

Deforme Bir Fermi Gazı Modelinin Yüksek Sıcaklıklarda Termo-istatistiksel Özellikleri

Mustafa Şenay

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizik Anabilim Dalı

Mayıs 2012

High-Temperature Thermostatistical Properties of a Deformed Fermi Gas Model

Mustafa Senay

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Physics

May 2012

Deforme Bir Fermi Gazı Modelinin Yüksek Sıcaklıklarda Termo-istatistiksel Özellikleri

Mustafa Şenay

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Fizik Anabilim Dalı
Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Abdullah Algın

Mayıs 2012

ONAY

Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Mustafa Şenay'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Deforme Bir Fermi Gazı Modelinin Yüksek Sıcaklıklarda Termo-istatistiksel Özellikleri” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Abdullah ALĞIN

İkinci Danışman :-

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Celalettin BAYKUL

Üye : Doç. Dr. Abdullah ALĞIN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Dursun IRK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali Serdar ARIKAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sertaç EROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez çalışmasında ilk olarak, özdeş parçacık sistemlerinin genel kuantum mekaniksel özellikleri incelendi. Özel olarak, tek boyutta bozon ve fermiyon osilatörlerinin sağladıkları kuantum cebirlerine değinilerek, bu operatör cebirleri yardımıyla özdeş parçacık sistemlerinin istatistiksel dağılım fonksiyonları çalışıldı.

İkinci olarak, ideal Fermi gazının yüksek ve düşük sıcaklıklar limitlerinde ortalama parçacık sayısı, iç enerji, entropi gibi termo-istatistiksel fonksiyonları üzerinde duruldu. İki ve üç boyutlu uzayda yüksek sıcaklıklar limitinde ideal Fermi gazının hal denkleminin virial açılımı yapılarak, virial katsayıları incelendi.

Üçüncü olarak, bu tez çalışmasının özgün kısmını oluşturan ve literatürde VPJC-fermion modeli olarak bilinen (Viswanathan et al., 1992; Chaichian et al., 1993; Algin, 2011) deforme bir fermiyon gazının yüksek sıcaklıklar limitinde termo-istatistiksel özellikleri ele alındı. Modelin ortalama parçacık sayısı, öz hacim, entropi gibi termo-istatistiksel özellikleri, $0 < q < 1$ aralığında değer alabilen q deformasyon parametresi cinsinden incelendi. Genelleştirilmiş Fermi-Dirac fonksiyonları elde edilerek, iki ve üç boyutlu uzayda modelin hal denkleminin virial açılımında ilk dört virial katsayısı deformasyon parametresine bağlı olarak hesaplandı. VPJC-fermion gazı modelinin incelenen termo-istatistiksel fonksiyonlarına, deformasyonun etkisinin neler olabileceği araştırıldı.

Son bölümde ise VPJC-fermion gazı modelinin termo-istatistiksel sonuçlarının, hem serbest fermiyon gazı hem de literatürde çalışılan diğer deforme fermiyon gazı modellerinin yüksek sıcaklıklardaki termo-istatistiksel sonuçlarıyla kıyaslamaları yapıldı. Modelin, $0 < q < 1$ aralığında Pauli dışarlama ilkesini sağlamayan deforme bir fermiyon sistemi oluşturduğu, deformasyonun sistemin entropisine azaltıcı etkiler yapabildiği, yüksek sıcaklıklarda hem üç hem de iki boyutta hal denkleminin üçüncü virial katsayısının q parametresinin değerine bağlı olarak işaret değiştirebildiği, bu yönüyle modelin orijinal fermiyonik karakterinin adeta bir bozon gazı benzeri yapıya büründüğü yapılan incelemeler sonucunda bulundu. Son olarak, VPJC-fermion gazı modelinin olası uygulama alanları kısaca tartışıldı.

Anahtar Kelimeler: Fermi sistemleri, deforme Fermi gaz modeli, termoistatistik, q -analizi, deforme fermiyonlar, kuantum cebirleri, kuantum grupları, virial katsayıları.

SUMMARY

In this thesis study, first, the general quantum mechanical properties of identical particle systems were examined. In particular, statistical distribution functions of identical particle systems were studied with the help of operator algebra, by referring to the quantum algebra that the boson and fermion oscillators satisfy in one dimension.

Secondly, in the high-and low-temperature limits, thermo-statistical functions of an ideal Fermi gas such as the average number of particles, entropy, internal energy were studied. A virial expansion of the equation of state of an ideal Fermi gas for two and three dimensional spaces was examined in the high-temperature limit.

Thirdly, in the high-temperature limit, the thermo-statistical properties of a deformed fermion gas, which constitutes the original part of this thesis and was known as the VPJC-fermion model in the literature (Viswanathan et al., 1992; Chaichian et al., 1993; Algin, 2011), were discussed. Thermo-statistical properties of the model such as the average number of particle, specific volume, and entropy were examined in terms of the deformation parameter q , which has values in the interval $0 < q < 1$. By obtaining the generalized Fermi-Dirac functions, in the two and three dimensional spaces, the first four virial coefficients in the virial expansion of the equation of state of the model were calculated depending on the deformation parameter q . Possible effects of deformation on the thermo-statistical functions of the VPJC-fermion gas model are investigated.

In the last section, comparisons of the thermo-statistical results of the VPJC-fermion gas model with the high-temperature thermo-statistical results of both a free fermion gas and of the other q -deformed fermion gas models studied in the literature were performed. From the studies made in this research, the following main results were found: The model forms a deformed fermion system with no exclusion principle when $0 < q < 1$. The deformation brings about decreasing effects on the entropy values of the system. In the two and three dimensional spaces, the sign of the third virial coefficient of the equation of state of the model changes depending on the values of the parameter q for high temperatures. In this regard, the original fermionic character of the model could have a similar character as in the case of a boson gas. Finally, possible application areas of the VPJC-fermion gas model were briefly discussed.

Keywords: Fermi systems, deformed Fermi gas model, thermostatics, q -calculus, deformed fermions, quantum algebras, quantum groups, virial coefficients.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca bilgilerini benden esirgemeyen ve öğütleriyle yol gösteren değerli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Abdullah ALĞIN'a teşekkür ediyorum.

Çalışmalarım sırasında kullandığım bilgisayar programlarında yardımlarını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Dursun IRK ve Araş. Gör. Celal AŞICI'ya teşekkür ediyorum.

Çalışmalarım boyunca her zaman yanımda olan ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xi
1. GİRİŞ	1
2. KUANTUM ÖZDEŞ PARÇACIK SİSTEMLERİ	4
2.1 Özdeş Parçacıklar	4
2.2 Tek-Boyutlu Bozon Osilatörleri	8
2.3 Bozon Dağılım Fonksiyonu	9
2.4 Tek-Boyutlu Fermiyon Osilatörleri	12
2.5 Fermiyon Dağılım Fonksiyonu	13
3. İDEAL FERMİ GAZININ TERMO-İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ	15
3.1 Üç Boyutlu Uzayda İdeal Fermi Gazının Thermo-istatistiksel Özellikleri	15
3.1.1 Yüksek sıcaklıklar ve düşük yoğunluklar	23
3.1.2 Düşük sıcaklıklar ve yüksek yoğunluklar	24
3.2 İki Boyutlu Uzayda İdeal Fermi Gazının Yüksek Sıcaklıklarda Hal Denklemi... 28	
4. VPJC-FERMİYON MODELİ.....	32
4.1 VPJC-Fermiyon Osilatör Modeli.....	32
4.2 VPJC-Fermiyon Osilatör Modelinin Yüksek Sıcaklıklarda Thermo-istatistiksel Özellikleri	33
4.2.1 Modelin iki boyutlu uzayda yüksek sıcaklıklarda hal denklemi.....	41
5. SONUÇ VE TARTIŞMA	45

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

KAYNAKLAR DİZİNİ..... 50

EKLER

- EK 1. Standart $f_{5/2}(z)$ fonksiyonunun Fortran yazılımı.
- EK 2. Standart $f_{3/2}(z)$ fonksiyonunun Fortran yazılımı.
- EK 3. İdeal Fermi gazı entropisi S/Nk 'nin z 'ye göre değişimini veren Fortran yazılımı.
- EK 4. Eşitlik (3.31)'in çözümü.
- EK 5. Sonlu sıcaklıklarda $0 < q < 1$ durumu için q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimini veren Fortran yazılımı.
- EK 6. q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu $f_{5/2}(z, q)$ 'nin $0 < q < 1$ durumu için z 'nin bir fonksiyonu olarak Fortran yazılımı.
- EK 7. q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu $f_{3/2}(z, q)$ 'nin $0 < q < 1$ durumu için z 'nin bir fonksiyonu olarak Fortran yazılımı.
- EK 8. q -deforme entropi S^q/Nk 'nin $0 < q < 1$ durumu için z 'nin bir fonksiyonu olarak Fortran yazılımı.
- EK 9. Üç boyutlu uzayda, virial katsayılarının q 'ya göre değişimlerini veren Fortran yazılımı.
- EK 10. İki boyutlu uzayda, virial katsayılarının q 'ya göre değişimlerini veren Fortran yazılımı.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
3.1. Standart $f_n(z)$ fonksiyonları.....	19
3.2. İdeal Fermi gazı entropisi S/Nk 'nın z 'ye göre değişimi.....	21
3.3. Standart $f_{3/2}(z)$ fonksiyonunun z 'ye göre değişimi	22
3.4. İdeal Fermi gazının ortalama parçacık sayısı	26
3.5. İdeal Fermi gazının öz ısısı	27
4.1. Sonlu sıcaklıklarda $0 < q < 1$ durumu için q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimi	35
4.2. q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonlarının $0 < q < 1$ durumu için z 'ye göre değişimi.....	38
4.3. q -deforme entropi fonksiyonunun $0 < q < 1$ durumu için z 'ye göre değişimi.....	39
4.4. Üç boyutlu uzayda, virial katsayılarının q deformasyon parametresine göre değişimleri	41
4.5. İki boyutlu uzayda, virial katsayılarının q deformasyon parametresine göre değişimleri	44

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
A	Helmholtz Serbest Enerjisi
\hat{b}	Bozonik yok etme operatörü
\hat{b}^*	Bozonik yaratma operatörü
\hat{c}	Deforme fermiyonik yok etme operatörü
\hat{c}^*	Deforme fermiyonik yaratma operatörü
C_V	Öz ısı
\hat{D}_x	Fermiyonik Jackson türev (JD) operatörü
E	Toplam enerji
$f_n(z)$	Standart Fermi-Dirac fonksiyonları
\hat{f}	Fermiyonik yok etme operatörü
\hat{f}^*	Fermiyonik yaratma operatörü
g	Çakışma sayısı
h	Plack sabiti
\hbar	$h/2\pi$
\hat{H}	Hamilton operatörü
$k = k_B$	Boltzmann sabiti
m	Kütle
\hat{N}_b	Bozonik sayı operatörü
\hat{N}_f	Fermiyonik sayı operatörü
$[\hat{N}]$	Deforme fermiyon sayı operatörü
P	Basınç
p_F	Fermi momentumu
S	Entropi
T	Mutlak sıcaklık
T_F	Fermi sıcaklığı
U	İç enerji

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
u_a	Tek-parçacık dalga fonksiyonu
V	Hacim
$Z(z, V, T)$	Büyük bölüşüm fonksiyonu
$Q_N(T, V)$	Bölüşüm fonksiyonu
ε_F	Fermi enerjisi
λ	Termal dalga boyu
μ	Kimyasal potansiyel
β	$1/kT$
ρ	Yoğunluk matrisi
q	Reel pozitif deformasyon parametresi

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
VPJC	Viswanathan-Parthasarathy-Jagannathan-Chaichian
JD	Jackson türevi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Makroskobik ve mikroskobik olarak evrenin yapısı günümüze kadar bazı fizik teorileri ile açıklanmaya çalışılmıştır. Bu teoriler, klasik ve kuantum teorileri olmak üzere ikiye ayrılır. 19. yüzyılın sonlarına kadar klasik teorinin makroskobik boyuttaki tüm fiziksel olayları açıklamada yeterli olduğuna inanılıyordu (Karaoğlu, 2008). Ancak makroskobik boyuttan öteye, özellikle fiziksel mikroevrenin nesnelere sorumlu olduğu olaylarda klasik teorinin yeterli cevaplar vermediği anlaşılmış, yeni bir teoriye ihtiyaç duyulmuştur. İlk olarak, Max Planck'ın karacisim ışımaya problemi için önerdiği yaklaşım kuantum teorisinin başlangıç adımı olmuştur. Bu yeni görüş daha sonra pek çok mikroskobik boyuttaki fiziksel olayların açıklanmasında da yol gösterici olmuştur.

