Öklid Uzayında Basit Jeodezikli Yüzeyler ve Altmanifoldlar

Emre Öztürk

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ağustos 2012

Surfaces and Submanifolds in Euclidean Space with Simple Geodesics

Emre Öztürk

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Science

August 2012

Öklid Uzayında Basit Jeodezikli Yüzeyler ve Altmanifoldlar

Emre Öztürk

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Cumali Ekici

Ağustos 2012

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Emre Öztürk' ün YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Öklid Uzayında Basit Jeodezikli Yüzeyler ve Altmanifoldlar" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Cumali Ekici

İkinci Danışman : --

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye : Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ

Üye : Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI

Üye : Doç. Dr. Kürşat YENİLMEZ

Üye : Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın amacı, 4-boyutlu Öklid uzaylarında basit jeodezikli yüzeyler ve altmanifoldlar için bazı karakterizasyonları incelemektir. Young Ho Kim ve Eun Kyoung Lee tarafından yayınlatılan "Surfaces of Euclidean 4-space whose geodesics are W-curves" ile Dirk Ferus ve Stephan Schirrmacher tarafından yayınlatılan "Submanifolds in Euclidean space with simple geodesics" çalışmalarında verilen teoremler detaylı bir şekilde incelenmiştir. Çalışmanın giriş bölümünde, konunun tarihsel gelişimi ve uygulama alanları ifade edilmiştir. Bir sonraki bölümde de çalışmada kullanılan temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, basit jeodezikli altmanifoldların, n-boyutlu ve 4-boyutlu Öklid uzaylarındaki karakterizasyonları üzerinde durulmuştur. Ayrıca rankı çift olan W-eğrilerinin parametrik denklemi elde edilerek bazı W-eğrilerinin rankı incelenmiştir.

Çalışmanın son bölümünde, 4-boyutlu Öklid uzayında basit jeodezikli yüzeyler incelenmiştir. Bu bölümde helikal yüzeylerin jeodeziklerinin ve Blaschke manifoldunun karakterizasyonları ifade edilerek tam ve kompakt irtibatlı yüzeylerin 4-boyutlu Öklid uzayındaki karşılıkları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Altmanifold, Blaschke manifoldu, jeodezik, W-eğrisi, rank

SUMMARY

The aim of this study which consist of four sections is to examine some characterizations for surfaces and submanifolds with simple geodesics in n-dimensional and four dimensional Euclidean spaces. Theorems given in both of the papers such as "Surfaces of Euclidean 4-space whose geodesics are W-curves" by Kim and Lee and "Submanifolds in Euclidean space with simple geodesics" by Ferus and Schirrmacher have been studied in detail in this work. In the introduction, the historical development and applications of subject have been explained. Basic concepts and theorems required in this work have been given in the following section.

The characterization of submanifolds with simple geodesics in n-dimensional and 4-dimensional Euclidean spaces has been emphasized in the third chapter. Also, having obtained parametric equation of W-curve with even rank, rank of some W-curves has been examined at this chapter.

In the last chapter, surfaces with simple geodesisc in 4-dimensional Euclidean space have been examined. In this section characterization of geodesics of helical surfaces and Blaschke manifold have been expressed and the correspondings of complete, compact and connected surfaces in 4-dimensional Euclidean space are presented.

Key words: Submanifold, Blaschke manifold, geodesic, W-curve, rank

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada, akademik anlamda bilgi ve fikirleriyle bana yön vererek çalışmalarımda yardımcı olan danışmanım

Sayın Doç. Dr. Cumali Ekici

hocama, çalışma süresince bazı makalelere ulaşmamda yardımcı olan

Sayın Yrd. Doç. Dr. Günay Öztürk

hocaya ve her türlü desteği esirgemeden fedakarlıkta bulunan aileme teşekkür ederim.

Eskişehir 2012 Emre Öztürk

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simge	**Anlamı**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{E}^n$	$n-$ boyutlu Öklid uzay
F_*	Türev dönüşümü
R	Riemann eğrilik tensörü
f	İzometrik immersiyon
g	Metrik tensör
h	İkinci temel form
ξ	Birim normal vektör
exp	Üstel dönüşüm
$\wedge$	Vektörel çarpım
$[,]$	Lie parantez operatörü
$\nabla, \widetilde{\nabla}$	Manifold üzerinde koneksiyonlar
$\nabla^{\perp}$	Normal koneksiyon
$\overline{\nabla}$	İkinci temel formun koneksiyonu
TM	Tanjant demeti
$T^{\perp}M$	Normal demet
A_ξ	Şekil operatörü
$\perp_p^f M$	Dik uzay
Λ	Link (Bağlantı)

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Snellius, Picard, Cassini ve birçok seçkin fransız bilim adamının çalışmaları sonucunda 17. yüzyılda doğan jeodezi, ilk başlarda özellikle harita çiziminde kullanılmıştır. 19. yüzyılda Bessel dünyanın şeklini elipsoid dönme ile açıklamaya çalışmış, Jacobi jeodezik eğriler olarak önerdiği elipsoid dönme üzerindeki en kısa eğrileri incelemiştir. Ayrıca en kısa eğri terimi daha öncesinde Johannes Bernoulli ve Carl Friedrich Gauss tarafından da kullanılmıştır. Jeodezi bilimi açısından elipsoidden kasıt elipsoid dönmelerdir. Dünya kutuplardan basık olduğundan elipsoid yüzey şeklini almıştır. Bu yüzden dünya yüzeyi üzerindeki hareketler için elipsoid dönme adını vermek doğal olacaktır.

Klasik jeodezinin alanı, doğrudan görülen noktalardan oluşmuş ağları saptamakla sınırlıydı. Ancak ilk yapay uyduların fırlatılması başka ölçümlerin yapılmasını sağlamış, böylece uzay jeodezisi adında, jeodezik gökbilime bağlı yeni bir inceleme alanı doğmuştur. Uzay jeodezisi, yer yüzeyinin yeterince uzağındaki bir noktanın jeodezik parametrelerinin saptanmasını sağlayan ölçüm ve işleme teknikleri ile ilgilenen bir bilim dalıdır. Uzay jeodezisinin başlıca araştırma alanları, üçgenleme yöntemi, yükseklik-uzaklık ölçümü, gravimetrizasyon olarak verilebilir. Üçgenleme denizcilik alanında yön ve uzaklık tayini için kullanılan bir tekniktir. Bu teknik bir üçgenin iki açısı ve bir kenar uzunluğu yardımıyla bilinen kenara ait yüksekliğin bulunması esasına dayanır. Üçgenleme metodu ayrıca haritalama alanında da kullanılmaktadır. Gravimetrizasyon, yerçekim vektör alanının kuvvet ölçümü ile ilgilenir.

Geometri bilimi açısından jeodezi kavramına bakıldığında, karşılık olarak jeodezik veya jeodezik çizgi de denilen kavramla karşılaşmaktayız.

Jeodezik kelimesinin sözlük anlamına bakıldığında "Bir M yüzeyinin jeodezi ği, C^2 sınıfından düzgün M yüzeyine bağlı olan, sürtünmeden hareket eden ve hiçbir dış kuvvetin etkisinde kalmayan bir noktanın yörüngesidir" şeklinde karşımıza çıkmaktadır. Bir başka tanımda "Bir jeodezik, her noktasındaki asal normali, M yüzeyinin bu noktadaki normaliyle çakışacak biçimdeki yaydır" şeklinde tanımlanmıştır. Öte yandan, bir yüzey üzerinde iki nokta belirlenir ve bunları birleştiren yayların uzunluğu göz önüne alınırsa, jeodezikler bu uzunluğun değerinin ekstremumlarına karşılık gelir.

Bir düzlemin jeodezikleri doğrular, bir kürenin jeodezikleri büyük çemberler, bir koninin jeodezikleri helislerdir. Jeodezik kavramı, doğru kavramını genelleştirerek herhangi bir yüzeye uygulanmasını sağlar. Genel görelilik kuramında, serbest bir parçacığın yörüngesi, uzay-zamanı gösteren dört boyutlu Riemann uzayının bir jeodeziğidir ve jeodeziğin eğriliği geometrik olarak çekim etkilerini yansıtır. Genel görelilik kuramında partiküllerin hareketi daima jeodezik eğriler boyunca olur.

Öklid uzayındaki altmanifoldların jeodezikleri, altmanifoldu karakterize etmede önemli rol oynar. Örneğin Öklid uzayındaki bir altmanifoldun tüm jeodezikleri düzlem eğrileri ise altmanifold $n-$düzlem veya rankı 1 olan kompakt simetrik uzaya izometriktir. Böyle altmanifoldlar düzlemsel jeodezikli altmanifoldlar olarak adlandırılır (Kim, 1993 a).

Genel anlamda Öklidyen uzaydaki altmanifoldların jeodeziklerine uzay eğrileri olarak bakılabilir. Burada sorulabilecek bir soru, jeodezikler basit (simple) eğriler olduğunda altmanifoldların şekilleri için sonuçlarının ne olacağıdır. Basit olma halleri farklı yorumlar getirilerek çalışılmıştır. Örneğin bazı geometriciler basitliği düzlemsel jeodezikler olarak yorumlamış ve bu doğrultuda çalışmalar yapmıştır (Hong, 1973; Little, 1976; Sakamoto, 1977; Pak, 1978; Ferus, 1980).

Bazı geometriciler tarafından basitlik, $W-$eğrileri şeklinde yorumlanarak çalışılmıştır (Ferus and Schirrmacher, 1982; Kim and Lee, 1993; Kim, 1993 a; Ki and Kim, 1994). $W-$eğrileri sabit eğriliğe sahip Frenet eğrileridir. Bu eğriler ilk kez 1871 yılında Felix Klein ve Sophus Lie tarafından çalışılmış ve bu isim onlar tarafından kullanılmıştır.

Bu çalışmada (Ferus and Schirrmacher, 1982; Kim and Lee, 1993) makaleleri esas alınmak suretiyle, bir izometrik immersiyon altında jeodezikleri $W-$eğrileri olan yüzeylerin ve altmanifoldların bazı karakterizasyonları ve karşılıkları incelenmiştir.

BÖLÜM 2
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde konuyla ilgili ön bilgiler sunulmuş olup, konuya temel oluşturan tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir.

2.1 Öklid Uzayı

Bu kesimde Öklid uzayına ait temel tanımlar verilmiştir.

Tanım 2.1.1: A boştan farklı bir cümle V de $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir $\psi : A \times A \to V$ dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için

$$(P, Q) \to \left(\overrightarrow{PQ}\right) \in V$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

(**1**) Her $P, Q, R \in A$ noktaları için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ eşitliği sağlanır.

(**2**) Her $P \in A$ noktası ve her $\alpha \in V$ vektörü için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

(Hacısalihoğlu, 1998 a).

Tanım 2.1.2: V reel vektör uzayında $u, v \in V$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \langle , \rangle : & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \to & \langle , \rangle (u, v) = \langle u, v \rangle \end{array}$$

şeklinde bir iç çarpım fonksiyonu tanımlanabilirse, V vektör uzayına iç-çarpım uzayı denir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.3: $n-$boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olmak üzere, V ile birleştirilmiş bir A afin uzayına Öklid uzayı denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1975).

Tanım 2.1.4: $p, v \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, p noktasından $p+v$ noktasına giden yönlü doğru parçasına p noktasındaki v teğet vektörü denir ve v_p şeklinde gösterilir (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 2.1.5: A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerinin $T_A(P)$ cümlesinde toplama ve skalar ile çarpma işlemleri sırası ile

$$\begin{array}{lll} \oplus: & T_A(P) \times T_A(P) & \rightarrow & T_A(P) \\ & (\vec{v}_P, \vec{u}_P) & \rightarrow & \vec{v}_P \oplus \overrightarrow{u_P} = (\vec{v}+\vec{u})_P \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \odot: & \mathbb{R} \times T_A(P) & \rightarrow & T_A(P) \\ & (\lambda, \vec{v}_P) & \rightarrow & \lambda \odot \vec{v}_P = (\lambda \vec{v})_P \end{array}$$

şeklinde verilsin. Burada $\{T_A(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına, A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir ve kısaca $T_A(P)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1998 b).

Tanım 2.1.6: $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $\overrightarrow{v_P} \in T_{\mathbb{E}^n}(P)$ olsun. $\overrightarrow{v_P} = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere

$$\vec{v}_P[f] = \frac{d}{dt}(f(P_1 + t(Q_1 - P_1), P_2 + t(Q_2 - P_2), ..., P_n + t(Q_n - P_n))) \mid_{t=0}$$

reel sayısına f fonksiyonunun $\vec{v}_P$ vektörü yönündeki türevi denir (Hacısalihoğlu, 1998 b).

Tanım 2.1.7:

$$\begin{array}{rcl} \text{Grad:}\ C(\mathbb{E}^n,\mathbb{R}) & \rightarrow & \chi(\mathbb{E}^n) \\ f & \rightarrow & \text{Grad }(f) \end{array}$$

şeklinde verilsin. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $\mathbb{E}^n$ uzayında bir koordinat sistemi olmak üzere

$$\text{Grad }(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlı Grad fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ uzayında $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ koordinat sistemine göre gradient fonksiyonu denir ve ∇ sembolü ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1998 b).

Tanım 2.1.8: V ve W, F cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı olsun. $L : V \rightarrow W$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa, bu dönüşüme bir lineer dönüşüm denir:

(**1**) Her v_1, $v_2 \in V$ vektörleri için $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$

(**2**) Her $v \in V$ vektörü ve $\lambda \in F$ sayısı için $L(\lambda u) = \lambda L(u)$
(Taşçı, 2006).

Tanım 2.1.9: $L : V \rightarrow V$ lineer dönüşümü verilsin. $L(v) = \lambda v$ olacak biçimde bir λ sayısı ve sıfırdan farklı bir v vektörü varsa bu λ sayısına, L lineer dönüşümünün bir öz değeri denir. λ bir öz değer olmak üzere

$$L(v) = \lambda v$$

eşitliğini sağlayan her v vektörüne, L lineer dönüşümünün λ sayısına karşılık gelen bir öz vektörü denir (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 2.1.10: V bir reel vektör uzayı $a, b \in \mathbb{R}$ ve $X, Y, Z \in V$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $[,]$ dönüşümüne Lie parantez operatörü denir:

(1) $[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]\,,[Z,aX+bY]=a[Z,X]+b[Z,Y]$

(2) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$

(3) $[X,Y]=-[Y,X]$

(Lee, 2002).

2.2 Eğriler ve Yüzeyler

Bu kesimde eğri ve yüzeylere ait tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.2.1: $I\subset\mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\gamma:I\to\mathbb{E}^n$ düzgün (C^∞ sınıfından) bir γ dönüşümünün görüntü kümesine $\mathbb{E}^n$ uzayı içinde bir eğri denir (Hacısalihoğlu, 1998 b).

Tanım 2.2.2: $\gamma:(\alpha,\beta)\to\mathbb{E}^n$ parametrik bir eğri olsun. γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki hızı $\|\gamma'(t)\|$ ile verilir. Eğer her $t\in(\alpha,\beta)$ için $\gamma'(t)$ birim vektör ise γ eğrisine birim hızlı eğridir denir (Pressley, 2010).

Tanım 2.2.3: $I\subset\mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\gamma:I\to\mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. Her $t\in I$ için $\gamma'(t)\neq 0$ oluyorsa γ eğrisine bir regüler eğri denir (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 2.2.4: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{E}^3$ sürekli parametrik bir eğri olsun. $[a,b]$ kapalı aralığının

$$l(\gamma,\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{k}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$$

olacak şekilde bir

$$\mathcal{P}=\{a=t_0<t_1<...<t_k=b\}$$

parçalanışı verilsin. γ eğrisinin yay uzunluğu

$$\text{uzunluk}\,(\gamma) = \sup\left\{l\,(\gamma, \mathcal{P}) : \mathcal{P},\ [a,b]\ \text{aralığının bir parçalanışı}\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer

$$\sup l\,(\gamma, \mathcal{P}) < \infty$$

ise γ eğrisine sonlu uzunluğa sahiptir aksi takirde sonsuz uzunluğa sahiptir denir (Shifrin, 2011).

Tanım 2.2.5: Bir $c : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ eğrisi ve her $t \in \mathbb{R}$ sayısı için,

$$c(t+T) = c(t)$$

olacak şekilde bir $0 < T \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, T sayısının en küçük değerine c eğrisinin periyodu denir. Bu durumda c eğrisine de periyodiktir denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.2.6: Bir M yüzeyi üzerinde bulunan bir γ eğrisi için eğer $\gamma''(t)$ sıfır veya $\gamma''(t)$ yüzeyin $\gamma(t)$ noktasındaki tanjant düzleme dik, yani t parametresinin her değeri için birim normal vektörüne paralel ise γ eğrisine bir jeodezik eğri denir (Pressley, 2010).

Teorem 2.2.7: c ve c^* gibi iki uzay eğrisi kongrüenttir ancak ve ancak bu eğrilerin $\alpha, \alpha^* : [0, L] \to \mathbb{E}^3$ şeklinde verilen yay uzunluğu parametrizasyonları her $s \in [0, L]$ için

$$\kappa(s) = \kappa^*(s) \text{ ve } \tau(s) = \tau^*(s)$$

şartlarına sahiptir (Shifrin, 2011).

Tanım 2.2.8: Bir eğrinin sabit bir doğrultu ile her noktasındaki teğetinin yaptığı açı sabit ise bu eğriye bir eğilim çizgisi veya helis, sabit doğruya da eğilim çizgisinin ekseni veya eğilim ekseni denir (Hacısalihoğlu, 1998 a).

Tanım 2.2.9: Düzlemde verilen iki noktaya uzaklıklarının toplamı sabit olan noktaların kümesine elips denir. Verilen noktalar F_1, F_2 ve verilen sayı $\lambda \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere bu noktaların belirttiği elips

$$\left\{X \mid \frac{1}{2}\left(|XF_1| + |XF_2|\right) = \lambda\right\}$$

cümlesidir (Kaya, 2002).

Tanım 2.2.10: $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $r \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ regüler bir eğri olsun. Eğer her $t \in I$ için

$$\left\{c'(t), c''(t), ..., c^{(r)}(t)\right\}$$

cümlesi lineer bağımsız

$$\left\{c'(t), c''(t), ..., c^{(r+1)}(t)\right\}$$

cümlesi lineer bağımlı ise c eğrisi rankı r olan Frenet eğrisi olarak adlandırılır (Öztürk vd., 2008).

Tanım 2.2.11: $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ rankı r olan bir Frenet eğrisi olsun. Eğer c eğrisinin

$$\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_{r-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$$

Frenet eğrilikleri sabit ise c eğrisine rankı r olan bir $W-$eğrisi denir (Ferus and Schirrmacher, 1982).

Yardımcı Teorem 2.2.12: $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $c : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ yay uzunluğuyla parametrelendirilmiş sonsuz uzunlukta bir W-eğrisi olsun.

Eğer $c(I)$ eğrisi kapalı ise c eğrisinin rankı çifttir, $rank(c) = 2m$. Uygun $r_1, r_2, ..., r_m$ pozitif sabitleri ve ortonormal $e_1, e_2, ..., e_{2m} \in \mathbb{E}^n$ vektörleri ile tek şekilde belirlenen pozitif $a_1, a_2, ..., a_m$ sabitleri bulunur öyle ki

$$c(t) = \text{sabit vektör} + \sum_{i=1}^{m} \left(r_i \sin(a_i t)\, e_{2i-1} + \cos(a_i t)\, e_{2i}\right) \tag{2.1}$$

eşitliği ile verilir (Ferus and Schirrmacher, 1982).

Tanım 2.2.13: (2.1) eşitliğinde verilen a_i pozitif sabitleri rasyoneller üzerinde lineer bağımsız ve böylece $\overline{c(\mathbb{R})}$ kapanışı

$$\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^1(r_2) \times ... \times \mathbb{S}^1(r_m)$$

standart torusunu tam olarak örterse, c $W-$eğrisi, jenerik $W-$eğrisi olarak adlandırılır (Ferus and Schirrmacher, 1982).

Yardımcı Teorem 2.2.14: $\mathbb{E}^{2k+1}$ Öklid uzayında birim hızlı bir $W-$eğrisi

$$\gamma(t) = \gamma_0 + ate_0 + \sum_{i=1}^{k} r_i \left(\cos(a_i t)\, e_{2i-1} + \sin(a_i t)\, e_{2i}\right) \tag{2.2}$$

denklemine sahiptir öyle ki $\{e_0, e_1, ..., e_{2k}\}$ cümlesi $\mathbb{E}^{2k+1}$ uzayının bir ortonormal bazıdır ve $a \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2 < ... < a_k$ pozitif reel sayıları

$$a^2 + \sum_{i=1}^{k} (r_i a_i)^2 = 1 \tag{2.3}$$

denklemini sağlar. (2.3) eşitliğinde $a \neq 0$ ise γ eğrisi tümüyle $\mathbb{E}^{2k+1}$ Öklid uzayında eğer $a = 0$ ise γ eğrisi tümüyle $\mathbb{E}^{2k}$ Öklid uzayındaki hiperküre üzerinde yatar (Torgasev and Sucurovic, 2002).

Yardımcı Teorem 2.2.15: Bir $W-$eğrisi kapalıdır ancak ve ancak (2.2) eşitliğinde $a = 0$ ve $a_i = \dfrac{p_i}{r}$, $p_i \in \mathbb{N}$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ dir (Torgasev and Sucurovic, 2002).

Tanım 2.2.16: $\mathbb{E}^2$ düzleminde $\mathbb{S}^1$ ile gösterilen çembere homeomorf olan bir eğriye basit eğri denir (Hacısalihoğlu, 2004).

Tanım 2.2.17: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir eğri ve $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir dönüşüm ise

$$\beta = F(\alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$$

eğrisine α eğrisinin F dönüşümü altındaki resmi adı verilir (O'Neill, 2006).

Teorem 2.2.18: $F : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^m$ bir dönüşüm olsun. $t \in I$ ve $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayındaki $\alpha(I)$ eğrisinin F dönüşümü altındaki resmi $\beta(I)$ ise

$$\beta'(t) = F_*(\alpha'(t))$$

olarak ifade edilir (Hacısalihoğlu, 1998 b).

Tanım 2.2.19: $\mathbb{E}^n$ n-boyutlu Öklid uzayında $n-1$ yüzey diye $\mathbb{E}^n$ uzayındaki boştan farklı bir M cümlesine denir öyle ki bu M cümlesi, her $p \in M$ için $\nabla f \mid_p \neq 0$ olmak üzere

$$M = \left\{ x \in U \subset \mathbb{E}^n \mid f : U \overset{dif.bilir}{\longrightarrow} \mathbb{R},\ x \rightarrow f(x) = c,\ U \text{ açık} \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2.20: Bir yüzeyde bulunan delik (hole) sayısına o yüzeyin geni (genus) denir (Pressley, 2010).

Tanım 2.2.21: Bir $m-$torus

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^m &= S^1 \times S^1 \times ... \times S^1 \ (m \text{ tane}) \\ &= \{ z = (z_1, z_2, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m \mid |z_1| = |z_2| = ... = |z_m| = 1 \} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır (Robin and Salamon, 2011).

Tanım 2.2.22: $r, R \in \mathbb{R}^{+}$ ve $0 \leq \theta, \beta \leq 2\pi$ olmak üzere

$$X(\beta,\theta) = (R\cos\theta + r\cos\theta\cos\beta, R\sin\theta + r\sin\theta\cos\beta, r\sin\beta)$$

şeklinde verilen yüzeye tor yüzeyi denir (Guggenheimer, 1977).

Tanım 2.2.23: $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, M manifoldunun ortonormal çatısı olmak üzere

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanan H vektörüne ortalama eğrilik vektörü denir (Morgan, 1992).

Tanım 2.2.24: M, Öklidyen uzayda bir yüzey olsun. M yüzeyinin p noktasından geçen yön seçiminden bağımsız tüm jeodezikleri aynı sabit eğrili ğe sahipse M yüzeyine p noktasında helikaldir denir (Kim and Lee, 1993).

Tanım 2.2.25: M, $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayında bir manifold, $p \in M$ ve $X \in T_M(P)$ olsun. Her X vektörü için p noktasında $\lambda = \|h(X,X)\|$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ varsa $f : M \to \mathbb{E}^m$ izometrik immersiyonuna $\lambda-$izotropiktir denir (Kim, 1993 b).

Yardımcı Teorem 2.2.26: $m \geq 3$ olmak üzere M yüzeyi $\mathbb{E}^m$ uzayında bir yüzey olsun. Kabul edelim ki, M yüzeyinin öyle bir p noktası var ve bu noktadan geçen her jeodezik $\mathbb{E}^m$ Öklid uzayında bir $W-$eğrisi olsun. Bu durumda M yüzeyi p noktasında izotropik olur (Kim, 1993 b).

Yardımcı Teorem 2.2.27: M bir irtibatlı Riemann yüzeyi ve $p \in M$

olsun. M yüzeyi p noktasında izotropiktir ancak ve ancak ortonormal her $X, Y \in T_M(P)$ vektörleri için

$$\langle h(X,X), h(X,Y)\rangle = 0$$

eşitliği geçerlidir (Kim, 1993 b).

Teorem 2.2.28: M yüzeyi $\mathbb{E}^4$ uzayında kompakt irtibatlı bir yüzey olsun. M yüzeyinin bir p noktasından geçen her jeodezik $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir $W-$eğrisidir ancak ve ancak M yüzeyi,

(**1**) $\mathbb{E}^3$ uzayında yatan standart küre veya

(**2**) p noktasında, $\mathbb{E}^4$ uzayında yatan

$$X(s,\theta) = \frac{1}{\kappa}(\sin\kappa s\cos\theta, \sin\kappa s\sin\theta, (1\text{-}\cos\kappa s)\cos 2\theta, (1\text{-}\cos\kappa s)\sin 2\theta)$$

formundaki Blaschke yüzeyidir (Kim, 1993 b).

Tanım 2.2.29: M yüzeyinin bir p noktasında şekil operatörü, birim dönüşümün bir sayı ile çarpımına eşit ise p noktasına yüzeyin umbilik noktası denir (Sabuncuğlu, 2006).

Yardımcı Teorem 2.2.30: M yüzeyi üzerinde h ikinci temel formu $\lambda-$izotropik yani her $X, Y \in T_M(P)$ vektörü ve bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sabiti için $\|h(X,Y)\| = \lambda$ olsun. Ortogonal X, Y vektörleri için $\|X\| = \|Y\| = 1$ ise

$$\langle h(X,X), h(Y,Y)\rangle + 2\,\|h(X,Y)\|^2 \;=\; \lambda^2$$

eşitliği sağlanır (O'Neill, 1965).

Yardımcı Teorem 2.2.31: M bir p noktasında Blaschke manifoldu olsun. O zaman M bir SL_l^p manifoldudur (Besse, 1978).

2.3 Topolojik Kavramlar

Bu kesimde, çalışmada kullanılan topolojik kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.3.1: X boş olmayan bir küme olsun. X kümesinin alt kümelerinin bir T sınıfının, X kümesi üzerinde bir topoloji oluşturması için gerek ve yeter şart

(**1**) X ve $\varnothing$ kümeleri T sınıfının öğesi

(**2**) T kümesinin altkümelerinin keyfi sayıda birleşimleri T kümesinde

(**3**) T kümesinin altkümelerinin sonlu kesişimlerinin yine T kümesinde olmasıdır (Dönmez, 2000).

