Değişmeli Cebirlerde
Kuadratik Modüllerin
Kategoriksel Özellikleri

Hasan Atik

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Nisan 2012

Categorical Structures of Quadratic Modules
of Commutative Algebras

Hasan Atik

DOCTORAL DISSERTATION

Mathematics Department
April 2012

Değişmeli Cebirlerde
Kuadratik Modüllerin
Kategoriksel Özellikleri

Hasan Atik

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Dalında
Doktora Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Nisan-2012

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Hasan Atik' in DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Değişmeli Cebirlerde Kuadratik Modüllerin Kategoriksel Özellikleri" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisanüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Zekeriya Arvasi
İkinci Danışman : Doç. Dr. Erdal Ulualan

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Zekeriya Arvasi

Üye : Prof. Dr. Mahmut Koçak

Üye : Doç. Dr. Erdal Ulualan

Üye : Yrd. Doç. Dr. İ.İlker Akça

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ö. Enver Uslu

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu′ nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Nimetullah BURNAK
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez, yedi bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde değişmeli cebirler üzerinde nil(n)-modüllerin tanımı verilip, çaprazlanmış modüller kategorisinden nil(n)-modüller kategorisine giden funktor tanımlanmıştır. Yine değişmeli cebirler üzerinde kuadratik modül tanımı verilmiştir [34]. İkinci bölümde alt kuadratik modül, kuadratik ideal, bölüm kuadratik modül, kuadratik modüllerin direk toplamı, kuadratik modüllerin çekirdeği gibi değişmeli cebirlerde kuadratik modüllerin bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde geri çekme nil(2)-modül ile geri çekme ve ileri itme kuadratik modül kavramlarına yer verilmiştir. Dördüncü bölümde kuadratik modüllerin kategoriksel özelliklerinden bahsedilmiştir. Kuadratik modüller kategorisinde objelerin çarpımı ve eşçarpımı olan kuadratik modüller oluşturulmuştur. Yine bu kategoride kuadratik modül morfizmlerinin eşitleyici ve eşeşitleyicilere sahip oldukları gösterilmiştir. Sonuç olarak kuadratik modüllerin limiti ve eşlimitinin var olduğu görülmüştür. Beşinci bölümde değişmeli cebirlerde 4-boyutlu kuadratik modül tanımı verilmiş ve 3-çaprazlanmış modül kategorisinden 4-boyutlu kuadratik modüller kategorisine giden funktor tanımlanmıştır. Benzer şekilde simplisel cebirler kategorisinden 4-boyutlu kuadratik modüller kategorisine giden funktor elde edilmiştir. Altıncı bölümde değişmeli cebirlerde homotopi bağlantılı 4-tip ler için cebirsel bir model oluşturacak yeni bir kavram tanıtılmış ve bu yapıya, kuadratik 2-modül adı verilmiştir. Daha sonra bu yapının 3-çaprazlanmış modül ve simplisel cebirler ile olan ilişkileri incelenmiştir. Son bölümde ise homotopi kavramına değinilmiştir. Kuadratik (2)-modül ve kuadratik (2)-kompleks morfizmleri için homotopi tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kuadratik modül, Kuadratik 2-modül

SUMMARY

This thesis consists of seven chapters. In the first chapter, we give some basic informations. We give the notion of $nil(n)$-modules of commutative algebras, and we construct a functor from the category of crossed modules to that of $nil(n)$-modules of commutative algebras. We give from [34] the notion of quadratic module on commutative algebras and show that the category of $nil(2)$-modules is a full subcategory of quadratic modules. In the second chapter, we investigate some algebraic features of quadratic modules such as subquadratic module, quadratic ideal, factor quadratic module, direct sum of quadratic modules, kernel of quadratic modules etc. In the third chapter, we explore notion of pullback $nil(2)-$modules, pullback and induced quadratic modules. In the fourth chapter, some of the categorical features of quadratic modules has been analyzed. We find the product and copropuct objects within this category. We see the equilaser and coequilaser of morphisms of quadratic modules exists. As a result we say that the category of quadratic module of commutative algebras has a finite limit and a colimit. In the fifth chapter, we introduce 4-dimensional quadratic modules of commutative algebras and explore the relation between 3-crossed modules and 4-dimensional quadratic modules. We establish a new notion for homotopy connected 4-types called quadratic 2-modules. We form a functor from the category of 3-crossed modules to that of quadratic 2-modules and also from simplicial algebras to quadratic 2-modules. In the last chapter, we give the notion of homotopy for quadratic modules and quadratic complexes morfisms. We define quadratic 2-complexes and similarly we find the homotopy for the morphisms of quadratic 2-modules and quadratic 2-complexes.

Keywords: Quadratic modules, Quadratic 2-modules

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında, çalışma boyunca vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım sayın

Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ ve Doç. Dr. Erdal ULUALAN a

samimi saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2012

Hasan ATİK

İçindekiler

Bölüm 0

Giriş

Çaprazlanmış modüller Whitehead,[35], tarafından homotopi bağlantılı 2-tipler için cebirsel model olarak tanımlanmıştır. Daha sonra Conduche, [22], 2-çaprazlanmış modülü homotopi 3-tipleri için cebirsel bir model olarak tanımlamıştır. Baues, [10], 2-çaprazlanmış modülden yola çıkarak homotopi bağlantılı 3-tipler için optimal cebirsel yapı olacak olan kuadratik modülleri tanımlamıştır. Bir kuadratik modül

$$
\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\
\sigma : \quad L \arrow[r, "\delta"'] & M \arrow[r, "\partial"'] & N
\end{tikzcd}
$$

şeklindeki k-cebirlerin ve homomorfizmlerinin diyagramı ile gösterilebilir. Bu yapı ileride detaylı olarak vereceğimiz $\mathbf{QM1} - \mathbf{QM4}$ özelliklerini sağlar. Böylece objeleri yukarıdaki gibi kuadratik modüller olan ve **Kuad** ile göstereceğimiz kuadratik modüller kategorisini oluşturmuş oluruz. Herhangi bir nil(2)-modül $\partial : M \to N$ den aşağıdaki gibi bir kuadratik modül elde edebiliriz.

$$
\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \arrow[dl, "1"'] \arrow[d, "w"] & \\
L \arrow[r, "w"'] & M \arrow[r, "\partial"'] & N
\end{tikzcd}
$$

Bu kuadratik modüle ∂ nil(2)-modülünden elde edilen kuadratik modül denir. Böylece **Nil**(2) kategorisi **Kuad** kategorisinin tam bir alt kategorisi olarak düşünülebilir. Burada **Nil**(2), nil(2)-modüllerin [11] kategorisidir. Kuadratik modüllerin değişmeli cebirler üzerine tanımı ilk olarak Ulualan [34] tarafından yapılmıştır. Aynı çalışmasında Ulualan kuadratik modüller ile diğer 3-tip cebirsel yapılar (2-çaprazlanmış modül, Cat^2 cebir, Çaprazlanmış kare, Moore kompleksinin boyutu 2 olan simplisel cebirler gibi) arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Cebirsel bir yapı olarak kuadratik modülün kullanımını artırmak amacıyla bu tezde kuadratik modüllerin cebirsel özelliklerine değinilmiştir. Grup teoride yer alan bazı temel özelliklerin kuadratik modüllere uygulaması yapılmıştır. Bir kuadratik modül morfizminin çekirdeği ve görüntüsü ile ilgili bazı bilgilere ulaşılmıştır. Alt kuadratik modül tanımı verilmiş, buradan kuadratik ideal ve bölüm kuadratik modül kavramlarına yol açılmıştır.

Modül teoride, $\phi : P \to Q$ halka homomorfizmi ve bir M, Q-modülü verildiğinde $P \times M \to M$, $(p, m) \mapsto p \cdot m = \phi(p)m$ işlemi yardımıyla M bir P-modül olur. Bununla birlikte $f : M_1 \to M_2$, Q-modül homomorfizmi için $f(p \cdot m) = f(\phi(p)m) = \phi(p)f(m) = p \cdot f(m)$ işlemiyle f bir P-modül homomorfizmidir. Böylece $\phi^* : {}_RMod \to {}_PMod$ funktoru elde edilir. Burada M nin ϕ^* ile taşınmasına ϕ yardımıyla kısıtlama denir. Tersine bir M, P-modülü alındığında bir $P \times M$, Q-modülü elde edilebilir. Bu işlemi ϕ_* ile yaparız ve bu işleme de genişleme denir. Kısıtlama ve genişleme kavramlarını Brown ve Higgins [14] çaprazlanmış modül kavramına taşımışlardır. Bunu yaparken kategori teorinin sırasıyla geri çekme (pullback) ve ileri itme (push out) kavramlarını kullanmışlardır. Daha açıkcası, bir $\partial : M \to Q$ çaprazlanmış modülü ve bir $\phi : P \to Q$ homomorfizmi verildiğinde Q tabanlı ∂ çaprazlanmış modülünden, P tabanlı $\partial' : \phi^*(M) \to P$ şeklinde yeni bir çaprazlanmış modül elde etmişlerdir ve $XMod/Q \to XMod/P$ şeklinde bir funktor oluşturmuşlardır.

Bu tezde geri çekme ve ileri itme kavramlarını bir boyut daha taşıyarak kuadratik modüller için incelenmiştir ve geri çekme ve ileri itme funktorlarını kuadratik modüller için elde edilmiştir. Ayrıca bu funktorların sol adjoint olduklarını görülmüştür.

Kategori teoride bir $T : S \to C$ funktorunun T eşlimiti(colimit) $colimitT$ ile gösterilir ve bir $\nu : T \Rightarrow L$ şeklinde sabit funktora giden bir doğal transformasyonudur. Bu doğal transformasyon sabit funktorlar üzerinde evrenseldir. Yani eğer $\xi : T \Rightarrow L'$, L' sabit funktoruna giden bir diğer dogal transformasyon ise bu durumda $\phi : L \Rightarrow L'$ doğal transformasyonu vardır. Eşlimitin özel bir hali eşçarpımdır(coproduct). Başka bir özel hali de eşeşitleyicidir(coequilaser). Aşağıdaki önerme [14] eşlimitin eşçarpım ve eşeşitleyiciler yardımıyla bulunabileceğini göstermektedir.

Önerme 0.0.1 Eğer $S \to C$ funktoru eşçarpım ve eşeşitleyicilere sahipse, bu funktorun eşlimiti vardır.

Bu tezde kuadratik modüller kategorisinde bir funktorun eşlimiti var olduğunu göstermek için eşçarpım obje inşaası yapılmıştır ve morfizmlerin eşeşitleyicilerinin var olduğu görülmüştür. Benzer işlemler eşlimitin duali olan limit içinde yapılmıştır.

Simplisel gruplar ilk olarak D.M.Kan [26] tarafından çalışılmıştır. Daha sonra Moore, Milnor, Dold,

(i) bu objelerin iyi yapılandırılmış bir homotopi teoriye sahip olduğunu,

(ii) bağlantılı uzayların tüm homotopi tipleri için bir cebirsel model olduğunu,

(iii) değişmeli simplisel grupların, zincir komplekslerine denk bir araç olduğunu,

(iv) düşük boyutlarda hesaplamaların mümkün olduğunu göstermişlerdir.

Ayrıca boyutu n den büyük olan elemanları birim elemandan oluşan simplisel grupların Moore kompleksi, simplisel grupların n tipleri için modeldir. Whitehead 2-tiplerin cebirsel bir modeli olan çaprazlanmış modülleri tanımlamış ve bu tanımlama ışığında Conduche 2-kısıtlanmış simplisel grubun Moore kompleksinin bazı özelliklerini kullanarak, 2-çaprazlanmış modülü oluşturmuştur. Baues yine 3-tipler için cebirsel model olan kuadratik modülü tanımlamıştır. Arvasi, Uslu ve Kuzpınarı homotopi 4-tipler için cebirsel model olan 3-çaprazlanmış modülü tanımlamışlardır. Burada 2-çaprazlanmış modül ve kuadratik modül arasındaki ilişki göz önüne alınarak homotopi bağlantılı 4-tipler için optimal cebirsel model olacak olan kuadratik 2-modül tanımı yapılmıştır. Bunu aşağıdaki diyagram ile gösterdik.

$$
\begin{tikzcd}
 & D \otimes D \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & & \\
K \arrow[r, "\partial_3"'] & L \arrow[r, "\partial_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"'] & N \\
 & & C \otimes C \arrow[ul, "\omega"] \arrow[u, "w"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ayrıca bu yapının simplisel cebir ve 3-çaprazlanmış modül arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Son olarak homotopi kavramına değinilmiştir. A ve B zincir kompleks morfizmleri için homotopi kavramı literatürde birçok yerde bulunabilir. A ve B ye iki zincir kompleksi ve f ve g de A dan B giden morfizmler ailesi olsunlar. f ve g arasındaki homotopi $h^n : A^n \to B^{n+1}$ şeklinde

$$f^n - g^n = d^n h^n + h^{n-1} d^{n-1}$$

şartını sağlayan bir h dönüşümüdür. Bunu

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_4 \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, "f_4{,}g_4"'] & A_3 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_3{,}g_3"'] \arrow[dl, "h_3"] & A_2 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_2{,}g_2"] \arrow[dl, "h_2"] & A_1 \arrow[d, "f_1{,}g_1"] \arrow[dl, "h_1"] \\
\cdots \arrow[r] & B_4 \arrow[r, "d_3"'] & B_3 \arrow[r, "d_2"'] & B_2 \arrow[r, "d_1"'] & B_1
\end{tikzcd}
$$

diyagramı ile gösteririz. Benzer şekilde kuadratik kompleksler ve kuadratik 2-kompleksler için homotopi tanımları yapılmıştır.

Bölüm 1

Kuadratik Modüller

1.1 Giriş

Kuadratik modüller ilk olarak Baues, [10], tarafından gruplar üzerinde tanımlanmıştır. Arvasi ve Ulualan, [3], değişmeli cebirler üzerinde kuadratik modül kavramını tanımlayıp diğer yapılar ile olan ilişkisini incelemiştir. Ayrıca [4] de kuadratik modüller ile simplisel gruplar ve 2-çaprazlanmış modüller arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Burada biz kuadratik modüllerin bazı cebirsel özelliklerinden bahsedeceğiz. Kuadratik modül tanımını vermeden önce çaprazlanmış modüller ve nil(n)-modüller kavramlarını hatırlayalım.

1.2 Çaprazlanmış Modüller

Çaprazlanmış modüller ilk olarak 1949 da Whitehead, [35], tarafından gruplar üzerinde tanımlanmıştır. Whitehead bu yapıyı homotopi grupları ile ilgili bir çalışmasında incelemiştir. Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı Porter, [32], tarafından tanımlanmıştır.

k değişmeli bir halka olsun. C ve R iki değişmeli k-cebir olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & R \times C & \longrightarrow & C \\ & (r,c) & \longmapsto & \cdot(r,c) = r \cdot c \end{array}$$

fonksiyonu, $m \in k$, $c, c' \in C$ ve $r, r' \in R$ için;

1) $m(r \cdot c) = (mr) \cdot c$

2) $r \cdot (c + c') = r \cdot c + r \cdot c'$

3) $(r + r') \cdot c = r \cdot c + r' \cdot c$

4) $r \cdot (cc') = (r \cdot c)c' = c(r \cdot c')$

5) $(rr') \cdot c = r \cdot (r' \cdot c)$

özelliklerini sağlıyor ise, bu fonksiyona $r \in R$ nin $c \in C$ üzerine **etkisi** denir ve $r \cdot c$ ile gösterilir.

Şimdi [32] den değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül tanımını verelim.

Tanım 1.2.1 R, birimli bir k-cebir ve C bir R-cebir olsun.

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & R \times C & \longrightarrow & C \\ & (r,c) & \longmapsto & r \cdot c \end{array}$$

değişmeli bir etki olmak üzere

$$\partial : C \to R$$

şeklindeki R-cebir homomorfizmi, $r \in R$ ve $c, c' \in C$ için,

$CM1)$ $\partial(r \cdot c) = r(\partial c)$

$CM2)$ $\partial(c) \cdot c' = cc'$

özelliklerini sağlıyor ise ∂ ya **çaprazlanmış R-modül** veya kısaca **çaprazlanmış modül** denir ve (C, R, ∂) ile gösterilir.

Eğer ∂ sadece $CM1)$ aksiyomunu sağlarsa ∂ ya **ön-çaprazlanmış modül** adı verilir. Buradaki $CM2)$ aksiyomuna **Peiffer özdeşliği** denir. Bir çaprazlanmış modülün bir ön-çaprazlanmış modül olduğu açıktır.

Şimdi iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm tanımını verelim.

Tanım 1.2.2 Bir (C, R, ∂) çaprazlanmış modülünden (C', R', ∂') çaprazlanmış modülüne giden bir morfizm,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\eta"'] & R' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde her $r \in R$ ve her $c \in C$ için

$$\theta(r \cdot c) = \eta(r) \cdot \theta(c)$$

özelliğini sağlayan $\theta : C \to C'$ ve $\eta : R \to R'$ şeklindeki k-cebir homomorfizm çiftinden ibarettir.

Böylece çaprazlanmış modüller kategorisini oluşturabiliriz. Bu kategoriyi **XMod** ile göstereceğiz. Şimdi bilinen bazı çaprazlanmış modül örnekleri verelim.

Örnek 1.2.3 I, R cebirinin bir ideali olsun.

$$i : I \to R$$

şeklindeki içine homomorfizmi göz önüne alalım. Bu durumda (I, R, i) bir çaprazlanmış modül olur. Tersine verilen bir $\partial : C \to R$ şeklindeki çaprazlanmış modül için $\partial C = I$ nın R de bir ideal olduğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 1.2.4 R herhangi bir k-modül olsun. Bu durumda R yi sıfır çarpımla birlikte bir k-cebir olarak değerlendirebiliriz. O halde $\mathbf{0} : R \to k$, $\mathbf{0}(r) = 0$ ile tanımlı homomorfizm bir çaprazlanmış modül olur. Gerçekten de $r, r' \in R$ için

$$\mathbf{0}(r) \cdot r' = 0r' = 0 = rr'$$

olur.

Hatırlanacağı üzere bir ön-çaprazlanmış modül $\partial : C \to R$ bir k-cebir homomorfizmi olmak üzere $\partial(r \cdot c) = r\partial c$ özelliğini sağlıyordu. Ön-çaprazlanmış modüller kategorisini **ÖnXmod** ile gösterelim.Bir önceki örnekte R herhangi bir k-modül olmak üzere, R yi sıfır çarpımla birlikte bir k-cebir ve $\mathbf{0} : R \to k$, $\mathbf{0}(r) = 0$ ile tanımlı homomorfizmini bir çaprazlanmış modül olarak alabileceğimizi göstermiştik. Bu durumda **Ceb,** k-cebirler kategorisi olmak üzere **Ceb** kategorisi **ÖnXmod** kategorisinin bir alt kategorisidir. Dolayısıyla, bir çaprazlanmış modülü bir k-cebirin genelleştirilmesi olarak değerlendirebiliriz.

1.3 Nilpotent Cebirler ve Nilpotent Ön-Çaprazlanmış Modüller

Gruplar üzerinde Peiffer nilpotent ön-çaprazlanmış modüller ilk olarak Baues, [11], tarafından tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Bu tanımlamadan yararlanarak Baues, kuadratik modül tanımını ortaya çıkarmıştır. Bu yapı, Ulualan[34] tarafından tezinde değişmeli cebirler üzerinde tanımlanıp, bazı özellikleri incelenip, cebirler üzerinde kuadratik modül tanımı oluşturulmuştur. Bu bölümde bu kavramlar kısaca hatırlatılacaktır.

Tanım 1.3.1 $\partial : C \to R$ bir ön-çaprazlanmış modül olsun.

$$\begin{array}{rccl} \langle -,- \rangle : & C \times C & \longrightarrow & C \\ & (x,y) & \longmapsto & \langle x,y \rangle = xy - x \cdot \partial y \end{array}$$

elemanına x ve y nin **Peiffer çarpımı** denir.

Bu durumda bir ön-çaprazlanmış modül için Peiffer çarpımları sıfıra eşitse bu ön-çaprazlanmış modül bir çaprazlanmış modül olur. Yani

$$\langle x,y \rangle = xy - x \cdot \partial y = 0$$

ise $x \cdot \partial y = xy$ şeklinde $CM2)$ aksiyomunu elde ederiz. Şimdi bu Peiffer çarpımının bazı özelliklerini verelim.

$\partial : C \to R$ bir ön-çaprazlanmış modül ve $x, y, z \in C$, $\alpha \in R$ olsun. Bu durumda;

$P1)$ $\langle x, y\rangle \cdot\alpha = \langle x \cdot \alpha, y\rangle = \langle x, y \cdot \alpha\rangle$

$P2)$

$a)$ $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

$b)$ $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$P3)$ $k \in M$ için $\partial k = 0$ ise bu durumda;

$a)$ $\langle k, x\rangle = kx$

$b)$ $\langle x, k\rangle - \langle k, x\rangle = k \cdot \partial x$

özellikleri sağlanır.

Bu özdeşliklerin ispatları kolay olduğundan ihmal edilmiştir. Bu özelliklere ek olarak üçlü Peiffer çarpımları için aşağıdaki özelliği verebiliriz.

$\partial : C \to R$ bir ön-çaprazlanmış modül olmak üzere; $x, y, z \in C$ için

$$\langle x, \langle y, z\rangle\rangle - \langle\langle x, y\rangle , z\rangle = \langle x, z \cdot \partial y\rangle$$

dir.

Yardımcı teorem 1.3.2 $\partial : C \to R$ ön-çaprazlanmış modül ise

$$\langle C, \text{Çek}\partial\rangle = C\text{Çek}\partial$$

dir.

İspat: İspatı için [34] e bakınız. $\square$

A herhangi bir k-cebir olsun. $\sigma_1(A) = A$, $\sigma_2(A) = A^2 = AA, ...,$

$$\sigma_n(A) = A^n = \{x_1x_2...x_n : x_i \in A\}$$

olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için A^n, A nın bir ideali olmak üzere

$$...\sigma_{n+1}(A) \subset \sigma_n(A) \subset \sigma_{n-1}(A) \subset ... \subset \sigma_2(A) \subset \sigma_1(A) = A$$

şeklinde bir kapsamayı oluşturabiliriz. Özel olarak $\sigma_2(A) = A^2$ idealine A cebirinin **çarpım ideali** adı verilir.

Benzer işlemleri $\partial : C \to R$ ön-çaprazlanmış modülü için de yapabiliriz. Bu durumda yukarıda aldığımız çarpım yerine Peiffer çarpımını ele alacağız. Buna göre, $P_1(\partial) = C$ ve $P_2(\partial) = \langle C, C \rangle$ kümesi, $x, y \in C$ için

$$\langle x, y \rangle = xy - x \cdot \partial y$$

elemanları tarafından üretilen idealdir. Genel olarak, $P_n(\partial)$ kümesi, $x_i \in C$ için

$$< x_1, x_2, ..., x_n > = < ... << x_1, x_2 >, x_3 > ...x_n > ... >$$

elemanları tarafından üretilen ideal olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece

$$...P_{n+1}(\partial) \subset P_n(\partial) \subset P_{n-1}(\partial) \subset ... \subset P_2(\partial) \subset P_1(\partial) = C$$

serisi oluşturulabilir. Örneğin $n = 3$ için $P_3(\partial)$, $<< x_1, x_2 >, x_3 >$ ve $< x_1, < x_2, x_3 >>$ elemanları tarafından üretilen bir idealdir. Burada $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $x_i \in C$ için

$$\begin{aligned} << x_1, x_2 >, x_3 > &= < x_1, x_2 > x_3 - < x_1, x_2 > \cdot \partial(x_3) \\ &= x_1x_2x_3 - x_1x_3 \cdot \partial x_2 - x_1x_2 \cdot \partial(x_3) + x_1 \cdot \partial(x_2x_3) \end{aligned}$$

şeklinde bir elemandır. Özel olarak $P_2(\partial)$ ya **Peiffer ideal** adı verilir.

Buna göre aşağıdaki tanımı [34] den verebiliriz.

Tanım 1.3.3 *(i)* A bir k-cebir olsun. Eğer $\sigma_{n+1}(A) = 0$ ise, A ya **nil(n)-cebir** veya **nilpotent sınıfı n** olan bir k-cebir denir.

(ii) $\partial : C \to R$ bir ön-çaprazlanmış modül olsun. Eğer $P_{n+1}(\partial) = 0$ ise ∂ ya **nil(n)-modül** veya **Peiffer nilpotent sınıfı n** olan ön-çaprazlanmış modül denir.

Buradan açıkça görüleceği gibi $nil(1)$-modül yani Peiffer nilpotent sınıfı 1 olan bir ön-çaprazlanmış modül bir çaprazlanmış modüldür. Gerçekten de $\partial : C \to R$ bir $nil(1)$-modül ise ikili Peiffer çarpımları sıfıra eşit olacaktır. Yani; $P_2(\partial) = 0$ olup, her $x, y \in C$ için;

$$\langle x, y \rangle = xy - x \cdot \partial y = 0$$

olacaktır. Bu ise çaprazlanmış modülün ikinci aksiyomudur.
$nil(n)$-modüller kategorisini $\mathbf{XMod}(n)$ ile göstereceğiz. Burada $n \geq 1$ olmak üzere;

$$\mathbf{XMod} = \mathbf{XMod}(1) \subset \mathbf{XMod}(2) \subset \cdots \subset \mathbf{XMod}(\infty) = \mathbf{\ddot{O}nXMod}$$

şeklindeki bir kapsamayı yazabiliriz.

Diğer bir deyişle $nil(n-1)$-modüller kategorisi $\mathbf{XMod}(n-1)$, $nil(n)$-modüller kategorisi $\mathbf{XMod}(n)$ nin bir tam alt kategorisidir. Bu kapsama aşağıdaki gibi bir funktor tanımlamamıza yardımcı olur:

$$\Gamma_n : \mathbf{\ddot{O}nXmod} \to \mathbf{Xmod}(n).$$

Şimdi bu funktoru biraz daha açıklayalım;
$\partial : C \to R$ bir ön-çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

$$\Gamma_n(\partial) = C/P_{n+1}(\partial) \longrightarrow R$$

$\mathbf{XMod}(n)$ nin bir objesi olup

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\partial"'] & & C/P_{n+1}(\partial) \arrow[dl, "\Gamma_n(\partial)"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Burada $q : C \to C/P_{n+1}(\partial)$, k-cebirlerin bölüm homomorfizmidir ve R nin C üzerine olan etkisini korur. $n = 2$ için

$$\Gamma_2(\partial) = \partial^{cr} : C^{cr} = C/P_2(\partial) \to R$$

homomorfizmi ise $\{x\} = x + P_2(\partial)$, $\{y\} = y + P_2(\partial) \in C^{cr}$ için

$$\begin{aligned}
< \{x\}, \{y\} > &= (x + P_2(\partial))(y + P_2(\partial)) - (x + P_2(\partial)) \cdot \Gamma_2(\partial)(y + P_2(\partial)) \\
&= (xy + P_2(\partial)) - (x + P_2(\partial)) \cdot \Gamma_2(\partial)(y + P_2(\partial)) \\
&= xy - x \cdot \partial(y) + P_2(\partial) \\
&= P_2(\partial) \quad (\because < x, y > \in P_2(\partial) \ )
\end{aligned}$$

olduğundan bir çaprazlanmış modül olur. $\Gamma_2(\partial)$ çaprazlanmış modülüne, özel olarak, ∂ ön-çaprazlanmış modülüne bağlı olan çaprazlanmış modül denir.

A herhangi bir k-cebir olsun. $\sigma_2(A) = A^2 \trianglelefteq A$ olmak üzere A/A^2 cebirine A nın singülerizasyonu denir ve A^{sng} ile gösterilir. Bu durumda

$$\Gamma_2 : \mathbf{Ceb} \rightarrow \mathbf{SngCeb}$$

şeklinde herhangi bir A cebirini A nın singülerizasyonu olan A/A^2 ye karşılık getiren bir funktor tanımlayabiliriz. Bu funktora özel olarak **singülerizasyon funktoru** denir. Buna göre $\mathbf{Ceb(n)}$, $nil(n)$-cebirlerin kategorisi olmak üzere; $n \geq 1$ için

$$\mathbf{Ceb} = \mathbf{Ceb(1)} \subset \cdots \subset \mathbf{Ceb(n)} \subset \cdots \subset \mathbf{Ceb(\infty)}$$

kapsamasını yazabiliriz. Bu durumda singülerizasyon funktorundan yararlanarak

$$\Gamma_n : \quad \mathbf{Ceb} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Ceb(n)}$$

şeklinde herhangi bir A cebirini A/A^{n+1}, $nil(n)$-cebirine karşılık getiren bir funktor tanımlayabiliriz.

$\partial : C \rightarrow R$ bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

(i) $\partial(C) = I \trianglelefteq R$

(ii) $\pi =$Çek$\partial \trianglelefteq C$

olup Çek∂ bir R/I-modüldür. Çünkü I nın π üzerine olan etkisi sıfırdır. Ayrıca yukarıda verdiğimiz singülerizasyon funktoru Γ_2 için $\Gamma_2(C) = C/C^2$ de bir R/I-modül olur. Gerçekten de $x = \partial b \in I$ $(b \in C)$ ve $c + C^2 \in C/C^2$ için

$$x \cdot (c + C^2) = \partial b \cdot c + C^2 = bc + C^2$$

olup $bc \in C^2$ olduğundan $bc + C^2 = C^2$ olur. Yani $\{bc\} = \{0\}$ dır. Bu ise I nın C/C^2 üzerine olan etkisinin sıfır olması demektir. Dolayısıyla C/C^2 bir R/I-modül olur.

O halde herhangi bir $\partial : C \to R$ ön-çaprazlanmış modülüne bağlı olan

$$\partial^{cr} : C^{cr} \to R$$

çaprazlanmış modülü için $I = \partial^{cr}(C^{cr})$ ve $\pi =$Çek ∂^{cr} ise, hem π hem de $\Gamma_2(C^{cr}) = C^{cr}/(C^{cr})^2$, R/I- modül yapısına sahiptir.

1.4 Kuadratik Modül

Şimdi değişmeli cebirler için kuadratik modül tanımını [34] den verelim.

Tanım 1.4.1 L, M ve N, k-cebir ve $\partial : M \longrightarrow N$ bir ön çaprazlanmış modül, $\delta : L \longrightarrow M$ ise, $\partial\delta = 0$ olacak şekilde bir homomorfizm olsun. $C = M^{cr}/(M^{cr})^2$ için $p : M \twoheadrightarrow C$ doğal dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} w : C \otimes C & \longrightarrow & M \\ \{x\} \otimes \{y\} & \longmapsto & xy - x \cdot \partial y \end{array}$$

şeklinde tanımlı ∂ ön çaprazlanmış modülünün Peiffer çarpımı ve kuadratik dönüşüm olarak adlandırılan

$$\omega : C \otimes C \longrightarrow L$$

ile tanımlı k-lineer dönüşümü için,

QM1) $\partial : M \to N$ bir $nil(2)$-modül;

QM2) δ ve ω dönüşümleri için,

$$\delta\omega(\{x\} \otimes \{y\}) = w(\{x\} \otimes \{y\});$$

QM3) L bir N-cebirdir ve N nin L üzerindeki etkisi için $a \in L$ ve $x \in M$ olmak üzere

$$a \cdot \partial x = \omega(\{\delta a\} \otimes \{x\} + \{x\} \otimes \{\delta a\});$$

QM4) $a, b \in L$ için

$$\omega(\{\delta a\} \otimes \{\delta b\}) = ab;$$

özellikleri sağlanıyor ise $(C\otimes C, L, M, N, \omega, w)$ ye bir **kuadratik modül** denir ve kısaca $(\omega, \delta, \partial)$ ile gösterilir. Bir kuadratik modül,

$$\begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ L \arrow[r, "\delta"'] & M \arrow[r, "\partial"'] & N \end{tikzcd}$$

şeklindeki k-cebirlerin ve homomorfizmlerinin diyagramı ile de gösterilebilir.

Bir $(\omega, \delta, \partial)$ kuadratik modülünden $(\omega', \delta', \partial')$ kuadratik modülüne giden kuadratik modül morfizmi

$$\Theta = (l, m, n) : (\omega, \delta, \partial) \to (\omega', \delta', \partial')$$

şeklindeki üçlü dönüşümlerden oluşur ve aşağıdaki diyagram değişmelidir;

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\varphi_* \otimes \varphi_*"'] & L \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "l"] & M \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "m"] & N \arrow[d, "n"] \\ C' \otimes C' \arrow[r, "\omega'"'] & L' \arrow[r, "\delta'"'] & M' \arrow[r, "\partial'"'] & N' \end{tikzcd}$$

Burada (m, n) fonksiyon çifti bir ön-çaprazlanmış modül morfizmidir. l ise n-eşdeğişik bir homomorfizmdir. Kuadratik modüller kategorisini **Kuad** ile göstereceğiz.

Bölüm 2

Bir Kuadratik Modülden Yeni Bir Kuadratik Modül Elde Etme

Bu bölümde alt kuadratik modül, kuadratik ideal, bölüm kuadratik ideal, kuadratik modül morfizmlerinin çekirdeği gibi kavramları tanıtacağız.

2.1 Alt Kuadratik Modül ve Kuadratik İdeal

$$\begin{tikzcd} & & C\otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ \sigma: & L \arrow[r, "\delta"'] & M \arrow[r, "\partial"'] & N \end{tikzcd}$$

şeklinde ifade edilen σ kuadratik modülü, kuadratik N-modül olarakta adlandırılır. Tüm kuadratik N-modüllerin oluşturduğu kategoriye **Kuad**$/N$ kategorisi deriz. (l, m, n) birinci bölümün sonunda verildiği gibi bir kuadratik modül morfizmi olsun. Böylece **Kuad**$/N$, **Kuad** kategorisinin bir alt kategorisidir.

Şimdi **Kuad** kategorisinde alt kuadratik modül tanımı vereceğiz.

$$\begin{tikzcd} & C\otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ \sigma: \quad L \arrow[r, "\partial_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"'] & N \end{tikzcd}$$

bir kuadratik modül olsun. **Kuad** kategorisinde

$$\begin{tikzcd} & C'\otimes C' \arrow[dl, "\omega'"'] \arrow[d, "w'"] & \\ \sigma': \quad L' \arrow[r, "{\partial_2}'"'] & M' \arrow[r, "{\partial_1}'"'] & N' \end{tikzcd}$$

yapısının σ nın bir alt kuadratik modülü olması için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır.

(i) L', L nin bir alt cebiri, M', M nin bir alt halkası olmalıdır.

(ii) $\partial_1' : M' \to N', \quad \partial_1 : M \to N$ nil(2)-modülünün bir alt nil(2)-modülü olmalıdır. Yani;

$a)$ M', M nin bir alt cebiri, N', N nin bir alt halkası olmalıdır.

$b)$ N' nün M' ne etkisi, N nin M ye olan etkisinden indirgenmiş olmalıdır.

$c)$

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\partial_1'"'] & M \arrow[d, "\partial_1"] \\ N' \arrow[r, "\upsilon"'] & N \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ve μ ve υ içine dönüşümler olmalıdırlar.