Evrendeki mikro sistemler kuantum mekaniksel olarak incelendiğinde; fermiyonlar ve bozonlar olmak üzere iki ana tür parçacık grubu ortaya çıkmaktadır. Özdeş ve birbirinden ayırt edilemeyen bu parçacık gruplarından fermiyonlar, Pauli dışarlama ilkesine uyarlar ve anti-simetrik dalga fonksiyonları ile temsil edilirler. Bozonlar ise simetrik dalga fonksiyonuna sahiptirler ve Pauli dışarlama ilkesi etkisi altında kalmazlar (Besier, 1997; Gasiorowicz, 2003).

\hbar birimlerinde spinleri buçuklu tam sayı olarak bilinen tüm leptonlar (e , ν_e , τ , ...), baryonlar (proton, nötron, ...) ve kuarklar (d, u, s, ...) fermiyon parçacıklarıdır. \hbar birimlerinde spinleri tam sayı olarak bilinen gluon, foton, W^\pm ve Z^0 taşıyıcıları gibi parçacıklar bozonlara örneklerdendir (Griffiths, 1987; Besier, 1997).

Bozonların oluşturdukları sistemler Bose-Einstein istatistiği ile incelenirken, fermiyonların oluşturdukları sistemler Fermi-Dirac istatistiği ile incelenir. Bu istatistikler sayesinde bozon veya fermiyonlardan oluşan sistemlerin termo-istatistiksel özellikleri belirlenebilmektedir. Yüksek sıcaklıklar ve düşük yoğunluklarda Bose-Einstein ve Fermi-Dirac istatistikleri klasik Maxwell-Boltzmann istatistiğine indirgenirler (Huang, 1987). Çünkü ortalama parçacıklar arası mesafe termal dalga boyundan daha büyüktür. Bu yüzden kuantum etkiler ihmal edilebilir. Kuantum

etkiler düşük sıcaklıklar ve yüksek yoğunluklarda etkisini daha baskın olarak göstermektedir (Huang, 1987; Greiner et al., 1994; Pathria, 1996).

Öte yandan kuantum mekaniğinde fermiyonlar ve bozonlar operatörler ile temsil edilebilirler. Fermiyonlara ait operatörler anti-komütatör ilişkisini sağlarken, bozonlara ait operatörler ise komütatör ilişkisini sağlarlar. Fermiyonlar ve bozonlar farklı yapıya sahip olduklarından operatör ilişkileri de farklı olmaktadır (Merzbacher, 1970; Shankar, 1994; Liboff, 1997). Bozonik ve fermiyonik operatör cebirlerinin özel reel bir parametre ile genelleştirilmiş (veya deforme edilmiş) hallerine q -deforme operatör cebirleri adı verilir. Literatürde bu q -deforme osilatör cebirleri ile ilgili yapılan ilk çalışmalardan; 1976'da Arik ve Coon, 1989'da Biedenharn ve Macfarlane anılabilir (Arik and Coon, 1976; Biedenharn, 1989; Macfarlane, 1989). Daha sonraki yıllarda bu deforme bozon ve fermiyon osilatör sistemlerinin termo-istatistiksel özellikleri farklı yönleriyle çeşitli araştırmacılar tarafından ele alınmıştır (Lee and Yu, 1990; Ng, 1990; Parthasarathy and Viswanathan, 1991; Lee and Yu, 1992; Viswanathan et al., 1992; Song et al., 1993; Lavagno and Narayana Swamy, 2002; Narayana Swamy, 2003; Deviren, 2005; Narayana Swamy, 2006a, 2006b, 2006c; Başer, 2007; Cai et al., 2010; Arslan, 2009; Lavagno and Swamy, 2010; Algin, 2011).

Bu tez çalışmasının esas amacı; özel bir q -deforme fermiyon osilatörleri cebiri aracılığıyla tanımlanan deforme bir fermiyon gazı modelinin yüksek sıcaklıklar limitinde termo-istatistiksel özelliklerini incelemektir. Bu model ilk kez 1992'de Viswanathan'ın çalışma grubu tarafından tanımlanmış, daha sonra 1993'de Chaichian'ın çalışma grubu tarafından da istatistiksel olarak bazı yönleri ele alınmıştır (Viswanathan et al., 1992; Chaichian et al., 1993). Tarihsel gelişimi nedeniyle, bu deforme fermiyon osilatör cebiri literatürde ilk kez, VPJC-fermion modeli olarak 2011'de Algin tarafından adlandırılmıştır (Algin, 2011). Literatürde çalışılan diğer q -deforme Fermi modellerine göre VPJC-fermion osilatör modeli, hem az çalışılan hem de daha az popüler olan bir modeldir. Özellikle bu tez çalışmasında, VPJC-fermion gazı modelinin yüksek sıcaklıklardaki termo-istatistiksel davranışına deformasyon parametresinin etkisinin nasıl olacağı araştırılıp, yorumlanmaya çalışılacaktır.

İkinci bölümde, özdeş parçacık sistemlerinin çok genel kuantum mekaniksel özellikleri ele alınacaktır. Özel olarak, tek boyutta bozon ve fermiyon osilatörlerinin

sağladıkları komütatör ve anti-komütatör ilişkilerinden bahsedilecek, daha sonra özdeş parçacık sistemlerinin istatistiksel dağılım fonksiyonları ele alınacaktır.

Üçüncü bölümde ise üç boyutlu uzayda ideal Fermi gazının termo-istatistiksel özellikleri hem yüksek hem de düşük sıcaklıklar limitinde incelenecektir. Büyük kanonik dağılımda, ideal Fermi gazının büyük bölüşüm fonksiyonundan başlayarak termodinamik özellikleri ele alınacaktır. Ayrıca, iki boyutlu uzayda ideal Fermi gazının yüksek sıcaklıklar limitinde hal denkleminin virial açılımı özel olarak ele alınacaktır.

Bu tez çalışmasının odağını oluşturan, VPJC-fermiyon gazı modelinin termo-istatistiksel özellikleri yüksek sıcaklıklar limitinde dördüncü bölümde incelenecektir. Özellikle üç boyutlu uzayda, modelin dağılım fonksiyonu, iç enerji, entropi, hal denklemi gibi önemli termodinamik fonksiyonları üzerinde yoğunlaşılacaktır. Ayrıca modelin özel olarak, iki boyutlu uzayda yüksek sıcaklıklar limitinde hal denkleminin virial açılımı da yapılacaktır.

Son bölümde ise VPJC-fermiyon osilatör modelinin yüksek sıcaklıklar limitinde termo-istatistiksel özelliklerinden elde edilen sonuçlar yorumlanmaya çalışılacaktır. Ayrıca bulunan sonuçların gerek ideal Fermi gazının yüksek sıcaklıklardaki termo-istatistiksel özellikleriyle gerekse literatürdeki diğer deforme Fermi gazı çalışmalarının yüksek sıcaklıklardaki termo-istatistiksel özellikleriyle kıyaslaması yapılacaktır. VPJC-fermiyon modeli ile ilgili bulunan sonuçlar, parçacık fiziğinden istatistiksel mekaniğe kadar geniş bir araştırma spektrumunda uygulama alanlarının neler olabileceği de yine son bölümde tartışılacaktır.

BÖLÜM 2

KUANTUM ÖZDEŞ PARÇACIK SİSTEMLERİ

Klasik mekanikte belirli başlangıç koşulları altında hareket eden parçacıkların yörüngeleri izlenebilir. Çünkü klasik mekaniğin hareket denklemleri tek tek parçacıklar için yazılan ayrı ayrı denklemlerden oluşan bir denklemler takımıdır. Bu yüzden klasik mekaniğin özdeş parçacıkları ayırt edilebilir. Kuantum mekaniğinde ise hareket denklemi tek tek parçacıklar için değil, göz önüne alınan tüm sistem için yazılan Schrödinger dalga denklemdir. Kuantum mekaniğinde, klasik mekanikteki gibi yörünge kavramı yoktur. Bu yüzden, kuantum mekaniğinde özdeş parçacıklar ayırt edilemezdir (Dereli ve Verçin, 2000).

Bu bölümde özdeş parçacık sistemlerinin çok genel özellikleri üzerinde kısaca durulacaktır.

2.1 Özdeş Parçacıklar

İki parçacığın tüm yapısal özellikleri (kütle, spin, yük,...) aynı ise bu parçacıklara özdeş parçacıklar denir (Karaoğlu, 2008). Başka bir deyişle, hiçbir deneysel yöntemle ayırt edilemezler. Evrendeki bütün elektronlar, bütün protonlar ve bütün hidrojen atomları özdeştir. Fakat bir elektron ve bir pozitron özdeş değildir. Onlar aynı kütle ve aynı spine sahip olmalarına rağmen elektrik yükleri farklıdır (Cohen-Tannoudji et al., 2005).

Özdeş parçacıklar, kuantum mekaniksel olarak bilgi alabilmek için dalga fonksiyonları ile temsil edilirler. Dolayısıyla onlarla ilgili tüm işlemler dalga fonksiyonlarıyla yapılır. N tane özdeş parçacıktan oluşan bir sistemin dalga fonksiyonunun uzaysal kısmı $u_T(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)$ ile temsil edilsin (McGervey, 1995). Bu dalga fonksiyonu kısaca $u_T(1, 2, \dots, N)$ ile ifade edilebilir. Sistemde 1 ve 2 parçacıklarının koordinatları yer değiştirirse yeni bir dalga fonksiyonu oluşur. Fakat

ayırt edilemezliğin tanımına göre, parçacıklar özdeş iseler bu değiş-tokuş sonucundaki durum orijinal durumdan ayırt edilemezdir. Bunun anlamı da

$$u_T(2,1,\dots,N) = Au_T(1,2,\dots,N) \quad (2.1)$$

dir. Burada A bir sabittir. 1 ve 2 parçacıkları tekrar değiş-tokuş olduğunda dalga fonksiyonu üzerindeki etki aynı olmalıdır. Yani

$$u_T(1,2,\dots,N) = Au_T(2,1,\dots,N) \quad (2.2)$$

olur. (2.1) ve (2.2) eşitlikleri birleřtirildięinde

$$u_T(2,1,\dots,N) = A^2 u_T(2,1,\dots,N) \quad (2.3)$$

olacağından $A^2 = 1$ ve $A = \pm 1$ elde edilir. Buradan $A = 1$ ise iki parçacığın değiş-tokuşuna göre dalga fonksiyonu simetriktir. $A = -1$ ise anti-simetrik dalga fonksiyonu ortaya çıkar.

Hangi durumda simetrik hangi durumda anti-simetrik dalga fonksiyonları kullanılır? 1940 yılında Pauli bu simetri özelliği ile parçacıkların spinleri arasında ilişki olduğunu gösterdi. Kuantum mekaniğinde bu simetrileştirme ilkesi olarak bilinir ve řu şekilde verilir (Ballentine, 1998; Karaoğlu, 2008):

- (i). Spinleri \hbar 'ın tam katı olan parçacıklar (foton, π -mezon,...) yalnızca simetrik durumda bulunurlar. Bu parçacıklar bozon olarak adlandırılır.
- (ii). Spinleri \hbar 'ın yarım tam sayı katlarına sahip paracıklar (elektron, proton, nötron,...) yalnızca anti-simetrik durumda bulunurlar. Bu parçacıklar fermiyon olarak adlandırılır.

Bozonların ve fermiyonların sırasıyla simetrik ve anti-simetrik dalga fonksiyonlarına sahip oldukları aşağıdaki gibi incelenebilir: Örneğin iki parçacıktan oluşan bir sistemin Schrödinger denklemi

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + V(1) + V(2) \right] u(1,2) = E_T u(1,2) \quad (2.4)$$

şeklinde verilir (McGervey, 1995). Burada $V(1)$ ve $V(2)$ sırasıyla birinci ve ikinci parçacığın potansiyel enerjisidir. Sistemin dalga fonksiyonu $u(1,2) = u_a(1)u_b(2)$ şeklinde değişkenlerine ayrılabilir. Bu ifadenin (2.4) eşitliğinde yerine yazılmasıyla aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 + V(1) \right] u_a(1)u_b(2) + \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 + V(2) \right] u_a(1)u_b(2) = E_T u_a(1)u_b(2) \quad (2.5)$$

Bu eşitliğin her iki tarafı $u_a(1)u_b(2)$ fonksiyonuna bölünmesiyle

$$\frac{1}{u_a(1)} \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 + V(1) \right] u_a(1) + \frac{1}{u_b(2)} \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 + V(2) \right] u_b(2) = E_T \quad (2.6)$$

olur. Burada sol taraftaki her terim bir sabite eşit olmalıdır. Bu sabitler E_a ve E_b olarak adlandırılırsa

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 + V(1) \right] u_a(1) = E_T u_a(1) \quad (2.7)$$

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 + V(2) \right] u_b(2) = E_T u_b(2) \quad (2.8)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $E_T = E_a + E_b$ dir. (2.7) ve (2.8) eşitlikleri tek parçacık Schrödinger denklemleridir. Ayrıca $u_a(1)$ ve $u_b(2)$ tek parçacık sisteminin dalga fonksiyonlarıdır (McGervey, 1995).