Tanım 2.3.2: $\mathbb{E}^n$ $n-$boyutlu Öklid uzayında iki açık alt cümle U ve V olmak üzere

$$\psi : U \to V$$

fonksiyonu $1-1$, örten, sürekli ve tersi de sürekli ise bu fonksiyona bir homeomorfizm denir. Bu durumda U ile V ye de homeomorf iki alt cümle denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3.3: M bir yüzey ve üzerindeki bir nokta P olsun. M yüzeyinin tüm noktalarını P noktasına birleştiren sürekli eğrilerin tüm noktaları M üzerinde kalıyorsa M yüzeyine irtibatlıdır denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.3.4: Eğer γ eğrisi, reel eksenin bir parçasının veya bir çemberin homeomorfizm altındaki görüntüsü ise γ eğrisi basit eğri olarak adlandırılır. Çemberin homeomorfizm altındaki görüntüsü kapalı Jordan eğrisi olarak adlandırılır (Aminov, 2003).

Tanım 2.3.5: X bir topolojik uzay, $P \in X$ ve $M \subset X$ olsun. P noktasının her komşuluğu M kümesinin P den farklı en az bir noktasını ihtiva ederse P noktasına M kümesinin limit noktası denir (Lee, 2002).

Tanım 2.3.6: Bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin tüm limit noktaları A kümesine aitse bu kümeye kapalıdır denir. $\overline{A}$ şeklinde gösterilen $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kapanışı A ile limit noktalarının birleşimidir (Do Carmo, 1976).

Tanım 2.3.7: (X, T) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\overline{A} = X$ ise A kümesine X uzayında her yerde yoğun denir (Koçak, 2009).

Teorem 2.3.8: (X, T) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $\overline{A}$, A nın kapanışı olsun. $A \subset B$ ise $\overline{A} \subset \overline{B}$ olur (Yıldız, 2002).

Tanım 2.3.9: M bir d fonksiyonu ile metrik uzay olsun. $A \subset M$ için her $x, y \in A$ olmak üzere

$$d(x, y) \leq R$$

olacak şekilde pozitif bir R sayısı varsa A altkümesine sınırlıdır denir (Lee, 2002).

Tanım 2.3.10: Eğer bir A kümesi kapalı ve sınırlı ise bu kümeye kompakt küme adı verilir (Do Carmo, 1976).

Tanım 2.3.11: M metrik uzayında her $\varepsilon > 0$ için $i, j \geq N$ ve N bir tamsayı olmak üzere

$$d(x_i, x_j) \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir (x_i) dizisi varsa bu diziye Cauchy dizisi denir (Lee, 2002).

Tanım 2.3.12: M bir metrik uzay olsun. M metrik uzayındaki her Cauchy dizisinin yakınsadığı nokta bu kümeye aitse M metrik uzayına tamdır denir (Lee, 2002).

Tanım 2.3.13: Bir G grubu ve bir (X, T) topolojik uzayı verilmiş olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan (G, X, T) üçlüsüne bir topolojik grup denir:

(**1**) X cümlesinin noktaları ile G grubunun elemanları aynıdır.

(**2**) $\bullet : X \times X \to X$ işlemi süreklidir.

$(a, b) \to ab^{-1}$

Ayrıca G ve X cümlelerine sırası ile topolojik uzayın temel grubu ve temel uzayı denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Örnek 2.3.14: Reel sayıların toplamsal grubu $(\mathbb{R}, +)$ ile reel sayıların alışılmış topolojisi, birlikte bir topolojik gruptur. Gerçekten reel sayıların (x, y) ikilisi için $x - y$ süreklidir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.3.15: Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyor ise (M, G) ikilisine bir Lie grubu denir:

(**1**) M manifoldunun noktaları G grubunun elemanları ile aynıdır.

(**2**) $\bullet : M \times M \to M$ işlemi her yerde diferensiyellenebilirdir.

$(a, b) \to ab^{-1}$

M manifolduna Lie grubunun temel manifoldu ve G ye de temel grubu denir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.4 Manifoldlar

Bu kısımda manifoldlar ile ilgili çalışmada kullanılan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.4.1: M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir $n-$boyutlu topolojik manifold veya kısaca $n-$manifolddur denir:

(**1**) M bir Hausdorff uzayıdır.

(**2**) $M,\ n-$ boyutlu lokal Öklidyendir.

(**3**) M açık cümlelerin sayılabilir bir tabanına sahiptir.

(Boothby, 1986).

Tanım 2.4.2: M bir $n-$boyutlu topolojik manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M manifolduna C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.4.3: $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında bir $(n-1)$ manifold M ve $P \in M$ olmak üzere

$$\begin{array}{rlcl} X: & M & \to & \cup T_M(P) \\ & P & \to & X(P) = X_P \in T_M(P) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan X operatörüne M manifoldu üzerinde bir vektör alanı denir. M manifoldu üzerindeki tüm vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere $\{\chi(M), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu uzaya M manifoldu üzerinde vektör alanlarının uzayı denir ve kısaca $\chi(M)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.4.4: M bir $k-$ manifold ve $\overline{M}$ de bir $n-$manifold olsun. $k \leq n$ ve $M \subseteq \overline{M}$ olmak üzere M ve $\overline{M}$ manifoldları birer C^∞ manifold olsunlar.

$i : M \to \overline{M}$ şeklinde tanımlı bir i, C^∞ dönüşümü her $m \in M$ için

$$i(m) = m \in \overline{M}$$

şeklinde tanımlıysa i özdeşlik dönüşümüne sokma (inclusion) fonksiyonu adı verilir (Hacısalihoğlu, 1998 b).

Tanım 2.4.5: Eğer bir M manifoldu aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa M manifolduna N manifoldunun bir altmanifoldu denir:

(**1**) M manifoldu N manifoldunun bir topolojik altuzayı

(**2**) $i : M \to N$ sokma dönüşümü diferensiyellenebilir ve her $P \in M$ noktasında di diferensiyel dönüşümü $1-1$ dir.

(Taştan, 2000).

Tanım 2.4.6: M ve N, C^k manifoldlar ve $F : M \to N$ bir homeomorfizm olsun.

(**1**) F fonksiyonu C^k sınıfındandır.

(**2**) F^{-1} fonksiyonu mevcuttur ve F^{-1} de C^k sınıfındandır.

şartlarını sağlayan F fonksiyonuna C^k sınıfından diffeomorfizm denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.4.7: M bir C^∞ manifold olsun. $P \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_M(P)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} g_P : & T_M(P) \times T_M(P) & \to & \mathbb{R} \\ & (X_P, Y_P) & \to & g_P(X_P, Y_P) \end{array}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer ve non-dejenere $(0,2)$ tipindeki tensör alanına M üzerinde bir metrik tensör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.8: g metrik tensörü ile donatılmış bir C^∞ M manifolduna yarı-Riemann manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4.9: M bir C^∞ manifold olsun. Vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere M manifoldu üstünde

$$\langle,\rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

şeklinde bir C^∞ iç çarpım fonksiyonu tanımlı ise M manifolduna bir Riemann manifoldu denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.4.10: M bir C^∞ manifold olsun. M manifoldu üzerinde bir

$$\begin{aligned} \nabla: \ \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y) &\to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu verilsin. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve her $f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için

(**1**) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

(**2**) $\nabla_X fY = X[f]\,Y + f\nabla_X Y$

şartları sağlanıyorsa ∇ fonksiyonuna M manifoldu üstünde bir afin koneksiyon ve ∇_X ifadesine de X vektörüne göre kovaryant türev operatörü denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.4.11: M bir C^∞ manifold ve ∇ bir afin koneksiyon olsun. ∇ koneksiyonu için

(**1**) ∇ fonksiyonu C^∞ sınıfındandır.

(**2**) M manifoldunun bir A bölgesi üzerindeki her bir C^∞sınıfından X, Y vektör alanları için $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

(**3**) Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için $X[\langle Y, Z\rangle] = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

şartları sağlanıyor ise ∇ koneksiyonuna M manifoldu üstünde bir Riemann koneksiyonu ve ∇_X ifadesine de X vektörüne göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.4.12: M ve N sırasıyla m ve $n-$boyutlu manifoldlar $F : M \to N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun.

$$F_* \mid_p : \; T_M(P) \;\; \to \;\; T_N(F(P))$$

şeklinde tanımlıdır öyle ki $X_P \in T_M(P)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} F_*(X_P): & C^\infty(N, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \to & F_*(X_P)(f) = X_P\,[f \circ F] \end{array}$$

eşitliği ile verilen F_* dönüşümüne F dönüşümünün $P \in M$ noktasındaki türev dönüşümü denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.4.13: M ve N sırasıyla m ve $n-$boyutlu iki manifold $F : M \to N$ dönüşümünün türev dönüşümü $F_* \mid_P$ olsun. $T_M(P)$ ve $T_N(F(P))$ uzaylarında sırasıyla

$$\begin{aligned} \Phi &= \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} \mid_P, \frac{\partial}{\partial X_2} \mid_P, ..., \frac{\partial}{\partial X_m} \mid_P \right\} \\ \psi &= \left\{ \frac{\partial}{\partial Y_1} \mid_{F(P)}, \frac{\partial}{\partial Y_2} \mid_{F(P)}, ..., \frac{\partial}{\partial Y_n} \mid_{F(P)} \right\} \end{aligned}$$

bazları için $F_* \mid_P$ dönüşümüne karşılık gelen matris $J(F, P)$ ile gösterilir. $J(F, P)$ matrisine F dönüşümünün P noktasındaki Jakobiyen matrisi ve bu matrise karşılık gelen lineer dönüşüme de F dönüşümünün Jakobiyen dönü şümü denir. Burada $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$ olmak üzere Jakobiyen matrisi

$$J(F, P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \mid_P & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \mid_P & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial X_m} \mid_P \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} \mid_P & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \mid_P & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_2}{\partial X_m} \mid_P \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1} \mid_P & \frac{\partial f_n}{\partial X_2} \mid_P & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial X_m} \mid_P \end{bmatrix}_{n \times m}$$

şeklinde verilir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.4.14: M ve N birer C^∞ yarı-Riemann manifoldu $F : M \to N$ bir C^∞ fonksiyon olsun. F fonksiyonunun $(F_*)_P$ Jakobiyen matrisine karşılık gelen dönüşüm M manifoldunun her bir P noktası için $1-1$ ise F fonksiyonuna immersiyon adı verilir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçioğlu, 2003).

Tanım 2.4.15: $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayında bir $(n-1)$ manifold N olmak üzere $F : N \to \mathbb{E}^n$ fonksiyonu bir immersiyon ise $F(N) = M$ manifolduna $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayının bir hiperyüzeyi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.4.16: $f : M \to N$ bir immersiyon ve her $p \in M$ için $h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)^\perp$ olmak üzere

$$h_p : \ T_p(M) \times T_p(M) \ \to \ T_p(M)^\perp$$

şeklinde tanımlanan h_p fonksiyonuna f fonksiyonunun $p \in M$ noktasındaki ikinci temel formu adı verilir (Kobayashi and Nomizu, 1969).

Tanım 2.4.17: M ve N Riemann manifoldları olmak üzere M, N manifoldunun altmanifoldu olsun. M ve N manifoldları üzerindeki kovaryant türevler sırasıyla ∇ ve $\widetilde{\nabla}$ olsun. $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.4}$$

şeklinde verilen denkleme Gauss denklemi denir. Buradaki $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$ ifadeleri $\widetilde{\nabla}_X Y$ vektörünün sırasıyla teğet ve normal bileşenleridir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.4.18: $M, \mathbb{E}^n$ Öklid uzayının bir altmanifoldu olsun. $X \in \chi(M)$, $\xi \in \chi(M)^\perp$ olsun. $\mathbb{E}^n$ üzerinde tanımlı koneksiyon $\widetilde{\nabla}$, M üzerindeki şekil operatörü A ve normal koneksiyon $\nabla^{\perp}$ olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi$$

şeklinde tanımlı eşitliğe Weingarten denklemi adı verilir (Kobayashi and Nomizu, 1969).

Tanım 2.4.19: Bir M manifoldunun (2.4) denklemi ile tanımlı ikinci temel formu h olmak üzere

$$h = 0$$

ise M manifolduna total jeodeziktir denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.4.20: M ve N sırasıyla Riemann manifoldları olmak üzere M manifoldu N manifoldunun altmanifoldu olsun. M manifoldunda bir normal birim vektör alanı ξ olsun. $\nabla_X \xi$ vektörünün teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $-A_\xi X$ ve $\nabla^{\perp}_X \xi$ olmak üzere

$$A : \chi(M) \times \chi(M)^{\perp} \to \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece

$$\nabla_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi$$

şeklinde Weingarten denklemi elde edilir. Burada A_ξ ifadesine M manifolduna ait şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ gösterimine de M manifoldunun $T^{\perp}M$ normal demetindeki (normal) koneksiyonu adı verilir. M manifoldunun şekil operatörü A_ξ ile ikinci temel formu h arasında

$$g\left(A_\xi X, Y\right) = \widetilde{g}\left(h(X,Y), \xi\right) \tag{2.5}$$

bağıntısı vardır. Burada g ve $\widetilde{g}$ ifadeleri sırası ile $T_M(P)$ ve $T_N(P)$ tanjant uzaylarındaki skalar çarpımlardır (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.4.21: Üzerinde uygun bir yön seçilebilen bir M manifolduna yönlendirilebilir manifold denir. Böyle bir manifold üzerinde seçilmiş olan özel bir μ yönüne, M manifoldu üzerinde μ yönü denir. (M, μ) ikilisine yönlendirilmiş manifold veya kısaca yönlü manifold denir (Hacısalihoğlu, 2004).

Örnek 2.4.22: Möbius şeridi yönlendirilemez manifold örneğidir. Bu şerit üzerindeki bir P noktasından kalkıp şerit üzerinde direkt hareketle dola şarak aynı P noktasına geldiğimizde ilk sistemle çakışmayan bir sistem elde ederiz (Hacısalihoğlu, 2004).

Tanım 2.4.23: M bir C^∞ manifold olsun. M manifoldunun tüm noktalarındaki ayrık tanjant uzaylarının birleşimine M manifoldunun tanjant demeti denir ve TM ile gösterilir (Lee, 2002).

Tanım 2.4.24: Öklid iç çarpımına göre $T_M(P)$ uzayına dik tüm vektörleri içeren $N_P M \subset T_P\mathbb{R}$ altuzayına M manifoldunun P noktasındaki normal (dik) uzayı denir (Lee, 2002).

Tanım 2.4.25: M kompakt Riemann manifoldu olsun. $P, Q \in M$ olmak üzere $Seg(P, Q)$ ifadesi, yay uzunluğuyla parametrelenmiş, P noktasından Q noktasına tüm minimal jeodeziklerin cümlesi olarak tanımlıdır (Kim and Lee, 1993).

Yardımcı Teorem 2.4.26: M bir kompakt Riemann manifoldu ve

$$U_P M = \{X \in T_M(P) \mid \|X\| = 1\}$$

birim tanjant uzayı olmak üzere $X \in U_P M$ olsun. γ eğrisinin yay uzunluğu s ve γ eğrisi X başlangıç hız vektörüne P noktasından itibaren eşlik eden bir jeodezik yani $\gamma(s) = \exp_P(sX)$ olsun. Yeterince küçük bir s değeri için

$Seg(P = \gamma(0), \gamma(s))$ cümlesi yalnız bir $\gamma \mid_{[0,s]}$ elemanı içerir (Kim and Lee, 1993).

Tanım 2.4.27: $A = \left\{ s \in \mathbb{R}^+ \mid \gamma \mid_{[0,s]} \in Seg(P = \gamma(0), \gamma(s)) \right\}$ olmak üzere $A = \mathbb{R}^+$ ise γ eğrisi üzerinde cut-noktası yoktur denir. Eğer $A = (0, r]$ ise $\gamma(r)$, P noktasının cut-noktasıdır ve r sayısına da γ eğrisinin cut-değeridir denir (Kim and Lee, 1993).

Tanım 2.4.28: M bir kompakt Riemann manifoldu olsun. M üzerinde $UM = \underset{P \in M}{\cup} U_P M$ cümlesi, birim tanjant demeti olsun.

$$\phi : UM \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$$

Cut dönüşümü için eğer $A = (0, r]$ ise $\phi(x) = r$ ve eğer $A = \mathbb{R}^+$ ise $\phi(x) = \infty$ şeklinde tanımlıdır (Kim and Lee, 1993).

Tanım 2.4.29: M bir kompakt Riemann manifoldu olsun. $P \in M$ noktasının cut-locusu $C(P)$, P noktasının tüm cut-noktalarının kümesi olarak yani

$$C(P) = \{\exp_P(\phi(X)X) \mid X \in U_P M\}$$

şeklinde tanımlıdır (Kim and Lee, 1993).

Tanım 2.4.30: M kompakt Riemann manifoldunda farklı iki P ve Q noktaları için P noktasından Q noktasına bir link (bağlantı)

$$\Lambda_{(P,Q)} = \left\{ \frac{d\gamma}{ds}(Q) \in U_Q M \mid \gamma \in Seg(P, Q) \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Kim and Lee, 1993).

Tanım 2.4.31: V bir küre uzayı ve birim küresi S olsun. V uzayının bir alt vektör uzayı W için $\Theta = S \cap W$ şeklinde tanımlanan ve birim kürenin bir altkümesi olan Θ cümlesi büyük küre olarak adlandırılır. Tanımı gereği Θ cümlesinin boyutu $boyW - 1$ değerine eşittir (Besse, 1978).

Tanım 2.4.32: Eğer $C(p)$ cümlesindeki her q noktası için $\Lambda_{(p,q)}$ linki U_qM birim tanjant uzayının büyük küresi oluyorsa, kompakt M Riemann manifoldu için $p \in M$ noktasında bir Blaschke manifoldudur denir (Kim and Lee, 1993).

Tanım 2.4.33: Eğer M manifoldu her noktasında Blaschke manifoldu olma özelliğini taşırsa M manifolduna Blaschke manifoldudur denir (Kim and Lee, 1993).

Tanım 2.4.34: M bir Riemann manifoldu ve $p, q \in M$ olsun. $\Gamma(p, q)$ kümesi p noktasından q noktasına çizilebilen eğrilerin kümesi olmak üzere

$$\varrho(p, q) = \inf \{L(c) \mid c \in \Gamma(p, q)\}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $L(c)$, c eğrisinin uzunluğudur (Besse, 1978).

Teorem 2.4.35: M bir Riemann manifoldu ve $p, q \in M$ olsun.
$\gamma \in Seg(p, q)$ ve δ, q noktasından başlayan bir jeodezik olmak üzere eğer

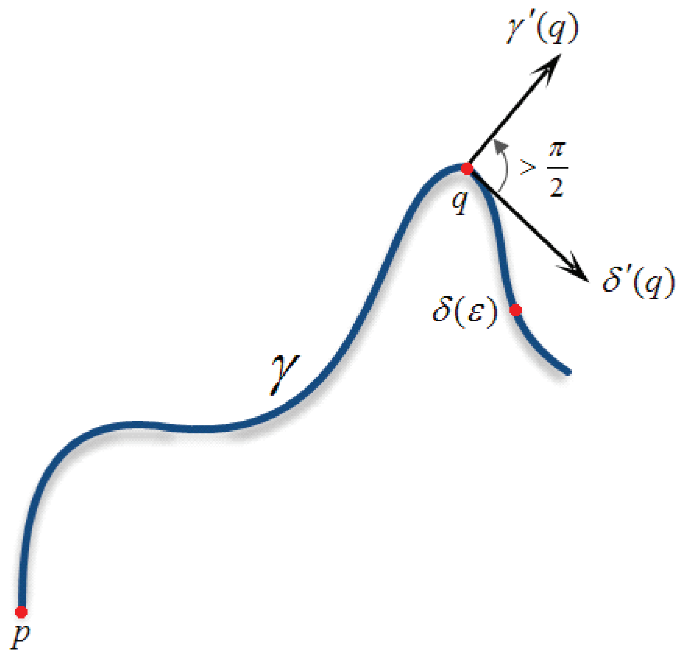
$$\langle \gamma'(q), \delta'(q) \rangle < 0$$

ise yeterince küçük bir $\varepsilon > 0$ için

$$\varrho(p, \delta(\varepsilon)) < \varrho(p, q)$$

eşitsizliği sağlanır (Besse, 1978).

Bu teoremin ifadesine uygun bir çizim, Şekil 2.1 ile verilmiştir.



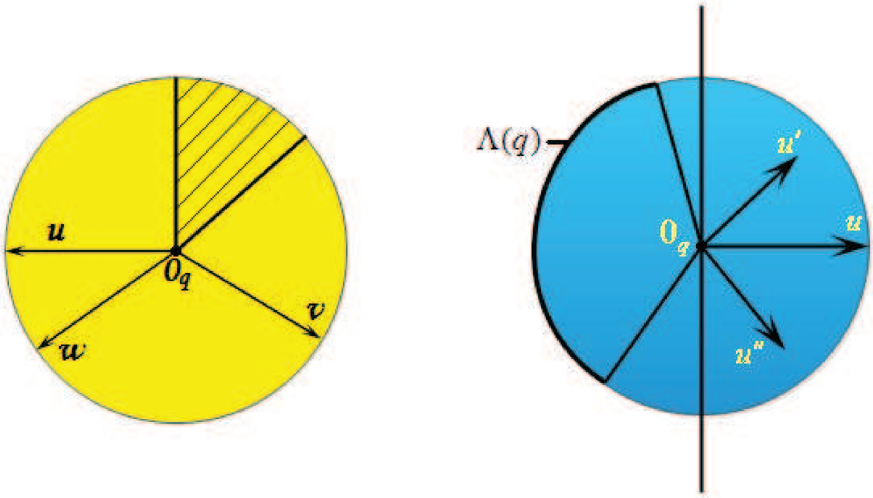
Şekil 2.1. Minimal Uzaklık

Tanım 2.4.36: M bir Riemann manifoldu, p noktası da M manifoldunda bir nokta ve l pozitif bir tamsayı olsun. Eğer p noktasından çıkan her jeodezik l uzunluğunda basit jeodezik ilmeğinden oluşuyorsa M manifolduna SL_l^p manifoldu denir (Besse, 1978).

Yardımcı Teorem 2.4.37: Her $u \in U_qM$ vektörü için, $u \in Sp\{u', u''\}$ ve $\langle u', u'' \rangle = 0$ olacak şekilde $u' \in \Lambda(q)$ ve $u'' \in N(q)$ bulunabilir (Besse, 1978).

Yardımcı Teorem 2.4.38: $\Lambda(q) \in U_qM$ altkümesi konvekstir. Üstelik $-u \in \Lambda(q)$ olacak şekilde bir $u \in \Lambda(q)$ vektörü bulunabilir (Besse, 1978).

Bu yardımcı teoremin ifadesine uygun bir çizim, Şekil 2.2 ile verilmiştir.



Şekil 2.2. Konveks $\Lambda(q)$ cümlesi

2.5 İzometrik İmmersiyonlar

Bu kesimde izometrik immersiyonlar, Riemann ve yarı-Riemann manifoldlarına ait temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.5.1: $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında iki hiperyüzey M ve N olmak üzere $F : M \to N$ bir diffeomorfizm olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\langle F_*(X), F_*(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle$$

ise F dönüşümüne bir izometri, M ve N hiperyüzeylerine de izometriktir denir (Thorpe, 1979).

Tanım 2.5.2: F bir immersiyon olmak üzere her $X, Y \in T_M(P)$ için

$$g\left(F(X), F(Y)\right) = g(X, Y)$$

şartını sağlayan F fonksiyonuna izometrik immersiyon denir. Burada g metriği $T_M(P)$ tanjant uzayından indirgenmiş metriktir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.5.3: M ve N birer C^∞ yarı-Riemann manifoldu $F : M \to N$ bir C^∞ fonksiyon olsun. F fonksiyonunun F_* jakobiyen matrisine karşılık gelen dönüşümü $1-1$ ve F tek değişkenli ise F fonksiyonuna M den N ye bir imbedding (bir boyutlu daldırma) adı verilir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Teorem 2.5.4: Eğer γ eğrisi M manifoldunda bir jeodezik ve $F : M \to N$ (yerel) izometri ise $F(\gamma)$, N manifoldunun bir jeodeziği olur (O'Neill, 2006).

Tanım 2.5.5: M bir yarı-Riemannian manifoldu ve üzerindeki Riemann koneksiyonu ∇ olsun.

$$\begin{array}{rlll} R: & \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X,Y,Z) & \to & R_{XY}Z = \left[\nabla_X, \nabla_Y\right]Z - \nabla_{[X,Y]}Z \end{array}$$

fonksiyonu $(1,3)$ tipindeki bir tensör alanıdır. Bu tensör alanına M manifoldu üzerindeki Riemann eğrilik tensör alanı denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.5.6: M bir $n-$boyutlu yarı-Riemann manifoldu olsun. M manifoldunun koneksiyonu ∇ ve eğriliği R olsun. Eğer

$$\nabla R = 0$$

ise M manifolduna yerel simetrik manifold denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.5.7: Bir manifoldun yerel simetrik altmanifold olması için gerek ve yeter şart ikinci temel formun kovaryant türevinin sıfır olmasıdır

(Ferus, 1980).

Tanım 2.5.8: M irtibatlı (yarı)-Riemann manifoldu olsun. Eğer her $P \in M$ için $T_M(P)$ tanjant uzayı üzerinde türev dönüşümü $-I$ olan bir tek

$$F_P : M \to M$$

izometrisi varsa M manifolduna (yarı)-Riemann simetrik uzay denir (O'Neill, 1983).

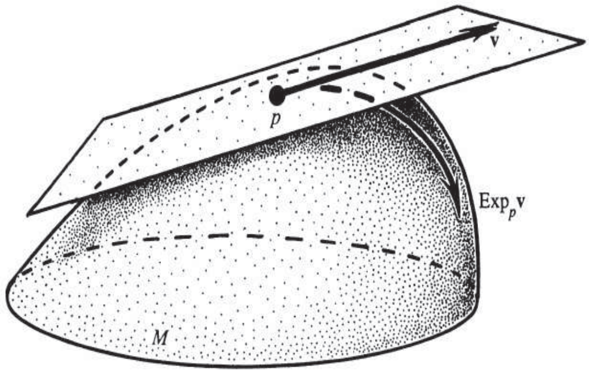
Tanım 2.5.9: Bir M yarı-Riemann manifoldu için her $P \in M$ noktasında R eğrilik tensörü özdeş olarak 0 ise M manifolduna flat manifolddur denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.5.10: Simetrik bir M uzayının rankı M uzayında total jeodezik olan flat manifoldların maksimal boyutu olarak tanımlanır (Besse, 1978).

Tanım 2.5.11: $p \in M$ noktasındaki $\exp_p$ üstel dönüşümü

$$\exp_p : T_M(P) \to M$$

olacak şekilde $T_M(P)$ tanjant uzayını M manifoldu içerisine eşler öyle ki $T_M(P)$ tanjant uzayındaki bir v vektörünü M manifoldundaki jeodezik boyunca uzanan, v vektörüyle aynı yönde olacak şekilde, p noktasından $|v|$ kadar uzaklıkta bulunan bir noktaya gönderir. Şekil 2.3. ile $v \in T_M(P)$ vektörünün üstel dönüşüm altındaki görüntüsü resmedilmiştir (Morgan, 1992).



Şekil 2.3. Üstel dönüşüm

Tanım 2.5.12: M afin koneksiyonu ile $n-$boyutlu bir manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki s_p simetrisi U komşuluğunun kendi üzerindeki bir diffeomorfizmdir öyle ki $X \in T_M(P)$ için $\exp X$ i $\exp(-X)$ içine gönderir. Eğer $\{p^1, p^2, ..., p^n\}$ cümlesi p orijininde bir normal koordinat sistemi ise s_p, $(p^1, p^2, ..., p^n)$ sıralı $n-$lisini $(-p^1, -p^2, ..., -p^n)$ sıralı $n-$lisine eşler. p noktasındaki s_p dönüşümünün diferensiyeli $-I_p$ ye eşittir. Buradaki I_p, $T_M(P)$ tanjant uzayın birim dönüşümüdür (Kobayashi and Nomizu, 1969).