(iii) M' nün L' üzerine N' vasıtasıyla olan etkisi, M nin L üzerine N vasıtası ile olan etkisinden indirgenmelidir.

(iv) σ' bir kuadratik modül olmalıdır.

(v) Aşağıdaki diyagram değişmeli olmalıdır.

$$\begin{tikzcd} C'\otimes C' \arrow[r, "\omega'"] \arrow[d, "\Phi_*"'] & L' \arrow[r, "\partial_2'"] \arrow[d, "\mu_1"'] & M' \arrow[r, "\partial_1'"] \arrow[d, "\mu_2"'] & N' \arrow[d, "\mu_3"'] \\ C\otimes C \arrow[r, "\omega"] & L \arrow[r, "\partial_2"] & M \arrow[r, "\partial_1"] & N \end{tikzcd}$$

Tanım 2.1.1

$$\begin{tikzcd} & C\otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ \sigma: \; L \arrow[r, "\partial_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"'] & N, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C'\otimes C' \arrow[dl, "\omega'"'] \arrow[d, "w'"] & \\ \sigma': \; L' \arrow[r, "\partial_2{}'"'] & M' \arrow[r, "\partial_1{}'"'] & N' \end{tikzcd}$$

kuadratik modüller olmak üzere σ', σ nın bir alt kuadratik modülü olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa σ' ne σ nın bir kuadratik ideali denir.

1. $L'L \subseteq L'$ ve M', M nin bir idealidir.

2. $a)$ $M'M \subseteq M'$ ve N', N nin bir idealidir.

$b)$ Her $n' \in N'$ ve $m \in M$ için $n' \cdot m \in M'$ olmalıdır.

$c)$ M', N nin etkisine göre kapalıdır. Yani $\forall m' \in M'$ ve $n \in N$ için $n \cdot m' \in M'$ olmalıdır.

3. $\forall m' \in M'$ ve $l \in L$ için (L nin M ye etkisi N vasıtasıyla yani ∂_1 ile) $\partial_1(m') \cdot l \in L'$ olmalıdır.

4. L', M nin N ile olan etkisine göre L' de kapalı olmalıdır. Yani; $\forall l' \in L'$ ve $m \in M$ için $\partial_1(m) \cdot l' \in L'$ olmalıdır.

5. $C' \otimes C', C \otimes C$ nin bir altcebiri olup $C'C \subseteq C'$ olmalıdır.

6. L nin $N-$cebir, L' nün N'-cebir olduğunu biliyoruz. N nin L, N' nün L' üzerine etkileri aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

$a)$ $\forall n' \in N'$ ve $l \in L$ için $n' \cdot l \in L'$ olmalıdır.

$b)$ $\forall l' \in L'$ ve $n \in N$ için $n \cdot l' \in L'$ olmalı, yani; L', N nin etkisine göre kapalı olmalıdır. Daha doğrusu L' bir N-cebir olmalıdır.

ÖRNEKLER

1)

$$C \otimes C \xrightarrow[id]{} L \xrightarrow[w]{} M \xrightarrow[\partial_1]{} N,$$

$L = C \otimes C$ olmak üzere bir kuadratik modül olsun.

M', M nin bir ideali ve N' de N nin bir alt halkası, yani; $\partial_1' : M' \to N'$ bir alt nil(2)-modül olmak üzere

$$C' \otimes C' \xrightarrow[id]{} L' \xrightarrow[w']{} M' \xrightarrow[{\partial_1}']{} N',$$

kuadratik modülü, yukarıdaki kuadratik modülün bir alt kuadratik modüldür.

2) Her R, k-cebiri için

$$C \otimes C \xrightarrow[id]{} L \xrightarrow[w]{} R \xrightarrow[\partial_1]{} R,$$

bir kuadratik modüldür. Burada ∂_1 birim homomorfizmdir. R nin her I ideali ve J alt halkası için $I \subseteq J$ olmak üzere $C = R/R^2$, $C' = I/I^2 \subseteq C$ olsun. Bu durumda

$$C' \otimes C' \xrightarrow[id]{} L' \xrightarrow[w']{} I \xrightarrow[i]{} J$$

kuadratik modülü, yukarıdaki kuadratik modülün bir alt kuadratik modüldür. Burada i içine homomorfizmdir.

3) I, R nin bir ideali olsun. Bu durumda

$$C' \otimes C' \xrightarrow[id]{} L \xrightarrow[w']{} I \xrightarrow[id]{} I$$

yukarıdaki son örnekte verdiğimiz kuadratik modülün idealidir.

4) $\partial_1 : M \to N$ bir nil(2)-modül ve ${\partial_1}' : M' \to N'$, ∂_1 in bir nil(2) ideali olsun. Bu durumda

$$C' \otimes C' \xrightarrow[id]{} L' \xrightarrow[w']{} M' \xrightarrow[{\partial_1}']{} N',$$

kuadratik modülü 1. örnekte verdiğimiz kuadratik modülün bir kuadratik idealidir.

5) I ve I', R nin idealleri olmak üzere (I, R, μ) ve (I', R, μ') birer nil(2)-modül olsun. Bu durumda $(I \cap I', I, \upsilon)$, (I, R, μ) nin bir alt nil(2)-modülü ve $(I \cap I', I', \upsilon')$, (I', R, μ') nün bir alt nil(2)-modülüdür. Bu durumda

$$\begin{tikzcd} & C' \otimes C' \arrow[dl, "id"'] \arrow[d, "w'"] & \\ \sigma' : \quad L' \arrow[r, "w'"'] & I \cap I' \arrow[r, "\upsilon'"'] & I', \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dl, "id"'] \arrow[d, "w"] & \\ \sigma : \quad L \arrow[r, "w"'] & I \arrow[r, "i"'] & R, \end{tikzcd}$$

olmak üzere σ', σ nın bir kuadratik ideali olur.

Benzer şekilde

$$\begin{tikzcd} & C'\otimes C' \arrow[dl, "id"'] \arrow[d, "w'"] & \\ \theta' : \quad L' \arrow[r, "w'"'] & I\cap I' \arrow[r, "v"'] & I, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C\otimes C \arrow[dl, "id"'] \arrow[d, "w"] & \\ \theta : \quad L \arrow[r, "w"'] & I' \arrow[r, "i"'] & R, \end{tikzcd}$$

olmak üzere θ' de θ nın bir kuadratik ideali olur.

Önerme 2.1.2 Bir kuadratik modülün iki alt kuadratik modülünün kesişimide bir alt kuadratik modüldür. Benzer şekilde bir kuadratik modülün iki kuadratik idealinin kesişimi de bir kuadratik idealdir.

İspat:

$$\begin{tikzcd} & C\otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ \sigma : \quad L \arrow[r, "\partial_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"'] & N \end{tikzcd}$$

bir kuadratik modülü verilsin. M_1 ve M_2, M nin iki alt cebiri, N_1ve N_2 de N nin iki alt halkası olsun. $M_1 \cap M_2, M$ nin bir alt cebiri, $N_1 \cap N_2$, de N nin bir alt halkası olduğunu biliyoruz.

$$\begin{tikzcd} & C_1\otimes C_1 \arrow[dl, "\omega_1"'] \arrow[d, "w_1"] & \\ \sigma_1 : \quad L_1 \arrow[r, "\partial_2'"'] & M_1 \arrow[r, "\partial_1'"'] & N_1, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C_2\otimes C_2 \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & \\ \sigma_2 : \quad L_2 \arrow[r, "\partial_2''"'] & M_2 \arrow[r, "\partial_1''"'] & N_2 \end{tikzcd}$$

olmak üzere σ_1 ve σ_2, σ nın iki alt kuadratik modülü olsun. L_1 ve L_2, L nin iki alt cebiri dolayısıyla $L_1 \cap L_2$ de L nin bir alt cebiridir.

Burada $\nu_1 : M_1 \cap M_2 \hookrightarrow M$, $\nu_2 : N_1 \cap N_2 \hookrightarrow N$ içine dönüşümler olmak üzere

$$({\partial_1}', {\partial_1}'') : M_1 \cap M_2 \to N_1 \cap N_2$$

dönüşümü bir alt nil(2)-modüldür.(${\partial_1}'$ve ${\partial_1}''$, $\partial_1 : M \to N$ nin sırasıyla M_1

ve M_2 ye göre kısıtlamalarıdırlar.) O halde

$$\begin{tikzcd}
& C' \otimes C' \arrow[dl, "\omega_{1,2}"'] \arrow[d, "w_{1,2}"] & \\
L_1 \cap L_2 \arrow[r, "(\partial_2', \partial_2'')"'] & M_1 \cap M_2 \arrow[r, "(\partial_1', \partial_1'')"'] & N_1 \cap N_2
\end{tikzcd}$$

$C' = M_1 \cap M_2 / (M_1 \cap M_2)^2$ olmak üzere bir alt kuadratik modüldür. Benzer şekilde σ_1 ve σ_2 eğer σ nın birer idealleri ise

1. $L_1 L \subseteq L_1$ ve $L_2 L \subseteq L_2$ olduğundan

$$(L_1 \cap L_2)L \subseteq L_1 \cap L_2$$

olur.

2a) $M_1 M \subseteq M_1$ ve $M_2 M \subseteq M_2$ olduğundan

$$(M_1 \cap M_2)M \subseteq M_1 \cap M_2$$

olur. Burada $N' \trianglelefteq N$ ve $N'' \trianglelefteq N$ olup, $N' \cap N'' \trianglelefteq N$ bulunur.

b) Her $x \in (N' \cap N'')$ ve $m \in M$ için $x \cdot m, m \cdot x \in (M' \cap M'')$ olmalıdır. σ_1 ve σ_2, σ nın birer kuadratik idealleri olduğundan her $x \in N'$ ve $m \in M$ için $x \cdot m \in M'$ ve her $x \in N''$ ve $m \in M$ için $x \cdot m \in M''$ olduğundan her $x \in (N' \cap N'')$ ve $m \in M$ için $x \cdot m, m \cdot x \in (M' \cap M'')$ olduğu görülür.

c) $M' \cap M'', N$ nin etkisine göre kapalı olmalıdır. Her $x \in (M' \cap M'')$ ve $n \in N$ için σ_1, σ nın kuadratik ideali olduğundan $x \cdot n \in M'$ ve σ_2, σ nın kuadratik ideali olduğundan $x \cdot n \in M''$ olup $x \cdot n \in M' \cap M''$ olur.

3. Her $m \in (M' \cap M'')$ için σ_1 ve σ_2, σ nın kuadratik idealleri olduğundan $m \in M'$ için $\partial(m) \cdot l = \omega((\{\partial_2\} \otimes \{m\}) + (\{m\} \otimes \{\partial_2\})) \in L'$ ve $m \in M''$ için $\partial(m) \cdot l = \omega((\{\partial_2\} \otimes \{m\}) + (\{m\} \otimes \{\partial_2\})) \in L''$ olup, $\partial(m) \cdot l \in (L' \cap L'')$ bulunur.

4. Her $l \in (L' \cap L'')$ ve $m \in M$ için σ_1, σ nın kuadratik ideali olduğundan $\partial(m) \cdot l \in L'$ ve σ_2, σ nın kuadratik ideali olduğundan $\partial(m) \cdot l \in L''$ olup

$\partial(m) \cdot l \in (L' \cap L'')$ bulunur.

5. $M' \trianglelefteq M, M'' \trianglelefteq M$ olduğundan $M'/(M')^2 \trianglelefteq M/M^2$ ve $M''/(M'')^2 \trianglelefteq M/M^2$ olup $C' \trianglelefteq C$ ve $C'' \trianglelefteq C$ bulunur. Buradan $C_2 = (M' \cap M''/(M' \cap M'')^2) \trianglelefteq (M/M^2) = C$ olur. Sonuç olarak $C_2 = (M' \cap M''/(M' \cap M'')^2)$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
 & C_2 \otimes C_2 \arrow[dl, "\omega_{1,2}"'] \arrow[d, "w_{1,2}"] & \\
L_1 \cap L_2 \arrow[r, "(\partial_2', \partial_2'')"'] & M_1 \cap M_2 \arrow[r, "(\partial_1', \partial_1'')"'] & N_1 \cap N_2
\end{tikzcd}$$

kuadratik modülü, σ kuadratik modülünün bir kuadratik ideali olur. $\square$

2.2 Kuadratik Modüllerin Direk Çarpımı

Bu bölümde, verilen iki kuadratik modülün direk çarpımını oluşturacağız. σ_1 ve σ_2 aşağıdaki gibi iki kuadratik modül olsun.

$$\begin{tikzcd}
 & & C_1 \otimes C_1 \arrow[dl, "\omega_1"'] \arrow[d, "w_1"] & \\
\sigma_1 : & L_1 \arrow[r, "\partial_2"'] & M_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & N_1,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & C_2 \otimes C_2 \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & \\
\sigma_2 : & L_2 \arrow[r, "\partial_2'"'] & M_2 \arrow[r, "\partial_1'"'] & N_2
\end{tikzcd}$$

Şimdi σ_1 ve σ_2 nin direk çarpım kuadratik modülünü tanımlayalım. Bunun için önce ∂_1 ve ∂_1' nil(2)-modüllerin çarpımını tanımlamalıyız. $M_1 \times M_2, N_1 \times N_2$ direk çarpım cebirlerini biliyoruz.

$$\begin{array}{rcl}
\Phi_1 : M_1 \times M_2 & \longrightarrow & N_1 \times N_2 \\
(m_1, m_2) & \longmapsto & \Phi_1(m_1, m_2) = (\partial_1(m_1), \partial_1{}'(m_2))
\end{array}$$

nin bir nil(2)-modül olduğunu gösterelim.

$N_1 \times N_2$ nin $M_1 \times M_2$ üzerine etkisi, $(n_1, n_2) \in N_1 \times N_2$ ve $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ için

$$(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2) = (n_1 \cdot m_1, n_2 \cdot m_2)$$

şeklinde olsun. Bu durumda her $(n_1, n_2), (n_1', n_2') \in N_1 \times N_2$ ve $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ için

$$
\begin{aligned}
[(n_1,n_2)+(n_1',n_2')]\cdot(m_1,m_2) &= (n_1+n_1',n_2+n_2')\cdot(m_1,m_2)\\
&= ((n_1+n_1')\cdot m_1,(n_2+n_2')\cdot m_2)\\
&= (n_1\cdot m_1+n_1'\cdot m_1,n_2\cdot m_2+n_2'\cdot m_2)\\
&= (n_1\cdot m_1,n_2\cdot m_2)+(n_1'\cdot m_1,n_2'\cdot m_2)\\
&= (n_1,n_2)\cdot(m_1,m_2)+(n_1',n_2')\cdot(m_1,m_2)
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
[(n_1,n_2)(n_1',n_2')]\cdot(m_1,m_2) &= (n_1n_1',n_2n_2')\cdot(m_1,m_2)\\
&= ((n_1n_1')\cdot m_1,(n_2n_2')\cdot m_2)\\
&= ((n_1\cdot(n_1'\cdot m_1),n_2\cdot(n_2'\cdot m_2))\\
&= (n_1,n_2)\cdot(n_1'\cdot m_1,n_2'\cdot m_2)\\
&= (n_1,n_2)\cdot[(n_1',n_2')\cdot(m_1,m_2)]
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla bu etkiye göre $M_1\times M_2$ bir $N_1\times N_2$-cebirdir. Şimdi de Φ_1 in bir ön-çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim. Her $(n_1,n_2),(n_1',n_2')\in N_1\times N_2$ ve $(m_1,m_2)\in M_1\times M_2$ için

$$
\begin{aligned}
\Phi_1((n_1,n_2)\cdot(m_1,m_2)) &= \Phi_1(n_1\cdot m_1,n_2\cdot m_2)\\
&= (\partial_1(n_1\cdot m_1),\partial_1'(n_2\cdot m_2))\\
&= (n_1\partial_1(m_1),n_2\partial_1'(m_2))\\
&= (n_1,n_2)(\partial_1(m_1),\partial_1'(m_2))\\
&= (n_1,n_2)\cdot\Phi_1(m_1,m_2)
\end{aligned}
$$

olup, Φ_1 bir ön-çaprazlanmış modüldür.

Şimdi Φ_1 in bir nil(2)-modül olduğunu gösterelim.

Her $(m_1,m_2),(m_1',m_2'),(m_1'',m_2'')\in M_1\times M_2$ için Peiffer çarpımı

$$\begin{aligned}\langle (m_1,m_2),(m_1',m_2')\rangle &= (m_1,m_2)(m_1',m_2')-(m_1,m_2)\cdot\Phi_1(m_1',m_2')\\ &= (m_1m_1',m_2m_2')-(m_1,m_2)\cdot(\partial_1(m_1'),\partial_1'(m_2'))\\ &= (m_1m_1',m_2m_2')-(m_1\cdot\partial_1(m_1'),m_2\cdot\partial_1'(m_2'))\\ &= ((m_1m_1'-m_1\cdot\partial_1(m_1'),m_2m_2'-m_2\cdot\partial_1'(m_2')))\\ &= (\langle m_1,m_1'\rangle,\langle m_2,m_2'\rangle)\end{aligned}$$

olup üçlü peiffer çarpımları

$$\begin{aligned}\langle\langle (m_1,m_2),(m_1',m_2')\rangle,(m_1'',m_2'')\rangle &= \langle\langle m_1,m_1'\rangle,\langle m_2,m_2'\rangle,(m_1'',m_2'')\rangle\\ &= \langle\langle m_1,m_1'\rangle,m_1''\rangle,\langle\langle m_2,m_2'\rangle,m_2''\rangle\\ &= (0,0)\end{aligned}$$

olur. Burada $m_1,m_1',m_1''\in M_1$,$m_2,m_2',m_2''\in M_2$ olup ∂_1 ve ∂_2 birer nil(2)-modül olduklarından $\langle\langle m_1,m_1'\rangle,m_1''\rangle=0$ ve $\langle\langle m_2,m_2'\rangle,m_2''\rangle=0$ olmuştur. Dolayısıyla

$$\Phi_1:M_1\times M_2\longrightarrow N_1\times N_2$$

bir nil(2)-modül olur. Şimdi $M_1\times M_2$ nin $L_1\times L_2$ üzerindeki $N_1\times N_2$ vasıtasıyla olan etkisine bakalım. Burada Φ_1 i kullanacağız. σ_1 bir kuadratik modül olduğundan $m_1\in M_1$ ve $l_1\in L_1$ için

$$\partial_1(m_1)\cdot l=\omega_1(\{\partial_2(l_1)\}\otimes\{m_1\}+\{m_1\}\otimes\{\partial_2(l_1)\})$$

yazılır. Benzer durum σ_2 içinde geçerlidir.

$C=M_1\times M_2/(M_1\times M_2)^2\cong M_1/(M_1)^2\times M_2/(M_2)^2\cong C_1\times C_2$ şeklinde olup,

$\omega:C\otimes C\to L_1\times L_2$ ve $C\otimes C=(C_1\times C_2)\otimes(C_1\times C_2)$ olmak üzere

$\omega:(\{(m_1,m_2)\}\otimes\{(m_1',m_2')\}\mapsto(\omega_1(\{m_1\}\otimes\{m_1'\}),\omega_2(\{m_2\}\otimes\{m_2'\}))$

şeklinde kuadratik dönüşümü tanımlayabiliriz. Bu durumda

$$\Phi_2:\partial_2\times\partial_2':L_1\times L_2\to M_1\times M_2$$

$$(l_1, l_2) \longmapsto (\partial_2(l_1), \partial_2'(l_2))$$

olarak alınırsa kuadratik modül şartlarının sağlar.

QM1)

$\Phi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow N_1 \times N_2$ nin bir nil(2)-modül olduğunu göstermiştik.

QM2) Her $(m_1, m_2), (m_1', m_2'), (m_1'', m_2'') \in M_1 \times M_2$ için, $\{(m_1, m_1')\} \in C$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Phi_2\omega(\{(m_1, m_2)\} \otimes \{(m_1', m_2')\}) &= \Phi_2(\omega_1(\{m_1\} \otimes \{m_1'\}), \omega_2(\{m_2\} \otimes \{m_2'\})) \\
&= (\partial_2\omega_1(\{m_1\} \otimes \{m_1'\}), \partial_2'\omega_2(\{m_2\} \otimes \{m_2'\})) \\
&= (w_1(\{m_1\} \otimes \{m_1'\}), w_2(\{m_2\} \otimes \{m_2'\})) \\
&= (\langle m_1, m_1' \rangle, \langle m_2, m_2' \rangle) \\
&= \langle (m_1, m_2), (m_1', m_2') \rangle \\
&= w(\{(m_1, m_2)\} \otimes \{(m_1', m_2')\})
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\Phi_2\omega = w$ olur.

QM3) Her $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ ve $(l_1, l_2) \in L_1 \times L_2$ için

$$\begin{aligned}
&\omega(\{\Phi_2(l_1, l_2)\} \otimes \{m_1, m_2\} + \{m_1, m_2\} \otimes \{\Phi_2(l_1, l_2)\}) \\
&\quad = \omega(\{\partial_2(l_1), \partial_2'(l_2)\} \otimes \{m_1, m_2\} + \{m_1, m_2\} \otimes \{\partial_2(l_1), \partial_2'(l_2)\}) \\
&\quad = (\omega_1(\{\partial_2(l_1)\} \otimes \{m_1\} + \{m_1\} \otimes \{\partial_2(l_1)\}), \omega_2(\{\partial_2'(l_2)\} \otimes \{m_2\} + \{m_2\} \otimes \{\partial_2'(l_2)\})) \\
&\quad = (\partial_1(m_1) \cdot l_1, \partial_1'(m_2) \cdot l_2) \\
&\quad = (\partial_1(m_1), \partial_1'(m_2)) \cdot (l_1, l_2) \\
&\quad = \Phi_1(m_1, m_2) \cdot (l_1, l_2)
\end{aligned}$$

bulunur.

QM4) Her $(l_1,l_2),(l_1',l_2')\in L_1\times L_2$ için

$$\begin{aligned}\omega'(\{\Phi_2(l_1,l_2)\}\otimes\{\Phi_2(l_1',l_2')\} &= \omega'(\{\partial_2(l_1),\partial_2'(l_2)\}\otimes\{\partial_2(l_1'),\partial_2'(l_2')\})\\ &= (\omega_1\{\partial_2(l_1)\}\otimes\{\partial_2'(l_2)\},\omega_2\{\partial_2(l_1')\}\otimes\{\partial_2'(l_2')\})\\ &= (l_1l_1',l_2l_2')\\ &= (l_1,l_2)(l_1',l_2')\end{aligned}$$

olur. Buraya kadar aşağıdaki önermenin ispatı yapılmış olur.

Önerme 2.2.1 $C=C_1\times C_2$,$C_1=M_1/(M_1)^2$ ve $C_2=M_2/(M_2)^2$ olmak üzere;

$$\begin{tikzcd} & C\otimes C \arrow[dl, "\omega'"'] \arrow[d, "w'"] & \\ L_1\times L_2 \arrow[r, "\Phi_2"'] & M_1\times M_2 \arrow[r, "\Phi_1"'] & N_1\times N_2 \end{tikzcd}$$

diyagramı iki kuadratik modülün direk çarpım kuadratik modülüdür.

2.3 Bölüm Kuadratik Modül

Bu bölümde bir kuadratik modül σ nın σ' gibi kuadratik idealini göz önüne alarak σ/σ' şeklinde bölüm kuadratik modül kavramını tanımlayacağız.

$$\sigma':\quad \begin{tikzcd} & C'\otimes C' \arrow[dl, "\omega'"'] \arrow[d, "w'"] & \\ L' \arrow[r, "\partial_2'"'] & M' \arrow[r, "\partial_1{}'"'] & N', \end{tikzcd} \qquad \sigma:\quad \begin{tikzcd} & C\otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ L \arrow[r, "\partial_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"'] & N \end{tikzcd}$$

olmak üzere; σ',σ nın bir kuadratik ideali olsun. M',M nin ve N',N nin idealleri olup, $N/N',M/M'$ üzerine $(n+N')\cdot(m+M')=n\cdot m+M'$ şeklinde etki eder. Burada $N',M/M'$ üzerine aşikar etkiye sahiptir. Çünkü $n'\in N'$ için $n'\cdot(m+M')=n'\cdot m+M'$olur ve $n'\cdot m\in M$(ideal tanımından) olup

$n' \cdot m + M' = 0 + M'$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \delta_1 : M/M' &\longrightarrow N/N' \\ m + M' &\longmapsto \partial_1(m) + N' \end{aligned}$$

ile tanımlı olan dönüşüm iyi tanımlı bir nil(2)-modül dönüşümüdür. Şimdi bunu gösterelim:

Burada $\partial_1(M') \subseteq N'$ dür. Çünkü ∂_1', ∂_1 in M' ne kısıtlamasıdır. L', L nin ve M', M nin idealleri olup L/L' ve M/M' cebirlerinden bahsedebiliriz. M' nün L/L' üzerine N' vasıtasıyla olan etkisinin aşikar olması gerekir. Çünkü her $m' \in M'$ için $\partial_1'(m') \cdot (l + L') = \partial(m) \cdot l + L'$ olup σ', σ nın kuadratik ideali olduğundan kuadratik modülün 3. şartından $\partial_1(m') \cdot l \in L'$ olup $\partial_1'(m') \cdot l + L' = 0 + L'$ olur. Dolayısıyla $M/M', L/L'$ üzerine N/N' ile etki eder. Bu etki $(l + L') \in L/L'$ ve $(m + M') \in M/M'$ için

$$(\partial_1(m) + M) \cdot (l + L') = \partial_1(m) \cdot l + L'$$

şeklindedir. O halde aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Önerme 2.3.1 σ', σ nın bir kuadratik ideali ve $C_1 = (M/M')/(M/M')^2$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} & C_1 \otimes C_1 \arrow[dl, "\omega_1"'] \arrow[d, "w_1"] & \\ \sigma/\sigma' : L/L' \arrow[r, "\delta_2"'] & M/M' \arrow[r, "\delta_1"'] & N/N' \end{tikzcd}$$

bir kuadratik modüldür. (Bu kuadratik modüle, σ nın σ' kuadratik idealine göre bölüm kuadratik modülü denir.)

Burada $\delta_2 : L/L' \to M/M'$ dönüşümü her $(l + L') \in L/L'$ için $l + L' \mapsto \partial_2 l + M'$ şeklinde ve $w_1 : C_1 \otimes C_1 \to L/L'$ kuadratik dönüşümü ise

$$\omega_1\{(m_1 + M')\} \otimes \{(m_2 + M')\} = \omega(\{m_1\} \otimes \{m_2\}) + L'$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $w_1 : C\otimes C \to M/M'$ dönüşümü ise her $(m+M') \in M/M'$ için

$$w_1(\{(m_1 + M'\} \otimes \{m_2 + M'\} = w(\{m_1\} \otimes \{m_2\}) + M'$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat:

Burada σ/σ' nün kuadratik modül aksiyomlarının sağlandığını göstereceğiz.

QM1)

Kolayca görülür ki; $\delta_1 : M/M' \to N/N'$ iyi tanımlı bir nil(2)-modüldür. Ayrıca N/N' nün M/M' ve L/L' üzerine etkilerinin var olduğunu biliyoruz.

QM2) Her $(m_1 + M'), (m_2 + M') \in M/M'$ için

$$\begin{aligned}
\delta_2\omega_1(\{m_1 + M'\} \otimes \{m_2 + M'\}) &= \delta_2(\omega(\{m_1\} \otimes \{m_2\}) + L') \\
&= \partial_2(\omega(\{m_1\} \otimes \{m_2\})) + M' \\
&= w(\{m_1\} \otimes \{m_2\}) + M' \\
&= w_1(\{m_1 + M'\} \otimes \{m_2 + M'\})
\end{aligned}$$

olur.

QM3) Her $(m + M') \in M/M'$ ve , $(l + L') \in L/L'$ için

$$\begin{aligned}
(l + L') \cdot \delta_1(m + M') =& (l + L') \cdot (\partial_1 m + N') \\
=& l \cdot \partial_1 m + L' \\
=& \omega(\{\partial_2 l\} \otimes \{m\} + \{m\} \otimes \{\partial_2 l\}) + L' \\
=& \omega_1(\{\partial_2 l + M'\} \otimes \{m + M'\} + \{m + M'\} \otimes \{\partial_2 l + M'\}) \\
=& \omega_1\{\delta_2(l + L')\} \otimes \{m + M'\} + \{m + M'\} \otimes \{\delta_2(l + L')\})
\end{aligned}$$

olur.

QM4) Her , $(l_1+L'),(l_2+L')\in L/L'$ için

$$\begin{aligned}\omega(\{\delta_2(l_1+L')\}\otimes\{\delta_2(l_2+L')\}) &= \omega_1(\{\partial_2(l_1)+M'\}\otimes\{\partial_2(l_2)+M'\})\\ &= \omega(\{\partial_2 l_1\}\otimes\{\partial_2 l_2\})+L'\\ &= l_1l_2+L'\\ &= (l_1+L')(l_2+L')\end{aligned}$$

□

Tanım 2.3.2 Yukarıdaki önermede oluşturulan σ/σ' kuadratik modülüne σ kuadratik modülünün σ' kuadratik idealine göre bölüm kuadratik modülü denir.

Önerme 2.3.3 **KUAD**$/N$ kategorisindeki her bir kuadratik N-modül morfizmi bir epik ve bir monik morfizminin kompozisyonu olarak yazılabilir.

İspat:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"'] & N \arrow[d, equal, "id"'] \\ L' \arrow[r, "\partial_2{}'"'] & M' \arrow[r, "\partial_1{}'"'] & N \end{tikzcd}$$

bir kuadratik modül morfizmi ve çek$f_1\subseteq$ çek∂_1, çek$f_2\subseteq$ çek∂_2, $\partial_2(L)\subseteq$ çekf_1 olmak üzere, $c\in M$ için $\overline{\partial_1}:M/\text{çek}f_1\to N$ dönüşümü $\overline{\partial_1}(c+\text{çek}f_1)=\partial_1(c)$ olarak tanımlanırsa $\overline{\partial_1}$ bir nil(2)-modül yapısı oluşturur. Her $l\in L$ için $\overline{\partial_2}:L/\text{çek}f_2\to M/\text{çek}f_1$ dönüşümü $\overline{\partial_2}(l+\text{çek}f_2)=\partial_2(l)+\text{çek}f_1$ olarak tanımlanıp, aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "q_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "q_1"'] & N \arrow[d, equal, "id"'] \\ L/\text{çek}f_2 \arrow[r, "\overline{\partial_2}"'] & M/\text{çek}f_1 \arrow[r, "\overline{\partial_1}"'] & N \end{tikzcd} .$$

Burada çekf_1 in M üzerine etkisi yardımıyla

$$T=M\ltimes\text{çek}f_1\to N=\{(c,m):c\in M,m\in\text{çek}f_1\}$$

bir yarı-direk çarpım cebirini tanımlayıp, bu yarı-direk çarpımı üzerinde bir nil(2)-modül yapısı oluşturabiliriz.

$$\begin{array}{rcl} \tau : M \ltimes \text{çek} f_1 & \longrightarrow & N \\ (c,m) & \longmapsto & \partial_1(c) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan τ dönüşümü bir nil(2)-modüldür. Şimdi epimorfizmin tanımına uygun morfizmler oluşturmak için kaynak ve hedef dönüşümü denilen s ve t dönüşümlerini tanımlayalım. $s(c,m)=c$, $t(c,m)=c+m$ olmak üzere,

$$M \rtimes \text{çek} f_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} M$$

Benzer şekilde

$$L \rtimes \text{çek} f_2 \underset{t'}{\overset{s'}{\rightrightarrows}} M \rtimes \text{çek} f_1$$

tanımlanarak

$$\begin{tikzcd}
& M \rtimes \text{çek} f_1 \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] & N \arrow[d, equal] \\
& M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "q_1"'] \arrow[dl, bend right, "g"'] & N \arrow[d, equal] \\
& M/\text{çek} f_1 \arrow[r, "\overline{\partial_1}"] \arrow[dl, dotted, "\mu_1"] & N \\
M' \arrow[urr, bend right, "\partial_1'"'] & &
\end{tikzcd}, \qquad
\begin{tikzcd}
& L \rtimes \text{çek} f_2' \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, shift right, "t'"'] \arrow[d, shift left, "s'"] & M \rtimes \text{çek} f_1 \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] \\
& L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "q_1"'] \arrow[dl, bend right, "f_1"'] & M \arrow[d, "q_1"'] \\
& L/\text{çek} f_2 \arrow[r, "\overline{\partial_2}"] \arrow[dl, dotted, "\mu_2"] & M \rtimes \text{çek} f_1 \\
L' \arrow[urr, bend right, "\partial_2'"'] & &
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramları yardımıyla, aşağıdaki değişmeli diyagramı elde ederiz.

$$\begin{tikzcd}
& L \rtimes \text{çek} f_2 \arrow[r, "\tau'"] \arrow[d, shift right, "t'"'] \arrow[d, shift left, "s'"] & M \rtimes \text{çek} f_1 \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] & N \arrow[d, equal] \\
& L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "q_2"'] \arrow[ddl, bend right, "f_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "q_1"'] \arrow[dd, bend right, "f_1"'] & N \arrow[d, equal] \\
& L/\text{çek} f_2 \arrow[r, "\overline{\partial_2}"] \arrow[dl, dotted, "\mu_2"] & M/\text{çek} f_1 \arrow[r, "\overline{\partial_1}"] \arrow[dl, dotted, "\mu_1"] & N \arrow[dl, equal] \\
L' \arrow[r, "\partial_2'"'] & M' \arrow[r, "\partial_1'"'] & N &
\end{tikzcd}$$

yani; $\mu_2 q_2 = f_2$, $\mu_1 q_1 = f_1$ dir ve

$$f = (f_1, f_2) = (\mu_1 q_1 = f_1, \mu_2 q_2 = f_2) = (q_1, q_2) \circ (\mu_1, \mu_2)$$

olur. Burada (q_1, q_2) epik ve (μ_1, μ_2) ise moniktir. Çünkü q_1 ve q_2 kanonik dönüşümler olup örtendirler. Somut kategorilerde her örten dönüşüm epiktir. Benzer şekilde μ_1 ve μ_2 bire-bir olup monik morfizmlerdir. Dolayısıyla (f_1, f_2, id) kuadratik modül morfizmi (q_1, q_2, id) şeklinde bir epik ve (μ_1, μ_2, id) şeklinde bir monik morfizmlerinin kompozisyonu olarak yazılmış olur. $\square$

2.4 Kuadratik Modüllerin Çekirdeği

Bu bölümde iki kuadratik modül arasındaki kuadratik modül morfizminin çekirdeği kavramını tanıtacağız. Bunun için önce aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 2.4.1

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\Phi_*"'] & L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_3"'] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_2"'] & N \arrow[d, "f_1"'] \\
C' \otimes C' \arrow[r, "\omega'"] & L' \arrow[r, "\partial_2'"] & M' \arrow[r, "\partial_1'"] & N'
\end{tikzcd}$$

diyagramında

$$\Phi = (f_3, f_2, f_1) : (\omega, \partial_2) \longrightarrow (\omega', \partial_2')$$

bir kuadratik modül morfizmi olsun. $\Phi_1 : C \to C'$ olmak üzere

$$\Phi_* : C \otimes C \to C' \otimes C'$$

$$\{x\} \otimes \{y\} \longmapsto q_2(f_2 x) \otimes q_2(f_2 y)$$

şeklindedir. Burada $\overline{\omega}, \omega$ nın çekΦ_* a kısıtlaması, $\overline{\partial_2}, \partial_2$ nin çekf_3 e kısıtlaması ve $\overline{\partial_1}, \partial_1$ in çekf_2 ye kısıtlaması olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{çek}\Phi_1 \otimes \text{çek}\Phi_1 \arrow[dl, "\overline{\omega}"'] \arrow[d, "\overline{w}"'] & \\
\text{çek}\Phi_* : & \text{çek}f_3 \arrow[r, "\overline{\partial_2}"'] & \text{çek}f_2 \arrow[r, "\overline{\partial_1}"'] & \text{çek}f_1
\end{tikzcd}$$

yapısı bir kuadratik idealdir.

