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},\ldots)\right) \tag{5.25}$$

ile bulunur (Rui ve Zhang, 2016).

**Örnek:**

$$f_t = \frac{1}{x^2} D_x \left[x^4 \left(f_x + f + f^2\right)\right] \tag{5.26}$$

şeklindeki Kompaneets denkleminin genel olarak zaman kesir mertebeli kısmi diferensiyel denkleme dönüştürülmüş hali olan;

$$F\left(t, x, D_t^{\gamma(\alpha)} u, u_x, u_{xx}\right) = D_t^{\gamma(\alpha)} u - x^2 D_x \left(u_x + u + u^2\right) - 4x \left(u_x + u + u^2\right) = 0 \tag{5.27}$$

denklemi için formal Lagrangian

$$L = w\left(\mathbf{D}_t^{\gamma(\alpha)} u - x^2 D_x \left(u_x + u + u^2\right) - 4x\left(u_x + u + u^2\right)\right) \tag{5.28}$$

ile verilir (Gazizov vd., 2015).

### 5.2.3 Eşlenik denklem

(4.23) formundaki kesir mertebeli kısmi diferensiyel denkleminin eşlenik denklemi

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\delta L}{\delta u} \\ &= \frac{\partial L}{\partial u} + \left(D_t^{\alpha}\right)^* \left(\frac{\partial L}{\partial D_t^{\alpha} u}\right) \\ &\quad - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) + D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right) - \ldots \end{aligned} \tag{5.29}$$

ile bulunur (Wang vd.,2015).

Eğer (5.29) eşlenik denkleminde $w = u$ yazıldığında (4.23) denklemi bulunuyorsa (4.23) denklemine **öz eşleniktir** denir.

$\varphi \neq 0$ şartını sağlayan $w = \varphi(x, t, u)$ yazılmasıyla (4.23) denkleminin bütün $u$ çözümleri için (5.29) eşlenik denklemi sağlanıyorsa (4.23) denklemine **lineer olmayan öz eşleniktir** (nonlinear self adjointness) denir (Rui ve Zhang, 2016).

**Örnek:** (5.28) ile verilen formal Lagrangian için eşlenik denklem;

$$
\begin{aligned}
F^* &= \frac{\delta L}{\delta u} \\
&= \frac{\partial L}{\partial u} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) + D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right) + \left(\mathbf{D}_t^{\gamma(\alpha)}\right)^* \frac{\partial L}{\partial\left(\mathbf{D}_t^{\gamma(\alpha)} u\right)} \\
&= \left(\mathbf{D}_t^{\gamma(\alpha)}\right)^* (w) - x^2 w_{xx} + x^2 w_x (1+2u) + 2w(1-x-2xu)
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

şeklinde bulunur. $\mathbf{D}_t^{\gamma(\alpha)}$ nın Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerinin farklı durumları için (5.30) eşlenik denklemi aşağıdaki şekillerde elde edilir.

**Durum 1:** $\mathbf{D}_t^{\gamma(\alpha)} =_0 D_t^{\alpha}\ D_t$ iken (5.20) eşitliğinde verilen değerler kullanılırsa;

$$F^* =_t D_T^{\alpha}\ D_t (w) - x^2 w_{xx} + x^2 w_x (1+2u) + 2w(1-x-2xu)$$

olur.

**Durum 2:** $\mathbf{D}_t^{\gamma(\alpha)} =^C D_t^{\alpha}$ iken (5.21) eşitliğinde verilen değerler kullanılırsa;

$$F^* =_t D_T^{\alpha}\ (w) - x^2 w_{xx} + x^2 w_x (1+2u) + 2w(1-x-2xu)$$

şeklindedir.

**Durum 3:** $\mathbf{D}_t^{\gamma(\alpha)} =_0 D_t^{1+\alpha}$ iken (5.20) eşitliğinde verilen değerler kullanılırsa;

$$F_t^* = {}_t^C D_T^{1+\alpha} - x^2 w_{xx} + x^2 w_x (1+2u) + 2w(1-x-2xu)$$

elde edilir.

**Durum 4:** $\mathbf{D}_t^{\gamma(\alpha)} =_0 D_t^{\alpha}$ iken (5.20) eşitliğinde verilen değerler kullanılırsa;

$$F_t^* =_t^C D_T^{\alpha} - x^2 w_{xx} + x^2 w_x (1+2u) + 2w(1-x-2xu)$$

eşlenik denklemi elde edilir (Gazizov vd., 2015).

### 5.2.4 Temel korunumluluk teoremi

(4.23) formundaki kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemler için korunumluluk kanunları $x$ değişkeni için kesir mertebeli türevler olmadığından kısmi diferensiyel denklemler için olan formül ile bulunabilir, $t$ değişkeni için kesir mertebeli türev olduğundan farklı şekilde bulunabilir.

#### $t$ değişkeni için korunumluluk kanunları

(4.23) formundaki $\alpha$. mertebeden Riemann-Liouville zaman kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemi

$$X = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{5.31}$$

şeklindeki Lie nokta simetri üretecini kabul etsin ve (5.25) şeklindeki formal Lagrangiana sahip olsun. Bu durumda $t$ değişkeni için korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned} T^t &= \tau \grave{I} + \sum_{k=0}^{n-1}\left((-1)^k \; {}_0D_t^{\alpha-1-k}(W)\; D_t^k \frac{\partial L}{\partial({}_0D_t^{\alpha}u)}\right) \\ &\quad - (-1)^n \; I\left(W, D_t^n \frac{\partial L}{\partial({}_0D_t^{\alpha}u)}\right), \quad (n = [|\alpha|]+1) \end{aligned} \tag{5.32}$$

ile bulunur. Buradaki $\grave{I}$ özdeşlik operatörü olarak adlandırılır ve işlemlerde ihmal edilir.

$$W = \eta - \tau u_t - \xi u_x \tag{5.33}$$

ile verilir, ayrıca $I$ bir integrali belirtmektedir ve

$$I(f,g) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \int_t^T \frac{f(\gamma,x)\, g(\mu,x)}{(\mu-\gamma)^{\alpha+1-n}} d\mu d\gamma \tag{5.34}$$

formundadır. (5.34) integrali

$$D_t I(f,g) = f \; {}_tJ_T^{n-\alpha} g - g \; {}_0J_t^{n-\alpha} f \tag{5.35}$$

özelliğine sahiptir. ${}_{t}J_{T}^{n-\alpha}$ integrali (5.22) ile verilmiştir. ${}_{0}J_{t}^{n-\alpha}$ integrali ise, $n=[|\alpha|]+1$ iken $(n-\alpha)$. mertebeden kesirli integralin sol taraf operatörü olarak adlandırılır ve

$$\left({}_{0}J_{t}^{n-\alpha}u\right)(t,x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{u(\gamma,x)}{(t-\gamma)^{\alpha+1-n}}d\gamma \tag{5.36}$$

ile verilir. Ayrıca ${}_{0}D_{t}^{\alpha}u$ $\alpha$. mertebeden sol taraf zaman kesirli Riemann-Liouville türevi ve ${}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}u$ $\alpha$. mertebeden sol taraf zaman kesirli Caputo türevi olmak üzere;

$${}_{0}D_{t}^{\alpha}u=D_{t}^{n}\left({}_{0}J_{t}^{n-\alpha}u\right) \tag{5.37}$$

ve

$${}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}u={}_{0}J_{t}^{n-\alpha}\left(D_{t}^{n}u\right) \tag{5.38}$$

eşitlikleri vardır (Lukashchuk, 2014). Şimdi $\alpha$ nın farklı durumları için (5.32) formülünü açalım. $\alpha$, burada Riemann türevi ile tanımlanmaktadır.

**Durum 1:** $0<\alpha<1$ olmak üzere (5.32) ifadesinde $\grave{I}$ özdeşlik operatörünü ihmal edersek ve $n=1$ yazarsak;

$$\begin{aligned}T^{t} &= \sum_{k=0}^{0}\left((-1)^{0}\ {}_{0}D_{t}^{\alpha-1-0}(W)\ D_{t}^{0}\frac{\partial L}{\partial\left({}_{0}D_{t}^{\alpha}u\right)}\right)\\ &\quad -(-1)^{1}\ I\left(W,D_{t}^{1}\frac{\partial L}{\partial\left({}_{0}D_{t}^{\alpha}u\right)}\right) \qquad (5.39)\\ &= {}_{0}D_{t}^{\alpha-1}(W)\frac{\partial L}{\partial\left({}_{0}D_{t}^{\alpha}u\right)}+I\left(W,D_{t}\frac{\partial L}{\partial\left({}_{0}D_{t}^{\alpha}u\right)}\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (5.37) eşitliğinde $0<\alpha<1$ olduğundan $n=1$ alırsak;

$${}_{0}D_{t}^{\alpha}u=D_{t}\left({}_{0}J_{t}^{1-\alpha}u\right)$$

olur ve yukarıdaki eşitlikten

$${}_{0}D_{t}^{\alpha-1}u={}_{0}J_{t}^{1-\alpha}u \tag{5.40}$$

elde ederiz ve (5.40) eşitliğini (5.39) formülünde yerine yazarsak;

$$T^t = {}_0J_t^{1-\alpha}(W)\frac{\partial L}{\partial({}_0D_t^\alpha u)} + I\left(W, D_t\frac{\partial L}{\partial({}_0D_t^\alpha u)}\right) \tag{5.41}$$

bulunur.

**Durum 2:** $1 < \alpha < 2$ olmak üzere (5.32) ifadesinde $\grave{I}$ özdeşlik operatörünü ihmal edersek ve $n = 2$ yazarsak;

$$\begin{aligned} T^t &= \sum_{k=0}^{1}\left((-1)^k \; {}_0D_t^{\alpha-1-k}(W) \;\; D_t^k\frac{\partial L}{\partial({}_0D_t^\alpha u)}\right) \\ &\quad -(-1)^2 \;\, I\left(W, D_t^2\frac{\partial L}{\partial({}_0D_t^\alpha u)}\right) \\ &= {}_0D_t^{\alpha-1}(W) \;\; \frac{\partial L}{\partial({}_0D_t^\alpha u)} - {}_0\, D_t^{\alpha-2}(W) \;\; D_t^1\frac{\partial L}{\partial({}_0D_t^\alpha u)} \\ &\quad -I\left(W, D_t^2\frac{\partial L}{\partial({}_0D_t^\alpha u)}\right) \end{aligned} \tag{5.42}$$

olur. Ayrıca (5.42) ifadesini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} T^t &= {}_0D_t^{\alpha-1}(W) \;\; \frac{\partial L}{\partial({}_0D_t^\alpha u)} - {}_0\, J_t^{2-\alpha}(W) \;\; D_t\frac{\partial L}{\partial({}_0D_t^\alpha u)} \\ &\quad -I\left(W, D_t^2\frac{\partial L}{\partial({}_0D_t^\alpha u)}\right) \end{aligned} \tag{5.43}$$

(4.23) formundaki $\alpha$. mertebeden Caputo zaman kesir mertebeli kısmi diferensiyel denklemi (5.31) şeklindeki Lie nokta simetri üretecini kabul etsin ve (5.25) şeklindeki formal Lagrangiana sahip olsun. Bu durumda $t$ değişkeni için korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned} T^t &= \tau\grave{I} + \sum_{k=0}^{n-1}\left( \; D_t^k(W) \;\; {}_tD_T^{\alpha-1-k} \;\; \frac{\partial L}{\partial({}_0^CD_t^\alpha u)}\right) \\ &\quad -I\left(D_t^n(W), \frac{\partial L}{\partial({}_0^CD_t^\alpha u)}\right), \;\; (n = [|\alpha|] + 1), \end{aligned} \tag{5.44}$$

ile bulunur ve $W = \eta - \tau u_t - \xi u_x$ dir (Lukashchuk, 2014).

**$x$ değişkeni için korunumluluk kanunları**

$x$ bağımsız değişkenine göre kesir mertebeli türevler bulunmadığından, bu değişkene göre korunumluluk kanunlarını kısmi diferensiyel denklemlerin korunumluluk kanunları formülünü kullanarak bulabiliriz. O halde, (5.25) şeklindeki formal Lagrangian, (5.31) Lie nokta simetri üreteci ve (5.15) formülü kullanılırsa;

$$\begin{aligned} T^x &= \xi L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right) + D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right) - D_x^3\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxx}}\right) + \ldots\right] \\ &\quad + D_x(W)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right) + D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxx}}\right) - \ldots\right] \qquad (5.45) \\ &\quad + D_x^2(W)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxx}}\right) + \ldots\right] + D_x^3(W)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{xxxx}} + \ldots\right] + \ldots \end{aligned}$$

bulunur ve $W = \eta - \tau u_t - \xi u_x$ dir. (4.23) formundaki $\alpha$. mertebeden Riemann-Liouville zaman kesir mertebeli kısmi diferensiyel denkleminde bulunan $x$ bağımsız değişkeni için korunumluluk kanunları (5.45) ile bulunabilirler ve $\xi L$ ifadesi yok sayılabilir.

*$T^x$ ve $T^t$ vektörlerinin (4.23) denklemi için korunumluluk kanunları olması için;*

$$\left[D_t\left(T^t\right) + D_x\left(T^x\right)\right]_{(4.23)} = 0 \qquad (5.46)$$

*koşulunun sağlanması gerekir (Rui ve Zhang, 2016).*

**Örnek:**

$$D_t^\alpha u = \left(k(u)\, u_x\right)_x \qquad (5.47)$$

ile verilen lineer olmayan zaman kesir mertebeli difüzyon denklemini ele alalım. Burada $\alpha \in (0,2)$, $t \in (0,T]$, $T \leq \infty$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ ve $D_t^\alpha u$, $u$ bağımlı değişkeninin $t$ bağımsız değişkenine göre $\alpha$. mertebeden kesir mertebeli türevidir. $\alpha$. mertebeden türevin Riemann-Liouville türevi olduğunu düşünelim.

Özel olarak $k=1$ iken (5.47) denklemi;

$$D_t^{\alpha}u = u_{xx} \tag{5.48}$$

haline döner ve (5.48) denklemi $\alpha \in (0,2)$ iken

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_2 &= 2t\frac{\partial}{\partial t} + \alpha x\frac{\partial}{\partial x}, \\ X_3 &= u\frac{\partial}{\partial u}, \\ X_{\infty} &= h\frac{\partial}{\partial u} \end{aligned} \tag{5.49}$$

şeklindeki Lie nokta üreteçlerini kabul eder ve $h = h(x,t)$; $D_t^{\alpha}h = h_{xx}$ ile verilen denklemin çözümüdür. (5.48) denklemi için formal Lagrangian;

$$L = w\left(D_t^{\alpha}u - u_{xx}\right) \tag{5.50}$$

olur. O halde eşlenik denklem;

$$\begin{aligned} F^{*} &= D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right) + \left(\mathbf{D}_t^{\alpha}\right)^{*}\frac{\partial L}{\partial\left(\mathbf{D}_t^{\gamma(\alpha)}u\right)} \\ &= \left(\mathbf{D}_t^{\alpha}\right)^{*}w - w_{xx} \end{aligned} \tag{5.51}$$

şeklindedir. $\alpha \in (0,1)$ iken (5.41) ve (5.45) kullanılırsa;

$$\begin{aligned} T^{t} &= {}_0J_t^{1-\alpha}(W)\,w + I\left(W, w_t\right), \\ T^{x} &= Ww_x - W_x w \end{aligned} \tag{5.52}$$

ile korunumluluk vektörleri elde edilebilir ve $W = \eta - \tau u_t - \xi u_x$ dir. $\alpha \in (1,2)$ iken

(5.41) ve (5.45) kullanılırsa;

$$
\begin{aligned}
T^t &= {}_0D_t^{\alpha-1}(W)\ w - {}_0J_t^{2-\alpha}(W)\ w_t - I(W, w_{tt}) \\
T^x &= W w_x - W_x w
\end{aligned}
\tag{5.53}
$$

ile korunumluluk vektörleri elde edilebilir ve $W = \eta - \tau u_t - \xi u_x$ dir (Lukashchuk, 2014).

# 6. SİMETRİ ÜRETECİ ALTINDA İNDİRGEMELER

Diferensiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasında oldukça fazla metot vardır. Bu metodlardan birisi Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından geliştirilen simetri metodudur. Bu metot verilen denklemin kabul ettiği simetriler yardımıyla denklemin daha kolay bir forma indirgenmesi esasına dayanır (Hydon, 2000).