Genel olarak, (2.5) eşitliğindeki $u_a(1)u_b(2)$ fonksiyonu ne simetrik ne de anti-simetrik bir dalga fonksiyonudur. Bu yüzden iki özdeş parçacıklı bir sistemin dalga fonksiyonu olarak kabul edilemez. Fakat, kabul edilebilir dalga fonksiyonları oluşturabilmek için bu fonksiyon kullanılabilir. Böylece, simetrik ve anti simetrik dalga fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir (McGervey, 1995):

$$u_S(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [u_a(1)u_b(2) + u_a(2)u_b(1)] \quad (2.9)$$

$$u_A(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [u_a(1)u_b(2) - u_a(2)u_b(1)] \quad (2.10)$$

Burada $1/\sqrt{2}$ katsayısı dalga fonksiyonunun normalizasyonundan elde edilebilir. Bu dalga fonksiyonlarının her biri için, dalga fonksiyonu u_a olan tek parçacık kuantum halinde tek parçacık ve dalga fonksiyonu u_b olan tek parçacık kuantum halinde de tek parçacık vardır. Fakat, hangi parçacığın hangi durumda olduğu söylenemez. Ayrıca (2.3) denklemini kullanılarak

$$u_S(1,2) = u_S(2,1) \quad (2.11)$$

$$u_A(1,2) = -u_A(2,1) \quad (2.12)$$

eşitlikleri ispatlanabilir.

Öte yandan (2.10) eşitliğinde elde edilen anti-simetrik dalga fonksiyonu determinant biçiminde de yazılabilir:

$$u_A(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} u_a(1) & u_a(2) \\ u_b(1) & u_b(2) \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

Bu durum N fermiyon parçacığı için

$$u_A(1,2,\dots,N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} u_a(1) & u_a(2) & \dots & u_a(N) \\ u_b(1) & u_b(2) & \dots & u_b(N) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_g(1) & u_g(2) & \dots & u_g(N) \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

şeklinde genelleştirilebilir (Karaoğlu, 2008). Örneğin elektronlardan oluşan bir sistem düşünülürse, her sütun indisi elektronlardan birini, her satır indisi de tek parçacık durumlarından birini gösterecektir. Bu sistemde iki elektron yer değiştirdiğinde, determinantın iki sütunu yer değiştirmiş olur. İki sütunu yer değiştiren determinant işaret değiştirdiği için, bu dalga fonksiyonu anti-simetriktir denir. Slater determinanı olarak bilinen bu dalga fonksiyonunun diğer bir özelliği de (Karaoğlu, 2008), iki

elektron aynı bir u_a durumunda bulunuyorsa determinantın iki satırı aynı olur. İki satırı aynı olan determinant sıfır olacağından, iki fermiyonun aynı bir kuantum durumunda bulunmama koşulu da kendiliğinden sağlanır ki böylece Pauli dışarlama ilkesi de sağlanmış olur.

2.2 Tek-Boyutlu Bozon Osilatörleri

Özel olarak, tek-boyutta standart bozon osilatör sistemi

$$[\hat{b}, \hat{b}^*] = \hat{b}\hat{b}^* - \hat{b}^*\hat{b} = 1 \quad (2.15)$$

$$[\hat{b}, \hat{b}] = [\hat{b}^*, \hat{b}^*] = 0 \quad (2.16)$$

$$[\hat{N}_b, \hat{b}] = -\hat{b} \quad (2.17)$$

$$[\hat{N}_b, \hat{b}^*] = \hat{b}^* \quad (2.18)$$

eşitlikleriyle tanımlanır (Merzbacher, 1970; Liboff, 1997; Zettili, 2001). Burada \hat{b} bozonik yok etme operatörünü, \hat{b}^* bozonik yaratma operatörünü göstermektedir. \hat{N}_b ise bozonik sayı operatörüdür ve

$$\hat{N}_b = \hat{b}^*\hat{b} \quad (2.19)$$

şeklinde ifade edilir. Bozonik sayı operatörünün ψ_n öz fonksiyonuna etkisi

$$\hat{N}_b\psi_n = n\psi_n \quad (2.20)$$

dir (Liboff, 1997). Burada n , bozonik sayı operatörünü karşılık gelen öz değerdir. $\hat{b}\psi_n$ üzerine bozonik sayı operatörü uygulandığında

$$\begin{aligned} \hat{N}_b\hat{b}\psi_n &= \hat{b}^*\hat{b}\hat{b}\psi_n = (\hat{b}\hat{b}^* - 1)\hat{b}\psi_n = \hat{b}(\hat{b}^*\hat{b} - 1)\psi_n \\ &= \hat{b}(\hat{N}_b - 1)\psi_n = \hat{b}(n - 1)\psi_n = (n - 1)\hat{b}\psi_n \end{aligned} \quad (2.21)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\hat{b}\psi_n \propto \psi_{n-1} \quad (2.22)$$

olduğu görülür (Liboff, 1997). Bu özellikten dolayı \hat{b} , bozonik yok etme operatörü olarak adlandırılır. Benzer şekilde

$$\hat{N}_b \hat{b}^* \psi_n = (n+1) \hat{b}^* \psi_n \quad (2.23)$$

olacağından

$$\hat{b}^* \psi_n \propto \psi_{n+1} \quad (2.24)$$

yazılabilir. Bu özellikten dolayı da \hat{b}^* , bozonik yaratma operatörü olarak adlandırılır.

Ayrıca (2.15) – (2.18) bağıntılarıyla tanımlanan bozon osilatör sisteminin çok boyuta genelleştirilmiş hali de mevcuttur (Merzbacher, 1970).

2.3 Bozon Dağılım Fonksiyonu

V hacminde N tane bozonik parçacıktan oluşan, çevresiyle ısı dengede halinde bulunan bir sistemin toplam enerjisi

$$E_{(n)} = \sum_i n_i \varepsilon_i \quad (2.25)$$

dir (Abers, 2004). İstatistik mekaniğe göre, termal dengede olan sabit sayıda parçacıklı bir sistem için herhangi iki sistemin bağıl popülasyonu $e^{\beta[E_{(n_1)} - E_{(n_2)}]}$ ile verilir. Burada $\beta = 1/kT$ dir. Eğer hacmimiz, daha büyük bir hacmin parçası ise, toplam parçacık sayısının değişmesine izin verilir ve bir (n) durumunda bulunma olasılığı

$$P_{(n)} = \frac{1}{Z} e^{-\alpha N_{(n)} - \beta E_{(n)}} = \frac{1}{Z} e^{-\alpha \sum_i n_i - \beta \sum_i n_i \varepsilon_i} \quad (2.26)$$

olur (Abers, 2004). Bütün olasılıkların toplamı

$$\sum_{(n)} P_{(n)} = 1 \quad (2.27)$$

olacağından sistemin büyük bölüşüm fonksiyonu

$$Z = \sum_{(n)} e^{-\alpha \sum_i n_i - \beta \sum_i n_i \varepsilon_i} \quad (2.28)$$

eşitliği ile verilir. Burada $\alpha = -\beta\mu$ ve $\beta = 1/kT$ dir. Eğer $|\psi_{(n)}\rangle$, tek parçacık $|\psi_i\rangle$ durumundaki n_i parçacıklı durum ise o zaman

$$\rho_{(n)} = \langle \psi_{(n)} | \rho | \psi_{(n)} \rangle \quad (2.29)$$

olur. Burada yoğunluk matrisi

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}} \quad (2.30)$$

dir (Abers, 2004). \hat{N} ve \hat{H} operatörleri, bozonik yaratma ve yok etme operatörleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\hat{N} = \sum_i \hat{b}_i^* \hat{b}_i, \quad \hat{H} = \sum_i \varepsilon_i \hat{b}_i^* \hat{b}_i \quad (2.31)$$

Herhangi bir A gözlemlenebilirliği için, dağılım üzerinden \hat{A} 'nin bir ölçümü için ortalama değer

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{(n)} \langle \psi_{(n)} | \hat{A} | \psi_{(n)} \rangle \rho_{(n)} = Tr \hat{A} \rho \quad (2.32)$$

ile tanımlanır (Abers, 2004). Özellikle, i . kuantum seviyesindeki ortalama parçacık sayısı

$$\langle n_i \rangle = Tr(\rho \hat{b}_i^* \hat{b}_i) = \frac{1}{Z} Tr(e^{-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}} \hat{b}_i^* \hat{b}_i) \quad (2.33)$$

dir (Abers, 2004). Bu ifadeden yararlanarak aşağıdaki yöntemle bozon dağılım fonksiyonuna ulaşılabilir: Herhangi iki \hat{A} ve \hat{B} operatörleri $[\hat{A}, \hat{B}] = \gamma \hat{B}$ eşitliğini sağlıyorsa

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = e^{\gamma} \hat{B} \quad (2.34)$$

eşitliği yazılabilir (Merzbacher, 1970). Burada γ bir sabittir. Buradan $\hat{A} = -\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}$ ve $\hat{B} = \hat{b}_i^*$ olmak üzere

$$\begin{aligned} e^{-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}} \hat{b}_i^* e^{\alpha \hat{N} + \beta \hat{H}} &= e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} \hat{b}_i^* \\ e^{-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}} \hat{b}_i^* &= e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} \hat{b}_i^* e^{-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$[-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}, \hat{b}_i^*] = (-\alpha - \beta \varepsilon_i) \hat{b}_i^* \quad (2.36)$$

dir. $Tr AB = Tr BA$ olduğundan ve (2.35) eşitliği kullanılarak, (2.33) eşitliği

$$\begin{aligned} \langle n_i \rangle &= \frac{1}{Z} e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} Tr(\hat{b}_i^* e^{-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}} \hat{b}_i) \\ &= \frac{1}{Z} e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} Tr(e^{-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}} \hat{b}_i \hat{b}_i^*) \end{aligned} \quad (2.37)$$

formuna gelir. Burada eşitlik (2.15)'den yararlanılırsa

$$\begin{aligned} \langle n_i \rangle &= \frac{1}{Z} e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} Tr(e^{-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}} \hat{b}_i^* \hat{b}_i) + \frac{1}{Z} e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} Tr(e^{-\alpha \hat{N} - \beta \hat{H}}) \\ &= e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} [\langle n_i \rangle + 1] \end{aligned} \quad (2.38)$$

elde edilir (Merzbacher, 1970; Abers, 2004). Buradan hareketle

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} - 1} \quad (2.39)$$

şeklinde Bose-Einstein dağılım fonksiyonu bulunur. Belirli bir sıcaklık için, söz konusu hacim içindeki ortalama toplam parçacık sayısı

$$\langle N \rangle = \sum_i \langle n_i \rangle = \sum_i \frac{1}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} - 1} \quad (2.40)$$

şeklindedir. Bose-Einstein istatistiğine uyan bozonlar simetrik dalga fonksiyonuna sahiptirler. Bu istatistiğe uyan parçacıklar arasında foton ve fononlar sayılabilir (Besier, 1997).