İspat: çekf_1, N nin; çekf_2, M nin; çekf_3 de L nin idealleridirler. Ayrıca

$$\begin{tikzcd}
\text{çek}f_3 \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "\partial_2|_{\text{çek}f_3}"'] & L \arrow[d, "\partial_2"] \\
\text{çek}f_2 \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "\partial_1|_{\text{çek}f_2}"'] & M \arrow[d, "\partial_1"] \\
\text{çek}f_1 \arrow[r, "i"'] & N
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olduğundan $\partial_2(\text{çek}f_3) \subseteq \text{çek}f_2$ ve $\partial_1(\text{çek}f_2) \subseteq \text{çek}f_1$ dir. Her $n' \in \text{çek}f_1 \subseteq N$ ve $m \in M$ için $f_2(n' \cdot m) = f_1(n') \cdot f_2(m) = 0 \cdot f_2(m) = 0$ olduğundan $n' \cdot m \in \text{çek}f_2$ olur. Her $m' \in \text{çek}f_2$ ve $n \in N$ için $f_2(n \cdot m') = f_1(n) \cdot f_2(m') = f_1(n) \cdot 0 = 0$ olup $n \cdot m' = m' \cdot n \in \text{çek}f_2$ olur. Benzer şekilde her $m' \in \text{çek}f_2$ ve $l \in L$ için $\partial_1(m') \cdot l = \overline{\partial_1}(m') \cdot l \in L' = \text{çek}f_3$ olup

$$\begin{tikzcd}
\text{çek}f_3 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial_2|_{\text{çek}f_3}"'] & L \arrow[d, "\partial_2"] \\
\text{çek}f_2 \arrow[r, "i"'] & M
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olduğundan $\partial_2(\text{çek}f_3) \subseteq \text{çek}f_2$ dir. Üstelik

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_3"'] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_2"'] & N \arrow[d, "f_1"'] \\
L' \arrow[r, "\partial_2'"'] & M' \arrow[r, "\partial_1'"'] & N'
\end{tikzcd}$$

diyagramında $f_2\partial_2 = \partial_2' f_3$, $m' \in M$ ve $l \in L$ için $\partial_1(m')\cdot l \in L$ dir. çek$f_2 \subseteq M$, çek$f_3 \subseteq L$ olduğundan $\overline{\partial_1}(m') \cdot l \in$ çekf_3 olur. Böylece aşağıdaki değişmeli diyagramları elde ederiz.

$$\begin{tikzcd} \text{çek}f_2 \arrow[r, "i"] & M \\ \text{çek}f_3 \arrow[u, "\partial_2|_{\text{çek}f_3}"] \arrow[r, "i"] & L, \arrow[u, "\partial_2"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \arrow[r, "\partial_2"] & M \arrow[r, "\partial_1"] & N \\ \text{çek}f_3 \arrow[u, "i"'] \arrow[r, "\overline{\partial_2}"'] & \text{çek}f_2 \arrow[u, "i"'] \arrow[r, "\overline{\partial_1}"'] & \text{çek}f_1 \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Burada $m' \in M' =$ çekf_2 için $\partial_1 i(m') \cdot l \in L$ dir. Dolayısıyla $\overline{\partial_1}(m') \cdot l \in$ çekf_3 tür, ve $f_3(\overline{\partial_1}(m') \cdot l) = f_1(\overline{\partial_1}(m')) \cdot f_3(l) = 0 \cdot f_3(l) = 0$ olup $\overline{\partial_1}(m') \cdot l \in$ çekf_3 olur. Her $l' \in$ çekf_3 ve $m \in M$ için $f_3(\partial_1(m') \cdot l') = f_1(\partial_1(m')) \cdot f_3(l') = 0$ olup $\partial_1(m') \cdot l' \in$ çekf_3 olur. Sonuç olarak (çekf_3, çekf_2, çekf_1), $(\omega, \partial_1, \partial_2)$ nin bir kuadratik ideali olur. □

Şimdi kuadratik modül morfizminin çekirdeği kavramını verelim.

Tanım 2.4.2 $\Phi_* = (f_3, f_2, f_1) : (\omega, \partial_2, \partial_1) \longrightarrow (\omega', \partial_2', \partial_1')$ aşağıdaki diyagramdaki gibi bir kuadratik modül morfizmi olsun

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\Phi_*"'] & L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_3"'] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_2"'] & N \arrow[d, "f_1"'] \\ C' \otimes C' \arrow[r, "\omega'"] & L' \arrow[r, "\partial_2'"] & M' \arrow[r, "\partial_1'"] & N' \end{tikzcd}$$

Yukarıdaki önermede oluşturduğumuz

$$\text{çek}\Phi_* = \text{çek}\Phi_1 \otimes \text{çek}\Phi_1 \xrightarrow{\overline{\omega}} \text{çek}f_3 \xrightarrow{\overline{\partial_2}} \text{çek}f_2 \xrightarrow{\overline{\partial_1}} \text{çek}f_1$$

kuadratik idealine (f_1, f_2, f_3) morfizminin çekirdeği denir.

Şimdi bir kuadratik modülün bir kuadratik modül morfizmi altındaki görüntüsünün yine bir kuadratik modül olduğunu gösterelim.

Önerme 2.4.3 $(f_1, f_2, f_3) : \sigma \to \sigma'$;

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\Phi_*"'] & L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_3"'] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_2"'] & N \arrow[d, "f_1"'] \\ C' \otimes C' \arrow[r, "\omega'"] & L' \arrow[r, "\partial_2'"] & M' \arrow[r, "\partial_1'"] & N' \end{tikzcd}$$

şeklinde tanımlanan bir kuadratik modül morfizmi olsun. Bu durumda

$$\begin{tikzcd}
& \Phi_*(C\otimes C) \arrow[dl, "\omega'|_{\Phi_*(C\otimes C)}"'] \arrow[d] & \\
f_3(L) \arrow[r, "\partial_2'|_{f_3(L)}"'] & f_2(M) \arrow[r, "\partial_1'|_{f_2(M)}"'] & f_1(N)
\end{tikzcd}$$

$(\omega', \partial_2', \partial_1')$ kuadratik modülünün alt kuadratik modülüdür.

İspat: Aşağıda alt kuadratik modülün şartlarını sağlatacağız.

1) $f_3(L)$, L' nün ve $f_2(M)$ de M' nün birer alt cebirleri olduğu kolayca söylenebilir.

2) $\partial_1'|_{f_2(M)} : Imf_2 \to f_1(N)$ bir nil(2)-alt modüldür. Yani

$a)$ $f_2(M)$, M' nün bir alt cebiri ve $f_1(N)$ de N' nün bir alt halkasıdır.

$b)$ $f_1(N)$ in $f_2(M)$ ye etkisi N' nün M' ye olan etkisinden indirgenmiştir.

$c)$ Aşağıdaki diyagram

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r] & N' \\
f_2(M) \arrow[u, "i"'] \arrow[r, "\partial_1'|_{f_2(M)}"'] & f_1(N) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

değişmelidir. Dolayısıyla $\partial_1'|_{f_2(M)} : f_2(M) \to f_1(N)$ bir nil(2)-modüldür. $\square$

2.5 Kuadratik Modüllerin Evrensellik Özelliği

Bu bölümde σ', σ nın kuadratik ideali , σ'' başka bir kuadratik modül olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & \sigma'' \\
\sigma/\sigma' \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak bir $\alpha : \sigma/\sigma' \to \sigma''$ kuadratik modül morfizminin varlığını ve tekliğini göstereceğiz.

$$\begin{tikzcd}
 & C_1 \otimes C_1 \arrow[dl, "\omega_1"'] \arrow[d, "w_1"] & \\
L/L' \arrow[r, "\delta_2"'] & M/M' \arrow[r, "\delta_1"'] & N/N',
\end{tikzcd}$$

nün bir kuadratik modül olduğunu bir önceki bölümde gördük. Bu durumda

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\Phi'_*"'] & L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_3"'] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_2"'] & N \arrow[d, "f_1"'] \\
C_1 \otimes C_1 \arrow[r, "\omega_1"'] & L/L' \arrow[r, "\delta_2"'] & M/M' \arrow[r, "\delta_1"'] & N/N'
\end{tikzcd}$$

şeklinde kuadratik modüllerin bir $f = (f_3, f_2, f_1)$ morfizmi vardır. $\beta_1(N') = 0, \beta_2(M') = 0, \beta_3(L') = 0$(bu eşitliklerin sebebi ileri de anlaşılacak) olmak üzere, aşağıdaki gibi başka bir $\beta = (\beta_3, \beta_2, \beta_1)$

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\Phi_*"'] & L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\beta_3"'] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] & N \arrow[d, "\beta_1"'] \\
C' \otimes C' \arrow[r, "\omega'_1"'] & \sigma_2 \arrow[r, "\delta'_2"'] & \sigma_1 \arrow[r, "\delta'_1"'] & \sigma_0
\end{tikzcd}$$

kuadratik modül morfizmi için

$$\begin{tikzcd}
C_1 \otimes C_1 \arrow[r, "\omega_1"] \arrow[d, "\Phi"'] & L/L' \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & M/M' \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & N/N' \arrow[d, "\alpha_1"'] \\
C' \otimes C' \arrow[r, "\omega'_1"'] & \sigma_2 \arrow[r, "\delta'_2"'] & \sigma_1 \arrow[r, "\delta'_1"'] & \sigma_0
\end{tikzcd}$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ şeklinde bir tek morfizm vardır. Burada $\alpha_1 f_1 = \beta_1, \alpha_2 f_2 = \beta_2, \alpha_3 f_3 = \beta_3, \Phi\Phi_* = \Phi'_*$ olur. Özetle

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[rr, "\partial_2"] \arrow[d, "f_3"] \arrow[ddl, "\beta_3"'] & & M \arrow[rr, "\partial_1"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[ddl, "\beta_2"] & & N \arrow[d, "f_1"] \arrow[ddl, "\beta_1"] \\
& L/L' \arrow[rr] \arrow[dl, "\alpha_3"] & & M/M' \arrow[rr] \arrow[dl, "\alpha_2"] & & N/N' \arrow[dl, "\alpha_1"] \\
\sigma_2 \arrow[rr] & & \sigma_1 \arrow[rr] & & \sigma_0 &
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramını elde ederiz. Burada $\alpha = (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$ diyagramı değişmeli yapan tek morfizmdir.

İspat: $f_1 : N \to N/N'$ dönüşümü $n \mapsto n + N'$, $f_2 : M \to M/M'$ dönüşümü $m \mapsto m + M'$ ve $f_3 : L \to L/L'$ dönüşümü $l \mapsto l + L'$ olarak tanımlansınlar. Bu durumda her $n \in N$ ve $m \in M$ için

$$f_2(n \cdot m) = n \cdot m + M' = (n + N') \cdot (m + M') = f_1(n) \cdot f_2(m)$$

ve $l \in L$ için

$$f_3(n \cdot l) = n \cdot l + L' = (n + N') \cdot (l + L') = f_1(n) \cdot f_3(m)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_3"'] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_2"'] & N \arrow[d, "f_1"'] \\
L/L' \arrow[r, "\delta_2"'] & M/M' \arrow[r, "\delta_1"'] & N/N'
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olup (f_1, f_2, f_3) bir kuadratik modül morfizmidir. Şimdi her $l + L' \in L/L'$ için $\alpha_3(l + L') = \beta_3(l)$ ile verilen $\alpha_3 : L/L' \to \sigma_2$ şeklinde tanımlı α_3 ün iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$l_1 + L' = l_2 + L' \Longrightarrow l_1 - l_2 \in L'$ olup $\beta_3(l_1 - l_2) \in \beta_3(L')$ yani $\beta_3(l_1) - \beta_3(l_2) \in \beta_2(L')$ olur. $L' \subseteq$ çekβ_3 yani $\beta_3(L') = 0$ olduğundan $\beta_3(l_1) = \beta_3(l_2)$ yani

$\alpha_3(l_1 + L') = \beta_3(l_1) = \beta_3(l_2) = \alpha_3(l_2 + L')$ olup, α_3 iyi tanımlıdır. Benzer şekilde $\alpha_2 : M/M' \to \sigma_1; (m + M') \mapsto \beta_2(m)$ ve $\alpha_1 : N/N' \to \sigma_0; (n + N') \mapsto \beta_1(n)$ morfizimleri de iyi tanımlıdır. Ayrıca her $m + M' \in M/M'$ için

$$\partial_1'\alpha_2(m + M') = \partial_1'\beta_2(m) = \beta_1(\partial_1(m)) = \alpha_1(\partial_1(m) + M') = \alpha_1\delta_1(m + M')$$

ve her $l + L' \in L/L'$ için

$$\partial_2'\alpha_3(l + L') = \partial_2'\beta_3(l) = \beta_2(\partial_2(m)) = \alpha_2(\partial_2(l) + M') = \alpha_2\delta_2(l + L')$$

olur. Böylece $(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$ diyagramı değişmeli yapan bir tek kuadratik modül morfizmi olur. □

Şimdi grup teoride çok iyi bilinen 1. izomorfizm teoremini kuadratik modüller için aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

Önerme 2.5.1 $f = (f_1, f_2, f_3) : \sigma \to \sigma'$ bir kuadratik modül morfizmi ise

$$\sigma/\text{çek } f \cong f(\sigma)$$

dir.

İspat: Burada $f^* : \sigma/\text{çek } f \to f(\sigma)$ dönüşümü $f_1^*(n + \text{çek } f_1) = f_1(n)$, $f_2^*(m + \text{çek } f_2) = f_2(m)$ ve $f_3^*(l + \text{çek } f_3) = f_3(l)$ ile verilen homomorfizm bir kuadratik modül izomorfizmidir. Gruplar üzerindeki izomorfizm teoreminden yararlanılarak f^* ın izomorfizm olduğu kolayca gösterilebilir. □

Bölüm 3

Geri çekme ve İleri itme Kuadratik Modül

Geri çekme ve ileri itme kavramları Brown ve Higgins, [13], tarafından çaprazlanmış modüller için çalışılmıştır. Aynı çalışmaların Lie cebir versiyonunu [21] de, değişmeli cebirler versiyonunu [31] de bulabilirsiniz. Arvasi, Arslan ve Onarlı [2] de bu çalışmaları 2-çaprazlanmış modüller üzerinde yaparak 2 boyuta taşımışlardır. Ayrıca Brown ve Siviera [19] da geri çekme ve ileri itme çaprazlanmış kareleri oluşturmuşturlardır. Bu bölümde verilen bir kuadratik modülün geri çekme kuadratik modülü ve ileri itme kuadratik modülünü elde edeceğiz.

Tanım 3.0.2 $\mathbf{C}$ herhangi bir kategori, $f : A \to C$ ve $g : B \to C$ de bu kategoride iki morfizm olsunlar.

1. $p_1 : P \to A$ ve $p_2 : P \to B$, $\mathbf{C}$ kategorisinde birer morfizm;
2. $fp_1 = gp_2$;
3. $q_1 : Q \to A$, $q_2 : Q \to B$ şeklinde $\mathbf{C}$ kategorisinde $fq_1 = gq_2$ olacak şekilde herhangi iki morfizm alındığında $m : Q \to P$ şeklinde biricik bir morfizm vardır, öyle ki; $p_1m = q_1$ ve $p_2m = q_2$ dir;

şartları sağlanıyorsa (P, p_1, p_2) üçlüsüne f ve g nin geri çekme(pullback)si denir.

Bunu aşağıdaki diyagram ile gösterebiliriz.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dotted, "m"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Bu diyagram değişmelidir ve $m : Q \to P$ tektir. Geri çekme kavramının dualine de ileri itme(push out) denir.

3.1 Geri çekme Kuadratik Modül

İlk olarak çaprazlanmış modüller için geri çekme çaprazlanmış modül ne demek olduğunu açıklayalım. $\mu : M \to P$ bir çaprazlanmış modül ve $f : P \to Q$ bir cebir homomorfizmi olsun. M ve f homomorfizmini kullanarak yeni bir $f^*(M)$ ile gösterilen N-cebir elde edilir ve P nin bu N-cebiri $f^*(M)$ ye olan etkisiyle birlikte $\partial : f^*(M) \to Q$ şeklinde yeni bir çaprazlanmış modül elde edilir. Bu yaklaşım Q tabanı ile verilen bir çaprazlanmış modülün $f : P \to Q$ homomorfizmi yardımıyla P tabanlı bir çaprazlanmış modüle nasıl geri çekildiği fikrini verir. Burada benzer şekilde, verilen bir kuadratik modülün geri çekme kuadratik modülünü elde ederek kuadratik modüller için taban değiştirme imkanı sunmuş olacağız. İlk olarak kuadratik modülün birinci bölümü olan nil(2)-modül kısmının geri çekmesini oluşturacağız.

Şimdi geri çekme nil(2)-modül inşasını verelim.

$\partial : M \to Q$ bir nil(2)-modül ve $\sigma : P \to Q$ bir k-cebir morfizmi olsun.

Burada ∂ nın tabanını Q dan P ye değiştiren bir funktor tanımlayacağız. Yani

$$\lambda : \mathbf{Nil}(2)/Q \longrightarrow \mathbf{Nil}(2)/P$$

şeklinde bir funktor tanımlamış olacağız.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\partial"] \\ P \arrow[r, "\sigma"'] & Q \end{tikzcd}$$

diyagramı verilsin. $\sigma^*(M) = P \times_Q M = \{(p,m) : \partial(m) = \sigma(p)\}$ olmak üzere, ∂ ve σ nın fiber çarpımı olsun. Bu fiber çarpımın detayı için [15] e bakınız. Burada $(p,m) \in \sigma^*(M)$ için $\sigma_1 : \sigma^*(M) \to P$ dönüşümünü $\sigma_1(p,m) = m$ şeklinde ve $\beta_1 : \sigma^*(M) \to P$ dönüşümünü $\beta_1(p,m) = p$ şeklinde tanımlayalım. Böylece aşağıdaki diyagramı elde ederiz.

$$\begin{tikzcd} \sigma^*(M) \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & M \arrow[d, "\partial"] \\ P \arrow[r, "\sigma"'] & Q \end{tikzcd}$$

Burada

$$\partial\sigma_1(p,m) = \partial(m) = \sigma(p) = \sigma\beta_1(p,m)$$

olup diyagram değişmeli olur. Her $p \in P$ ve $m \in M$ için $p' \in P$ nün $(p,m) \in \sigma^*(M)$ üzerine etkisini

$$(p,m) \cdot p' = (pp', m \cdot \sigma(p'))$$

şeklinde tanımlayalım. Bu etki bir cebir etkisidir ve bu etkiye göre, β_1 bir ön-çaprazlanmış modül olur. Gerçektende $(p,m) \in \sigma^*(M)$ için

$$\beta_1((p,m) \cdot p') = \beta_1((pp', m \cdot \sigma(p')) = pp' = \beta_1(p,m)p'$$

dir. Ayrıca üçlü Peiffer çarpımlarının 0 olduğunu görelim.
Her $(p_1,m_1),(p_2,m_2),(p_3,m_3)\in\sigma^*(M)$ için

$$\begin{aligned}
\langle\langle(p_1,m_1),(p_2,m_2)\rangle,(p_3,m_3)\rangle =&\langle(p_1,m_1)(p_2,m_2)-(p_1,m_1)\cdot\beta_1(p_2,m_2),(p_3,m_3)\rangle\\
=&\langle(p_1p_2,m_1m_2)-(p_1,m_1)\cdot p_2,(p_3,m_3)\rangle\\
=&\langle(p_1p_2,m_1m_2)-(p_1p_2,m_1\cdot\sigma(p_2),(p_3,m_3)\rangle\\
=&\langle(0,m_1m_2-m_1\cdot\sigma(p_2)),(p_3,m_3)\rangle\\
=&\langle(0,\langle m_1,m_2\rangle),(p_3,m_3)\rangle\\
=&(0,\langle m_1,m_2\rangle)(p_3,m_3)-(0,\langle m_1,m_2\rangle)\cdot\beta_1(p_3,m_3)\\
=&(0,\langle m_1,m_2\rangle m_3)-(0,\langle m_1,m_2\rangle)\cdot p_3\\
=&(0,\langle m_1,m_2\rangle m_3)-(0,\langle m_1,m_2\rangle\cdot\sigma(p_3))\\
=&(0,\langle m_1,m_2\rangle m_3)-(0,\langle m_1,m_2\rangle\cdot\partial(m_3))\\
=&(0,\langle m_1,m_2\rangle m_3-\langle m_1,m_2\rangle\cdot\partial(m_3))\\
=&(0,\langle\langle m_1,m_2\rangle,m_3\rangle)\\
=&(0,0)
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\langle(p_1,m_1),\langle(p_2,m_2),(p_3,m_3)\rangle\rangle=(0,0)$ olduğu da gösterilebilir. Böylece $\beta_1:\sigma^*(M)\to P$ bir nil(2)-modül olur.

Şimdi de (σ_1,σ) nın bir nil(2)-modül morfizmi olduğunu gösterelim. Diyagramın değişmeli olduğunu göstermiştik, etkiyi koruduğunu gösterelim.
Her $(p,m)\in\sigma^*(M)$ ve $p\in P$ için

$$\sigma_1((p,m)\cdot p')=\sigma_1(pp',m\cdot\sigma(p'))=m\cdot\sigma(p')=\sigma_1(p,m)\cdot\sigma(p')$$

olup; (σ_1,σ) bir nil(2)-modül morfizmi olur. Yani aşağıdaki diyagram bir geri çekme diyagramı olup , geri çekme nil(2)-modülü oluşturmuş oluruz.

$$\begin{tikzcd}
\sigma^*(M) \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & M \arrow[d, "\partial"] \\
P \arrow[r, "\sigma"'] & Q
\end{tikzcd}$$

Şimdi de geri çekme kuadratik modül inşasını verelim.

$$\begin{tikzcd} & & C\otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ \boldsymbol{\sigma}: & C_2 \arrow[r, "\partial_2"] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] & C_0 \end{tikzcd}$$

bir kuadratik modül ve $\sigma : B \to C_0$ bir cebir homomorfizmi olsun. B tabanlı

$$\begin{tikzcd} & & C'\otimes C' \arrow[dl, "\omega'"'] \arrow[d, "w'"] & \\ \boldsymbol{\sigma}^*: & B_2^* \arrow[r, "\beta_2"] & B_1^* \arrow[r, "\beta_1"] & B \end{tikzcd}$$

şeklinde yeni bir kuadratik modül elde edeceğiz.

Önerme 3.1.1

$$B_2^* = \{((0, c_1), c_2) : c_1 = \partial_2(c_2), (0, c_1) \in \ker \beta_1\} \subseteq \ker \beta_1 \times C_2,$$

$$B_1^* = \{(b, c_1) : \sigma(b) = \partial_1(c_1), c_1 \in C_1, b \in B\}$$

olmak üzere

$$\begin{tikzcd} & & C'\otimes C' \arrow[dl, "\omega'"'] \arrow[d, "w'"] & \\ \boldsymbol{\sigma}^*: & B_2^* \arrow[r, "\beta_2"] & B_1^* \arrow[r, "\beta_1"] & B \end{tikzcd}$$

kuadratik modülü

$$\begin{tikzcd} & & C\otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ \boldsymbol{\sigma}: & C_2 \arrow[r, "\partial_2"] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] & C_0 \end{tikzcd}$$

kuadratik modülünün $\sigma : B \to C_0$ morfizmi yardımıyla geri çekme kuadratik modülüdür.

İspat: Önce $\boldsymbol{\sigma}^*$ ın bir kuadratik modül olduğunu gösterelim. B_1^*, σ ve ∂_1 in fiber çarpım olarak bilinen geri çekmesidir. $\beta_2(0,c_1,c_2) = (0,c_1) = (0,\partial_2(c_2))$, $\beta_1(b,c_1) = b$ ve $(b,c) \in (B_1^*)^{crab}$ için ω' nü $\omega'(\{(b,c_1)\}\otimes\{(b',c_1')\}) = (0,\langle c_1,c_1'\rangle,\omega(\{c_1\}\otimes\{c_1'\}))$ şeklinde tanımlayalım.

Şimdi aşağıdaki değişmeli diyagramı göz önüne alalım.

$$\begin{tikzcd}
B_2^* \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d, "\beta_2"'] & C_2 \arrow[d, "\partial_2"] \\
B_1^* \arrow[r, "\sigma_1"'] \arrow[d, "\beta_1"'] & C_1 \arrow[d, "\partial_1"] \\
B \arrow[r, "\sigma"'] & C_0
\end{tikzcd}$$

Burada her $c_1 \in C_1, c_2 \in C_2$ ve $b \in B$ için $\sigma_2((0,c_1),c_2) = c_2$, $\sigma_1(b,c_1) = c_1$ ve $\beta_1(b,c_1) = b$ izdüşüm dönüşümleridirler. $b \in B$ nin $(b',c_1) \in B_1^*$ ve $(0,c_1,c_2) \in B_2^*$ üzerine cebir etkisi aşağıdaki gibidir

$$(b',c_1)\cdot b = (b'b, c_1\cdot\sigma(b))$$

$$(0,c_1,c_2)\cdot b = (0, c_1\cdot\sigma(b), c_2\cdot\sigma(b)).$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sigma_1(b',c_1)\cdot b) &= \sigma_1(b'b, c_1\cdot\sigma(b)) \\
&= c_1\cdot\sigma(b') \\
&= \sigma_1(b,c_1)\cdot\sigma(b'),
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sigma_2(0,c_1,c_2)\cdot b) &= \sigma_2(0,c_1\cdot\sigma(b),c_2\cdot\sigma(b)) \\
&= c_2\cdot\sigma(b) \\
&= \sigma_2(0,c_1,c_2)\cdot\sigma(b),
\end{aligned}$$

olduğundan $(\sigma_2,\sigma_1,\sigma)$ bir kuadratik modül morfizmidir.

Şimdi de

$$\begin{tikzcd}
 & C' \otimes C' \arrow[dl, "\omega'"'] \arrow[d, "w'"] & \\
B_2^* \arrow[r, "\beta_2"'] & B_1^* \arrow[r, "\beta_1"'] & B
\end{tikzcd}$$

diyagramının bir kuadratik modül olduğunu gösterelim.

QM1)

β_1 in nil(2)-modül olduğunu daha önce göstermiştik. Ayrıca $\beta_1\beta_2(0, c_1, c_2) = \beta_1(\beta_2(0, c_1, c_2)) = \beta_1(0, c_1) = 0$ olup bir komplekstir.

QM2) $\{(b, c)\}, \{(b', c')\} \in B_1*$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\beta_2(\omega'\{(b, c)\} \otimes \{(b', c')\}) &= \beta_2(0, \langle c, c'\rangle, \omega\{c\} \otimes \{c'\}) \\
&= (0, \partial_2\omega\{c\} \otimes \{c'\}) \\
&= (0, \langle c, c'\rangle)
\end{aligned}$$

olup, diğer taraftan

$$\begin{aligned}
&\langle (b, c), (b', c')\rangle = (b, c)(b', c') - \beta_1(b, c) \cdot (b', c') \\
&= (bb', cc') - b \cdot (b', c') \\
&= (bb', cc') - (bb', \sigma b \cdot c') \\
&= (0, \langle c, c'\rangle).
\end{aligned}$$

bulunur. Yani, $\beta_2\omega' = w'$ olur.

QM3) $(0,c_1,c_2)\in B_2^*$, $(b,c_1')\in B_1^*$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&\omega'(\{\beta_2(0,c_1,c_2)\}\otimes\{(b,c_1')\}+\{(b,c_1')\}\otimes\{\beta_2(0,c_1,c_2)\})\\
&\qquad=\omega'(\{0,\partial_2c_2\}\otimes\{(b,c_1')\}+\{(b,c_1')\}\otimes\{0,\partial_2c_2\})\\
&\qquad=(0,\langle\partial_2c_2,c_1'\rangle+\langle c_1',\partial_2c_2\rangle,\omega(\{\partial_2c_2\}\otimes\{c_1'\}+\{c_1'\}\otimes\{\partial_2c_2\}))\\
&\qquad=(0,\langle\partial_2c_2,c_1'\rangle,\omega(\{\partial_2c_2\}\otimes\{c_1'\})+(0,\langle c_1',\partial_2c_2\rangle,\omega(\{c_1'\}\otimes\{\partial_2c_2\})\\
&\qquad=(0,c_1\cdot\partial_1c_1',c_2\cdot\partial_1c_1')\\
&\qquad=(0,c_1\cdot\sigma(b),c_2\cdot\sigma(b))\\
&\qquad=(0,c_1,c_2)\cdot\sigma b\\
&\qquad=(0,c_1,c_2)\cdot\beta_1(b,c_1')
\end{aligned}
$$

bulunur.

QM4) $(0,c_1,c_2),(0,c_1',c_2')\in B_2^*$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\omega'(\{\beta_2(0,c_1,c_2)\}\otimes\{\beta_2(0,c_1',c_2')\})&=\omega'\{(0,\partial_2c_2)\}\otimes\{(0,\partial_2c_2')\}\\
&=(0,\langle\partial_2c_2,\partial_2c_2'\rangle,\omega\{\partial_2c_2\}\otimes\{\partial_2c_2'\})\\
&=(0,\partial_2c_2c_1'-\partial_2c_2\cdot(\partial_1\partial_2c_2'),c_2c_2')\\
&=(0,\partial_2c_2c_1',c_2c_2')\\
&=(0,c_1c_1',c_2c_2')\\
&=(1,c_1,c_2)(1,c_1',c_2').
\end{aligned}
$$

olur. Böylece

$$
\begin{tikzcd}
 & C'\otimes C' \arrow[dl, "\omega'"'] \arrow[d, "w'"] & \\
B_2^* \arrow[r, "\beta_2"] & B_1^* \arrow[r, "\beta_1"] & B
\end{tikzcd}
$$

diyagramının bir kuadratik modül olduğunu göstermiş oluruz. Şimdi de evrensellik özelliği sağladığını gösterelim. Aşağıdaki herhangi bir kuadratik modül

$$\begin{tikzcd}
& C'' \otimes C'' \arrow[dl] \arrow[d] & \\
L \arrow[r, "\mu_2"'] & M \arrow[r, "\mu_1"'] & B.
\end{tikzcd}$$

ve (h_2, h_1, σ) de aşağıdaki gibi verilen bir kuadratik modül morfizmi olsun.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "\mu_2"'] & C_2 \arrow[d, "\partial_2"] \\
M \arrow[r, "h_1"'] \arrow[d, "\mu_1"'] & C_1 \arrow[d, "\partial_1"] \\
B \arrow[r, "\sigma"'] & C_0
\end{tikzcd}$$

Bu durumda (h_2^*, h_1^*, id)

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "h_2^*"] \arrow[d, "\mu_2"'] & B_2^* \arrow[d, "\beta_2"] \\
M \arrow[r, "h_1^*"'] \arrow[d, "\mu_1"'] & B_1^* \arrow[d, "\beta_1"] \\
B \arrow[r, "id"'] & B
\end{tikzcd}$$

şeklinde

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, "\mu_2"'] \arrow[dr, dotted, "h_2^*"] \arrow[drr, bend left, "h_2"] & & \\
M \arrow[dr, dotted, "h_1^*"'] \arrow[drr, bend left, "h_1"] \arrow[ddr, bend right, "\mu_1"'] & B_2^* \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d, "\beta_2"'] & C_2 \arrow[d, "\partial_2"] \\
& B_1^* \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & C_1 \arrow[d, "\partial_1"] \\
& B \arrow[r, "\sigma"'] & C_0.
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan bir tek morfizmin var olduğunu gösterelim. Bunu kısaca aşağıdaki diyagramla gösteririz.

$$\begin{tikzcd}
(L, M, B) \arrow[r, "{(h_2,h_1,\sigma)}"] & (C_2, C_1, C_0) \\
(B_2^*, B_1^*, B). \arrow[u, "{(h_2^*,h_1^*,id)}"] \arrow[ur, "{(\sigma_2,\sigma_1,\sigma)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Bunun için gerekli olan (h_2^*, h_1^*, id) morfizmini açıkça yazalım. $h_1^* : M \to B_1^*$ dönüşümünü $m \in M$ için $h_1^*(m) = (\mu_1(m), h_1(m))$ şeklinde ve $h_2^* : L \to B_2^*$ dönüşümünü ise $l \in L$ için;

$$h_2^*(l) = (h_1^*\mu_2(l), h_2(l)) = (\mu_1\mu_2(l), h_1\mu_2(l), h_2(l)) = (0, h_1\mu_2(l), h_2(l))$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi (h_2^*, h_1^*, id) bir kuadratik modül morfizmi olduğunu gösterelim. İlk olarak $\beta_1 h_1^*(m) = \beta_1(\mu_1(m), h_1(m)) = \mu_1(m)$ ve

$$\beta_2 h_2^*(l) = \beta_2(0, h_1\mu_2 l, h_2 l) = (0, h_1\mu_2 l) = (\mu_1\mu_2 l, h_1\mu_2 l) = h_1^*\mu_2 l$$

olup diyagram değişmelidir. Ayrıca her $l \in L$ ve $b \in B$ için

$$\begin{aligned}
h_2^*(l \cdot b) &= (0, h_1\mu_2(l \cdot b), h_2(l \cdot b)) \\
&= (0, h_1((\mu_2 l) \cdot b), h_2(l) \cdot \sigma b) \\
&= (0, (h_1\mu_2 l) \cdot \sigma b, h_2(l) \cdot \sigma b) \\
&= (0, h_1\mu_2(l), h_2 l) \cdot b \\
&= (h_2^* l)^b
\end{aligned}$$

ve $m \in M$ için

$$h_1^*(m \cdot b) = (\mu_1(m \cdot b), h_1(m \cdot b)) = (\mu_1(m)b, h_1(m) \cdot \sigma b) = (\mu_1(m), h_1(m)) \cdot b = (h_1^* m) \cdot b$$

olup etkiyi korurlar. Son olarak, $\omega'' : M^{cr^{ab}} \otimes M^{cr^{ab}} \to L$ ve $\omega' : C' \otimes C' \to$

B_2^* kuadratik dönüşümleri için,

$$\begin{aligned}\omega'(\{h_1^*(m)\}\otimes\{h_1^*(m')\}) &= \omega'\{(\mu_1 m, h_1 m)\}\otimes\{(\mu_1 m', h_1 m')\}\\ &= (0, \langle h_1(m), h_1(m')\rangle, \omega(\{h_1 m\}\otimes\{h_1 m'\})\\ &= (0, h_1(\mu_2\omega'(m)\otimes(m')), h_2\omega''(m)\otimes(m'))\\ &= h_2^*(\omega'(m)\otimes(m')).\end{aligned}$$

olduğundan (h_2^*, h_1^*, id) istenilen biricik kuadratik modül morfizmidir. $\square$

Geri çekme kuadratik modül oluşturmak bize $\varphi : P \to Q$ boyunca bir funktor verir. Bu funktoru

$$\boldsymbol{\varphi}^* : \mathbf{KUAD}/P \longrightarrow \mathbf{KUAD}/Q$$

şeklinde gösteririz.