## 6.1. Karakteristik Metot

Karakteristik metot matematiksel fizikte önemli bir rol oynar. Bu metot koordinatların değiştirilmesi esasına dayanır. (4.23) ile verilen zaman kesir mertebeli diferensiyel denklem (4.26) şeklinde verilen simetri üretecini kabul ederse, $u\left(x,t\right)$ bağımlı değişkeni (4.26) simetri üretecine uygulanırsa;

$$Xu = \xi\left(x,t,u\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \tau\left(x,t,u\right)\frac{\partial u}{\partial t} = -\eta\left(x,t,u\right) \tag{6.1}$$

lineer adi diferensiyel denklemi elde edilir. Bu durumda (6.1) lineer adi diferensiyel denklemi için karakteristik denklem;

$$\frac{dx}{\xi\left(x,t,u\right)} = \frac{dt}{\tau\left(x,t,u\right)} = \frac{du}{\eta\left(x,t,u\right)} \tag{6.2}$$

şeklinde yazılır (Wu, 2010a; Wu, 2010b).

Genelleştirilmiş karakteristik eğrileri;

$$\begin{aligned} \widetilde{x}\ \Big|_{\varepsilon=0} &= x, \\ \widetilde{t}\ \Big|_{\varepsilon=0} &= t, \\ \widetilde{u}\ \Big|_{\varepsilon=0} &= u \end{aligned} \tag{6.3}$$

başlangıç koşulları ile,

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\varepsilon} &= \eta(x,t,u), \\ \frac{dx}{d\varepsilon} &= \xi(x,t,u), \\ \frac{dt}{d\varepsilon} &= \tau(x,t,u)\end{aligned} \tag{6.4}$$

adi diferensiyel denklem sistemine indirgenir (Gaur ve Singh, 2014). (6.4) adi diferensiyel denklem sisteminin çözülmesiyle elde edilen ifade (4.23) denkleminde yerine yazılırsa kesir mertebeli adi diferensiyel denklem sistemine indirgenir. İndirgenen denklemin çözülmesiyle (4.23) denkleminin çözümü bulunur.

**Teorem:** $u = \theta(x,t)$ *nin* (4.23) *denklemi için değişmez çözüm olması için gerek ve yeter şart*
*(i)* $u = \theta(x,t)$ *nin değişmez yüzey olması, yani;*

$$X\theta = 0 \Leftrightarrow \left(\xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}\right)\theta = 0$$

*ve*

*(ii)* $u = \theta(x,t)$ *nin* (4.23) *denklemi için bir çözüm olmasıdır (Wang vd., 2013).*

### 6.2. Erdélyi-Kober Fonksiyonları Yardımyla İndirgeme

Erdélyi-Kober fonksiyonları yardımıyla indirgeme yöntemi esası karakteristik metoda dayanır. Yöntemin uygulanabilmesi için öncelikle Erdélyi-Kober kesirli türev operatörü ve Erdélyi-Kober kesirli integral operatörü tanımlarını verelim.

#### 6.2.1 Erdélyi-Kober kesirli integral operatörü

$\alpha$. mertebeden sağ taraf Erdélyi-Kober kesirli integral operatörü; $\alpha,\ \beta > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\left(I_\beta^{\tau,\alpha} f\right)(x) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} x^{-\beta(\tau+\alpha)} \int_0^x \left(x^\beta - t^\beta\right)^{\alpha-1} t^{\beta(\tau+1)-1} f(t)\, dt \tag{6.5}$$

ile verilir. Özel olarak (6.5) ifadesinde $\beta = 1$ yazılırsa;

$$\left(I_1^{\tau,\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\tau+\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\tau} f(t)\, dt \tag{6.6}$$

olur ve Kober operatörü olarak adlandırılır.

$\alpha$. mertebeden sol taraf Erdélyi-Kober kesirli integral operatörü; $\alpha,\ \beta > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\left(K_\beta^{\tau,\alpha} f\right)(x) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} x^{\beta\tau} \int_x^\infty \left(t^\beta - x^\beta\right)^{\alpha-1} t^{-\beta(\tau+\alpha-1)-1} f(t)\, dt \tag{6.7}$$

şeklindedir (Luchko ve Trujillo, 2007).

Çalışmamızda (6.7) ifadesinin özel bir hali olan

$$\left(K_\beta^{\tau,\alpha} f\right)(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty (u-1)^{\alpha-1} u^{(\tau+\alpha)} f\left(\xi u^{\frac{1}{\beta}}\right) du \tag{6.8}$$

ifadesini kullanacağız.

### 6.2.2 Erdélyi-Kober kesirli türev operatörü

$\alpha$. mertebeden sağ taraf Erdélyi-Kober kesirli türev operatörü $n \in \mathbb{N}$ iken $n-1 < \alpha \leq n$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\left(D_\beta^{\tau,\alpha} f\right)(\xi) := \prod_{j=1}^{n} \left(\tau + j + \frac{1}{\beta}\xi \frac{d}{d\xi}\right) \left(I_\beta^{\tau+\alpha, n-\alpha} f(\xi)\right) \tag{6.9}$$

$\alpha$. mertebeden sol taraf Erdélyi-Kober kesirli türev operatörü $n \in \mathbb{N}$ iken $n-1 < \alpha \leq n$ olmak üzere;

$$\left(P_\beta^{\tau,\alpha} f\right)(\xi) := \prod_{j=0}^{n-1} \left(\tau + j - \frac{1}{\beta}\xi \frac{d}{d\xi}\right) \left(K_\beta^{\tau+\alpha, n-\alpha} f(\xi)\right) \tag{6.10}$$

şeklinde verilir (Luchko ve Trujillo, 2007).

(4.23) ile verilen zaman kesir mertebeli diferensiyel denklem (4.26) şeklinde verilen simetri üretecini kabul etsin. Özel olarak; (4.26) üretecinde bulunan sonsuz küçükleri $a_1,\ a_2,\ a_3$ sabitler olmak üzere;

$$\xi = a_1 x,\ \tau = a_2 t,\ \eta = -a_3 u$$

şeklinde seçelim. O halde, karakteristik denklem

$$\frac{dx}{a_1 x} = \frac{dt}{a_2 t} = \frac{du}{-a_3 u}$$

ile yazılır. Karakteristik denklemden;

$$\frac{dx}{a_1 x} = \frac{dt}{a_2 t} \Rightarrow \zeta = x t^{-\frac{a_1}{a_2}} \tag{6.11}$$

ve

$$\frac{dt}{a_2 t} = \frac{du}{a_3 u} \Rightarrow \delta = u t^{-\frac{a_3}{a_2}} \tag{6.12}$$

bulunur. (6.11) ve (6.12) ifadelerinden;

$$\delta = g\left(\zeta\right) \Rightarrow u = t^{\frac{a_3}{a_2}} g\left(\zeta\right) \tag{6.13}$$

elde edilir. $n \in \mathbb{N}$ iken $n-1 < \alpha < n$ olduğunda, (3.3) ile verilen Riemann-Liouville kesirli türevine göre

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_0^t \left(t-s\right)^{n-\alpha-1} s^{\frac{a_3}{a_2}} g\left(x s^{-\frac{a_1}{a_2}}\right) ds\right] \tag{6.14}$$

olur. (6.14) ifadesinde

$$v = \frac{t}{s} \tag{6.15}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\begin{gathered} ds = -\tfrac{t}{v^2} dv, \\ s = 0 \Rightarrow v = \infty, \\ s = t \Rightarrow v = 1 \end{gathered} \tag{6.16}$$

elde edilir. Yeni dönüşüm (6.14) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} t^{n-\alpha-\frac{a_3}{a_2}} \int\limits_1^\infty (v-1)^{n-\alpha-1}\, v^{-\left(n-\alpha+1+\frac{a_3}{a_2}\right)} g\left(\zeta v^{\frac{a_1}{a_2}}\right) dv\right] \tag{6.17}$$

olur. (6.17) değeri ve (6.8) ifadesi kullanılırsa aşağıdaki değer bulunur.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{a_3}{a_2}}\left(K_{\frac{a_2}{a_1}}^{1+\frac{a_3}{a_2},n-\alpha} g\right)(\zeta)\right] \tag{6.18}$$

# 7. ZAMAN KESİR MERTEBELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÇEŞİTLİ UYGULAMALAR

## 7.1. Zaman Kesir Mertebeli Sawada-Kotera (SK) Denklemi

Tamsayı mertebeli beşinci mertebeden Korteweg-de Vries denklemi $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ keyfi sabitler olmak üzere;

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_x u_{xx} + \gamma u u_{xxx} + u_{xxxxx} = 0 \tag{7.1}$$

şeklinde tanımlanır. (7.1) denkleminde $\gamma = 5,\ \beta = \gamma$ ve $\alpha = \frac{1}{5}\gamma^2$ olarak seçilirse;

$$u_t + 5u^2 u_x + 5u_x u_{xx} + 5u u_{xxx} + u_{xxxxx} = 0 \tag{7.2}$$

SK denklemi elde edilir (Wazwaz, 2010). SK denklemi matematiksel modellemede bazı fiziksel durumlarda örneğin yerçekimi altında sığ su dalgalarının hareketini tanımlamada, bir boyutlu lineer olmayan kafeslerde (lattice), kuantum mekaniğinde, lineer olmayan optiklerde önemli bir yere sahiptir. Bu denklem, ters yönde yayılan dalgaların modellemesinde kullanılır (Gupta ve Ray, 2015). Ayrıca, integrallenebilme, Bäcklund dönüşümü, Darboux dönüşümü, multisoliton çözümler gibi uygulamalarda önemli bir yere sahiptir (Ray ve Sahoo, 2015).

Zaman kesir mertebeli SK denklemi ise;

$$u_t^{\alpha} + 5u^2 u_x + 5u_x u_{xx} + 5u u_{xxx} + u_{xxxxx} = 0 \tag{7.3}$$

ile tanımlanır ve $0 < \alpha < 1$ ve $\alpha$, kesirli Riemann-Liouville türevini belirtir (Ray ve Sahoo, 2015).

### 7.1.1 Lie simetri üreteçleri

(7.3) denklemi (4.26) ile verilen üreteci kabul etsin. O halde, denklem beşinci mertebeden olduğu için $X^{(\alpha,5)}$ uzanımını

$$\begin{aligned} X^{(\alpha,5)} &= X + \eta^{x}\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} \\ &\quad + \eta^{xxxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxxx}} + \eta^{xxxxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxxxx}} + \eta^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial u_t^{\alpha}} \end{aligned} \tag{7.4}$$

verilen denkleme uygularsak

$$\eta^{\alpha,t} + 10u\eta u_x + 5u^2\eta^x + 5\eta^x u_{xx} + 5u_x\eta^{xx} + 5\eta u_{xxx} + 5u\eta^{xxx} + \eta^{xxxxx} = 0 \tag{7.5}$$

elde edilir. $\eta^x, \eta^{xx}$, $\eta^{xxx}$, $\eta^{xxxxx}$, $\eta^{\alpha,t}$ değerleri (7.5) ifadesinde yerine yazıldıktan sonra $u_t^{\alpha}$ yerine denklemden eşitliği yazılırsa ve $u$ nun kısmi türevli terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse;

$$\partial_t^{\alpha-n}u : \binom{\alpha}{n}\partial_t^{a}(\eta_u) - \binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}(\tau),$$

$$\partial_t^{\alpha-n}u_x : \binom{\alpha}{n}\partial_t^{\alpha}(\xi),$$

$$u_t u_{xxx} : 5\alpha\tau_u u - 10\tau_{xxu} - 5u\tau_u,$$

$$u_t u_x u_{xx} : 5\alpha\tau_u - 15u\tau_{uu} - 30\tau_{xxuu} - 10\tau_u,$$

$$u_x^2 u_{xxt} : -20\tau_{xuu},$$

$$u_{xt} : -15u\tau_{xx} - 5\tau_{xxxx},$$

$$u_{xxxxx} : \alpha\tau_t - 5\xi_x,$$

$$u_{xt}u_{xxx} : -20\tau_{xu},$$

$$u_x : 5\eta_{xxxxu} + 10u\eta - 5u^2\xi_x + 15u\eta_{xxu} - 5u\xi_{xxx} + 5u^2\alpha\tau_t + 5\eta_{xx} - \xi_{xxxxx},$$

$$sabit : \eta_{xxxxx} + 5u^2\eta_x + 5u\eta_{xxx} + \eta_t^{\alpha} - u(\eta_u)_t^{\alpha},$$

$$u_{xx}u_{xxx} : -50\xi_{xu} + 10\eta_{uu},$$

$$u_t u_{xx} : -5\tau_x - 10\tau_{xxxu} - 15\tau_{xu},$$

$$u_x^3 : 5u\eta_{uuu} - 15u\xi_{xuu} + 10\eta_{xxuuu} + 5\eta_{uu} - 10\xi_{xu} - 10\xi_{xxxuu},$$

$$u_x u_{xx} : 5\eta_u + 30\eta_{xxuu} - 30\xi_{xxxu} - 15\xi_x + 15u\eta_{uu} - 45u\xi_{xu} + 5\alpha\tau_t,$$

$$u_t u_x^3 : -10\tau_{xxuuu} - 5\tau_{uu} - 5u\tau_{uuu},$$

$$u_t u_x^2 : -10\tau_{xxxuu} - 10\tau_{xu} - 15u\tau_{xuu},$$

$$u_x^2 : 15u\eta_{xuu} - 5u^2\xi_u - 15u\xi_{xxu} + 10\eta_{xxxuu} + 10\eta_{xu} - 5\xi_{xx} - 5\xi_{xxxxu},$$

$$u_t u_x : -5\tau_{xxxxu} - 5\tau_{xx} - 5u^2\tau_u - 15u\tau_{xxu} + 5\alpha u^2\tau_u,$$

$$u_t u_x^4 : -5\tau_{xuuuu},$$

$$u_t u_x^5 : -\tau_{uuuuu},$$

$$u_t : -5u^2\tau_x - 5u\tau_{xxx} - \tau_{xxxxx},$$

$$u_x^4 : -5u\xi_{uuu} + 5\eta_{xuuuu} - 5\xi_{uu} - 10\xi_{xxuuu},$$

$$u_x u_{xxxxt} : -5\tau_u,$$

$$u_x u_{xxxx} : -25\xi_{xu} + 5\eta_{uu},$$

$$u_{xx} : 15u\eta_{xu} - 15u\xi_{xx} + 10\eta_{xxxu} + 5\eta_x - 5\xi_{xxxx},$$

$$u_{xx} u_{xxxx} : -15\xi_u,$$

$$u_{xt} u_{xxxx} : -5\tau_{uuuu} - \tau_u,$$

$$u_{xt} u_{xx} : -30\tau_{xxu} - 15u\tau_u,$$

$$u_{xxt} u_x^3 : -10\tau_{uuu},$$

$$u_x u_{xxx} : -40\xi_{xxu} + 20\eta_{xuu} - 20u\xi_u,$$

$$u_{xt} u_x^2 : -30\tau_{xxuu} - 10\tau_u - 15u\tau_{uu},$$

$$u_{xxx} : -15u\xi_x + 5u\alpha\tau_t + 10\eta_{xxu} + 5\eta - 10\xi_{xxx},$$

$$u_x^2 u_{xx} : 30\eta_{xuuu} - 60\xi_{xxuu} - 20\xi_u - 30u\xi_{uu},$$

$$u_x^2 u_{uuu} : 10\eta_{uuu} - 50\xi_{xuu},$$

$$u_{xt} u_{xx}^2 : -15\tau_{uu},$$

$$u_x u_{xxxt} : -20\tau_{xu},$$

$$u_x^3 u_{xx} : 10\eta_{uuuu} - 50\xi_{xuuu},$$

$$u_{xxxt} u_x^2 : -10\tau_{uu},$$

$$u_x u_{xx}^2 : 15\eta_{uuu} - 75\xi_{xuu},$$

$$u_x u_{xt} : -10\tau_x - 20\tau_{xxxu} - 30u\tau_{xu},$$

$$u_x u_{xxt} : -30\tau_{xxu} - 15u\tau_u,$$

$$u_t u_{xx}^2 : -15\tau_{xuu},$$

$$u_x u_{xxxxx} : -6\xi_u,$$

$$u_x^2 u_{xxxx} : -15\xi_{uu},$$

$$u_x^3 u_{xxx} : -20\xi_{uuu},$$

$$u_{xx} u_{xxt} : -30\tau_u,$$

$$u_x^2 u_{xx}^2 : -45\xi_{uuu},$$

$$u_x^4 u_{xx} : -15\xi_{uuuu},$$

$$u_{xxx} u_{xxt} : -10\tau_u,$$

$$u_{xxt} : -15u\tau_x,$$

$$u_{xxxt} u_{xx} : -10\tau_u,$$

$$u_x^3 u_{xt} : -20\tau_{xuuu},$$

$$u_t u_{xxxx} : -5\tau_{xu},$$

$$u_t u_{xxxxx} : -\tau_u + \alpha\tau_u,$$

$$u_{xx}^2 : -15u\xi_u - 30\xi_{xxu} + 15\eta_{xuu},$$

$$u_x u_{tx} u_{xxx} : -20\tau_{uu},$$

$$u_x^2 u_{xt} u_{xx} : -30\tau_{uuu},$$

$$u_x u_{xt} u_{xx} : -60\tau_{xuu},$$

$$u_t u_x^2 u_{xx} : -30\tau_{xuuu},$$

$$u_t u_x u_{xxx} : -20\tau_{uux},$$

$$u_t u_x u_{xxxx} : -5\tau_{uu},$$

$$u_t u_x^3 u_{xx} : -10\tau_{uuuu},$$

$$u_t u_x^2 u_{xxx} : -10\tau_{uuu},$$

$$u_t u_{xx} u_{xxx} : -10\tau_{uu},$$

$$u_t u_x u_{xx}^2 : -15\tau_{uuu},$$

$$u_x u_{xx} u_{xxx} : -60\xi_{uu},$$

$$u_x u_{xx} u_{xxt} : -30\tau_{uu},$$

$$u_x^5 : \eta_{uuuuu} - 5\xi_{xuuuu},$$

$$u_x^6 : -\xi_{uuuuu},$$

$$u_{xxxx} : 5\eta_{xu} - 10\xi_{xx},$$

$$u_{xxx}^2 : -10\xi_u,$$

$$u_{xx}^3 : -15\xi_{uu},$$

$$u_{xxxxt} : -5\tau_x,$$

$$u_{xxxt} : -10\tau_{xx},$$

$$u_{xxt} : -10\tau_{xxx}$$

olur ve $n = 1, 2, ...$ dir. Yukarıdaki belirleyici denklem sisteminden

$$\tau_x = \tau_u = \xi_t = \xi_u = \eta_{uu} = 0 \tag{7.6}$$

olduğu aşikar olarak görülür. (7.6) ifadesindeki eşitlikler belirleyici denklem sisteminde kullanılırsa