2.4 Tek-Boyutlu Fermiyon Osilatörleri

Özel olarak tek-boyutta standart fermiyon osilatör sistemi

$$\{\hat{f}, \hat{f}^*\} = \hat{f} \hat{f}^* + \hat{f}^* \hat{f} = 1 \quad (2.41)$$

$$\{\hat{f}, \hat{f}\} = \{\hat{f}^*, \hat{f}^*\} = 0 \quad (2.42)$$

$$[\hat{f}, \hat{N}_f] = \hat{f} \quad (2.43)$$

$$[\hat{f}^*, \hat{N}_f] = -\hat{f}^* \quad (2.44)$$

bağıntılarıyla tanımlanır (Merzbacher, 1970; Shankar, 1994). Burada \hat{f} fermiyonik yok etme operatörünü, \hat{f}^* fermiyonik yaratma operatörünü temsil etmektedir. Ayrıca fermiyonik sayı operatörü \hat{N}_f ile temsil edilir ve

$$\hat{N}_f = \hat{f}^* \hat{f} \quad (2.45)$$

eşitliği ile tanımlanır (Shankar, 1994). Fermiyonik sayı operatörünün karesi

$$\hat{N}_f^2 = (\hat{f}^* \hat{f})^2 = \hat{f}^* (1 - \hat{f}^* \hat{f}) \hat{f} = \hat{N}_f \quad (2.46)$$

dir. Buradan \hat{N}_f sayı operatörünün öz değerlerinin yalnızca 0 veya 1 değerlerini alabileceği sonucu çıkar. Karşılık gelen normalize özketler

$$\hat{N}_f |0\rangle = 0 |0\rangle \quad (2.47)$$

$$\hat{N}_f |1\rangle = 1 |1\rangle \quad (2.48)$$

eşitliklerini sağlarlar (Shankar, 1994). Ayrıca fermiyonik yaratma ve yok etme operatörlerinin $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ ketlerine etkisi

$$\hat{f}^* |0\rangle = |1\rangle \quad (2.49)$$

$$\hat{f} |1\rangle = |0\rangle \quad (2.50)$$

şeklinde olup bunlardan birincisi şöyle ispatlanabilir:

$$\hat{N}_f \hat{f}^* |0\rangle = \hat{f}^* \hat{f} \hat{f}^* |0\rangle = \hat{f}^* (1 - \hat{f}^* \hat{f}) |0\rangle = \hat{f}^* |0\rangle \quad (2.51)$$

eşitliği elde edilir. Bu arada $\hat{f}^* |0\rangle$ ketinin normunun

$$|\hat{f}^* |0\rangle|^2 = \langle 0 | \hat{f} \hat{f}^* |0\rangle = \langle 0 | (1 - \hat{f}^* \hat{f}) |0\rangle = \langle 0 | 0\rangle = 1 \quad (2.52)$$

olduğu anlaşılır. Benzer şekilde $\hat{f} |1\rangle = |0\rangle$ olduğuda ispatlanabilir (Shankar, 1994).

Ayrıca (2.41) – (2.44) bağıntılarıyla tanımlanan fermiyon osilatör sisteminin çok boyuta genelleştirilmiş hali de mevcuttur (Merzbacher, 1970).

2.5 Fermiyon Dağılım Fonksiyonu

Kesim 2.3’de elde edilen (2.37) eşitliği fermiyonlar için yeniden düzenlenirse

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{Z} e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} \text{Tr}(e^{-\alpha \hat{N}_i - \beta \hat{H}_i} \hat{f}_i \hat{f}_i^*) \quad (2.53)$$

eşitliği oluşur (Abers, 2004). Burada eşitlik (2.41)’den yararlanılırsa

$$\begin{aligned} \langle n_i \rangle &= -\frac{1}{Z} e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} \text{Tr}(e^{-\alpha \hat{N}_i - \beta \hat{H}_i} \hat{f}_i^* \hat{f}_i) + \frac{1}{Z} e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} \text{Tr}(e^{-\alpha \hat{N}_i - \beta \hat{H}_i}) \\ &= e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} [-\langle n_i \rangle + 1] \end{aligned} \quad (2.54)$$

bulunur (Abers, 2004). Bu bağıntıdan yararlanarak

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} + 1} \quad (2.55)$$

şeklinde Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu elde edilir. Fermi-Dirac istatistiğine uyan fermiyonlar anti-simetrik dalga fonksiyonuna sahiptirler. Bu istatistiğe uyan parçacıklar arasında elektron, proton ve nötron sayılabilir (Karaoğlu, 2008). Bundan sonraki bölümde V hacminde N tane fermiyon parçacığından oluşan, çevresiyle ısı dengedeki ideal bir Fermi gazı sisteminin termo-istatistiksel özellikleri detaylıca incelenecektir.

BÖLÜM 3

İDEAL FERMİ GAZININ TERMO-İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ

Makroskobik bir bütün olarak ele alındığında evrendeki tüm sistemlerin yapısal özellikleri, bu sistemleri oluşturan mikroskobik parçacıkların gerek tek tek gerekse kollektif olarak davranışıyla ilişkilidir (Gündüz, 1999). Mikroskobik olarak doğada parçacıklar iki gruba ayrılır: Fermiyonlar ve bozonlar. Fermi-Dirac istatistiğine uyan fermiyonlar, Pauli dışarlama ilkesinin etkisi altında kalırlar ve anti-simetrik dalga fonksiyonlarıyla temsil edilirler. Bose-Einstein istatistiğine uyan bozonlar için Pauli dışarlama ilkesi şeklinde bir sınırlama söz konusu değildir. Bunlar simetrik dalga fonksiyonlarıyla temsil edilirler. Kuantum istatistiğine göre incelenen bu parçacık grupları, özdeş ve ayırt edilemezlerdir (Karaoğlu, 2008).

Bu bölümde, üç boyutlu uzayda ideal Fermi gazının termo-istatistiksel özellikleri incelenecektir. Ayrıca, iki boyutlu uzayda da ideal Fermi gazının yüksek sıcaklıklar limitinde hal denklemi virial açılımı yapılacaktır.

3.1 Üç Boyutlu Uzayda İdeal Fermi Gazının Termo-istatistiksel Özellikleri

Bu kesimde, gerek faz değişimleri, gerek kimyasal tepkimeler gerekse kuantum istatistiği incelemesinde kolaylık sağlayan büyük kanonik küme konusu ele alınacaktır (Karaoğlu, 2009). Büyük kanonik kümede, inceleme altındaki açık bir sistemin, dışarıyla hem enerji hem de parçacık alış-verişi yapabildiği düşünülür. Fakat toplam sistemin enerji ve parçacık sayısının sabit olduğu varsayılır.

Öte yandan ideal Fermi gazı için bölüşüm fonksiyonu

$$Q_N(V, T) = \sum_{\{n_{\vec{p}}\}} g\{n_{\vec{p}}\} e^{-\beta E\{n_{\vec{p}}\}} \quad (3.1)$$

şeklinindedir (Huang, 1987). Burada sistemin toplam enerji ve toplam parçacık sayısı

$$E\{n_{\vec{p}}\} = \sum_{\vec{p}} \varepsilon_{\vec{p}} n_{\vec{p}} \quad (3.2)$$

$$N = \sum_{\bar{p}} n_{\bar{p}} \quad (3.3)$$

dir. Burada Fermi gazı için $n_{\bar{p}} = \{0,1\}$ olabilir. Fermiyonlarda $\{n_{\bar{p}}\}$ 'ye karşılık gelen hallerin sayısı

$$g\{n_{\bar{p}}\} = 1 \quad (3.4)$$

dir (Huang, 1987). Toplam enerji ve toplam parçacık sayısı ifadelerinden yararlanarak büyük bölüşüm fonksiyonu

$$\begin{aligned} Z(z, V, T) &= \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{\{n_{\bar{p}}\} \\ \sum n_{\bar{p}} = N}} z^N e^{-\beta \sum \varepsilon_{\bar{p}} n_{\bar{p}}} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_{\bar{p}} \\ \sum n_{\bar{p}} = N}} \prod_{\bar{p}} (z e^{-\beta \varepsilon_{\bar{p}}})^{n_{\bar{p}}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

biçiminde yazılabilir. Burada z değişkeni fugasite olarak adlandırılır ve

$$z = e^{\beta \mu} \quad (3.6)$$

dir. Fermiyonlar için fugasite $0 < z < \infty$ aralığında değer alır (Pathria, 1996). (3.6) eşitliğindeki μ terimi, kimyasal potansiyel olarak adlandırılır ve sisteme bir parçacık eklendiğinde iç enerjide meydana gelen artışı gösterir (Karaoğlu, 2009).

Büyük bölüşüm fonksiyonu daha genel biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir (Huang, 1987):

$$\begin{aligned} Z(z, V, T) &= \sum_{n_0} \sum_{n_1} \dots [(z e^{-\beta \varepsilon_0})^{n_0} (z e^{-\beta \varepsilon_1})^{n_1} \dots] \\ &= \left[\sum_{n_0} (z e^{-\beta \varepsilon_0})^{n_0} \right] \left[\sum_{n_1} (z e^{-\beta \varepsilon_1})^{n_1} \right] \dots \\ &= \prod_{\bar{p}} \left[\sum_n (z e^{-\beta \varepsilon_{\bar{p}}})^n \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Burada \sum_n toplamı, Fermi gazı için $n = \{0,1\}$ değerlerini alabilir. Dolayısıyla büyük bölüşüm fonksiyonu

$$Z(z, V, T) = \prod_{\bar{p}} (1 + z^{-\beta \varepsilon_{\bar{p}}}) \quad (3.8)$$

formuna gelir. Bu eşitlik kullanılarak ideal Fermi gazının hal denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir (Huang, 1987):

$$\frac{PV}{kT} = \log Z(z, V, T) = \sum_{\bar{p}} \log(1 + ze^{-\beta \varepsilon_{\bar{p}}}) \quad (3.9)$$

Sistemin toplam parçacık sayısı

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \log Z(z, V, T) = \sum_{\bar{p}} \frac{ze^{-\beta \varepsilon_{\bar{p}}}}{1 + ze^{-\beta \varepsilon_{\bar{p}}}} \quad (3.10)$$

dir. Ortalama parçacık sayısı

$$\begin{aligned} \langle n_{\bar{p}} \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\substack{\{n_{\bar{p}}\} \\ \sum n_{\bar{p}} = N}} n_{\bar{p}} e^{-\beta \sum \varepsilon_{\bar{p}} n_{\bar{p}}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\bar{p}}} \log Z \\ &= \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_{\bar{p}}} + 1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.11) eşitliği (3.10) eşitliğinde yerine yazılırsa sistemin toplam parçacık sayısı aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$N = \sum_{\bar{p}} \langle n_{\bar{p}} \rangle \quad (3.12)$$

(3.9) ve (3.10) eşitliklerinde $V \rightarrow \infty$ ve $N \rightarrow \infty$ limitleri düşünülürse, \bar{p} üzerinden toplam yerini \bar{p} üzerinden integrale bırakır. Başka bir ifadeyle parçacığın enerji düzeyleri arasındaki fark azalır ve kesikli yerine sürekli bir durum gibi düşünülebilir (Huang, 1987):

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3 \vec{p} \quad (3.13)$$

(3.13) dönüşümünden yararlanarak (3.9) ve (3.10) eşitlikleri için

$$\frac{P}{kT} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^{\infty} dp p^2 \log(1 + ze^{-\beta p^2/2m}) \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^{\infty} dp p^2 \frac{1}{z^{-1}e^{\beta p^2/2m} + 1} \quad (3.15)$$

ifadeleri yazılır. Burada $\nu = V/N$ dir ve öz hacim olarak adlandırılır. (3.14) ve (3.15) eşitliklerinde $x^2 = \beta p^2/2m$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx x^2 \log(1 + ze^{-x^2}) \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\lambda^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx x^2 \frac{1}{z^{-1}e^{x^2} + 1} \quad (3.17)$$

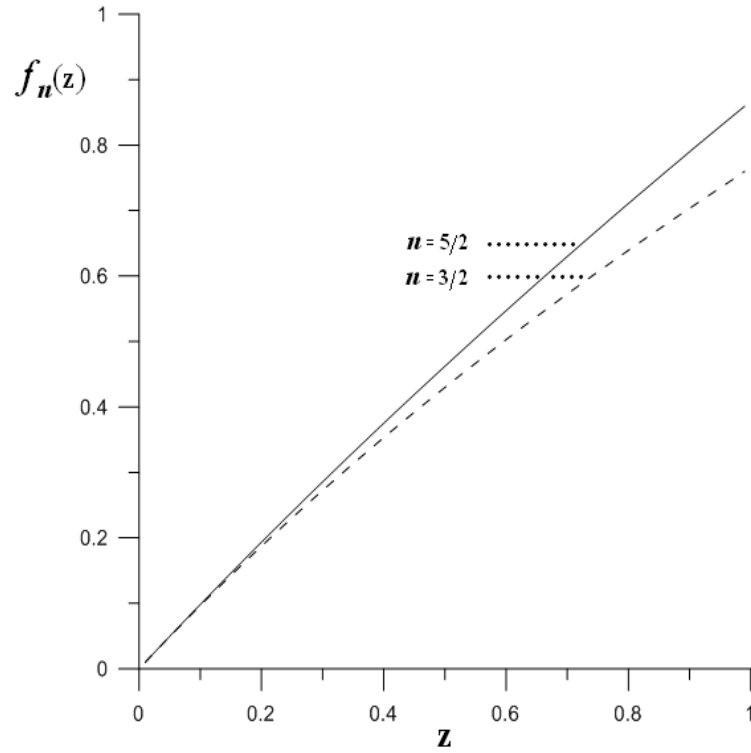
eşitlikleri elde edilir. Burada $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mkT}$ termal dalga boyudur (Huang, 1987).