Tanım 2.5.13: M bir Riemann manifoldu ve N bazı $p \in M$ noktaları için $\exp_p|_N$: $N \to V_p$ dönüşümünün diffeomorfizm olduğu $T_M(P)$ uzayı içinde 0 sayısının bir simetrik komşuluğu olsun.

$$\begin{aligned} s: \; N &\to N \\ X &\to s(X) = -X \end{aligned}$$

dönüşümü

$$s_p = (\exp_p|_N) \circ s \circ (\exp_p|_N)^{-1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşüm V_p üzerindeki p noktasına göre jeodezik simetri olarak adlandırılır (Besse, 1978).

Tanım 2.5.14: $f : M \to N$ bir C^∞ immersiyon ve $\widetilde{U}, p \in M$ noktasının bir komşuluğu olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\sigma : \widetilde{U} \to \widetilde{U}$ fonksiyonuna bir $\sigma-$izometrisi denir:

(**1**) $\sigma(f(p)) = f(p)$

(**2**) Her $v \in f_*(T_M(P))$ vektörü için $\sigma_*(v) = -v$

(**3**) Her $\xi \in \perp_p^f M$ vektörü için $\sigma_*(\xi) = \xi$

(Strübing, 1979).

Tanım 2.5.15: M bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. p noktasındaki bir jeodezik simetri s_p, bir $\sigma-$izometrisi σ_p ve $f : M \to \mathbb{E}^n$ bir immersiyon olmak üzere

$$f \circ s_p = \sigma_p \circ f$$

eşitliği sağlanıyorsa f immersiyonuna dış-simetriktir denir (Ferus and Schirrmacher, 1982).

Tanım 2.5.16: M^n ve $\widetilde{M}^{n+k}$ Riemann manifoldu $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}$ dönüşümü bir izometrik immersiyon ve $X, Y, Z \in \chi(M)$ olsun. f fonksiyonunun ikinci temel formu h olmak üzere h ikinci temel formun (tanjant demeti) $\oplus$ (normal demet) deki koneksiyonuna göre $\overline{\nabla}$ kovaryant türevi

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) = \nabla_X^\perp(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $\overline{\nabla} h = 0$ ise f izometrik immersiyonuna paraleldir denir (Choi et. al., 2010).

Teorem 2.5.17: M ve N bir C^∞ manifold ve $f : M \to N$ bir C^∞ immersiyon olsun. f immersiyonun ikinci temel formu paralel yani $\overline{\nabla} h = 0$ olsun. $P \in M, \varepsilon \in (0, \infty]$ ve sırasıyla U, M manifoldunda P noktasının bir komşuluğu, $\widetilde{U}$ ise N manifoldunda $f(P)$ noktasının bir komşuluğu olmak üzere $U = \exp_P^M(B_\varepsilon(o))$ ve $\widetilde{U} = \exp_{f(P)}^N(\widetilde{B}_\varepsilon(o))$ olsun öyle ki sırasıyla $B_\varepsilon(o)$ ve $\widetilde{B}_\varepsilon(o)$ kümeleri $T_M(P)$ ve $T_N(f(P))$ tanjant uzaylarındaki o merkezli ε yarıçaplı açık yuvarları göstersin ve σ fonksiyonu Tanım 2.5.14 deki gibi tanımlansın. O zaman her $v \in B_\varepsilon(o)$ için

$$\sigma \circ f \circ \exp_P^M(v) \quad = \quad f \circ \exp_P^M(-v)$$

olur ve özel olarak $\widetilde{U}$ cümlesinin $\sigma-$izometrisi $f(U)$ cümlesini kendisine eşler (Strübing, 1979).

Teorem 2.5.18: $M, n-$boyutlu, irtibatlı, flat, yerel simetrik bir altmanifold olmak üzere $f : M \to \mathbb{R}^{n+p}$ dönüşümü M manifoldunu, Clifford torusunun açık bir bölgesine veya Clifford torusu üzerindeki ortogonal bir silindir üzerine eşler. Burada Clifford torusu aynı yarıçapa sahip olmayan düzlemsel çemberlerin çarpımı olarak tanımlıdır (Ferus, 1980).

Tanım 2.5.19: M bir Riemann manifold, $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve h ikinci temel form olmak üzere

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) = (\overline{\nabla}_Y h)(X, Z) = (\overline{\nabla}_Z h)(X, Y)$$

şeklinde verilen eşitliğe Codazzi denklemi denir (Kim, 1993 b).

BÖLÜM 3
BASİT JEODEZİKLİ ALTMANİFOLDLAR

Bu bölümde ve çalışmanın devamında basit jeodezik olarak bahsedildi ğinde $W-$eğrileri anlaşılacaktır. Bu bölümde (Ferus and Schirrmacher, 1982) ve (Torgasev and Sucurovic, 2002) makalesine bağlı olarak $W-$eğrilerinin parametrik denklemi ifade edilmiştir. (Ferus and Schirrmacher, 1982) esas alınarak bir jeodezik eğrinin izometrik immersiyon altında karşılık geldiği eğrinin yüksek mertebeden türevleri elde edilmiştir. Yine bir izometrik immersiyon altında jeodezikleri $W-$eğrisi ve jenerik $W-$eğrisine dönüşen Riemann manifoldların $\mathbb{E}^4$ ve $\mathbb{E}^n$ Öklid uzaylarındaki karakterizasyonları ifade edilmiştir. Ayrıca parametrik denklemleriyle verilen bazı $W-$eğrilerinin rankları hesaplanmıştır.

3.1 W-Eğrilerinin Parametrik İfadesi

Bu kesimde $W-$eğrilerinin parametrik denklemi ifade edilerek, rankı çift pozitif tamsayı olan $W-$eğrilerinin parametrik denklemi elde edilmiştir.

Şimdi (Torgasev and Sucurovic, 2002) makalesinde bahsedilen bazı önbilgiler üzerinde duralım. Bu makalede, $\mathbb{E}^{2k+1}$ uzayında birim hızlı bir $W-$eğrisi, $\{e_0, e_1, ..., e_{2k}\}$ cümlesi $\mathbb{E}^{2k+1}$ uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\gamma(t) = \gamma_0 + ate_0 + \sum_{i=1}^{k} r_i \left(\cos\left(a_i t\right) e_{2i-1} + \sin\left(a_i t\right) e_{2i}\right)$$

şeklinde verilmiştir. Burada $a \in \mathbb{R}$ ve $a_1 < a_2 < ... < a_k$ pozitif reel sayıları

$$a^2 + \sum_{i=1}^{k} (r_i a_i)^2 = 1$$

eşitliğini sağlar. Böylece $W-$eğrileri için genel bir denklem ifade edilmiş olur. Burada $a \neq 0$ ise γ eğrisi tümüyle $\mathbb{E}^{2k+1}$ Öklid uzayında yatar, aksi takdirde $a = 0$ ise γ eğrisi tümüyle $\mathbb{E}^{2k}$ Öklid uzayında bir hiperküre üzerinde yatar. Ayrıca bir $W-$eğrisi kapalıdır ancak ve ancak $a = 0$ ve $p_i \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $a_i = \dfrac{p_i}{r}$ şeklinde ifade edilir. Şimdi rankı çift olan kapalı $W-$eğrilerinin parametrik denklemini ifade eden bir yardımcı teorem verelim.

Yardımcı Teorem 3.1.1: $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$c: \ I \ \longrightarrow \ \mathbb{E}^n$$

yay uzunluğuyla parametrelendirilmiş bir W-eğrisi olsun. $W-$eğrisinin rankı $2m$ olsun. O zaman $r_1, r_2, ..., r_m \in \mathbb{R}^+$ değerleri ve ortonormal $e_1, e_2, ..., e_{2m} \in \mathbb{E}^n$ vektörleri ile belirli pozitif $a_1, a_2, ..., a_m$ sabitleri için bu eğri

$$c(t) = \text{sabit vektör} + \sum_{i=1}^{m} \left(r_i \cos(a_i t)\, \overrightarrow{e_{2i-1}} + \sin(a_i t)\, \overrightarrow{e_{2i}}\right) \tag{3.1}$$

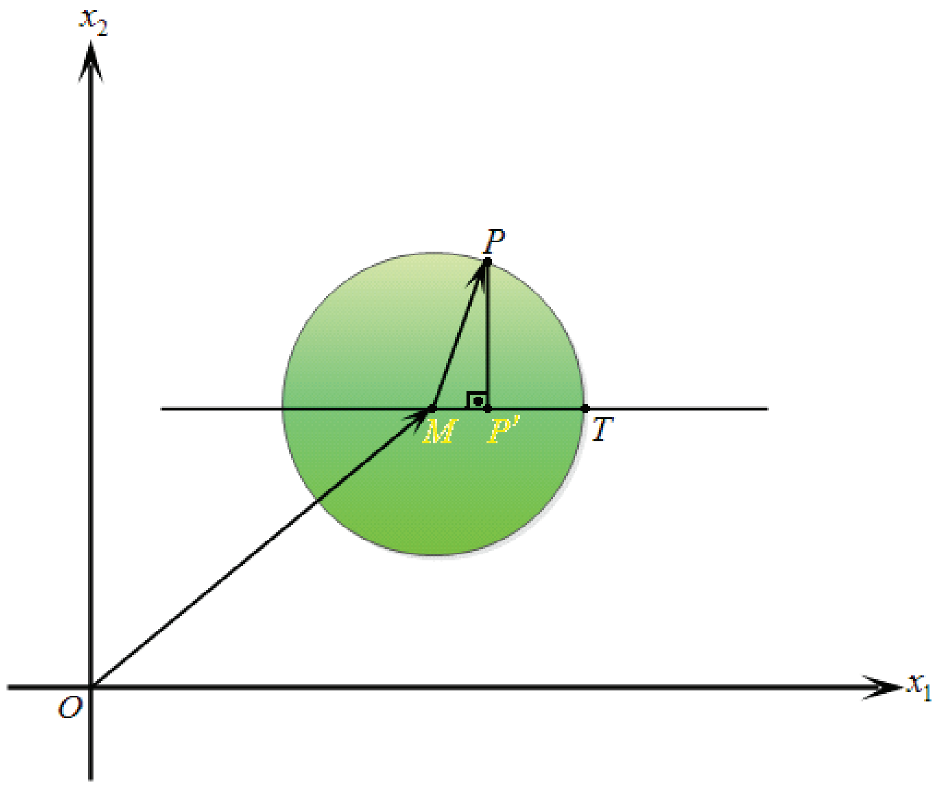
eşitliği ile ifade edilir.

İspat: c eğrisi kapalı bir $W-$eğrisi olsun. Yardımcı Teorem 2.2.14 ve Yardımcı Teorem 2.2.15 gereğince c eğrisi $\mathbb{E}^{2m}$ Öklid uzayında

$$\mathbb{S}_r^{2m-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_{2m}) \mid f(x) = \sum_{i=1}^{2m} x_i^2 = r^2, \left|\overrightarrow{\nabla f}\right| \neq 0, r \in \mathbb{R} \right\}$$

hiperküresi üzerinde yatmaktadır. Burada r, hiperkürenin yarıçapını göstermektedir ve sabittir. c eğrisinin $\mathbb{S}_r^{2m-1}$ hiperküresi üzerinde yattığını göz önünde bulundurarak parametrik denklemini tümevarımla elde edelim.

$m = 1$ için c eğrisinin rankı 2 olur. Bu durumda c eğrisi, r_1 yarıçaplı $\mathbb{S}^1_{r_1}$ çemberi üzerinde bir eğri olacaktır. Fakat c eğrisi kapalı olduğundan bu eğri $\mathbb{S}^1_{r_1}$ çemberine karşılık gelir.



Şekil 3.1. Çember

$a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $M(a, b)$ merkezli r_1 yarıçaplı bir çemberin $\{x_1, x_2\}$ dik koordinat sistemindeki denklemi

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = r_1^2$$

şeklinde verilir.

Şekil 3.1. de P noktasının TM doğrusuna dik izdüşümü P' olsun.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{X}$$

sabit bir vektör olmak üzere

$$\left|\overrightarrow{MP}\right| = r_1$$

olur.

$$m(T\widehat{M}P) = a_1 t$$

olmak üzere çember üzerindeki P noktaları bu koordinat sisteminde

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP'} + \overrightarrow{P'P}\end{aligned}$$

konum vektörü ile ifade edilir. $\{\overrightarrow{e_1} = (1,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1)\}$, $\{x_1, x_2\}$ dik koordinat sisteminin standart bazı olmak üzere $P'MP$ dik üçgeninde

$$\overrightarrow{MP'} = r_1 \cos(a_1 t)\overrightarrow{e_1} \text{ ve } \overrightarrow{P'P} = r_1 \sin(a_1 t)\overrightarrow{e_2}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece

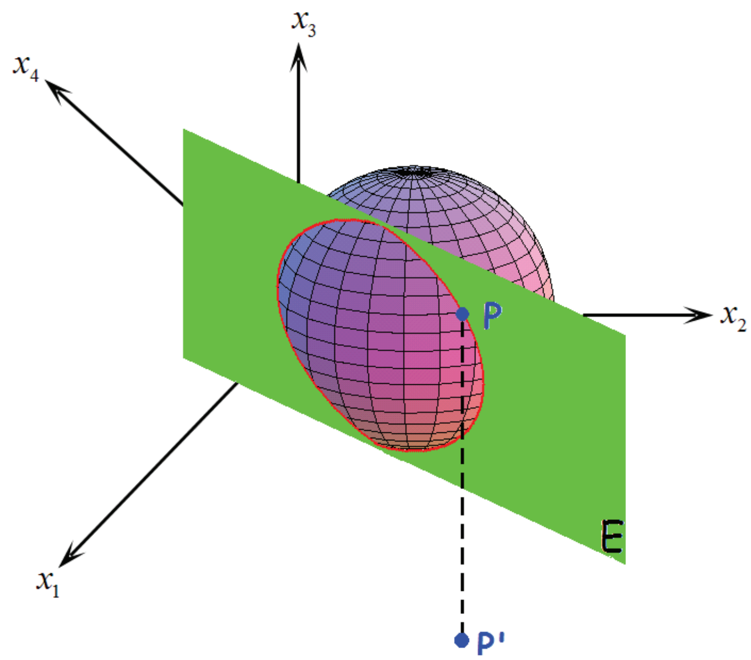
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP'} + \overrightarrow{P'P} \\ &= \overrightarrow{X} + r_1 \cos(a_1 t)\overrightarrow{e_1} + r_1 \sin(a_1 t)\overrightarrow{e_2}\end{aligned} \tag{3.2}$$

şeklinde çemberin vektörel denklemi elde edilir ve ispat $m = 1$ için yapılmış olur.

$m = 2$ olsun. c eğrisi $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki $\mathbb{S}^3_r$ hiperküresi üzerindedir. Şekil 3.2., O orijinli $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dik koordinat sistemindeki $\mathbb{S}^3_r$ hiperküresini temsil etsin. $\{x_3, x_4\}$ hiperdüzlemine paralel bir E düzlemi alalım. E hiperdüzlemi ile hiperkürenin arakesiti

$$E \cap \mathbb{S}^3_r = c$$

eğrisi olsun. c eğrisi bir çemberdir.



Şekil 3.2. Hiperküre

Bu çember üzerinde alınan bir P noktasının $\{x_1, x_2\}$ dik koordinat sistemine izdüşümü P' olsun. $\overrightarrow{OP'}$ vektörünün x_1-ekseniyle yaptığı pozitif yönlü açı $a_1 t$ ve $\left|\overrightarrow{OP'}\right| = r_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= \left|\overrightarrow{OP'}\right| \cos(a_1 t)\overrightarrow{e_1} + \left|\overrightarrow{OP'}\right| \sin(a_1 t)\overrightarrow{e_2} \\ &= r_1 \cos(a_1 t)\overrightarrow{e_1} + r_1 \sin(a_1 t)\overrightarrow{e_2}\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bununla beraber $\overrightarrow{P'P}$ vektörü E düzleminde yatar. $|P'P| = r_2$ ve $\overrightarrow{P'P}$ vektörünün x_3-ekseniyle yaptığı pozitif yönlü açı $a_2 t$ olmak üzere

$$\overrightarrow{P'P} = r_2 \cos(a_2 t)\overrightarrow{e_3} + r_2 \sin(a_2 t)\overrightarrow{e_4}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P} \\ &= r_1 \cos(a_1 t)\overrightarrow{e_1} + r_1 \sin(a_1 t)\overrightarrow{e_2} \\ &\quad + r_2 \cos(a_2 t)\overrightarrow{e_3} + r_2 \sin(a_2 t)\overrightarrow{e_4} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir ve ispat $m = 2$ için tamamlanmış olur. Şimdi $m = k-1$ için c eğrisinin denkleminin

$$c(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(r_i \cos(a_i t)\, \overrightarrow{e_{2i-1}} + \sin(a_i t)\, \overrightarrow{e_{2i}}\right) \tag{3.3}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Öncelikle rankı $2k$ olan bir $W-$eğrisi $\mathbb{S}_r^{2k-1}$ hiperküresi üzerinde yatar. Bu eğri üzerinde alınan temsili bir

$$P = (x_1, x_2, ..., x_{2k-1}, x_{2k}) \in \mathbb{E}^{2k}$$

noktasını düşünelim. Bu noktanın $\{x_{2k-3}, x_{2k-2}\}$ koordinat sistemine izdü şümü P' olsun. $P' \in \mathbb{E}^{2k-2}$ olduğundan

$$P' = (x_1, x_2, ..., x_{2k-3}, x_{2k-2}, 0, 0) \in \mathbb{E}^{2k}$$

şeklinde yazılır. O zaman hiperküre tanımı gereğince $2k-2 = 2m$ ve böylece

$$m = k - 1$$

olur. Böylece $P' \in \mathbb{S}^{2m-1} = \mathbb{S}^{2k-3}$ yani $P' \in \mathbb{S}^{2k-3}$ olur. Bu durumda konum vektörü

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P}$$

şeklinde yazılır. $P' \in \mathbb{S}^{2k-3}$ olduğundan P' noktası (3.3) eşitliğinde verilen c eğrisi üzerindedir. $\overrightarrow{P'P}$ vektörü $\{x_{2k-1}, x_{2k}\}$ hiperdüzlemine paralel olan, (3.2) denklemindeki vektöre benzer şekilde ifade edilebilecek bir vektördür. Böylece,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'} &= \sum_{i=1}^{k-1} \left(r_i \cos(a_i t)\, \overrightarrow{e_{2i-1}} + \sin(a_i t)\, \overrightarrow{e_{2i}}\right) \\ \overrightarrow{P'P} &= r_k \left(\cos(a_k t)\overrightarrow{e_{2k-1}} + \sin(a_k t)\overrightarrow{e_{2k}}\right) \end{aligned}$$

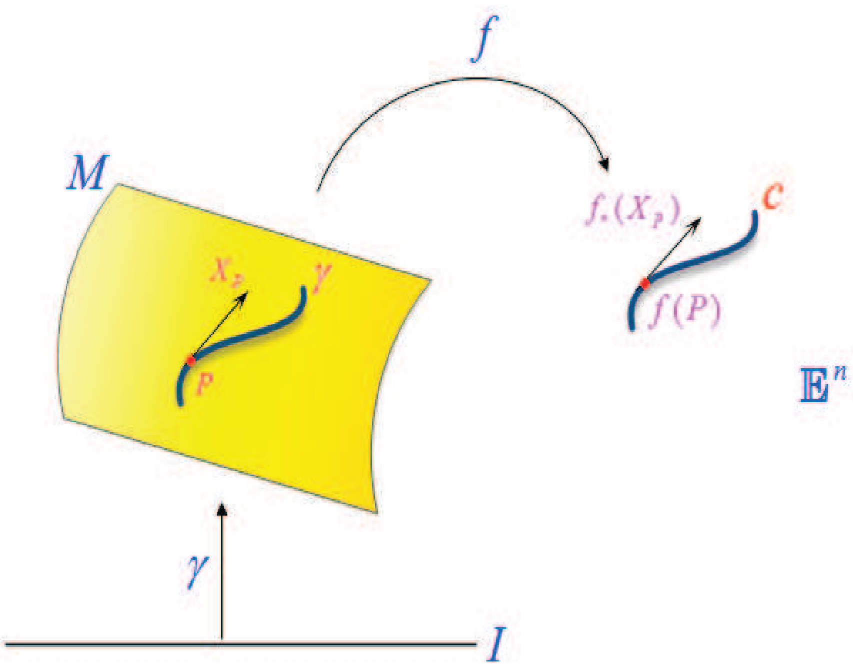
elde edilir ve bu eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} r_i \left(\cos\left(a_i t\right) \overrightarrow{e_{2i-1}} + \sin\left(a_i t\right) \overrightarrow{e_{2i}}\right) \\
&\quad + r_k \left(\cos(a_k t)\overrightarrow{e_{2k-1}} + \sin(a_k t)\overrightarrow{e_{2k}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} r_i \left(\cos\left(a_i t\right) \overrightarrow{e_{2i-1}} + \sin\left(a_i t\right) \overrightarrow{e_{2i}}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

3.2 Görüntü Eğrisinin Türevleri

Bu kesimde bir jeodezik eğrinin, bir izometrik immersiyon altında karşılık geldiği görüntü eğrisinin yüksek mertebeden türevleri incelenmiştir.



Şekil 3.3. Görüntü Eğrisi

Yardımcı Teorem 3.2.1: $f : M \to \mathbb{E}^n$ bir izometrik immersiyon ve

$$\gamma : \ \mathbb{R} \ \to \ M$$

bir eğri olsun. f izometrik immersiyonu $P \in M$ noktasındaki bir tanjant vektörü $f(P) \in \mathbb{E}^n$ noktasına taşır.

İspat: $t \in \mathbb{R}$ ve $P \in M$ olsun. $m < n$ olmak üzere M bir $m-$boyutlu manifold olsun. γ eğrisi $P \in M$ noktasından geçen M üzerinde bir eğri olsun. P noktası M üzerinde olduğundan

$$P \ = \ (P_1(t), P_2(t), ..., P_m(t))$$

olur. Burada $P_1, P_2, ..., P_m$ koordinat fonksiyonlarıdır. f fonksiyonu $P \in M$ noktasını $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayındaki

$$\begin{aligned} f(P) \ = \ & (f(P_1(t)), f(P_2(t)), ..., f(P_m(t)), f(P_{m+1}(t)), \\ & f(P_{m+2}(t)), ..., f(P_n(t))) \end{aligned}$$

noktasına dönüştürür. f fonksiyonu bir izometrik immersiyon olduğundan

$$\begin{aligned} f(P_1(t)) &= P_1(t) \\ f(P_2(t)) &= P_2(t) \\ . \quad & \quad . \quad \quad . \\ . \quad & \quad . \quad \quad . \\ . \quad & \quad . \quad \quad . \\ f(P_m(t)) &= P_m(t) \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca

$$P_{m+1} = P_{m+2} = ... = P_n = 0$$

olduğundan

$$f(P) \ = \ (P_1(t), P_2(t), ..., P_m(t), 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{E}^n$$

elde edilir. Benzer şekilde P noktasındaki bir $X_P \in T_M(P)$ tanjant vektörünün, Tanım 2.5.1 kullanılırsa f_* dönüşümü altındaki görüntüsü,

$$X_P = (X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t))$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f_*(X_P) &= (f_*(X_1(t)), f_*(X_2(t)), ..., f_*(X_m(t)), f_*(X_{m+1}(t)), \\ &\qquad f_*(X_{m+2}(t)), ..., f_*(X_n(t))) \end{aligned}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$f_*(X_P) = (X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t), 0, 0, ..., 0)$$

elde edilir. Buradan

$$\|f_*(X_P)\| = \|X_P\|$$

olduğu görülür. Böylece izometrik immmersiyonu $P \in M$ noktasındaki X_P tanjant vektörünü, $f(P)$ noktasına aynı boyda bir tanjant vektörü olarak taşır.

Yardımcı Teorem 3.2.2: $f : M \to \mathbb{E}^4$ bir izometrik immersiyon ve

$$\gamma : \mathbb{R} \to M$$

bir jeodezik eğri olsun. $\gamma'(0) = X \in T_M(P)$ başlangıç hız vektörü olmak üzere

$$c = f \circ \gamma$$

görüntü eğrisinin türevleri

$$\begin{aligned} c'(0) &= X \\ c''(0) &= h(X, X) \\ c'''(0) &= -A_{h(X,X)}X + \overline{\nabla}_X h(X, X) \qquad (3.4) \\ c^{(4)}(0) &= -\left(\overline{\nabla}_X A\right)_{h(X,X)} X - 2A_{\left(\overline{\nabla}_X h\right)(X,X)}X \\ &\quad -h\left(A_{h(X,X)}X, X\right) + \left(\overline{\nabla}^2_{(X,X)} h\right)(X, X) \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat: $\widetilde{\nabla}$, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayının koneksiyonu ve ∇, M manifoldu üzerindeki koneksiyon olsun. $\gamma'(0) = X \in T_M(P)$ olmak üzere Yardımcı Teorem 3.2.1 gereğince

$$\gamma'(0) \;=\; c'(0) \;=\; X$$

yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(c'(0)) &= \frac{d}{dt}(X) = \widetilde{\nabla}_{c'(0)}X \\ &= \widetilde{\nabla}_X X \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$c''(0) \;=\; \widetilde{\nabla}_X X$$

olur. Tanım 2.4.17 gereğince

$$\widetilde{\nabla}_X X \;=\; \nabla_X X + h(X,X)$$

şeklinde Gauss denklemi yazılır. γ eğrisi M manifoldu üzerinde bir jeodezik olduğundan Tanım 2.2.6 gereğince

$$\nabla_{\frac{d}{dt}(\gamma)}\frac{d}{dt}(\gamma) \;=\; 0$$

olur. Teorem 2.2.18 gereğince

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)}\frac{d}{dt}(f\circ\gamma) &= f_*\left(\nabla_{\frac{d}{dt}(\gamma)}\frac{d}{dt}(\gamma)\right) = f_*(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece

$$\nabla_{c'}c' \;=\; 0$$

elde edilir. Bu durumda c eğrisi de $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir jeodezik eğridir. Bu Tanım 2.2.6 gereğince $c'' \in \chi(M)^{\perp}$ anlamına gelir. $\nabla_X X \in \chi(M)$ olduğundan

$$\nabla_X X \;=\; 0$$

ve

$$c''(0) = h(X,X)$$

olur. Bundan dolayı

$$c'''(0) = \left(\widetilde{\nabla}_X h\right)(X,X)$$

yazılır. Tanım 2.4.18 gereğince

$$\left(\widetilde{\nabla}_X h\right)(X,X) = -A_{h(X,X)}X + \left(\overline{\nabla}_X h\right)(X,X)$$

şeklinde Weingarten denklemi yazılır ve

$$c'''(0) = -A_{h(X,X)}X + \left(\overline{\nabla}_X h\right)(X,X)$$

elde edilir. Şimdi $c^{(4)}(0)$ değerini hesaplayacak olursak

$$\begin{aligned} c^{(4)}(0) &= \widetilde{\nabla}_X \left(-A_{h(X,X)}X + \left(\overline{\nabla}_X h\right)(X,X)\right) \\ &= -\widetilde{\nabla}_X(A_{h(X,X)}X) + \widetilde{\nabla}_X((\overline{\nabla}_X h)(X,X)) \end{aligned} \tag{3.5}$$

bulunur. Tanım 2.4.17 gereğince,

$$\widetilde{\nabla}_X(A_{h(X,X)}X) = \nabla_X(A_{h(X,X)}X) + h(X, A_{h(X,X)}X) \tag{3.6}$$

elde edilir. Burada $X, Y \in TM$ ve $\xi \in T^{\perp}M$ olmak üzere şekil operatörünün türevi

$$\left(\overline{\nabla}_X A\right)_\xi Y = \nabla_X\left(A_\xi Y\right) - A_{\nabla^{\perp}\xi}Y - A_\xi \nabla_X Y \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır. (3.7) eşitliğinde $\nabla_X\left(A_\xi Y\right)$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$\nabla_X\left(A_\xi Y\right) = \left(\overline{\nabla}_X A\right)_\xi Y + A_{\nabla^{\perp}\xi}Y + A_\xi \nabla_X Y \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8) eşitliğinde $X = Y$ ve $\xi = h(X,X)$ alınır ve (3.6) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X(A_{h(X,X)}X) &= \left(\overline{\nabla}_X A\right)_{h(X,X)} X + A_{\left(\overline{\nabla}_X h\right)(X,X)}X \\ &\quad + A_{h(X,X)}\nabla_X X + h(X, A_{h(X,X)}X) \\ &= \left(\overline{\nabla}_X A\right)_{h(X,X)} + A_{\left(\overline{\nabla}_X h\right)(X,X)}X \\ &\quad + h(X, A_{h(X,X)}X) \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. Tanım 2.4.18 gereğince

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X((\overline{\nabla}_X h)(X,X)) &= -A_{(\overline{\nabla}_X h)(X,X)}X + \overline{\nabla}_X((\overline{\nabla}_X h)(X,X)) \\ &= -A_{\left(\overline{\nabla}_X h\right)(X,X)}X + (\overline{\nabla}^2_{(X,X)} h)(X,X) \end{aligned} \tag{3.10}$$

olur. (3.9) ve (3.10) eşitlikleri (3.5) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} c^{(4)}(0) &= -\left(\overline{\nabla}_X A\right)_{h(X,X)} - 2A_{\left(\overline{\nabla}_X h\right)(X,X)}X \\ & \quad -h(X, A_{h(X,X)}X) + (\overline{\nabla}^2_{(X,X)} h)(X,X) \end{aligned} \tag{3.11}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

3.3 Basit Jeodezikli Altmanifoldlar

Bu kesimde bir izometrik immersiyon altında jeodezikleri, $W-$ eğrisi ve jenerik $W-$eğrisine dönüşen Riemann manifoldların karakterizasyonu incelenmiştir.