$$
\begin{gathered}
-5\xi_x + \alpha\tau_t = 0, \\
\eta_{xu} - 2\xi_{xx} = 0, \\
5\eta_{xxxxu} + 10u\eta - 5u^2\xi_x + 15u\eta_{xxu} - 5u\xi_{xxx} + 5\alpha u^2\tau_t + 5\eta_{xx} - \xi_{xxxxx} = 0, \\
3u\eta_{xu} - 3u\xi_{xx} + 2\eta_{xxxu} + \eta_x - \xi_{xxxx} = 0, \\
-3u\xi_x + \alpha u\tau_t + 2\eta_{xxu} + \eta - 2\xi_{xxx} = 0, \\
2\eta_{xu} - \xi_{xx} = 0, \\
\eta_u - 3\xi_x + \alpha\tau_t = 0 \\
\eta_{xxxxx} + 5u^2\eta_x + 5u\eta_{xxx} + \partial_t^a\eta - u\partial_t^a(\eta_u) = 0, \\
\binom{\alpha}{n}\partial_t^a\eta_u - \binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau = 0,
\end{gathered} \tag{7.7}
$$

sistemine indirgenir. (7.6) ve (7.7) sistemleri beraber çözülürse

$$
\begin{aligned}
\eta &= -2c_2\alpha u \\
\tau &= c_3 + 5tc_2 \\
\xi &= c_1 + c_2\alpha x
\end{aligned} \tag{7.8}
$$

sonsuz küçükleri bulunur ve $c_1, c_2, c_3$ sabitlerdir. (7.8) sonsuz küçüklerinde $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$ değerleri için

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \tag{7.9}$$

elde edilir. Aynı işlem $c_2 = 1,\ c_1 = c_3 = 0$ değerleri için yapılırsa

$$X_2 = x\alpha\frac{\partial}{\partial x} + 5t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\alpha\frac{\partial}{\partial u} \tag{7.10}$$

elde edilir ve $c_3 = 1,\ c_1 = c_2 = 0$ değerleri için benzer işlemler yapılırsa

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{7.11}$$

bulunur fakat (4.29) koşulundan dolayı (7.3) denklemi $X_3$ üretecini kabul etmez.

**Not:** $\alpha = 1$ *olması durumunda* (7.3) *ile verilen zaman kesir mertebeli SK denklemi,* (7.2) *ile verilen SK denklemine dönüşür. Bu durumda denklemin üreteçlerini bulmak için 4.1 bölümünde anlatılan işlemler yapılırsa, denklem için*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 5t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{7.12}$$

*üreteçleri bulunur.* (7.8) *sonsuz küçüklerinde* $\alpha = 1$ *yazılırsa,* (7.12) *ile verilen üreteçlerle aynı üreteçler bulunur.*

$X_1$ ve $X_2$ Lie simetri üreteçleri için komütatör tablosu;

| $[X_i, X_j]$ | $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|---|
| $X_1$ | $0$ | $X_1$ |
| $X_2$ | $-X_1$ | $0$ |

şeklinde verilir.

### 7.1.2 Erdélyi-Kober fonksiyonları yardımıyla indirgeme

$X_2$ üreteci kullanılırsa ve bu üreteç için karakteristik denklem

$$\frac{dx}{x} = \frac{\alpha dt}{5t} = \frac{du}{-2u} \tag{7.13}$$

olur. Karakteristik denkleminin integrali alınırsa

$$\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{5}},\ u = t^{-\frac{2\alpha}{5}} g(\zeta) \tag{7.14}$$

elde edilir ve (7.3) denklemi

$$\left(P_{\frac{5}{\alpha}}^{1-\alpha-\frac{2\alpha}{5},\alpha} g\right)(\zeta) + 5g^2 g_\zeta + 5g_\zeta g_{\zeta\zeta} + 5g g_{\zeta\zeta\zeta} + g_{\zeta\zeta\zeta\zeta\zeta} = 0 \tag{7.15}$$

lineer olmayan adi diferensiyel denklemine indirgenir.

Şimdi (7.3) denkleminin (7.15) adi diferensiyel denklemine nasıl indirgeneceğini gösterelim.

$n = 1, 2, \ldots$ iken $n - 1 < \alpha < n$ olması durumunda Riemann-Liouville kesirli türevine göre;

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} s^{-\frac{2\alpha}{5}} g\left(xs^{-\frac{\alpha}{5}}\right) ds\right] \tag{7.16}$$

yazılır. (6.15) dönüşümü ve (6.16) değerleri (7.16) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_\infty^1 \left(\left(\frac{t}{v}\right)(v-1)\right)^{n-\alpha-1} \left(\frac{t}{v}\right)^{-\frac{2\alpha}{5}} g\left(x\left(\frac{t}{v}\right)^{-\frac{\alpha}{5}}\right)\left(-\frac{t}{v^2}\right) dv\right] \\
&= \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{2\alpha}{5}} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_1^\infty (v-1)^{n-\alpha-1} v^{-\left(n-\alpha+1-\frac{2\alpha}{5}\right)} g\left(\zeta v^{\frac{\alpha}{5}}\right) dv\right] \qquad (7.17) \\
&= \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{2\alpha}{5}}\left(K_{\frac{5}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{5},n-\alpha} g\right)(\zeta)\right]
\end{aligned}$$

bulunur.

**Not:** $\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{5}}$ iken;

$$\begin{aligned} t\tfrac{\partial}{\partial t}\phi(\zeta) &= t\ \zeta_t\ \phi'(\zeta) \\ &= tx\left(-\tfrac{\alpha}{5}\right)t^{-\frac{\alpha}{5}-1}\phi'(\zeta) \\ &= -\tfrac{\alpha}{5}\zeta\tfrac{d}{d\zeta}\phi(\zeta) \end{aligned} \tag{7.18}$$

dır.

(7.18) eşitliği (7.17) ifadesinin sağ tarafında kullanırsa

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{2\alpha}{5}}\left(K_{\frac{5}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{5},n-\alpha}g\right)(\zeta)\right] &= \tfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[\tfrac{\partial}{\partial t}\left(t^{n-\alpha-\frac{2\alpha}{5}}\left(K_{\frac{5}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{5},n-\alpha}g\right)(\zeta)\right)\right] \\ &= \tfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[t^{n-\alpha-\frac{2\alpha}{5}}\left(n-\alpha-\tfrac{2\alpha}{5}-\tfrac{\alpha}{5}\zeta\tfrac{d}{d\zeta}\left(K_{\frac{5}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{5},n-\alpha}g\right)(\zeta)\right)\right] \end{aligned} \tag{7.19}$$

olur ve aynı işlem $n-1$ defa tekrarlanırsa

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{2\alpha}{5}}\left(K_{\frac{5}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{5},n-\alpha}g\right)(\zeta)\right] &= t^{-\alpha-\frac{2\alpha}{5}}\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\alpha-\tfrac{2\alpha}{5}+j-\tfrac{\alpha}{5}\zeta\tfrac{d}{d\zeta}\right)\left(K_{\frac{5}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{5},n-\alpha}g\right)(\zeta) \\ &= t^{-\alpha-\frac{2\alpha}{5}}\left(P_{\frac{5}{\alpha}}^{1-\alpha-\frac{2\alpha}{5},\alpha}g\right)(\zeta) \end{aligned} \tag{7.20}$$

bulunur. (7.20), (7.17) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = t^{-\frac{7\alpha}{5}}\left(P_{\frac{5}{\alpha}}^{1-\alpha-\frac{2\alpha}{5},\alpha}g\right)(\zeta) \tag{7.21}$$

elde edilir ve $\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{5}}$ ve $u = t^{-\frac{2\alpha}{5}}g(\zeta)$ olmasından dolayı;

$$\begin{aligned} u^2 &= t^{-\frac{4\alpha}{5}}g^2, \\ u_x &= t^{-\frac{3\alpha}{5}}g_\zeta, \\ u_{xx} &= t^{-\frac{4\alpha}{5}}g_{\zeta\zeta}, \\ u_{xxx} &= t^{-\alpha}g_{\zeta\zeta\zeta} \\ u_{xxxx} &= t^{-\frac{6\alpha}{5}}g_{\zeta\zeta\zeta\zeta} \\ u_{xxxxx} &= t^{-\frac{7\alpha}{5}}g_{\zeta\zeta\zeta\zeta} \end{aligned} \tag{7.22}$$

dır. $u$ nun yukarıda bulunan türevleri (7.3) denkleminde yerine yazılırsa (7.15) adi diferensiyel denklemi elde edilir.

### 7.1.3 Karakteristik metot

(7.3) denklemini $X_1$ ve $X_2$ üreteçleri yardımıyla adi diferensiyel denkleme indirgeyelim ve değişmez çözümünü bulalım.

**Durum 1:** $X_1$ üreteci için karakteristik denklem

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{0}$$

ile yazılır ve $u = f(t)$ bulunur. $u = f(t)$ eşitliği (7.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\partial_t^{\alpha} f(t) = 0 \Rightarrow f(t) = c_1 t^{\alpha - 1}$$

bulunur ve değişmez çözüm

$$u = c_1 t^{\alpha - 1}$$

olarak elde edilir.

**Durum 2:** $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{5t}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u}$ üreteci için karakterisitk denklem

$$\frac{\alpha dt}{5t} = \frac{dx}{x} = \frac{du}{-2u}$$

şeklinde verilir ve bulunan karakteristik denklem çözülürse; $\zeta = tx^{-\frac{5}{\alpha}}$ iken $u(x,t) = \frac{1}{x^2} f(\zeta)$ çözümü bulunur. Bulunan çözüm (7.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta\zeta^{-\alpha} f_{\zeta}^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} &= 720f + 180f^2 + 10f^3 + +f'\zeta\left(\tfrac{5220}{\alpha} + \tfrac{14500}{\alpha^2} + \tfrac{19375}{\alpha^3} + \tfrac{12500}{\alpha^4} + \tfrac{3125}{\alpha^5}\right) \\
&\quad + \left(f'\right)^2 \zeta^2\left(\tfrac{625}{\alpha^2} + \tfrac{625}{\alpha^3}\right) + ff'\zeta\left(\tfrac{1050}{\alpha} + \tfrac{1375}{\alpha^2} + \tfrac{625}{\alpha^3}\right) + ff''\zeta^2\left(\tfrac{1375}{\alpha^2} + \tfrac{1875}{\alpha^3}\right) \\
&\quad + f''\zeta^2\left(\tfrac{14500}{\alpha^2} + \tfrac{58125}{\alpha^3} + \tfrac{87500}{\alpha^4} + \tfrac{46875}{\alpha^5}\right) + f'''\zeta^3\left(\tfrac{19375}{\alpha^3} + \tfrac{75000}{\alpha^4} + \tfrac{78125}{\alpha^5}\right) \\
&\quad + f''''\zeta^4\left(\tfrac{12500}{\alpha^4} + \tfrac{31250}{\alpha^5}\right) + \tfrac{3125 f'''''\zeta^5}{\alpha^5} + \tfrac{25f^2 f'\zeta}{\alpha} + \tfrac{625 ff'''\zeta^3}{\alpha^3} + \tfrac{625 f'f''\zeta^3}{\alpha^3}
\end{aligned}$$

kesir mertebeli değişken katsayılı adi diferensiyel denklemine indirgenir ve bu denklem çözülürse (7.3) denkleminin çözümü bulunur.

### 7.1.4 Korunumluluk kanunları

(7.3) denklemi için formal Lagrangian

$$L = v(x,t)\left(u_t^{\alpha} + 5u^2u_x + 5u_xu_{xx} + 5uu_{xxx} + u_{xxxxx}\right) \tag{7.23}$$

olur. Formal Lagrangian eşlenik denklem ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\partial L}{\partial u} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) + D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right) - D_x^3\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right) \\ &\quad -D_x^5\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxxx}}\right) + (D_t^{\alpha})^*\frac{\partial L}{\partial(D_t^{\alpha}u)} \\ &= -5u^2v_x - 10u_{xx}v_x - 10u_xv_{xx} - 5uv_{xx} - v_{xxxxx} + (D_t^{\alpha})^*v \end{aligned} \tag{7.24}$$

bulunur. (7.24) eşlenik denkleminde $v$ yerine $u$ yazılırsa (7.3) denklemi bulunmadığından, (7.3) denklemi öz eşlenik değildir. (7.24) eşlenik denklemi için $v = 1$ çözüm olur.

$T^x$ korunumlu vektör bileşenlerini bulmak için, (5.45) formülünü açarsak

$$\begin{aligned} T^x &= W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right) + D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right) + D_x^4\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxxx}}\right)\right] \\ &\quad +D_x(W)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right) - D_x^3\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxxx}}\right)\right] \\ &\quad +D_x^2(W)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}} + D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxxx}}\right)\right] + D_x^3(W)\left[-D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxxx}}\right)\right] \\ &\quad +D_x^4(W)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{xxxxx}}\right] \end{aligned} \tag{7.25}$$

olur ve $0 < \alpha < 1$ olmasından dolayı $T^t$ korunumlu vektörün bileşenlerini bulmak için (5.41) formülünü kullanacağız.

**Durum 1:** $X_1$ üreteci için (5.33) ifadesi kullanılırsa

$$W = -u_x \tag{7.26}$$

elde edilir. Bulunan formal Lagrangian ve Lie karakteristik fonksiyonu (5.41) ve (7.25) formüllerinde yerine yazılırsa (7.3) denklemi için sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned} T_1^x &= -5u_x u^2 v - 5u_x v u_{xx} - 5v_x u_x^2 - 5u_x u v_{xx} - u_x v_{xxxx} \\ &\quad +5u_{xx} u v_x + u_{xx} v_{xxx} - 5u_{xxx} u v - u_{xxx} v_{xx} + u_{xxxx} v_x - u_{xxxxx} v, \qquad (7.27) \\ T_1^t &= J_t^{1-\alpha}(-u_x)\, v + I(-u_x, D_t v) \end{aligned}$$

olur. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları (7.27) ifadesinde $v = 1$ yazılırsa aşağıdaki şekilde elde edilirler.

$$\begin{aligned} T_1^x &= -5u^2 u_x - 5u_x u_{xx} - 5u u_{xxx} - u_{xxxxx}, \\ T_1^t &= -J_t^{1-\alpha}(u_x)\,. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Ayrıca;

$$\begin{aligned} D_x(T_1^x) + D_t(T_1^t) &= D_x\left(-5u^2 u_x - 5u_x u_{xx} - 5u u_{xxx} - u_{xxxxx}\right) - D_t\left(J_t^{1-\alpha}(u_x)\right) \\ &= D_x\left(D_t^\alpha u\right) - D_t^\alpha\left(D_x u\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $D_i T^i$ koşulu sağlanır.