(3.16) ve (3.17) eşitliklerindeki integraller

$$f_{5/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx x^2 \log(1 + ze^{-x^2}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{5/2}} \quad (3.18)$$

$$f_{3/2}(z) = z \frac{\partial}{\partial z} f_{5/2}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{3/2}} \quad (3.19)$$

eşitlikleriyle tanımlanırlar. Burada $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ fonksiyonları Fermi-Dirac fonksiyonları olarak adlandırılır (Pathria, 1996). Bu Fermi-Dirac fonksiyonlarının z 'ye göre değişimleri Şekil 3.1'de gösterilmiştir (Ek-1 ve Ek-2'de standart Fermi-Dirac fonksiyonlarının grafiklerinin elde edilmesinde yararlanılan Fortran yazılımları da verilmiştir).



Şekil 3.1. Standart $f_n(z)$ fonksiyonları.

Burada $f_n(z)$ fonksiyonlarının monoton olarak arttığı görülebilir. (3.18) ve (3.19) eşitlikleri kullanılarak (3.14) ve (3.15) eşitlikleri daha genel olarak aşağıdaki gibi yazılır (Huang, 1987):

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z) \quad (3.21)$$

İdeal Fermi gazının iç enerjisi

$$U(z, V, T) = \frac{1}{Z} \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\substack{\{n_{\bar{p}}\} \\ \sum n_{\bar{p}} = N}} \left[e^{-\beta \sum \epsilon_{\bar{p}} n_{\bar{p}}} \sum_{\bar{p}} \epsilon_{\bar{p}} n_{\bar{p}} \right] = -\frac{\partial}{\partial \beta} [\log Z(z, V, T)] \quad (22)$$

dir. $\log Z = PV / kT$ olduğundan ve (3.20) eşitliğinden yararlanarak

$$\frac{1}{V}U(z, V, T) = \frac{3}{2} \frac{kT}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad (3.23)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca bu ifade, (3.20)'den yararlanılarak aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$U = \frac{3}{2} PV \quad (3.24)$$

İdeal Fermi gazının öz ısısı

$$\frac{C_V}{Nk} = \frac{15}{4} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)} \quad (3.25)$$

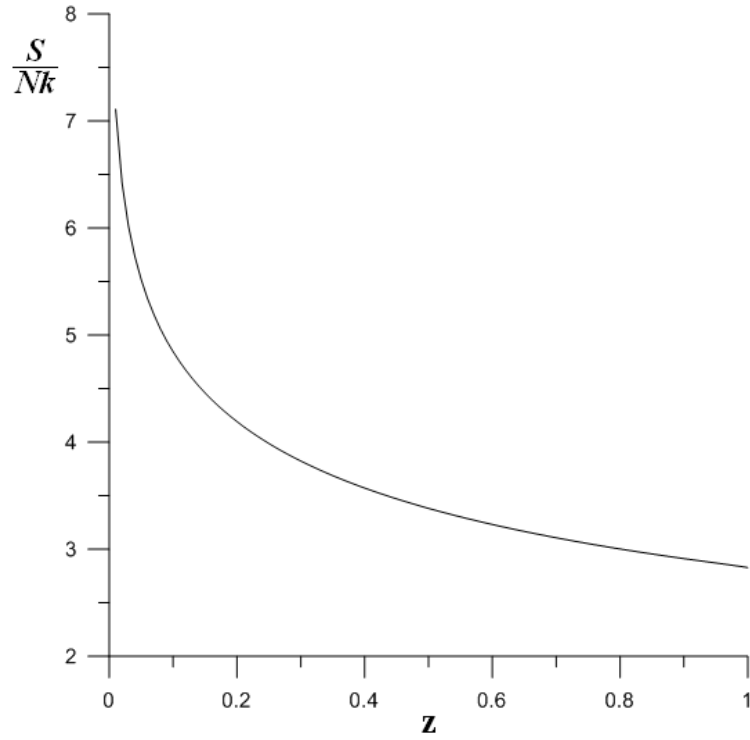
ile verilir (Pathria, 1996). İdeal Fermi gazının Helmholtz serbest enerjisi

$$A = N\mu - PV = NkT \left(\ln z - \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \right) \quad (3.26)$$

dir. İdeal Fermi gazının entropisi

$$S = \frac{U - A}{T} = Nk \left(\frac{5}{2} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \ln z \right) \quad (3.27)$$

dir (Pathria, 1996). Entropinin z 'ye bağlı değişimi Şekil 3.2'de gösterilmiştir (Ek-3'de entropi grafiğinin elde edilmişindeki Fortran yazılımı verilmiştir). Burada z 'nin büyük değerlerine doğru gidildikçe entropinin azaldığı görülebilir.



Şekil 3.2. İdeal Fermi gazı entropisi S/Nk 'nın z 'ye göre değişimi.

(3.21)'de bulduğumuz eşitlik yeniden düzenlenirse

$$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z) \quad (3.28)$$

elde edilir. Burada $f_{3/2}(z)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{z^{-1}e^{x^2} + 1} \quad (3.29)$$

Küçük z değerleri için (3.19) eşitliğinin seri açılımı

$$f_{3/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} - \frac{z^4}{4^{3/2}} + \dots \quad (3.30)$$

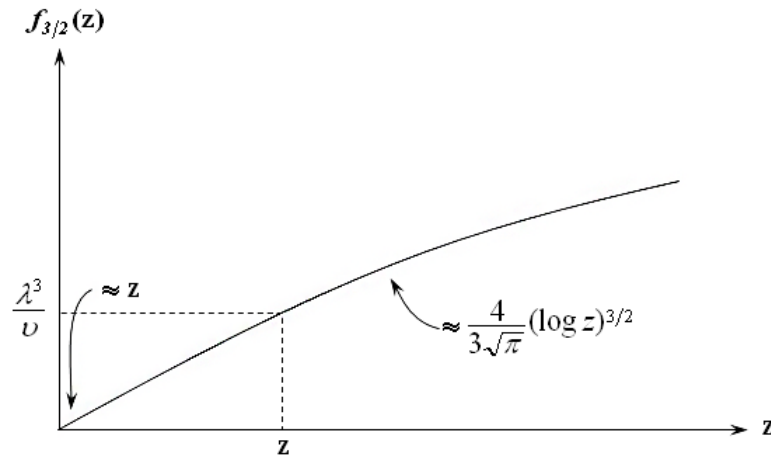
olur. (3.29) eşitliği $v = \log z = \mu/kT$ tanımlaması yapılarak tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned}
f_{3/2}(z) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{e^{x^2-\nu} + 1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dy \frac{y^{1/2}}{e^{y-\nu} + 1} \\
&= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dy \frac{y^{3/2} e^{y-\nu}}{(e^{y-\nu} + 1)^2}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

elde edilir. Büyük z değerleri için (3.31)'de tanımlanan $f_{3/2}(z)$ fonksiyonu Sommerfeld tarafından önerilen yöntemden asimtotik açılımla bulunabilir (Huang, 1987; Pathria, 1996). Böylelikle (3.31)'deki Fermi-Dirac fonksiyonu

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left((\log z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-1/2} + \dots \right) + O(z^{-1}) \tag{3.32}$$

elde edilir (Ek-4'de (3.32)'nin elde edilişi verilmiştir).



Şekil 3.3. Standart $f_{3/2}(z)$ fonksiyonunun z 'ye göre değişimi (Huang, 1987).

Şekil 3.3'de $f_{3/2}(z)$ ile verilen Fermi-Dirac fonksiyonunun z 'ye göre değişimi verilmiştir. λ^3/ν 'nün verilen herhangi pozitif değeri için, (3.28) ile belirlenen z değeri Şekil 3.3'den bulunabilir. λ^3/ν arttıkça monoton olarak z 'nin arttığı görülür. Sabit ν değerleri için z , sıcaklık azaldıkça monoton olarak artar (Huang, 1987).

3.1.1 Yüksek sıcaklıklar ve düşük yoğunluklar

$\lambda^3/\nu \ll 1$ için, ortalama parçacıklar arası mesafe $\nu^{1/3}$, termal dalga boyundan daha büyüktür. Bu yüzden kuantum etkiler ihmal edilebilir (Huang, 1987). (3.28) ve (3.30) eşitliklerinden

$$\frac{\lambda^3}{\nu} = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} - \frac{z^4}{4^{3/2}} + \dots \quad (3.33)$$

yazılabilir ve bu eşitlik için

$$z = \frac{\lambda^3}{\nu} + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right)^2 + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^{3/2}} \right) \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right)^3 + \left(\frac{5}{2^{9/2}} - \frac{5}{6^{5/2}} + \frac{1}{2^3} \right) \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right)^4 + \dots \quad (3.34)$$

ifadesi çözüm olabilir. Burada $T \rightarrow \infty$ limitinde z değeri, Boltzmann gazının z değerine indirgenir. Bu limitde (3.11) eşitliği

$$\langle n_{\vec{p}} \rangle \approx \frac{\lambda^3}{\nu} e^{-\beta \epsilon_{\vec{p}}} \quad (3.35)$$

formuna indirgenir ki buna Maxwell-Boltzmann dağılımı da denir (Huang, 1987). (3.14) eşitliğindeki hal denklemi için

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} \left(z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \frac{z^3}{3^{5/2}} - \frac{z^4}{4^{5/2}} + \dots \right) \quad (3.36)$$

yazılabilir. z ve z' 'nin kuvvetlerinin yerlerine yazılmasıyla

$$\frac{PV}{NkT} = 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{2}{3^{5/2}} \right) \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^2 + \left(\frac{5}{2^{11/2}} - \frac{3}{6^{3/2}} + \frac{3}{2^5} \right) \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^3 + \dots \quad (3.37)$$

eşitliği elde edilir. Yüksek sıcaklıklar limitinde (3.25) eşitliğinden öz ısı ifadesi

$$C_V = \frac{3}{2} Nk \quad (3.38)$$

ifadesine indirgenir (Pathria, 1996). İstenirse yüksek sıcaklıklar limitinde, sistemin Helmholtz serbest enerjisi ve entropisi; (3.26) ve (3.27)'den elde edilebilir.

3.1.2 Düşük sıcaklıklar ve yüksek yoğunluklar

$\lambda^3/\nu \gg 1$ için, parçacığın ortalama de Broglie dalga boyu, parçacıklar arası ortalama uzaklıktan daha büyüktür. Böylece kuantum etkiler, özellikle Pauli dışarlama ilkesinin etkisi önemli olmaktadır (Huang, 1987). Mutlak sıfır komşuluğunda (3.28) ve (3.32) eşitliklerinden

$$\frac{1}{\nu} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{3/2} \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \quad (3.39)$$

olur. Mutlak sıfır sıcaklığında kimyasal potansiyel Fermi enerjisi olarak adlandırılır ve fugasite

$$z \approx e^{\beta\varepsilon_F} \quad (3.40)$$

dir. (3.39) ve (3.40) denklemlerinden Fermi enerjisi

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{\nu} \right)^{2/3} \quad (3.41)$$

elde edilir. Mutlak sıfır yakınında ortalama parçacık sayısı incelenirse

$$\langle n_{\vec{p}} \rangle \approx \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\vec{p}} - \varepsilon_F)} + 1} \quad (3.42)$$

bulunur. Yani

$$\langle n_{\vec{p}} \rangle_{T=0} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon_{\vec{p}} < \varepsilon_F) \\ 0 & (\varepsilon_{\vec{p}} > \varepsilon_F) \end{cases} \quad (3.43)$$

ifadesi $T \rightarrow 0$ limitinde $\langle n_{\vec{p}} \rangle$ 'nin davranışını ortaya koyar. Dolayısıyla Pauli dışarlama ilkesi nedeniyle iki fermiyon parçacığı aynı bir kuantum durumunda bulunamaz. Bu yüzden sistemin taban durumunda parçacıklar olası en düşük kuantum seviyelerini işgal ederler ve ε_F 'ye kadar olan seviyeleri doldururlar. Momentum uzayında parçacıklar p_F yarıçaplı bir küreyi doldururlar ve küre yüzeyi Fermi yüzeyi olarak adlandırılır (Huang, 1987).