Teorem 3.3.1: M kapalı, irtibatlı Riemann n-manifold ve

$$f: \ M \ \rightarrow \ \mathbb{E}^n$$

bir izometrik immersiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(**1**) Her birim hızlı $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ jeodeziği için $c = f \circ \gamma$ görüntü eğrisi bir jenerik $W-$ eğrisidir.

(**2**) Tanım 2.5.15 gereğince f dış-simetriktir.

İspat: (2)⇒(1) Kabul edelim ki f fonksiyonu **(2)** şartını sağlasın. Tanım 2.5.8 ve Tanım 2.5.12 gereğince M manifoldu simetrik Riemann uzayı olur. Teorem 2.5.18 gereğince her bir maksimal torus Öklidyen uzaydaki standart torus üzerine eşleme olur. Tanım 2.2.13 gereğince c eğrileri jenerik $W-$eğrilerine dönüşür ve böylece ispat tamamlanır.

(1)⇒(2) $X \in T_M(P)$ birim vektör olsun öyle ki uygun γ jeodeziği

$$c = f \circ \gamma$$

jenerik $W-$eğrisini oluştursun. Böylece

$$\begin{aligned} c(\mathbb{R}) &= (f \circ \gamma)(\mathbb{R}) \\ &= f(\gamma(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

olur. $\gamma(\mathbb{R}) \subset M$ olduğundan $f(\gamma(\mathbb{R})) \subset f(M)$ ve böylece $c(\mathbb{R}) \subset f(M)$ bulunur. M manifoldu kapalı olduğundan $f(M)$ kapalı ve kapanışı kendisine eşit olur. Teorem 2.3.8 gereğince $\overline{c(\mathbb{R})} \subset f(M)$ elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.1 gereğince kapalı $W-$eğrilerinin denklemi

$$c(t) = (\text{sabit vektör}) + \sum_{i=1}^{m} r_i \left(\cos\left(a_i t\right) \overrightarrow{e_{2i-1}} + \sin\left(a_i t\right) \overrightarrow{e_{2i}}\right)$$

şeklinde verilir. Buradaki sabit vektör $1 \leq i \leq 2m$ ve her i için $c_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(c_1, c_2, ..., c_{2m-1}, c_{2m})$ olarak belirlensin. Böylece $c(t)$ eğrisinin koordinatları

$$\begin{aligned} c(t) = {} & (c_1 + r_1 \cos(a_1 t), c_2 + r_1 \sin(a_1 t), c_3 + r_2 \cos(a_2 t), \\ & c_4 + r_2 \sin(a_2 t), ..., c_{2m-1} + r_m \cos(a_m t), c_{2m} + r_m \sin(a_m t)) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada yay-parametresi t ye göre yüksek mertebeden türevler hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} c'(t) &= (-a_1 r_1 \sin(a_1 t), a_1 r_1 \cos(a_1 t), -a_2 r_2 \sin(a_2 t), a_2 r_2 \cos(a_2 t), ..., \\ &\quad -a_m r_m \sin(a_m t), a_m r_m \cos(a_m t)) \\ c''(t) &= (-a_1^2 r_1 \cos(a_1 t), -a_1^2 r_1 \sin(a_1 t), -a_2^2 r_2 \cos(a_2 t), -a_2^2 r_2 \sin(a_2 t), ..., \\ &\quad -a_m^2 r_m \cos(a_m t), -a_m^2 r_m \sin(a_m t)) \\ c'''(t) &= (a_1^3 r_1 \sin(a_1 t), -a_1^3 r_1 \cos(a_1 t), a_2^3 r_2 \sin(a_2 t), -a_2^3 r_2 \cos(a_2 t), ..., \\ &\quad a_m^3 r_m \sin(a_m t), -a_m^3 r_m \cos(a_m t)) \end{aligned}$$

elde edilir. $t = 0$ noktasında

$$c'''(0) = (0, -a_1^3 r_1, 0, -a_2^3 r_2, ..., 0, -a_m^3 r_m)$$

olur. Tanım 2.2.21 kullanılırsa $\overline{c(\mathbb{R})}$ $n-$boyutlu torusunun genel ifadesi $1 \leq i \leq m$, $u_i \in \mathbb{R}$ ve $n = 2m$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\overline{c(\mathbb{R})}(u_1, u_2, ..., u_m) &= (r_1 \cos(u_1 t), r_1 \sin(u_1 t)\,, r_2 \cos(u_2 t), \\ &\quad r_2 \sin(u_2 t), ..., r_m \cos(u_m t), r_m \sin(u_m t))\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\overline{c(\mathbb{R})}\right) &= (-u_1 r_1 \sin(u_1 t), u_1 r_1 \cos(u_1 t)\,, -u_2 r_2 \sin(u_2 t), \\ &\quad u_2 r_2 \cos(u_2 t), ..., -u_m r_m \sin(u_m t), u_m r_m \cos(u_m t))\end{aligned}$$

elde edilir ve $t = 0$ noktasında

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{c(\mathbb{R})}\right)|_{t=0} = (0, u_1 r_1, 0, u_2 r_2, ..., 0, u_m r_m)$$

olarak yazılır. Şimdi $c'''(0) = \overrightarrow{A}$ ve $\frac{d}{dt}\left(\overline{c(\mathbb{R})}\right)|_{t=0} = \overrightarrow{B}$ olsun. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lambda_1 \overrightarrow{A} + \lambda_2 \overrightarrow{B} = 0$$

şeklinde seçilirse

$$\begin{aligned}&(0, -\lambda_1 a_1^3 r_1, 0, -\lambda_1 a_2^3 r_2, ..., 0, -\lambda_1 a_m^3 r_m) \\ &\quad + (0, \lambda_2 u_1 r_1, 0, \lambda_2 u_2 r_2, ..., 0, \lambda_2 u_m r_m) = 0\end{aligned}$$

bulunur ve bu eşitlik düzenlenirse

$$(0, -\lambda_1 a_1^3 r_1 + \lambda_2 u_1 r_1, 0, -\lambda_1 a_2^3 r_2 + \lambda_2 u_2 r_2, ..., 0, -\lambda_1 a_m^3 r_m + \lambda_2 u_m r_m) = 0$$

elde edilir. Buradan her $1 \leq i \leq m$ için $r_i\,(-\lambda_1 a_i^3 + \lambda_2 u_i) = 0$ sonucuna varılır. Her $1 \leq i \leq m$ için $r_i \neq 0$ olduğundan

$$-\lambda_1 a_i^3 + \lambda_2 u_i = 0$$

yazılır. λ_1 ve λ_2 değerlerinin ikisinin birden sıfır olma zorunluluğu olmadığından $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ vektörleri lineer bağımlı olur. Böylece $c'''(0) \in \chi(\overline{c(\mathbb{R})})$ olduğundan $c'''(0)$ vektörünün $\overline{c(\mathbb{R})}$ torusuna teğet olması anlamına gelir. Yardımcı Teorem 3.2.2 de

$$c'''(0) = -A_{h(X,X)}X + \overline{\nabla}_X h(X, X)$$

olup f bir imbedding olduğunda $c'''(0) \in \chi(M)$ olur. $\overline{\nabla}_X h(X,X) \in \chi(M)^{\perp}$ olduğundan

$$(\overline{\nabla}_X h)(X,X) \;=\; 0$$

olur. Bu her X vektörü için sağlanacağından

$$\overline{\nabla} h \;=\; 0$$

elde edilir. Teorem 2.5.17 gereğince **(2)** elde edilir. Kabul edelim ki f fonksiyonu imbedding olmasın. Bu durumda

$$A \;=\; \{q \in M \mid T_x M = T_q M, \forall x \in f^{-1}(\{f(q)\})\}$$

kümesi M manifoldunun limit noktalarını oluşturur. $\overline{A} = M$ olacağından Tanım 2.3.7 gereğince A kümesi M manifoldunda yoğun olur. O zaman jeodezikler için

$$\lim_{k \to \infty} \gamma_k'(0) \;=\; X$$

ve $c_k'''(0) \in T_{\gamma_k(0)} M$

$$(\overline{\nabla}_{\gamma_k'(0)} h)(\gamma_k'(0), \gamma_k'(0)) \;=\; 0$$

olan bir (γ_k) dizisi vardır. Böylece **(2)** geçerlidir.

Teorem 3.3.2: M kapalı, irtibatlı Riemann 2-manifold ve

$$f: \;\; M \;\to\; \mathbb{E}^4$$

izometrik immersiyon olmak üzere, her birim hızlı $\gamma : \mathbb{R} \to M$ jeodeziği için

$$c \;=\; f \circ \gamma$$

görüntü eğrisi bir $W-$eğrisi olsun. Bu durumda iki olasılık söz konusudur:

(1) Eğer M manifoldu periyodik olmayan bir jeodezik içerirse $f(M)$ $\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^1(r_2) \subset \mathbb{E}^4$ torusunun bir altkümesine izometriktir.

(2) Eğer M manifoldundaki tüm jeodezikler periyodik ise $f,\ \mathbb{S}^2(r) \subset \mathbb{E}^4$ Öklidyen $2-$küre üzerinde bir izometridir.

İspat: (1) $\gamma : \mathbb{R} \to M$ jeodeziği periyodik olmasın. Öncelikle $c = f \circ \gamma$ eğrisinin de periyodik olmadığını ispatlayalım. Eğer c eğrisi periyodik ise pozitif bir L sayısı mevcut olur öyle ki her t reel ve k tamsayıları için

$$c(t + kL) \ = \ c(t)$$

olur. $k \in \mathbb{Z}$ ve $c^{-1} = \gamma^{-1} \circ f^{-1}$ olduğundan

$$\mathbb{Z}L \subset c^{-1}(\{c(0)\}) = \gamma^{-1}(f^{-1}(\{c(0)\}))$$

olur. Böylelikle M manifoldu sınırlıdır. M manifoldu kapalı olduğundan Tanım 2.3.9 gereğince M kompakt ve $f^{-1}(\{c(0)\})$ kümesi sonlu olur. Bu durumda öyle k ve l tamsayıları mevcut olur ki $k \neq l$ olmak üzere

$$\gamma(kL) \ = \ \gamma(lL)$$

yazılır ve buradan

$$\begin{aligned} \gamma'(kL) &= \gamma'(lL) \\ c'(kL) &= c'(lL) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece γ periyodik olur ki bu bir çelişkidir. Bundan dolayı c eğrisi periyodik değildir. Yardımcı Teorem 3.1.1 gereğince bu eğri rankı 4 olan bir $W-$eğrisi olmalıdır ve $\overline{c(\mathbb{R})}$ kapanışı $f(M)$ yi içeren bir

$$\mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^1(r_2) \ = \ T$$

torusudur. Böylelikle f fonksiyonu bir immersiyondur. Bu durumda boştan farklı bir $U \subset M$ açık kümesi mevcut olur öyle ki $f(U) \subset T$ olur. Böylece U cümlesindeki jeodeziklerin görüntüleri T torusunda jeodeziktir. Fakat f

immersiyonu ve T torusu için, her birim hızlı $\gamma : \mathbb{R} \to M$ jeodeziği için $c = f \circ \gamma$ görüntü eğrisi bir $W-$eğrisidir. O zaman ilk Frenet verileriyle verilen $W-$eğrisinin tekliğiyle, U cümlesinden geçen, M manifoldunun her bir jeodeziği T torusunda içerilen bir görüntüye sahiptir. Böylece $f(M) \subset T$ olur ve **(1)** ispatlanır.

(2) M manifoldunun tüm jeodezikleri periyodik ve ortak bir L periyoduna sahip olsun. M manifoldundaki tüm birim hızlı γ jeodezikleri ve tüm $t \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$\gamma(t) \quad = \quad \gamma(t+L) \tag{3.12}$$

olur.

$$\begin{aligned} c(t) &= (f \circ \gamma)(t) \\ &= f(\gamma(t)) \\ &= f(\gamma(t+L)) \\ &= (f \circ \gamma)(t+L) \\ &= c(t+L) \end{aligned}$$

olduğundan L periyodu ile tüm $c = f \circ \gamma$ görüntü eğrileri de periyodiktir. Burada h ikinci temel formu gibi $\overline{\nabla} h$ ve $\overline{\nabla}^2 h$ ifadeleri de aynı normal demette yer alır. O zaman (3.4) eşitlikleri ve Teorem 2.2.7 den p noktasından geçen tüm jeodeziklerin görüntüleri ve böylece M manifoldunun görüntüsü saptanabilirdi. Şimdi $h, \overline{\nabla} h$ ve $\overline{\nabla}^2 h$ üzerinde oldukça basit bir nokta bulmalıyız. (3.12) eşitliği gereğince tüm jeodezikler periyodik olduğundan $f(M)$ ifadesinin küre olması gerekir. $p \in M$ noktası için

$$E_p \quad = \quad \{h(X,X) : X \in T_M(P), \|X\| = 1\} \quad \subset \quad \perp_p^f M$$

cümlesi bir kuadratik forma karşılık gelir. Bu cümle doğru parçası veya nokta olarak dejenere olabilecek bir elipstir. $\perp_p^f M$ normal uzayının orijininin bu elipsin dışında yatması için gerek ve yeter şart A_ξ nin pozitif definit olduğu bir $\xi \in \perp_p^f M$ nin bulunabilmesidir. Eğer

$$\|f(p)\| = \max_{p\in M} \|f(p)\|$$

ise elbette bir ξ vardır.

$$\|c''\| = \|X'\| = \kappa$$

olduğundan $\|c''\| = \|h(\gamma', \gamma')\|$ değeri her c $W-$eğrisi için sabit olur. M manifoldu kompakt olduğu ve düz doğru içermediği sürece κ sıfırdan farklıdır. (3.4) eşitliğinde $c'' = h(X, X)$ olduğu ifade edilmişti. Böylece

$$\|h(X, X)\|^2 = \|c''\|^2 = \kappa^2$$

elde edilir. $\kappa \neq 0$ olduğundan her $X \neq 0$ için

$$h(X, X) \neq 0 \tag{3.13}$$

olur. Bundan dolayı orijin kesinlikle E_p elipsi üzerinde yatmaz. Süreklilikten dolayı asla E_p içinde değildir. Özellikle ortalama eğrilik vektörü η olan elipsin merkezi asla kaybolmaz.

$$\overline{\eta} = \frac{\eta}{\|\eta\|}$$

olsun. Genelliği bozmadan M manifoldunun yönlendirilebilir olduğunu kabul edebiliriz. Böylelikle $\overline{\eta}$ eğrilik vektörüne ortogonal olan her yerde tanımlı ikinci bir birim normal $\overline{\xi}$ vektör alanı vardır.

$$Q(x) = \left\langle h(X, X), \overline{\xi} \right\rangle$$

olsun. Q, M manifoldu üzerinde bir kuadratik formdur ve inşası gereği definite değildir. Böylece M manifoldunun en az bir $\overline{p}$ noktası dejenere olur. Aksi halde M manifoldunun geni 1 ve her yerde indefinite olur. Diğer taraftan M manifoldunun tüm jeodezikleri periyodik iken temel grubu sonlu olur ve böylece çelişki elde edilir. Tanım 2.4.20 gereğince

$$\langle A_{\overline{\eta}} X, X \rangle = \langle h(X, X), \overline{\eta} \rangle$$

olur. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $h(X,X) = \lambda\overline{\eta}$ olsun. O zaman

$$\langle A_{\overline{\eta}}X, X\rangle = \langle \lambda\overline{\eta}, \overline{\eta}\rangle = \lambda \langle \overline{\eta}, \overline{\eta}\rangle$$

bulunur. $\overline{\eta}$ vektörü birim vektör olduğundan $\langle \overline{\eta}, \overline{\eta}\rangle = 1$ dir. Böylece

$$\lambda = \langle A_{\overline{\eta}}X, X\rangle$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda\overline{\eta} = h(X,X) = \langle A_{\overline{\eta}}X, X\rangle \overline{\eta}$$

yazılır. Bundan dolayı

$$E_{\overline{p}} \subset \{\lambda\overline{\eta} |\, \lambda > 0\}$$

ve her $X \in T_M(\overline{p})$ vektörü için

$$h(X,X) = \langle A_{\overline{\eta}}X, X\rangle \overline{\eta} \tag{3.14}$$

olur. Şimdi

$$(\overline{\nabla} h)_{\overline{p}} = 0 \tag{3.15}$$

olduğunu gösterelim. $X \in T_M(\overline{p})$ bir tanjant vektör ve $\|X\| = 1$ olsun. γ eğrisi tanjant vektörü $\gamma'(0) = X$ olan bir jeodezik olsun. c bir $W-$eğrisi olduğundan Yardımcı Teorem 3.2.2 gereğince

$$\begin{aligned}
\|c''\| &= \sqrt{\langle c''(0), c''(0)\rangle} \\
\|c'''\| &= \sqrt{\langle c'''(0), c'''(0)\rangle}
\end{aligned}$$

sabit sayılardır. Böylece

$$\langle c''(0), c''(0)\rangle \text{ ve } \langle c'''(0), c'''(0)\rangle$$

sabit olur. Buradan her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\langle c'''(0), c''(0)\rangle + \langle c''(0), c'''(0)\rangle &= 0 \\
\left\langle c^{(4)}(0), c'''(0)\right\rangle + \left\langle c'''(0), c^{(4)}(0)\right\rangle &= 0
\end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$\langle c''(0), c'''(0)\rangle = 0 = \left\langle c'''(0), c^{(4)}(0)\right\rangle$$

elde edilir. (3.4) eşitlikleri gereği

$$\begin{aligned}\langle c''(0), c'''(0)\rangle &= \left\langle h(X,X), -A_{h(X,X)}X + \overline{\nabla}_X h(X,X)\right\rangle \\ &= -\left\langle h(X,X), A_{h(X,X)}X\right\rangle + \left\langle h(X,X), \overline{\nabla}_X h(X,X)\right\rangle\end{aligned}$$

olur. Tanım 2.4.16 ve Tanım 2.4.20 gereğince $A_{h(X,X)}X \in \chi(M)$ ve $h(X,X) \in \chi(M)^{\perp}$ olduğundan

$$\left\langle h(X,X), A_{h(X,X)}X\right\rangle = 0$$

olur ve buradan

$$\langle c''(0), c'''(0)\rangle = \left\langle h(X,X), \overline{\nabla}_X h(X,X)\right\rangle = 0$$

yazılır. Böylece

$$\left\langle h(X,X), (\overline{\nabla}_X h)(X,X)\right\rangle = 0$$

elde edilir. (3.14) eşitliğinde $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\langle A_{\overline{\eta}}X, X\rangle = \alpha$$

olsun. (3.13) eşitliği gereğince böyle bir α sayısı daima vardır. Böylece

$$h(X,X) = \alpha\overline{\eta}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\left\langle \alpha\overline{\eta}, (\overline{\nabla}_X h)(X,X)\right\rangle = 0$$

veya

$$\alpha\left\langle \overline{\eta}, (\overline{\nabla}_X h)(X,X)\right\rangle = 0$$

elde edilir. $\alpha \neq 0$ olduğundan

$$\left\langle \overline{\eta}, (\overline{\nabla}_X h)(X, X) \right\rangle = 0$$

bulunur. $\overline{\eta}$ ve $\overline{\xi}$ ortogonal olduğundan

$$\left\langle \overline{\eta}, \overline{\xi} \right\rangle = 0$$

olur. Böylece $0 \neq c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(\overline{\nabla}_X h)(X, X) = c\overline{\xi}$$

şeklinde yazılır ve buradan $(\overline{\nabla}_X h)(X, X)$ değeri $\overline{\xi}(\overline{p})$ ifadesinin bir reel sayı katıdır. Tanım 2.4.20 de (2.5) eşitliğinde $X = Y$ ve $\xi = \overline{\nabla} h$ alınırsa

$$\langle A_{\overline{\nabla} h}, X \rangle = \left\langle h(X, X), \overline{\nabla} h \right\rangle$$

bulunur. Ayrıca

$$\left\langle h(X, X), \overline{\nabla}_X h(X, X) \right\rangle = 0$$

olduğundan,

$$\langle A_{\overline{\nabla} h}, X \rangle = 0$$

elde edilir. $X \neq 0$ ve $A_{\overline{\nabla} h} \in \chi(M)$ olduğundan

$$A_{\overline{\nabla} h} = 0$$

olur. (2.5) eşitliği gereğince

$$\langle A_{\overline{\eta}} X, X \rangle = \langle h(X, X), \overline{\eta} \rangle$$

bulunur. Burada $h(X, X) \in \chi(M)^{\perp}$ olduğundan

$$h(X, X) = \lambda \overline{\xi}$$

olacak şekilde $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} \langle A_{\overline{\eta}} X, X \rangle &= \left\langle \lambda \overline{\xi}, \overline{\eta} \right\rangle = \lambda \left\langle \overline{\xi}, \overline{\eta} \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\left\langle \left(\overline{\nabla} A\right)_{\overline{\eta}}, X \right\rangle + \langle A_{\overline{\eta}} X, \nabla_X X \rangle \;=\; 0$$

olur.

$$\nabla_X X \;=\; 0$$

olduğundan, $\langle A_{\overline{\eta}} X, \nabla_X X \rangle = 0$,

$$\left\langle \left(\overline{\nabla} A\right)_{\overline{\eta}}, X \right\rangle \;=\; 0$$

ve

$$(\overline{\nabla} A)_{\overline{\eta}} \;=\; 0$$

elde edilir. (3.4) eşitliğinde,

$$c^{(4)}(0) \;=\; -h(A_{h(X,X)}X, X) + (\overline{\nabla}^2_{(X,X)} h)(X, X) \qquad (3.16)$$

sonucuna varılır. Özel olarak $c^{(4)}(0)$ bir normal vektördür. Eğer $(\overline{\nabla}_X h)(X, X) \neq 0$ ise (3.4) ve (3.16) eşitliklerinden $c''(0)$ ve $c^{(4)}(0)$ vektörleri lineer bağımlı ve c eğrisinin rankı 3 olur. Bu ise Yardımcı Teorem 3.1.1 ile çelişir ve o halde $(\overline{\nabla}_X h)(X, X) = 0$ dır. $\overline{p}$ noktasındaki pozitif definit $A_{\overline{\eta}}$ şekil operatörünü düşünelim. $\overline{\eta}(\overline{p}) = \overline{\eta}$ olmak üzere

$$A_{\overline{\eta}} \;=\; \lambda I$$

olacak şekilde bir $\lambda > 0$ var olsun. (3.15) eşitliğinden,

$$\{c'(0), c''(0), c'''(0)\}$$

cümlesi lineer bağımlıdır ve böylece c eğrisinin rankı 2 dir. Bu nedenle $\overline{p}$ noktasından geçen tüm jeodeziklerin görüntüleri $\dfrac{1}{\lambda}$ yarıçaplı ve $f(\overline{p}) + \dfrac{\overline{\eta}}{\lambda}$ merkezli çemberlerdir. $f(M)$ görüntüsü aynı yarıçap ve merkezli ve $f(\overline{p})$ deki $df(T_M(P))$ tanjant uzayı ile 2-küre üzerinde yatar. **(2)** ifadesinin ispatını $A_{\overline{\eta}}$

dönüşümünün farklı iki özdeğere sahip olamayacağını göstererek tamamlayalım.

$$0 \;<\; \lambda \;<\; \mu$$

olan λ ve μ özdeğerlerine ve uygun ortonormal $\{e_1, e_2\}$ özvektörlerine sahip $A_{\overline{\eta}}$ dönüşümü verilsin ve γ_s jeodezik, $s \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ ve $\gamma_s'(0) = X_s$ olmak üzere

$$X_s \;=\; e_1 \cos s + e_2 \sin s \tag{3.17}$$

olsun.

$$c_s \;=\; f \circ \gamma_s$$

eğrisi için $\{c_s'(0), c_s''(0), c_s'''(0)\}$ cümlesi lineer bağımsızdır. Bu nedenden c_s eğrisi rankı 4 olan bir $W-$eğrisidir. Şimdi (3.4), (3.14) ve (3.15) eşitliklerini c_s eğrisinin $\{\kappa_1(s), \kappa_2(s)\}$ Frenet eğriliklerini hesaplamak için kullanalım:

$$\kappa_1(s) = \|T'(s)\| = \|c''(s)\| = \|h(X, X)\|$$

olur. (3.14) eşitliği gereğince

$$\begin{aligned} h(X, X) &= \langle A_{\overline{\eta}}\left(e_1 \cos s + e_2 \sin s\right), e_1 \cos s + e_2 \sin s\rangle\, \overline{\eta} \\ &= \langle A_{\overline{\eta}} e_1 \cos s + A_{\overline{\eta}} e_2 \sin s, e_1 \cos s + e_2 \sin s\rangle\, \overline{\eta} \\ &= [\langle A_{\overline{\eta}} e_1 \cos s, e_1 \cos s\rangle + \langle A_{\overline{\eta}} e_1 \cos s, e_2 \sin s\rangle \\ &\quad + \langle A_{\overline{\eta}} e_2 \sin s, e_1 \cos s\rangle + \langle A_{\overline{\eta}} e_2 \sin s, e_2 \sin s\rangle]\, \overline{\eta} \\ &= [\cos^2 s \,\langle A_{\overline{\eta}} e_1, e_1\rangle + \cos s \sin s \,\langle A_{\overline{\eta}} e_1, e_2\rangle \\ &\quad + \cos s \sin s \,\langle A_{\overline{\eta}} e_2, e_1\rangle + \sin^2 s \,\langle A_{\overline{\eta}} e_2, e_2\rangle\big]\, \overline{\eta} \end{aligned}$$

elde edilir. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $A_{\overline{\eta}} e_1 = \lambda e_1,\ A_{\overline{\eta}} e_2 = \mu e_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} h(X, X) &= [\cos^2 s \,\langle \lambda e_1, e_1\rangle + \cos s \sin s \,\langle \lambda e_1, e_2\rangle \\ &\quad + \cos s \sin s \,\langle \mu e_2, e_1\rangle + \sin^2 s \,\langle \mu e_2, e_2\rangle\big]\, \overline{\eta} \\ &= [\lambda \cos^2 s \,\langle e_1, e_1\rangle + \lambda \cos s \sin s \,\langle e_1, e_2\rangle \\ &\quad + \mu \cos s \sin s \,\langle e_2, e_1\rangle + \mu \sin^2 s \,\langle e_2, e_2\rangle\big]\, \overline{\eta} \end{aligned}$$

yazılır. $\{e_1, e_2\}$ cümlesi ortonormal olduğundan

$$h(X,X) = \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right) \overline{\eta} \tag{3.18}$$

bulunur. $\overline{\eta}$ birim vektör olduğundan

$$\begin{aligned}
\kappa_1(s) &= \|h(X,X)\| \\
&= \sqrt{\langle h(X,X), h(X,X)\rangle} \\
&= \sqrt{\left\langle \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right) \overline{\eta}, \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right) \overline{\eta} \right\rangle} \\
&= \sqrt{\left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2 \langle \overline{\eta}, \overline{\eta}\rangle} \\
&= \sqrt{\left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2} \\
&= \lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s
\end{aligned} \tag{3.19}$$

bulunur. $\kappa_2(s)$ değerini hesaplamadan önce Gramm-Schmidt metodu ile c eğrisinin ortonormal Frenet çatısını oluşturalım.

$$E_1 = c' = X \tag{3.20}$$

alalım.

$$\begin{aligned}
E_2 &= c'' - \frac{\langle c'', E_1\rangle}{\langle E_1, E_1\rangle} E_1 \\
&= h(X,X) - \frac{\langle h(X,X), X\rangle}{\langle X, X\rangle} X
\end{aligned} \tag{3.21}$$

yazılır. Fakat $\overline{\eta}$ vektörü e_1 ve e_2 vektörüne dik olduğundan

$$\langle h(X,X), X\rangle = \left\langle \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right) \overline{\eta}, e_1 \cos s + e_2 \sin s \right\rangle = 0$$

olur. Böylece

$$E_2 = h(X,X) \tag{3.22}$$

elde edilir.

$$E_3 = c''' - \frac{\langle c''', E_1\rangle}{\langle E_1, E_1\rangle} E_1 - \frac{\langle c''', E_2\rangle}{\langle E_2, E_2\rangle} E_2 \tag{3.23}$$

şeklinde yazılır. Burada $\overline{\nabla} h = 0$ olduğundan

$$c''' = -A_{h(X,X)} X \tag{3.24}$$

olur. Şimdi c''' değerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
c''' &= -A_{h(X,X)} X \\
&= -A_{\left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)\overline{\eta}} X \\
&= -\left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right) A_{\overline{\eta}} \left(e_1 \cos s + e_2 \sin s\right) \\
&= -\left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right) \left(\cos s A_{\overline{\eta}} e_1 + \sin s A_{\overline{\eta}} e_2\right) \\
&= -\left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right) \left(\lambda \cos s e_1 + \mu \sin s e_2\right) \\
&= -\left(\lambda^2 \cos^3 s + \lambda\mu \sin^2 s \cos s\right) e_1 \\
&\quad -\left(\lambda\mu \cos^2 s \sin s + \mu^2 \sin^3 s\right) e_2
\end{aligned} \tag{3.25}$$

elde edilir.