3.2 İleri itme Kuadratik Modül

Önce herhangi bir kategoride iki morfizmin ileri itmesini tanımlayalım.

Tanım 3.2.1 $\mathbf{C}$ herhangi bir kategori, $f : A \to B$ ve $g : A \to C$ de bu kategoride iki morfizm olsunlar.

1. $p_1 : B \to P$ ve $p_2 : P \to C$, $\mathbf{C}$ kategorisinde birer morfizm;
2. $p_1 f = p_2 g$;
3. $q_1 : B \to Q$, $q_2 : C \to Q$ şeklinde $\mathbf{C}$ kategorisinde $q_1 f = q_2 g$ olacak şekilde herhangi iki morfizm alındığında $m : P \to Q$ şeklinde biricik bir morfizm vardır, öyle ki; $mp_1 = q_1$ ve $mp_2 = q_2$ dir;

şartları sağlanıyorsa (P, p_1, p_2) üçlüsüne f ve g nin ileri itme(pushout)si denir.

Bunu aşağıdaki diyagram ile gösteririz.

$$\begin{tikzcd} & & Q \\ B \arrow[r, "p_1"'] \arrow[urr, bend left, "q_1"] & P \arrow[ur, dotted, "m"] & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & C \arrow[u, "p_2"'] \arrow[uur, bend right, "q_2"'] & \end{tikzcd}$$

Bu diyagram değişmelidir ve $m : P \to Q$ biriciktir.

Şimdi çaprazlanmış modüller için ileri itme çaprazlanmış modül ne demek olduğunu açıklayalım. $\mu : M \to Q$ bir çaprazlanmış modül ve $f : P \to Q$ bir cebir homomorfizmi olsun. M ve f homomorfizmini kullanarak yeni bir $f_*(M)$ ile gösterilen N-cebir elde edilir ve Q nun bu N-cebiri $f_*(M)$ ye olan etkisiyle birlikte $\partial : f_*(M) \to P$ şeklinde yeni bir çaprazlanmış modül elde edilir. Bu yaklaşım P tabanı ile verilen bir çaprazlanmış modülün $f : P \to Q$ homomorfizmi yardımıyla Q tabanlı bir çaprazlanmış modüle nasıl ileri itildiği fikrini verir. Burada benzer şekilde, verilen bir kuadratik modülün ileri itme kuadratik modülünü elde edeceğiz. Aslında burada daha önceki bölümde oluşturmuş olduğumuz geri çekme funktoruna sol adjoint bir funktor olacak olan ileri itme funktorunu oluşturuyoruz.

Teorem 3.2.2

$$\begin{tikzcd} & & M \otimes M \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ \sigma : & L_1 \arrow[r, "\partial_2"'] & C \arrow[r, "\partial_1"'] & R \end{tikzcd}$$

bir kuadratik modül ve $\varphi : R \to S$ bir cebir morfizmi olmak üzere;

$$\begin{tikzcd} & & M' \otimes M' \arrow[dl, "\omega'"'] \arrow[d, "w'"] & \\ \sigma_2 : & L_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & B \arrow[r, "\beta_1"'] & S \end{tikzcd}$$

kuadratik modülü vardır ki

$$\begin{tikzcd} M\otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\Phi^*"'] & L_1 \arrow[r] \arrow[d, "\theta_1"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & R \arrow[d, "\varphi"'] \\ M'\otimes M' \arrow[r] & L_2 \arrow[r] & B \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $(\theta', \theta, \varphi)$ *biricik morfizmdir.*

İspat:

$$\begin{tikzcd} & M\otimes M \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ \sigma : L_1 \arrow[r, "\partial_2"'] & C \arrow[r, "\partial_1"'] & R \end{tikzcd}$$

bir kuadratik modül ve $\varphi : R \to S$ bir cebir morfizmi olsun. S bir R-bimodüldür. Bu etkiyi kullanarak $D = S \otimes C \otimes S$ abelyen grubunu tanımlayabiliriz. Burada S nin D üzerine etkisi aşağıdaki gibidir.

$s' \in S$ ve $s \otimes c \otimes s \in D$ için

$s' \cdot (s \otimes c \otimes u) = s's \otimes c \otimes u$ ve $(s \otimes c \otimes u) \cdot s' = s \otimes c \otimes us'$.

Bu etki ile D bir S-bimodül olur. D üzerinde ikili işlem tanımlamak için önce D nin üreteçli bir alt P modülünü tanımlayalım. P alt modülü, D nin aşağıdaki formda verilen elemanları tarafından üretilen bir alt modülü olsun.

$r, r' \in R, c, c' \in C, s, s', s'', u, u', u'' \in S$ olmak üzere

1. $(s \otimes cr \otimes u) - (s \otimes c \otimes \varphi(r)u)$ ve $(s \otimes rc \otimes u) - (s\varphi(r) \otimes c \otimes u)$
2. $(s \otimes c \otimes u)s'\varphi\partial_1 c'u's''\varphi\partial_1 c''u'' - s\varphi\partial_1 cu(s' \otimes c' \otimes u')s''\varphi\partial_1 c''u''$
3. $s\varphi\partial_1 cus'\varphi\partial_1 c'u'(s'' \otimes c'' \otimes u'') - s\varphi\partial_1 cu(s' \otimes c' \otimes u's''\varphi\partial_1 c''u'')$
4. $s\varphi\partial_1 cus' \otimes c' \otimes u' - s \otimes c \otimes us'\varphi\partial_1 c'u' - 1 \otimes w(\{c\} \otimes \{c'\}) \otimes 1$

Bu durumda $B = D/P$ bölüm modülünü tanımlayabiliriz. Burada S nin D/P üzerine etkisi $s' \in S$ ve $s \otimes c \otimes u + P \in D/P$ olmak üzere

$$s' \cdot (s \otimes c \otimes u + P) = s' \cdot (s \otimes c \otimes u) + P$$

şeklindedir. Bu etki ile $B = D/P$ bir S-modüldür. Şimdi D/P üzerinde ikinci işlemi tanımlayalım. Her $s \otimes c \otimes u + P, s' \otimes c' \otimes u' + P \in D/P$ için ikinci işlem

$$(s \otimes c \otimes u + P)(s' \otimes c' \otimes u' + P) = s\varphi\partial_1 cus' \otimes c' \otimes u' + P$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu işlem iyi tanımlıdır ve B bu işleme göre bir S-cebirdir. Şimdi β_1 dönüşümünü tanımlayalım. $\beta_1 : B \to S$ dönüşümü her $s \otimes c \otimes u + P \in B$ için $\beta_1(s \otimes c \otimes u + P) = s\varphi\partial_1 cu$ şeklinde tanımlanırsa iyi tanımlı bir homomorfizm olur. Bu β_1 bir nil(2)-modüldür. Gerçektende her $s' \in S$, $s \otimes c \otimes u + P \in B$ için

$$\begin{aligned}
\beta_1(s' \cdot (s \otimes c \otimes u + P)) &= \beta_1(s's \otimes c \otimes u + P) \\
&= s's\varphi\partial_1 cu \\
&= s'(s\varphi\partial_1 cu) \\
&= s' \cdot \beta_1(s \otimes c \otimes u + P)
\end{aligned}$$

olup β_1 bir ön-çaprazlanmış modüldür. Şimdi de üçlü Peiffer çarpımlarının sıfır olduğunu gösterelim.

$b = s \otimes c \otimes u + P, \quad b' = s' \otimes c' \otimes u' + P, \quad b'' = s'' \otimes c'' \otimes u'' + P \in B$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\langle\langle b, b'\rangle, b''\rangle &= (s \otimes c \otimes u)s'\varphi\partial_1 c'u's''\varphi\partial_1 c''u'' - s\varphi\partial_1 cu(s' \otimes c' \otimes u')s''\varphi\partial_1 c''u'' + P \\
&= 0 + P
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\langle b, \langle b', b''\rangle\rangle = 0$ olduğu da gösterilebilir.

Şimdi $\theta : C \to B$ dönüşümünü $c \in C$ için $\theta(c) = 1 \otimes c \otimes 1 + P$ şeklinde tanımlayalım. İlk olarak (θ, φ) nin $(C \to R)$ den $(B \to S)$ ye bir nil(2)-modül morfizmi olduğunu gösterelim. Her $c \in C$ ve $r \in R$ için

$$\theta(c \cdot r) = 1 \otimes cr \otimes 1 + P = 1 \otimes c \otimes \varphi(r) + P = (1 \otimes c \otimes 1) + P = \theta(c) \cdot \varphi(r)$$

ve $\beta_1\theta(c) = \beta_1(1 \otimes c \otimes 1 + P) = \varphi\partial_1(c)$ olup,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial_1"'] & B \arrow[d, "\beta_1"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Sonuç olarak $(\theta, \varphi) : (C \to R) \to (B \to S)$ bir nil(2)-modül morfizmi olmuş olur. Şimdi θ nın φ üzerinde evrensel olduğunu gösterelim. $\beta'_1 : B' \to S$ başka bir nil(2)-modül ve $(\theta', \varphi) : (C \to R) \to (B' \to S)$ başka bir nil(2)-modül morfizmi olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} & & B' \arrow[dl, bend left, "\beta'_1"] \\ C \arrow[r, "\theta"'] \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[urr, bend left, "\theta'"] & B \arrow[d, "\beta_1"] \arrow[ur, dotted, "\lambda"] & \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & S & \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde biricik bir $\lambda : B \to B'$ morfizmi var olmalıdır. Bu morfizmi her $s \otimes c \otimes u + P \in B$ için $\lambda(s \otimes c \otimes u + P) = s \cdot \theta'(c) \cdot u$ şeklinde tanımlayalım. Önce λ nın nil(2)-modül morfizmi olduğunu gösterelim. her $s' \in S$ ve $s \otimes c \otimes u + P \in B$ için

$$\begin{aligned} \lambda(s' \cdot (s \otimes c \otimes u + P)) &= \lambda(s's \otimes c \otimes u + P) \\ &= s's \cdot \theta'(c) \cdot u \\ &= s' \cdot (s \cdot \theta'(c) \cdot u) \\ &= s' \cdot \lambda(s \otimes c \otimes u + P) \end{aligned}$$

olur. Üstelik $\lambda\theta(c) = \lambda(1 \otimes c \otimes 1 + P) = \theta'(c)$ ve $\beta'_1\lambda(s \otimes c \otimes u + P) = \beta'_1(s \cdot \theta'(c) \cdot u) = s \cdot \beta'_1(\theta'(c)u) = s\varphi\partial_1(c)u = \beta_1(s \otimes c \otimes u + P)$ olup λ bir nil(2)-modül morfizmidir.

Şimdi L_2 yi oluşturacağız. Aşağıdaki diyagramlar yardımıyla

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\partial_2"'] & L_2 \arrow[d, "\beta_2"] \\ C \arrow[r, "\theta"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\partial_1\partial_2"'] & L_2 \arrow[d, "\beta_1\beta_2"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd}$$

D' nü $D' = S \otimes L_1 \otimes S$ şeklinde oluşturalım. B nin D' üzerine etkisi $s \otimes c \otimes u + P \in B$ ve $s' \otimes l_1 \otimes u' \in D'$ için

$$(s \otimes c \otimes u + P) \cdot (s' \otimes l_1 \otimes u') = s\varphi\partial_1(c)u(s' \otimes l_1 \otimes u)$$

olarak verilsin. Bu etki ile D' bir B-bimodül olur. Şimdi D' üzerinde bir çarpım tanımlayarak D' nü bir B-cebir yapacağız. Öncelikle D' nün üreteçli bir altmodülünü tanımlayalım.

P_2, D' nün aşağıdaki formlarda verilen elemanlar tarafından üretilen bir altmodülü olsun. $s, s', s_1'', s_2'' \in S, l_1, l_2 \in L_1, r \in R$ için;

1. $s \otimes lc \otimes s' - s \otimes l \otimes \theta(c) \cdot s'$,
   $s \otimes cl \otimes s' - s\theta(c) \otimes l \otimes s'$,
   $s \otimes lr \otimes s' - s \otimes l \otimes s'\varphi(r)$,
   $s \otimes rl \otimes s' - \varphi(r)s \otimes l \otimes s'$
2. $s \cdot \theta\partial_2(l_1)s'(s_1'' \otimes l_2 \otimes s_2'') - (s \otimes l_1 \otimes s') \cdot s_1''\theta\partial_2(l)s_2''$
3. $s \cdot \theta\partial_2(l_1)s'(s_1'' \otimes l_2 \otimes s_2'') - 1 \otimes l_1l_2 \otimes 1$
4. $s\varphi\partial_1(c)u(s_1' \otimes l_1 \otimes s_2') - 1 \otimes \partial_1(c) \cdot l_1 \otimes 1$.

Burada $L_2 = D'/P_2$ olmak üzere; $\beta_2 : L_2 \to B$ ve $\theta_1 : L_1 \to L_2$ homomorfizmlerini $(s \otimes l_1 \otimes s' + P_2) \mapsto s \cdot \theta\partial_2(l_1) \cdot s' + P$ ve $l_1 \mapsto 1 \otimes l_1 \otimes 1 + P_2$ şeklinde tanımlayalım. Öncelikle

$$\sigma_2 = \begin{tikzcd} & M' \otimes M' \arrow[dl, "\omega'"'] \arrow[d, "w'"] & \\ L_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & B \arrow[r, "\beta_1"'] & S \end{tikzcd}$$

nin bir kuadratik modül olduğunu düşünerek $(\theta_1, \theta, \varphi)$ nin bir kuadratik modül morfizmi olduğunu gösterelim. Her $r \in R$ ve $l_1 \in L_1$ için

$$\begin{aligned}
\theta_1(r \cdot l_1) &= 1 \otimes rl_1 \otimes 1 + P_2 \\
&= \varphi(r) \otimes l_1 \otimes 1 + P_2 \\
&= \varphi \cdot (1 \otimes l_1 \otimes 1 + P_2) \\
&= \varphi(r) \cdot \theta_1(l_1)
\end{aligned}$$

olur ve ayrıca $\beta_2\theta_1(l_1) = \beta_2(1 \otimes l_1 \otimes 1 + P_2) = \theta\partial_2(l_1)$ olup diyagram değişmelidir ve her $\{c\} \otimes \{c'\} \in C \otimes C$ için

$$\begin{aligned}
\theta_1\omega(\{c\} \otimes \{c'\}) &= 1 \otimes \omega(\{c\} \otimes \{c'\}) \otimes 1 + P \\
&= \omega'(\{1 \otimes c \otimes 1 + P\} \otimes \{1 \otimes c' \otimes 1 + P\}) \\
&= \omega'(\{\theta(c)\} \otimes \{\theta(c')\}).
\end{aligned}$$

dir. Yani $(\theta_1, \theta, \varphi)$ bir kuadratik modül morfizmidir. Şimdi σ_2 nin bir kuadratik modül olduğunu gösterelim.

$M' = B^{cr}/(B^{cr})^2$ olmak üzere; $x = (s \otimes c \otimes u + P) + (B^{cr})^2 \in M'$elemanını $x = \{s \otimes c \otimes u + P\}$ şeklinde göstereceğiz. $\omega' : M' \otimes M' \longrightarrow L_2$ kuadratik dönüşümü

$$\{s \otimes c \otimes u + P\} \otimes \{s' \otimes c' \otimes u' + P\} \mapsto 1 \otimes \omega(\{c\} \otimes \{c'\}) \otimes 1 + P_2$$

şeklinde tanımlı olsun. Şimdi kuadratik modül aksiyomlarını gösterelim.

QM1)

$\beta_1 : B \rightarrow S$ in bir nil(2)-modül olduğunu sayfa 45 te göstermiştik. Ek olarak $s \otimes l_1 \otimes s' + P_2 \in L_2$ için $\beta_1\beta_2(s \otimes l_1 \otimes s' + P_2) = \beta_1(s \cdot \theta\partial_2(l_1) \cdot s' + P)$ olup, burada $\beta_1(s \otimes c \otimes u + P_2) = s\varphi\partial_1(c)u$ şeklinde tanımlı olduğundan $s \cdot \theta\partial_2(l_1) \cdot s' + P$ ifadesinde c ye tekabül eden ifade $\partial_2(l_1)$ olduğundan $...\partial_1(\partial_2(l_1))...$ şeklinde bir ifade elde ederiz. Bu da $\beta_1\beta_2 = 0$ demektir. Çünkü $\partial_1\partial_2 = 0$ dır.

QM2) Her $s\otimes c\otimes u+P, s'\otimes c'\otimes u'+P \in M$ için $\{s\otimes c\otimes u+P\}, \{s'\otimes c'\otimes u'+P\} \in M'$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\beta_2\omega'(\{s \otimes c \otimes u + P\} \otimes \{s' \otimes c' \otimes u' + P\})\\
&\qquad = \beta_2(1 \otimes \omega(\{c\} \otimes \{c'\} \otimes 1 + P_2)\\
&\qquad = \theta(\partial_2\omega(\{c\} \otimes \{c'\})) + P\\
&\qquad = \theta(w(\{c\} \otimes \{c'\})) + P\\
&\qquad = 1 \otimes w(\{c\} \otimes \{c'\}) \otimes 1 + P\\
&\qquad = s\varphi\partial_1 cus' \otimes c' \otimes u' - s \otimes c \otimes us'\varphi\partial_1 c'u'\\
&\qquad = (s \otimes c \otimes u + P)(s' \otimes c' \otimes u' + P) - (s \otimes c \otimes u + P)\beta_1(s' \otimes c' \otimes u' + P)\\
&\qquad = \langle s \otimes c \otimes u + P, s' \otimes c' \otimes u' + P\rangle\\
&\qquad = w'(\{s \otimes c \otimes u + P\} \otimes \{s' \otimes c' \otimes u' + P\})
\end{aligned}$$

QM3) $x = s \otimes l_1 \otimes s' + P_2 \in L_2$ ve $a = s \otimes c \otimes u + P \in B$ için

$$\begin{aligned}
&\omega'(\{\beta_2 x\} \otimes \{a\} + \{a\} \otimes \{\beta_2 x\})\\
&\qquad = \omega'(\{s \cdot \theta\partial_2 l_1 \cdot s' + P\} \otimes \{s \otimes c \otimes u + P\}+\\
&\qquad\qquad \{s \otimes c \otimes u + P\} \otimes \{s \cdot \theta\partial_2 l_1 \cdot s' + P\})\\
&\qquad = \omega'(\{s(1 \otimes \partial_2 l_1 \otimes 1)s' + P\} \otimes \{s \otimes c \otimes u + P\}+\\
&\qquad\qquad \{s \otimes c \otimes u + P\} \otimes \{s(1 \otimes \partial_2 l_1 \otimes 1)s' + P\})\\
&\qquad = \omega'(\{s \otimes \partial_2 l_1 \otimes s' + P\} \otimes \{s \otimes c \otimes u + P\}+\\
&\qquad\qquad \{s \otimes c \otimes u + P\} \otimes \{s \otimes \partial_2 l_1 \otimes s' + P\})\\
&\qquad = 1 \otimes \omega(\{\partial_2 l_1\} \otimes \{c\} + \{c\} \otimes \{\partial_2 l_1\}) + P_2\\
&\qquad = 1 \otimes \partial_c \cdot l_1 \otimes 1 + P_2\\
&\qquad = s\varphi\partial_1 cu(s \otimes l_1 \otimes s' + P_2\\
&\qquad = \beta_1(a) \cdot x
\end{aligned}$$

olur.

QM4) $(s_1 \otimes l_1 \otimes s_1' + P_2), (s_2 \otimes l_2 \otimes s_2' + P_2) \in L_2$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&\omega'(\{\beta_2(s_1 \otimes l_1 \otimes s_1' + P_2)\} \otimes \{\beta_2(s_2 \otimes l_2 \otimes s_2' + P_2)\}) \\
&\qquad = \omega'(\{s_1 \cdot \theta\partial_2 l_1 \cdot s_1' + P\} \otimes \{s_2 \cdot \theta\partial_2 l_2 \cdot s_2' + P\}) \\
&\qquad = \omega'(\{s_1(1 \otimes \partial_2 l_1 \otimes 1)s_1' + P\} \otimes \{s_2(1 \otimes \partial_2 l_2 \otimes 1)s_2' + P\}) \\
&\qquad = \omega'(\{s_1 \otimes \partial_2 l_1 \otimes s_1' + P\} \otimes \{s_2' \otimes \partial_2 l_2 \otimes s_2' + P\}) \\
&\qquad = 1 \otimes \omega(\{\partial_2 l_1\} \otimes \{\partial_2 l_2\}) + P_2 \\
&\qquad = 1 \otimes l_1 l_2 + P_2 \\
&\qquad = s \cdot \theta\partial_2(l_1)s_1'(s_2 \otimes l_2 \otimes s_2') + P_2 \\
&\qquad = (s_1 \otimes l_1 \otimes s_1' + P_2)(s_2 \otimes l_2 \otimes s_2' + P_2)
\end{aligned}
$$

olur. $\square$

Şimdi de θ_1 in (θ, φ) üzerinde evrensel morfizm olduğunu gösterelim. (L_2', B', S) başka bir kuadratik modül ve $(\theta_1', \theta', \varphi)$ başka bir kuadratik modül morfizmi olmak üzere biricik $\lambda_1 : L_2 \rightarrow L_2'$ morfizmi var olmalıdır. Bunu aşağıdaki diyagram ile gösterelim.

$$
\begin{tikzcd}
 & & L_2' \arrow[dd, "\beta_2'"] \\
L_1 \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[urr, bend left, "\theta_1'"] \arrow[dd, "\partial_2"'] & L_2 \arrow[ur, dotted, "\lambda_1"] \arrow[dd, "\beta_2"] & \\
 & & B' \arrow[ddl, bend left, "\beta_1'"] \\
C \arrow[r, "\theta"'] \arrow[urr, bend left, "\theta'"] \arrow[d, "\partial_1"] & B \arrow[ur, "\lambda"'] \arrow[d, "\beta_1"] & \\
R \arrow[r, "\varphi"'] & S &
\end{tikzcd}
$$

$\lambda_1 : L_2 \to L_2'$ dönüşümü $(s \otimes l \otimes s') + P \mapsto s \cdot \theta_1' l \cdot s'$ şeklinde tanımlansın. Şimdi λ_1 in bir kuadratik modül morfizmi olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
L_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\lambda_1"] & B \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\lambda"'] & S \arrow[d, equal] \\
L_2' \arrow[r, "\beta_2'"'] & B' \arrow[r, "\beta_1'"'] & S
\end{tikzcd}$$

λ bir nil(2)-modül olduğundan her $s \in S$ ve $b \in B$ için $\lambda(s \cdot b) = s \cdot \lambda(b)$ dir. Ayrıca $s \in S$ ve $s' \otimes l \otimes s'' \in L_1$ için

$$\lambda_1(s \cdot (s' \otimes l \otimes s'')) = \lambda_1(ss' \otimes l \otimes s'') = ss'\theta_1 l s'' = s\lambda_1(s' \otimes l \otimes s'')$$

olur, yani $(\theta_1', \lambda_1, \lambda)$ bir kuadratik modül morfizmidir. Ek olarak diyagram değişmeli olmalıdır. Her $l \in L_1$ için $\lambda_1\theta_1(l) = \lambda_1(1 \otimes l \otimes 1 + P) = \theta_1'(l)$ ve her $s \otimes l \otimes s' + P$ için

$$\begin{aligned}
\lambda\beta_2(s \otimes l \otimes s' + P) &= \lambda(s \cdot \theta\partial_2 l \cdot s' + P) \\
&= s \cdot \lambda(\theta\partial_2 l) \cdot s' + P \\
&= s \cdot \theta'(\partial_2 l) \cdot s' + P \\
&= s \cdot \beta_2(\theta_1' l) \cdot s' + P \\
&= \beta_2(s\theta_1' l s' + P) \\
&= \beta_2\lambda_1(s \otimes l \otimes s' + P)
\end{aligned}$$

olup diyagram değişmeli olur. Son olarak λ_1 in biricik olduğunu gösterelim. Aynı özelliklere sahip başka bir $\lambda_1' : L_2 \to L_2'$ morfizmi olduğunu varsayalım. O zaman her $l \in L_1$ için $\lambda_1'\theta_1(l) = \lambda_1'(1 \otimes l \otimes 1 + P) = \theta_1'(l) = \lambda_1\theta_1(l)$ yani $\lambda_1' = \lambda_1$ olur.

Şimdi bu yapının bize $\varphi : R \to S$ homomorfizmi yardımıyla bir funktor oluşturduğunu görelim. Bu funktoru

$$\boldsymbol{\varphi}^* : \mathbf{KUAD}/R \longrightarrow \mathbf{KUAD}/S$$

şeklinde gösterelim. Bu funktora ileri itme funktoru denir. Kabul edelim ki $g = (g_0, g_1, g_2) : \sigma \longrightarrow \sigma'$, aşağıdaki gibi bir kuadratik modül morfizmi olsun.

$$\begin{tikzcd}
\sigma = L_1 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "g_2"'] & C \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "g_1"'] & R \arrow[d, equal, "id"'] \\
\sigma' = L_1' \arrow[r, "\partial_2{}'"] \arrow[d, "g_2'"'] & C' \arrow[r, "\partial_1{}'"] \arrow[d, "g_1'"'] & R \arrow[d, equal, "id"'] \\
\sigma'' = L_1'' \arrow[r, "\partial_2{}''"] & C'' \arrow[r, "\partial_1{}''"] & R
\end{tikzcd}$$

Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır.

1. $\boldsymbol{\varphi}^*(\sigma) = \sigma_s$, $\boldsymbol{\varphi}^*(\sigma') = \sigma'_s$
2. $\boldsymbol{\varphi}^*(g) : \boldsymbol{\varphi}^*(\sigma) \to \boldsymbol{\varphi}^*(\sigma')$
3. $\boldsymbol{\varphi}^*(g' \circ g) = \boldsymbol{\varphi}^*(g') \circ \boldsymbol{\varphi}^*(g)$

İlk olarak $\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)$ in bir S-cebir morfizmi olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
L_2 \arrow[r] \arrow[d, "\boldsymbol{\varphi}^*(g_2)"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)"'] & S = \boldsymbol{\varphi}^*(\sigma) \arrow[d, equal, "id"'] \\
L_2' \arrow[r] & B' \arrow[r] & S = \boldsymbol{\varphi}^*(\sigma')
\end{tikzcd}$$

diyagramında $\boldsymbol{\varphi}^*(g_1) : B \to B'$, $\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s \otimes c \otimes u + P) = s \otimes g_1(c) \otimes u + P$ olmak üzere her $s \otimes c \otimes u + P, s' \otimes c' \otimes u' + P \in B$ için

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)((s \otimes c \otimes u + P) \cdot (s' \otimes c' \otimes u' + P)) &= \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s\varphi\partial_1 cus' \otimes c' \otimes u' + P) \\
&= s\varphi\partial_1 cus' \otimes g_1(c') \otimes u' + P \\
&= s\varphi\partial_1' g_1(c)us' \otimes g_1(c') \otimes u' + P \\
&= (s \otimes g_1(c) \otimes u + P)(s' \otimes g_1(c') \otimes u' + P) \\
&= \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s \otimes c \otimes u + P)\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s' \otimes c' \otimes u' + P)
\end{aligned}$$

olur. Aynı zamanda her $s \in S$ için

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s' \cdot (s \otimes c \otimes u + P)) &= \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s's \otimes c \otimes u + P) \\
&= (s's \otimes g_1(c) \otimes u + P) \\
&= s' \cdot (s \otimes g_1(c) \otimes u + P) \\
&= s' \cdot \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s \otimes c \otimes u + P)
\end{aligned}$$

olur. Yani, $\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)$ in bir S-cebir morfizmidir.

Şimdi de $\boldsymbol{\varphi}^*(g_2) : L_2 \to L_2'$ in bir S-cebir morfizmi olduğunu gösterelim. Her $s \otimes l \otimes s' + P_2 \in B$ için $\boldsymbol{\varphi}^*(g_2)(s \otimes l \otimes s' + P_2) = \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s) \otimes g_2(l) \otimes \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s') + P_2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varphi}^*(g_2)(s_1 \otimes l_1 \otimes s_1' + P(L_2))(s_2 \otimes l_2 \otimes s_2' + P(L_2)) \\
&= \boldsymbol{\varphi}^*(g_2)(s_1\theta\partial_2(l_1)s_1's_2 \otimes l_2 \otimes s_2' + P(L_2)) \\
&= \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1\theta\partial_2(l_1)s_1's_2) \otimes g_2(l_2) \otimes \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_2') + P(L_2) \\
&= \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1) \cdot \theta' g_1\partial_2 l_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1')\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_2) \otimes g_2(l_2) \otimes \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_2') + P(L_2') \\
&= \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1) \cdot \theta'\partial_2' g_2(l_1) \cdot \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1')\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_2) \otimes g_2 l_2 \otimes \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_2') + P(L_2') \\
&= (\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1) \otimes g_2 l_1 \otimes \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1') + P(L_2'))(\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_2) \otimes g_2 l_2 \otimes \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_2') + P(L_2')) \\
&= \boldsymbol{\varphi}^*(g_2)(s_1 \otimes l_1 \otimes s_1' + P(L_2))\boldsymbol{\varphi}^*(g_2)(s_2 \otimes l_2 \otimes s_2' + P(L_2)),
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}^*(g_2)(s \cdot (s' \otimes l_2 \otimes s'' + P)) &= \boldsymbol{\varphi}^*(g_2)(ss' \otimes l_2 \otimes s'' + P) \\
&= \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s \cdot s') \otimes g_2 l_2 \otimes \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s'') + P \\
&= s \cdot (\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s') \otimes g_2 l_2 \otimes \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s'') + P) \\
&= s \cdot \boldsymbol{\varphi}^*(g_2)(s' \otimes l_2 \otimes s'' + P)
\end{aligned}$$

olur. Yani, $\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)$ in bir S-cebir morfizmidir. Şimdi diyagramın değişmeli olmasına bakalım. Her $s_1 \otimes l_1 \otimes s_1' + P_2 \in L_2$ için

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(\beta_2(s_1 \otimes l_1 \otimes s_1' + P_2)) &= \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1\theta\partial_2(l_1)s_1' + P) \\
&= \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1) \cdot (\theta g_1 \partial_2 l_1) \cdot \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1') + P \\
&= \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1) \cdot (\theta \partial_2' g_2 l_1) \cdot \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1') + P \\
&= \beta_2'(\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1) \otimes g_2 l_1 \otimes \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s_1') + P) \\
&= \beta_2' \boldsymbol{\varphi}^*(g_2)(s_1 \otimes l_1 \otimes s_1' + P)
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $(\boldsymbol{\varphi}^*(g_2), \boldsymbol{\varphi}^*(g_1), id)$ bir $\mathbf{KUAD}/S$ de bir kuadratik modül morfizmi olur. Böylece aşağıda soldaki diyagramdan sağdaki elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "g_2"'] & C \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "g_1"'] & R \arrow[d, equal, "id"'] \\
L_1' \arrow[r, "\partial_2'"] \arrow[d, "g_2'"'] & C' \arrow[r, "\partial_1'"] \arrow[d, "g_1'"'] & R \arrow[d, equal, "id"'] \\
L_1'' \arrow[r, "\partial_2''"] & C'' \arrow[r, "\partial_1''"] & R
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
L_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\boldsymbol{\varphi}^*(g_2)"'] & B \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)"'] & S \arrow[d, equal, "id"'] \\
L_2' \arrow[r, "\beta_2'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\varphi}^*(g_2')"'] & B' \arrow[r, "\beta_1'"] \arrow[d, "\boldsymbol{\varphi}^*(g_1')"'] & S \arrow[d, equal, "id"'] \\
L_2'' \arrow[r, "\beta_2''"] & B'' \arrow[r, "\beta_1''"] & S
\end{tikzcd}$$

Son olarak her $s \otimes c \otimes u + P \in B$ için

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}^*(g_1' \circ g_1)(s \otimes c \otimes u + P) &= \boldsymbol{\varphi}^*(g_1')(s \otimes g_1(c) \otimes u + P) \\
&= (s \otimes g_1'(g_1(c)) \otimes u + P) \\
&= (s \otimes g_1' \circ g_1(c) \otimes u + P)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}^*(g_1') \circ \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s \otimes c \otimes u + P) &= \boldsymbol{\varphi}^*(g_1')(\boldsymbol{\varphi}^*(g_1)(s \otimes c \otimes u + P)) \\
&= \boldsymbol{\varphi}^*(g_1')((s \otimes g_1(c) \otimes u + P)) \\
&= (s \otimes g_1' \circ g_1(c) \otimes u + P)
\end{aligned}$$

olduğundan aşağıdaki eşitliği $s \otimes c \otimes u + P \in B$ için elde ederiz.

$$\boldsymbol{\varphi}^*(g_1' \circ g_1)(s \otimes c \otimes u + P) = \boldsymbol{\varphi}^*(g_1') \circ \boldsymbol{\varphi}^*(g_1)$$

Benzer şekilde

$$\boldsymbol{\varphi}^*(g_2' \circ g_2)(s \otimes c \otimes u + P) = \boldsymbol{\varphi}^*(g_2') \circ \boldsymbol{\varphi}^*(g_2)$$

olduğu da gösterilebilir.

Böylece önceki bölümde gösterdiğimiz geri çekme kuadratik modül $\boldsymbol{\varphi}^* : \mathbf{KUAD}/R \longrightarrow \mathbf{KUAD}/S$ funktoruna sağ adjoint bir ileri itme kuadratik modül funktoru oluşturmuş oluruz. Yani $(\boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\varphi}_*)$ adjoint ikilidirler.

Bölüm 4

Limit ve Eşlimit

Bu bölümde kuadratik R-modüller kategorisi $\mathbf{KUAD}/R$ da çarpım ve eşçarpım objeler bulunup, morfizmlerinin eşitleyici ve eşeşitleyiciye sahip oldukları gösterilerek, $\mathbf{KUAD}/R$ kategorisinin limit ve kolimiti(eşlimit) olduğu sonucuna ulaşılacaktır. İlk önce çarpım, eşçarpım objeler ile morfizmlerin eşitleyici ve eşeşitleyicilerin tanımını verelim.

4.1 Çarpım ve Limit

Tanım 4.1.1 $\mathbf{C}$ bir kategori, A ve B de $\mathbf{C}$ de iki obje olsunlar. $p_A : P \to A$, $p_B : P \to B$, $\mathbf{C}$ de birer morfizmler ve $\mathbf{C}$ nin herhangi bir Q objesi ve $f : Q \to A$, $g : Q \to B$ morfizmleri için,

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "m"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $m : Q \to P$ biricik morfizmi varsa (P, p_A, p_B) üçlüsüne (kısaca P ye) A ve B nin çarpım objesi denir.