**Durum 2:** $X_2$ üreteci için

$$W = -2u - x u_x - \frac{5t}{\alpha} u_t \tag{7.29}$$

dir.

Sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned}
T_2^x &= -\frac{1}{\alpha}[-5u\alpha v_x u_x + 25tu_t u^2 v + 25tu_t v_x u_x + 5xu_x^2 \alpha v_x \\
&+10u^3\alpha v + 10u^2\alpha v_{xx} + 2u\alpha v_{xxxxx} + 5tu_t v_{xxxx} - 3u_x\alpha v_{xxx} \\
&+4u_{xx}\alpha v_{xx} + 5tu_{xxt}v_{xx} - 5v_x u_{xxx}\alpha - 5v_x tu_{xxxt} + 6vu_{xxxx}\alpha \\
&+30u\alpha vu_{xx} + 25tu_t vu_{xx} + 25tu_t uv_{xx} + xu_x\alpha v_{xxxx} \\
&-xu_{xx}\alpha v_{xxx} + 25tu_{xxt}uv + xu_{xxx}\alpha v_{xx} - v_x xu_{xxxx}\alpha \\
&+5xu_x\alpha vu_{xx} + 5xu_x\alpha uv_{xx} - 5xu_{xx}\alpha uv_x + 5xu_{xxx}\alpha uv \\
&-5tu_{xt}v_{xxx} + 5vtu_{xxxxt} + 5xu_x\alpha u^2 v - 25tu_{xt}uv_x + vxu_{xxxxx}\alpha] \\
T_2^t &= J_t^{1-\alpha}\left(-2u - xu_x - \tfrac{5t}{\alpha}u_t\right)v + I\left(-2u - xu_x - \tfrac{5t}{\alpha}u_t, D_t v\right)
\end{aligned} \tag{7.30}$$

olur. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları ise

$$\begin{aligned}
T_2^x &= -10u^3 - 30uu_{xx} - \frac{25t}{\alpha}u_t u^2 - \frac{25t}{\alpha}u_t u_{xx} - 5xu_x u^2 - 5xu_x u_{xx} \\
&-\frac{25t}{\alpha}uu_{xxt} - 5uxu_{xxx} - 6u_{xxxx} - \frac{5t}{\alpha}u_{xxxxt} - xu_{xxxxx}, \\
T_2^t &= -J_t^{1-\alpha}\left(2u + xu_x + \tfrac{5t}{\alpha}u_t\right)
\end{aligned} \tag{7.31}$$

şeklinde bulunurlar.

## 7.2. Zaman Kesir Mertebeli Modified Korteweg-de Vries (mKdV) Denklemi

mKdV denklemi; akustik dalgalar, Alfvén dalgaları, enerji aktarım hatları, trafik tıkanıklığı modellemelerinde ve iyon akustik solitonlarda karşımıza çıkar. Ayrıca Miura dönüşümü, korunumluluk kanunları, ters saçılım dönüşümü, bilineer dönüşümler, Bäcklund dönüşümü, Painlevé integrallenebilirliği, Darboux dönüşümü, periyodik çözümler gibi uygulamalarda önemli bir yere sahiptir. Değişken katsayılı mKdV denklemi

$$u_t + \alpha(t)\, u_x - \beta(t)\, u^2 u_x + \gamma(t)\, u_{xxx} = 0 \tag{7.32}$$

ile verilir (Yan, 2009). (7.32) denkleminde $\alpha(t) = 0,\ \beta(t) = -1,\ \gamma(t) = 1$ yazılırsa

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \tag{7.33}$$

sabit katsayılı mKdV denklemi elde edilir.

Zaman kesir mertebeli mKdV denklemi

$$D_t^{\alpha} u + u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \tag{7.34}$$

şeklindedir ve $t > 0,\ 0 < \alpha < 1$ dir. Burada $\alpha,\ t$ ye göre kesirli Riemann-Liouville türevini belirtir (Kurulay ve Bayram, 2010). (7.34) denkleminde $\alpha = 1$ alınırsa denklem (7.33) şeklindeki tamsayı mertebeli mKdV denklemine dönüşür.

### 7.2.1 Lie simetri üreteçleri

(7.34) denklemi (4.26) ile verilen üreteci kabul etsin. O halde $X^{(\alpha,3)}$ uzanımı

$$X^{(\alpha,3)} = X + \eta^{x} \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \eta^{\alpha,t} \frac{\partial}{\partial u_t^{\alpha}} \tag{7.35}$$

olur. (7.35) uzanımını (7.34) denklemine uygularsak

$$\eta^{\alpha,t} + 2u\eta u_x + u^2 \eta^{x} + \eta^{xxx} = 0 \tag{7.36}$$

elde edilir. $\eta^{x}, \eta^{xxx},\ \eta^{\alpha,t}$ değerleri (7.36) ifadesinde yerine yazıldıktan sonra $D_t^{\alpha} u$ yerine $-u^2 u_x - u_{xxx}$ yazılırsa ve $u$ nun kısmi türevli terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse,

$$\tau_x = \tau_u = \xi_t = \xi_u = \eta_{uu} = 0 \tag{7.37}$$

olduğu görülür ve

$$-3\xi_x + \alpha\tau_t = 0,$$

$$\eta_{xu} - \xi_{xx} = 0,$$

$$3\eta_{xxu} + 2u\eta - u^2\xi_x - \xi_{xxx} + \alpha u^2\tau_t = 0, \tag{7.38}$$

$$\eta_{xxx} + u^2\eta_x + \partial_t^a\eta - u\partial_t^a(\eta_u) = 0,$$

$$\binom{\alpha}{n}\partial_t^a\eta_u - \binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau = 0,$$

bulunur ve $n = 1, 2, ...$ dir. (7.37) ve (7.38) sistemleri beraber çözülürse

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 + c_2\alpha x \\ \tau &= c_3 + 3tc_2 \\ \eta &= -c_2\alpha u \end{aligned} \tag{7.39}$$

sonsuz küçükleri bulunur ve $c_1, c_2, c_3$ sabitlerdir. $c_1 = 1,\ c_2 = c_3 = 0$ değerleri (4.26) Lie simetri üretecinde yerine yazılırsa

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \tag{7.40}$$

elde edilir. Aynı işlem $c_2 = 1,\ c_1 = c_3 = 0$ değerleri için yapılırsa

$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3t}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} \tag{7.41}$$

ve $c_3 = 1,\ c_1 = c_2 = 0$ değerleri için benzer işlemler yapılırsa

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{7.42}$$

bulunur. Fakat (4.29) koşulundan dolayı (7.34) denklemi $X_3$ üretecini kabul etmez.

**Not:** $\alpha = 1$ *olması durumunda* (7.34) *ile verilen denklem tamsayı mertebeli kısmi diferensiyel denkleme dönüşür. Bu durumda denklemin üreteçlerini bulmak için* *bölüm 4.1 de anlatılan işlemler yapılırsa*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{7.43}$$

*üreteçleri bulunur.* (7.39) *sonsuz küçüklerinde* $\alpha = 1$ *yazılırsa yine* (7.43) *ile verilen üreteçlerle aynı üreteçler bulunur.*

(7.40) ve (7.41) Lie simetri üreteçleri için komütatör tablosu

| $[X_i, X_j]$ | $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|---|
| $X_1$ | 0 | $X_1$ |
| $X_2$ | $-X_1$ | 0 |

formundadır.

### 7.2.2 Erdélyi-Kober fonksiyonları yardımıyla indirgeme

Erdélyi-Kober fonksiyonları yardımıyla indirgeme yapmak için $X_2$ üreteci kullanılırsa karakteristik denklem

$$\frac{dx}{x} = \frac{\alpha dt}{3t} = \frac{du}{-u} \tag{7.44}$$

şeklinde yazılır. (7.44) karakteristik denkleminden aşağıdaki fonksiyon elde edilir.

$$\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{3}},\ u = t^{-\frac{\alpha}{3}} g(\zeta)\,. \tag{7.45}$$

(7.45) fonksiyonu yardımıyla (7.34) denklemi

$$\left(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\alpha-\frac{\alpha}{3},\alpha} g\right)(\zeta) + g^2 g_\zeta + g_{\zeta\zeta\zeta} = 0 \tag{7.46}$$

lineer olmayan adi diferensiyel denkleme indirgenir

Şimdi (7.34) denkleminin (7.46) adi diferensiyel denklemine nasıl indirgeneceğini gösterelim.

$n = 1, 2, \ldots$ iken $n-1 < \alpha < n$ olması durumunda (3.3) Riemann-Liouville kesirli türevi kullanılırsa

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} s^{-\frac{\alpha}{3}} g\left(xs^{-\frac{\alpha}{3}}\right) ds\right] \tag{7.47}$$

elde edilir. (6.15) dönüşümü ve bu dönüşüme bağlı olan (6.16) değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_\infty^1 \left(\left(\frac{t}{v}\right)(v-1)\right)^{n-\alpha-1}\left(\frac{t}{v}\right)^{-\frac{\alpha}{3}} g\left(x\left(\frac{t}{v}\right)^{-\frac{\alpha}{3}}\right)\left(-\frac{t}{v^2}\right) dv\right] \\
&= \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{\alpha}{3}}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_1^\infty (v-1)^{n-\alpha-1} v^{-\left(n+1-\alpha-\frac{\alpha}{3}\right)} g\left(\zeta v^{\frac{\alpha}{3}}\right) dv\right] \qquad (7.48) \\
&= \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{\alpha}{3}}\left(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{\alpha}{3},n-\alpha} g\right)(\zeta)\right]
\end{aligned}$$

bulunur.

**Not:** $\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{3}}$ iken $t\frac{\partial}{\partial t}\phi(\xi)$ değerinin eşitini bulalım.

$$\begin{aligned}
t\frac{\partial}{\partial t}\phi(\zeta) &= t\ \zeta_t\ \phi'(\zeta) \\
&= tx\left(-\frac{\alpha}{3}\right)t^{-\frac{\alpha}{3}-1}\phi'(\zeta) \qquad (7.49) \\
&= -\frac{\alpha}{3}\zeta\frac{d}{d\zeta}\phi(\zeta).
\end{aligned}$$

(7.49) eşitliği (7.48) ifadesinin sağ tarafında kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{\alpha}{3}}\left(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{\alpha}{3},n-\alpha} g\right)(\zeta)\right] &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{n-\alpha-\frac{\alpha}{3}}\left(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{\alpha}{3},n-\alpha} g\right)(\zeta)\right)\right] \\
&= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[t^{n-\alpha-\frac{\alpha}{3}}\left(n-\frac{4\alpha}{3}-\frac{\alpha}{3}\zeta\frac{d}{d\zeta}\left(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{\alpha}{3},n-\alpha} g\right)(\zeta)\right)\right].
\end{aligned} \tag{7.50}$$

olur ve aynı işlem $n-1$ defa tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{\alpha}{3}}\left(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{\alpha}{3},n-\alpha}g\right)(\zeta)\right] &= t^{-\frac{4\alpha}{3}}\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{4\alpha}{3}+j-\frac{\alpha}{3}\zeta\frac{d}{d\zeta}\right)\left(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{\alpha}{3},n-\alpha}g\right)(\zeta) \\
&= t^{-\frac{4\alpha}{3}}\left(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\alpha-\frac{\alpha}{3},\alpha}g\right)(\zeta)
\end{aligned} \tag{7.51}$$

bulunur. $(7.51)$, $(7.48)$ ifadesinin sağ tarafında yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=t^{-\frac{4\alpha}{3}}\left(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\alpha-\frac{\alpha}{3},\alpha}g\right)(\zeta) \tag{7.52}$$

elde edilir. Ayrıca $\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{3}}$ ve $u=t^{-\frac{\alpha}{3}}g(\zeta)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
u^2 &= t^{-\frac{2\alpha}{3}}g^2, \\
u_x &= t^{-\frac{2\alpha}{3}}g_\zeta, \\
u_{xx} &= t^{-\alpha}g_{\zeta\zeta}, \\
u_{xxx} &= t^{-\frac{4\alpha}{3}}g_{\zeta\zeta\zeta}
\end{aligned}$$

değerleri ve (7.52), (7.34) denkleminde yerine yazılırsa (7.46) adi diferensiyel denklemi elde edilir.

### 7.2.3 Karakteristik metot

(7.34) denklemini $X_1$ ve $X_2$ üreteçleri yardımıyla adi diferensiyel denkleme indirgeyelim ve değişmez çözümünü bulalım.

**Durum 1:** $X_1=\frac{\partial}{\partial x}$ üreteci için karakteristik denklem

$$\frac{dt}{0}=\frac{dx}{1}=\frac{du}{0}$$

ile yazılır ve $u=f(t)$ bulunur. $u=f(t)$ eşitliği (7.34) denkleminde yerine yazılırsa

$$\partial_t^\alpha f(t)=0\Rightarrow f(t)=c_1t^{\alpha-1}$$

bulunur ve değişmez çözüm aşağıdaki şekildedir.

$$u = c_1 t^{\alpha-1}$$

**Durum 2:** $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3t}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}$ üreteci için karakteristik denklem

$$\frac{\alpha dt}{3t} = \frac{dx}{x} = \frac{du}{-u}$$

şeklinde verilir ve bulunan karakteristik denklem çözülürse; $\zeta = tx^{-\frac{3}{\alpha}}$ iken $u(x,t) = \frac{1}{x}f(\zeta)$ çözümü bulunur. Bulunan çözüme göre;

$$\begin{aligned}
u^2 &= \tfrac{1}{x^2}f^2, \\
u_x &= -\tfrac{f}{x^2} - \tfrac{3f'\zeta}{x^2\alpha}, \\
u_{xxx} &= -\tfrac{6f}{x^4} - \tfrac{33f'\zeta}{x^4\alpha} - \tfrac{54f''\zeta^2}{x^4\alpha^2} - \tfrac{54f'\zeta}{x^4\alpha^2} \\
&\quad -\tfrac{27f'''\zeta^3}{x^4\alpha^3} - \tfrac{81f''\zeta^2}{x^4\alpha^3} - \tfrac{27f'\zeta}{x^4\alpha^3}, \\
u_t^\alpha &= \tfrac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)}x^{-1-\frac{3}{\alpha}}t^{1-\alpha}f_\zeta^\alpha,
\end{aligned}$$

ifadeleri (7.34) denkleminde yerine yazılırsa $\zeta = tx^{-\frac{3}{\alpha}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tfrac{\zeta\zeta^{-\alpha}f_\zeta^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} &= -f^3 - 6f + f'\zeta\left(-\tfrac{3f^2}{\alpha} - \tfrac{33}{\alpha} - \tfrac{54}{\alpha^2} - \tfrac{27}{\alpha^3}\right) \\
&\quad +f''\zeta^2\left(-\tfrac{54}{\alpha^2} - \tfrac{81}{\alpha^3}\right) - \tfrac{27f'''\zeta^3}{\alpha^3}
\end{aligned}$$

kesir mertebeli değişken katsayılı adi diferensiyel denklemi elde edilir ve bu denklem çözülürse (7.34) denkleminin çözümü bulunur.

### 7.2.4 Korunumluluk kanunları

Bu bölümde (7.34) ile ifade edilen zaman kesir mertebeli mKdV denklemi için korunumluluk kanunlarını bulacağız. Bunun için öncelikle formal Lagrangianı bulalım.

(7.34) denklemi için formal Lagrangian; denklem ile yeni bir değişken olan $v\,(x,t)$ nin çarpılması ile

$$L = v\,(x,t)\left(D_t^\alpha u + u^2 u_x + u_{xxx}\right) \tag{7.53}$$

şeklinde elde edilir. Formal Lagrangian (5.29) şeklinde ifade edilen eşlenik denklem ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\partial L}{\partial u} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) - D_x^3\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right) + (D_t^\alpha)^* \frac{\partial L}{\partial (D_t^\alpha u)} \\ &= -u^2 v_x - v_{xxx} + (D_t^\alpha)^* v \end{aligned} \tag{7.54}$$

bulunur. (7.54) eşlenik denklemi için $v = 1$ çözüm olur. $T^x$ korunumlu vektör bileşenlerini bulmak için, (5.45) formülü (7.34) denklemi için açılırsa

$$\begin{aligned} T^x &= W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} + D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right)\right] + D_x(W)\left[-D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right)\right] \\ &+ D_x^2(W)\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right) \end{aligned} \tag{7.55}$$

olur. Burada $0 < \alpha < 1$ olmasından dolayı $T^t$ korunumlu vektörün bileşenlerini bulmak için (5.41) ifadesini kullanacağız.