(3.23) ifadesinde bulunan iç çarpımlar hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\langle c''', E_1 \rangle &= \Big\langle -\left(\lambda^2 \cos^3 s + \lambda\mu \sin^2 s \cos s\right) e_1 \\
&\quad -\left(\lambda\mu \cos^2 s \sin s + \mu^2 \sin^3 s\right) e_2, e_1 \cos s + e_2 \sin s \Big\rangle \\
&= -\left(\lambda^2 \cos^4 s + \lambda\mu \sin^2 s \cos^2 s\right) \\
&\quad -\left(\lambda\mu \cos^2 s \sin^2 s + \mu^2 \sin^4 s\right) \\
&= -\lambda^2 \cos^4 s - \lambda\mu \sin^2 s \cos^2 s \\
&\quad -\lambda\mu \cos^2 s \sin^2 s - \mu^2 \sin^4 s \\
&= -\left(\lambda^2 \cos^4 s + 2\lambda\mu \sin^2 s \cos^2 s + \mu^2 \sin^4 s\right) \\
&= -\left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2
\end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir. $\overline{\eta}$ vektörü e_1 ve e_2 vektörüne dik olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle c''', E_2 \rangle &= \Big\langle -\left(\lambda^2 \cos^3 s + \lambda\mu \sin^2 s \cos s\right) e_1 \\ &\quad - \left(\lambda\mu \cos^2 s \sin s + \mu^2 \sin^3 s\right) e_2, \\ &\quad \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right) \overline{\eta} \Big\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

olur. (3.25), (3.26) ve (3.27) eşitlikleri (3.23) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} E_3 &= -\left(\lambda^2 \cos^3 s + \lambda\mu \sin^2 s \cos s\right) e_1 \\ &\quad - \left(\lambda\mu \cos^2 s \sin s + \mu^2 \sin^3 s\right) e_2 \\ &\quad + \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2 (e_1 \cos s + e_2 \sin s) \\ &= -\left(\lambda^2 \cos^3 s + \lambda\mu \sin^2 s \cos s\right) e_1 \\ &\quad - \left(\lambda\mu \cos^2 s \sin s + \mu^2 \sin^3 s\right) e_2 \\ &\quad + \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2 \cos s e_1 \\ &\quad + \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2 \sin s e_2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} E_3 &= \Big[-\left(\lambda^2 \cos^3 s + \lambda\mu \sin^2 s \cos s\right) \\ &\quad + \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2 \cos s \Big] e_1 \\ &\quad - \Big[\left(\lambda\mu \cos^2 s \sin s + \mu^2 \sin^3 s\right) \\ &\quad - \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2 \sin s \Big] e_2 \end{aligned} \tag{3.28}$$

elde edilir. Şimdi ortonormal çatıyı oluşturabiliriz:

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|} = \frac{X}{\|X\|} = X \tag{3.29}$$

ve

$$V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|} = \frac{h(X,X)}{\|h(X,X)\|} \tag{3.30}$$

ve

$$V_3 = \frac{E_3}{\|E_3\|} \tag{3.31}$$

olacaktır. Burada $\kappa_2(s) = \langle V_2', V_3 \rangle$ olduğundan V_2' ve V_3 değerlerini hesaplayacak olursak (3.24) ve (3.30) eşitlikleri gereğince

$$\begin{aligned}
V_2' &= \frac{1}{\|h(X,X)\|}\widetilde{\nabla}_X h(X,X) = \frac{1}{\|h(X,X)\|}(-A_{h(X,X)}X) \\
&= -\frac{1}{\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)}A_{\left(\lambda\cos^2 s+\mu\sin^2 s\right)\overline{\eta}}X \\
&= -\frac{\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)}{\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)}A_{\overline{\eta}}\left(e_1\cos s + e_2\sin s\right) \\
&= -\lambda\cos s e_1 - \mu\sin s e_2
\end{aligned} \tag{3.32}$$

olur. Böylece

$$\kappa_2(s) = \langle V_2', V_3 \rangle = \frac{1}{\|E_3\|}\langle V_2', E_3 \rangle \tag{3.33}$$

yazılır ve bu eşitlikte gerekli olan $\langle V_2', E_3 \rangle$ değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\langle V_2', E_3 \rangle &= \Big\langle -\lambda\cos s e_1 - \mu\sin s e_2, \\
&\quad \Big[-\left(\lambda^2\cos^3 s + \lambda\mu\sin^2 s\cos s\right) \\
&\quad + \left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^2\cos s\Big] e_1 \\
&\quad + \Big[-\left(\lambda\mu\cos^2 s\sin s + \mu^2\sin^3 s\right) \\
&\quad + \left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^2\sin s\Big] e_2\Big\rangle \\
&= \lambda^3\cos^4 s + \mu^3\sin^4 s \\
&\quad +\lambda^2\mu\sin^2 s\cos^2 s + \lambda\mu^2\cos^2 s\sin^2 s \\
&\quad - \left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^2
\end{aligned} \tag{3.34}$$

veya

$$
\begin{aligned}
\langle V_2', E_3 \rangle &= \lambda^3 \cos^4 s + \mu^3 \sin^4 s + \lambda^2 \mu \sin^2 s \cos^2 s \\
&\quad + \lambda \mu^2 \sin^2 s \cos^2 s - \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^3 \\
&= \lambda^3 \cos^4 s + \mu^3 \sin^4 s + \lambda^2 \mu \sin^2 s \cos^2 s \\
&\quad + \lambda \mu^2 \sin^2 s \cos^2 s - \lambda^3 \cos^6 s - 3\lambda^2 \cos^4 s \mu \sin^2 s \\
&\quad - 3\lambda \cos^2 s \mu^2 \sin^4 s - \mu^3 \sin^6 s
\end{aligned}
$$

olur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\langle V_2', E_3 \rangle &= \lambda^3 \cos^4 s \,(1 - \cos^2 s) + \mu^3 \sin^4 s \left(1 - \sin^2 s\right) \\
&\quad + \lambda^2 \mu \sin^2 s \cos^2 s \,(1 - 3\cos^2 s) \\
&\quad + \lambda \mu^2 \sin^2 s \cos^2 s \left(1 - 3\sin^2 s\right) \\
&= \lambda^3 \cos^4 s \sin^2 s + \mu^3 \sin^4 s \cos^2 s \\
&\quad + \lambda^2 \mu \sin^2 s \cos^2 s (\sin^2 s - 2\cos^2 s) \\
&\quad + \lambda \mu^2 \sin^2 s \cos^2 s \left(\cos^2 s - 2\sin^2 s\right) \\
&= \lambda^3 \cos^4 s \sin^2 s + \mu^3 \sin^4 s \cos^2 s \\
&\quad + \lambda^2 \mu \sin^4 s \cos^2 s - 2\lambda^2 \mu \sin^2 s \cos^4 s \\
&\quad + \lambda \mu^2 \sin^2 s \cos^4 s - 2\lambda \mu^2 \sin^4 s \cos^2 s \\
&= \sin^2 s \cos^4 s \left(\lambda^3 - 2\lambda^2 \mu + \lambda \mu^2\right) \\
&\quad + \cos^2 s \sin^4 s \left(\mu^3 - 2\lambda \mu^2 + \lambda^2 \mu\right) \\
&= \lambda \sin^2 s \cos^4 s \left(\lambda^2 - 2\lambda \mu + \mu^2\right) \\
&\quad + \mu \cos^2 s \sin^4 s \left(\mu^2 - 2\lambda \mu + \lambda^2\right)
\end{aligned}
$$

veya

$$\begin{aligned}
\langle V_2', E_3\rangle &= \lambda \sin^2 s \cos^4 s\,(\mu-\lambda)^2 + \mu \cos^2 s \sin^4 s\,(\mu-\lambda)^2 \\
&= \left(\lambda \sin^2 s \cos^4 s + \mu \cos^2 s \sin^4 s\right)(\mu-\lambda)^2 \\
&= \cos^2 s \sin^2 s \left(\mu \sin^2 s + \lambda \cos^2 s\right)(\mu-\lambda)^2
\end{aligned} \tag{3.35}$$

elde edilir. Şimdi $\|E_3\|$ değerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\|E_3\|^2 &= \Big\langle \Big[-\left(\lambda^2\cos^3 s + \lambda\mu \sin^2 s \cos s\right) + \left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2 \cos s\Big] e_1 \\
&\quad + \Big[-\left(\lambda\mu \cos^2 s \sin s + \mu^2 \sin^3 s\right) + \left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2 \sin s\Big] e_{2,} \\
&\quad \Big[-\left(\lambda^2\cos^3 s + \lambda\mu \sin^2 s \cos s\right) + \left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2 \cos s\Big] e_1 \\
&\quad + \Big[-\left(\lambda\mu \cos^2 s \sin s + \mu^2 \sin^3 s\right) + \left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2 \sin s\Big] e_2 \Big\rangle \\
&= \Big[-\left(\lambda^2\cos^3 s + \lambda\mu \sin^2 s \cos s\right) + \cos s\left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2\Big]^2 \\
&\quad + \Big[-\left(\lambda\mu \cos^2 s \sin s + \mu^2 \sin^3 s\right) + \sin s\left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2\Big]^2
\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\|E_3\|^2 &= \Big[-\lambda \cos s\left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right) + \cos s\left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2\Big]^2 \\
&\quad + \Big[-\mu \sin s\left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right) + \sin s\left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2\Big] \\
&= \left[\cos s\left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)\left(-\lambda + \lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)\right]^2 \\
&\quad + \left[\sin s\left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)\left(-\mu + \lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)\right]^2 \\
&= \left[\cos s\left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)\left(\lambda(\cos^2 s - 1) + \mu \sin^2 s\right)\right]^2 \\
&\quad + \left[\sin s\left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)\left(\mu\left(\sin^2 s - 1\right) + \lambda\cos^2 s\right)\right]^2 \\
&= \left[\cos s\left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)\left(-\lambda \sin^2 s + \mu \sin^2 s\right)\right]^2 \\
&\quad + \left[\sin s\left(\lambda\cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)\left(-\mu \cos^2 s + \lambda\cos^2 s\right)\right]^2
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\|E_3\|^2 &= \left[\cos s \sin^2 s \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)(\mu - \lambda)\right]^2 \\
&\quad + \left[\sin s \cos^2 s \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)(\lambda - \mu)\right]^2 \\
&= \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2 (\mu - \lambda)^2 \left(\cos^2 s \sin^4 s + \cos^4 s \sin^2 s\right) \\
&= (\mu - \lambda)^2 \cos^2 s \sin^2 s \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın karekökü alınırsa

$$\|E_3\| = (\mu - \lambda) \cos s \sin s \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right) \tag{3.36}$$

bulunur. (3.33), (3.35) ve (3.36) eşitlikleri gereğince

$$\begin{aligned}
\kappa_2(s) &= \frac{\cos^2 s \sin^2 s \left(\mu \sin^2 s + \lambda \cos^2 s\right)(\mu - \lambda)^2}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s \left(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s\right)} \\
&= (\mu - \lambda) \cos s \sin s
\end{aligned} \tag{3.37}$$

elde edilir. (3.19) ve (3.37) eşitliklerince

$$\begin{aligned}
\kappa_1(s) &= \lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s \\
\kappa_2(s) &= (\mu - \lambda) \cos s \sin s
\end{aligned} \tag{3.38}$$

yazılır. c_s eğrisinin rankı 4 olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.1 gereğince

$$c(s) = (r_1 \cos a_1 s, r_1 \sin a_1 s, r_2 \cos a_2 s, r_2 \sin a_2 s) \tag{3.39}$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi bu eğrinin eğrilikleri ile $a_1 s$ ve $a_2 s$ değerleri arasındaki ilişkiyi saptayalım. Öncelikle eğrinin Gramm-Schmidt metodu yardımıyla ortonormal Frenet çatısını oluşturalım:

$$E_1 = (-a_1 r_1 \sin a_1 s, a_1 r_1 \cos a_1 s, -a_2 r_2 \sin a_2 s, a_2 r_2 \cos a_2 s) \tag{3.40}$$

ve

$$E_2 = c''(s) - \frac{\langle c''(s), E_1 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle} E_1 \tag{3.41}$$

olup,

$$c''(s) = -\left(a_1^2 r_1 \cos a_1 s, a_1^2 r_1 \sin a_1 s, a_2^2 r_2 \cos a_2 s, a_2^2 r_2 \sin a_2 s\right) \qquad (3.42)$$

olduğundan

$$\langle c''(s), E_1\rangle = 0 \qquad (3.43)$$

olur ve (3.42) ve (3.43) değerleri (3.41) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$E_2 = \left(-a_1^2 r_1 \cos a_1 s, -a_1^2 r_1 \sin a_1 s, -a_2^2 r_2 \cos a_2 s, -a_2^2 r_2 \sin a_2 s\right) \qquad (3.44)$$

elde edilir. Böylece

$$E_3 = c'''(s) - \frac{\langle c'''(s), E_1\rangle}{\langle E_1, E_1\rangle} E_1 - \frac{\langle c'''(s), E_2\rangle}{\langle E_2, E_2\rangle} E_2 \qquad (3.45)$$

olur.

$$c'''(s) = \left(a_1^3 r_1 \sin a_1 s, -a_1^3 r_1 \cos a_1 s, a_2^3 r_2 \sin a_2 s, -a_2^3 r_2 \cos a_2 s\right) \qquad (3.46)$$

olduğundan

$$\frac{\langle c'''(s), E_1\rangle}{\langle E_1, E_1\rangle} = \frac{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2}{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2} \qquad (3.47)$$

ve

$$\langle c'''(s), E_2\rangle = 0 \qquad (3.48)$$

elde edilir. (3.46), (3.47) ve (3.48) eşitlikleri (3.45) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} E_3 = {} & \left(a_1^3 r_1 \sin a_1 s, -a_1^3 r_1 \cos a_1 s, a_2^3 r_2 \sin a_2 s, -a_2^3 r_2 \cos a_2 s\right) \\ & + \frac{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2}{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2} \left(-a_1 r_1 \sin a_1 s, a_1 r_1 \cos a_1 s,\right. \\ & \qquad \left. -a_2 r_2 \sin a_2 s, a_2 r_2 \cos a_2 s\right) \end{aligned} \qquad (3.49)$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} E_3 = {} & \left(\frac{a_1 a_2^2 r_1 r_2^2 \left(a_1^2 - a_2^2\right)}{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2} \sin a_1 s, \frac{a_1 a_2^2 r_1 r_2^2 \left(a_2^2 - a_1^2\right)}{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2} \cos a_1 s,\right. \\ & \left. \frac{a_1^2 a_2 r_1^2 r_2 \left(a_2^2 - a_1^2\right)}{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2} \sin a_2 s, \frac{a_1^2 a_2 r_1^2 r_2 \left(a_1^2 - a_2^2\right)}{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2} \cos a_2 s\right) \end{aligned} \qquad (3.50)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} E_4 &= c^{(4)}(s) - \frac{\left\langle c^{(4)}(s), E_1 \right\rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle} E_1 - \frac{\left\langle c^{(4)}(s), E_2 \right\rangle}{\langle E_2, E_2 \rangle} E_2 \\ & \quad - \frac{\left\langle c^{(4)}(s), E_3 \right\rangle}{\langle E_3, E_3 \rangle} E_3 \end{aligned} \tag{3.51}$$

olup

$$c^{(4)}(s) = \left(a_1^4 r_1 \cos a_1 s, a_1^4 r_1 \sin a_1 s, a_2^4 r_2 \cos a_2 s, a_2^4 r_2 \sin a_2 s\right) \tag{3.52}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca

$$\left\langle c^{(4)}(s), E_1 \right\rangle = 0 \text{ ve } \left\langle c^{(4)}(s), E_3 \right\rangle = 0 \tag{3.53}$$

ve

$$\frac{\left\langle c^{(4)}(s), E_2 \right\rangle}{\langle E_2, E_2 \rangle} = \frac{a_1^6 r_1^2 + a_2^6 r_2^2}{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2} \tag{3.54}$$

olur. (3.52), (3.53) ve (3.54) eşitlikleri (3.51) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} E_4 &= \left(a_1^4 r_1 \cos a_1 s, a_1^4 r_1 \sin a_1 s, a_2^4 r_2 \cos a_2 s, a_2^4 r_2 \sin a_2 s\right) \\ & \quad + \frac{a_1^6 r_1^2 + a_2^6 r_2^2}{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2} \left(-a_1^2 r_1 \cos a_1 s, -a_1^2 r_1 \sin a_1 s,\right. \\ & \qquad \left. -a_1^2 r_2 \cos a_2 s, -a_1^2 r_2 \sin a_2 s\right) \end{aligned} \tag{3.55}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} E_4 &= \left(\frac{a_1^2 a_2^4 r_1 r_2^2 \left(a_1^2 - a_2^2\right)}{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2} \cos a_1 s, \frac{a_1^2 a_2^4 r_1 r_2^2 \left(a_1^2 - a_2^2\right)}{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2} \sin a_1 s, \right. \\ & \quad \left. \frac{a_1^4 a_2^2 r_1^2 r_2 \left(a_2^2 - a_1^2\right)}{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2} \cos a_2 s, \frac{a_1^4 a_2^2 r_1^2 r_2 \left(a_2^2 - a_1^2\right)}{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2} \sin a_2 s \right) \end{aligned} \tag{3.56}$$

bulunur. (3.40) ve (3.44) eşitlikleri gereğince

$$\|E_1\| = \sqrt{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2} \text{ ve } \|E_2\| = \sqrt{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2} \tag{3.57}$$

elde edilir. (3.50) eşitliği gereğince

$$\begin{aligned} \|E_3\| &= \sqrt{\left(\frac{a_1 a_2^2 r_1 r_2^2 \left(a_1^2 - a_2^2\right)}{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2} \right)^2 + \left(\frac{a_1^2 a_2 r_1^2 r_2 \left(a_1^2 - a_2^2\right)}{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2} \right)^2} \\ &= \frac{a_1 a_2 r_1 r_2 \left(a_1^2 - a_2^2\right)}{\sqrt{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2}} \end{aligned} \tag{3.58}$$

olarak hesaplanır. (3.56) eşitliği gereğince

$$\begin{aligned} \|E_4\| &= \sqrt{\left(\frac{a_1^2 a_2^4 r_1 r_2^2 \left(a_1^2 - a_2^2\right)}{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2}\right)^2 + \left(\frac{a_1^4 a_2^2 r_1^2 r_2 \left(a_2^2 - a_1^2\right)}{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2}\right)^2} \\ &= \frac{\left(a_1^2 - a_2^2\right) a_1^2 a_2^2 r_1 r_2}{\sqrt{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2}} \end{aligned} \tag{3.59}$$

olarak bulunur. (3.40) ve (3.57) eşitlikleri gereğince

$$V_1 = \frac{(-a_1 r_1 \sin a_1 s, a_1 r_1 \cos a_1 s, -a_2 r_2 \sin a_2 s, a_2 r_2 \cos a_2 s)}{\sqrt{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2}} \tag{3.60}$$

olur. (3.44) ve (3.57) eşitlikleri gereğince

$$V_2 = \frac{(-a_1^2 r_1 \cos a_1 s, -a_1^2 r_1 \sin a_1 s, -a_2^2 r_2 \cos a_2 s, -a_2^2 r_2 \sin a_2 s)}{\sqrt{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2}} \tag{3.61}$$

ve (3.50) ve (3.58) eşitlikleri gereğince

$$V_3 = \frac{(a_2 r_2 \sin a_1 s, -a_2 r_2 \cos a_1 s, -a_1 r_1 \sin a_2 s, a_1 r_1 \cos a_2 s)}{\sqrt{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2}} \tag{3.62}$$

olarak hesaplanır. (3.56) ve (3.59) eşitlikleri gereğince

$$V_4 = \frac{(a_2^2 r_2 \cos a_1 s, a_2^2 r_2 \sin a_1 s, -a_1^2 r_1 \cos a_2 s, -a_1 r_1 \sin a_2 s)}{\sqrt{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2}} \tag{3.63}$$

şeklinde elde edilir. (3.60) eşitliği gereğince

$$V_1' = \frac{(-a_1^2 r_1 \cos a_1 s, -a_1^2 r_1 \sin a_1 s, -a_2^2 r_2 \cos a_2 s, -a_2^2 r_2 \sin a_2 s)}{\sqrt{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2}} \tag{3.64}$$

olur. (3.61) eşitliği gereğince

$$V_2' = \frac{(a_1^3 r_1 \sin a_1 s, -a_1^3 r_1 \cos a_1 s, a_2^3 r_2 \sin a_2 s, -a_2^3 r_2 \cos a_2 s)}{\sqrt{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2}} \tag{3.65}$$

elde edilir. (3.62) eşitliği gereğince

$$\begin{aligned} V_3' = {} & \frac{1}{\sqrt{a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2}} (a_1 a_2 r_2 \cos a_1 s, a_1 a_2 r_2 \sin a_1 s, \\ & -a_1 a_2 r_1 \cos a_2 s, -a_1 a_2 r_1 \sin a_2 s) \end{aligned} \tag{3.66}$$

bulunur. (3.61) ve (3.64) eşitlikleri gereğince,

$$\kappa_1(s) = \langle V_1', V_2 \rangle = \frac{a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2}{\sqrt{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)}} \tag{3.67}$$

ve (3.62) ve (3.65) eşitlikleri gereğince

$$\kappa_2(s) = \langle V_2', V_3 \rangle = \frac{a_1^3 a_2 r_1 r_2 - a_1 a_2^3 r_1 r_2}{\sqrt{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)}} \tag{3.68}$$

elde edilir. (3.63) ve (3.66) eşitlikleri gereğince

$$\kappa_3(s) = \langle V_3', V_4 \rangle = \frac{a_1 a_2^3 r_2^2 + a_1^3 a_2 r_1^2}{\sqrt{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)}} \tag{3.69}$$

olarak hesaplanır. (3.67), (3.68) ve (3.69) eşitlikleri gereğince

$$\begin{aligned}
\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s) + \kappa_3^2(s) &= \frac{\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)^2}{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)} \\
&\quad + \frac{\left(a_1^3 a_2 r_1 r_2 - a_1 a_2^3 r_1 r_2\right)^2}{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)} \\
&\quad + \frac{\left(a_1 a_2^3 r_2^2 + a_1^3 a_2 r_1^2\right)^2}{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)} \\
&= \frac{a_1^8 r_1^4 + 2a_1^4 r_1^2 a_2^4 r_2^2 + a_2^8 r_2^4 + a_1^6 a_2^2 r_1^2 r_2^2}{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)} \\
&\quad + \frac{-2a_1^4 a_2^4 r_1^2 r_2^2 + a_1^2 a_2^6 r_1^2 r_2^2}{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)} \\
&\quad + \frac{a_1^2 a_2^6 r_2^4 + 2a_1^4 a_2^4 r_1^2 r_2^2 + a_1^6 a_2^2 r_1^4}{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s) + \kappa_3^2(s) &= \frac{a_1^8 r_1^4 + a_2^8 r_2^4 + a_1^6 a_2^2 r_1^2 r_2^2 + a_1^2 a_2^6 r_1^2 r_2^2}{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)} \\
&\quad + \frac{a_1^2 a_2^6 r_2^4 + 2a_1^4 a_2^4 r_1^2 r_2^2 + a_1^6 a_2^2 r_1^4}{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)} \\
&= \frac{a_1^6 r_1^4 \left(a_1^2 + a_2^2\right) + a_2^6 r_2^4 \left(a_1^2 + a_2^2\right)}{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)} \\
&\quad + \frac{a_1^2 a_2^2 r_1^2 r_2^2 \left(a_1^4 + a_2^4 + 2a_1^2 a_2^2\right)}{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)} \\
&= \frac{\left(a_1^6 r_1^4 + a_2^6 r_2^4\right)\left(a_1^2 + a_2^2\right)}{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)} \\
&\quad + \frac{a_1^2 a_2^2 r_1^2 r_2^2 \left(a_1^2 + a_2^2\right)^2}{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)} \\
&= \frac{\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)}{\left(a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2\right)\left(a_1^4 r_1^2 + a_2^4 r_2^2\right)}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

olur. (3.70) eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa,

$$\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s) + \kappa_3^2(s) = a_1^2(s) + a_2^2(s) \tag{3.71}$$

elde edilir. Birinci ve üçüncü eğrilikler kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\kappa_1^2(s)\kappa_3^2(s) &= \frac{\left(a_1^4r_1^2 + a_2^4r_2^2\right)^2}{\left(a_1^2r_1^2 + a_2^2r_2^2\right)\left(a_1^4r_1^2 + a_2^4r_2^2\right)} \\
&\quad \times \frac{\left(a_1a_2^3r_2^2 + a_1^3a_2r_1^2\right)^2}{\left(a_1^2r_1^2 + a_2^2r_2^2\right)\left(a_1^4r_1^2 + a_2^4r_2^2\right)} \\
&= \frac{\left(a_1^4r_1^2 + a_2^4r_2^2\right)^2\left(a_1a_2^3r_2^2 + a_1^3a_2r_1^2\right)^2}{\left(a_1^2r_1^2 + a_2^2r_2^2\right)^2\left(a_1^4r_1^2 + a_2^4r_2^2\right)^2} \\
&= \left(\frac{a_1a_2^3r_2^2 + a_1^3a_2r_1^2}{a_1^2r_1^2 + a_2^2r_2^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{a_1a_2\left(a_2^2r_2^2 + a_1^2r_1^2\right)}{\left(a_1^2r_1^2 + a_2^2r_2^2\right)}\right)^2 \\
&= a_1^2(s)a_2^2(s)
\end{aligned} \tag{3.72}$$

olarak hesaplanır. (3.72) eşitliğinde $\kappa_3^2(s)$ yalnız bırakılır ve (3.71) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s) + a_1^2(s)a_2^2(s)\kappa_1^{-2}(s) = a_1^2(s) + a_2^2(s) \tag{3.73}$$

bulunur. (3.12) eşitliği gereğince $a_1(s)$ ve $a_2(s)$ fonksiyonları $\dfrac{2\pi}{L}$ nin tamsayı çarpımlarıdır ve bu nedenle sabitlerdir. $C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a_1^2(s)a_2^2(s) = C_1$ ve $a_1^2(s) + a_2^2(s) = C_2$ olsun. (3.38) ve (3.73) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
C_2 &= \lambda^2\cos^4 s + 2\lambda\mu\cos^2 s\sin^2 s + \mu^2\cos^2 s\sin^2 s \\
&\quad -2\lambda\mu\cos^2 s\sin^2 s + \lambda^2\cos^2 s\sin^2 s + C_1\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^{-2} \\
&= \lambda^2\cos^2 s\left(\cos^2 s + \sin^2 s\right) + \mu^2\sin^2 s\left(\cos^2 s + \sin^2 s\right) \\
&\quad +C_1\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^{-2} \\
&= \lambda^2\cos^2 s + \mu^2\sin^2 s + C_1\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^{-2}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

elde edilir. (3.74) eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2 2\cos s\,(-\sin s) + \mu^2 2\sin s\cos s - 2C_1\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^{-3} \\ &\quad \times (2\lambda\cos s\,(-\sin s) + \mu 2\sin s\cos s) \\ &= \sin 2s\left(\mu^2 - \lambda^2\right) - 2C_1\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^{-3}(\mu - \lambda)\sin 2s \\ &= (\mu - \lambda)\sin 2s\left(\mu + \lambda - 2C_1\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^{-3}\right) \end{aligned} \tag{3.75}$$