Çarpım objesinin dualine eşçarpım obje denir. Bunu aşağıda detaylı olarak verelim.

Tanım 4.1.2 $\mathbf{C}$ bir kategori, A ve B de $\mathbf{C}$ de iki obje olsunlar. $u_A : A \to P$, $u_B : B \to P$, $\mathbf{C}$ de birer morfizmler ve $\mathbf{C}$ nin herhangi bir Q objesi ve $f : A \to Q$, $g : B \to Q$ morfizmleri için,

$$\begin{tikzcd} & Q & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "u_A"'] & P \arrow[u, dotted, "m"'] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "u_B"] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $m : P \to Q$ biricik morfizmi varsa (P, u_A, u_B) üçlüsüne A ve B nin eşçarpım objesi denir.

Tanım 4.1.3 A ve C bir $\mathbf{C}$ kategorisinde iki objesi, $f, g : A \rightrightarrows C$ iki morfizm olsunlar. $\xi : E \to A$ ve $E \in Ob(\mathbf{C})$ olmak üzere $f \circ \xi = g \circ \xi$ olsun. E' başka bir obje ve $\xi' : E' \to A$, $f \circ \xi' = g \circ \xi'$ olacak şekilde başka bir morfizm olsun. Eğer $k : E' \to E$ aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde bir tek morfizm ise (E, ξ) ikilisine f ve g morfizmlerinin eşitleyicisi denir.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\xi"] & & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ & E' \arrow[ul, dotted, "k"] \arrow[ur, "\xi'"'] & & \end{tikzcd}$$

Tanım 4.1.4 A ve C bir $\mathbf{C}$ kategorisinde iki objesi, $f, g : A \rightrightarrows C$ iki morfizm olsunlar. $\varsigma : B \to C$ ve $C \in Ob(\mathbf{C})$ olmak üzere $\varsigma \circ f = \varsigma \circ g$ olsun. ς' başka bir obje ve $\varsigma' : B' \to C$, $\varsigma' \circ f = \varsigma' \circ g$ olacak şekilde başka bir morfizm olsun. Eğer $k : B' \to B$ aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde bir tek morfizm ise (B, ς) ikilisine f ve g morfizmlerinin eşeşitleyicisi denir.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[rr, "\varsigma"] \arrow[dr, "\varsigma'"'] & & C \arrow[dl, dotted, "k"] \\ & & C' & \end{tikzcd}$$

Shammu [29] da çaprazlanmış modüller için çarpım ve eşçarpım objeleri oluşturmuştur. Ayrıca çaprazlanmış modül morfizmleri için eşitleyici ve eşeşitleyici morfizmleri tanımlamıştır. Bu bölümde çaprazlanmış modüller için yapılmış bu çalışmaları kuadratik modüllere taşıyacağız.

Önerme 4.1.5 **KUAD**$/R$ kategorisinde kalkış ve varış objeleri aynı kuadratik modüller olan iki kuadratik modül morfizmlerinin bir eşitleyicisi vardır.

İspat: (f, g);

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "g_2"'] \arrow[d, shift left, "f_2"] & C \arrow[r] \arrow[d, shift right, "g_1"'] \arrow[d, shift left, "f_1"] & R \arrow[d, shift right, "id"'] \arrow[d, shift left, "id"] \\ L_2 \arrow[r] & D \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

şeklinde **KUAD**$/R$ da iki kuadratik modül morfizmi olsun. E ve F de $E = \{c \in C : f_1(c) = g_1(c)\}$, $F = \{l_1 \in L_1 : f_2(l_1) = g_2(l_1)\}$ şeklinde iki küme olsunlar. Açıkca diyebiliriz ki; (F, E, R) bir alt kuadratik modül ve $(i, j) : (F, E, R) \to (L_1, C, R)$ içine dönüşümü bir kuadratik modül morfizmidir. Bunu aşağıdaki diyagram ile gösterelim.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varepsilon_2"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[d, "j"'] & R \arrow[d, equal] \\ L_1 \arrow[r, "\partial_2"'] & C \arrow[r, "\partial_1"'] & R \end{tikzcd}$$

Yani $(F, E, \varepsilon_2, \varepsilon_1)$ objesi $(L_1, C, \partial_2, \partial_1)$ in bir alt objesidir. Başka bir $(F', E', \varepsilon_2', \varepsilon_1')$ kuadratik R-modül ve $(i', j') : (F', E', R) \to (L_1, C, R)$ kuadratik modül morfizmi olsun. Öyle ki; $f_1 i' = g_1 i'$ ve $f_2 j' = g_2 j'$ olup, her $x \in E', y \in F'$ için $f_1 i'(x) = g_1 i'(x)$ ve $f_2 j'(y) = g_2 j'(y)$ dir. O zaman $\gamma : E' \to E, \quad \gamma(x) = i'(x)$ ve $\beta : F' \to F, \quad \beta(y) = j'(y)$ şeklinde (γ, β) morfizm ikilisini tanımlayalım.

(γ, β) biriciktir ve aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "i"] \arrow[ddr, "\varepsilon_2"] & & L_1 \arrow[rr, shift left, "f_2"] \arrow[rr, shift right, "g_2"'] \arrow[ddr] & & L_2 \arrow[ddr, "\partial_2"] & & \\
F' \arrow[u, dotted] \arrow[urr, "i'"'] \arrow[ddr, "\varepsilon'"'] & & & & & & \\
& E \arrow[rr, "j"] \arrow[drrr, dotted, "\varepsilon_1"] & & C \arrow[rr, shift left, "f_1"] \arrow[rr, shift right, "g_1"'] \arrow[dr] & & D \arrow[dr, "\partial_1"] & \\
& E' \arrow[u, dotted, "\gamma"'] \arrow[urr, "j'"'] & & & R \arrow[rr, equal] & & R
\end{tikzcd}
$$

Yani (F, i) ikilisi f_2 ve g_2 morfizmlerinin, (E, j) ikilisi de f_1 ve g_1 morfizmlerinin eşitleyicisi olurlar. Sonuç olarak $(F, E, R, \varepsilon_2, \varepsilon_1)$ bize (f_1, f_2, id) ve (g_1, g_2, id) morfizmlerinin (i, j, id) eşitleyicisini verir. $\square$

Önerme 4.1.6 KUAD$/R$ kategorisi geri çekmelere sahiptir.

İspat: $(f_1, f_2) : (L_1, C, R) \to (L_2, B, R)$ ve $(g_1, g_2) : (L_3, D, R) \to (L_2, B, R)$ iki kuadratik R-modül morfizmi olsunlar. Buradaki kuadratik modüller,

$$\sigma_1 : L_1 \xrightarrow[\partial_2]{} C \xrightarrow[\partial_1]{} R$$

$$\sigma_2 : L_2 \xrightarrow[\beta_2]{} B \xrightarrow[\beta_1]{} R$$

$$\sigma_3 : L_3 \xrightarrow[\delta_2]{} D \xrightarrow[\delta_1]{} R$$

şeklindedir. Önce aşağıdaki gibi R-modüller oluşturalım.

$$X = C \times D = \{(c, d) : f_2(c) = g_2(d)\}$$

$$Y = L_1 \times L_3 = \{(l_1, l_3) : f_1(l_1) = g_1(l_3)\}$$

X, Y birer B-cebirlerdir. x, y morfizmlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$x : C \times D \to B, \quad (c, d) \mapsto f_2(c) = g_2(d)$ ve

$y : L_1 \times L_3 \to C \times D, \quad (l_1, l_2) \mapsto (\partial_2(l_1), \delta_2(l_3)).$

Bu durumda aşağıdaki diyagramı oluşturabiliriz;

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\beta_1"] & R \\ C \times D \arrow[u, "x"] \arrow[ur, "\beta_1 x"'] & \end{tikzcd}$$

Bu diyagram için ilk olarak β_1 in bir ön-çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim. Her $r \in R$ ve $(c,d) \in C \times D$ için

$$\begin{aligned} \beta_1 x(r \cdot (c,d)) &= \beta_1 x(r \cdot c, r \cdot d) \\ &= \beta_1(f_2(r \cdot c)) \\ &= \beta_1(r \cdot f_2(c)) \\ &= r \cdot \beta_1(f_2(c)) \\ &= r \cdot \beta_1 x(c,d) \end{aligned}$$

dir. Yani $\beta_1 x$ bir ön-çaprazlanmış modüldür.

Önerme 4.1.7

$$\begin{tikzcd} & & M'' \otimes M'' \arrow[dl, "\omega''"'] \arrow[d, "w''"] & \\ \sigma'' : & L_1 \times L_3 \arrow[r, "y"'] & C \times D \arrow[r, "\beta_1 x"'] & R \end{tikzcd}$$

diyagramı bir kuadratik modüldür.

Burada ω'' dönüşümünü her $\{(c,d)\} \otimes \{(c',d')\} \in M'' \otimes M''$ için

$$\omega''(\{(c,d)\} \otimes \{(c',d')\}) = (\omega(\{c\} \otimes \{c'\}), \omega'(\{d\} \otimes \{d'\}))$$

şeklinde tanımlayalım.

İspat:

QM1) $\beta_1 x$ in yukarıda ön-çaprazlanmış modül olduğunu gösterdik. Şimdi üçlü Peiffer çarpımlarının $\{0\}$ olduğunu gösterelim.

Her $(c,d),(c',d'),(c'',d'')\in C\times D$ için

$$\begin{aligned}
\langle\langle(c,d),(c',d')\rangle,(c'',d'')\rangle &= \langle(c,d)(c',d')-(c',d')\cdot\beta_1 x(c,d),(c'',d'')\rangle\\
&= \langle(cc',dd')-(c',d')\beta_1 f_2(c),(c'',d'')\rangle\\
&= \langle(cc',dd')-(c',d')\cdot\partial_1(c),(c'',d'')\rangle\\
&= \langle(cc'-c'\cdot\partial_1 c,dd'-d'\cdot\partial_1 c),(c'',d'')\rangle\\
&= \langle(\langle c,c'\rangle,dd'-d'\beta_1 f_2 c),(c'',d'')\rangle\\
&= \langle(\langle c,c'\rangle,dd'-d'\beta_1 g_2 d),(c'',d'')\rangle\\
&= \langle(\langle c,c'\rangle,dd'-d'\cdot\delta_1 d),(c'',d'')\rangle\\
&= \langle(\langle c,c'\rangle,\langle d,d'\rangle),(c'',d'')\rangle\\
&= (\langle c,c'\rangle,\langle d,d'\rangle)(c'',d'')-(c'',d'')\cdot\beta_1 x(\langle c,c'\rangle,\langle d,d'\rangle)\\
&= (\langle c,c'\rangle c'',\langle d,d'\rangle d'')(c'',d'')\beta_1 f_2(\langle c,c'\rangle)\\
&= (\langle c,c'\rangle c'',c''\cdot\beta_1 f_2(\langle c,c'\rangle),\langle d,d'\rangle d''-d''\beta_1 f_2(\langle c,c'\rangle))\\
&= (\langle c,c'\rangle c'',c''\cdot\partial_1(\langle c,c'\rangle),\langle d,d'\rangle d''-d''\delta_1(\langle d,d'\rangle))\\
&= (\langle\langle c,c'\rangle,c''\rangle,\langle\langle d,d'\rangle,d''\rangle)\\
&= (0,0)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\beta_1 x: C\times D\to R$ bir nil(2)-modüldür.

$$\chi:\quad L_1\times L_3\xrightarrow{y}C\times D\xrightarrow{\beta_1 x}R$$

bir kompleks olmalıdır. Gerçektende her $(l_1,l_3)\in L_1\times L_3$ için

$$\begin{aligned}
\beta_1 xy(l_1,l_3) &= \beta_1 x(\partial_2(l_1),\delta_2(l_3))\\
&= \beta_1(f_2(\partial_2(l_1)))\\
&= \beta_1(\beta_2(f_1(l_1)))\\
&= \beta_1\beta_2(f_1 l_1)=0.
\end{aligned}$$

olup χ bir komplekstir.

QM2) Her $(c,d),(c',d') \in C \times D$ için

$$\begin{aligned}
y\omega''(\{(c,d)\} \otimes \{(c',d')\}) &= y(\omega(\{c\} \otimes \{c'\}), \omega'(\{d\} \otimes \{d'\})) \\
&= (\partial_2\omega(\{c\} \otimes \{c'\}), \delta_2\omega'(\{d\} \otimes \{d'\})) \\
&= w(\{c\} \otimes \{c'\}), w'(\{d\} \otimes \{d'\}) \\
&= \langle c, c' \rangle, \langle d, d' \rangle \\
&= \langle (c,d), (c',d') \\
&= w''(\{(c,d)\} \otimes \{(c',d')\})
\end{aligned}$$

bulunur.

QM3) $(l_1, l_3) \in L_1 \times L_3, (c,d) \in C \times D$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\omega''(\{y(l_1,l_3)\} \otimes \{(c,d)\} + \{(c,d)\} \otimes \{y(l_1,l_3)\}) \\
&\quad = \omega''(\{\partial_2 l_1, \delta_2 l_3\} \otimes \{(c,d)\} + \{(c,d)\} \otimes \{\partial_2 l_1, \delta_2 l_3\} \\
&\quad = (\omega(\{\partial_2 l_1\} \otimes \{c\}), \omega'(\{d\} \otimes \{\delta_2 l_3\})) + (\omega(\{c\} \otimes \{\partial_2 l_1\}), \omega'(\{\delta_2 l_3\} \otimes \{d\})) \\
&\quad = (\omega(\{\partial_2 l_1\} \otimes \{c\}) + (\{c\} \otimes \{\partial_2 l_1\}), \omega'(\{d\} \otimes \{\delta_2 l_3\})) + ((\{\delta_2 l_3\} \otimes \{d\})) \\
&\quad = (l_1 \cdot \partial_1(c), l_3 \cdot \delta_1(d))(l_1 \cdot \beta_1 f_2(c), l_3 \cdot \beta_1 g_2(d)) \\
&\quad = (l_1 \cdot \beta_1 f_2(c), l_3 \cdot \beta_1 f_2(c)) \\
&\quad = (l_1, l_3) \cdot \beta_1 f_2(c) \\
&\quad = (l_1, l_3) \cdot \beta_1 x(c,d)
\end{aligned}$$

elde edilir.

QM4 $(l_1, l_3), (l'_1, l'_2) \in L_1 \times L_3$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\omega''(\{y(l_1,l_3)\} \otimes \{y(l'_1,l'_3)\}) &= \omega''(\{(\partial_2 l_1, \delta_2 l_3)\} \otimes \{(\partial_2 l'_1, \delta_2 l'_3)\} \\
&= (\omega(\{\partial_2 l_1\} \otimes \{\partial_2 l'_1\}), \omega(\{\delta_2 l_3\} \otimes \{\delta_2 l'_3\})) \\
&= (l_1 l'_1, l_3 l'_3) \\
&= (l_1, l_3)(l'_1, l'_3)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{tikzcd}
 & M'' \otimes M'' \arrow[dl, "\omega''"'] \arrow[d, "w''"] & \\
L_1 \times L_3 \arrow[r, "y"'] & C \times D \arrow[r, "\beta_1 x"'] & R
\end{tikzcd}$$

diyagramı bir kuadratik modül olmuş olur. □

Burada izdüşüm ile verilmiş iki tane indirgenmiş morfizm vardır $p_1, p_2 : \sigma'' \to \sigma_1$ ve $q_1, q_2 : \sigma'' \to \sigma_3$. Bu morfizmler $p_1 : L_1 \times L_3 \to L_1$ 1.izdüşüm, $q_1 : L_1 \times L_3 \to L_1$ 2.izdüşüm, $p_2 : C \times D \to C$ 1.izdüşüm ve $q_2 : C \times D \to D$ 2.izdüşüm morfizmleridir. Bu durumda $f_1 p_1 = q_1 q'_1$ ve $f_2 p_2 = q_2 g_2$ olur. Bu aşağıdaki diyagramda açıkca resmedilmiştir.

$$\begin{tikzcd}
\sigma'' \arrow[r, "p_1, p_2"] \arrow[d, "q_1, q_2"'] & \sigma_1 \arrow[d, "f_1, f_2"] \\
\sigma_3 \arrow[r, "g_1, g_2"'] & \sigma_2
\end{tikzcd}$$

ya da üç boyutlu

$$\begin{tikzcd}
L_1 \times L_3 \arrow[rr, "p_1"] \arrow[dr] \arrow[ddd, "q_1"'] & & L_1 \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & \\
& C \times D \arrow[rr, "p_2"] \arrow[ddd, "q_2"] \arrow[drrr, "f_1"'] & & C \arrow[ddd, "f_2"'] \arrow[drr] & & \\
& & & & R \arrow[r, equal] \arrow[ddd, equal] & R \arrow[ddd, equal] \\
L_3 \arrow[rr, "g_1"] \arrow[dr, "\delta_2"'] & & L_2 \arrow[dr, "\beta_2"'] & & & \\
& D \arrow[rr, "g_2"] \arrow[drrr, "\delta_1"'] & & B \arrow[drr, "\beta_1"] & & \\
& & & & R \arrow[r, equal] & R
\end{tikzcd}$$

diyagramını verir. Burada (p_1, p_2) ve (q_1, q_2) morfizmleri evrensel özelliği sağlarlar. Şimdi bunu gösterelim. $(p'_1, p'_2) : \sigma' \to \sigma_1$ ve $(q'_1, q'_2) : \sigma' \to \sigma_3$ başka iki kuadratik modül morfizmi olsunlar. O halde $(h_1, h_2) : \sigma' \to \sigma''$ biricik morfizmi vardır ve $h_1(x') = (p'_1(x'), q'_1(x'))$, $h_2(y') = (p'_2(y'), q'_2(y'))$ şeklinde tanımlıdır ve aşağıdaki diyagram değişmeliir.

$$\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{\sigma} \arrow[dl, "(q'_1{,}q'_2)"'] \arrow[d, dotted, "(h_1{,}h_2)"'] \arrow[dr, "(p'_1{,}p'_2)"] & \\
\boldsymbol{\sigma_3} \arrow[dr, "(g_1{,}g_2)"'] & \boldsymbol{\sigma''} \arrow[l, "(q_1{,}q_2)"] \arrow[r, "(p_1{,}p_2)"'] & \boldsymbol{\sigma_1} \arrow[dl, "(f_1{,}f_2)"] \\
& \boldsymbol{\sigma_2} &
\end{tikzcd}$$

yani; $p_1h_1 = p'_1$, $p_2h_2 = p'_2$, $q_1h_1 = q'_1$ ve $q_2h_2 = q'_2$ olup **KUAD**$/R$ kategorisi geri çekme objeye sahiptir.

Önerme 4.1.8 **KUAD**$/R$ kategorisi sonlu çarpımlara sahiptir.

İspat: σ_1 ve σ_3 ün çarpıma sahip olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\sigma_1$ve σ_3 ün çarpım objesi $\sigma_1 \sqcap \sigma_3$ şeklinde olup terminal obje σ_t üzerine bir geri çekmedir. Burada

$$\begin{tikzcd} & & C_1 \otimes C_1 \arrow[dll, "\omega_1"'] \arrow[d, "w_1"] & \\ \sigma_1 : & L_1 \arrow[r, "\partial_2"'] & C \arrow[r, "\partial_1"'] & R, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & & C_3 \otimes C_3 \arrow[dll, "\omega_3"'] \arrow[d, "w_3"] & \\ \sigma_3 : & L_3 \arrow[r, "\delta_2"'] & D \arrow[r, "\delta_1"'] & R \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & C_2 \otimes C_2 \arrow[dll, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & \\ \sigma_2 : & L_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & B \arrow[r, "\beta_1"'] & R, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & & C \otimes C \arrow[dll, "id"'] \arrow[d, "w"] & \\ \sigma_t : & L_2 \arrow[r, "w"'] & R \arrow[r, "id"'] & R \end{tikzcd}$$

olup, aşağıdaki diyagram değişmeli olmalıdır.

$$\begin{tikzcd} \sigma_1 \sqcap \sigma_3 \arrow[r, "(p_1, p_1')"] \arrow[d, "(p_2, p_2')"'] & \sigma_1 \arrow[d, "(f_1, \partial_1)"] \\ \sigma_3 \arrow[r, "(g_1, \delta_1)"'] & \sigma_t \end{tikzcd}$$

Yani $f_1 p_1 = g_1 p_2$, $\partial_1 p_1' = \delta_1 p_2'$. Aslında aşagıdaki diyagramı elde etmiş oluruz.

$$\begin{tikzcd} L_1 \cap L_3 \arrow[rr, "p_1"] \arrow[dr, "\beta_2"] \arrow[ddd, "p_2"'] & & L_1 \arrow[dr, "\partial_2"] \arrow[ddd, "f_1"] & & & \\ & C \cap D \arrow[rr, "p_1'"] \arrow[drrr, "\beta_1"] \arrow[ddd, "p_2'"] & & C \arrow[drr, "\partial_1"] \arrow[ddd, "f_2"] & & \\ & & & & R \arrow[r, equal] \arrow[ddd, equal] & R \arrow[ddd, equal] \\ L_3 \arrow[rr, "g_1"] \arrow[dr, "\delta_2"] & & L_2 \arrow[dr, "\beta_2"] & & & \\ & D \arrow[rr, "\delta_1"] \arrow[drrr, "\delta_1"] & & R \arrow[drr, equal] & & \\ & & & & R \arrow[r, equal] & R \end{tikzcd}$$

Şimdi β_1 ve β_2 yi tanımlayalım $\beta_1 : C \sqcap D \to R$ dönüşümünü $\beta_1(c,d) = \partial_1 p_1'(c,d) = \delta_1 p_2'(c,d)$ şeklinde ve $\beta_2 : L_1 \sqcap L_3 \to C \sqcap D$ dönüşümünü

$\beta_2(l_1, l_3) = (\partial_2 l_1, \delta_2 l_3)$ şeklinde tanımlayalım. Tümevarım ile $\mathbf{KUAD}/R$ kategorisinin geri çekme objeye sahip olduğu gösterilmiş olur. Şimdi de $\sigma_1 \sqcap \sigma_3$ ün bir kuadratik modül olduğunu gösterelim.

QM1) Her $(c,d),(c',d'),(c'',d'') \in C \cap D$ için

$$\begin{aligned}
\langle\langle(c,d),(c',d')\rangle,(c'',d'')\rangle &= \langle(c,d),(c',d') - (c',d')\cdot\beta_1(c,d),(c'',d'')\rangle \\
&= \langle(cc',dd') - (c',d')\partial_1(c),(c'',d'')\rangle \\
&= \langle(cc',dd') - (c',d')\cdot\partial_1(c),(c'',d'')\rangle \\
&= \langle(cc' - c'\cdot\partial_1 c, dd' - d'\cdot\partial_1 c),(c'',d'')\rangle \\
&= \langle(\langle c,c'\rangle, dd' - d'\partial_1 c),(c'',d'')\rangle \\
&= \langle(\langle c,c'\rangle, dd' - d'\delta_1 d),(c'',d'')\rangle \\
&= \langle(\langle c,c'\rangle, dd' - d'\cdot\delta_1 d),(c'',d'')\rangle \\
&= \langle(\langle c,c'\rangle, \langle d,d'\rangle),(c'',d'')\rangle \\
&= (\langle c,c'\rangle,\langle d,d'\rangle)(c'',d'') - (c'',d'')\cdot\beta_1(\langle c,c'\rangle,\langle d,d'\rangle) \\
&= (\langle c,c'\rangle c'', \langle d,d'\rangle d'')(c'',d'')\partial_1(\langle c,c'\rangle) \\
&= (\langle c,c'\rangle c'', c''\cdot\partial_1(\langle c,c'\rangle), \langle d,d'\rangle d'' - d''\partial_1(\langle c,c'\rangle)) \\
&= (\langle c,c'\rangle c'', c''\cdot\partial_1(\langle c,c'\rangle), \langle d,d'\rangle d'' - d''\delta_1(\langle d,d'\rangle)) \\
&= (\langle\langle c,c'\rangle,c''\rangle,\langle\langle d,d'\rangle,d''\rangle) \\
&= (0,0)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\beta_1 : C \sqcap D \to R$ is a nil(2)-modüldür.

$$L_1 \sqcap L_3 \xrightarrow{\beta_2} C \sqcap D \xrightarrow{\beta_1} R$$

bir kompleks olmalıdır. Gerçektende her $(l_1, l_3) \in L_1 \sqcap L_3$ için

$$\begin{aligned}
\beta_1\beta_2(l_1, l_3) &= \beta_1(\partial_2(l_1), \delta_2(l_3)) \\
&= \partial_1 p_1'(\partial_2(l_1), \delta_2 l_3)) \\
&= \partial_1\partial_2 l_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır.

QM2)

$$\begin{tikzcd}
 & M'' \otimes M'' \arrow[dl, "\omega''"'] \arrow[d, "w''"] & \\
L_1 \times L_3 \arrow[r, "y"'] & C \times D \arrow[r, "\beta_1 x"'] & R
\end{tikzcd}$$

diyagramında $\{(c,d)\} \otimes \{(c',d')\} \in C' \otimes C'$ için ω' nü aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\omega'(\{(c,d)\} \otimes \{(c',d')\}) = (\omega_1(\{c\} \otimes \{c'\}), \omega_3(\{d\} \otimes \{d'\})).$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
\beta_2\omega'(\{(c,d)\} \otimes \{(c',d')\}) &= \beta_2(\omega_1(\{c\} \otimes \{c'\}), \omega_3(\{d\} \otimes \{d'\})) \\
&= (\partial_2\omega_1(\{c\} \otimes \{c'\}), \delta_2\omega_3(\{d\} \otimes \{d'\})) \\
&= w_1(\{c\} \otimes \{c'\}), w_3(\{d\} \otimes \{d'\}) \\
&= \langle c, c'\rangle, \langle d, d'\rangle \\
&= \langle (c,d), (c',d') \\
&= w(\{(c,d)\} \otimes \{(c',d')\})
\end{aligned}$$

olur.

QM3) Her $(l_1, l_3) \in L_1 \times L_3, (c, d) \in C \sqcap D$ için

$$\begin{aligned}
&\omega'(\{\beta_2(l_1, l_3)\} \otimes \{(c, d)\} + \{(c, d)\} \otimes \{\beta_2(l_1, l_3)\}) \\
&= \omega'(\{\partial_2 l_1, \delta_2 l_3\} \otimes \{(c, d)\} + \{(c, d)\} \otimes \{\partial_2 l_1, \delta_2 l_3\}) \\
&= (\omega_1(\{\partial_2 l_1\} \otimes \{c\}), \omega_3(\{d\} \otimes \{\delta_2 l_3\})) + (\omega_1(\{c\} \otimes \{\partial_2 l_1\}), \omega_3(\{\delta_2 l_3\} \otimes \{d\})) \\
&= (\omega_1(\{\partial_2 l_1\} \otimes \{c\}) + (\{c\} \otimes \{\partial_2 l_1\}), \omega_3(\{d\} \otimes \{\delta_2 l_3\})) + ((\{\delta_2 l_3\} \otimes \{d\})) \\
&= (l_1 \cdot \partial_1(c), l_3 \cdot \delta_1(d)) \\
&= (l_1 \cdot \partial_1 p_1'(c, d), l_3 \cdot \delta_1 p_2'(c, d)) \\
&= (l_1 \cdot \beta_1(c, d), l_3 \cdot \beta_1(c, d)) \\
&= (l_1, l_3) \cdot \beta_1(c, d)
\end{aligned}$$

olur.

QM4) Her $(l_1, l_3), (l_1', l_2') \in L_1 \sqcap L_3$ için

$$\begin{aligned}
\omega'(\{\beta_2(l_1, l_3)\} \otimes \{\beta_2(l_1', l_3')\}) &= \omega'(\{\partial_2 l_1, \delta_2 l_3\} \otimes \{\partial_2 l_1', \delta_2 l_3'\} \\
&= \omega_1(\{\partial_2 l_1\} \otimes \{\partial_2 l_1'\}, \omega_3(\{\delta_2 l_3\} \otimes \{\delta_2 l_3'\}) \\
&= (l_1 l_1', l_3 l_3') \\
&= (l_1, l_3)(l_1', l_3')
\end{aligned}$$

bulunur.□ □

Yukarıdaki sonuca göre,

$$\mathbf{\Pi} : \mathbf{KUAD}/R \times \mathbf{KUAD}/R \to \mathbf{KUAD}/R$$

bir funktor olur.

Sonuç 4.1.9 *Yukarıdaki son teoremde verilen $\beta_1, \partial_1, \delta_1, \beta_2, \partial_2, \delta_2$ homomorfizmleri için*

i) $gör\beta_1 = gör\partial_1 \cap gör\delta_1$

ii) $çek\beta_1 = çek\partial_1 \cap çek\delta_2$

iii) $gör\beta_2 = gör\partial_2 \cap gör\delta_2$

iv) $çek\beta_2 = çek\partial_2 \cap çek\delta_2$

Eğer $\partial_1 = \delta_1 = 0$ *ise* $\sigma_1 \sqcap \sigma_3$, $\sigma_1 \times \sigma_3$ *indirgenmiş kuadratik modülünün direk çarpımı olur.*

Böylece limiti özetleyen aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Önerme 4.1.10 Eğer σ sonlu ise $\mathbf{KUAD}/R$ kategorisi herhangi bir $\mathbf{F} : \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \mathbf{KUAD}/R$ funktoru için limite sahiptir.

İspat: $\mathbf{KUAD}/R$ kategorisi sonlu çarpımlar ve eşitleyiciye sahip olduğu için sonuç aşikardır. $\square$

4.2 Eşçarpım ve Eşlimit

Çaprazlanmış modüller için eşçarpım ve eşlimit konusu [29] da çalışılmıştır. Biz burada kuadratik modüller için eşçarpım objeyi oluşturacağız ve morfizmlerin eşlimite sahip olduğunu ispat edeceğiz.

Önerme 4.2.1 $\mathbf{KUAD}/R$ kategorisinde aynı tanım ve görüntü kümesine sahip olan tüm morfizm ikililerinin bir eşeşitleyicisi vardır.

İspat: σ_1 ve σ_2 $\mathbf{KUAD}/R$ de iki obje $f, g : \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ iki kuadratik R-modül morfizmi olsunlar. Bunu aşağıdaki diyagramla daha açık resmedelim.

$$\begin{tikzcd}
 & C_1 \otimes C_1 \arrow[dl, "\omega_1"'] \arrow[d, "w_1"] & \\
\sigma_1 : L_1 \arrow[r, "\partial_2"'] \arrow[d, shift right, "g_1"'] \arrow[d, shift left, "f_1"] & M_1 \arrow[r, "\partial_1"'] \arrow[d, shift right, "g_2"'] \arrow[d, shift left, "f_2"] & R \arrow[d, equal] \\
\sigma_2 : L_2 \arrow[r, "\delta_2"'] & M_2 \arrow[r, "\delta_1"'] & R \\
 & C_2 \otimes C_2 \arrow[ul, "\omega_2"] \arrow[u, "w_2"'] &
\end{tikzcd}$$

I, M_2 nin $f_2(m_1) - g_2(m_1)$ elemanları tarafından üretilen bir ideali, J de L_2 nin $f_1(l_1) - g_1(l_1)$ elemanları tarafından üretilen bir ideali olsun. Burada I, çek∂_1 in ve gör∂_2 de I nın idealleri olurlar. $\overline{M} = M_2/I$ ve $\overline{L} = L_2/J$ şeklinde tanımlayalım. $\overline{M}$ ve $\overline{L}$, R nin aşikar etkisiyle birer R-cebirdirler.
$\overline{\delta_1} : \overline{M} \to R$, $\overline{\delta_1}(m_2 + I) = \delta_1(m_2)$ ve $\overline{\delta_2} : \overline{L} \to \overline{M}$, $\overline{\delta_2}(l_2 + J) = \delta_2(l_2) + I$ şeklinde tanımlansınlar. Bu durumda

$$\begin{tikzcd}
 & & C \otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\
\overline{\sigma} : & \overline{L} \arrow[r, "\overline{\delta_2}"] & \overline{M} \arrow[r, "\overline{\delta_1}"] & R
\end{tikzcd}$$

bir kuadratik modüldür. Gerçekten de her $r \in R$ ve $m_2 + I \in \overline{M}$ olmak üzere,

$$\overline{\delta_1}(r \cdot (m_2 + I)) = \overline{\delta_1}(r \cdot m_2 + I) = \delta_1(r \cdot m_2) = r \cdot \delta_1(m_2) = r \cdot \overline{\delta_1}(m_2 + I)$$

olup $\overline{\delta_1}$ bir ön-çaprazlanmış modül olur. Her $m_2, m_2', m_2'' \in M$ için

$$\begin{aligned}
\langle\langle m_2 + I, m_2' + I\rangle, m_2'' + I\rangle &= \langle (m_2 + I)(m_2' + I) - (m_2 + I) \cdot \overline{\delta_1}(m_2' + I), (m_2'' + I)\rangle \\
&= \langle (m_2 m_2' + I) - (m_2 + I) \cdot \delta_1(m_2'), (m_2'' + I)\rangle \\
&= \langle (m_2 m_2' - (m_2 \cdot \delta_1(m_2') + I, (m_2'' + I)\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \langle m_2, m_2' \rangle + I, (m_2'' + I) \rangle \\
&= (\langle m_2, m_2' \rangle + I)(m_2'' + I) - (\langle m_2, m_2' \rangle + I) \cdot \overline{\delta_1}(m_2'' + I) \\
&= \langle m_2, m_2' \rangle (m_2'' + I) - \langle m_2, m_2' \rangle \cdot \overline{\delta_1}(m_2'') + I \\
&= \langle m_2, m_2' \rangle m_2'' - \langle m_2, m_2' \rangle \cdot \overline{\delta_1}(m_2'') + I \\
&= \langle \langle m_2, m_2' \rangle, m_2'' \rangle + I \\
&= 0 + I
\end{aligned}
$$

olup $\overline{\delta_1}$ bir nil(2)-modüldür.

Ayrıca $\overline{\delta_1 \delta_2}(l_2 + J) = \overline{\delta_1}(\delta_2 l_2 + I) = \delta_1 \delta_2 l = 0$ olup diyagram bir kompleks-tir.