Daha genel koşullar altında Fermi enerjisi bağımsız olarak hesaplanabilir. Bunun için tüm tek-parçacık enerji seviyelerinin g -katlı dejenere olduğunu varsayalım. Örneğin, spini s olan bir parçacık için $g = 2s + 1$ dir. ε_F 'yi belirleme koşulu

$$g \sum_{\vec{p}} \langle n_{\vec{p}} \rangle_{T=0} = N \quad (3.44)$$

olur (Huang, 1987). (3.43) eşitliğinden dolayı, bu, Fermi enerjisinin altında N durumun olduğunu gösterir. Burada $\varepsilon_F = p_F^2 / 2m$ alınarak ve (3.41) eşitliğinden yararlanarak

$$\frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3 = \frac{N}{V} \quad (3.45)$$

elde edilir. Bu da $g = 1$ olduğu zaman (3.41) eşitliğini verir (Huang, 1987).

Düşük sıcaklıklar ve yüksek yoğunluklarda termodinamik fonksiyonları elde etmek için (3.21) ve (3.32) eşitliklerinden kimyasal potansiyel

$$kTv = kT \log z = \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (3.46)$$

açılımı elde edilir. Açılım parametresi (kT/ε_F) dir. Fermi sıcaklığı T_F olarak adlandırılırsa

$$kT_F = \varepsilon_F \quad (3.47)$$

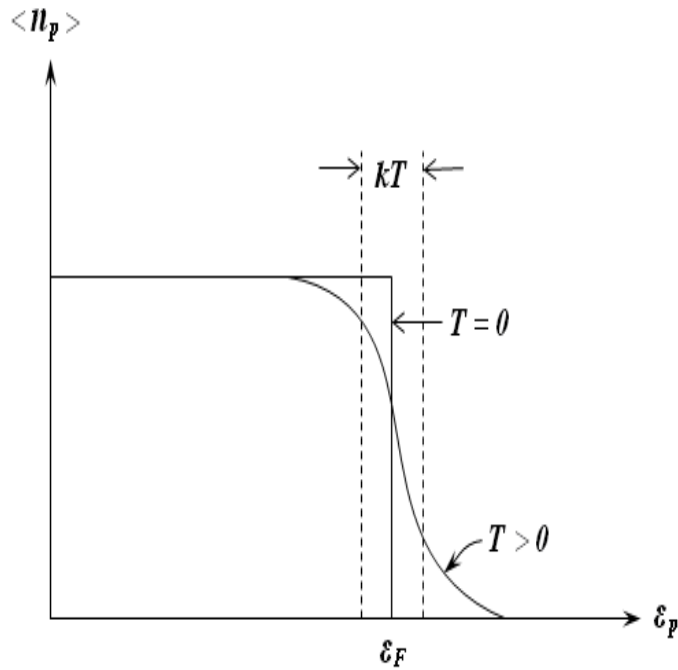
olur. O zaman düşük sıcaklık ve yüksek yoğunluk $T \ll T_F$ anlamına gelir (Huang, 1987). Bu durumda gaz dejeneredir. Çünkü parçacıklar mümkün olan en düşük enerji

seviyelerine gitme eğilimi gösterirler. Bu sebepten dolayı T_F dejenere sıcaklığı olarak adlandırılır.

Ortalama işgal sayısı

$$\langle n_{\vec{p}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_{\vec{p}} - \nu} + 1} \quad (3.48)$$

ile ifade edilir. Burada ν , (3.46) eşitliğinde ifade edilmiştir. $\varepsilon_{\vec{p}} = p^2/2m$ olduğu için, $n_{\vec{p}}$, \vec{p} 'ye yalnızca p^2 aracılığıyla bağlıdır. $n_{\vec{p}}$ 'nin $\varepsilon_{\vec{p}}$ 'ye göre değişimini veren grafiği Şekil 3.4'de gösterilmiştir.



Şekil 3.4. İdeal Fermi gazının ortalama parçacık sayısı (Huang, 1987).

İdeal Fermi gazının iç enerjisi için

$$U = \sum_{\vec{p}} \varepsilon_{\vec{p}} \langle n_{\vec{p}} \rangle = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{2m} \int_0^{\infty} dp p^4 \langle n_{\vec{p}} \rangle \quad (3.49)$$

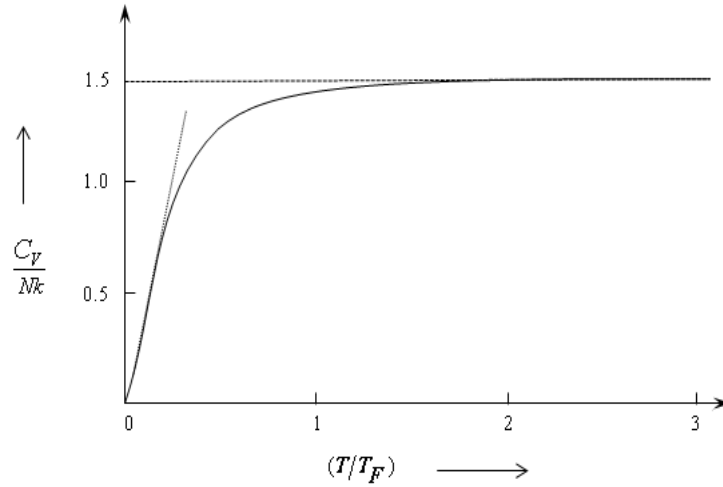
eşitliği yazılabilir. Burada bir kez kısmi integrasyon uygulanıp ve (3.32) eşitliğini bulduğumuz işlemler terarlandıktan sonra

$$U = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (3.50)$$

bulunur. Burada ilk terim, sistemin taban durum enerjisidir. Eşitlik (3.50)'den yararlanarak ideal Fermi gazının sabit hacimde düşük sıcaklıklar limitinde öz ısısı

$$\frac{C_V}{Nk} \approx \frac{\pi^2}{2} \frac{kT}{\varepsilon_F} \quad (3.51)$$

bulunur (Huang, 1987).



Şekil 3.5. İdeal Fermi gazının öz ısısı. Nokta nokta ile belirtilen düşük sıcaklıklarda doğrusal davranışı gösterir (Pathria, 1996).

Eşitlik (3.51)'te öz ısı, $T \rightarrow 0$ limitinde doğrusal olarak yok olur. Böylece termodinamiğin üçüncü yasası doğrulanır. Yüksek sıcaklıklarda ($T \rightarrow \infty$) C_V/Nk , $3/2$ değerine yaklaşmaktadır. $T > 0$ sıcaklığında $\langle n_{\bar{p}} \rangle$, $T = 0$ 'dan farklıdır. Çünkü belirli sayıdaki parçacıklar $\varepsilon_{\bar{p}} > \varepsilon_F$ enerji seviyelerine uyarılırlar. Yani ε_F 'nin altındaki kT

enerjili parçacıklar, ε_F 'nin üzerindeki kT enerjili durumlara uyarılırlar. Bu yüzden, taban durum üzerindeki toplam uyarılma enerjisi $\Delta U \approx (kT/\varepsilon_F) NkT$ olur. Buradan $C_V \approx (kT/\varepsilon_F) Nk$ bulunur (Huang, 1987).

(3.24) ve (3.50) eşitliklerinden sistemin hal denklemi

$$P = \frac{2U}{3V} = \frac{2\varepsilon_F}{5V} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (3.52)$$

elde edilir (Huang, 1987). Düşük sıcaklıklar limitinde (3.46) ve (3.52) eşitlikleri kullanılarak sistemin Helmholtz serbest enerjisi

$$\frac{A}{N} = \mu - \frac{PV}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (3.53)$$

olur (Pathria, 1996). Yine aynı limitte sistemin entropisi (3.50) ve (3.53) eşitliklerinden yararlanarak

$$\frac{S}{Nk} = \frac{\pi^2}{2} \frac{kT}{\varepsilon_F} \quad (3.54)$$

ifadesine indirgenir (Pathria, 1996). (3.54) eşitliğinden görüldüğü gibi sistemin entropisi T sıcaklığına bağlı olarak artmaktadır. Burada $T \rightarrow 0$ limitinde entropi sıfıra yaklaşmaktadır. Bu yüzden (3.54) eşitliği termodinamiğin üçüncü yasasını sağlamaktadır.

3.2 İki Boyutlu Uzayda, İdeal Fermi Gazının Yüksek Sıcaklıklarda Hal Denklemi

Bu bölümde iki boyutta ideal Fermi gazı incelenecektir. İki boyutlu uzayda ideal Fermi gazının durum denklemi

$$\frac{PA}{kT} = \log Z(z, A, T) = \sum_{\bar{p}} \log(1 + ze^{-\beta\varepsilon_{\bar{p}}}) \quad (3.55)$$

biçiminde ifade edilir (Khare, 2005). Sistemin toplam parçacık sayısı

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \log Z(z, A, T) = \sum_{\bar{p}} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_{\bar{p}}} + 1} \quad (3.56)$$

dir. Burada $\beta = 1/kT$ ve fugasite $z = e^{\mu/kT}$ dir. (3.55) ve (3.56) eşitliklerinde $A \rightarrow \infty$ ve $N \rightarrow \infty$ limitlerinde, \bar{p} üzerinden toplam yerini \bar{p} üzerinden integrale bırakır. Başka bir ifadeyle enerji düzeyleri arasındaki fark azalır ve kesikli yerine sürekli bir durum düşünülebilir (Huang, 1987; Khare, 2005):

$$\sum_{\bar{p}} \rightarrow \frac{A}{h^2} \int d^2 \bar{p} \quad (3.57)$$

(3.57) dönüşümünden yararlanarak (3.55) ve (3.56) eşitlikleri

$$\frac{P}{kT} = \frac{2\pi}{h^2} \int_0^{\infty} p dp \log(1 + z e^{-\beta p^2/2m}) \quad (3.58)$$

$$\frac{N}{A} = \frac{2\pi}{h^2} \int_0^{\infty} p dp \frac{1}{z^{-1} e^{\beta p^2/2m} + 1} \quad (3.59)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $\varepsilon = p^2/2m$ dir. (3.58) ve (3.59) eşitliklerinde $x = \beta p^2/2m$ değişken dönüşümü yapılırsa bu eşitlikler için

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} dx \log(1 + z e^{-x}) \quad (3.60)$$

$$\frac{N}{A} = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} dx \frac{1}{z^{-1} e^x + 1} \quad (3.61)$$

bağıntıları elde edilir. Burada integraller

$$f_2(z) = \int_0^{\infty} dx \log(1 + z e^{-x}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^2} \quad (3.62)$$

$$f_1(z) = z \frac{\partial}{\partial z} f_2(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l} \quad (3.63)$$

eşitlikleriyle tanımlanırlar. Burada $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonları Fermi-Dirac fonksiyonları olarak adlandırılır. (3.62) ve (3.63) bağıntıları kullanılarak (3.60) ve (3.61) eşitlikleri daha genel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir (Khare, 2005):

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^2} f_2(z) \quad (3.64)$$

$$\frac{N}{A} = \frac{1}{\lambda^2} f_1(z). \quad (3.65)$$

Yüksek sıcaklıklar limiti göz önüne alınır ve (3.63) eşitliği (3.65) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{N}{A} = \frac{1}{\lambda^2} \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \right) \quad (3.66)$$

eşitliği elde edilir. Bunun için

$$z = \frac{N\lambda^2}{A} + \frac{1}{2} \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right)^3 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right)^4 + \dots \quad (3.67)$$

eşitliği bir çözüm olabilir. (3.62) eşitliğinden yararlanarak (3.64) hal denklemi için

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^2} \left(z - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} - \frac{z^4}{4^2} + \dots \right) \quad (3.68)$$

yazılabilir. Burada z ve z' 'nin farklı kuvvetlerinin yerlerine yazılmasıyla

$$\frac{PA}{NkT} = 1 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} \right) \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right)^2 + \left(\frac{5}{2^4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2^4} \right) \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right)^3 + \dots \quad (3.69)$$

şeklinde iki boyutlu uzayda hal denkleminin virial açılımı elde edilir. Bu sonuç üç boyutlu uzayda (3.37) eşitliğinde elde edilen virial katsayıları ile kıyaslandığında; üç boyutlu uzayda elde edilen ikinci ve üçüncü virial katsayıları iki boyutlu uzayda yine

karşılık gelen ikinci ve üçüncü virial katsayılarından daha küçük değerler almaktadır. Ayrıca iki boyutlu uzayda dördüncü virial katsayısı sıfıra olmaktadır (Khare, 2005). Fakat üç boyutlu uzayda incelenen dördüncü virial katsayısı eşitlik (3.37)'de verildiği gibi sıfıra ulaşmamaktadır.