$s \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ve $\mu \neq \lambda$ olduğundan, (3.75) eşitliği gereğince

$$0 = \mu + \lambda - 2C_1\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^{-3}$$

ve

$$(\mu + \lambda)\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^3 = 2C_1 \tag{3.76}$$

olur. (3.76) eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa

$$3(\mu + \lambda)\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^2(-2\lambda\cos s\sin s + 2\mu\sin s\cos s) = 0$$

bulunur. Böylece

$$(\mu + \lambda)\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^2(\mu - \lambda)\sin 2s = 0 \tag{3.77}$$

elde edilir. (3.77) eşitliğinde $(\mu + \lambda) > 0$, $\left(\lambda\cos^2 s + \mu\sin^2 s\right)^2 > 0$ ve $\sin 2s \neq 0$ olduğundan $\mu - \lambda = 0$ yani

$$\mu = \lambda$$

bulunur ki bu $\lambda < \mu$ olması ile çelişir. Bu nedenle $A_{\overline{\eta}}$ farklı iki özdeğere sahip olamaz.

3.4 Bazı W-Eğrilerinin Rankı

Bu kesimde parametrik denklemleriyle verilen bazı eğrilerin $W-$eğrileri oldukları ve rankları incelenmiştir.

Örnek 3.4.1: c eğrisi $\mathbb{R}^3$ te (x_0, y_0, z_0) noktasından geçen ve (u_1, u_2, u_3) vektörüne paralel bir doğru olsun. $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere bu eğrinin parametrik denklemi

$$c(t) = (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2, z_0 + tu_3)$$

eşitliği ile verilir. c eğrisi için

$$\begin{aligned} c'(t) &= (u_1, u_2, u_3) \\ c''(t) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $\{c'(t), c''(t)\}$ cümlesi lineer bağımlı olur. Doğruların birinci eğrilikleri sıfır ve sabit olduğundan Tanım 2.2.11 gereğince c eğrisi rankı 1 olan $W-$eğrisidir.

Örnek 3.4.2: c eğrisi, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında r yarıçaplı, $(0, 0, 0)$ merkezli bir çemberin denklemi

$$c(t) = r(\cos t, \sin t, 0)$$

eşitliği ile verilsin. c eğrisi için

$$\begin{aligned} c'(t) &= r(-\sin t, \cos t, 0) \\ c''(t) &= r(-\cos t, -\sin t, 0) \\ c'''(t) &= r(\sin t, -\cos t, 0) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $\{c'(t), c''(t), c'''(t)\}$ cümlesi lineer bağımlı olur. c eğrisi için birinci eğrilik

$$\kappa_1(s) = \frac{1}{r}$$

eşitliği ile verildiği için $\kappa_1(s)$ değeri sabittir. Tanım 2.2.11 gereğince c eğrisi rankı 2 olan bir $W-$eğrisidir.

Örnek 3.4.3: $a \in \mathbb{R}^{+}, b \in \mathbb{R}$ ve $t \in [0, 2\pi]$ olmak üzere helis eğrisinin parametrik denklemi

$$c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

eşitliği ile verilsin. c eğrisi için

$$\begin{aligned} c'(t) &= (-a\sin t, a\cos t, b) \\ c''(t) &= a(-\cos t, -\sin t, 0) \\ c'''(t) &= a(\sin t, -\cos t, 0) \\ c^{(4)}(t) &= a(\cos t, \sin t, 0) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $\left\{c'(t), c''(t), c'''(t), c^{(4)}(t)\right\}$ cümlesi lineer bağımlı olur. Helis eğrisi için birinci ve ikinci eğrilikler

$$\kappa_1(s) = \frac{a}{a^2+b^2}, \kappa_2(s) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

eşitlikleri ile verilidiği için $\kappa_1(s)$ ve $\kappa_2(s)$ değerleri sabittir. Tanım 2.2.11 gereğince c eğrisi, rankı 3 olan bir $W-$eğrisidir.

BÖLÜM 4
BASİT JEODEZİKLİ YÜZEYLER

Bu bölümde (Kim and Lee, 1993) makalesi esas alınmak suretiyle helikal yüzeylerin jeodezikleri ile Blaschke manifoldunun karakterizasyonu ifade edilmiştir. Jeodezikleri $W-$eğrileri olan kompakt ve tam irtibatlı yüzeylerin $\mathbb{E}^4$ uzayındaki karşılıkları ve karakterizasyonları incelenmiştir.

Öncelikle bazı hatırlatmaları yapalım. M yüzeyi ∇ Riemann koneksiyonu ile bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \to M$ bir eğri olmak üzere

$$\gamma'(s) \;=\; T_1(s)$$

birim teğet vektör olsun. Böylece

$$\kappa_1 \;=\; \|\nabla_{T_1} T_1\|$$

eşitliği ile verilir. Eğer κ_1, I üzerinde sıfırsa γ eğrisinin rankı 1 olarak adlandırılır. Eğer κ_1 sıfırdan farklıysa T_2 birim normal vektörü

$$I_1 \;=\; \{s \in I : \kappa_1(s) \neq 0\}$$

üzerinde

$$\nabla_{T_1} T_1 \;=\; \kappa_1 T_2$$

olacak şekilde tanımlanır. Böylece

$$\kappa_2 \;=\; \|\nabla_{T_1} T_2 + \kappa_1 T_1\|$$

eşitliği ile verilir. Eğer κ_2, I_1 aralığı üzerinde sıfır ise γ eğrisinin rankının 2 olduğu söylenir. Eğer κ_2 sıfırdan farklıysa T_3 binormal vektörü

$$\nabla_{T_1} T_2 \;=\; -\kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_3$$

olacak şekilde tanımlanır. Genel olarak

$$\kappa_d = \|\nabla_{T_1} T_d + \kappa_{d-1} T_{d-1}\|$$

şeklinde tanımlanır ve eğer

$$I_{d-1} = \{s \in I : \kappa_{d-1} \neq 0\}$$

aralığı üzerinde κ_d sıfıra eşitse γ eğrisinin rankının d olduğu söylenir. Eğer γ eğrisinin rankı d ise I_{d-1} aralığı üzerinde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \kappa_1 & 0 & -\kappa_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ & ... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -\kappa_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & ... & \kappa_{d-1} & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\nabla_{T_1} (T_1, T_2, ..., T_d) = (T_1, T_2, ..., T_d) A$$

şeklinde yazılır. Burada $\{T_1, T_2, ..., T_d\}$ ve $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_d$ sırasıyla γ eğrisinin Frenet çatısı ve Frenet eğrilikleri olarak adlandırılır. $\mathbb{E}^m$, $\widetilde{\nabla}$ Riemann koneksiyonu ile $m-$boyutlu Öklidyen uzay olsun. $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^m$ regüler bir eğri yani her $t \in I$ için $c'(t) \neq 0$ olsun. Eğer her $t \in I$ için

$$c^{'}(t) \wedge c^{''}(t) \wedge ... \wedge c^{(d)}(t) \neq 0$$

olduğunda

$$c^{'}(t) \wedge c^{''}(t) \wedge ... \wedge c^{(d+1)}(t) = 0$$

oluyor ve

$$\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_{d-1} : I \to \mathbb{R}^+$$

Frenet eğrilikleri c eğrisi boyunca sabit kalıyorsa, c eğrisine d rankına sahip bir $W-$eğrisi denir.

4.1 Helikal Yüzey ve Blaschke Manifoldu

Bu kesimde $\mathbb{E}^4$ uzayında kompakt irtibatlı helikal bir M yüzeyinin jeodeziklerinin düzlemsel olma şartını veren ve Blaschke manifoldunu karakterize eden teoremler incelenmiştir.

Yardımcı Teorem 4.1.1: M yüzeyi, $\mathbb{E}^4$ uzayında kompakt irtibatlı bir yüzey ve $p \in M$ noktasında helikal olsun. Bu durumda p noktasından geçen her jeodezik düzlemseldir.

İspat: $X, Y \in T_oM$ olmak üzere $(\operatorname{Im} h)_o$, $h(X,Y)$ tarafından gerilen O noktasındaki birinci normal uzay

$$(\operatorname{Im} h)_o = \{h(X,Y) : X, Y \in T_oM\}$$

olmak üzere *boy* $(\operatorname{Im} h)_o = 1$ yani T_oM uzayının $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazı için

$$h(e_1, e_2) = 0$$

olsun. Böylece O noktası M yüzeyinin bir umbilik noktasıdır. γ eğrisi O noktasından geçen bir jeodezik ve

$$\gamma(0) = 0 \text{ ve } \gamma'(s) = T$$

olsun. O zaman $X, Y \in TM$ ve $\eta \in T^{\perp}M$ olmak üzere Yardımcı Teorem 3.2.2 ye benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\gamma''(s) &= h(T,T) \\
\gamma'''(s) &= -A_{h(T,T)}T + \left(\overline{\nabla}_T h\right)(T,T) \\
\gamma^{(4)}(s) &= -\left(\overline{\nabla}_T A\right)_{h(T,T)} T - h(T, A_{h(T,T)}T) \\
&\quad -2A_{(\nabla_T h)(T,T)}T + \left(\nabla^{\perp}_T h\right)(T,T)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada şekil operatörünün kovaryant türevi

$$\left(\overline{\nabla}_T A\right)_\eta Y = \nabla_X (A_\eta Y) - A_{\nabla^{\perp}_X \eta} Y - A_\eta \nabla_X Y$$

eşitliği ile verilir. γ eğrisinin düzlemsel olduğunu ispatlamak için, $T(0) = t$ olmak üzere

$$\left(\overline{\nabla}_t h\right)(t,t) = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $\left(\overline{\nabla}_t h\right)(t,t) \neq 0$ olsun. κ_1, γ eğrisinin birinci Frenet eğriliği ve ξ, γ eğrisi boyunca birim normal vektör alanı olmak üzere

$$h(T,T) = \kappa_1 \xi$$

olsun. Aslında ξ, O noktasındaki H ortalama eğrilik vektörü yönündedir. Böylece κ_1 sabit ve γ eğrisi boyunca

$$\left\langle \left(\overline{\nabla}_T h\right)(T,T), h(T,T) \right\rangle = 0$$

yazılır. $t^{\perp}$ vektörü, t vektörüne dik olmak üzere

$$h(t,t^{\perp}) = 0$$

olduğundan

$$\left(\overline{\nabla}_t A\right)_{h(T,T)} t = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\kappa_1 = \langle h(T,T), h(T,T) \rangle = \left\langle A_{h(T,T)} T, T \right\rangle$$

olur. γ jeodezik olduğundan bu denklemin γ jeodeziği boyunca kovaryant türevi yardımıyla

$$\left\langle \left(\overline{\nabla}_T A\right)_{h(T,T)} T, T \right\rangle = 0$$

elde edilir. $\kappa_1 \neq 0$ iken

$$\left\langle \left(\overline{\nabla}_t A\right)_{\xi} t, t \right\rangle = 0$$

elde edilir. Bu herhangi bir yön için sağlanırken linerizasyon ve Tanım 2.5.19 kullanılırsa

$$\left(\overline{\nabla} A\right)_{\xi} = 0$$

olur. O zaman γ eğrisinin türevleri

$$\begin{aligned}
\gamma'(s) &= t \\
\gamma''(s) &= h(t,t) \\
\gamma'''(s) &= -A_{h(t,t)}t + \left(\overline{\nabla}_t h\right)(t,t) \\
\gamma^{(4)}(s) &= -h(A_{h(t,t)}t, t) + \nabla_t^{\perp}\left(\left(\overline{\nabla}_t h\right)(T,T)\right)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca γ eğrisinin eğrilikleri sabittir. Böylece

$$\langle \gamma''(0), \gamma'''(0) \rangle = 0$$

ve

$$\left\langle \gamma'''(0), \gamma^{(4)}(0) \right\rangle = 0$$

eşitlikleri yazılır. $\gamma^{(4)}(0)$, M yüzeyine normal bir vektör olduğundan

$$\gamma''(0) \wedge \gamma^{(4)}(0) = 0$$

olur. Böylece γ eğrisinin rankı 3 olarak ifade edilir. Fakat M kompakt olduğundan γ eğrisi kapalıdır ve bu durum Yardımcı Teorem 3.1.1 ile çelişir. O zaman $\left(\overline{\nabla}_t h\right)(t,t) = 0$ dır. Bu durumda, eğrilik sabit ve γ eğrisi boyunca

$$\left(\overline{\nabla}_T h\right)(T,T) = 0$$

bulunur. Kabul edelim ki

$$boy\left(\operatorname{Im} h\right)_o = 2$$

olsun. O zaman

$$h(e_1, e_2) \neq 0$$

olan T_oM uzayının $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bir bazı vardır. M, O noktasında izotropiktir. Yardımcı Teorem 2.2.26 gereğince

$$\langle h(e_1, e_1), h(e_1, e_2) \rangle = 0$$

ve

$$\langle h(e_2, e_2), h(e_1, e_2)\rangle = 0$$

yazılır. Böylece $h(e_1, e_1) \perp h(e_1, e_2)$ ve $h(e_2, e_2) \perp h(e_1, e_2)$ şeklinde dik olurlar. *boy* $(\operatorname{Im} h)_o = 2$ olduğundan $h(e_1, e_1), h(e_2, e_2) \in (\operatorname{Im} h)_o$ ve böylece $h(e_1, e_1)$ ve $h(e_2, e_2)$ lineer bağımlı olur. Böylece

$$h(e_1, e_1) \wedge h(e_2, e_2) = 0$$

elde edilir. O zaman

$$\|h(e_1, e_1)\| = \|h(e_2, e_2)\|$$

ve

$$h(e_1, e_1) = \pm h(e_2, e_2)$$

olur ve O noktasındaki ortalama eğrilik vektörü H kaybolur. U_oM uzayı O noktasında birim tanjant uzay olmak üzere $t \in M$ için

$$\left(\overline{\nabla}_t h\right)(t, t) \neq 0$$

olsun. γ_1 jeodeziğini

$$\gamma_1(0) = 0 \text{ ve } \gamma_1'(0) = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}$$

olarak düşünelim. γ_1 sabit Frenet eğriliğine sahiptir ve

$$\left\langle \left(\overline{\nabla}_{T_1} h\right)(T_1, T_1), h(T_1, T_1)\right\rangle = 0$$

olur. Böylece

$$T_1 = \frac{d\gamma_1}{ds}$$

ve O noktasındaki ortalama eğrilik vektörü sıfır olur. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_1} h\right)(e_1, e_1), h(e_1, e_1)\right\rangle + 3\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_1} h\right)(e_1, e_2), h(e_1, e_2)\right\rangle \\
&+3\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_1} h\right)(e_2, e_2), h(e_1, e_2)\right\rangle + \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_2} h\right)(e_2, e_2), h(e_1, e_2)\right\rangle = 0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

bulunur. Diğer γ_2 jeodeziğini

$$\gamma_2(0) = 0 \text{ ve } \gamma_2'(0) = \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}$$

gibi düşünelim.

$$\left\langle \left(\overline{\nabla}_{T_2} h\right)(T_2, T_2), h(T_2, T_2) \right\rangle = 0$$

öyle ki $\gamma_2'(s) = T_2$ yazılır. Bu ise

$$\begin{aligned} &-\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_1} h\right)(e_1, e_1), h(e_1, e_1) \right\rangle + 3\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_1} h\right)(e_1, e_2), h(e_1, e_2) \right\rangle \\ &-3\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_1} h\right)(e_2, e_2), h(e_1, e_2) \right\rangle + \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_2} h\right)(e_2, e_2), h(e_1, e_2) \right\rangle = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

olmasını gerektirir. (4.1) ve (4.2) birlikte kullanılırsa

$$3\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_1} h\right)(e_2, e_2), h(e_1, e_2) \right\rangle + \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_2} h\right)(e_2, e_2), h(e_1, e_2) \right\rangle = 0 \tag{4.3}$$

elde edilir. Diğer taraftan O noktasındaki jeodezikler aynı sabit eğriliklere sahiptir,

$$\left\langle \left(\overline{\nabla} h\right)(X, X, X), \left(\overline{\nabla} h\right)(X, X, X) \right\rangle = 0$$

eşitliği X birim vektörünün seçiminden bağımsızdır. Yardımcı Teorem 2.2.26 gereğince her birim X vektörü ve M yüzeyine teğet olan her X vektörüne dik olan $X^{\perp}$ için

$$\left\langle \left(\overline{\nabla} h\right)(X, X, X), \left(\overline{\nabla} h\right)\left(X, X, X^{\perp}\right) \right\rangle = 0$$

olur. Yani

$$\left(\overline{\nabla} h\right)(e_1, e_1, e_1) \perp \left(\overline{\nabla} h\right)(e_1, e_1, e_2)$$

ve

$$\left(\overline{\nabla} h\right)(e_1, e_1, e_1) \perp h(e_1, e_2)$$

elde edilir. O zaman (4.3) eşitliği

$$\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_2} h\right)(e_2, e_2), h(e_1, e_2) \right\rangle = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$\left(\overline{\nabla}_{e_2} h\right)(e_2, e_2) \wedge h(e_1, e_2) \quad = \quad 0$$

ve

$$\left(\overline{\nabla}_{e_2} h\right)(e_2, e_2) \quad = \quad 0$$

elde edilir. Fakat bu $t \in U_o M$ için

$$\left(\overline{\nabla}_t h\right)(t, t) \quad \neq \quad 0$$

olmasıyla çelişir. Böylece her $t \in U_o M$ için

$$\left(\overline{\nabla}_t h\right)(t, t) \quad = \quad 0$$

olur. O noktasından geçen her jeodezik düzlemseldir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2: M bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. M manifoldu p noktasında Blaschke manifoldudur ancak ve ancak $C(p)$ küreseldir.

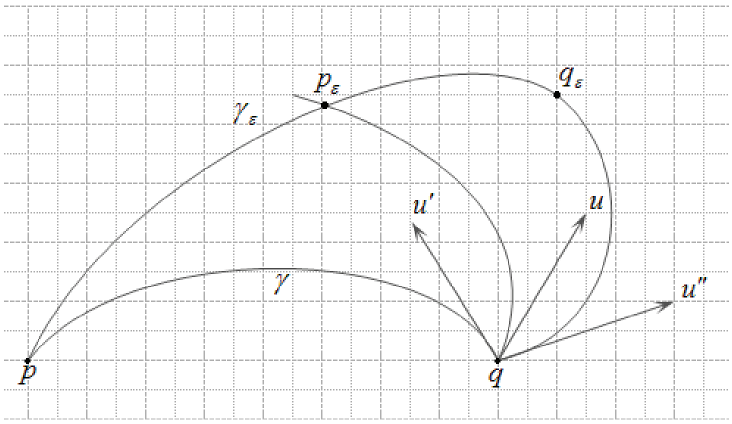
İspat: M manifoldu bir p noktasında Blaschke manifoldu olsun. q noktası $C(p)$ cümlesinin elemanı ise $\Lambda(p,q)$ uzayının boyutu $k-1$ olup sabittir. Cut-locus $C(p)$ M manifoldunun $d-k$ boyutlu altmanifoldudur ve $C(p)$ cümlesindeki her q için

$$\Lambda(p, q) \quad = \quad U_q M \cap \left(T_q C(p)\right)^{\perp}$$

yazılır. Bununla birlikte M manifoldu Yardımcı Teorem 2.2.31 gereğince bir SL_l^p manifoldudur ve sonuç olarak Cut locus $C(p)$, $\dfrac{l}{2}$ uzaklığında küreseldir. M Riemann manifoldu, verilen bir $p \in M$ noktasında küresel cut-locusa sahip olsun. $C(p)$ manifoldundaki bir q noktası için $\Lambda(q) = \Lambda(p,q)$ notasyonu kullanılsın ve $u \in TM$ için

$$v(u) \quad = \quad \frac{u}{\|u\|}$$

olsun.



Şekil 4.1. Cut noktaları

$q \in C(p)$ için U_qM uzayındaki v vektörlerinin cümlesi $N(q)$ olmak üzere

$$\lim_{i\to\infty} r(i) \;=\; q$$

ve

$$v \;=\; \lim_{i\to\infty} v(\exp_q^{-1}(r(i)))$$

olacak şekilde bir $(r(i))_{i\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Böylece

$$N(q) \;=\; U_qM \cap T_qC(p)$$

olmasından hareketle $\Lambda(q)$ ve $N(q)$ cümlelerinin, U_qM uzayının ortogonal kompleman uzayının büyük küreleri olduğunu göstermeliyiz. Bu sonuca $C(p)$ manifoldu küresel olduğu için, $\Lambda(q)$ ve $N(q)$ kümeleri üzerindeki sürekli durumların türetilmesi yoluyla ulaşılır. $q \in C(p)$ olmak üzere $\varrho(p,q)$ ifadesini $\dfrac{\pi}{2}$ olacak şekilde normalize edelim. Teorem 2.4.31 gereğince her $u' \in \Lambda(q)$ ve $u'' \in N(q)$ için

$$\langle u', u''\rangle \;\leq\; 0$$

elde edilir. Şimdi $\Lambda(q)$ cümlesinin büyük küre olduğunu ispatlamalıyız. Yardımcı Teorem 2.4.38 gereğince her $u \in \Lambda(q)$ vektörü için $-u \in \Lambda(q)$ olduğunu göstermek yeter. Bunu tümevarımla ilk adımı izleyerek yaparız. Yardımcı Teorem 2.4.38 gereğince $-u_0$ ile beraber $u_0 \in \Lambda(q)$ vektörü bulunur.

$$\Lambda^1(q) = \Lambda(q) \cap u_0^{\perp}$$

olsun. $-u_1$ ile beraber $\Lambda^1(q)$ cümlesinde bulunan bir u_1 vektörünün varlığını göstermeliyiz. Kabul edelim ki her $u \in \Lambda^1(q)$ vektörü için $-u \notin \Lambda^1(q)$ olsun. $\Lambda^1(q)$ konveks kümesi, açık bir yarıküre tarafından kapsanan $U_qM \cap u_0^{\perp}$ kümesinin $(d-2)-$boyutlu bir kümesidir. u vektörünü bu yarıkürenin güney kutbu olarak adlandıralım ve $u = \alpha u' + \beta u'', \alpha \geq 0$ ve $u' \in \Lambda(q)$ olmak üzere Yardımcı Teorem 2.4.37 yi uygulayalım. Yardımcı Teorem 2.4.38 gereğince büyük yarı çember, $\Lambda(q)$ cümlesinde yatan $u_0, -u_0$ ve u' vektörleri ile $\overline{u}'$ ve $u_0^{\perp}$ vektörlerinin kesişimi yardımıyla tanımlıdır ki bu çelişkidir.

4.2 Basit Jeodezikli Yüzeyler

Bu kesimde tam ve kompakt irtibatlı yüzeylere ait bazı karakterizasyonlar üzerinde durulmuştur.

$X : M \to \mathbb{E}^4$ izometrik immersiyonu ile $\mathbb{E}^4$ uzayında M yüzeyi bir Riemann yüzeyi olsun. Şöyle bir özellik tanımlansın:

$(\bigstar)$: M yüzeyinin öyle bir p noktası vardır ki bu noktadan geçen her jeodezik, $\mathbb{E}^4$ uzayında bir $W-$eğrisidir.

M yüzeyi kompakt irtibatlı bir yüzey olsun. Genelliği bozmadan p noktasını $\mathbb{E}^4$ uzayının o orijini kabul edebiliriz. M yüzeyinin $(\bigstar)$ özelliğini sağladığını kabul edelim. Bu durumda aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir.

Yardımcı Teorem 4.2.1: M, $\mathbb{E}^4$ uzayında kompakt irtibatlı yüzey olsun. Kabul edelim ki O noktasından geçen periyodik olmayan bir γ jeodeziği var olsun. O zaman M yüzeyi

$$S^1(a) \times S^1(b) \quad \subset \quad \mathbb{E}^4$$

standart torusuna izometriktir.

İspat: $X : M \to \mathbb{E}^4$ izometrik immersiyon olsun. Kabul edelim ki O noktasından geçen jeodezikler periyodik olmasın. Bu durumda Yardımcı Teorem 3.1.1 gereğince bu eğriler rankı 4 olan $W-$eğrileri olur. Teorem 3.3.2 (1) de yapılanlara benzer bir yöntemle M yüzeyinde alınan bir açık U cümlesi için $X(U) \subset T$ olur. U cümlesinden geçen her jeodeziğin T torusunda içerilen bir görüntüsü olması sebebiyle $X(M) \subset T$ elde edilir ve böylece M yüzeyi $S^1(a) \times S^1(b) \subset \mathbb{E}^4$ standart torusuna izometrik olur.