$\overline{\omega}$ yi aşağıdaki gibi tanımlayalım. $CM'/(M^{cr})^2$ olmak üzere $\{m_2 + I\} \in C$ için

$$\overline{\omega}(\{m_2 + I\} \otimes \{m_2' + I\}) = \omega(\{m_2\} \otimes \{m_2'\}),$$

olsun. Bu durumda **QM2**,**QM3**,**QM4** şartları sağlandığı kolayca gösterilebilir. Burada bu gösterimleri ihmal ediyoruz. $\overline{\sigma}$ nın tanımı ile $p = (p_1, p_2) : \sigma_2 \to \overline{\sigma}$ indirgenmiş morfizmi bir kuadratik modül morfizmidir. Yani

$$
\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "g_1"'] \arrow[d, "\partial_2"'] & L_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\delta_2"'] & \overline{L} \arrow[d, "\overline{\delta_2}"] \\
M_1 \arrow[r, shift left, "f_2"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] \arrow[dr] & M_2 \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d] & \overline{M} \arrow[dl] \\
& R &
\end{tikzcd}
$$

diyagramı değişmelidir. Son olarak p nin evrensel özelliğini kontrol edeceğiz. Başka bir

$$
\begin{tikzcd}
& & C' \otimes C' \arrow[dl] \arrow[d] & \\
\overline{\sigma'} : & \overline{L'} \arrow[r, "\overline{\delta_2'}"] & \overline{M'} \arrow[r, "\overline{\delta_1'}"] & R
\end{tikzcd}
$$

kuadratik modülü ve başka bir $p' = (p_1', p_2') : \sigma_2 \to \overline{\sigma'}$ kuadratik R-modül morfizmi $p_1' f_1 = p_1' g_1$ ve $p_2' f_2 = p_2' g_2$ olacak şekilde var olsun. Bu durumda biricik $\varphi = (\varphi_1', \varphi_2') : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma'}$ morfizmi, $\varphi_1(l+J) = p_1'(l)$ ve $\varphi_2(m+J) = p_2'(m)$ şeklinde tanımlı ve $\varphi_1 p_1 = p_1'$, $\varphi_2 p_2 = p_2'$ şartlarını sağlayacak şekilde vardır. Böylece p evrenseldir ve aşağıdaki değişmeli diyagramı elde ederiz.

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "g_1"'] \arrow[d, "\partial_2"'] & L_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\delta_2"'] \arrow[ddrr] & \overline{L} \arrow[d, "\overline{\delta_2}"] \arrow[ddr, bend left] & \\
M_1 \arrow[r, shift left, "f_2"] \arrow[r, shift right, "g_2"'] \arrow[dr] & M_2 \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d] \arrow[dr] & \overline{M} \arrow[dl] \arrow[d, dotted] & \\
& R & \overline{M'} \arrow[l] & \overline{L'} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Böylece p, f ve g nin eşeşitleyicisi olur. $\square$

Şimdi kuadratik modüller kategorisinde aşağıdaki gibi verilen iki kuadratik modülün eşçarpımının var olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
& & C_1 \otimes C_1 \arrow[dl, "\omega_1"'] \arrow[d, "w_1"] & \\
\sigma_1 : & L_1 \arrow[r, "\partial_2"'] & C \arrow[r, "\partial_1"'] & R,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & C_2 \otimes C_2 \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & \\
\sigma_2 : & L_2 \arrow[r, "\delta_2"'] & X \arrow[r, "\delta_1"'] & R
\end{tikzcd}$$

KUAD$/R$ da birer kuadratik modül olsunlar. X in C üzerine etkisi δ_1 ile veriliyor olsun. Yani $x \in X$ ve $c \in C$ olmak üzere $x \cdot c = \delta_1(x) \cdot c$ olsun. Bu etkiyi kullanarak bir yarı-direk çarpım tanımlayabiliriz.

$$X \ltimes C = \{(x, c) : x \in X, c \in C\}.$$

Burada ikinci işlem $(x, c)(y, d) = (xy, c \cdot \delta_1 y + \delta_1 x \cdot d + cd)$ şeklinde ve R nin $X \ltimes C$ üzerine etkisi $r \in R$ ve $(x, c) \in X \times C$ için $r \cdot (x, c) = (r \cdot x, r \cdot c)$ şeklinde olsun. Böylece $X \ltimes C$ bir R-cebir olur. Ayrıca iki tane $i_2 : X \to X \ltimes C$, $i_2(x) = (x, 0)$ ve $j_2 : C \to X \ltimes C$, $j_2(c) = (0, c)$ şeklinde birebir dönüşümler vardır. $\beta_1' : X \ltimes C \to R$ dönüşümü $\beta_1'(x, c) = \delta_1 x + \partial_1 c$ olarak tanımlayalım. Böylece β_1' bir cebir morfizmi olur. P, $X \ltimes C$ nin aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen bir ideali olsun. $(x, c), (y, d), (z, e) \in X \ltimes C$ için

1. $xyz - xz \cdot \partial_1 d - xy \cdot \delta_1 z + x\partial_1 d\delta_1 z - xy \cdot \partial_1 e + x \cdot (\delta_1 y \partial_1 e) + x \cdot \partial_1(de) - x \cdot \partial_1(de) + de\delta_1 x + cde - d \cdot (\delta_1 x \partial_1 e) - c \cdot \partial_1(ed)$

2. $xyz - xy \cdot \delta_1 z - +x\partial_1 e\delta_1 y, e \cdot (\delta_1 xy) + ed \cdot \delta_1(xy) + (ed) \cdot \delta_1(x) - d \cdot (\delta_1 x\partial_1 e) + (ec) \cdot (\delta_1 y) + c \cdot (\delta_1 y\partial_1 c)$.

Böylece $X \ltimes C/P$ bölüm halkası $\beta_1 : X \ltimes C/P \to R$ dönüşümünü $\beta_1((x,c) + P) = \delta_1 x + \partial_1 c$ i şeklinde tanımlarız. Burada $(\delta_1 + \partial_1)(P) = 0$ olacağından β_1 dönüşümü iyi tanımlıdır. Üreteçler tarafından üçlü Peiffer çarpımları 0 olacağından β_1 bir nil(2)-modül olur. Diğer taraftan L_2, L_1 üzerine $\delta_1\delta_2$ vasıtasıyla etki eder. $\delta_1\delta_2 = 0$ olduğundan $L_2 \ltimes L_1$ yarı-direk çarpımı bir direk çarpım olur. Bu yüzden $L_2 \ltimes L_1 = L_2 \times L_1$ şeklinde aşikar çarpım ile tanımlanır. Yine iki birebir dönüşüm $i_1 : L_2 \to L_2 \times L_1$, $i_1(l_2) = (l_2, 0)$ ve $j_1 : L_1 \to L_2 \times L_1$, $j_1(l_1) = (0, l_1)$ vardır.

$\beta_2' : L_2 \times L_1 \to X \ltimes C$ dönüşümünü $\beta_2'(l_2, l_1) = (\delta_2 l_2, \partial_2 l_1)$ olarak tanımlayalım. Böylece β_2' bir cebir morfizmi olur. P', $L_2 \times L_1$ in aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen bir ideali olsun. $(x_1, c_1), (x_2, c_2), (x_3, c_3) \in X \ltimes C$ için

1. $(\omega_2(\{x_1\} \otimes \{\langle x_2, x_3\rangle\}), \omega_1(\{c_1\} \otimes \{\langle c_2, c_3\rangle\})) \in P'$
2. $(l_2 \cdot \delta_1 x, l_1 \cdot \partial_1 c) - (l_2, l_1) \cdot (\delta_1 x + \partial_1 c) \in P'$

Böylece $L_2 \times L_1/P'$ bölüm halkası ve indirgenmiş morfizm $\beta_2 : L_2 \times L_1/P' \to X \ltimes C/P$ dönüşümünü $\beta_2((l_2, l_1) + P') = (\delta_2 l_2, \partial_2 l_1) + P$ şeklinde tanımlayabiliriz. Burada $(\delta_2, \partial_2)(P') \subseteq P$ olacağından β_2 dönüşümü iyi tanımlı olur. Sonuç olarak aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 4.2.2

$$\begin{tikzcd}
& C \otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\
\sigma : L_2 \times L_1/P' \arrow[r, "\beta_2"'] & X \ltimes C/P \arrow[r, "\beta_1"'] & R
\end{tikzcd}$$

bir kuadratik modüldür.

İspat: İlk olarak ω yı tanımlayalım. $(x,c)+P,(y,d)+P \in X \ltimes C/P$ olmak üzere,

$$\omega(\{(x,c)+P\}\otimes\{(y,d)+P\}) = (\omega_2(\{x\}\otimes\{y\}),\omega_1(\{c\}\otimes\{d\}))+P'$$

olsun. Şimdi kuadratik modül aksiyomlarını gösterelim.

QM1) β_1 in nil(2)-modül olduğunu göstermiştik. Ayrıca her $(l_2,l_1)+P \in L_1 \times L_2/P$ için

$$\beta_1\beta_2((l_2,l_1)+P) = \beta_1(\delta_2(l_2),\partial_2(l_1)+P) = \delta_1\delta_2(l_2)+\partial_1\partial_2 l_1 = 0+0=0$$

olur.

QM2) Her $(x,c)+P,(y,d)+P \in X \ltimes C/P$ için

$$\begin{aligned}
\beta_2\omega(\{(x,c)+P\}\otimes\{(y,d)+P\}) &= \beta_2((\omega_2(\{x\}\otimes\{y\}),\omega_1(\{c\}\otimes\{d\}))+P') \\
&= (\delta_2\omega_2(\{x\}\otimes\{y\}),\partial_2\omega_1(\{c\}\otimes\{d\}))+P \\
&= (w_2(\{x\}\otimes\{y\}),w_1(\{c\}\otimes\{d\}))+P \\
&= (\langle x,y\rangle,\langle c,d\rangle)+P \\
&= \langle (x,c),(y,d)\rangle+P \\
&= w(\{(x,c)+P\}\otimes\{(y,d)+P\})
\end{aligned}$$

olur.

QM3) Her $(x,c)+P \in X \ltimes C/P$ ve $(l_2,l_1)+P' \in L_2 \times L_1/P'$ için

$$\begin{aligned}
&\omega(\{\beta_2((l_2,l_1)+P')\}\otimes\{(x,c)+P\}+\{(x,c)+P\}\otimes\{\beta_2((l_2,l_1)+P')\}) \\
&= \omega(\{(\delta_2 l_2,\partial_2 l_1)+P\}\otimes\{(x,c)+P\}+\{(x,c)+P\}\otimes\{(\delta_2 l_2,\partial_2 l_1)+P\}) \\
&= (\omega_2(\{\delta_2 l_2\}\otimes\{x\}+\{x\}\otimes\{\delta_2 l_2\}),\omega_1(\{\delta_2 l_2\}\otimes\{c\}+\{c\}\otimes\{\delta_2 l_2\}))+P' \\
&= (l_2\cdot\delta_1(x),l_1\cdot\partial_1(c))+P' \\
&= (l_2,l_1)\cdot\beta_1(x,c)
\end{aligned}$$

elde edilir.

QM4 Her $(l_2,l_1)+P',(l'_2,l'_1)+P'\in L_2\times L_1/P'$ için

$$\begin{aligned}\omega(\{\beta_2((l_2,l_1)+P')\}\otimes\{\beta_2((l'_2,l'_1)+P')\}) &= \omega(\{(\delta_2 l_2,\partial_2 l_1)+P\}\otimes\{(\delta_2 l'_2,\partial_2 l'_1)+P\}\\ &= \omega_2(\{\delta_2 l_2\}\otimes\{\delta_2 l'_2\},\omega_1(\{\partial_2 l_1\}\otimes\{\partial_2 l'_1\})+P'\\ &= (l_2 l'_2, l_1 l'_1)+P'\\ &= ((l_2,l_1)+P'\cdot((l'_2,l'_1)+P')\end{aligned}$$

olur. □

Teorem 4.2.3

$$\begin{tikzcd} & C_1\otimes C_1 \arrow[dl, "\omega_1"'] \arrow[d, "w_1"] & \\ \sigma_1 : \quad L_1 \arrow[r, "\partial_2"'] & C \arrow[r, "\partial_1"'] & R, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C_2\otimes C_2 \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & \\ \sigma_2 : \quad L_2 \arrow[r, "\delta_2"'] & X \arrow[r, "\delta_1"'] & R \end{tikzcd}$$

kuadratik modüllerinin eşçarpımı, $i=(i_1,i_2)$, $j=(j_1,j_2)$ morfizmleri ve

$$\begin{tikzcd} & C\otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ \sigma : \quad L_2\times L_1/P' \arrow[r, "\beta_2"'] & X\ltimes C/P \arrow[r, "\beta_1"'] & R \end{tikzcd}$$

kuadratik modülüdür.

İspat: Burada (i_2,j_2) nin $(X\ltimes C/P,\beta_1)$ üzerinde ve (i_1,j_1) nin $(L_2\times L_1/P',\beta_2)$ üzerinde evrensel özelliği sağladığını göstereceğiz.

$f=(f_1,f_2):\sigma_2\to\sigma_B$, $g=(g_1,g_2):\sigma_1\to\sigma_B$ iki kuadratik R-modül morfizmi olsun. Yani

$$\begin{tikzcd} L_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & R \arrow[d, equal] \\ B_2 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & R \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} L_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "g_2"'] & R \arrow[d, equal] \\ B_2 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & R. \end{tikzcd}$$

Bu durumda $h=(h_1,h_2):\sigma'\to\sigma_B$ dönüşümü

$$\begin{tikzcd} L_2\times L_1/P' \arrow[r] \arrow[d, "h_1"'] & X\ltimes C/P \arrow[r] \arrow[d, "h_2"'] & R \arrow[d, equal] \\ B_2 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

yukarıdaki gibi vardır ve $h_1((l_2,l_1)+P')=f_1(l_2)+g_1(l_1)$, $h_2((x,c)+P)=f_2(x)+g_2(c)$ şeklinde biricik morfizmdir. Burada

$$\begin{tikzcd}
\sigma_2 \arrow[r, "i_1,i_2"'] \arrow[dr, "f_1,f_2"'] & \sigma \arrow[d, "h_1,h_2"] & \sigma_1 \arrow[l, "j_1,j_2"'] \arrow[dl, "g_1,g_2"] \\
 & \sigma_B &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Gerçekten de her $l_2\in L_2, x\in X, c\in C, l_1\in L_1$ için

$$h_1i_1(l_2)=h_1(l_2,0)=f_1(l_2)+g_1(0)=f_1(l_2),$$

$$h_2i_2(x)=h_2(x,0)=f_2(x)+g_2(0)=f_2(x),$$

$$h_1j_1(l_1)=h_1(0,l_1)=f_1(0)+g_1(l_1)=g_1(l_1),$$

$$h_2j_2(c)=h_2(0,c)=f_2(0)+g_2(c)=g_2(c)$$

dir. $\square$

$\mathbf{KUAD}/R$ kategorisinde eşçarpım objenin bulunması bize

$$\circ:\mathbf{KUAD}/R\times\mathbf{KUAD}/R\to\mathbf{KUAD}/R$$

funktorunu verir ki bu funktor

$$\triangle:\mathbf{KUAD}/R\to\mathbf{KUAD}/R\times\mathbf{KUAD}/R$$

funktoruna sol adjoint tir.

Önerme 4.2.4 $\mathbf{KUAD}/R$ kategorisi herhangi bir $\mathbf{J}:\boldsymbol{\sigma}\longrightarrow\mathbf{KUAD}/R$ funktoru için eşlimite sahiptir.

İspat: $\mathbf{KUAD}/R$ kategorisi eşçarpım ve eşeşitleyiciye sahip olduğu için sonuç aşikardır. $\square$

Bölüm 5

4-boyutlu Kuadratik Modül

Baues kuadratik modülleri tanımladıktan sonra [12] de gruplar üzerine 4-boyutlu kuadratik modüller kavramını tanımlamıştır. Bu bölümde değişmeli cebirlerde 4-boyutlu kuadratik modül tanımı verilip, Arvasi, Uslu ve Kuzpınarı [5] tarafından tanımlanmış olan 3-çaprazlanmış modüller kategorisinden 4-boyutlu kuadratik modüller kategorisine giden bir funktor tanımlayacağız.

5.1 4-boyutlu Kuadratik Modül

Tanım 5.1.1 4-boyutlu kuadratik modül

$$\begin{tikzcd} & & C_2 \otimes C_2 \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ Q_4 \arrow[r, "\partial_4"'] & Q_3 \arrow[r, "\partial_3"'] & Q_2 \arrow[r, "\partial_2"'] & Q_1 \end{tikzcd}$$

şeklinde aşağıdaki şartları sağlayan $(\partial_4, \partial_3, \partial_2, \omega, w)$ cebirsel sisteme denir.

1. $(\partial_2, \partial_3, \omega)$ bir kuadratik modüldür.
2. Q_4 bir Q_1- cebirdir ve $\partial_2 Q_2$ aşikar olarak etkiye sahiptir.
3. ∂_4 bir Q_1-modüldür ve $\partial_3 \partial_4 = 0$.

Bir 4-boyutlu kuadratik modül morfizmi $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, $i = 1, 2, 3, 4$ için $f_i : Q_i \to Q'_i$ ve aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd}
Q_4 \arrow[r, "\partial_4"] \arrow[d, "f_4"'] & Q_3 \arrow[r, "\partial_3"] \arrow[d, "f_3"'] & Q_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_2"'] & Q_1 \arrow[d, "f_1"'] \\
Q'_4 \arrow[r, "\partial'_4"'] & Q'_3 \arrow[r, "\partial'_3"'] & Q'_2 \arrow[r, "\partial'_2"'] & Q'_1.
\end{tikzcd}$$

5.2 3-crossed Modüller Kategorisinden 4-boyutlu Kuadratik Modüller Kategorisine Giden Funktorun Oluşturulması

Gruplar üzerinde 2-çaprazlanmış modüller, ilk olarak Conduché, [22], tarafından tanımlanmıştır. Bu yapının değişmeli cebirler üzerinde versiyonu Grandjean ve Vale, [25], tarafından tanımlanmıştır. Değişmeli cebirlerde 3-çaprazlanmış modül tanımı Kuzpınarı,Odabaş ve Uslu [27] tarafından verilmiştir. Şimdi [32] den değişmeli cebirler üzerinde 2-çaprazlanmış modül tanımını verelim.

Tanım 5.2.1 [33]

$$\partial_1 : C_1 \to C_0$$

bir ön-çaprazlanmış modül ve

$$\partial_2 : C_2 \to C_1$$

bir çaprazlanmış modül olmak üzere, C_0-cebirlerin

$$\chi_2 = (C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0)$$

kompleksini göz önüne alalım. C_0 kendisi üzerine çarpım ile etki eder ve C_1, C_2 üzerine C_0 yardımıyla etki eder. Dolayısıyla $x \in C_2$, $y \in C_1$, $z \in C_0$ için

$(xy)z = x(yz)$ dir. Ayrıca

$$\{-\otimes -\} : C_1 \otimes_{C_0} C_1 \to C_2$$

şeklinde tanımlı Peiffer Lifting fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyon var ve her $x, x_1, x_2 \in C_2$, $y, y_0, y_1, y_2 \in C_1$ ve $z \in C_0$ için,

$$\begin{array}{lrcl}
\textbf{2CM1)} & \partial_2\{y_0 \otimes y_1\} & = & y_0y_1 - y_0 \cdot \partial_1 y_1 \\
\textbf{2CM2)} & \{\partial_2(x_1) \otimes \partial_2(x_2)\} & = & x_1x_2 \\
\textbf{2CM3)} & \{y_0 \otimes y_1y_2\} & = & \{y_0y_1 \otimes y_2\} + \partial_1 y_2 \cdot \{y_0 \otimes y_1\} \\
\textbf{2CM4)} & a)\{\partial_2 x \otimes y\} & = & y \cdot x - \partial_1 y \cdot x \\
 & b)\{y \otimes \partial_2 x\} & = & y \cdot x \\
\textbf{2CM5)} & \{y_0 \otimes y_1\} \cdot z & = & \{y_0 \cdot z \otimes y_1\} = \{y_0 \otimes y_1 \cdot z\}
\end{array}$$

özelliklerini sağlıyor ise , χ_2 kompleksine bir **2-çaprazlanmış modül** denir ve kısaca $\{C_2, C_1, C_0, \partial_2, \partial_1\}$ şeklinde gösterilir.

Şimdi de [27] den değişmeli cebirler üzerinde 3-çaprazlanmış modül tanımını verelim.

Tanım 5.2.2 Bir 3-çaprazlanmış modül aşağıdaki k-cebirlerin ve homomorfizmaların diyagramıdır,

$$C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0.$$

C_0 nin C_1, C_2, C_3 üzerine, C_1 nin C_2, C_3 üzerine, C_2 nin C_3 üzerine etkileri vardır. Ayrıca $\partial_3, \partial_2, \partial_1$ birer C_0, C_1-cebirleridirler ve C_1, C_0-bilineer dönüşümleri

$$\{,\}_{(1)(0)} : C_2 \otimes C_2 \longrightarrow C_3, \quad \{,\}_{(0)(2)} : C_2 \otimes C_2 \longrightarrow C_3, \quad \{,\}_{(2)(1)} : C_2 \otimes C_2 \longrightarrow C_3,$$
$$\{,\}_{(1,0)(2)} : C_1 \otimes C_2 \longrightarrow C_3, \quad \{,\}_{(2,0)(1)} : C_1 \otimes C_2 \longrightarrow C_3,$$
$$\{,\}_{(0)(2,1)} : C_2 \otimes C_1 \longrightarrow C_3, \quad \{,\} : C_1 \otimes C_1 \longrightarrow C_2$$

Peiffer dönüşümleri olarak adlandırılır ve aşağıda verilen 16 aksiyomu sağlarlar. Her $x_1 \in C_1, x_2, y_2 \in C_2$ ve $x_3, y_3 \in C_3$ için

3CM1 $C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1$ diyagramı $\{-,-\}_{(2)(1)}$ Peiffer dönüşümüyle birlikte bir 2-çaprazlanmış modüldür.

3CM2 $\partial_2\{x_1 \otimes y_1\} = (\partial_1 y_1) \cdot x_1 - x_1 y_1$

3CM3 $\{x_2 \otimes \partial_2 y_2\}_{(0)(2,1)} = \{x_2 \otimes y_2\}_{(2)(1)} - \{x_2 \otimes y_2\}_{(1)(0)}$

3CM4 $\partial_3\{x_2 \otimes y_2\}_{(1)(0)} = \{\partial_2 x_2 \otimes \partial_2 y_2\} + x_2 y_2$

3CM5 $\{x_1 \otimes \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)}\{x_1 \otimes \partial_3 y_3\}_{(0)(2,1)} + \{x_1 \otimes \partial_3 y_3\}_{(1,0)(2)} - (\partial_1 x_1) \cdot y_3$

3CM6 $\{\partial_2 x_2 \otimes y_2\}_{(2,0)(1)} = -\{x_2 \otimes y_2\}_{(0)(2)} + (x_2 y_2) \cdot \{x_2 \otimes y_2\}_{(2)(1)} + \{x_2 \otimes y_2\}_{(1)(0)}$

3CM7 $\{\partial_3 x_3 \otimes \partial_3 y_3\}_{(1)(0)} = y_3 x_3$

3CM8 $\{\partial_3 y_3 \otimes \partial_2 x_2\}_{(0)(2,1)} = (-\partial_2 x_2) \cdot y_3$

3CM9 $\{\partial_2 x_2 \otimes \partial_3 y_3\}_{(1,0)(2)} = -\{x_2 \otimes \partial_3 y_3\}_{(0)(2)}$

3CM10 $\{\partial_2 x_2 \otimes \partial_3 y_3\}_{(2,0)(1)} = (\partial_2 x_2) \cdot y_3 - \{x_2 \otimes \partial_3 y_3\}_{(0)(2)}$

3CM11 $\{\partial_3 y_3 \otimes x_1\}_{(0)(2,1)} = (-x_1) \cdot y_3$

3CM12 $\{y_2 \otimes \partial_3 x_3\}_{(1)(0)} = -y_2 \cdot x_3$

3CM13 $\{\partial_3 x_3 \otimes y_2\}_{(1)(0)} = y_2 \cdot x_3$

3CM14 $\{\partial_3 x_3 \otimes y_2\}_{(2)(0)} = 0$

3CM15 $\partial_3\{x_1 \otimes y_2\}_{(2,0)(1)} = \partial_3\{x_1 \otimes y_2\}_{(1,0)(2)} + \{x_1 \otimes \partial_2 y_2\}_{(2,0)(1)} - (\partial_1 x_1) y_2 + x_1 \cdot y_2$

3CM16 $\partial_3\{y_2 \otimes x_1\}_{(0)(2,1)} = \{\partial_2 y_2 \otimes x_1\} - x_1 \cdot y_2$

Şimdi bir 3-çaprazlanmış modülden bir 4-boyutlu kuadratik modülün nasıl oluşturulacağını vereceğiz. $K \xrightarrow{\partial_3} L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$ değişmeli cebirlerde bir 3-çaprazlanmış modül olsun. Bu yapıdan

$$Q_4 \xrightarrow[\delta_4]{} Q_3 \xrightarrow[\delta_3]{} Q_2 \xrightarrow[\delta_2]{} Q_1$$

şeklinde bir 4-boyutlu kuadratik modül elde edeceğiz.

P_3, M nin aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen bir ideali olsun.

$x, y, z \in M$ için

1. $\langle\langle x, y\rangle, z\rangle$

2. $\langle x, \langle y, z\rangle\rangle$.

P'_3 de L nin aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen ideali olsun.

$x, y, z \in M,\ a, b \in L$ için

1. $-\{x \otimes \langle y, z\rangle\}$

2. $-\{\langle x, y\rangle \otimes z\}$

3. $\partial_3\{x \otimes a\}_{(1,0)(2)} - \partial_3\{x \otimes a\}_{(2,0)(1)} + \partial_3\{a \otimes x\}_{(0)(2,1)}$

4. $-\partial_3\{a \otimes b\}_{(1)(2)}$.

Bu durumda aşağıdaki bölüm cebirlerini oluşturabiliriz.

$Q_2 = M/P_3, \quad Q_3 = L/P'_3$

$Q_1 = N$ ve $Q_4 = K$ alalım. $\delta_2 : Q_2 \to Q_1$ dönüşümünü $\delta_2(x + P_3) = \partial_1 x$ şekline alırsak iyi tanımlı bir cebir homomorfizmi olur, çünkü $\partial_1(P_3) = 0$ dır. Böylece,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "q_1"] \arrow[dr, "\partial_1"'] & & Q_2 \arrow[dl, "\delta_2"] \\ & Q_1 & \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramını elde ederiz. $3CM2$ yi kullanarak

$$\partial_2(-\{x \otimes \langle y, z\rangle\}) = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$$

$$\partial_2(-\{\langle x, y\rangle \otimes z\}) = \langle\langle x, y\rangle, z\rangle$$

bulunur. Bu da bize $\delta_3 : Q_3 \to Q_2$; $\delta_3(l + P'_3) = \partial_2 l + P_3$ nın iyi tanımlı olduğunu verir. Çünkü yukarıdaki eşitliklerden $\partial_2(P'_3) \subseteq P_3$ diyebiliriz. $\delta_4 : Q_3 \to Q_2$ dönüşümünü ∂_3 ten indirgeyerek $\delta_4(k) = \partial_3 k + P'_3$ şeklinde tanımlayabiliriz. Böylece $C = Q_2/(Q_2)^2$ ve q_1, q_2 bölüm dönüşümleri olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
 & & C_2 \otimes C_2 \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\
Q_4 \arrow[r, "\delta_4"'] \arrow[d, equal] & Q_3 \arrow[r, "\delta_3"'] & Q_2 \arrow[r, "\delta_2"'] & Q_1 \arrow[d, equal] \\
K \arrow[r, "\partial_3"'] & L \arrow[u, "q_2"'] \arrow[r, "\partial_2"'] & M \arrow[u, "q_1"'] \arrow[r, "\partial_1"'] & N
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramını oluşturabiliriz. Kuadratik dönüşüm ω yı $\{-,-\} : M \otimes M \longrightarrow L$ yardımıyla tanımlarız. Yani $x, y \in M, \overline{x}, \overline{y} \in Q_2, \{\overline{x}\}, \{\overline{y}\} \in C_2$ için $\omega : C_2 \otimes C_2 :\longrightarrow Q_3$

$$\omega(\{\overline{x}\} \otimes \{\overline{y}\}) = q_2\{x \otimes y\} = \{x \otimes y\} + P_3'$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Önerme 5.2.3

$$\begin{tikzcd}
 & & C_2 \otimes C_2 \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\
Q_4 \arrow[r, "\delta_4"'] & Q_3 \arrow[r, "\delta_3"'] & Q_2 \arrow[r, "\delta_2"'] & Q_1
\end{tikzcd}$$

değişmeli cebirlerde bir 4-boyutlu kuadratik modüldür.

İspat:

QM1) Üçlü peiffer çarpımlar P_3 te aşikar olduğundan $\delta_2 : Q_2 \to Q_1$ bir nil(2)-modüldür. Ayrıca $k \in K$ için $\delta_3\delta_4(k) = \delta_3(\partial_3 + P_3') = \partial_3\partial_4 + P_3 = 0 + P_3$ olduğu görülür.

QM2) Her $\{\overline{x}\} \otimes \{\overline{y}\} \in C_2 \otimes C_2$ için

$$\begin{aligned}\delta_3\omega(\{\overline{x}\} \otimes \{\overline{y}\}) &= \delta_3 q_2\{x \otimes y\}\\ &= q_1\delta_2\{x \otimes y\}\\ &= q_1(xy - \partial_1 y \cdot x)\\ &= \overline{xy} - \delta_2\overline{y} \cdot \overline{x}\\ &= w(\{\overline{x}\} \otimes \{\overline{y}\})\end{aligned}$$

olur.

QM3) Her $\{\overline{x}\}, \{\delta_3\overline{a}\} \in C_2$ için

$$\begin{aligned}\omega(\{\overline{x}\} \otimes \{\delta_3\overline{a}\} + \{\delta_3\overline{a}\} \otimes \{\overline{x}\}) &= q_2(\{x \otimes \partial_2 a\} + \{\partial_2 a \otimes x\})\\ &= \{x \otimes \partial_2 a\} + \{\partial_2 a \otimes x\} + P_3'\\ &= (\partial_1 x) \cdot a + P_3'\\ &= (\delta_2\overline{x}) \cdot \overline{a}\end{aligned}$$

bulunur.

QM4) Her $\{\delta_3\overline{a}\}, \{\delta_3\overline{b}\} \in C_2$ ve $\overline{a}, \overline{b} \in Q_3$ için

$$\begin{aligned}\omega(\{\delta_3\overline{a}\} \otimes \{\delta_3\overline{b}\}) &= q_2(\{\partial_2 a \otimes \partial_2 b\})\\ &= \{\partial_2 a \otimes \partial_2 b\} + P_3'\\ &= ab + P_3'\\ &= \overline{a}\overline{b}\end{aligned}$$

olup

$$\begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ Q_3 \arrow[r, "\delta_3"'] & Q_2 \arrow[r, "\delta_2"'] & Q_1 \end{tikzcd}$$

bir kuadratik modüldür. □

Böylece 3-çaprazlanmış modüller kategorisinden 4-boyutlu kuadratik modüller kategorisine bir funktor tanımlamış oluruz.

Bölüm 6

Kuadratik 2-Modül

6.1 Kuadratik 2-Modül

[6] da Arvasi ve Ulualan 2-çaprazlanmış modüller kategorisinden kuadratik modüller kategorisine giden bir funktor tanımlamışlardır. Daha sonra önceki bölümde de bahsedildiği gibi Arvasi, Uslu ve Kuzpınarı 3-çaprazlanmış modül kavramını tanımlamışlardır [7]. Bu kavramlar bize kuadratik 2-modül fikrini vermiştir. Bu bölümde 3-çaprazlanmış modülünün oluşturulduğu yöntemi kullanarak kuadratik 2-modülü tanımlayacağız.

Tanım 6.1.1 Bir kuadratik 2-modül aşağıdaki k-cebirlerin ve homomorfizmlerin diyagramıdır.

$$\begin{tikzcd}
 & D \otimes D \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & & \\
K \arrow[r, "\partial_3"'] & L \arrow[r, "\partial_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"'] & N \\
 & & C \otimes C \arrow[ul, "\omega"] \arrow[u, "w"'] &
\end{tikzcd}$$

Burada N nin K, L, M üzerine, M nin K, L üzerine, L nin K üzerine etkileri vardır. Ayrıca $\partial_3, \partial_2, \partial_1$ birer N, M-cebirdirler, M, N-bilineer dönüşümleri

$$\omega_0 : D \otimes D \longrightarrow K, \quad \omega_1 : D \otimes D \longrightarrow K, \quad \omega_2 : D \otimes D \longrightarrow K,$$
$$\omega : C \otimes C \longrightarrow L, \quad w : C \otimes C \longrightarrow M, \quad w_2 : D \otimes D \longrightarrow L,$$
$$\Phi_0 : D \otimes C \longrightarrow K, \quad \Phi_1 : C \otimes D \longrightarrow K, \quad \Phi_2 : C \otimes D \longrightarrow K$$

vardır ve 2-kuadratik dönüşümleri olarak adlandırılırlar. Burada $D = (L^{cr})/(L^{cr})^2$ ve $C = (M^{cr})/(M^{cr})^2$ dir. $L \twoheadrightarrow D$ bölüm dönüşümü $x \mapsto \{x\}$ şeklinde ve $M \twoheadrightarrow C$ bölüm dönüşüm $x \mapsto \{x\}$ şeklinde gösterelim. Bunlar aşağıdaki aksiyomları sağlamalıdırlar. Her $m \in M, l, l' \in L, k, k' \in K$ için;

Q2M1)

$$\begin{tikzcd} & D \otimes D \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & \\ K \arrow[r, "\partial_3"'] & L \arrow[r, "\partial_2"'] & M \end{tikzcd}$$

diyagramı ω_2 dönüşümüyle birlikte bir kuadratik modüldür.

Q2M2) $\partial_1 : M \longrightarrow N$ bir nil(2)-modüldür ve $\partial_2\omega(\{m\} \otimes \{m'\}) = w(\{m\} \otimes \{m'\})$.