**Durum 1:** $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ üreteci için (5.33) ifadesi kullanılırsa

$$W = -u_x \tag{7.56}$$

elde edilir. O halde (7.53) formal Lagrangianı ve (7.56) Lie karakteristik fonksiyonu (5.41) ve (7.55) formüllerinde yerine yazılırsa (7.34) denklemi için sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned} T_1^x &= -u^2 v u_x - u_x v_{xx} + u_{xx} v_x - v u_{xxx}, \\ T_1^t &= J_t^{1-\alpha}(-u_x)\, v + I(-u_x, D_t v) \end{aligned} \tag{7.57}$$

şeklinde elde edilirler. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları (7.57) ifadesinde $v = 1$ yazılırsa, aşağıdaki şekilde elde edilirler

$$\begin{aligned} T_1^x &= -u^2 u_x - u_{xxx}, \\ T_1^t &= -J_t^{1-\alpha}(u_x)\,. \end{aligned} \tag{7.58}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} D_x(T_1^x) + D_t(T_1^t) &= D_x\left(-u^2u_x - u_{xxx}\right) - D_t\left(J_t^{1-\alpha}\left(u_x\right)\right) \\ &= D_x\left(D_t^\alpha u\right) - D_t^\alpha\left(D_x u\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $D_iT^i$ koşulu sağlanır.

**Durum 2:** $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3t}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}$ üreteci için

$$W = -u - xu_x - \frac{3t}{\alpha}u_t \tag{7.59}$$

bulunur. O halde $X_1$ üreteci için yaptığımız işlemleri aynen uygularsak sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned} T_2^x &= -u^3v - u^2vxu_x - \frac{3t}{\alpha}u_tu^2v - uv_{xx} - xu_xv_{xx} - \frac{3t}{\alpha}u_tv_{xx} \\ &\quad +2u_xv_x + xv_xu_{xx} + \frac{3t}{\alpha}u_{xt}v_x - 3vu_{xx} - xvu_{xxx} - \frac{3t}{\alpha}vu_{xxt}, \end{aligned} \tag{7.60}$$

$$T_2^t = J_t^{1-\alpha}\left(-u - xu_x - \tfrac{3t}{\alpha}u_t\right)v + I\left(-u - xu_x - \tfrac{3t}{\alpha}u_t, D_tv\right)$$

olur. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları ise

$$\begin{aligned} T_2^x &= -u^3 - u^2xu_x - \frac{3t}{\alpha}u_tu^2 - 3u_{xx} - xu_{xxx} - \frac{3t}{\alpha}u_{xxt}, \\ T_2^t &= -J_t^{1-\alpha}\left(u + xu_x + \frac{3t}{\alpha}u_t\right) \end{aligned} \tag{7.61}$$

şeklinde bulunurlar (Akbulut ve Taşcan, 2017).

## 7.3. Lineer Olmayan Zaman Kesir Mertebeli Hiperbolik Denklemi

Lineer olmayan zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi $t > 0,\ x \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$u_t^\alpha = (uu_x)_x \tag{7.62}$$

şeklinde verilir. Burada $\alpha$, kesirli Riemann-Liouville anlamında türevi belirtir ve $1 < \alpha \leq 2$ dir (Al-Khaled, 2015).

### 7.3.1 Lie simetri üreteçleri

(7.62) denklemi (4.26) ile verilen üreteci kabul etsin. O halde $X^{(\alpha,2)}$ uzanımı

$$X^{(\alpha,2)} = X + \eta^{x}\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{\alpha,t}\frac{\partial}{\partial u_t^{\alpha}} \tag{7.63}$$

olması gerekir. Uzanımını (7.62) denklemine uygularsak

$$\eta^{\alpha,t} - 2u_x\eta^{x} - \eta u_{xx} - u\eta^{xx} = 0 \tag{7.64}$$

elde edilir. $\eta^{x}, \eta^{xx},\ \eta^{\alpha,t}$ değerleri yukarıda yerine yazıldıktan sonra $D_t^{\alpha}u$ yerine $u_x^2 + uu_{xx}$ yazılırsa ve $u$ nun kısmi türevli terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse,belirleyici denklem sistemi bulunur ve belirleyici denklem sisteminden;

$$\tau_x = \tau_u = \xi_t = \xi_u = 0 \tag{7.65}$$

olduğu görülür ve bu eşitlikler belirleyici denklem sisteminde yerine yazılırsa;

$$\begin{gathered}
-\alpha\tau_t - u\eta_{uu} - \eta_u + 2\xi_x = 0, \\
-2u\eta_{xu} + u\xi_{xx} - 2\eta_x = 0, \\
2u\xi_x - \eta - \alpha u\tau_t = 0, \\
-u\eta_{xx} + \partial_t^{a}\eta - u\partial_t^{a}\eta_u = 0, \\
\binom{\alpha}{n}\partial_t^{a}\eta_u - \binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau = 0
\end{gathered} \tag{7.66}$$

bulunur, ayrıca $n = 1, 2, ...$dir. (7.65) ve (7.66) beraber çözülürse $c_1, c_2, c_3, c_4$ sabitler olmak üzere;

$$\begin{aligned} \eta &= -c_3\alpha u + 2uc_2, \\ \tau &= c_4 + tc_3, \\ \xi &= c_1 + c_2 x \end{aligned} \tag{7.67}$$

sonsuz küçükleri bulunur. $c_1 = 1,\ c_2 = c_3 = c_4 = 0$ değerleri (7.67) sonsuz küçüklerinde yerine yazılırsa ve bulunan sonsuz küçükler (4.26) Lie simetri üretecinde yerine yazılırsa

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{7.68}$$

$c_2 = 1,\ c_1 = c_3 = c_4 = 0$ için;

$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{7.69}$$

$c_3 = 1,\ c_1 = c_2 = c_4 = 0$ için;

$$X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{7.70}$$

$c_4 = 1,\ c_1 = c_2 = c_3 = 0$ için;

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{7.71}$$

bulunur fakat (4.29) koşulundan dolayı (7.62) denklemi $X_4$ üretecini kabul etmez.

**Not:** $\alpha = 2$ *olması durumunda* (7.62) *ile verilen denklem tamsayı mertebeli kısmi diferensiyel denkleme dönüşür. Bu durumda denklemin üreteçlerini bulmak için 4.1 bölümünde anlatılan işlemler yapılırsa bulunan denklem için*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha u\frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{7.72}$$

*üreteçleri bulunur.* (7.67) *sonsuz küçüklerinde* $\alpha = 2$ *yazılırsa yine* (7.72) *ile verilen üreteçlerle aynı üreteçler bulunur.*

Bulunan Lie simetri üreteçleri için komütatör tablosu

| $[X_i, X_j]$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|
| $X_1$ | $0$ | $X_1$ | $0$ |
| $X_2$ | $-X_1$ | $0$ | $0$ |
| $X_3$ | $0$ | $0$ | $0$ |

olur.

### 7.3.2 Karakteristik metot

(7.62) denklemini $X_1$, $X_2$ ve $X_3$ üreteçleri yardımıyla adi diferensiyel denkleme indirgeyelim ve değişmez çözümünü bulalım.

**Durum 1:** $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ üreteci için karakteristik denklem

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{0}$$

ile yazılır ve $u = f(t)$ bulunur. $u = f(t)$ eşitliği (7.62) denkleminde yerine yazılırsa

$$\partial_t^{\alpha} f(t) = 0 \Rightarrow f(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2}$$

bulunur ve değişmez çözüm

$$u = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2}$$

olarak elde edilir.

**Durum 2:** $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$ üreteci için

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{x} = \frac{du}{2u}$$

karakteristik denklemi bulunur ve karakterisitik denklemin çözülmesiyle $u = x^2 f(t)$ çözümü elde edilir. Bulunan çözüm (7.62) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^{\alpha} f}{\partial t^{\alpha}} = 4f^2 + 2f^2$$

kesir mertebeli adi diferensiyel denklemi elde edilir ve bu denklemin çözümünden (7.62) denklemi için çözüm bulunabilir.

**Durum 3:** $X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha u \frac{\partial}{\partial u}$ üreteci için

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{0} = \frac{du}{-\alpha u}$$

karakteristik denkleminin çözülmesiyle $u = t^{-\alpha} f(x)$ bulunur. O halde (7.62) denklemi $u = t^{-\alpha} f(x)$ çözümü yardımıyla

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} = \left(f'\right)^2 + f''$$

adi diferensiyel denklemine indirgenir ve bulunan adi diferensiyel denklemin çözümü

$$f(x) = -\frac{4\pi^{\left(\frac{1}{4}\right)}2^{\alpha}x + 4\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\alpha\ln(2) - \sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\ln\left(\frac{\left(\exp\left(\frac{2\pi^{\left(\frac{1}{4}\right)}2^{\alpha}x}{\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}}\right)c_1 - c_2\right)^4\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{16\pi}\right)}{4\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}}$$

olarak bulunur.

O halde (7.62) denkleminin çözümü

$$u = -t^{-\alpha}\left(\frac{4\pi^{\left(\frac{1}{4}\right)}2^{\alpha}x + 4\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\alpha\ln(2) - \sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\ln\left(\frac{\left(\exp\left(\frac{2\pi^{\left(\frac{1}{4}\right)}2^{\alpha}x}{\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}}\right)c_1 - c_2\right)^4\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{16\pi}\right)}{4\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}}\right)$$

olur.

### 7.3.3 Korunumluluk kanunları

Lineer olmayan zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi için formal Lagrangian (5.25) yardımıyla

$$L = v(x,t)\left(u_t^{\alpha} - u_x^2 - uu_{xx}\right) \tag{7.73}$$

olarak bulunur. O halde (5.29) ve (7.73) beraber kullanılırsa

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\partial L}{\partial u} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) + D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right) + \left(D_t^\alpha\right)^* \frac{\partial L}{\partial\left(D_t^\alpha u\right)} \\ &= -uv_{xx} + \left(D_t^\alpha\right)^* v \end{aligned} \tag{7.74}$$

bulunur. (7.74) eşlenik denkleminde $v$ yerine $u$ yazılırsa (7.62) denklemi bulunmadığından, (7.3) denklemi öz eşlenik değildir. (7.24) eşlenik denklemi için $v = 1$ ve $v = c_1x+c_2$ birer çözüm olur.

(5.45) formülünü denklemimizin mertebesi 2 olduğundan 2. mertebeye göre açarsak

$$T^x = W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)\right] + D_x(W)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right] \tag{7.75}$$

olur ve $1 < \alpha < 2$ olmasından dolayı $T^t$ korunumlu vektörün bileşenlerini bulmak için (5.43) formülünü kullanacağız.

**Durum 1:** $X_1$ üreteci için

$$W = -u_x \tag{7.76}$$

olur. Bulunan formal Lagrangian ve Lie karakteristik fonksiyonu (5.43) ve (7.75) formüllerinde yerine yazılırsa (7.3) denklemin için sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned} T_1^x &= u_x^2 v - u_x v_x u + uvu_{xx}, \\ T_1^t &= D_t^{1-\alpha}\left(-u_x\right)v - J_t^{2-\alpha}\left(-u_x\right)v_t - I\left(-u_x, D_t^2 v\right) \end{aligned} \tag{7.77}$$

şeklinde elde edilirler. Öncelikle $v = 1$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} T_{1,1}^x &= u_x^2 + uu_{xx}, \\ T_{1,1}^t &= D_t^{1-\alpha}\left(-u_x\right) \end{aligned} \tag{7.78}$$

(7.77) korunumluluk kanunlarında $v=c_1x+c_2$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} T^x_{1,2} &= (c_1x+c_2)\left(u_x^2+uu_{xx}\right)-uc_1u_x, \\ T^t_{1,2} &= D_t^{1-\alpha}(-u_x)(c_1x+c_2) \end{aligned} \tag{7.79}$$

bulunur.

**Durum 2:** $X_2$ üreteci için

$$W=2u-xu_x \tag{7.80}$$

elde edilir. Sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned} T^x_2 &= -3uu_xv++2u^2v_x+xu_x^2v-xu_xuv_x+uvxu_{xx}, \\ T^t_2 &= D_t^{1-\alpha}(2u-xu_x)v-J_t^{2-\alpha}(2u-xu_x)v_t-I\left(2u-xu_x,D_t^2v\right) \end{aligned} \tag{7.81}$$

olur. Öncelikle (7.81) korunumluluk kanunlarında $v=1$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} T^x_{2,1} &= -3uu_x+xu_x^2+uxu_{xx}, \\ T^t_{2,1} &= D_t^{1-\alpha}(2u-xu_x) \end{aligned} \tag{7.82}$$

bulunur. (7.81) korunumluluk kanunlarında $v=c_1x+c_2$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} T^x_{2,2} &= c_1x\left(-4uu_x+xu_x^2+xuu_{xx}\right)-3uu_xc_2 \\ &\quad +c_2x\left(u_x^2+uu_{xx}\right)+2u^2c_1, \\ T^t_{2,2} &= D_t^{1-\alpha}(2u-xu_x)(c_1x+c_2) \end{aligned} \tag{7.83}$$

korunumluluk kanunları elde edilir.

**Durum 3:** $X_3$ üreteci için $W = -u - \frac{t}{\alpha} u_t$ olmak üzere korunumluluk kanunları;

$$
\begin{aligned}
T_3^x &= 2uu_x v - u^2 v_x + \frac{t}{\alpha} u_x u_t v - \frac{t}{\alpha} u_t u v_x + \frac{t}{\alpha} u v u_{xt}, \\
T_3^t &= D_t^{1-\alpha}\left(-u - \tfrac{t}{\alpha} u_t\right) v - J_t^{2-\alpha}\left(-u - \tfrac{t}{\alpha} u_t\right) v_t - I\left(-u - \tfrac{t}{\alpha} u_t, D_t^2 v\right)
\end{aligned}
\tag{7.84}
$$

olur. (7.84) formülünde $v = 1$ yazarsak;

$$
\begin{aligned}
T_{3,1}^x &= 2uu_x + \frac{t}{\alpha} u_x u_t + \frac{t}{\alpha} u u_{xt}, \\
T_{3,1}^t &= D_t^{1-\alpha}\left(-u - \tfrac{t}{\alpha} u_t\right)
\end{aligned}
\tag{7.85}
$$

olur ve $v = c_1 x + c_2$ yazılırsa sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları

$$
\begin{aligned}
T_{3,2}^x &= (c_1 x + c_2)\left(\frac{t}{\alpha} u u_{xt} + 2uu_x + \frac{t}{\alpha} u_x u_t\right) - \frac{t}{\alpha} u_t u c_1 - u^2 c_1, \\
T_{3,2}^t &= D_t^{1-\alpha}\left(-u - \tfrac{t}{\alpha} u_t\right)(c_1 x + c_2)
\end{aligned}
\tag{7.86}
$$

olur.

## 7.4. Zaman Kesir Mertebeli Viscous Burgers Denklemi

Viscous Burgers denklemi;

$$u_t + uu_x - \vartheta u_{xx} = 0 \tag{7.87}$$

şeklinde verilir ve buradaki $\vartheta$ viskozite katsayıdır. Burgers denklemi; özellikle akışkanlar mekaniğinde lineer olmayan dalgaların yayılması için bir modeldir ayrıca uygulamalı matematik, gazlar dinamiği modellemelerinde karşımıza çıkar.

$t > 0,\ x \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha < 1$ ve $\alpha$, kesirli Riemann-Liouville türevini göstermek üzere zaman kesir mertebeli Viscous Burgers denklemi;

$$u_t^\alpha + uu_x - \vartheta u_{xx} = 0 \tag{7.88}$$

olarak verilmektedir (İslam vd., 2014).