Yardımcı Teorem 4.2.2: M, $\mathbb{E}^4$ uzayında kompakt irtibatlı yüzey olsun. M yüzeyi O noktasında helikaldir ancak ve ancak O noktasından geçen her jeodezik periyodik $W-$eğrisidir.

Teorem 4.2.3: M yüzeyi $\mathbb{E}^3$ uzayında tam irtibatlı bir yüzey olsun. M yüzeyi ($\bigstar$) özelliğini sağlar ancak ve ancak M yüzeyi standart küre veya $\mathbb{E}^2$ düzlemidir.

İspat: Kabul edelim ki M yüzeyi ($\bigstar$) özelliğini sağlasın. Yardımcı Teorem 2.2.25 gereğince M yüzeyi p noktasında izotropik olur. Bu durumda p noktası umbilik nokta olur. p noktasından geçen bir γ jeodeziği alalım. γ eğrisinin rankı 1 olsun. Bu durumda M yüzeyi $\mathbb{E}^3$ uzayında $\mathbb{E}^2$ düzlemi olur. γ eğrisinin rankı 2 olsun. Bu durumda tüm jeodezikler aynı yarıçap ve merkeze sahip çemberler olur. Böylece M yüzeyi standart küre olur. Kabul edelim ki γ eğrisinin rankı 3 olsun. γ eğrisinin yay uzunluğuyla parametrelendirildiğini farzedelim. $\gamma'(s) = T$ olsun. (3.4) eşitliklerine benzer şekilde $\gamma''(s) = h(T,T)$ ve $\gamma'''(s) = -A_{h(T,T)}T + \left(\overline{\nabla}_T h\right)(T,T)$ elde edilir. γ eğrisinin rankı 3 olduğundan

$$\gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \wedge \gamma'''(s) \neq 0$$

yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned}(T \wedge h(T,T)) \wedge \left(\text{-}A_{h(T,T)}T + \left(\overline{\nabla}_T h\right)(T,T)\right) = {} & (T \wedge h(T,T)) \wedge \left(\text{-}A_{h(T,T)}T\right) \\ & + (T \wedge h(T,T)) \wedge \left(\overline{\nabla}_T h\right)(T,T)\end{aligned}$$

olur. $h(T,T)$ ve $\left(\overline{\nabla}_T h\right)(T,T)$ ifadeleri lineer bağımlı olduğundan

$$h(T,T) \wedge \left(\overline{\nabla}_T h\right)(T,T) = 0$$

bulunur. Böylece γ eğrisi boyunca

$$T \wedge h(T,T) \wedge A_{h(T,T)}T \neq 0$$

ve

$$T \wedge A_{h(T,T)}T \neq 0$$

elde edilir. M yüzeyi izotropik olduğundan Yardımcı Teorem 2.2.26 gereğince $t = T(0)$ ve $\gamma(0) = p$ olmak üzere

$$\left\langle h(t,t), h(t,t^{\perp})\right\rangle = 0$$

olur. Böylece $A_{h(t,t)}t \perp t^{\perp}$ ve

$$A_{h(t,t)}t \wedge t = 0$$

elde edilir. Bu durum kabulümüz ile çelişeceğinden böyle bir durum söz konusu değildir. Tersine M yüzeyi standart küre veya bir düzlem olursa ($\bigstar$) özelliğini sağladığı açıktır.

Teorem 4.2.4: M, $\mathbb{E}^4$ uzayında kompakt irtibatlı bir yüzey olsun. M yüzeyi (★) özelliğini sağlar ancak ve ancak M, $S^1(a) \times S^1(b) \subset \mathbb{E}^4$ standart torusudur veya $\mathbb{E}^3$ uzayında standart küredir veya

$$X(s,\theta) = \frac{1}{\kappa}\left(\sin\kappa s\cos\theta, \sin\kappa s\sin\theta, (1-\cos\kappa s)\cos 2\theta, (1-\cos\kappa s)\sin 2\theta\right)$$

formunda $O \in \mathbb{E}^4$ noktasında Blaschke yüzeyidir öyle ki burada κ, O noktasından geçen jeodeziklerin Frenet eğriliğidir.

İspat: Kabul edelim ki M yüzeyi (★) özelliğini sağlasın. γ eğrisi O noktasından geçen bir $W-$eğrisi olsun. M kompakt olduğundan γ eğrileri kapalı jeodeziklerden oluşur. Yardımcı Teorem 2.2.15 ve Yardımcı Teorem 3.1.1 gereğince γ eğrisinin rankı çift olur. γ eğrisinin rankı 2 olsun. Örnek 3.4.2 dikkate alınırsa γ eğrisi bir çemberdir. Böylece M yüzeyi $\mathbb{E}^3$ uzayında bir küre olur. γ eğrisinin rankı 4 olsun. Teorem 3.3.2 (1) gereğince M yüzeyi standart torus olur. Ayrıca Teorem 2.2.27 gereğince M yüzeyi

$$X(s,\theta) = \frac{1}{\kappa}\left(\sin\kappa s\cos\theta, \sin\kappa s\sin\theta, (1-\cos\kappa s)\cos 2\theta, (1-\cos\kappa s)\sin 2\theta\right)$$

Blaschke yüzeyidir. Tersine M yüzeyi küre, Blaschke yüzeyi veya torus olduğunda jeodezikleri, rankı 2 ve 4 olan $W-$eğrileri olur.

Şimdi $\mathbb{E}^4$ uzayında tam irtibatlı yüzeyleri inceleyelim. Kabul edelim ki O noktasından geçen her γ jeodeziğinin rankı 4 olsun. Teorem 3.3.2 (1) de verildiği üzere M yüzeyi

$$S^1(a) \times S^1(b) \quad \subset \quad \mathbb{E}^4$$

standart torusu olur. Şimdi O noktasından geçen her jeodeziğin rankının 3 ve 3 ten küçük olduğunu kabul edelim. $\theta \in (0, 2\pi)$ için $X(0,\theta) = o$ orijin, $r_1(\theta)$ ve $\beta(\theta)$ negatif olmayan fonksiyonlar, $\alpha(\theta)$, $(0, 2\pi)$ aralığında pozitif değerli bir fonksiyon olsun. O noktası etrafında (s,θ) jeodezik koordinat komşuluğu sistemi için

$$X: \ M \ \rightarrow \ \mathbb{E}^4$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} X(s,\theta) &= r_1(\theta)\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)f_1(\theta)+r_1(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_2(\theta) \\ &\quad +\beta(\theta)sf_3(\theta) \end{aligned} \tag{4.4}$$

izometrik immersiyonu yazılsın. $f_1(\theta), f_2(\theta), f_3(\theta)$, $\mathbb{E}^4$ uzayının ortonormal vektörleridir. Eğer bazı $\theta \in (0,2\pi)$ değerleri için $r_1(\theta)=0$ ise $X(s,\theta)$ bir düz doğrudur. Eğer bazı $\theta \in (0,2\pi)$ değerleri için $\beta(\theta)=0$ ise $X(s,\theta)$ bir çemberdir. $r_1(\theta)>0$ ve $\beta(\theta)>0$ olmak üzere sabit bir θ için $X(s,\theta)$ bir helistir.

$f_4(\theta)$, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında birim vektör ve

$$\{f_1(\theta), f_2(\theta), f_3(\theta), f_4(\theta)\}$$

cümlesi $\mathbb{E}^4$ uzayı için bir ortonormal baz teşkil etsin. $\theta \in (0,2\pi)$ ve $\mathbb{E}^4$ uzayının standart bazı $\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}, \frac{\partial}{\partial y_4}\right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} &= (1,0,0,0) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y_2} = (0,1,0,0) \\ \frac{\partial}{\partial y_3} &= (0,0,1,0) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y_4} = (0,0,0,1) \end{aligned} \tag{4.5}$$

şeklinde verilir.

$$\begin{aligned} X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial X_i}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y_i} \\ &= \frac{\partial X_1}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial X_2}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial X_3}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y_3}+\frac{\partial X_4}{\partial s}\frac{\partial}{\partial y_4} \end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde yazılır. (4.4) göz önüne alnırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_1}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}\left[r_1(\theta)\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)f_1(\theta)\right] \\
&= \left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)\frac{\partial}{\partial s}\left[r_1(\theta)f_1(\theta)\right] \\
&\quad +r_1(\theta)f_1(\theta)\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)\right] \\
&= \left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right).0+r_1(\theta)f_1(\theta) \\
&\quad \times\alpha(\theta)\left(-\sin\alpha(\theta)s\right) \\
&= -r_1(\theta)\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_1(\theta)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_2}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}\left[r_1(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_2(\theta)\right] \\
&= \sin\alpha(\theta)s\frac{\partial}{\partial s}\left[r_1(\theta)f_2(\theta)\right] \\
&\quad +r_1(\theta)f_2(\theta)\frac{\partial}{\partial s}\left[\sin\alpha(\theta)s\right] \\
&= \sin\alpha(\theta)s.0+r_1(\theta)f_2(\theta)\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta)s \\
&= r_1(\theta)\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta)sf_2(\theta)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_3}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}\left[\beta(\theta)sf_3(\theta)\right] \\
&= s\frac{\partial}{\partial s}\left[\beta(\theta)f_3(\theta)\right] \\
&\quad +\beta(\theta)f_3(\theta)\frac{\partial}{\partial s}s \\
&= s.0+\beta(\theta)f_3(\theta).1 \\
&= \beta(\theta)f_3(\theta)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

ayrıca, $X_4 = 0$ olduğundan

$$\frac{\partial X_4}{\partial s} = 0$$

bulunur. (4.5), (4.7), (4.8) ve (4.9) eşitlikleri (4.6) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= -r_1(\theta)\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_1(\theta) \\ &\quad +r_1(\theta)\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta)sf_2(\theta) \\ &\quad +\beta(\theta)f_3(\theta) \end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. Şimdi $X_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$ değerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} X_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial X_i}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y_i} \\ &= \frac{\partial X_1}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial X_2}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial X_3}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y_3}+\frac{\partial X_4}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y_4} \end{aligned} \tag{4.11}$$

olur. (4.4) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left[r_1(\theta)\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)f_1(\theta)\right] \\ &= \left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\left[r_1(\theta)f_1(\theta)\right] \\ &\quad +r_1(\theta)f_1(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)\right] \end{aligned} \tag{4.12}$$

bulunur. Gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta}\left[r_1(\theta)f_1(\theta)\right] &= r_1'(\theta)f_1(\theta)+r_1(\theta)f_1'(\theta) \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)\right] &= -\alpha'\left(\theta\right)s\sin\alpha\left(\theta\right)s \end{aligned} \tag{4.13}$$

olur. (4.13) eşitlikleri (4.12) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial\theta} &= \left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)\left[r_1'(\theta)f_1(\theta)+r_1(\theta)f_1'(\theta)\right] \\ &\quad +r_1(\theta)f_1(\theta)\left[-\alpha'\left(\theta\right)s\sin\alpha\left(\theta\right)s\right] \\ &= r_1'(\theta)\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)f_1(\theta) \\ &\quad +r_1(\theta)\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)f_1'(\theta) \\ &\quad -r_1(\theta)\alpha'\left(\theta\right)s\sin\alpha\left(\theta\right)sf_1(\theta) \end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_2}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[r_1(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_2(\theta)\right] \\
&= \sin\alpha(\theta)s\frac{\partial}{\partial \theta}\left[r_1(\theta)f_2(\theta)\right] \\
&\quad + r_1(\theta)f_2(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\alpha(\theta)s\right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta}\left[r_1(\theta)f_2(\theta)\right] &= r_1'(\theta)f_2(\theta)+r_1(\theta)f_2'(\theta) \\
\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\alpha(\theta)s\right] &= \alpha'(\theta)\, s\cos\alpha(\theta)\, s
\end{aligned} \tag{4.16}$$

olduğundan, (4.16) eşitlikleri (4.15) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_2}{\partial \theta} &= \sin\alpha(\theta)s\left[r_1'(\theta)f_2(\theta)+r_1(\theta)f_2'(\theta)\right] \\
&\quad + r_1(\theta)f_2(\theta)\left[\alpha'(\theta)\, s\cos\alpha(\theta)\, s\right] \\
&= r_1'(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_2(\theta)+r_1(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_2'(\theta) \\
&\quad + r_1(\theta)\alpha'(\theta)\, s\cos\alpha(\theta)\, sf_2(\theta)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_3}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\beta(\theta)sf_3(\theta)\right] \\
&= s\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\beta(\theta)f_3(\theta)\right]+\beta(\theta)f_3(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}s
\end{aligned} \tag{4.18}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\beta(\theta)f_3(\theta)\right]=\beta'(\theta)f_3(\theta)+\beta(\theta)f_3'(\theta),\ \frac{\partial}{\partial \theta}s=0 \tag{4.19}$$

olduğundan, (4.19) eşitlikleri (4.18) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_3}{\partial \theta} &= s\left[\beta'(\theta)f_3(\theta)+\beta(\theta)f_3'(\theta)\right]+\beta(\theta)f_3(\theta).0 \\
&= \beta(\theta)sf_3'(\theta)+\beta'(\theta)sf_3(\theta)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. Yine $X_4 = 0$ olduğundan

$$\frac{\partial X_4}{\partial \theta} = 0 \tag{4.21}$$

olur. (4.5), (4.14), (4.17), (4.20) ve (4.21) eşitlikleri (4.11) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} X_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) &= r_1(\theta)\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)f_1'(\theta)+r_1(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_2'(\theta) \\ &\quad +\{r_1'(\theta)\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s\text{-}1\right)\text{-}r_1(\theta)\alpha'(\theta)s\sin\alpha(\theta)s\}f_1(\theta) \\ &\quad +\{r_1'\left(\theta\right)\sin\alpha(\theta)s+r_1(\theta)\alpha'(\theta)s\cos\alpha(\theta)s\}f_2(\theta) \\ &\quad +\beta(\theta)sf_3'(\theta)+\beta'(\theta)sf_3(\theta) \end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.22) ifadesinin kovaryant türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)}X_*\left(\tfrac{\partial}{\partial s}\right) &= \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial s}X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_i\frac{\partial}{\partial y_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial s}X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_2\frac{\partial}{\partial y_2} \\ &\quad +\frac{\partial}{\partial s}X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_3\frac{\partial}{\partial y_3}+\frac{\partial}{\partial s}X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_4\frac{\partial}{\partial y_4} \end{aligned} \tag{4.23}$$

olur. (4.23) eşitliğindeki her bir bileşen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_1 &= \frac{\partial}{\partial s}\left[-r_1(\theta)\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_1(\theta)\right] \\ &= -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)sf_1(\theta) \end{aligned} \tag{4.24}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_2 &= \frac{\partial}{\partial s}\left[r_1(\theta)\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta)sf_2(\theta)\right] \\ &= -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_2(\theta) \end{aligned} \tag{4.25}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial s}X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_3 = \frac{\partial}{\partial s}\left[\beta(\theta)f_3(\theta)\right]=0 \tag{4.26}$$

bulunur. (4.24), (4.25) ve (4.26) eşitlikleri (4.23) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)}X_*\left(\tfrac{\partial}{\partial s}\right) &= -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)sf_1(\theta) \\ &\quad -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_2(\theta) \end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir.

θ sabit ve $X_*\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right) = T$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{\nabla}_T T, T \right\rangle &= \langle -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta) s f_1(\theta) \\
&\quad -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta) s f_2(\theta), \\
&\quad -r_1(\theta)\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta) s f_1(\theta) \\
&\quad +r_1(\theta)\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta) s f_2(\theta) \\
&\quad +\beta(\theta) f_3(\theta)\rangle
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. İç çarpımın lineer olma özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{\nabla}_T T, T \right\rangle &= \left(-r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)s\right)\left(-r_1(\theta)\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right) \\
&\quad \langle f_1(\theta), f_1(\theta)\rangle + \left(-r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)s\right) \\
&\quad \left(r_1(\theta)\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta)\right)\langle f_1(\theta), f_2(\theta)\rangle \\
&\quad + \left(-r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)s\right)\beta(\theta)\langle f_1(\theta), f_3(\theta)\rangle \\
&\quad + \left(-r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right)\left(-r_1(\theta)\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right) \\
&\quad \langle f_2(\theta), f_1(\theta)\rangle + \left(-r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right) \\
&\quad \left(r_1(\theta)\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta)s\right)\langle f_2(\theta), f_2(\theta)\rangle \\
&\quad + \left(-r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right)\beta(\theta)\langle f_2(\theta), f_3(\theta)\rangle
\end{aligned} \tag{4.28}$$

olur. O zaman

$$\{f_1(\theta), f_2(\theta), f_3(\theta), f_4(\theta)\}$$

ortonormal baz olduğundan

$$\begin{aligned}
\langle f_1(\theta), f_1(\theta)\rangle &= \langle f_2(\theta), f_2(\theta)\rangle = 1 \\
\langle f_1(\theta), f_2(\theta)\rangle &= \langle f_1(\theta), f_3(\theta)\rangle = \langle f_2(\theta), f_3(\theta)\rangle = 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

yazılır. (4.29) eşitlikleri (4.28) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left\langle \widetilde{\nabla}_T T, T \right\rangle &= r_1^2(\theta)\alpha^3(\theta)\cos\alpha(\theta)s\sin\alpha(\theta)s \\ &\quad -r_1^2(\theta)\alpha^3(\theta)\sin\alpha(\theta)s\cos\alpha(\theta)s \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\widetilde{\nabla}_T T = 0 \tag{4.30}$$

ve

$$\begin{aligned}T\left[\langle T, T\rangle\right] &= \left\langle \widetilde{\nabla}_T T, T \right\rangle + \left\langle T, \widetilde{\nabla}_T T \right\rangle \\ &= 2\left\langle \widetilde{\nabla}_T T, T \right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Tanım 2.2.6 gereğince $X(s,\theta)$ bir jeodeziktir. O halde

$$\left\langle \widetilde{\nabla}_{X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)} X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), X_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \right\rangle = 0 \tag{4.31}$$

bulunur.

Şimdi yukarıdaki iç çarpımın hesabından önce bazı hatırlatmalar yapalım. $\{f_1(\theta), f_2(\theta), f_3(\theta), f_4(\theta)\}$ cümlesi ortonormal bir baz olduğundan

$$\langle f_1(\theta), f_1(\theta)\rangle = \langle f_2(\theta), f_2(\theta)\rangle = \langle f_3(\theta), f_3(\theta)\rangle = 1$$

olur. Her iki tarafın türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle f_1(\theta), f_1'(\theta)\rangle = 0 \tag{4.32}$$

ve benzer şekilde

$$\langle f_2(\theta), f_2'(\theta)\rangle = \langle f_3(\theta), f_3'(\theta)\rangle = 0 \tag{4.33}$$

olarak hesaplanır. Aynı zamanda

$$\langle f_1(\theta), f_2(\theta)\rangle = \langle f_2(\theta), f_3(\theta)\rangle = \langle f_3(\theta), f_1(\theta)\rangle = 0 \tag{4.34}$$

eşitliklerinde de her iki tarafın türevleri alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\langle f_1'(\theta), f_2(\theta)\rangle &+ \langle f_1(\theta), f_2'(\theta)\rangle = 0 \\
\langle f_2'(\theta), f_3(\theta)\rangle &+ \langle f_2(\theta), f_3'(\theta)\rangle = 0 \\
\langle f_3'(\theta), f_1(\theta)\rangle &+ \langle f_3(\theta), f_1'(\theta)\rangle = 0
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

elde edilir. Şimdi (4.22) eşitliği ile verilen $X_*\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)$ ifadesinde

$$
\begin{aligned}
B_1 &= r_1(\theta)\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)f_1'(\theta) \\
B_2 &= r_1(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_2'(\theta) \\
B_3 &= \left\{r_1'(\theta)\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)-r_1(\theta)\alpha'(\theta)s\sin\alpha(\theta)s\right\}f_1(\theta) \\
B_4 &= \left\{r_1'\left(\theta\right)\sin\alpha(\theta)s+r_1(\theta)\alpha'(\theta)s\cos\alpha(\theta)s\right\}f_2(\theta) \\
B_5 &= \beta(\theta)sf_3'(\theta) \\
B_6 &= \beta'(\theta)sf_3(\theta)
\end{aligned}
$$

ve (4.27) ile verilen $\widetilde{\nabla}_{X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)}X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$ ifadesinde de

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)sf_1(\theta) \\
C_2 &= -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_2(\theta)
\end{aligned}
$$

kısaltmaları yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{\nabla}_{X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)}X_*\left(\tfrac{\partial}{\partial s}\right), X_*\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\rangle &= \langle C_1,B_1\rangle+\langle C_1,B_2\rangle+\langle C_1,B_3\rangle \\
&\quad+\langle C_1,B_4\rangle+\langle C_1,B_5\rangle+\langle C_1,B_6\rangle \\
&\quad+\langle C_2,B_1\rangle+\langle C_2,B_2\rangle+\langle C_2,B_3\rangle \\
&\quad+\langle C_2,B_4\rangle+\langle C_2,B_5\rangle+\langle C_2,B_6\rangle
\end{aligned}
$$

olur. (4.32), (4.33) ve (4.34) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\langle C_1,B_1\rangle &= \langle C_1,B_4\rangle = \langle C_1,B_6\rangle = 0 \\
\langle C_2,B_2\rangle &= \langle C_2,B_3\rangle = \langle C_2,B_6\rangle = 0
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\langle C_1, B_2\rangle &= -r_1^2(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\cos\alpha(\theta)s\left\langle f_1(\theta), f_2'(\theta)\right\rangle \\
\langle C_1, B_3\rangle &= -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)s\left\{r_1'(\theta)\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)\right. \\
&\quad \left.-r_1(\theta)\alpha'(\theta)s\sin\alpha(\theta)s\right\}\left\langle f_1(\theta), f_1(\theta)\right\rangle \\
\langle C_1, B_5\rangle &= -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)s\beta(\theta)s\left\langle f_1(\theta), f_3'(\theta)\right\rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\langle C_2, B_1\rangle &= \left\{-r_1^2(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\cos\alpha(\theta)s\right. \\
&\quad \left.+r_1^2\left(\theta\right)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right\}\left\langle f_2(\theta), f_1'(\theta)\right\rangle \\
\langle C_2, B_4\rangle &= \left\{-r_1(\theta)\alpha^2(\theta)r_1'(\theta)\sin^2\alpha(\theta)s-r_1^2(\theta)\alpha^2(\theta)\alpha'(\theta)\right. \\
&\quad \left.\sin\alpha(\theta)s\cos\alpha(\theta)s\right\}\left\langle f_2(\theta), f_2(\theta)\right\rangle \\
\langle C_2, B_5\rangle &= -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\beta(\theta)s\left\langle f_2(\theta), f_3'(\theta)\right\rangle
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. O zaman hesaplanan değerler

$$\left\langle \widetilde{\nabla}_{X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)} X_*\left(\tfrac{\partial}{\partial s}\right), X_*\left(\tfrac{\partial}{\partial \theta}\right)\right\rangle = K$$

ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
K &= -r_1^2(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\cos\alpha(\theta)s\left\langle f_1(\theta), f_2'(\theta)\right\rangle \\
&\quad -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)s\left\{r_1'(\theta)\cos\alpha(\theta)s-r_1'(\theta)\right. \\
&\quad \left.-r_1(\theta)\alpha'(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right\}-r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)s\beta(\theta)s \\
&\quad \left\langle f_1(\theta), f_3'(\theta)\right\rangle+\left\{-r_1^2(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\cos\alpha(\theta)s\right. \\
&\quad \left.+r_1^2\left(\theta\right)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right\}\left\langle f_2(\theta), f_1'(\theta)\right\rangle \\
&\quad -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)r_1'(\theta)\sin^2\alpha(\theta)s \\
&\quad -r_1^2(\theta)\alpha^2(\theta)\alpha'(\theta)\sin\alpha(\theta)s\cos\alpha(\theta)s \\
&\quad -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\beta(\theta)s\left\langle f_2(\theta), f_3'(\theta)\right\rangle
\end{aligned} \tag{4.37}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
K &= -r_1^2(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\cos\alpha(\theta)s \\
&\quad \times \left(\langle f_1(\theta), f_2'(\theta)\rangle + \langle f_2(\theta), f_1'(\theta)\rangle\right) \\
&\quad -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)s\beta(\theta)s\,\langle f_1(\theta), f_3'(\theta)\rangle \\
&\quad +r_1^2\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\,\langle f_2(\theta), f_1'(\theta)\rangle \\
&\quad -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)r_1'(\theta)\left(\sin^2\alpha(\theta)s+\cos^2\alpha(\theta)s\right) \\
&\quad +r_1(\theta)\alpha^2(\theta)r_1'(\theta)\cos\alpha(\theta)s + (r_1^2(\theta)\alpha^2(\theta)\alpha'(\theta) \\
&\quad \times\sin\alpha(\theta)s\cos\alpha(\theta)s) - r_1^2(\theta)\alpha^2(\theta)\alpha'(\theta)\sin\alpha(\theta)s\cos\alpha(\theta)s \\
&\quad -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\beta(\theta)s\,\langle f_2(\theta), f_3'(\theta)\rangle
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

olur. Burada

$$
\begin{aligned}
\langle f_1(\theta), f_2'(\theta)\rangle + \langle f_2(\theta), f_1'(\theta)\rangle &= 0 \\
\sin^2\alpha(\theta)s+\cos^2\alpha(\theta)s &= 1
\end{aligned}
$$

değerleri (4.38) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
K &= -r_1(\theta)r_1'(\theta)\alpha^2(\theta) \\
&\quad +r_1(\theta)r_1'(\theta)\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)s \\
&\quad +r_1^2(\theta)\alpha^2(\theta)\,\langle f_2(\theta), f_1'(\theta)\rangle\sin\alpha(\theta)s \\
&\quad -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\beta(\theta)\,\langle f_1(\theta), f_3'(\theta)\rangle\, s\cos\alpha(\theta)s \\
&\quad -r_1(\theta)\alpha^2(\theta)\beta(\theta)\,\langle f_2(\theta), f_3'(\theta)\rangle\, s\sin\alpha(\theta)s
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

elde edilir. (4.39) eşitliğinde yer alan sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının lineer bağımsızlığından $r_1'(\theta) = 0$ olur. Böylece

$$r_1(\theta) \text{ değeri sabittir} \tag{4.40}$$

sonucuna varılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} r_1(\theta)\left\langle f_2(\theta), f_1'(\theta)\right\rangle &= 0 \\ r_1(\theta)\beta(\theta)\left\langle f_1(\theta), f_3'(\theta)\right\rangle &= 0 \qquad (4.41) \\ r_1(\theta)\beta(\theta)\left\langle f_2(\theta), f_3'(\theta)\right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Eğer $r_1(\theta) = 0$ ise

$$X(s,\theta) = \beta(\theta) s f_3(\theta)$$

ya da (4.5) eşitliğinde verilen koordinat sistemiyle

$$X(s,\theta) = (0, 0, \beta(\theta) s f_3(\theta), 0)$$

olur ve böylece yüzey $\mathbb{E}^2$ $2-$boyutlu düzleme karşılık gelir. Şimdi $r_1(\theta) \neq 0$ olduğunu varsayarak r_1 gösterimini kullanalım.

Durum 1: Kabul edelim ki her $\theta \in (0, 2\pi)$ için

$$f_1'(\theta) = f_2'(\theta) = f_3'(\theta) = 0$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= (1,0,0,0) \\ f_2(\theta) &= (0,1,0,0) \\ f_3(\theta) &= (0,0,1,0) \\ f_4(\theta) &= (0,0,0,1) \end{aligned}$$

olarak alabiliriz. Böylece

$$X(s,\theta) = \left(r_1\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s - 1\right), r_1 \sin\alpha(\theta)s, \beta(\theta)s, 0\right)$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda yüzey $\mathbb{E}^3$ uzayında bir dairesel silindir olur.