Q2M3) $\Phi_2(\{m\} \otimes \{\partial_3 k\}) - \Phi_1(\{m\} \otimes \{\partial_3 k\}) = \Phi_0(\{\partial_3 k\} \otimes \{m\}) - (\partial_1 m) \cdot k$

Q2M4) $\Phi_0(\{\ l\} \otimes \{\partial_2 l'\}) = \omega_2(\{l\} \otimes \{l'\}) - \omega_1(\{l\} \otimes \{l'\})$

Q2M5) $\Phi_1(\{\partial_2 l\} \otimes \{l'\}) = -\omega_0(\{l\} \otimes \{l'\})$

Q2M6) $\partial_3\omega_1(\{l\} \otimes \{l'\}) = \omega(\{\partial_2 l\} \otimes \{\partial_2 l'\}) + ll'$

Q2M7) **a**. $\omega(\{m\} \otimes \{\partial_2 l\}) = m \cdot l + \partial_3\Phi_0(\{l\} \otimes \{m\})$

b. $\omega(\{\partial_2 l\} \otimes \{m\}) = m \cdot l - (\partial_1 m) \cdot l - \partial_3\Phi_1(\{m\} \otimes \{l\}) + \partial_3\Phi_2(\{m\} \otimes \{l\})$

Q2M8) $\omega_1(\{\partial_3 k\} \otimes \{l\}) + \omega_1(\{l\} \otimes \{\partial_3 k\}) = \omega_0(\{\partial_3 k\} \otimes \{l\}) = 0$

Q2M9) $\omega_1(\{\partial_3 k\} \otimes \{\partial_3 k'\}) = kk'$

Q2M10) $\Phi_0(\{\partial_3 k\} \otimes \{\partial_2 l\}) - \Phi_1(\{\partial_2 l\} \otimes \{\partial_3 k\}) + \Phi_2(\{\partial_2 l\} \otimes \{\partial_3 k\}) = 0.$

Kısaca bir kuadratik 2-modülü $(K, L, M, N, \omega_2, \omega)$ ile gösteririz. Değişmeli cebirlerde *kuadratik* 2-*modül morfizmi* aşağıdaki diyagram ile gösterilir.

$$\begin{tikzcd}
D \otimes D \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_* \otimes \Phi_*"'] & K \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & L \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & N \arrow[d, "f_0"] \\
D' \otimes D' \arrow[r] & K' \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N'
\end{tikzcd}$$

öyle ki; her $n \in n, m \in M, l \in L, k \in K$ için

$$f_1(n \cdot m) = f_0(n) \cdot f_1(m), \quad f_2(n \cdot l) = f_0(n) \cdot f_2(l), \quad f_3(n \cdot k) = f_0(n) \cdot f_3(k)$$

olmalıdır ve $a, b \in L$ ve $i = 0, 1, 2$ için

$$\omega_i'(\{f_2 a\} \otimes \{f_2 b\}) = f_3 \omega_i(\{a\} \otimes \{b\}),$$

dir. Ayrıca $a \in M, b \in L$ ve $i = 1, 2$ için

$$\Phi_i'(\{f_1 a\} \otimes \{f_2 b\}) = f_3 \Phi_i(\{a\} \otimes \{b\}),$$

$a \in L, b \in M$ için

$$\Phi_0'(\{f_2 a\} \otimes \{f_1 b\}) = f_3 \Phi_0(\{a\} \otimes \{b\})$$

ve $a, b \in M$ için

$$\omega'(\{f_1 a\} \otimes \{f_1 b\}) = f_2 \omega(\{a\} \otimes \{b\})$$

eşitlikleri sağlanmalıdır.

Böylece kuadratik 2-modüller kategorisini tanımlamış oluruz. Kuadratik 2-modüller kategorisini **Q2MAlg** ile göstereceğiz.

6.2 3-çaprazlanmış modüller kategorisinden Kuadratik 2-Modüller kategorisine giden funktorun tanımlanması

Arvasi ve Ulualan [4] 2-çaprazlanmış modüller kategorisinden kuadratik modüller kategorisine giden bir funktor tanımlamışlardır. Burada benzer şekilde 3-çaprazlanmış modül kategorisinden kuadratik 2-modüller kategorisine giden bir funktor tanımlayacağız.

$$C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

bir 3-çaprazlanmış modül olsun. Bundan

$$\begin{tikzcd}
 & D\otimes D \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & & \\
K \arrow[r, "\overline{\partial_3}"'] & L \arrow[r, "\overline{\partial_2}"'] & M \arrow[r, "\overline{\partial_1}"'] & N \\
 & & C\otimes C \arrow[ul, "\omega"] \arrow[u, "w"'] &
\end{tikzcd}$$

şeklinde bir kuadratik 2-modül oluşturacağız. $N = C_0$ ve $M = C_1/P_1$ olsun. Burada P_1 , C_1 in aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen bir idealidir. $x, y, z \in C_1$ için

1. $\langle\langle x, y\rangle, z\rangle$
2. $\langle x, \langle y, z\rangle\rangle$.

$\overline{\partial_1} : M \to N$ dönüşümünü $\overline{\partial_1}(x + P_1) = \partial_1 x$ şeklinde tanımlayalım. $\partial_1(P_1) = \{0\}$ olduğundan dolayı bu iyi tanımlı bir cebir homomorfizmidir.

P_2, C_2 nin aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen bir ideali olmak üzere, $L = C_2/P_2$ olsun. $a, b, c \in C_2$ için

1. $\langle\langle a, b\rangle, c\rangle$,
2. $\langle a, \langle b, c\rangle\rangle$,

3. $\{\langle a,b\rangle \otimes c\}$,

4. $\{a \otimes \langle b,c\rangle\}$.

Benzer şekilde $\overline{\partial_2} : L \to M$ dönüşümünü ise $\overline{\partial_2}(x+P_2) = \partial_2 x + P_1$ olarak tanımlayalım. Burada $\overline{\partial_2}$ de iyi tanımlı bir homomorfizmdir, çünkü; her $a,b,c \in C_2$ için

$$\begin{aligned}
\partial_2(\langle\langle a,b\rangle,c\rangle) &= \partial_2(\langle a,b\rangle c - \partial_1\langle a,b\rangle \cdot c) \\
&= \partial_2\langle a,b\rangle \partial_2 c - \partial_2(\partial_1\langle a,b\rangle \cdot c) \\
&= \partial_2\langle a,b\rangle \partial_2 c - \partial_2\partial_1\langle a,b\rangle \cdot \partial_2 c) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır ve $3CM2$ den dolayı, $\partial_2\{a \otimes \langle b,c\rangle\} = \langle a,\langle b,c\rangle\rangle \in P_1$, $\partial_2\{\langle a,b\rangle \otimes c\} = \langle\langle a,b\rangle,c\rangle \in P_1$ dir. Dolayısıyla $\partial_2(P_2) \subseteq P_1$ dir.

P_3 , C_3 ün aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen bir ideali olmak üzere, $K = C_3/P_3$ olsun. $x,y,z \in C_2$ olmak üzere

1. $\{\langle x,y\rangle \otimes z\}_{(2)(1)}$,

2. $\{x \otimes \langle y,z\rangle\}_{(2)(1)}$,

3. $\{\langle x,y\rangle \otimes z\}_{(1)(0)}$,

4. $\{x \otimes \langle y,z\rangle\}_{(1)(0)}$.

$\overline{\partial_3} : K \to L$ dönüşümünü $\overline{\partial_3}(k+P_3) = \partial_3 k + P_2$ şeklinde tanımlayalım. $\overline{\partial_3}$ iyi tanımlı bir homomorfizmdir, çünkü; $\partial_3\{\langle x,y\rangle \otimes z\}_{(2)(1)} = \langle x,y\rangle z - \partial_2\langle x,y\rangle \cdot z = \langle\langle x,y\rangle,z\rangle \in P_2$ and $\partial_3\{x \otimes \langle y,z\rangle\}_{(2)(1)} = \langle x,\langle y,z\rangle\rangle \in P_2$ ayrıca $3CM8$ den dolayı $\partial_3\{\langle x,y\rangle \otimes z\}_{(1)(0)} = \{\partial_2\langle x,y\rangle \otimes \partial_2 z\} + \langle x,y\rangle z$, burada ∂_2 bir ön-çaprazlanmış modül olduğundan dolayı $\partial_2\langle x,y\rangle = 0$ olup $\partial_3\{\langle x,y\rangle \otimes z\}_{(1)(0)} = \langle x,y\rangle z = [\langle x,y\rangle, z] \in P_2$. Yani $\partial_3(P_3) \subseteq P_2$ olup $\overline{\partial_3}$ iyi tanımlı olur.

Şimdi 2-kuadratik dönüşümleri tanımlayalım.

$x_1, y_1 \in C_1, \quad x_2, y_2 \in C_2$ için

$$\omega_2(\{x_2+P_2\} \otimes \{y_2+P_2\}) = \{x_2 \otimes y_2\}_{(2)(1)} + P_3,$$

$$\omega(\{x_1 + P_1\} \otimes \{y_1 + P_1\}) = \{x_1 \otimes y_1\} + P_2,$$

$$\omega_0(\{x_2 + P_2\} \otimes \{y_2 + P_2\}) = \{x_2 \otimes y_2\}_{(0)(2)} + P_3,$$

$$\omega_1(\{x_2 + P_2\} \otimes \{y_2 + P_2\}) = \{x_2 \otimes y_2\}_{(1)(0)} + P_3,$$

$$\Phi_0(\{x_2 + P_2\} \otimes \{y_1 + P_1\}) = \{x_2 \otimes y_1\}_{(0)(2,1)} + P_3,$$

$$\Phi_1(\{x_1 + P_1\} \otimes \{y_2 + P_2\}) = \{x_1 \otimes y_2\}_{(1,0)(2)} + P_3,$$

$$\Phi_2(\{x_1 + P_1\} \otimes \{y_2 + P_2\}) = \{x_1 \otimes y_2\}_{(2,0)(1)} + P_3.$$

şeklinde tanımlansınlar. Böylece aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 6.2.1

$$\begin{tikzcd}
 & D \otimes D \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & & \\
K \arrow[r, "\overline{\partial_3}"'] & L \arrow[r, "\overline{\partial_2}"'] & M \arrow[r, "\overline{\partial_1}"'] & N \\
 & & C \otimes C \arrow[ul, "\omega"] \arrow[u, "w"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli cebirlerde bir kuadratik 2-modüldür.

İspat:

Q2M1) Üçlü Peiffer çarpımlar L de aşikar olduğundan $\overline{\partial_2}$ bir nil(2)-modüldür. Ayrıca her $x_2, y_2 \in C_2$ için

$$\begin{aligned}
\overline{\partial_3}\omega_2(\{x_2 + P_2\} \otimes \{y_2 + P_2\}) &= \overline{\partial_3}(\{x_2 \otimes y_2\}_{(2)(1)} + P_3) \\
&= \partial_3\{x_2 \otimes y_2\}_{(2)(1)} + P_2 \\
&= \langle x_2, y_2 \rangle + P_2 \\
&= w_2(\{x_2 + P_2\} \otimes \{y_2 + P_2\})
\end{aligned}$$

ve her $x_3, y_3 \in C_3$ için

$$\begin{aligned}
\omega_2(\{\overline{\partial_3}(x_3+P_3)\}\otimes\{\overline{\partial_3}(y_3+P_3)\}) &= \omega_2(\{\partial_3(x_3)+P_2\}\otimes\{\partial_3(y_3)+P_2\}) \\
&= \{\partial_3 x_3 \otimes \partial_3 y_3\}_{(2)(1)} + P_3 \\
&= y_3x_3 + P_3 \\
&= (y_3+P_3)(x_3+P_3)
\end{aligned}$$

olur. Yani, $(\omega_2, \overline{\partial_3}, \overline{\partial_2})$ bir kuadratik modül olur.

Q2M4) Her $x_2, x_2' \in C_2$ için

$$\begin{aligned}
\Phi_0(\{x_2+P_2\}\otimes\{\overline{\partial_2}(x_2'+P_2)\} &= \Phi_0(\{x_2+P_2\}\otimes\{\partial_2(x_2')+P_1\}) \\
&= \{x_2\otimes\partial_2 x_2'\}_{(0)(2,1)} + P_3 \\
&= \{x_2\otimes x_2'\}_{(2)(1)} - \{x_2\otimes x_2'\}_{(1)(0)} + P_3 \\
&= \omega_2(\{x_2+P_2\}\otimes\{x_2+'P_2\}) - \omega_1(\{x_2+P_2\}\otimes\{x_2'+P_2\})
\end{aligned}$$

bulunur.

Q2M10) Her $x_2 \in C_2$ ve $x_3 \in C_3$ için

$$\begin{aligned}
&\Phi_0(\{\overline{\partial_3}(x_3+P_3)\}\otimes\{\overline{\partial_2}(x_2+P_2)\} + (\Phi_1+\Phi_2)(\{\overline{\partial_2}(x_2+P_2)\}\otimes\{\overline{\partial_3}(x_3+P_3)\}) \\
=&\Phi_0(\{\partial_3x_3+P_2\}\otimes\{\partial_2x_2+P_1\}) + (\Phi_1+\Phi_2)(\{\partial_2x_2+P_1\}\otimes\{\partial_3x_3+P_2\}) \\
=&(\{\partial_3x_3\otimes\partial_2x_2\}_{(0)(2,1)}+P_3)(\{\partial_2x_2\otimes\partial_3x_3\}_{(1,0)(2)}+P_3)(\{\partial_2x_2\otimes\partial_3x_3\}_{(2,0)(1)}+P_3) \\
=&(-\partial_2x_2)\cdot x_3 + \{x_2\otimes\partial_3x_3\}_{(0)(2)} + (\partial_2x_2)\cdot x_3 - \{x_2\otimes\partial_3x_3\}_{(0)(2)} + P_3 \\
=&P_3
\end{aligned}$$

Diğer aksiyomların gösterimini okuyucuya bırakıyoruz. $\square$

Böylece 3-çaprazlanmış modüller kategorisinden kuadratik 2-modüller kategorisine giden bir funktor tanımlamış oluruz.

$$\mathbf{\Lambda_2} : \mathbf{X_3ModAlg} \longrightarrow \mathbf{Q2MAlg}$$

Önerme 6.2.2 3-çaprazlanmış modülün homotopi modülleri yukarıdaki funktor altında oluşturulan kuadratik 2-modülünün homotopi modüllerine izomorftur.

İspat: Aşağıdaki 3-çaprazlanmış modülüne

$$C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \qquad (1)$$

ve bu (1) 3-çaprazlanmış modüle funktor altında karşılık gelen kuadratik 2-modülü

$$\begin{tikzcd}
& D\otimes D \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & & \\
K \arrow[r, "\overline{\partial_3}"'] & L \arrow[r, "\overline{\partial_2}"'] & M \arrow[r, "\overline{\partial_1}"'] & N \\
& & C\otimes C \arrow[ul, "\omega"] \arrow[u, "w"'] &
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

ile gösterelim.

(1) in homotopi modülleri

$$\pi_i = \begin{cases} C_0/\partial_1(C_1), & i=1 \\ \text{çek}\partial_1/\text{gör}\partial_2, & i=2 \\ \text{çek}\partial_2/\text{gör}\partial_3, & i=3 \\ \text{çek}\partial_3, & i=4 \\ 0, & i=0 \quad veya \quad i>4 \end{cases}$$

ve (2) nin homotopi modülleri ise

$$\pi'_i = \begin{cases} C_0/\overline{\partial_1}(C_1), & i=1 \\ \text{çek}\overline{\partial_1}/\text{gör}\overline{\partial_2}, & i=2 \\ \text{çek}\overline{\partial_2}/\text{gör}\overline{\partial_3}, & i=3 \\ \text{çek}\overline{\partial_3}, & i=4 \\ 0, & i=0 \quad veya \quad i>4 \end{cases}$$

şeklindedir.

Her $i \geq 0$ için $\pi_i \cong \pi'_i$ olduğunu göstereceğiz. $i = 1$ için $\overline{\partial_1}(M) = \partial_1(C_1)$ olduğundan açıkça $\pi_1 \cong \pi'_1$ olduğu görülür. Ayrıca çek$\overline{\partial_1}$ = çek∂_1/P_1 ve gör$\overline{\partial_2} \cong$ gör∂_2/P_1 olup $\pi'_2 =$ (çek∂_1/P_1)/(gör∂_2/P_1) $\cong$ çek∂_1/gör$\partial_2 \cong \pi_2$ bulunur. Benzer şekilde $\pi'_3 =$ (çek∂_2/P_2)/(gör∂_3/P_2) $\cong$ çek∂_2/gör$\partial_3 \cong \pi_3$ bulunabilir. Şimdi π'_4 e bakalım. $\pi'_4 = \{xP_3 : \partial_3 x \in P_2\}$ dür. Verilen bir $x + P_3 \in \pi'_3$ için $x + P_3 = x' + P_3$, $x' \in$ çek∂_3 olacak şekilde bir $x' + P_3 \in \pi'_3$ olduğunu göstereceğiz. $\partial_2(\langle\langle a, b\rangle, c\rangle) = 0$, $\partial_2(\langle a, \langle b, c\rangle\rangle) = 0$, $\partial_3\{\langle x, y\rangle, z\}_{(2)(1)} = \langle\langle x, y\rangle, z\rangle$ ve $\partial_3\{x, \langle y, z\rangle\}_{(2)(1)} = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$ olduğundan $\partial_3(P_3) = P_2$ dir. Yani $\partial_3 x \in P_2$ demek $\partial_3 x = \partial_3(\omega_2), \omega_2 \in P_3$ demektir. Buradan $\partial_3(x - \omega_2) = 0$ olur. Bu durumda $x + P_3 = x' + P_3$ ve $\partial_3 x' = 0$ olması için $x' = x - \omega_2$ şeklinde alalım. $\alpha : \pi'_4 \to \pi_4$ yı $\alpha(x + P_3) = \alpha(x' + P_3) = x'$ şeklinde ve $\beta : \pi_4 \to \pi'_4$ yı $\beta(x) = x + P_3$ şeklinde tanımlayalım. α ve β nın bijective oldukları açıktır. Bu da bizim iddiamızı ispatlamış olur. Sonuç olarak, (1) ve (2) nin aynı homotopi tipine sahip olduklarını söyleyebiliriz. $\Box$

6.3 Simplisel cebirler kategorisinden Kuadratik 2-Modüller kategorisine giden funktorun tanımlanması

Baues,[10], simplisel gruplar kategorisinden gruplar üzerinde kuadratik modüller kategorisine bir funktor oluşturmuştur. Arvasi ve Ulualan [4] simplisel cebirler kategorisi ile kuadratik modüller kategorisi arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Arvasi, Uslu ve Kuzpınarı [5] simplisel gruplar kategorisinden 3-çaprazlanmış modüller kategorisine giden funktoru oluşturmuşlardır. Bu bölümde hiperçaprazlanmış kompleks çiftlerinden faydalanarak simplisel cebirler kategorisinden kuadratik 2-modüller kategorisine giden bir funktor tanımlanacaktır. Önce gerekli bazı bilgileri verelim.

Simplisel Cebirler

Tanım 6.3.1 k değişmeli bir halka ve $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ değişmeli k-cebirlerin bir ailesi olsun.

$$d_i^n : E_n \to E_{n-1}, \qquad 0 \leq i \leq n \neq 0$$
$$s_j^n : E_n \to E_{n+1}, \qquad 0 \leq j \leq n$$

homomorfizmler olmak üzere

1. $(0 \leq i < j \leq n)$ için, $d_i^{n-1}d_j^n = d_{j-1}^{n-1}d_i^n$,
2. $(0 \leq i \leq j \leq n)$ için, $s_i^{n+1}s_j^n = s_{j+1}^{n+1}s_i^n$,
3. $(0 \leq i < j \leq n)$ için, $d_i^{n+1}s_j^n = s_{j-1}^{n-1}d_i^n$,
4. $(i = j$ veya $i = j+1)$ için, $d_i^{n+1}s_j^n = id$,
5. $(0 \leq j < i-1 \leq n)$ için, $d_i^{n+1}s_j^n = s_j^{n-1}d_{i-1}^n$

özdeşlikleri sağlanıyor ise $((E_n)_{n\in\mathbb{N}}, d_i, s_j)$ üçlüsüne **simplisel cebir** denir ve kısaca **E** ile gösterilir. Buradaki d_i ve s_j homomorfizmlerine sırasıyla yüz ve dejenere operatörler denir.

$$f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$$

şeklindeki bir simplisel cebir morfizmi, d_i ve s_j yüz ve dejenere operatörleri ile değişmeli olan, $f_n : E_n \to F_n$ şeklindeki k-cebir homomorfizmlerin bir ailesidir. Yani, her bir i ve n için

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i \text{ ve } f_n s_i = s_i f_{n-1}$$

dir. Böylece simplisel cebirler kategorisini oluşturabiliriz. Simplisel cebirlerin kategorisini **SimpCeb** ile göstereceğiz.

Bir Simplisel Cebirin Moore Kompleksi

E bir simplisel cebir olsun.

$$(NE)_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Çek } d_i^n$$

olmak üzere, $d_n^n = \partial_n : NE_n \to NE_{n-1}$ homomorfizmlerini tanımlayalım. Bu durumda,

$$\mathbf{NE}: \quad \ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} NE_n \xrightarrow{\partial_n} NE_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} NE_1 \xrightarrow{\partial_1} NE_0$$

zinciri bir komplekstir. Bu komplekse **E** simplisel cebirinin **Moore kompleksi** denir ve (**NE**,∂) veya kısaca **NE** ile gösterilir. Eğer $n > k$ için $NE_n = 0$ ise **E** simplisel cebirinin Moore kompleksinin boyutu k den küçük veya eşittir denir ve $\leq k$ ile gösterilir. Moore kompleksinin boyutu $\leq k$ olan simplisel cebirler kategorisini $\mathbf{SimpCeb}_{\leq k}$ ile göstereceğiz.

Hiperçaprazlanmış kompleks çiftleri Carrasco ve Cegarra, [20], tarafından tanımlanmıştır. Arvasi, [3], simplisel cebirler üzerinde hiperçaprazlanmış kompleks çiftleri ile üretilen I_n üreteçli idealini tanımlamıştır. Burada $C_{\alpha,\beta}$ fonksiyonlarını tanımlamışlar ve I_n idealinin üreteç elemanları olarak bu fonksiyonun görüntü kümesini kullanmışlardır. Detaylı bilgi için Arvasi ve Porter [8] e bakınız.

Şimdi bu I_n idealinin üreteçlerini daha iyi anlayabilmek için $n = 2$ ve $n = 3$ durumlarını kısaca inceleyelim.

Örnek 6.3.2 $n = 2$ için I_n idealinin üreteç elemanları NE_2 de $x, y \in NE_1 =$ Çek d_0 olmak üzere,

$$\begin{aligned} C_{(1),(0)}(x \otimes y) &= p_1 p_0 (s_1 x s_0 y) \\ &= s_1 x s_0 y - s_1 x s_1 y \\ &= s_1 x (s_0 y - s_1 y) \end{aligned}$$

şeklindedir.

$n = 3$ için mevcut olan lineer morfizmler, yani görüntüleri $I_3 \trianglelefteq E_3$ idealinin üreteçleri olan lineer morfizmler [8] de

$$\begin{array}{lll} C_{(1,0),(2)}, & C_{(2,0),(1)}, & C_{(2,1),(0)} \\ C_{(2),(0)}, & C_{(2),(1)}, & C_{(1),(0)} \end{array}$$

şeklinde verilmiştir. Buna göre I_3 idealinin üreteçleri;

$x \in NE_1$ ve $y \in NE_2$ için,

$$\begin{aligned} C_{(1,0),(2)}(x \otimes y) &= (s_1s_0x - s_2s_0x)s_2y \\ C_{(2,0),(1)}(x \otimes y) &= (s_2s_0x - s_2s_1x)(s_1y - s_2y) \\ C_{(2,1),(1)}(x \otimes y) &= s_2s_1x(s_0y - s_1y + s_2y) \end{aligned}$$

ve $x, y \in NE_2$ için,

$$\begin{aligned} C_{(1),(0)}(x \otimes y) &= s_1x(s_0y - s_1y) + s_2xy \\ C_{(2),(0)}(x \otimes y) &= s_2xs_0y \\ C_{(2),(1)}(x \otimes y) &= s_2x(s_1y - s_2y) \end{aligned}$$

şeklindedirler. $n = 4$ için mevcut olan lineer morfizmler, yani görüntüleri I_4 idealinin üreteçleri olan lineer morfizmler;

$$\begin{array}{ccccc} C_{(0)(3,2,1)} & C_{(3,2,0)(1)} & C_{(3,1,0)(2)} & C_{(2,1,0)(3)} & C_{(3,0)(2,1)}, \\ C_{(2,0)(3,1)} & C_{(1,0)(3,2)} & C_{(1)(3,2)} & C_{(0)(3,2)} & C_{(0)(3,1)} \\ C_{(0)(2,1)} & C_{(3,1)(2)} & C_{(2,1)(3)} & C_{(3,0)(2)} & C_{(3,0)(1)} \\ C_{(2,0)(3)} & C_{(2,0)(1)} & C_{(1,0)(3)} & C_{(1,0)(2)} & C_{(2)(3)} \\ C_{(1)(3)} & C_{(0)(3)} & C_{(1)(2)} & C_{(0)(2)} & C_{(0)(1)} \end{array}$$

dir. I_4 idealinin üreteç elemanları için, yani bu lineer morfizmlerin görüntüleri için [8] veya [1] e bakınız.

Şimdi herhangi bir simplisel cebirden bir kuadratik 2-modül oluşturacağız. **E**, Moore kompleksi **NE** olan bir simplisel cebir olsun. $n = 1, 2, 3, 4$ için $E_n = D_n$ alalım. Etkiler aşağıdakiler gibi tanımlıdırlar.

$x_0 \in NE_0$, $x_1 \in NE_1$,$x_2 \in NE_2$ ve $x_3 \in NE_3$ için

$$x_0 \cdot x_1 = (s_0x_0)x_1$$

$$x_0 \cdot x_2 = (s_1s_0x_0)x_2$$

$$x_0 \cdot x_3 = (s_2 s_1 s_0 x_0) x_3$$

$$x_1 \cdot x_2 = (s_1 x_1) x_2$$

$$x_1 \cdot x_3 = (s_2 s_1 x_1) x_3$$

$$x_2 \cdot x_3 = (s_2 x_2) x_3$$

Ayrıca

$$(\partial_1 x_1) \cdot x_3 = (s_1 s_0 x_1) x_3$$

$$(\partial_2 x_2) \cdot x_3 = (s_1 x_2) x_3$$

$$(\partial_3 x_3) \cdot x_3' = x_3 x_3'$$

tür. P_1 , NE_1 in $x, y, z \in NE_1$ olmak üzere aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen bir ideali olsun.

1. $x\langle y, z\rangle - s_0 d_1 \langle y, z\rangle x$
2. $\langle x, y\rangle z - s_0 d_1 z \langle x, y\rangle$.

Burada $\langle x, y\rangle = xy - xs_0 d_1 y$ şeklindedir.

P_2, NE_2 nin $a, b, c \in NE_2 \quad x, y, z \in NE_1$ olmak üzere aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen ideali olsun.

1. $a\langle b, c\rangle - s_0 d_1 \langle b, c\rangle a$
2. $\langle a, b\rangle c - s_0 d_1 c \langle a, b\rangle$
3. $s_1 \langle x, y\rangle (s_1 z - s_0 z)$
4. $s_1 x (s_1 \langle y, z\rangle - s_0 \langle y, z\rangle)$.

P_3 de $NE_3/\partial_4 NE_4$ ün $x, y, z \in NE_3 \quad \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in NE_3/\partial_4 NE_4$ olmak üzere aşağıdaki elemanlar tarafından üretilen bir ideali olsun.

1. $\overline{s_2 \langle x, y\rangle (s_2 z - s_1 z)}$
2. $\overline{s_2 x (s_2 \langle y, z\rangle - s_1 \langle y, z\rangle)}$.

Bu durumda

$$M = NE_1/P_1$$

$$L = NE_2/P_2$$

$$K = (NE_3/\partial_4 NE_4)/P_3$$

şeklindeki bölüm cebirleri oluşturulabilir. Burada

$$NE_3/\partial_4 NE_4 \xrightarrow{\overline{\partial_3}} NE_2 \xrightarrow{\partial_2} NE_1 \xrightarrow{\partial_1} NE_0$$

kompleksinde $\overline{\partial_3}(\overline{s_2\langle x,y\rangle(s_2z - s_1z)}) = \langle\langle x,y\rangle, z\rangle$ ve $\overline{\partial_3}(\overline{s_2x(s_2\langle y,z\rangle - s_1\langle y,z\rangle)})$ olduğundan $a \in NE_3, \overline{a} \in NE_3/\partial_4 NE_4$ için $\partial_3'(\overline{a} + P_3) = \overline{\partial_3}\overline{a} + P_2$ iyi tanımlı bir cebir morfizmidir.

Ayrıca $a, b, c \in NE_2$ için $\partial_2(\langle\langle a,b\rangle, c\rangle) = 0$ ve $\partial_2(\langle a, \langle b,c\rangle\rangle) = 0$ olduğundan $\partial_2' : L \to M$ dönüşümü $\partial_2'(a + P_2) = \partial_2(a) + P_1$ şeklinde iyi tanımlı bir cebir homomorfizmi olur. Her $x \in NE_1$ için $\partial_1' : M \to N$ dönüşümünü $\partial_1'(x + P_1) = \partial_1 x$ şeklinde tanımlayarak aşağıdaki diyagramı elde ederiz.

$$\begin{tikzcd}
 & D\otimes D \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & C\otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\
K \arrow[r, "\partial_3'"'] & L \arrow[r, "\partial_2'"'] & M \arrow[r, "\partial_1'"'] & N \\
NE_3/\partial_4(NE_4) \arrow[u, "q_3"] \arrow[r, "\overline{\partial_3}"'] & NE_2 \arrow[u, "q_2"] \arrow[r, "\partial_2"'] & NE_1 \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "\partial_1"'] & NE_0 \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

Burada q_1, q_2, q_3 birer bölüm homomorfizmleridirler ve ${\partial_3}'q_3 = q_2\overline{\partial_3}, \quad {\partial_2}'q_2 = q_1\partial_2, \quad \partial_1' q_1 = \partial_1$ olup diyagram değişmelidir.

Şimdi 2-kuadratik dönüşümleri tanımlayalım.

$x, y \in NE_2, \quad \overline{x}, \overline{y} \in L, \quad \{\overline{x}\}, \{\overline{y}\} \in D$ için

$$\begin{aligned} \omega_0 : D\otimes D &\longrightarrow K \\ \{\overline{x}\}\otimes\{\overline{y}\} &\longmapsto -\overline{(s_2x, s_0y)} + P_3 \end{aligned}$$

$x, y \in NE_2, \quad \overline{x}, \overline{y} \in L, \quad \{\overline{x}\}, \{\overline{y}\} \in D$ için

$$\begin{aligned} \omega_1 : D\otimes D &\longrightarrow K \\ \{\overline{x}\}\otimes\{\overline{y}\} &\longmapsto \overline{(s_1x - s_2x)s_1y + s_2xy} + P_3 \end{aligned}$$

$x, y \in NE_2, \quad \overline{x}, \overline{y} \in L, \quad \{\overline{x}\}, \{\overline{y}\} \in D$ için

$$\begin{array}{rcl} \omega_2 : D \otimes D & \longrightarrow & K \\ \{\overline{x}\} \otimes \{\overline{y}\} & \longmapsto & \overline{s_2x(s_2y, s_1y)} + P_3 \end{array}$$

$x \in NE_1, \quad \overline{x}, \overline{y} \in M, \quad \{\overline{x}\}, \{\overline{y}\} \in C$ için

$$\begin{array}{rcl} \omega : C \otimes C & \longrightarrow & L \\ \{\overline{x}\} \otimes \{\overline{y}\} & \longmapsto & s_1x(s_1y - s_0y) + P_2 \end{array}$$

$x \in NE_1, \quad y \in NE_2, \quad \overline{x} \in M, \quad \overline{y} \in L, \quad \{\overline{x}\} \in C, \quad \{\overline{y}\} \in D$ için

$$\begin{array}{rcl} \Phi_1 : C \otimes D & \longrightarrow & K \\ \{\overline{x}\} \otimes \{\overline{y}\} & \longmapsto & \overline{(s_2s_0x - s_1s_0x)s_2y} + P_3 \end{array}$$

$x \in NE_1, \quad y \in NE_2, \quad \overline{x} \in M, \quad \overline{y} \in L, \quad \{\overline{x}\} \in C, \quad \{\overline{y}\} \in D$ için

$$\begin{array}{rcl} \Phi_2 : C \otimes D & \longrightarrow & K \\ \{\overline{x}\} \otimes \{\overline{y}\} & \mapsto & (s_2s_1x - s_2s_0x)(s_1y - s_2y) + P_3 \end{array}$$

$y \in NE_1, \quad x \in NE_2, \quad \overline{y} \in M, \quad \overline{x} \in L, \quad \{\overline{x}\} \in D, \quad \{\overline{y}\} \in C$ için

$$\begin{array}{rcl} \Phi_0 : D \otimes C & \longrightarrow & K \\ \{\overline{x}\} \otimes \{\overline{y}\} & \longmapsto & \overline{s_2s_1y(s_1x - s_0x - s_2x)} + P_3 \end{array}$$

İspat:

Q2M1) Üçlü çarpımlar P_2 de birim olduğundan $\partial_2' : L \to M$ bir nil(2)-modüldür. Ayrıca her $x, y \in NE_2$ için

$$\begin{aligned} \partial_3'\omega_2(\{\overline{x}\} \otimes \{\overline{y}\}) &= \partial_3'(\overline{s_2x(s_2y - s_1y)} + P_3) \\ &= \overline{\partial_3}(\overline{s_2x(s_2y - s_1y)}) + P_2 \\ &= x(y - s_1d_2y) + P_2 \\ &= xy - xs_1d_2y + P_2 \\ &= xy - {}^{\partial_2 y}x + P_2 \\ &= w_2(\{\overline{x}\} \otimes \{\overline{y}\}) \end{aligned}$$

olur.

$d_4(C_{(3,2)(1)}(x \otimes y)) = s_2x(s_1d_3y - s_2d_3y + y)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\omega_2(\{\overline{y}\} \otimes \{\partial_3'(\overline{x} + P_3)\}) &= \overline{s_2x(s_2d_3y - s_1d_3y)} + P_3 \\
&\equiv \overline{s_2xy} + P_3 \mod \partial_4(NE_4) \\
&= x \cdot y
\end{aligned}$$

Diğer taraftan $d_4(C_{(2)(3,1)}(x \otimes y)) = (s_1y - s_2y)(s_2d_3x - x)$ olduğundan $\omega_2(\{\partial_3'(\overline{x} + P_3)\} \otimes \{\overline{y}\}) \equiv \overline{s_2yx - s_1yx} + P_3 \mod \partial_4(NE_4)$ olup

$\omega_2(\{\partial_3'(\overline{x} + P_3)\} \otimes \{\overline{y}\} + \{\overline{y}\} \otimes \{\partial_3'(\overline{x} + P_3)\}) = \overline{s_1yx} + P_3 = \overline{\partial_2 y} \cdot \overline{x} + P_3$ bulunur.

Son olarak $d_4(C_{(2)(1)}(x \otimes y)) = s_2d_3x(s_1d_3y - s_2d_3y) + xy$ olduğundan $\omega_2(\{\partial_3'(\overline{x}+P_3)\} \otimes \{\partial_3'(\overline{y}+P_3)\}) = \overline{s_2d_3x(s_2d_3y - s_1d_3y)} + P_3 \equiv \overline{xy} \mod \partial_4(NE_4)$ bulunur. Böylece $K \to L \to M$ nin bir kuadratik modül olduğu gösterilmiş olur.

Q2M3) [5] den her $x, y \in NE_2$ için

$d_4(C_{(3,2,1)(0)}(x \otimes y)) = s_2s_1x(s_0d_3y - s_1d_3y - s_2d_3y - y)$,

$d_4(C_{(3,1,0)(2)}(x \otimes y)) = (s_1s_0x - s_2s_0x)(s_2d_3y - y)$

ve

$d_4(C_{(3,2,0)(1)}(x \otimes y)) = (s_2s_0x - s_2s_1x)(s_1d_3y - s_2d_3y + y)$

olduğundan

$\Phi_2(\{\overline{x}\} \otimes \{\partial_3'(\overline{y} + P_3)\}) = \Phi_0(\{\partial_3'(\overline{y} + P_3)\} \otimes \{\overline{x}\}) + \Phi_1(\{\overline{x}\} \otimes \{\partial_3'(\overline{y} + P_3)\}) - (\partial_1'\overline{x}) \cdot (\overline{y})$ olur.