### 7.4.1 Lie simetri üreteçleri

(7.88) denklemi (4.26) ile verilen üreteci kabul etsin. O halde $X^{(\alpha,2)}$ uzanımı

$$X^{(\alpha,2)} = X + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{\alpha,t} \frac{\partial}{\partial u_t^\alpha} \tag{7.89}$$

olur. Uzanımını (7.88) denklemine uygularsak

$$\eta^{\alpha,t} + \eta u_x + u\eta^x - \vartheta \eta^{xx} = 0 \tag{7.90}$$

elde edilir. $\eta^x, \eta^{xx},\ \eta^{\alpha,t}$ değerleri (7.90) ifadesinde yerine yazıldıktan sonra $u_t^\alpha$ yerine $-uu_x+vu_{xx}$ yazılırsa ve $u$ nun kısmi türevli terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse,belirleyici denklem sistemi bulunur . Belirleyici denklem sisteminden;

$$\tau_x = \tau_u = \xi_t = \xi_u = \eta_{uu} = 0 \tag{7.91}$$

olduğu görülür ve bu eşitlikler belirleyici denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{gathered}
\alpha u \tau_t - u\xi_x - 2u\vartheta\eta_x + \eta + \vartheta\xi_{xx} = 0, \\
-\alpha\tau_t + 2\xi_x = 0, \\
u\eta_x - \vartheta\eta_{xx} + \partial_t^a \eta - u\partial_t^a \eta_u = 0, \\
\binom{\alpha}{n} \partial_t^a \eta_u - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1} \tau = 0
\end{gathered} \tag{7.92}$$

bulunur ayrıca $n = 1, 2, ...$dir. (7.91) ve (7.92) beraber çözülürse $c_1, c_2, c_3$ sabitler olmak üzere;

$$\begin{aligned} \eta &= -u\alpha c_2, \\ \tau &= c_3 + 2tc_2, \\ \xi &= c_1 + c_2 x\alpha \end{aligned} \tag{7.93}$$

sonsuz küçükleri bulunur. $c_1 = 1,\ c_2 = c_3 = 0$ değerleri (7.93) sonsuz küçüklerinde yerine yazılırsa;

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{7.94}$$

$c_2 = 1,\ c_1 = c_3 = 0$ için;

$$X_2 = x\alpha\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\alpha\frac{\partial}{\partial u}, \tag{7.95}$$

$c_3 = 1,\ c_1 = c_2 = 0$ için;

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{7.96}$$

bulunur fakat (4.29) koşulundan dolayı (7.88) denklemi $X_3$ üretecini kabul etmez.

**Not:** $\alpha = 1$ *olması durumunda* (7.88) *ile verilen denklem tamsayı mertebeli kısmi diferensiyel denkleme dönüşür. Bu durumda denklemin üreteçlerini bulmak için 4.1 bölümünde anlatılan işlemler yapılırsa bulunan denklem için* (7.94) , (7.95) *üretecinde* $\alpha = 1$ *yazılması ile elde edilen üreteç ve* (7.96) *Lie simetri üreteçlerine ek olarak*

$$X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_5 = \frac{xt}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{t^2}{2}\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{x}{2} - \frac{ut}{2}\right)\frac{\partial}{\partial u},$$

*üreteçleri bulunur.*

Bulunan Lie simetri üreteçleri için komütatör tablosu

| $[X_i, X_j]$ | $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|---|
| $X_1$ | 0 | $X_1$ |
| $X_2$ | $-X_1$ | 0 |

olur.

### 7.4.2 Erdélyi-Kober fonksiyonları yardımıyla indirgeme

$X_2$ üreteci kullanılırsa ve bu üreteç için karakteristik denklem

$$\frac{dx}{x} = \frac{\alpha dt}{2t} = \frac{du}{-u} \tag{7.97}$$

olur. Karakteristik denkleminin integrali alınırsa

$$\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{2}},\ u = t^{-\frac{\alpha}{2}} g\left(\zeta\right) \tag{7.98}$$

elde edilir ve (7.88) denklemi

$$\left(P_{\frac{2}{\alpha}}^{1-\alpha-\frac{\alpha}{2},\alpha} g\right)(\zeta) + gg_{\zeta} - \vartheta g_{\zeta\zeta} = 0 \tag{7.99}$$

lineer olmayan adi diferensiyel denklemine indirgenir.

Şimdi (7.88) denkleminin (7.99) adi diferensiyel denklemine nasıl indirgeneceğini gösterelim.

$n = 1, 2, \ldots$ iken $n - 1 < \alpha < n$ olması durumunda Riemann-Liouville kesirli türevine göre;

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}} \left[ \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)} \int_{0}^{t} \left(t-s\right)^{n-\alpha-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} g\left(xs^{-\frac{\alpha}{2}}\right) ds \right] \tag{7.100}$$

yazılır. (6.15) dönüşümü ve (6.16) değerleri (7.100) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} &= \frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{\infty}^{1} \left( \left(\frac{t}{v}\right) (v-1) \right)^{n-\alpha-1} \left(\frac{t}{v}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} g\left( x \left(\frac{t}{v}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \right) \left(-\frac{t}{v^2}\right) dv \right] \\
&= \frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}} \left[ t^{n-\alpha-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{1}^{\infty} (v-1)^{n-\alpha-1} v^{-\left(n-\alpha+1-\frac{\alpha}{2}\right)} g\left(\zeta v^{\frac{\alpha}{2}}\right) dv \right] \qquad (7.101) \\
&= \frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}} \left[ t^{n-\alpha-\frac{\alpha}{2}} \left( K_{\frac{2}{\alpha}}^{1-\frac{\alpha}{2},n-\alpha} g \right) (\zeta) \right]
\end{aligned}$$

bulunur.

**Not:** $\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{2}}$ iken;

$$\begin{aligned} t\tfrac{\partial}{\partial t}\phi(\zeta) &= t\ \zeta_t\ \phi'(\zeta) \\ &= tx\left(-\tfrac{\alpha}{5}\right)t^{-\frac{\alpha}{2}-1}\phi'(\zeta) \\ &= -\tfrac{\alpha}{2}\zeta\tfrac{d}{d\zeta}\phi(\zeta) \end{aligned} \tag{7.102}$$

dır.

(7.101) ifadesinin sağ tarafına dönersek ve (7.102) kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{\alpha}{2}}\left(K_{\frac{2}{\alpha}}^{1-\frac{\alpha}{2},n-\alpha}g\right)(\zeta)\right] &= \tfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[\tfrac{\partial}{\partial t}\left(t^{n-\alpha-\frac{\alpha}{2}}\left(K_{\frac{2}{\alpha}}^{1-\frac{\alpha}{2},n-\alpha}g\right)(\zeta)\right)\right] \\ &= \tfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[t^{n-\alpha-\frac{\alpha}{2}}\left(n-\alpha-\tfrac{\alpha}{2}-\tfrac{\alpha}{2}\zeta\tfrac{d}{d\zeta}\left(K_{\frac{2}{\alpha}}^{1-\frac{\alpha}{2},n-\alpha}g\right)(\zeta)\right)\right], \end{aligned} \tag{7.103}$$

aynı işlem $n-1$ defa tekrarlanırsa

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{\alpha}{2}}\left(K_{\frac{2}{\alpha}}^{1-\frac{\alpha}{2},n-\alpha}g\right)(\zeta)\right] &= t^{-\alpha-\frac{\alpha}{2}}\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\alpha-\tfrac{\alpha}{2}+j-\tfrac{\alpha}{2}\zeta\tfrac{d}{d\zeta}\right)\left(K_{\frac{2}{\alpha}}^{1-\frac{\alpha}{2},n-\alpha}g\right)(\zeta) \\ &= t^{-\alpha-\frac{\alpha}{2}}\left(P_{\frac{2}{\alpha}}^{1-\alpha-\frac{2\alpha}{5},\alpha}g\right)(\zeta) \end{aligned} \tag{7.104}$$

elde edilir ve

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = t^{-\frac{3\alpha}{2}}\left(P_{\frac{2}{\alpha}}^{1-\alpha-\frac{\alpha}{2},\alpha}g\right)(\zeta) \tag{7.105}$$

olur. $\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{2}}$ ve $u = t^{-\frac{\alpha}{2}}g(\zeta)$ olmasından dolayı;

$$\begin{aligned} u_x &= t^{-\alpha}g_\zeta, \\ u_{xx} &= t^{-\frac{3\alpha}{2}}g_{\zeta\zeta}, \end{aligned} \tag{7.106}$$

olur. $u$ nun yukarıda bulunan türevleri (7.88) denkleminde yerine yazılırsa (7.99) adi diferensiyel denklemi elde edilir.

### 7.4.3 Karakteristik metot

(7.88) denklemini $X_1,\ X_2, X_3$ üreteçleri yardımıyla adi diferensiyel denkleme indirgeyelim ve değişmez çözümünü bulalım.

**Durum 1:** $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ üreteci için karakteristik denklem

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{0}$$

ile yazılır ve $u = f(t)$ bulunur. $u = f(t)$ eşitliği (7.88) denkleminde yerine yazılırsa

$$\partial_t^{\alpha} f\left(t\right) = 0 \Rightarrow f\left(t\right) = c_1 t^{\alpha-1}$$

bulunur ve değişmez çözüm

$$u = c_1 t^{\alpha-1}$$

olarak elde edilir.

**Durum 2:** $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2t}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}$ üreteci için karakteristik denklem

$$\frac{\alpha dt}{2t} = \frac{dx}{x} = \frac{du}{-u}$$

şeklinde verilir ve bulunan karakteristik denklem çözülürse; $\zeta = tx^{-\frac{3}{\alpha}}$ iken $u(x,t) = x^{-1} f\left(\zeta\right)$ çözümü bulunur. Bulunan çözüme göre

$$\begin{aligned} u_x &= -\tfrac{f}{x^2} - \tfrac{2f'\zeta}{x^2\alpha}, \\ u_{xx} &= \tfrac{2f}{x^3} + \tfrac{6f'\zeta}{x^3\alpha} + \tfrac{4f''\zeta^2}{x^3\alpha^2} + \tfrac{44f'\zeta}{x^3\alpha^2}, \\ u_t^{\alpha} &= \tfrac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} x^{-1-\frac{2}{\alpha}} t^{1-\alpha} f_{\zeta}^{\alpha}, \end{aligned}$$

türevli ifadeleri bulunur ve (7.88) denkleminde yerine yazılırsa $\zeta = tx^{-\frac{3}{\alpha}}$ olmak üzere

$$\tfrac{\zeta\zeta^{-\alpha} f_{\zeta}^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} = f^2 + 2\vartheta f + f'\zeta\left(\tfrac{2f}{\alpha} + \tfrac{6\vartheta}{\alpha} + \tfrac{4\vartheta}{\alpha^2}\right) + \tfrac{4\vartheta f''\zeta^2}{\alpha^2}$$

kesir mertebeli değişken katsayılı adi diferensiyel denklemi elde edilir ve bu denklem çözülürse (7.88) denkleminin çözümü bulunur.

### 7.4.4 Korunumluluk kanunları

(7.88) denklemi için formal Lagrangian

$$L = v\left(x,t\right)\left(u_t^{\alpha} + uu_x - \vartheta u_{xx}\right) \tag{7.107}$$

olur. Formal Lagrangian eşlenik denklem ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F^{*} &= \frac{\partial L}{\partial u} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) + D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right) + \left(D_t^{\alpha}\right)^{*}\frac{\partial L}{\partial\left(D_t^{\alpha}u\right)} \\ &= -uv_x - \vartheta v_{xx} + \left(D_t^{\alpha}\right)^{*} v \end{aligned} \tag{7.108}$$

bulunur. (7.108) eşlenik denkleminde $v$ yerine $u$ yazılırsa (7.88) denklemi bulunmadığından, (7.3) denklemi öz eşlenik değildir. (7.24) eşlenik denklemi için $v = 1$ çözüm olur.

$T^x$ korunumlu vektör bileşenlerini bulmak için, (5.45) formülünü açarsak

$$T^{x} = W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)\right] + D_x\left(W\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right] \tag{7.109}$$

olur ve $0 < \alpha < 1$ olmasından dolayı $T^t$ korunumlu vektörün bileşenlerini bulmak için (5.41) formülünü kullanacağız.

**Durum 1:** $X_1$ üreteci için (5.33) ifadesi kullanılırsa

$$W = -u_x \tag{7.110}$$

elde edilir. Bulunan formal Lagrangian ve Lie karakteristik fonksiyonu ve (7.109) formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} T_1^{x} &= -u_x uv - v_x u_x \vartheta + v\vartheta u_{xx}, \\ T_1^{t} &= J_t^{1-\alpha}\left(-u_x\right)v + I\left(-u_x, D_t v\right) \end{aligned} \tag{7.111}$$

olur. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları (7.111) ifadesinde $v = 1$ yazılırsa aşağıdaki şekilde elde edilirler.

$$T_1^x = u_x u + \vartheta u_{xx},$$
$$T_1^t = -J_t^{1-\alpha}(u_x). \tag{7.112}$$

**Durum 2:** $X_2$ üreteci için

$$W = -u - xu_x - \frac{2t}{\alpha}u_t \tag{7.113}$$

dir. Sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned} T_2^x &= -u^2v - uv_x\vartheta - \tfrac{2t}{\alpha}u_tuv - \tfrac{2t}{\alpha}u_t\vartheta v_x - xu_xuv - xu_xv_x\vartheta \\ &\quad +2\vartheta vu_x + \tfrac{2t}{\alpha}\vartheta vu_{xt} + \vartheta vxu_{xx}, \\ T_2^t &= J_t^{1-\alpha}\left(-u - xu_x - \tfrac{2t}{\alpha}u_t\right)v + I\left(-u - xu_x - \tfrac{2t}{\alpha}u_t, D_tv\right) \end{aligned} \tag{7.114}$$

olur. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları ise

$$\begin{aligned} T_2^x &= -u^2 - \tfrac{2t}{\alpha}u_tu - xu_xu + 2\vartheta u_x + \tfrac{2t}{\alpha}\vartheta u_{xt} + \vartheta xu_{xx}, \\ T_2^t &= J_t^{1-\alpha}\left(-u - xu_x - \tfrac{2t}{\alpha}u_t\right) \end{aligned} \tag{7.115}$$

şeklinde elde edilir.

# 8. YÖNTEM

Tamsayı mertebeli diferensiyel denklemlerin Lie simetrileri üreteçlerinin bulunmasında kullanılan formüller ve kesirli türevin özellikleri kullanılarak zaman kesir mertebeli SK denklemi, zaman kesir mertebeli mKdV denklemi, lineer olmayan zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi, zaman kesir mertebeli viscous Burgers denkleminin Lie simetri üreteçleri bulunmuştur. Daha sonra lineer olmayan zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi dışındaki denklemler Erdélyi-Kober fonksiyonları yardımıyla zaman kesir mertebeli adi diferensiyel denklemlere indirgenmiştir. Lineer olmayan zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi elde edilen üreteçlerden dolayı Erdélyi-Kober fonksiyonları yardımıyla zaman kesir mertebeli adi diferensiyel denkleme indirgeme işlemi yapılamamaktadır. Sonrasında, her bir denklemin kabul ettiği üreteçler için karakteristik metot yardımıyla zaman kesir mertebeli adi diferensiyel denkleme indirgeme işlemi yapılmıştır. Son olarak, elde edilen Lie simetri üreteçlerinin yardımıyla tamsayı mertebeden türev içeren bağımsız değişkenler için tamsayı mertebeden kısmi türevli denklemlerde kullanılan formüller yardımıyla sonsuz ve sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları bulunmuştur. Kesir mertebeden türev içeren bağımsız değişkenler için tamsayı mertebeden kısmi türevli denklemlerde kullanılan formüllerin kesir mertebeli türevlere uygun hale getirilmesiyle elde edilen formüller yardımıyla sonsuz ve sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları bulunmuştur.

# 9. BULGULAR VE TARTIŞMA

Zaman kesir mertebeli SK denklemi çalışmamızda gördüğümüz üzere;

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\alpha\frac{\partial}{\partial x} + 5t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\alpha\frac{\partial}{\partial u}$$

şeklinde iki üreteci kabul eder ve gerekli işlemleri yaptığımızda görürüz ki tamsayı mertebeli SK denklemi;

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 5t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

üreteçlerini kabul eder. Zaman kesir mertebeli SK denkleminin kabul ettiği üreteçlerde $\alpha = 1$ yazılırsa tamsayı mertebeli SK denkleminin kabul ettiği üreteçlerden ikisini elde edilir.

Zaman kesir mertebeli mKdV denklemi,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3t}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}$$

üreteçlerini kabul eder. Zaman kesir mertebeli mKdV denkleminde $\alpha = 1$ olması durumunda verilen denklem tamsayı mertebeli kısmi diferensiyel denkleme dönüşür. Bu durumda denklemin üreteçlerini bulmak için bölüm 4.1 de anlatılan işlemler yapılırsa

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

üreteçleri bulunur. Zaman kesir mertebeli mKdV denkleminin kabul ettiği üreteçlerde $\alpha = 1$ yazılırsa tamsayı mertebeli denklemin kabul ettiği üreteçlerin ikisi bulunur.

Lineer olmayan zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi için,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha u\frac{\partial}{\partial u}$$

üreteçleri bulunur. $\alpha = 2$ olması durumunda verilen denklem tamsayı mertebeli kısmi diferensiyel denkleme dönüşür. Bu durumda tamsayı mertebeli denklem için

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha u\frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = \frac{\partial}{\partial t}$$

üreteçleri bulunur. Lineer olmayan zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi için bulunan üreteçlerde $\alpha = 2$ yazılırsa tamsayı mertebeli denklem için olan üreteçler elde edilir.