BÖLÜM 4

VPJC-FERMİYON MODELİ

Bu bölümde üç boyutlu uzayda VPJC-fermiyon gazı modelinin yüksek sıcaklıklarda termo-istatistiksel özellikleri incelenecektir. Özellikle, bu modeli tanımlayan fermiyonik operatör cebiri kullanılarak, modelin deforme dağılım fonksiyonu elde edilecektir. Bu dağılım fonksiyonu yardımıyla sistemin büyük bölüşüm fonksiyonu oluşturulacaktır. Daha sonra büyük bölüşüm fonksiyonu kullanılarak, sistemin diğer termo-istatistiksel özellikleri yüksek sıcaklıklar limitinde, q deformasyon parametresine bağlı olarak araştırılacaktır.

4.1 VPJC-Fermiyon Osilatör Modeli

Tek boyutta deforme bir Fermi sistemini oluşturan VPJC-fermiyon osilatörleri cebiri

$$\hat{c}\hat{c}^* + q\hat{c}^*\hat{c} = 1 \quad (4.1)$$

$$[\hat{N}, \hat{c}] = -\hat{c}, \quad [\hat{N}, \hat{c}^*] = \hat{c}^* \quad (4.2)$$

bağıntılarıyla tanımlanır (Viswanathan et al., 1992; Chaichian et al., 1993). Burada \hat{c} deforme fermiyonik yok etme operatörünü, \hat{c}^* deforme fermiyonik yaratma operatörünü ve \hat{N} fermiyonik sayı operatörünü göstermektedir. Pozitif reel bir sayı olan q ise deformasyon parametresini temsil eder.

Eşitlik (4.1) ve (4.2) ile verilen VPJC-fermiyon osilatör modelinde deforme fermiyonik sayı operatörü

$$\hat{c}^*\hat{c} = [\hat{N}] = \frac{1 - (-1)^{\hat{N}} q^{\hat{N}}}{1 + q} \quad (4.3)$$

ile belirli olup, bunun öz değer spektrumu aşağıdaki gibidir (Algin, 2011):

$$[n] = \frac{1 - (-1)^n q^n}{1 + q} \quad (4.4)$$

Bu öz değer spektrumu $q = 1$ limitinde incelendiğinde

$$\lim_{q \rightarrow 1} [1] = 1, \quad \lim_{q \rightarrow 1} [2] = 0 \quad (4.5)$$

sonuçları elde edilir. Bu sonuçlara göre $q = 1$ limitinde VPJC-fermiyon osilatör modeli için Pauli dışarlama ilkesi geçerlidir. Yani aynı bir kuantum seviyesinde birden fazla fermiyon barınmaz. Ne var ki (4.1) – (4.4) denklemlerinden çıkan bir diğer sonuç, $q \neq 1$ iken modelin Pauli dışarlama ilkesini sağlamadığıdır. Yani (4.3) eşitliğindeki fermiyon sayı operatörünün öz ketleri ikiden fazla fermiyon bile barındırabilecekler.

Ayrıca, modelin fermiyon sayı operatörünün Fock uzayındaki öz ketlerinin pozitif normlu olma koşulu, $q > 1$ olduğunda (4.4) eşitliğinden çift n değerlerinde sağlanmamaktadır (Viswanathan et al., 1992). O yüzden bundan sonraki hesaplarda modelin istatistik mekaniksel özellikleri $0 < q < 1$ aralığında incelenecektir. Öte yandan, VPJC-fermiyon modeli için incelenecek fonksiyonlarda, kesim 4.2’de de gösterileceği üzere standart termodinamik türev operatörü yerine bu model için özel olarak tanımlanan fermiyonik Jackson türev operatörü (JD) kullanılarak hesaplamalar yapılabilir. Bu VPJC-fermiyon modeli için fermiyonik JD

$$D_x f(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{f(x) - f(-qx)}{1 + q} \right) \quad (4.6)$$

eşitliği ile tanımlanır (Jackson, 1909; Algin, 2011). Bu operatör kullanılarak modelin yüksek sıcaklıklardaki termo-istatistiği ile ilgili detaylar aşağıda verilecektir.

4.2 VPJC-Fermiyon Osilatör Modelinin Yüksek Sıcaklıklarda Termo-istatistiksel Özellikleri

Kesim 2.5’de verilen standart fermiyon dağılım fonksiyonunu elde etme yöntemi, VPJC-fermiyon osilatör modeli için de kullanılırsa modelin deforme dağılım fonksiyonu elde edilebilir. Modelin ortalama parçacık sayısı

$$[n_i] = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_F} [\hat{N}_i] \right) \equiv \frac{1}{Z} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_F} \hat{c}_i^* \hat{c}_i \right) \quad (4.7)$$

eşitliğinden bulunabilir (Tuszynski et al., 1993). Burada $Z = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}_F})$ sistemin fermiyonik bölüşüm fonksiyonudur. Ayrıca, VPJC-gaz modelinin Hamiltonyeni aşağıdaki gibi seçilebilir (Lee and Yu, 1990; 1992):

$$\hat{H}_F = \sum_i (\varepsilon_i - \mu) \hat{N}_i \quad (4.8)$$

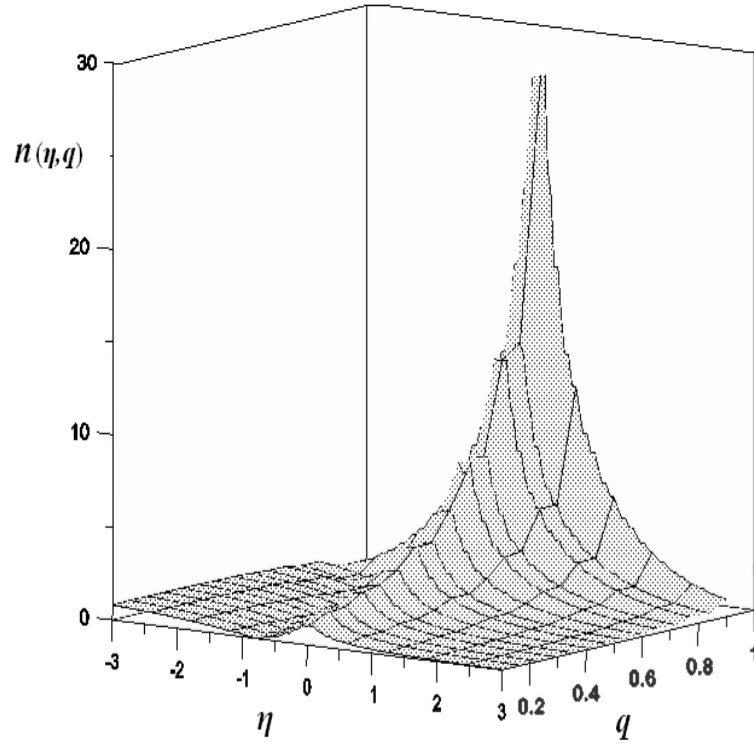
Burada ε_i , i . kuantum durumdaki parçacığın kinetik enerjisi ve μ kimyasal potansiyeldir. (4.1), (4.2) ve (4.7) eşitliklerinden yararlanarak

$$\frac{[n_i]}{[n_i + 1]} = e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} \quad (4.9)$$

bulunabilir (Merzbacher, 1970; Abers, 2004). Buradan, modelin deforme dağılım fonksiyonu

$$n = n(\eta, q) = \frac{1}{|\ln q|} \left| \ln \left(\frac{|e^\eta - 1|}{e^\eta + q} \right) \right| \quad (4.10)$$

şeklinde olur (Algin, 2011). Burada $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ 'dür ve deformasyon parametresi $0 < q < 1$ aralığındadır. Bu deforme dağılım fonksiyonunun $0 < q < 1$ aralığı için değişimi Şekil 4.1' de gösterilmiştir (Ek-5'de deforme dağılım fonksiyonu grafiğinin elde edilmişindeki Fortran yazılımı ayrıca verilmiştir).



Şekil 4.1. Sonlu sıcaklıklarda $0 < q < 1$ durumu için q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimi

Şekil 4.1'de η 'nin sabit değerlerinde q deformasyon parametresi arttıkça deforme dağılım fonksiyonunun değerleri de artmaktadır. $\eta = 0$ yani $\varepsilon = \mu$ olduğunda deforme dağılım fonksiyonu ıraksak olmaktadır.

(4.6) ve (4.10) eşitlikleri kullanılarak VPJC-fermion modeli için fermiyonik büyük bölüşüm fonksiyonunun logaritması aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\ln Z_F = \frac{(1+q)}{|\ln q|} \sum_i \left| \ln |1 - z e^{-\beta \varepsilon_i}| \right| \quad (4.11)$$

Burada $z = e^{\beta \mu}$ olup, q deformasyon parametresi $0 < q < 1$ aralığındadır. VPJC-fermion osilatör modelinde toplam parçacık sayısı standart termodinamik türev operatörü kullanılır ise

$$N = z \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \ln Z_F \quad (4.12)$$

olduğu görülür. O halde standart termodinamik türev operatörü yerine

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow D_z^{(q)} \quad (4.13)$$

fermiyonik JD operatörü eşitlik (4.6)'daki formuyla kullanılmalıdır. Sadece $D_z^{(q)}$ için (4.6)'daki tanım z değişkenine göre alınacaktır. (4.13) kullanılarak VPJC-fermion modelinin toplam parçacık sayısı

$$N = z D_z^{(q)} \ln Z_F \equiv \sum_i n_i \quad (4.14)$$

olduğu ispatlanabilir. Burada n_i , (4.10) eşitliğinde verilmiştir. (4.11) eşitliği kullanılarak sistemin hal denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{(1+q)}{|\ln q|} \sum_i \left| \ln(1 - ze^{-\beta \varepsilon_i}) \right| \quad (4.15)$$

$V \rightarrow \infty$ ve $N \rightarrow \infty$ limitlerinde (4.14) ve (4.15) eşitliklerindeki toplamlar integral ile yer değiştirebilir (Huang, 1987; Pathria, 1996). Böylece, standart yollar takip edilerek sistemin hal denklemi ve öz hacmi integral formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{P}{kT} = \frac{(1+q)}{|\ln q|} \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \left| \ln(1 - ze^{-\beta p^2/2m}) \right| \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{N}{V} = \frac{1}{|\ln q|} \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \left| \ln \left(\frac{(1 - ze^{-\beta p^2/2m})}{1 + qze^{-\beta p^2/2m}} \right) \right| \quad (4.17)$$

Burada $\varepsilon = p^2/2m$ ve fermiyonik JD operatörü kullanılarak bu denklemler aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir (Algin and Senay, 2012):

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z, q) \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z, q) \quad (4.19)$$

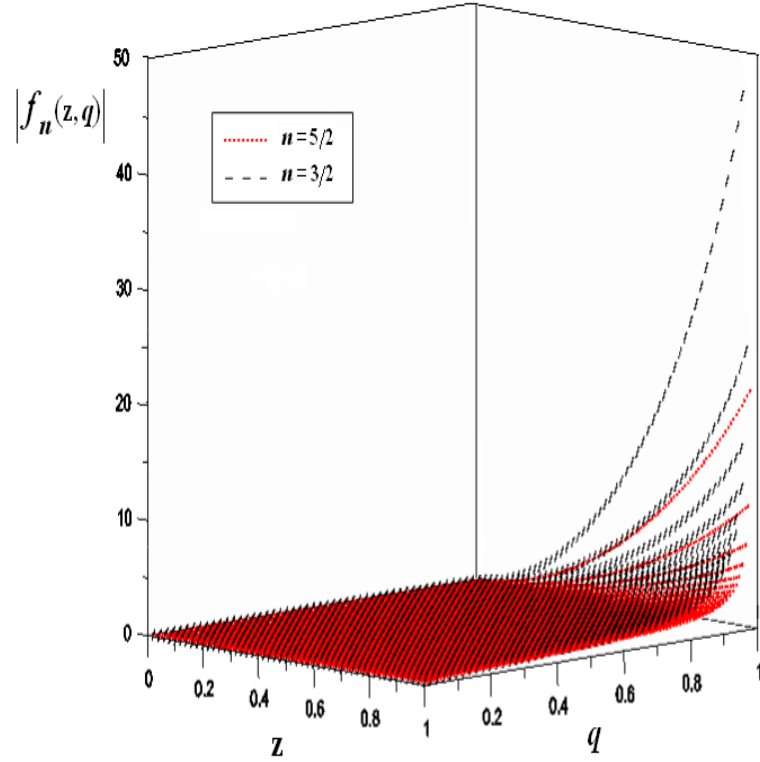
Burada $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mkT}$ termal dalga boyudur ve genelleştirilmiş q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu $f_n(z, q)$,

$$\begin{aligned} f_n(z, q) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{n-1} dx \frac{1}{|\ln q|} \left| \ln \left(\frac{|(1 - ze^{-x})|}{|1 + qze^{-x}|} \right) \right| \\ &= \frac{1}{|\ln q|} \left[\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{(zq)^l}{l^{n+1}} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{n+1}} \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

eşitliği ile tanımlanabilir. Burada $x = \beta p^2 / 2m$ dir ve Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)! \quad (4.21)$$

şeklinde tanımlanır (Boas, 1983). Eşitlik (4.20)'deki q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonlarının fugasite ve $0 < q < 1$ değerleri için değişimi Şekil 4.2'de gösterilmiştir (Ek-6 ve Ek-7'de q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonları için Fortran yazılımı verilmiştir).