Durum 2:

$J = \{\theta \in (0,2\pi) \colon f_1'(\theta) \neq 0\} \cup \{\theta \in (0,2\pi) \colon f_2'(\theta) \neq 0\} \cup \{\theta \in (0,2\pi) \colon f_3'(\theta) \neq 0\}$ ve $J \neq \varnothing$ olsun. Bazı θ_0 değerleri için $\beta(\theta_0) \neq 0$ olsun. O zaman β süreklidir. $J, (0,2\pi)$ aralığının bir açık altkümesi olmak üzere θ_0 sayısını içeren bir J_1 açık altkümesi vardır öyle ki $J_1 \subset J$ dir. C_1, J_1 aralığının irtibatlı bir bileşeni olsun. C_1 üzerinde $r_1(\theta) \neq 0$ ve $\beta(\theta_0) \neq 0$ olduğundan (4.41) eşitliklerinden

$$\langle f_1(\theta), f_3'(\theta)\rangle = \langle f_2(\theta), f_3'(\theta)\rangle = \langle f_1(\theta), f_2'(\theta)\rangle = 0$$

elde edilir. Şimdi eğri için Frenet türev formüllerini elde edelim:

$$\begin{bmatrix} f_1'(\theta) \\ f_2'(\theta) \\ f_3'(\theta) \\ f_4'(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\theta) \\ f_2(\theta) \\ f_3(\theta) \\ f_4(\theta) \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_1 &= \langle f_1'(\theta), f_1(\theta)\rangle = 0 \\ b_1 &= \langle f_1'(\theta), f_2(\theta)\rangle = 0 \\ c_1 &= \langle f_1'(\theta), f_3(\theta)\rangle = 0 \\ a_2 &= \langle f_2'(\theta), f_1(\theta)\rangle = 0 \\ b_2 &= \langle f_2'(\theta), f_2(\theta)\rangle = 0 \\ c_2 &= \langle f_2'(\theta), f_3(\theta)\rangle = 0 \\ a_3 &= \langle f_3'(\theta), f_1(\theta)\rangle = 0 \\ b_3 &= \langle f_3'(\theta), f_2(\theta)\rangle = 0 \\ c_3 &= \langle f_3'(\theta), f_3(\theta)\rangle = 0 \\ d_4 &= \langle f_4'(\theta), f_4(\theta)\rangle = 0 \end{aligned} \tag{4.43}$$

ve ayrıca

$$\begin{aligned} d_1 &= \langle f_1'(\theta), f_4(\theta)\rangle &= \lambda_1(\theta) \\ d_2 &= \langle f_2'(\theta), f_4(\theta)\rangle &= \lambda_2(\theta) \\ d_3 &= \langle f_3'(\theta), f_4(\theta)\rangle &= \lambda_3(\theta) \\ a_4 &= \langle f_4'(\theta), f_1(\theta)\rangle &= -\lambda_1(\theta) \\ b_4 &= \langle f_4'(\theta), f_2(\theta)\rangle &= -\lambda_2(\theta) \\ c_4 &= \langle f_4'(\theta), f_3(\theta)\rangle &= -\lambda_3(\theta) \end{aligned} \tag{4.44}$$

olarak elde edilir. Burada (4.44) eşitliklerinde

$$\begin{aligned} \langle f_1'(\theta), f_4(\theta)\rangle &= \lambda_1(\theta) \\ \langle f_2'(\theta), f_4(\theta)\rangle &= \lambda_2(\theta) \\ \langle f_3'(\theta), f_4(\theta)\rangle &= \lambda_3(\theta) \end{aligned} \tag{4.45}$$

olarak ifade edilen λ_i fonksiyonları C_1 üzerinde θ ya bağlı fonksiyonlardır ve

$$\begin{aligned} \langle f_1'(\theta), f_4(\theta)\rangle &+ \langle f_4'(\theta), f_1(\theta)\rangle = 0 \\ \langle f_2'(\theta), f_4(\theta)\rangle &+ \langle f_4'(\theta), f_2(\theta)\rangle = 0 \\ \langle f_3'(\theta), f_4(\theta)\rangle &+ \langle f_4'(\theta), f_3(\theta)\rangle = 0 \end{aligned} \tag{4.46}$$

olduğundan, (4.45) ve (4.46) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \langle f_4'(\theta), f_1(\theta)\rangle &= -\lambda_1(\theta) \\ \langle f_4'(\theta), f_2(\theta)\rangle &= -\lambda_2(\theta) \\ \langle f_4'(\theta), f_3(\theta)\rangle &= -\lambda_3(\theta) \end{aligned} \tag{4.47}$$

elde edilir. (4.43), (4.44) ve (4.47) eşitlikleri (4.42) ifadesinde yazılırsa

$$\begin{bmatrix} f_1'(\theta) \\ f_2'(\theta) \\ f_3'(\theta) \\ f_4'(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3(\theta) \\ -\lambda_1(\theta) & -\lambda_2(\theta) & -\lambda_3(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\theta) \\ f_2(\theta) \\ f_3(\theta) \\ f_4(\theta) \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

şeklinde Frenet formülleri elde edilir.

Şimdi C_1 aralığı üzerinde $\widetilde{\nabla}_{X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)} X_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$ ifadesinin değerini hesaplayalım. (4.40) eşitliği gereğince $r_1'(\theta) = 0$ dır. Bu değer (4.22) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} X_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= r_1\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)f_1'(\theta)+r_1\sin\alpha(\theta)sf_2'(\theta) \\ &\quad -r_1\alpha'(\theta)s\sin\alpha(\theta)sf_1(\theta)+r_1\alpha'(\theta)s\cos\alpha(\theta)sf_2(\theta) \\ &\quad +\beta(\theta)sf_3'(\theta)+\beta'(\theta)sf_3(\theta) \end{aligned} \tag{4.49}$$

elde edilir. (4.49) eşitliğinde türev alınırsa

$$\widetilde{\nabla}_{X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)} X_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = L$$

ifadesi

$$\begin{aligned} L &= r_1f_1'(\theta)\frac{\partial}{\partial s}\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)+\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right)\frac{\partial}{\partial s}\left(r_1f_1'(\theta)\right) \\ &\quad +r_1f_2'(\theta)\frac{\partial}{\partial s}\sin\alpha(\theta)s+\sin\alpha(\theta)s\frac{\partial}{\partial s}\left(r_1f_2'(\theta)\right) \\ &\quad -r_1\alpha'(\theta)f_1(\theta)\frac{\partial}{\partial s}\left(s\sin\alpha(\theta)s\right)+s\sin\alpha(\theta)s\frac{\partial}{\partial s}\left(-r_1\alpha'(\theta)f_1(\theta)\right) \\ &\quad +r_1\alpha'(\theta)f_2(\theta)\frac{\partial}{\partial s}\left(s\cos\alpha(\theta)s\right)+s\cos\alpha(\theta)s\frac{\partial}{\partial s}\left(r_1\alpha'(\theta)f_2(\theta)\right) \\ &\quad +\beta(\theta)f_3'(\theta)\frac{\partial}{\partial s}s+s\frac{\partial}{\partial s}\left(\beta(\theta)f_3'(\theta)\right) \\ &\quad +\beta'(\theta)f_3(\theta)\frac{\partial}{\partial s}s+s\frac{\partial}{\partial s}\left(\beta'(\theta)f_3(\theta)\right) \\ &= -r_1f_1'(\theta)\alpha\left(\theta\right)\sin\alpha(\theta)s+\left(\cos\alpha\left(\theta\right)s-1\right).0 \\ &\quad +r_1f_2'(\theta)\alpha\left(\theta\right)\cos\alpha\left(\theta\right)s+\sin\alpha(\theta)s.0 \\ &\quad -r_1\alpha'(\theta)f_1(\theta)\left(\sin\alpha(\theta)s+s\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta)s\right) \\ &\quad +s\sin\alpha(\theta)s.0+r_1\alpha'(\theta)f_2(\theta)\left(\cos\alpha(\theta)s\right. \\ &\quad \left.-s\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right)+s\cos\alpha(\theta)s.0 \\ &\quad +\beta(\theta)f_3'(\theta).1+s.0+\beta'(\theta)f_3(\theta).1+s.0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} L &= -r_1 f_1'(\theta)\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta)s + r_1 f_2'(\theta)\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta)s \\ &\quad -r_1\alpha'(\theta)f_1(\theta)\left(\sin\alpha(\theta)s + s\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta)s\right) \\ &\quad +r_1\alpha'(\theta)f_2(\theta)\left(\cos\alpha(\theta)s - s\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right) \\ &\quad +\beta(\theta)f_3'(\theta) + \beta'(\theta)f_3(\theta) \end{aligned} \tag{4.50}$$

olarak elde edilir. Şimdi

$$\widetilde{\nabla}_{X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)}\widetilde{\nabla}_{X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)}X_*\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\right) = M$$

hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} M &= -r_1 f_1'(\theta)\alpha(\theta)\frac{\partial}{\partial s}\left(\sin\alpha(\theta)s\right) \\ &\quad +\sin\alpha(\theta)s\frac{\partial}{\partial s}\left(-r_1 f_1'(\theta)\alpha(\theta)\right) \\ &\quad +r_1 f_2'(\theta)\alpha(\theta)\frac{\partial}{\partial s}\left(\cos\alpha(\theta)s\right) \\ &\quad +\cos\alpha(\theta)s\frac{\partial}{\partial s}\left(r_1 f_2'(\theta)\alpha(\theta)\right) \\ &\quad -r_1\alpha'(\theta)f_1(\theta)\frac{\partial}{\partial s}\left(\sin\alpha(\theta)s + s\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta)s\right) \\ &\quad +\left(\sin\alpha(\theta)s + s\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta)s\right)\frac{\partial}{\partial s}\left(-r_1\alpha'(\theta)f_1(\theta)\right) \\ &\quad +r_1\alpha'(\theta)f_2(\theta)\frac{\partial}{\partial s}\left(\cos\alpha(\theta)s - s\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right) \\ &\quad +\left(\cos\alpha(\theta)s - s\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right)\frac{\partial}{\partial s}\left(r_1\alpha'(\theta)f_2(\theta)\right) \\ &\quad +\frac{\partial}{\partial s}\left(\beta(\theta)f_3'(\theta)\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\beta'(\theta)f_3(\theta)\right) \\ &= -r_1\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)s f_1'(\theta) - r_1\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s f_2'(\theta) \\ &\quad -r_1\alpha'(\theta)f_1(\theta)\left(\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta)s\right. \\ &\quad \left.+\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta)s - s\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right) \\ &\quad +r_1\alpha'(\theta)f_2(\theta)\left(-\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta)s\right. \\ &\quad \left.-\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta)s - s\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)s\right) \end{aligned}$$

olur ve son eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} M &= [-2r_1\alpha(\theta)\alpha'(\theta)\cos\alpha(\theta)s \\ &\quad +r_1\alpha^2(\theta)\alpha'(\theta)s\sin\alpha(\theta)s]f_1(\theta) \\ &\quad -[2r_1\alpha(\theta)\alpha'(\theta)\sin\alpha(\theta)s \\ &\quad +r_1\alpha^2(\theta)\alpha'(\theta)s\cos\alpha(\theta)s]f_2(\theta) \\ &\quad -r_1\alpha^2(\theta)\cos\alpha(\theta)sf_1'(\theta) \\ &\quad -r_1\alpha^2(\theta)\sin\alpha(\theta)sf_2'(\theta) \end{aligned} \tag{4.51}$$

elde edilir.

$X_*\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)$ ve $X_*\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)$ ifadelerini sırasıyla T ve Q ile gösterelim. Tanım 2.5.17 gereğince

$$\widetilde{\nabla}_T Q = \nabla_T Q + h(T,Q)$$

olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_T\widetilde{\nabla}_T Q = \widetilde{\nabla}_T\left(\nabla_T Q + h(T,Q)\right)$$

yazılır. Tanım 2.5.18 gereğince

$$\widetilde{\nabla}_T h(T,Q) = -A_{h(T,Q)}T + \nabla_T^{\perp}h(T,Q)$$

olur. Ayrıca

$$\widetilde{\nabla}_T\nabla_T Q = \nabla_T\nabla_T Q + h(T,\nabla_T Q)$$

olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_T\widetilde{\nabla}_T Q = \nabla_T\nabla_T Q + h(T,\nabla_T Q) - A_{h(T,Q)}T + \nabla_T^{\perp}h(T,Q)$$

elde edilir. Tanım 2.5.5 gereğince,

$$R(T,Q)T = \nabla_T\nabla_Q T - \nabla_Q\nabla_T T - \nabla_{[T,Q]}T \tag{4.52}$$

yazılır. (4.52) eşitliğinde $\nabla_T \nabla_Q T = \nabla_T \nabla_T Q$ yalnız bırakılırsa

$$\nabla_T \nabla_T Q = R(T,Q)T + \nabla_Q \nabla_T T + \nabla_{[T,Q]} T$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_T \widetilde{\nabla}_T Q &= R(T,Q)T + \nabla_Q \nabla_T T + \nabla_{[T,Q]} T \\ &\quad + h(T, \nabla_T Q) - A_{h(T,Q)} T + \nabla_T^{\perp} h(T,Q) \end{aligned}$$

elde edilir. Tanım 2.5.16 gereğince

$$\left(\overline{\nabla}_T h\right)(T,Q) = \nabla_T^{\perp} h(T,Q) - h(\nabla_T T, Q) - h(T, \nabla_Q T)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_T \widetilde{\nabla}_T Q &= R(T,Q)T + \nabla_Q \nabla_T T + \nabla_{[T,Q]} T \\ &\quad + h(T, \nabla_T Q) - A_{h(T,Q)} T + \left(\overline{\nabla}_T h\right)(T,Q) \\ &\quad + h(\nabla_T T, Q) + h(T, \nabla_Q T) \end{aligned} \tag{4.53}$$

elde edilir.

(4.51) eşitliğinde $s \to 0$ iken (4.53) eşitliğinde $\widetilde{\nabla}_T \widetilde{\nabla}_T Q \to 0$ olur. C_1 üzerinde s değeri 0 alınırsa

$$2r_1 \alpha(\theta) \alpha'(\theta) f_1(\theta) + r_1 \alpha^2(\theta) f_1'(\theta) = 0 \tag{4.54}$$

elde edilir. (4.48) eşitliğindeki $f_1'(\theta) = \lambda_1(\theta) f_4(\theta)$ değeri (4.54) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2r_1 \alpha(\theta) \alpha'(\theta) f_1(\theta) + r_1 \alpha^2(\theta) f_1'(\theta) &= 2r_1 \alpha(\theta) \alpha'(\theta) f_1(\theta) \\ &\quad + r_1 \alpha^2(\theta) \lambda_1(\theta) f_4(\theta) \end{aligned}$$

ve

$$2r_1 \alpha(\theta) \alpha'(\theta) f_1(\theta) + r_1 \alpha^2(\theta) \lambda_1(\theta) f_4(\theta) = 0 \tag{4.55}$$

olur. (4.55) eşitliğinde bazların lineer bağımsızlığı kullanılırsa her $\theta \in C_1$ için

$$\alpha'(\theta) = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda_1(\theta) = 0 \tag{4.56}$$

olur. Böylece α fonksiyonunun C_1 aralığı üzerinde sabit olduğu görülür. $X_*\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right) = T(s)$ birim vektör olduğundan,

$$\left\| X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right\|^2 = \left\langle X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right\rangle = 1 \tag{4.57}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\left\langle X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), X_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\right\rangle &= r_1^2\alpha^2(\theta)\sin^2\alpha(\theta)\, s \\ &\quad + r_1^2\alpha^2(\theta)\cos^2\alpha(\theta)\, s + \beta^2(\theta) \\ &= r_1^2\alpha^2(\theta) + \beta^2(\theta)\end{aligned} \tag{4.58}$$

bulunur. (4.57) ve (4.58) eşitliklerinden

$$r_1^2\alpha^2(\theta) + \beta^2(\theta) = 1 \tag{4.59}$$

elde edilir. r_1 ve $\alpha(\theta)$ fonksiyonları sabit olduğundan β fonsiyonu da C_1 üzerinde sabit olur. Böylece α, β ve r_1 fonksiyonları C_1 üzerinde sabit olur. Buradan κ_1 ve κ_2 eğrilikleri C_1 aralığı üzerinde sabit olur. Süreklilik gereği C_1, $(0, 2\pi)$ aralığı olur. O zaman rankı 3 olan O noktasından geçen her jeodezik aynı Frenet eğriliğine sahip olur ki bu M yüzeyinin O noktasında helikal olduğu anlamına gelir. Yardımcı Teorem 4.1.1 gereğince O noktasından geçen her jeodezik düzlemsel olur. Bu ise kabulümüz ile çelişir.

Sonuç 4.2.7: M, $\mathbb{E}^4$ uzayında tam irtibatlı bir yüzey olsun. M yüzeyi ($\bigstar$) özelliğini sağlar ancak ve ancak M, $\mathbb{E}^3$ uzayında bulunan $\mathbb{E}^2$ düzlemi veya $\mathbb{E}^3$ uzayının altkümesi olan bir standart küre veya $\mathbb{E}^3$ uzayında bir dairesel silindir veya

$$S^1(a) \times S^1(b) \subset \mathbb{E}^4$$

standart torusu veya $O \subset \mathbb{E}^4$ uzayında

$$X(s,\theta) = \frac{1}{\kappa}\left(\sin\kappa s\cos\theta, \sin\kappa s\sin\theta, (1-\cos\kappa s)\cos 2\theta, (1-\cos\kappa s)\sin 2\theta\right)$$

formundaki Blaschke yüzeyidir.

İspat: M yüzeyi $\mathbb{E}^4$ uzayında tam irtibatlı bir yüzey olmak üzere M yüzeyi ($\bigstar$) özelliğini sağlasın. γ eğrisi o noktasından geçen bir jeodezik olsun. γ eğrisinin rankı 1 veya 2.olsun. Teorem 4.2.3 gereğince jeodezikler düz doğrulara veya çemberlere karşılık gelir. Ayrıca *rank* 2 olduğunda M yüzeyi Teorem 2.2.27 gereğince $\mathbb{E}^4$ uzayında

$$X(s,\theta) = \frac{1}{\kappa}\left(\sin\kappa s\cos\theta, \sin\kappa s\sin\theta, (1-\cos\kappa s)\cos 2\theta, (1-\cos\kappa s)\sin 2\theta\right)$$

Blaschke yüzeyine karşılık gelir. Bu durumda M yüzeyi $\mathbb{E}^3$ uzayında $\mathbb{E}^2$ düzlemi veya S^2 standart küresi olur. γ eğrisinin rankı 3 olsun. Bu durumda Kesim 4.2 **Durum 1** de ifade edildiği üzere yüzey $\mathbb{E}^3$ uzayında bir dairesel silindir olur. γ eğrisinin rankı 4 olsun. Teorem 3.3.2 ifadesinde bulunan (1) gereğince M yüzeyi $S^1(a)\times S^1(b)\subset\mathbb{E}^4$ standart torusu olur. Tersine bu yüzeyler üzerinde alınan jeodezikler düz doğrular, çemberler, helisler veya torus üzerindeki helislere karşılık geleceğinden, ($\bigstar$) özelliğini sağlarlar.

Sonuç 4.2.8: M, $\mathbb{E}^4$ uzayında tam irtibatlı bir yüzey olsun. M yüzeyi üzerindeki her jeodeziğin $W-$eğrisi olması için gerek ve yeter şart M yüzeyinin $\mathbb{E}^3$ uzayında $\mathbb{E}^2$ düzlemi veya $\mathbb{E}^3$ uzayının altkümesi olan bir standart küre veya $\mathbb{E}^3$ uzayında bir dairesel silindir veya $S^1(a)\times S^1(b)\subset\mathbb{E}^4$ standart torus olmasıdır.

İspat: M, $\mathbb{E}^4$ uzayında tam irtibatlı bir yüzey olsun. M yüzeyinin tüm jeodezikleri $W-$eğrisi olsun. M yüzeyinin jeodeziklerini γ ile temsil edelim. γ eğrisinin rankı 1 ise jeodezikler düz doğrular ve böylece M yüzeyi $\mathbb{E}^2$ düzlemi olur. γ eğrisinin rankı 2 ise jeodezikler çemberler ve böylece M yüzeyi standart küre olur. γ eğrisinin rankı 3 ise jeodezikler helisler ve böylece M yüzeyi dairesel silindir olur. γ eğrisinin rankı 4 ise jeodezikler torus üzerinde helis ve böylece M yüzeyi standart torus olur. Tersine M yüzeyi $\mathbb{E}^2$ düzlemi olsun. Bu durumda M yüzeyinin jeodezikleri düz doğrular olur. Örnek 3.4.1 gereğince düz doğrular rankı 1 olan $W-$eğrileri olduğundan bu koşulu sağlar. M yüzeyi standart küre olsun. Bu durumda M yüzeyinin jeodezikleri büyük çemberler olur. Örnek 3.4.2 de çemberlerin rankı 2 olan $W-$eğrileri olduğu ifade edilmişti. M yüzeyi silindir yüzeyi olsun. Bu durumda M yüzeyinin jeodezikleri dairesel helis eğrisi olur. Örnek 3.4.3 de helislerin, rankı 3 olan $W-$eğrileri olduğu ifade edilmişti. M yüzeyi standart torus olsun. Teorem 3.3.2 (1) de ifade edildiği gibi M yüzeyinin jeodezikleri rankı 4 olan $W-$eğrileri olur. Böylece $S^1(a) \times S^1(b) \subset \mathbb{E}^4$ torusu da bu koşulu sağlar ve ispat tamamlanır.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, $4-$boyutlu Öklid uzayında basit jeodezikli altmanifoldlar ve yüzeyler için bazı karakterizasyonlar verilmeye çalışılmıştır. Dirk Ferus ve Stephan Schirrmacher tarafından yayınlatılan "Öklidyen uzayda basit jeodezikli altmanifoldlar" ile Young Ho Kim ve Eun Kyoung Lee tarafından yayınlatılan "$4-$boyutlu Öklid uzayının jeodezikleri $W-$eğrileri olan yüzeyler" çalışmalarında verilen teoremler detaylı bir şekilde incelenmeye çalışılmıştır.

Rankı çift olan W-eğrilerinin parametrik denklemi elde edilerek, bazı W-eğrilerinin rankları hesaplanmıştır. Ayrıca helikal yüzeylerin jeodeziklerinin ve Blaschke manifoldunun karakterizasyonları incelenmiştir.

Bu çalışmadan elde edilen sonuçlara dayalı olarak bazı öneriler geliştirilebilir: $4-$boyutlu Öklid uzayında yapılan çalışmalar daha yüksek boyutlu Öklid uzaylarında çalışılabilir. Ayrıca bu çalışma, Minkowski uzay-zaman gibi farklı metriklere sahip diğer uzaylara taşınarak, bu uzaylardaki karşılıkları aranabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aminov, Y., 2003. Differential Geometry and Topology of Curves, Gordon and Breach Science Publishers imprint, London, 205p.

Besse, L. A., 1978. Manifolds All of Whose Geodesics are Closed, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 262p.

Boothby, W. M., 1986. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Second Edition, Academic Press Inc., Florida, 419p.

Choi, H. J., Kim, H. Y. and Tanabe, H., 2010. Characterizations of Some Isometric Immersions in Terms of Certain Frenet Curves, Bull. Korean Math. Soc., 47, No. 6, 1285-1296.

Do Carmo, M. P., 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 503p.

Dönmez, A., 2000. Metrik ve Topolojik Uzaylar, Beta Basım Yayım, İstanbul, 359s.

Ferus, D., 1980. Symmetric Submanifolds of Euclidean Space, Math. Ann., 247, 81-93.

Ferus, D. and Schirrmacher, S., 1982. Submanifolds in Euclidean Space with Simple Geodesics, Math. Ann., 260, 57-62.

Guggenheimer, W. H., 1977. Differential Geometry, Dover Publications, Inc., New York, 378p.

Hacısalihoğlu, H. H., 1975. Lineer Cebir, Diyarbakır Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Diyarbakır, 480s.

Hacısalihoğlu, H. H., 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Elazığ, 439s.

Hacısalihoğlu, H. H., 1983. Diferensiyel Geometri, Gazi Üniversitesi, Ankara, 895s.

Hacısalihoğlu, H. H., 1998 a. Analitik Geometri, Ankara Üniversitesi, 441s.

Hacısalihoğlu, H. H., 1998 b. Diferensiyel Geometri, Cilt I. Ankara Üniversitesi, 269s.

Hacısalihoğlu, H. H., 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt II. Ankara Üniversitesi, 340s.

Hacısalihoğlu, H. H. ve Ekmekçi, N., 2003. Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi, 251s.

Hacısalihoğlu, H. H., 2004. Diferensiyel Geometri, Cilt III. Ankara Üniversitesi, 206s.

Kaya, R., 2002. Analitik Geometri, Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, 439s.

Ki, H. U. and Kim, H. Y., 1994. Surfaces with Simple Geodesics Through a Point, Journal of Geometry, Vol. 51., 67-78

Kim, H. Y. and Lee, K. E., 1993. Surfaces of Euclidean 4-Space Whose Geodesics are W-Curves, Nihonkai Math. J., Vol. 4, 221-232.

Kim, H. Y., 1993 a. Surfaces with Simple Geodesics, J. Korean Math. Soc. 30, No. 2, 361-369.

Kim, H. Y., 1993 b. Surfaces of a Euclidean Space with Helical or Planar Geodesics Through a Point, Annali di Matematica pura ed applicata, Vol. CLXIV, 1-35.

Kobayashi, S. and Nomizu, K., 1969. Foundations of Differential Geometry, Vol.II. Interscience Publishers, 470p.

Koçak, M., 2009. Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset, Eskişehir, 558s.

Lee, M. J., 2002. Introduction to Smooth Manifolds, Springer-Verlag, New York, 628p.

McCleary, J., 1994. Geometry From a Differentiable Viewpoint, Cambridge University Press, 308p.

Morgan, F., 1992. Riemannian Geometry a Beginner's Guide, Jones and Bartlett Publishers, 119p.

O'Neill, B., 1983. Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity, Academic Press. Inc., 482p.

O'Neill, B., 2006. Elementary Differential Geometry, Elsevier Academic Press Publications, 503p.

Öztürk, G., Arslan, K. and Hacısalihoğlu, H. H., 2008. A Characterization of ccr-curves in $\mathbb{R}^m$, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 57, 4, 217-224.

Pressley, A., 2010. Elementary Differential Geometry, Springer-Verlag, London, 473p.

Robin, W. J. and Salamon, A. D., 2011. Introduction to Differerential Geometry, University of Wisconsin, 241p.

Sabuncuoğlu, A., 2006. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, 440s.

Shifrin, T., 2011. Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces, University of Georgia, 125p.

Steenrod, N., 1951. The Topology of Fibre Bundles, Princeton University, 224p.

Strübing, W., 1979. Symmetric Submanifolds of Riemannian Manifolds, Math. Ann. 245, 37-44.

Taşçı, D., 2006. Lineer Cebir, Selçuk Üniversitesi Yayınları, Konya, 477s.

Taştan, H. M., 2000. Yarı-Riemann Altmanifoldların Bazı Eğrileri Üzerine Bir Çalışma, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, 54s.

Thorpe, A. J., 1979. Elementary Topics in Differential Geometry, Springer-Verlag, New York, 253p.

Toponogov, A. V., 2006. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Birkhäuser, Boston, 206p.

Torgašev, P. M. and Šucurovic, 2002. W-Curves in Minkowski Space-Time, Novi Sad J. Math., Vol.32, No. 2, 55-65.

Yıldız, C., 2002. Genel Topoloji, Gazi Üniversitesi, Ankara, 328s.