Zaman kesir mertebeli viscous Burgers denklemi için gerekli işlemler yapılırsa

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = x\alpha\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\alpha\frac{\partial}{\partial u}$$

üreteçlerini kabul ettiği görülür. $\alpha = 1$ olması durumunda verilen denklem tamsayı mertebeli kısmi diferensiyel denkleme dönüşür. Bu durumda denklemin üreteçlerini bulmak için 4.1 bölümünde anlatılan işlemler yapılırsa bulunan denklem için yukarıdaki Lie simetri üreteçlerine ek olarak;

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_5 = \frac{xt}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{t^2}{2}\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{x}{2} - \frac{ut}{2}\right)\frac{\partial}{\partial u}$$

bulunur.

Çalışmalar incelendiğinde kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin üreteçleri bulunurken $\frac{\partial}{\partial t}$ üretecinin bulunduğu görülmektedir. Fakat kesirli mertebenin özelliklerinden dolayı kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin bu üreteci kabul etmediğini ifade etmiştik.

Zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi dışındaki denklemler Erdélyi-Kober fonksiyonları yardımıyla zaman kesir mertebeli adi diferensiyel denklemlere indirgenmiştir. Lineer olmayan zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi elde edilen üreteçlerden dolayı Erdélyi-Kober fonksiyonları yardımıyla zaman kesir mertebeli adi diferensiyel denkleme indirgeme işlemi yapılamamaktadır. Üretecin uygun olduğunda kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin Erdélyi-Kober fonksiyonları yardımıyla zaman kesir mertebeli adi diferensiyel denkleme indirgeme işleminin yapılabileceği görülmektedir.

Zaman kesir mertebeli SK denklemi

$$\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{5}},\ u = t^{-\frac{2\alpha}{5}} g\left(\zeta\right)$$

olmak üzere;

$$\left(P_{\frac{5}{\alpha}}^{1-\alpha-\frac{2\alpha}{5},\alpha} g\right)(\zeta) + 5g^2 g_\zeta + 5g_\zeta g_{\zeta\zeta} + 5g g_{\zeta\zeta\zeta} + g_{\zeta\zeta\zeta\zeta\zeta} = 0$$

denklemine, zaman kesir mertebeli mKdV denklemi,

$$\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{3}},\ u = t^{-\frac{\alpha}{3}} g\left(\zeta\right)$$

olmak üzere;

$$\left(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\alpha-\frac{\alpha}{3},\alpha} g\right)(\zeta) + g^2 g_\zeta + g_{\zeta\zeta\zeta} = 0$$

denklemine ve son olarak zaman kesir mertebeli viscous Burgers denklemi,

$$\zeta = xt^{-\frac{\alpha}{2}},\ u = t^{-\frac{\alpha}{2}} g\left(\zeta\right)$$

olmak üzere;

$$\left(P_{\frac{2}{\alpha}}^{1-\alpha-\frac{\alpha}{2},\alpha} g\right)(\zeta) + g g_\zeta - \vartheta g_{\zeta\zeta} = 0$$

lineer olmayan adi diferensiyel denklemine indirgenir.

Yapılan çalışmamızda ele alınan herbir denklemin karakteristik metot yardımıyla adi diferensiyel denkleme indirgenebileceği görülmektedir.

Son olarak çalışmamızda her bir denklem için sonlu ve sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları elde edilmiştir. Zaman kesir mertebeli SK denklemi için

$$
\begin{aligned}
T_1^x &= -5u_xu^2v - 5u_xvu_{xx} - 5v_xu_x^2 - 5u_xuv_{xx} - u_xv_{xxxx} \\
&+5u_{xx}uv_x + u_{xx}v_{xxx} - 5u_{xxx}uv - u_{xxx}v_{xx} + u_{xxxx}v_x - u_{xxxxx}v, \\
T_1^t &= J_t^{1-\alpha}\left(-u_x\right)v + I\left(-u_x, D_tv\right)
\end{aligned}
$$

sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları bulunur. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları yukarıdaki ifadede eşlenik denklemin çözümü olan $v = 1$ değeri yazılırsa aşağıdaki şekilde elde edilirler.

$$
T_1^x = -5u^2u_x - 5u_xu_{xx} - 5uu_{xxx} - u_{xxxxx},
$$

$$
T_1^t = -J_t^{1-\alpha}\left(u_x\right).
$$

İkinci üreteç için ise sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları

$$
\begin{aligned}
T_2^x &= -\frac{1}{\alpha}[-5u\alpha v_xu_x + 25tu_tu^2v + 25tu_tv_xu_x + 5xu_x^2\alpha v_x \\
&+10u^3\alpha v + 10u^2\alpha v_{xx} + 2u\alpha v_{xxxxx} + 5tu_tv_{xxxx} - 3u_x\alpha v_{xxx} \\
&+4u_{xx}\alpha v_{xx} + 5tu_{xxt}v_{xx} - 5v_xu_{xxx}\alpha - 5v_xtu_{xxxt} + 6vu_{xxxx}\alpha \\
&+30u\alpha vu_{xx} + 25tu_tvu_{xx} + 25tu_tuv_{xx} + xu_x\alpha v_{xxxx} \\
&-xu_{xx}\alpha v_{xxx} + 25tu_{xxt}uv + xu_{xxx}\alpha v_{xx} - v_xxu_{xxxx}\alpha \\
&+5xu_x\alpha vu_{xx} + 5xu_x\alpha uv_{xx} - 5xu_{xx}\alpha uv_x + 5xu_{xxx}\alpha uv \\
&-5tu_{xt}v_{xxx} + 5vtu_{xxxxt} + 5xu_x\alpha u^2v - 25tu_{xt}uv_x + vxu_{xxxxx}\alpha] \\
T_2^t &= J_t^{1-\alpha}\left(-2u - xu_x - \tfrac{5t}{\alpha}u_t\right)v + I\left(-2u - xu_x - \tfrac{5t}{\alpha}u_t, D_tv\right)
\end{aligned}
$$

olur. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları ise

$$\begin{aligned} T_2^x &= -10u^3 - 30uu_{xx} - \frac{25t}{\alpha}u_t u^2 - \frac{25t}{\alpha}u_t u_{xx} - 5xu_x u^2 - 5xu_x u_{xx} \\ &\quad -\frac{25t}{\alpha}uu_{xxt} - 5uxu_{xxx} - 6u_{xxxx} - \frac{5t}{\alpha}u_{xxxxt} - xu_{xxxxx}, \\ T_2^t &= -J_t^{1-\alpha}\left(2u + xu_x + \tfrac{5t}{\alpha}u_t\right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunurlar. Zaman kesir mertebeli mKdV denklemi için sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları

$$T_1^x = -u^2vu_x - u_x v_{xx} + u_{xx}v_x - vu_{xxx},$$

$$T_1^t = J_t^{1-\alpha}\left(-u_x\right)v + I\left(-u_x, D_t v\right)$$

şeklinde elde edilir. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları

$$T_1^x = -u^2u_x - u_{xxx},$$

$$T_1^t = -J_t^{1-\alpha}\left(u_x\right).$$

olarak bulunur. Diğer üreteç için ise sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned} T_2^x &= -u^3v - u^2vxu_x - \frac{3t}{\alpha}u_t u^2 v - uv_{xx} - xu_x v_{xx} - \frac{3t}{\alpha}u_t v_{xx} \\ &\quad +2u_x v_x + xv_x u_{xx} + \frac{3t}{\alpha}u_{xt}v_x - 3vu_{xx} - xvu_{xxx} - \frac{3t}{\alpha}vu_{xxt}, \\ T_2^t &= J_t^{1-\alpha}\left(-u - xu_x - \tfrac{3t}{\alpha}u_t\right)v + I\left(-u - xu_x - \tfrac{3t}{\alpha}u_t, D_t v\right) \end{aligned}$$

olur. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları ise

$$T_2^x = -u^3 - u^2xu_x - \frac{3t}{\alpha}u_t u^2 - 3u_{xx} - xu_{xxx} - \frac{3t}{\alpha}u_{xxt},$$

$$T_2^t = -J_t^{1-\alpha}\left(u + xu_x + \frac{3t}{\alpha}u_t\right)$$

şeklinde bulunurlar. Lineer olmayan zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi için, sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned} T_1^x &= u_x^2 v - u_x v_x u + uvu_{xx}, \\ T_1^t &= D_t^{1-\alpha}(-u_x)\, v - J_t^{2-\alpha}(-u_x)\, v_t - I\left(-u_x, D_t^2 v\right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilirler. Öncelikle yukarıda $v = 1$ yazılırsa aşağıdaki sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları bulunur.

$$\begin{aligned} T_{1,1}^x &= u_x^2 + uu_{xx}, \\ T_{1,1}^t &= D_t^{1-\alpha}(-u_x) \end{aligned}$$

Şimdi sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunlarında eşlenik denklemin bir çözümü olan $v = c_1 x + c_2$ değeri yazılırsa yukarıdaki korunumluluk kanunlarından farklı olarak

$$\begin{aligned} T_{1,2}^x &= (c_1 x + c_2)\left(u_x^2 + uu_{xx}\right) - uc_1 u_x, \\ T_{1,2}^t &= D_t^{1-\alpha}(-u_x)(c_1 x + c_2) \end{aligned}$$

bulunur. İkinci üreteç için sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned} T_2^x &= -3uu_x v + +2u^2 v_x + xu_x^2 v - xu_x u v_x + uvxu_{xx}, \\ T_2^t &= D_t^{1-\alpha}(2u - xu_x)\, v - J_t^{2-\alpha}(2u - xu_x)\, v_t - I\left(2u - xu_x, D_t^2 v\right) \end{aligned}$$

olur. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned} T_{2,1}^x &= -3uu_x + xu_x^2 + uxu_{xx}, \\ T_{2,1}^t &= D_t^{1-\alpha}(2u - xu_x) \end{aligned}$$

ve

$$T^x_{2,2} = c_1x\left(-4uu_x + xu_x^2 + xuu_{xx}\right) - 3uu_xc_2$$

$$+c_2x\left(u_x^2 + uu_{xx}\right) + 2u^2c_1,$$

$$T^t_{2,2} = D_t^{1-\alpha}\left(2u - xu_x\right)\left(c_1x + c_2\right)$$

elde edilir. Denklemin kabul ettiği son üreteç için ise

$$T^x_3 = 2uu_xv - u^2v_x + \frac{t}{\alpha}u_xu_tv - \frac{t}{\alpha}u_tuv_x + \frac{t}{\alpha}uvu_{xt},$$

$$T^t_3 = D_t^{1-\alpha}\left(-u - \tfrac{t}{\alpha}u_t\right)v - J_t^{2-\alpha}\left(-u - \tfrac{t}{\alpha}u_t\right)v_t - I\left(-u - \tfrac{t}{\alpha}u_t, D_t^2v\right)$$

sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunu bulunur. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları ise

$$T^x_{3,1} = 2uu_x + \frac{t}{\alpha}u_xu_t + \frac{t}{\alpha}uu_{xt},$$

$$T^t_{3,1} = D_t^{1-\alpha}\left(-u - \tfrac{t}{\alpha}u_t\right)$$

ve

$$T^x_{3,2} = \left(c_1x + c_2\right)\left(\frac{t}{\alpha}uu_{xt} + 2uu_x + \frac{t}{\alpha}u_xu_t\right) - \frac{t}{\alpha}u_tuc_1 - u^2c_1,$$

$$T^t_{3,2} = D_t^{1-\alpha}\left(-u - \tfrac{t}{\alpha}u_t\right)\left(c_1x + c_2\right)$$

bulunur. Zaman kesir mertebeli viscous Burgers denklemi için sonsuz sayıdaki

$$T^x_1 = -u_xuv - v_xu_x\vartheta + v\vartheta u_{xx},$$

$$T^t_1 = J_t^{1-\alpha}\left(-u_x\right)v + I\left(-u_x, D_tv\right)$$

korunumluluk kanunları ve

$$T^x_1 = u_xu + \vartheta u_{xx},$$

$$T^t_1 = -J_t^{1-\alpha}\left(u_x\right).$$

sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları bulunur. Denklemin kabul ettiği diğer üreteç için sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunları

$$\begin{aligned} T_2^x &= -u^2v - uv_x\vartheta - \tfrac{2t}{\alpha}u_tuv - \tfrac{2t}{\alpha}u_t\vartheta v_x - xu_xuv - xu_xv_x\vartheta \\ &\quad +2\vartheta vu_x + \tfrac{2t}{\alpha}\vartheta vu_{xt} + \vartheta vxu_{xx}, \\ T_2^t &= J_t^{1-\alpha}\left(-u - xu_x - \tfrac{2t}{\alpha}u_t\right)v + I\left(-u - xu_x - \tfrac{2t}{\alpha}u_t, D_tv\right) \end{aligned}$$

olur. Sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları ise

$$\begin{aligned} T_2^x &= -u^2 - \tfrac{2t}{\alpha}u_tu - xu_xu + 2\vartheta u_x + \tfrac{2t}{\alpha}\vartheta u_{xt} + \vartheta xu_{xx}, \\ T_2^t &= J_t^{1-\alpha}\left(-u - xu_x - \tfrac{2t}{\alpha}u_t\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Çalışmamızda verildiği üzere bir denklem için sonlu sayıdaki korunumluluk kanunlarını elde edebilmek için sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunlarında verilen denklem için bulunan eşlenik denklemin çözümü olan ifade sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunlarında yerine yazılarak elde edilmektedir.

# 10. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında zaman kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin Lie Simetri üreteçlerinin bulunuşu, Erdélyi-Kober fonksiyonları ve karakteristik metot yardımıyla indirgeme işlemi ve son olarak temel korunumluluk teoremi yardımıyla korunumluluk kanunlarının bulunuşu üzerinde durulmuştur.

Birinci bölümde, Lie simetri üreteçleri, simetri indirgemeleri, korunumluluk kanunları hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, tez çalışmamızda ele aldığımız konular ile ilgili yapılan literatür araştırması verilmiştir.

Üçüncü bölümde, diferensiyel denklemler ile ilgili temel kavramlar ve diferensiyel denklem çeşitleri anlatılmıştır. Kesir mertebeli türev ile ilgili gerekli bilgiler ve kesir mertebeli türev çeşitleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Lie nokta simetri üreteçlerinin bulunuşunda gerekli olan temel kavramlar ve kesir mertebeli denklemlerin Lie simetri üreteçlerinin bulunuşunda kullanılan Leibnitz kuralı ve uzanım formülleri anlatılmıştır.

Beşinci bölümde temel korunumluluk teoremi kullanılarak korunumluluk kanunlarının bulunuşu ve temel korunumluluk teoreminin kesir mertebeli diferensiyel denklemlere uygulanışı üzerinde durulmuştur.

Altıncı bölümde kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin Erdélyi-Kober fonksiyonları yardımıyla indirgenmesi ve karakteristik metot yardımıyla indirgemenin nasıl yapılacağı anlatılmıştır.

Yedinci bölümde zaman kesir mertebeli SK denklemi, zaman kesir mertebeli mKdV denklemi, lineer olmayan zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi, zaman kesir mertebeli viscous Burgers denklemi ele alınmıştır. Öncelikle denklemler için Lie simetri üreteçleri bulunmuştur. Daha sonra lineer olmayan zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi dışındaki denklemler Erdélyi-Kober fonksiyonları yardımıyla zaman kesir mertebeli adi diferensiyel denklemlere indirgenmiştir. Lineer olmayan zaman kesir mertebeli hiperbolik denklemi elde edilen üreteçlerden dolayı Erdélyi-Kober fonksiyonları yardımıyla zaman kesir mertebeli adi diferensiyel denkleme indirgeme işlemi yapılamamaktadır. Sonrasında, her bir denklemin kabul ettiği üreteçler için karakteristik metot yardımıyla zaman kesir mertebeli adi diferensiyel denkleme indirgeme işlemi yapılmıştır. Son olarak, elde edilen Lie simetri üreteçlerinin her biri için sonsuz ve sonlu sayıdaki korunumluluk kanunları bulunmuştur.

Sekizinci bölümde çalışmamızda kullandığımız yöntemler ve bu yöntemlerin hangi denklemlere uygulandığı verilmiştir.

Dokuzuncu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar her bir denklem için tek tek verilmiştir.

Çalışmamızda zaman kesir mertebeli diferensiyel denklemler ele alınmıştır. Farklı zaman kesir mertebeli diferensiyel denklemler ve uzay-zaman kesir mertebeli diferensiyel denklemler üzerinde çalışmalar yapılabilir. Denklemlerin uzay değişkeni arttırılabilir, Caputo türevli denklemlere uygulamalar yapılabilir.