Q2M5) [5] den her $x, y \in NE_2$ için

$d_4(F_{(3,2)(1,0)}(x \otimes y)) = (s_1s_0d_2x - s_2s_0d_2x - s_0x)s_2y$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\{\partial_2'(\overline{x})\} \otimes \{\overline{y}\}) &= \overline{(s_2s_0d_2x - s_1s_0d_2x)s_2y} + P_3 \\
&\equiv \overline{s_2ys_0x} + P_3 \mod (\partial_4(NE_4)) \\
&= -\omega_0(\{\overline{x}\} \otimes \{\overline{y}\})
\end{aligned}$$

bulunur.

Q2M7) Her $x, y \in NE_2$ için

a)

$$
\begin{aligned}
\partial_3'\Phi_0(\{\overline{x}\} \otimes \{\overline{y}\}) &= d_3(\overline{s_2s_1y(s_1x - s_0 - s_2x)}) + P_3 \\
&= \overline{s_1y(d_3s_1x - d_3s_0x - x)} + P_2 \\
&= \overline{s_1y(s_1d_2x - s_0d_2x - x)} + P_2 \\
&= \overline{s_1y(s_1d_2x - s_0d_2x) - s_1yx} + P_2 \\
&= \omega(\{\overline{y}\} \otimes \{\overline{\partial_2x}\}) - {}^{\overline{y}}\overline{x}
\end{aligned}
$$

benzer şekilde *b*) de direk hesaplama ile gösterilebilir.

Geriye kalan aksiyomlar $C_{\alpha,\beta}$ nın $n = 4$ için d_n altındaki görüntüleri kullanılarak gösterilebilir. Böylece simplisel cebirler kategorisinden kuadratik 2-modüller kategorisine giden funktoru tanımlamış oluruz. □

Alternatif olarak bu ispat Arvasi ve Uslu nun simplisel gruptan 3-çaprazlanmış modül elde ettiği yol kullanılarakta yapılabilir.

Yani aşağıdaki değişmeli diyagramı oluşturmuş oluruz.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{X_2Mod} \arrow[rr] & & \mathbf{Q_2MAlg} \\
& \mathbf{SimpAlg_{\leq 3}} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Bölüm 7

Kuadratik 2-Modüller için Homotopi Kavramı

7.1 Kuadratik Modüllerin Homotopisi

Çaprazlanmış modüllerin homotopisi Brown ve Golasinski [17] tarafından verilmiştir. Benzer şekilde Martin [28] gruplar üzerine 2-çaprazlanmış modüller[22] için homotopi kavramını tanımlamıştır. Burada değişmeli cebirler üzerinde iki kuadratik modül morfizmi arasındaki homotopi kavramı verilecektir.

$$\begin{tikzcd} & & C \otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ A: & L \arrow[r, "\partial_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"'] & N, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & & C' \otimes C' \arrow[dl, "\omega'"'] \arrow[d, "w'"] & \\ A': & L' \arrow[r, "\partial_2'"'] & M' \arrow[r, "\partial_1'"'] & N' \end{tikzcd}$$

değişmeli cebirlerin iki kuadratik modülü ve $f = (f_0, f_1, f_2)$ bir kuadratik modül morfizmi olsun. f üzerindeki homotopi bir $h = (h_1, h_2)$ ikilisidir. Öyle ki; $h_1 : N \to M'$ ve $h_2 : M \to L'$ olup aşağıdaki şartları sağlarlar.

Her $n, n' \in N$ için

$h_1(nn') = h_1(n)h_1(n') + f_0(n') \cdot h_1(n) + h_1(n') \cdot f_0(n)$ ve

$h_1(n + n') = h_1(n) + h_1(n')$,

her $m, m' \in M$ için

$$\partial_2 h_2(mm') = -h_1\partial_1 m' \cdot f_0\partial_1 m - f_0\partial_1 m' \cdot h_1\partial_1 m + f_1 m(h_1\partial_1 m' + \partial_2 h_2 m') +$$
$$f_1 m'(h_1\partial_1 m + \partial_2 h_2 m) + h_1\partial_1 m \partial_2 h_2 m' + \partial_2 h_2 m h_1 \partial_1 m' + \partial_2(h_2(m)h_2(m'))$$

ve

$$h_2(m + m') = h_2 m + h_2 m',$$

her $l, l' \in L$ için

$$h_2(\partial_2 l \partial_2 l') = f_2 l h_2 \partial_2 l' + n l' h_2 \partial_2 l + h_2 \partial_2 l h_2 \partial_2 l',$$
$$\partial_2 h_2(n \cdot m) = -h_1\partial_1(n \cdot m) + f_0 n \cdot h_1 \partial_1 m + f_0 n \cdot \partial_2 h_2(m),$$
$$h_2\partial_2(n \cdot l) = f_0 n \cdot h_2 \partial_2 l$$

yukarıdaki şartları sağlayan $h = (h_1, h_2)$ morfizmine kuadratik f-derivasyonu denir.

Önerme 7.1.1 Yukarıdaki gibi bir homotopi verildiğinde
Her $n \in N, m \in M, l \in L$ için

$$f'_0(n) = f_0(n) + \partial_1 h_1(n),$$
$$f'_1(m) = f_1(m) + h_1\partial_1(m) + \partial_2 h_2(m),$$
$$f'_2(l) = f_2(l) + h_2\partial_2(l)$$

formülleri $f' : A \to A'$ şeklinde bir kuadratik modül morfizmi verir.

İspat: Öncelikle f' nün bir cebir morfizmi olduğunu gösterelim. h ve f ile birlikte aşağıdaki diyagramı elde ederiz.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"] \arrow[dl, "h_2"] & N \arrow[d, "f_0"] \arrow[dl, "h_1"] \\
L' \arrow[r, "\partial'_2"'] & M' \arrow[r, "\partial'_1"'] & N'
\end{tikzcd}$$

Burada her $n, n' \in N$ için

$$\begin{aligned}
f_0'(nn') &= f_0(nn') + \partial_2 h_1(nn') \\
&= f_0(n)f_0(n') + \partial_1(h_1(n)h_1(n') + f_0(n') \cdot h_1(n) + h_1(n') \cdot f_0(n)) \\
&= f_0(n)f_0(n') + \partial_1 h_1(nn') + \partial_1(f_0(n') \cdot h_1(n)) + \partial_1(h_1(n') \cdot f_0(n)) \\
&= f_0(n)f_0(n') + \partial_1 h_1(nn') + f_0(n')\partial_1(h_1(n)) + \partial_1(h_1(n'))f_0(n) \\
&= (f_0(n) + \partial_1 h_1(n))(f_0(n') + \partial_1 h_1(n')) \\
&= f_0'(n)f_0'(n'),
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f_0'(n + n') &= f_0(n + n') + \partial_1 h_1(n + n') \\
&= f_0(n) + f_0(n') + \partial_1 h_1(n) + \partial_1 h_1(n') \\
&= f_0'(n) + f_0'(n')
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla f_0' bir cebir homomorfizmidir. Benzer şekilde her $m, m' \in M$ için

$$\begin{aligned}
f_1'(mm') &= f_1(mm') + h_1\partial_1(mm') + \partial_2 h_2(mm') \\
&= f_1(m)f_1(m') + h_1\partial_1(m)h_1\partial_1(m') + f_0\partial_1 m' h_1\partial_1 m + h_1\partial_1 m' f_0\partial_1 m + \partial_2 h_2(mm') \\
&= f_1'(m)f_1'(m')
\end{aligned}$$

olup f_1' bir cebir homomorfizmidir. Ayrıca her $l, l' \in L$ için

$$\begin{aligned}
f_2'(ll') &= f_2(ll') + h_2\partial_2(ll') \\
&= f_2(l)f_2(l') + h_2(\partial_2(l)\partial_2(l')) \\
&= f_2(l)f_2(l') + f_2(l)h_2\partial_2(l') + h_2\partial_2(l)f_2(l') + h_2(\partial_2 l)h_2(\partial_2 l') \\
&= f_2'(l)f_2'(l'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2'(l+l') &= f_2(l+l') + h_2\partial_2(l+l') \\ &= f_2(l) + f_2(l') + h_2(\partial_2(l) + \partial_2(l')) \\ &= f_2'(l) + f_2'(l') \end{aligned}$$

olduğundan f_2' bir cebir homomorfizmidir.

Şimdi de f_1' in bir nil(2)-modül morfizmi olduğunu gösterelim. Her $n \in N$ ve $m \in M$ için

$$\begin{aligned} f_1'(n \cdot m) &= f_1(n \cdot m) + h_1\partial_1(n \cdot m) + \partial_2 h_2(n \cdot m) \\ &= f_0(n) \cdot f_1(m) + h_1\partial_1(n \cdot m) + \partial_2 h_2(n \cdot m) \\ &= f_0(n) \cdot f_1(m) + h_1\partial_1(n \cdot m) - h_1\partial_1(n \cdot m) + f_0(n) \cdot h_1\partial_1(m) + f_0(n) \cdot \partial_2 h_2(m) \\ &= f_0(n) \cdot (f_1(m) + h_1\partial_1(m) + \partial_2 h_2(m)) \\ &= f_0(n) \cdot f_1'(m). \end{aligned}$$

olup f_1', N nin M üzerindeki etkisini korur. Son olarak f_2' in bir kuadratik modül morfizmi olduğunu gösterelim. Her $n \in N$ ve $l \in L$ için

$$\begin{aligned} f_2'(n \cdot l) &= f_2(n \cdot l) + h_2\partial_2(n \cdot l) \\ &= f_0(n) \cdot f_2(l) + f_0(n) \cdot h_2\partial_2(l) \\ &= f_0(n) \cdot (f_2(l) + h_2\partial_2(l)) \\ &= f_0(n) \cdot f_2'(l) \end{aligned}$$

olur ve böylece f' bir kuadratik modül morfizmi olmuş olur. □

7.2 Kuadratik Kompleksler için Homotopi

Gruplar üzerinde kuadratik kompleks tanımı ilk olarak Baues tarafından [11] de verilmiştir. Baues kuadratik kompleks tanımını verdikten sonra, kuadratik kompleksler kategorisinden çaprazlanmış kompleksler kategorisine giden funktoru oluşturmuştur. Ulualan, [34], değişmeli cebirlerde kuadratik kompleks tanımını aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 7.2.1

$$\begin{tikzcd} & & & C_1 \otimes C_1 \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & & \\ \sigma : \ldots \arrow[r, "d_4"] & \sigma_3 \arrow[r, "d_3"] & \sigma_2 \arrow[r, "d_2"] & \sigma_1 \arrow[r, "d_1"] & \sigma_0 \arrow[r] & \pi \end{tikzcd}$$

k-cebirler kompleksi

$$\pi = \sigma_0/\text{gör}(d_1)$$

ve

$$C_1 = \sigma_1^{cr}/(\sigma_1^{cr})^2$$

olmak üzere, eğer,

i) $n \geq 2$ için $d_{n-1}d_n = 0$ dır, (ω, d_2, d_1) bir kuadratik modül;

ii) $n \geq 1$ için, σ_n ler birer σ_0-modüldürler, $n > 2$ için $d_1(\sigma_1)$ nin σ_n ler üzerine etkisi sıfır;

özellikleri sağlanıyor ise σ ya bir **kuadratik kompleks** denir ve $\sigma = \{\sigma_n, d_n, \omega\}$ ile gösterilir.

Bir $f : \sigma \to \sigma'$ kuadratik kompleks morfizmi, her bir n için $f_n : \sigma_n \to \sigma'_n$ şeklindeki f_n bileşenlerinden oluşan cebir homomorfizmlerinin $\{f_n\}$ ailesinden oluşur. Öyle ki,

$$\begin{tikzcd} \sigma_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n"'] & \sigma'_n \arrow[d, "d'_n"] \\ \sigma_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] & \sigma'_{n-1} \end{tikzcd}$$

diyagramı her bir n için değişmelidir. Ayrıca, f_n ler σ_0 ın etkisine göre f_0-eşdeğişiktir(equivariant). Buradaki (f_2, f_1, f_0) ise kuadratik modül morfizmidir. Kuadratik kompleksler kategorisini **KKomp** ile göstereceğiz.

σ ve σ' iki kuadratik kompleks olsunlar. $f : \sigma' \to \sigma$ bir kuadratik kompleks morfizmi olsun. Kuadratik f-derivasyonu dönüşümler serisinden oluşur öyle ki; $h_i : \sigma'_i \to \sigma_{i+1}$ ve (h_2, h_1) bir kuadratik f-derivasyonudur. Diğer tüm dönüşümler $n = 3$ için σ'_1-bilineer, $n \geq 4$ için $\sigma'_1/\partial\sigma_2$-bilineerdir. Eğer iki kuadratik kompleks morfizmi $f, f' : \sigma' \to \sigma$ arasında bir kuadratik f-derivasyon varsa ve aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu morfizmlere homotopiktir, denir.

$$f'_1(c) = f_1(c) + \partial h_1(c), \quad f'_n(c) = f_2(c) + h_{n-1}\partial c + \partial h_n c.$$

[14] de Brown ve Higgins homotopi fikrini n-fold homotopilere genişletmiştir. Bu manada iki kuadratik kompleks B ve C arasındaki 0-fold homotopi basitce B ve C arasında bir $B \to C$ morfizmdir. $n \geq 1$ için n-fold homotopi $B \to C$ bir (h, f) ikilisidir ki burada $f : B \to C$ bir kuadratik kompleks morfizmi ve h ise B den C ye n. dereceden dönüşümdür, yani $h : B_k \to C_{k+n}$ olur. 1-fold homotopi bizim yukarıda tanımladığımız homotopidir. X bir kuadratik kompleks olsun. Herhangi bir kuadratik kompleks C için $PC = Kuad(X, C)$ eşitliğinde P, $Kuad$ kategorisinde bir funktor olur. Bu durumda $p^0, p^1 : P \to d_{Kuad}$ ve $s : d_{Kuad} \to P$ doğal transformasyonları öyle ki; $p^0 s = p^1 s = d_{Kuad}$ olacak şekilde vardır.

Böylece $\mathbf{P} = (P : p^0, p^1, s)$ dörtlüsü Kamps [26]' a göre bir cohomotopi oluşturur. Kamps a göre P cohomotopi sistemi $Kuad$ ta morfizmler arası bir homotopi tanımlar. Bu homotopi fikri [26] da olduğu gibi homotopi denkliğine; Hurewicz fibration ve Hurewicz cofibration a yol açar. Kamps ı takip ederek ve uzaylar için bilinen benzer yolları kullanarak aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 7.2.2 Herhangi bir kuadratik modül morfizmi $f : B \to C$ için aşağıdaki gibi bir çarpanlara ayrılma vardır ki;

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j"'] & & C \\
& B \times_C PC \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

burada q bir hurewicz fibrasyonu dir ve j de bir kuvvetli deformasyon çekilme morfizmi, yani homotopi denkliktir.

7.3 Kuadratik 2-Modüllerin Homotopisi

Bu bölümde daha önce kuadratik modüller için tanımlanan homotopi kavramını ikinci boyuta taşıyarak kuadratik 2-modüllerde homotopi kavramını inceleyeceğiz.

$$\begin{tikzcd}
& D\otimes D \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & & \\
A : K \arrow[r, "\partial_3"'] & L \arrow[r, "\partial_2"'] & M \arrow[r, "\partial_1"'] & N, \\
& & C\otimes C \arrow[ul, "\omega"] \arrow[u, "w"'] &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
& D'\otimes D' \arrow[dl, "\omega'_2"'] \arrow[d, "w'_2"] & & \\
A' : K' \arrow[r, "\partial'_3"'] & L' \arrow[r, "\partial'_2"'] & M' \arrow[r, "\partial'_1"'] & N' \\
& & C\otimes C \arrow[ul, "\omega"] \arrow[u, "w"'] &
\end{tikzcd}$$

iki kuadratik 2-modül ve $g = (f_3, f_2, f_1, f_0) : A \to A'$ bir kuadratik 2-modül morfizmi olsun. g üzerinde homotopi bir $h = (h_3, h_2, h_1)$ üçlüsüdür. Burada $h_1 : N \to M'$, $h_2 : M \to L'$, $h_3 : L \to K'$ aşağıdaki şartları sağlarlar.

Her $n \in N$, $m, m' \in M$ ve $l, l' \in L$ için

$h_1(nn') = h_1(n)h_1(n') + f_0(n') \cdot h_1(n) + h_1(n') \cdot f_0(n)$

$h_1(n + n') = h_1(n) + h_1(n')$

$\partial_2 h_2(mm') = -h_1\partial_1 m' \cdot f_0\partial_1 m - f_0\partial_1 m' \cdot h_1\partial_1 m + f_1 m(h_1\partial_1 m' + \partial_2 h_2 m')$

$\quad + f_1 m'(h_1\partial_1 m + \partial_2 h_2 m) + h_1\partial_1 m \partial_2 h_2 m' + \partial_2 h_2 m h_1 \partial_1 m' + \partial_2(h_2(m)h_2(m'))$

$h_2(m + m') = h_2 m + h_2 m'$

$h_2(\partial_2 l \partial_2 l') = f_2 l h_2 \partial_2 l' + n l' h_2 \partial_2 l + h_2 \partial_2 l h_2 \partial_2 l'$

$\partial_2 h_2(n \cdot m) = -h_1\partial_1(n \cdot m) + f_0 n \cdot h_1\partial_1 m + f_0 n \cdot \partial_2 h_2(m)$

$h_3(\partial_3 l \partial_3 l') = f_3 k h_3 \partial_3 k' + n k' h_3 \partial_3 k + h_3 \partial_3 k h_3 \partial_3 k'$

$\partial_3 h_3(n \cdot l) = -h_2 \partial_2(n \cdot l) + f_0 n \cdot h_2 \partial_2 l + f_0 n \cdot \partial_3 h_3(l)$

$h_3 \partial_3(n \cdot k) = f_0 n \cdot h_3 \partial_3 k$

$\partial_3 h_3(ll') = -h_2(\partial_2 l \partial_2 l') + f_2 l h_2 \partial_2 l' + f_2 l \partial_3 h_3 l' + h_2 \partial_2 l f_2 l' + h_2 \partial_2 l h_2 \partial_2 l' + h_2 \partial_2 l \partial_3 h_2 l' + \partial_3 h_3 l f_2 l' + \partial_3 h_3 l h_2 \partial_2 l' + \partial_3 h_3 l \partial_3 h_3 l'$

Bu h morfizmine kuadratik 2-f-derivasyonu denir.

Önerme 7.3.1 Yukarıdaki gibi bir homotopi verildiğinde

Her $n \in N, m \in M, l \in L$ için

$f_0'(n) = f_0(n) + \partial_1 h_1(n)$

$f_1'(m) = f_1(m) + h_1 \partial_1(m) + \partial_2 h_2(m)$

$f_2'(l) = f_2(l) + h_2 \partial_2(l) + \partial_3 h_3(l)$

$f_3'(k) = f_3(k) + h_3 \partial_3(k)$

eşitlikleri ile verilen $f' : A \to A'$ kuadratik 2-modül morfizmi olur.

İspat: Öncelikle f' nün bir cebir morfizmi olduğunu gösterelim. h ve f ile birlikte aşağıdaki diyagramı elde ederiz.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\partial_3"] \arrow[d, "f_3"'] & L \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dl, "h_3"] & M \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"] \arrow[dl, "h_2"] & N \arrow[d, "f_0"] \arrow[dl, "h_1"] \\
K' \arrow[r, "\partial_3'"'] & L' \arrow[r, "\partial_2'"'] & M' \arrow[r, "\partial_1'"'] & N'
\end{tikzcd}$$

Burada $n, n' \in N$ için

$$\begin{aligned}
f_0'(nn') &= f_0(nn') + \partial_2 h_1(nn') \\
&= f_0(n) f_0(n') + \partial_1(h_1(n) h_1(n') + f_0(n') \cdot h_1(n) + h_1(n') \cdot f_0(n)) \\
&= f_0(n) f_0(n') + \partial_1 h_1(nn') + \partial_1(f_0(n') \cdot h_1(n)) + \partial_1(h_1(n') \cdot f_0(n)) \\
&= f_0(n) f_0(n') + \partial_1 h_1(nn') + f_0(n') \partial_1(h_1(n)) + \partial_1(h_1(n')) f_0(n) \\
&= (f_0(n) + \partial_1 h_1(n))(f_0(n') + \partial_1 h_1(n')) \\
&= f_0'(n) f_0'(n'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0'(n+n') &= f_0(n+n') + \partial_1 h_1(n+n') \\ &= f_0(n) + f_0(n') + \partial_1 h_1(n) + \partial_1 h_1(n') \\ &= f_0'(n) + f_0'(n') \end{aligned}$$

olup f_0' bir cebir homomorfizmidir. Her $m, m' \in M$ için

$$\begin{aligned} f_1'(mm') &= f_1(mm') + h_1\partial_1(mm') + \partial_2 h_2(mm') \\ &= f_1(m)f_1(m') + h_1\partial_1(m)h_1\partial_1(m') + f_0\partial_1 m' h_1\partial_1 m + h_1\partial_1 m' f_0\partial_1 m + \partial_2 h_2(mm') \\ &= f_1'(m)f_1'(m') \end{aligned}$$

olup f_1' bir cebir homomorfizmidir. Ayrıca her $l, l' \in L$ için

$$\begin{aligned} f_2'(ll') &= f_2(ll') + h_2\partial_2(ll') + \partial_3 h_3(ll') \\ &= f_2(l)f_2(l') + h_2(\partial_2(l)\partial_2(l')) + \partial_3 h_3(ll') \\ &= f_2'(l)f_2'(l') \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_2'(l+l') &= f_2(l+l') + h_2\partial_2(l+l') + \partial_3 h_3(l+l') \\ &= f_2(l) + f_2(l') + h_2(\partial_2(l) + \partial_2(l')) + \partial_3(h_3(l) + h_3(l')) \\ &= f_2'(l) + f_2'(l') \end{aligned}$$

olup f_2' bir cebir homomorfizmidir. Son olarak her $k, k' \in K$ için

$$\begin{aligned} f_3'(kk') &= f_3(kk') + h_3\partial_3(kk') \\ &= f_3(k)f_3(k') + h_3(\partial_3(k)\partial_3(k')) \\ &= f_3'(k)f_3'(k') \end{aligned}$$

olup f_3' bir cebir homomorfizmidir. Şimdi de f_1' in bir nil(2)-modül morfizmi olduğunu gösterelim. Her $n \in N$ ve $m \in M$ için

$$\begin{aligned}
f_1'(n \cdot m) &= f_1(n \cdot m) + h_1\partial_1(n \cdot m) + \partial_2 h_2(n \cdot m) \\
&= f_0(n) \cdot f_1(m) + h_1\partial_1(n \cdot m) + \partial_2 h_2(n \cdot m) \\
&= f_0(n) \cdot f_1(m) + h_1\partial_1(n \cdot m) - h_1\partial_1(n \cdot m) + f_0(n) \cdot h_1\partial_1(m) + f_0(n) \cdot \partial_2 h_2(m) \\
&= f_0(n) \cdot (f_1(m) + h_1\partial_1(m) + \partial_2 h_2(m)) \\
&= f_0(n) \cdot f_1'(m)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca f_2' de bir nil(2)-modül morfizmidir. Çünkü Her $n \in N$ ve $l \in L$ için

$$\begin{aligned}
f_2'(n \cdot l) &= f_2(n \cdot l) + h_2\partial_2(n \cdot l) + \partial_3 h_3(n \cdot l) \\
&= f_0(n) \cdot f_2(l) + f_0(n) \cdot h_2\partial_2(l) + f_0(n) \cdot \partial_3 h_3(l) \\
&= f_0(n) \cdot (f_2(l) + h_2\partial_2(l) + \partial_3 h_3(l)) \\
&= f_0(n) \cdot f_2'(l)
\end{aligned}$$

ve $k \in K$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
f_3'(n \cdot k) &= f_3(n \cdot k) + h_3\partial_3(n \cdot k) \\
&= f_0(n) \cdot f_3(k) + f_0(n) \cdot h_3\partial_3(k) \\
&= f_0(n) \cdot (f_3(k) + h_3\partial_3(k)) \\
&= f_0(n) \cdot f_3'(k)
\end{aligned}$$

olur ve böylece f' bir kuadratik 2-modül morfizmi olmuş olur. □

7.4 Kuadratik 2-Kompleksler için Homotopi

Burada kuadratik 2-kompleks tanımı verilip, kuadratik 2-kompleks morfizmleri için homoyopi oluşturulacaktır. Son olarak kuadratik 2-komplekslerden çaprazlanmış komplekslere giden funktor elde edilecektir.

Tanım 7.4.1

$$\begin{tikzcd}
 & & C_2 \otimes C_2 \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & C_1 \otimes C_1 \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & & \\
\sigma : ...\sigma_4 \arrow[r, "d_4"] & \sigma_3 \arrow[r, "d_3"] & \sigma_2 \arrow[r, "d_2"] & \sigma_1 \arrow[r, "d_1"] & \sigma_0 \arrow[r] & \pi
\end{tikzcd}$$

k-cebirler kompleksi

$$\pi = \sigma_0/\text{gör}(d_1)$$

ve

$$C_1 = \sigma_1^{cr}/(\sigma_1^{cr})^2,$$

$$C_2 = \sigma_2^{cr}/(\sigma_2^{cr})^2$$

olmak üzere, eğer,

i) $n \geq 2$ için $d_{n-1}d_n = 0$ dır, $(\omega_2, \omega, d_3, d_2, d_1)$ bir kuadratik 2-modül;

ii) $n \geq 1$ için, σ_n ler birer σ_0-modüldürler, $n > 3$ için $d_1(\sigma_1)$ nin σ_n ler üzerine etkisi sıfır;

özellikleri sağlanıyor ise σ ya bir **kuadratik** 2-**kompleks** denir ve $\sigma = \{\sigma_n, d_n, \omega_2, \omega\}$ ile gösterilir.

Bir

$$f : \sigma \to \sigma'$$

kuadratik kompleks morfizmi, her bir n için $f_n : \sigma_n \to \sigma'_n$ şeklindeki f_n bileşenlerinden oluşan cebir homomorfizmlerinin $\{f_n\}$ ailesinden oluşur. Öyle ki,

$$\begin{tikzcd}
\sigma_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n"'] & \sigma'_n \arrow[d, "d'_n"] \\
\sigma_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] & \sigma'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

diyagramı her bir n için değişmelidir. Ayrıca, f_n ler σ_0 ın etkisine göre f_0-eşdeğişiktir. Buradaki (f_3, f_2, f_1, f_0) ise kuadratik 2-modül morfizmidir. Kuadratik 2-kompleksler kategorisini $\mathbf{K_2Komp}$ ile göstereceğiz.

A ve C iki kuadratik 2-kompleks olsunlar. $f : C \to A$ bir kuadratik 2-kompleks morfizmi olsun. Kuadratik 2-f-derivasyonu bir dönüşümler serisidir, öyle ki; $h_i : C_i \to A_{i+1}$ ve (h_3, h_2, h_1) bir kuadratik 2-f-derivasyonudur. Diğer tüm dönüşümler $n = 4$ için C_1-biliner, $n \geq 5$ için $C_1/\partial C_2$-bilineerdir. Eğer iki morfizm $f, f' : C \to A$ arasında bir kuadratik 2-f-derivasyon varsa ve aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu iki morfizme homotopiktir, denilir.

$$f_1'(c) = f_1(c) + \partial h_1(c), \qquad f_n'(c) = f_2(c) + h_{n-1}\partial c + \partial h_n c.$$

Şimdi de kuadratik 2-modüller kategorisinden çaprazlanmış modüller kategorisine giden funktoru oluşturacağız.

$$\begin{tikzcd}
 & & D \otimes D \arrow[dl, "\omega_2"'] \arrow[d, "w_2"] & C \otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\
\cdots \arrow[r, "d_4"] & \sigma_3 \arrow[r, "d_3"] & \sigma_2 \arrow[r, "d_2"] & \sigma_1 \arrow[r, "d_1"] & \sigma_0
\end{tikzcd}$$

diyagramı bir kuadratik 2-kompleks olsun. Bu kuadratik 2-kompleksten

$$\cdots \to C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

şeklinde bir çaprazlanmış kompleks elde edeceğiz. Buna göre $C_0 = \sigma_0$ ve

$$C_1 = \sigma_1 / w(C \otimes C)$$

$$C_2 = \sigma_2 / w_2(D \otimes D)\omega(C \otimes C)$$

$$C_3 = \sigma_3 / \omega_2(D \otimes D)$$

olmak üzere $q_1 : \sigma_1 \to C_1$, $q_2 : \sigma_2 \to C_2$ ve $q_3 : \sigma_3 \to C_3$ şeklindeki bölüm homomorfizmlerini göz önüne alalım. $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ homomorfizmlerini $n = 1, 2, 3$ için

$$\partial_1 q_1 = d_1, \partial_2 q_2 = d_2 \text{ ve } \partial_3 q_3 = d_3$$

şeklinde alalım. $n \geq 4$ için ise $\partial_n = d_n$ olsun. Bu durumda, $n \geq 4$ için $C_n = \sigma_n$ olmak üzere,

$$\cdots \longrightarrow C_4 \xrightarrow{\partial_4} \sigma_3/\omega_2(D \otimes D) \xrightarrow{\partial_3} \sigma_2/w_2(D \otimes D)/\omega(C \otimes C) \xrightarrow{\partial_2} \sigma_1/w(C \otimes C) \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

kompleksini elde ederiz. Bu kompleks bir çaprazlanmış komplekstir. Böylece kuadratik 2-kompleksler kategorisinden çaprazlanmış modüller kategorisine giden funktor oluşturmuş oluruz.

Kaynakça

[1] Z. Arvasi, Applications in Commutative Algebra of the Moore complex of a Simplicial Algebra, *Ph.D. Thesis*, University of Wales, Bangor, (1994).

[2] U. E. Arslan, Z. Arvasi and G. Onarli , Induced two-crossed modules, *Preprint*

[3] Z. Arvasi and E. Ulualan, Quadratic and 2-crossed modules of algebras, *Algebra Colloquium* 14 : 4 669-686 (2007).

[4] Z. Arvasi and E.Ulualan, On Algebraic Models For Homotopy 3-types, *Journal of Homotopy and Related Structures*, **1**, 1-27, (2006).

[5] Z. Arvasi, T. S. Kuzpinari, and E. Ö. Uslu, Three-crossed Modules, *Homology Homotopy Appl.*, **11**, 161-187, (2009).

[6] Z. Arvasi and T. Porter, Higher dimensional Peiffer elements in simplicial commutative algebras, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 3, No. **1**, pp 1-23, (1997).

[7] Z. Arvasi and T. Porter, Freeness conditions for 2-crossed module of commutative algebras, *Applied Categorical Structures*, **6**, pp 455-477,

(1998).

[8] Z. Arvasi and T. Porter, Simplicial and crossed resolution of com mutative algebras, *Journal of Algebra*, **181**, 426-448, (1996).

[9] Andrei Radulescu-Banu, Cofibrations in Homotopy Theory,43, (2009), 152 pages

[10] H.J. Baues, Combinatorial homotopy and 4-dimensional complexes, *Walter de Gruyter*, **15**, 380 pages, (1991).

[11] H.J. Baues, Algebraic homotopy, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics,* 15, (1998), 450 pages.

[12] H.J. Baues and B.Bleile Presentation of homotopy types under space, (2010), preprint.

[13] R. Brown and P.J. Higgins, The classifying space of a crossed complex, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, (**110**), 95-120, (1991).

[14] R. Brown and P.J.Higgins, Tensor Products and Homotopies for ω-groupoids and Crossed Complexes, *J.P.A.A* 47, 11-44 (1987)

[15] R. Brown, P.J.Higgins and R. Sivera, Non-abelian algebraic Topology, (2010), 606 pages.

[16] R. Brown and P.J.Higgins, Colimit Theorems for Relative Homotopy Groups, *J.P.A.A* 22, 11-44 (1981)

[17] R. Brown and M. Golanski, A model structure for the homotopy theory of crossed complexes. Cah. Top. Géom. Diff. Cat, 11, 30 (1989) 61-82.

[18] R. Brown and İ. İçen, Homotopies and automorphisms of crossed modules over groupoids. *Appl. Categorical Structure*, 11, pp 185-206 (2003)

[19] R. Brown and R. Sivera, Algebraic colimit calculations in homotopy theory using fibred and cofibred categories, *Theory and Applications of Categories*, 22 (2009) 222-251.

[20] P. Carrasco and A.M. Cegarra, Group-theoretic algebraic models for ho motopy types, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **75**, pp 195-235, (1991).

[21] J.M. Casas and M. Ladra, Colimits in the crossed modules category in Lie algebras, *Georgian Mathematical Journal*, V7 N3, 461-474, 2000.

[22] D. Conduché, Modules croisés gé néralisés de longueur 2, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **34**, pp 155-178, (1984).

[23] E.B. Curtis, Simplicial Homotopy Theory, *Adv. in Math.* vol.6, 107-209 (1971).

[24] J.Dauns, Modules and Rings. *Cambridge university Press*, 442 pages, (1994)

[25] A.R.Grandjeán and M.J.Vale, 2-Modulos Cruzados an la Cohomologia de André-Quillen. *Memorias de la Reai Academia de Ciencias*, 22, (1986).

[26] K.H.Kamps, Kan-Bedingungen und abstrakte Homotopie theorie, *Math. Z.*, **124**, pp 215-236, (1972).

[27] T.S.Kuzpınarı, A.Odabaş and E.Ö. Uslu, On 3-crossed module of alge bras. *arxiv.org*, 11, 16 pages, (2010)

[28] Joao Faria Martin, Homotopies of 2-crossed complexes and the homo topy category of pointed 3-types, (2011), 46 pages

[29] M.S.Nizar, Algebraic and categorical structures of category of crossed modules of algebras, *Ph.D. Thesis*, University of Wales,(1992).

[30] D.Quillen, Lecture Notes in Math.. *Homotopical Algebra*, 11, pp 185-206 (1967)

[31] T. Porter, Some categorical results in the theory of crossed modules in commutative algebras, *J.Algebra* 109 415-429, (1987).

[32] T. Porter, Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles *J.Algebra* 99, 458-465, (1986).

[33] T. Porter, Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles *J.Algebra* 99, 458-465, (1986).

[34] E. Ulualan, Değişmeli cebirler üzerinde kuadratik modüller, *Ph.D. The sis*, Osmangazi Üniversitesi, (2004).

[35] J.H.C. Whitehead, Combinatorial homotopy II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55**, pp 453-496, (1949).

ÖZGEÇMİŞ

Hasan Atik 15 Ocak 1974 tarihinde Kayseri'de doğmuştur. Lisans eğitimine 1990 yılında Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünde başlamış ve 1995 yılında mezun olmuştur. 1995-2010 yılları arasında yurt içi ve yurt dışında çeşitli özel eğitim kurumlarında matematik öğretmenliği görevini yapmıştır. 2008 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde doktora eğitimine başlamıştır. 2010 yılından itibaren Melikşah Üniversitesi Matematik Bölümünde Öğretim Görevlisi olarak çalışan Hasan Atik, evli ve üç çocuk babasıdır.