# KAYNAKLAR DİZİNİ

Ahmad, A., 2005, Symmetry solutions of some nonlinear pde's, Master thesis, Deanship of Graduate Studies King Fahd University of Petroleum and Minerals Dhahran Saudi Arabia, 133 p.

Akbulut, A., Kaplan, M., Taşcan, F., 2016, Conservation laws and exact solutions of Phi-Four (Phi-4) equation via the (G'/G, 1/G)-expansion method, Zeitschrift Für Naturforschung Section A-A Journal Of Physical Sciences, 71, 439-446.

Akbulut A., Taşcan F., 2017, Lie symmetries, symmetry reductions and conservation laws of time fractional modified Korteweg–de Vries (mkdv) equation, Chaos, Solitons and Fractals, 100, 1–6.

Bluman, G.W., Anco, S.C., 2002, Symmetry and integration methods for differential equations with 18 illustrations, Springer-Verlag, New York, 419 p.

Bluman, G.W., Cheviakov, A.F., Anco, S.C., 2010, Applications of symmetry methods to partial differential equations, Springer-Verlag, New York, 398 p.

Bluman, G.W., Kumei, S., 1989, Symmetries and differential equations with 21 illustrations, Springer-Verlag, New York, 412 p.

Cao, Z., Lin, Y., Shen, J., 2014, Conservation laws for a variable coefficient nonlinear diffusion-convection-reaction equation, J. Math. Anal. Appl., 420, 77-93.

Coimbra, C.F.M., 2003, Mechanics with variable-order differential operators, Annalen der Physik, 12, 692-703.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

Compére, G., 2007, Symmetries and conservation laws in Lagrangian gauge theories with applications to the mechanics of black holes and to Gravity in three dimensions, Ph. d. thesis, Université Libre de Bruxells Faculté des Sciences, 205 p.

De Olivera, E.C., Machado, J.A.T., 2014, A review of definitions for fractional derivatives and integral, Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, Article Number: 238459, 6 s.

Dorrego G.A., Cerutti R.A., 2013, The k-fractional Hilfer derivative, International Journal of Mathematical Analysis, 7, 543–550.

Eriksson, M., 2008, Symmetries and conservation laws obtained by Lie group analysis for certain physical systems, Diploma thesis, Uppsala School of Engineering and Department of Astronomy and Space Physics, Uppsala University, Sweden, 88 p.

Gaur, M., Singh K., 2014a, On group invariant solutions of fractional order Burgers-Poisson equation, Applied mathematics and computation, 244, 870-877.

Gaur M., Singh K., 2014b, Symmetry classification and exact solutions of a variable coefficient nonlinear space-time fractional Burgers' equation, arXiv:1409.5521, 26 s.

Gazizov, R.K., Ibragimov, N.H., Lukashchuk, S.Yu., 2015, Nonlinear self-adjointness, conservation laws and exact solutions of time-fractional Kompaneets equations, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 23, 153-163.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

Güner, Ö., 2014, Kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin tam çözümleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 143 s.

Hu, J., Ye, Y., Shen, S., Zhang, J., 2014, Lie symmetry analysis of the time fractional KdV-type equation, Applied Mathematics and Computation, 233, 439-444.

Huang, Q., Zhdanov, R., 2014, Symmetries and exact solutions of the time fractional Harry-Dym equation with Riemann-Liouville derivative, Physica A, 409, 110-118.

Hydon, P.E., 2000, Symmetry methods for differential equations, Cambridge University Press, New York, 213 s.

Ibragimov, N.H., 1993, Crc handbook of Lie group analysis of differential equations volume1 symmetries exact solutions and conservation laws, CRC Press. Inc, United States of America, 429 p.

Islam Md H., Khan K., Akbar M.A., Salam Md A., 2014, Exact traveling wave solutions of modified KdV-Zakharov-Kuznetsov equation and viscous Burgers equation, SpringerPlus, 3, DOI: 10.1186/2193-1801-3-105.

Jafari, H., Kadkhoda, N., Baleanu, D., 2015, Fractional Lie group method of the time-fractional Boussinesq equation, Nonlinear Dynamics, 81, 1569-1574.

Jumarie, G., 2006, Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results, Computers and Mathematics with Applications, 51, 1367-1376..

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**


Jumarie, G., 2009, Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann Liouville derivative for non-differentiable functions, Applied Mathematics Letters, 22, 378-385.

Jumarie, G., 2015, Informational entropy of non-random non-differentiable functions and approach via fractional calculus, Applied Mathematical Sciences, 9, 2153 - 2185.

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J., 2006, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Series: North-Holland Mathematics Studies, New York, 523 s.

Kinani, E.H., Quhadan, A., 2015, Lie symmetry analysis of some time fractional partial differential equations, International Journal of Modern Physics: Conference Series, 38, 8 s.

Kiraz, Açıl F., 2007, Kısmi türevli diferensiyel denklemlerin Lie simetrileri üzerine, Doktora tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 96 s.

Kisela, T., 2008, Fractional differential equations and their applications, Diploma thesis, Brno University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering Institute of mathematics, 71 s.

Koca, K., 2008, Kısmi türevli denklemler, Gündüz Eğitim Yayıncılık, Ankara, 232 s.

Kurulay, M., 2009, Zaman-kesirli mertebeli non-lineer kısmi türevli diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri, Doktora tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 66 s..

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

Kurulay M., Bayram M., 2010, Approximate analytical solution for the fractional modified KdV by differential transform method, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 15, 1777–1782.

Loverro, A., 2004, Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer, Rapport technique, Univeristy of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering.

Luchko Y., Trujillo J.J., 2007, Caputo-type Modification of the Erdélyi-Kober fractional derivative, Fractional Calculus and Applied Analysis, 10, 249-267.

Lukashchuk, Yu. S., 2014, Conservation laws for time-fractional subdiffusion and diffusion-wave equations, arXiv:1405.7532v1, 10 s.

Nadjafikhah, M., Shirvani-Sh, V., 2012, Lie symmetries and conservation laws of the Hirota–Ramani equation, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17, 4064-4073.

Olver, P. J., 1993, Applications of Lie groups to differential equations second edition, Springer-Verlag, New York, 513 p.

Özceylan, M., 2007, Bir parametreli Lie gruplarının diferensiyel denklemlere uygulanması, Yüksek Lisans Tezi, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Özer, M.N., Eser, D., 2010, Diferensiyel denklemler (Teori ve Uygulamalar), Ayrıntı Basımevi, Ankara, 515 s..

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)


Podlubny, I., 1994, The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order, arXiv : funct-an/9710005v1.

Podlubny, I., 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press, USA, 340 s.

Quhadan, A., Kinani, E.H., 2014, Exact solutions of time fractional Kolmogorov equation by using Lie symmetry analysis, Journal of Fractional Calculus and Applications, 5, 97-104.

Rui, W., Zhang, X., 2016, Lie symmetries and conservation laws for the time fractional Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn equation, Commun nonlinear sci numer simulat, 34, 38-44.

Sahadevan, R., Bakkyaraj, T., 2012, Invariant analysis of time fractional generalized Burgers and Korteweg-de Vries equations, J. Math. Anal. Appl., 393, 341-347.

Taşcan, F., Yakut, A., 2015, Conservation Laws and Exact Solutions with Symmetry Reduction of Nonlinear Reaction Diffusion Equations, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 16, 191-196.

Wang, G., Kara, A.H., Fakhar, K., 2015, Symmetry analysis and conservation laws for the class of time-fractional nonlinear dispersive equation, Nonlinear Dyn., Doi:10.1007/s11071-015-2156-4.

Wang, G., Liu, X., Zhang, Y., 2013, Lie symmetry analysis to the time fractional generalized fifth-order KdV equation, Commun nonlinear sci numer simulat, 18, 2321-2326..

## KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)


Wang, G., Xu, T., 2013, Symmetry properties and explicit solutions of the nonlinear time fractional KdV equation, Boundary value problems, Article Number: 232, DOI: 10.1186/1687-2770-2013-232.

Wang, G.W., Xu, T.Z., 2014, Invariant analysis and exact solutions of nonlinear time fractional Sharma-Tasso-Olver equation by Lie group analysis, Nonlinear Dynamics, 76, 571-580.

Wang, G., Xu, T., 2015, Invariant analysis and explicit solutions of the time fractional nonlinear perturbed Burgers equation, Nonlinear Analysis:Modelling and Control, 20, 570-584.

Wu, G., 2010a, A fractional Lie group method for Anamalous Diffusion equations, The Communications in Fractional Calculus, 1, 27-31.

Wu, G., 2010b, Lie group classifications and exact solutions for time-fractional Burgers equation, Communications in Theoretical Physics, 55, 9 pp.

Yakut, A., 2012, Kısmi diferensiyel denklemler için korunumluluk kanunları, Yüksek Lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 96 s.

Yang, X.J., 2012, Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications, World Science, New York, NY, USA.

Yaşar, E., 2009, Oluşum türü denklemlerin yerel ve yerel olmayan yeni korunum kanunları, Doktora tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 93 s..

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

Yaşar, E., 2010, Conservation laws for a class of soil water equations, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 15, 3193-3200.

Yaşar, E., Özer T., 2011, On symmetries, conservation laws and invariant solutions of the foam-drainage equation, International Journal of Non-Linear Mechanics, 46, 357-362.

Yaşar, İ.B., 2005, Uygulamalı matematik, Siyasal Kitabevi, Ankara, 289 s.

Zhai, X., Zhang, Y, 2016, Noether symmetries and conserved quantities for fractional Birkhoffian systems with time delay, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 36, 81–97.

# ÖZGEÇMİŞ

Arzu AKBULUT

**Doğum Yeri-Yılı :** Nazilli / 03.04.1987

**Yabancı Dil :** İngilizce

**Öğrenim Durumu**

| Derece | Mezuniyet Yılı | Üniversite |
|---|---|---|
| Lisans | 2014 | Anadolu Üniversitesi-İşletme Fakültesi-İşletme Bölümü |
| Y. Lisans | 2012 | Eskişehir Osmangazi Üniversitesi-Fen Bilimleri Enstitüsü- Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı |
| Lisans | 2010 | Atatürk Üniversitesi-Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi- Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü |
| Lise | 2005 | Nazilli Anadolu Öğretmen Lisesi |

**Yayınlar**

**Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler (SCI:** *Science Citation Index***)**

**1**. Taşcan F., Yakut A., Conservation Laws and Exact Solutions with Symmetry Reduction of Nonlinear Reaction Diffusion Equations, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 16 (2015) 191-196.

**2.** Kaplan M., Bekir A., Akbulut A., Aksoy E., The Modified Simple Equation Method For Nonlinear Fractional Differential Equations, Romanian Journal of Physics, 60 (2015) 1374-1383.

**3.** Kaplan M., Akbulut A., Bekir A., Exact Travelling Wave Solutions of the Nonlinear Evolution Equations by Auxiliary Equation Method, Zeitschrift Für Naturforschung Section A-A Journal Of Physical Sciences, 70 (2015) 969-974.

**4.** Akbulut A., Kaplan M., Taşcan F., Conservation Laws and Exact Solutions of Phi-Four (Phi-4) Equation via the ($G'/G$, $1/G$)-Expansion Method, Zeitschrift Für Naturforschung Section A-A Journal Of Physical Sciences, 71 (2016) 439-446.

**5.** Kaplan M., Akbulut A., Bekir A., Solving space time-fractional differential equations by using modifed simple equation method, Communications in Theoretical Physics, 65 (2016) 563–568.

**6.** Kaplan M., Bekir A., Akbulut A., Application of the generalized Kudryashov method to some nonlinear evolution equations in mathematical physics, Nonliner Dynamics, DOI 10.1007/s11071-016-2867-1.

**7.** San S., Akbulut A., Ünsal Ö., Taşcan F., Conservation laws and double reduction of (2+1) dimensional Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff equation, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 40 (2017) 1703–1710.

**8**. Akbulut A., Kaplan M., Bekir A., Auxiliary Equation Method for Fractional Differential Equations with Modified Riemann–Liouville Derivative, International Journal of nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 17 (7-8) (2016) 413–420.

**9.** Akbulut A., Kaplan M., Taşcan F., The investigation of exact solutions of nonlinear partial differential equations by using exp(-phi) method, Optik-International Journal for Light and Electron Optics, 132 (2017) 382–387.

**10.** Akbulut A., Taşcan F., Lie symmetries, symmetry reductions and conservation laws of time fractional modified Korteweg–de Vries (mkdv) equation, Chaos, Solitons and Fractals, 100 (2017) 1–6.

**11.** Akbulut A., Taşcan F., On symmetries, conservation laws and exact solutions of the nonlinear Schrödinger–Hirota equation, Waves in Random and Complex Media, (2017) DOI: 10.1080/17455030.2017.1356027.

**12.** Akbulut A., Taşcan F., Application of conservation theorem and modified extended tanh-function method to (1+1)-dimensional nonlinear coupled Klein-Gordon-Zakharov equation, Chaos, Solitons and Fractals , in press.

**Diğer Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler**

**1.** Bekir A., Akbulut A., Kaplan M., Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations by Using Modified Simple Equation Method, International Journal of Nonlinear Science, 19 (2015) 159-164.

**Ulusal Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler**

**1.** Kaplan M., Akbulut A., Özer M.N., Lineer Olmayan Oluşum Denklemlerinin Üstel Rasyonel Fonksiyon Metoduyla Çözümü, Dumlupınar Üniveristesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Sayı 34 (2015), ISSN- 1302-3055.

**2.** Taşcan F., Akbulut A., Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations with exp(-φ(ζ))- Expansion Method, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 17 (2017) 86-92.

**3.** Taşcan F., Akbulut A., Kaplan M., Implementations of Conservation Theorem and the Exponential Rational Function Method to Viscous Burgers Equation, Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi A- Uygulamalı Bilimler ve Mühendislik, 18 (2017) 31-38.

## Bildiriler

**Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Tam Metin Olarak Basılan Bildiriler**

**1.** Kaplan M., Bekir A., Akbulut A., Analytical solutions with the improved (G'/G)-expansion method for nonlinear evolution equations, International Conference on Quantum Science and Applications (ICQSA-2016), IOP Publishing- Journal of Physics: Conference Series 766 (2016) 012033, doi:10.1088/1742-6596/766/1/012033 , Eskişehir-Turkey.

**2.** Akbulut A., Kaplan M., Taşcan F., Conservation laws and exact solutions of system of Boussinesq–Burgers equations, ICNPAA 2016 World Congress, AIP Conf. Proc. 1798, 020070-1–020070-10; doi: 10.1063/1.4972662, France.

**3.** Kaplan M., Akbulut A., Bekir A., The Auto-Bäcklund transformations for the (2+1)-dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equation, ICNPAA 2016 World Congress, AIP Conf. Proc. 1798, 020071-1–020071-6; doi: 10.1063/1.4972663, France.

**Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitabında Basılan Bildiriler**

**1**. Kaplan M., Akbulut A., Bekir A., (2014). Exact solutions of the nonlinear evolution equations by auxiliary equation method, Karatekin Mathematics Days 2014 International Mathematics Symposium, Çankırı-Turkey.

**2.** Akbulut A., Taşcan F., (2015). Conservation laws and symmetry reduction of nonlinear reaction diffusion equation, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling ICAAMM 15 , Istanbul-Turkey.

**3.** Kaplan M., Akbulut A., Özer M.N., (2015). Auxiliary equation method for fractional differential equations with modified Riemann-Liouville derivative, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling ICAAMM15 , Istanbul-Turkey.

**4.** Kaplan M., Akbulut A., Taşcan F., (2015). Conservation laws and exact solutions of nonlinear differential equation, 4. International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Athens-Greece.

**5.** Akbulut A., Taşcan F., (2016). Conservation laws of partial differential equations using two different method, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016), Elazığ-Turkey.

**6.** Akbulut A., Kaplan M., Taşcan F., Conservation Laws and Exact Solutions of Nonlinear partial Differential Equation, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016), Elazığ-Turkey.

**Ulusal Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitabında Basılan Bildiriler**

**1.** Akbulut A., Taşcan F., (2013). Burger Fisher Denklemi için Korunumluluk Kanunları. 12. Matematik Sempozyumu Toplumda Matematik, Ankara-Türkiye.

**2.** Kaplan M., Akbulut A., Aksoy E., (2015). Lineer Olmayan Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklem ve Denklem Sistemlerinin Çözümleri. 14. Matematik Sempozyumu Kanatlandıran Matematik, Niğde-Türkiye.