Şekil 4.2. q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonlarının $0 < q < 1$ durumu için z 'ye göre değişimi.

Sabit z değerlerinde q deformasyon parametresi arttıkça q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonları artmaktadır. Başka bir q -deforme modeli için Lavagno ve Narayana Swamy (Narayana Swamy, 2006b; Lavagno and Narayana Swamy, 2010) tarafından önerilen yöntem VPJC-fermiyon gaz modelinin iç enerjisini bulmada da kullanılabilir:

$$U = \left(-\frac{\partial \ln Z_F}{\partial \beta} \right) = -\frac{(1+q)}{|\ln q|} \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial \beta} D_{y_i}^{(q)} |\ln(1 - zy_i)| \quad (4.22)$$

Burada $y_i = e^{-\beta \varepsilon_i}$ dir. Ayrıca bu denklemin aşağıdaki eşitliğe de eşit olduğu

$$U = \sum_i \varepsilon_i n_i \quad (4.23)$$

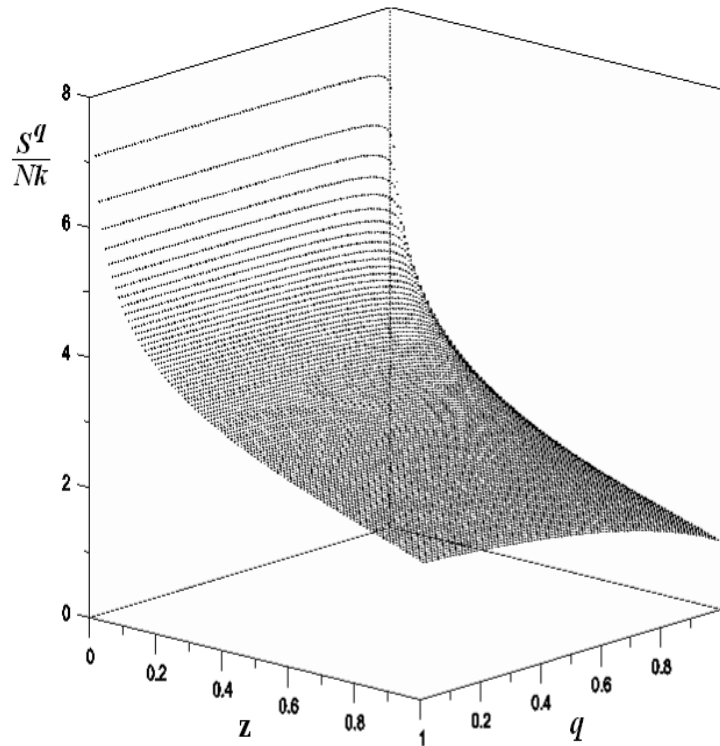
ispatlanabilir. Burada n_i , (4.10) eşitliğinde verilmiştir. Buradan hareketle

$$\frac{U}{V} = \frac{3}{2} \frac{kT}{\lambda^3} f_{5/2}(z, q) \quad (4.24)$$

elde edilebilir. (4.6), (4.11), (4.19) ve (4.24) eşitlikleri kullanılarak VPJC-fermion gaz modelinin entropisi

$$\frac{S^q}{Nk} = \frac{5}{2} \frac{f_{5/2}(z, q)}{f_{3/2}(z, q)} - \ln z \quad (4.25)$$

olur. Şekil 4.3'de S^q / Nk ile verilen deforme entropi fonksiyonunun z ve $0 < q < 1$ değerleri için değişimi verilmiştir (Ek-8'de deforme entropi fonksiyonu grafiğinin elde edilışindeki Fortran yazılımı verilmiştir).



Şekil 4.3. q -deforme entropi fonksiyonunun $0 < q < 1$ durumu için z 'ye göre değişimi.

Şekil 4.3'de sabit z değerlerinde q deformasyon parametresi artıkça q -deforme entropi azalmaktadır. Öte yandan VPJC-fermion osilatör modelinin öz ısısı

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} \quad (4.26)$$

ile verilir. (4.6) ve (4.22) eşitliklerinden yararlanarak modelin öz ısısı

$$\frac{C_V^q \lambda^3}{kV} = \frac{15}{4} z D_z f_{7/2}(z, q) - \frac{9}{4} z \frac{(D_z f_{5/2}(z, q))^2}{D_z f_{3/2}(z, q)} \quad (4.27)$$

elde edilir. Bundan başka, yüksek sıcaklıklar limitinde, (4.19) ve (4.20) eşitlikleri kullanılarak, VPJC-fermion gaz modelinin q deformasyon parametresine bağlı olarak fugasitesinin seri açılımı (λ^3/ν) 'nün dördüncü kuvvetine kadar

$$\begin{aligned} z = & \frac{|\ln q|}{(q-1)} \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right) + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{|\ln q|^2}{(q-1)^3} (q^2 + 1) \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right)^2 \\ & + \left[\frac{1}{2^4} \frac{|\ln q|^3}{(q-1)^5} (q^2 + 1)^2 - \frac{1}{3^{5/2}} \frac{|\ln q|^3}{(q-1)^4} (q^3 - 1) \right] \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right)^3 \\ & + \left[\frac{5}{2^{15/2}} \frac{|\ln q|^4}{(q-1)^7} (q^2 + 1)^3 - \frac{5}{6^{5/2}} \frac{|\ln q|^4}{(q-1)^6} (q^2 + 1)(q^3 - 1) + \frac{1}{2^5} \frac{|\ln q|^4}{(q-1)^5} (q^4 + 1) \right] \left(\frac{\lambda^3}{\nu} \right)^4 \end{aligned} \quad (4.28)$$

olur. (4.18), (4.19) ve (4.20) eşitliklerinden yararlanarak modelin hal denkleminin virial açılımı

$$\frac{PV}{NkT} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l(q) \left(\frac{\lambda^3 N}{V} \right)^{l-1} \quad (4.29)$$

bulunur. Buradaki $a_l(q)$ ile verilen virial katsayılarından ilk dördü aşağıdaki gibidir:

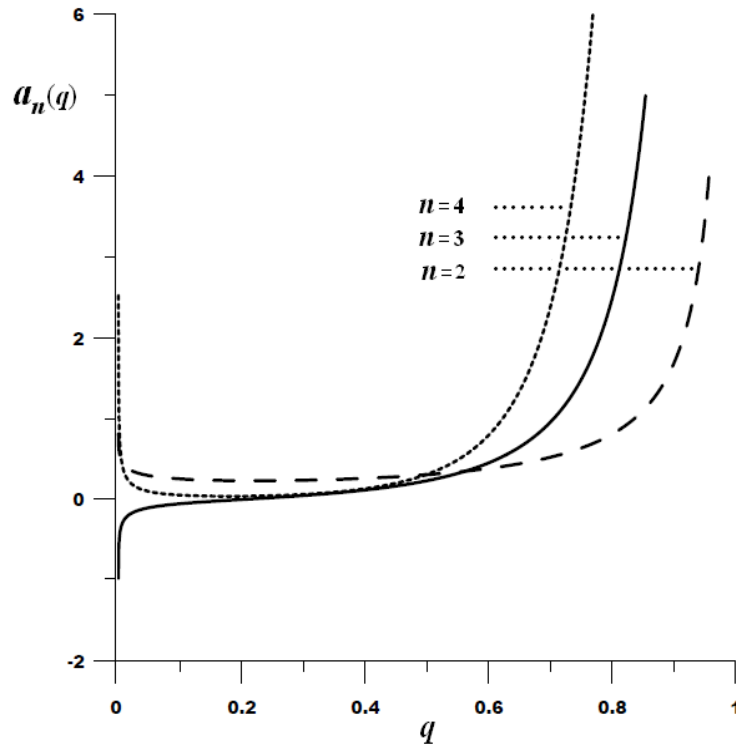
$$a_1(q) = 1 \quad (4.30)$$

$$a_2(q) = \frac{1}{2^{7/2}} \frac{|\ln q|}{(q-1)^2} (q^2 + 1) \quad (4.31)$$

$$a_3(q) = \frac{1}{2^5} \frac{|\ln q|^2}{(q-1)^4} (q^2 + 1)^2 - \frac{2}{3^{7/2}} \frac{|\ln q|^2}{(q-1)^3} (q^3 - 1) \quad (4.32)$$

$$a_4(q) = \frac{5}{2^{17/2}} \frac{|\ln q|^3}{(q-1)^6} (q^2+1)^3 - \frac{3}{6^{5/2}} \frac{|\ln q|^3}{(q-1)^5} (q^3-1)(q^2+1) + \frac{3}{2^7} \frac{|\ln q|^3}{(q-1)^4} (q^4+1) \quad (4.33)$$

Şekil 4.4’de yukarıdaki virial katsayılarının q deformasyon parametresine göre değişimi verilmiştir (Ek-9’da bu virial katsayıları grafiğinin elde edilmişindeki Fortran yazılımı verilmiştir). Diğer virial katsayıları yüksek sıcaklıklar limiti incelendiği için ihmal edilmiştir.



Şekil 4.4. Üç boyutlu uzayda, virial katsayılarının q deformasyon parametresine göre değişimleri.

4.2.1 Modelin iki boyutlu uzayda yüksek sıcaklıklarda hal denklemi

İki boyutlu uzayda, VPJC-fermion gazı modelinin hal denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{PA}{kT} = \frac{(1+q)}{|\ln q|} \sum_i \left| \ln \left(1 - ze^{-\beta \varepsilon_i} \right) \right| \quad (4.34)$$

VPJC-fermiyon gaz modelinin toplam parçacık sayısı

$$N = \sum_i n_i \quad (4.35)$$

ile verilir. Yine iki boyutlu uzayda $A \rightarrow \infty$ ve $N \rightarrow \infty$ limitlerinde (4.34) ve (4.35) denklemlerindeki toplamlar integral ile yer değiştirebilir (Khare, 2005). Buradan hareketle

$$\frac{P}{kT} = \frac{(1+q)}{|\ln q|} \frac{2\pi}{h^2} \int_0^\infty p dp \left| \ln \left(1 - ze^{-\beta p^2/2m} \right) \right| \quad (4.36)$$

$$\frac{N}{A} = \frac{1}{|\ln q|} \frac{2\pi}{h^2} \int_0^\infty p dp \left| \ln \left(\frac{\left| 1 - ze^{-\beta p^2/2m} \right|}{1 + qze^{-\beta p^2/2m}} \right) \right| \quad (4.37)$$

eşitlikleri elde edilebilir. (4.6) eşitliğinden yararlanarak bu denklemler aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^2} f_2(z, q) \quad (4.38)$$

$$\frac{N}{A} = \frac{1}{\lambda^2} f_1(z, q) \quad (4.39)$$

ile verilir. Burada, $f_1(z, q)$ ve $f_2(z, q)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonları

$$f_2(z, q) = \int_0^\infty x dx \frac{1}{|\ln q|} \left| \ln \left(\frac{\left| 1 - ze^{-x} \right|}{1 + qze^{-x}} \right) \right| = \frac{1}{|\ln q|} \left(\sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} \frac{(zq)^l}{l^3} - \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^3} \right)$$

$$f_1(z, q) = \int_0^\infty dx \frac{1}{|\ln q|} \left| \ln \left(\frac{\left| 1 - ze^{-x} \right|}{1 + qze^{-x}} \right) \right| = \frac{1}{|\ln q|} \left(\sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} \frac{(zq)^l}{l^2} - \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^2} \right) \quad (4.40)$$

eşitlikleri ile tanımlanırlar. Burada $x = \beta p^2 / 2m$ dir.

Yüksek sıcaklıklar limitinde ($N\lambda^2 / A \ll 1$), (4.38), (4.39) ve (4.40) eşitliklerinden yararlanarak iki boyutlu uzayda VPJC-fermion gaz modelinin hal denkleminin virial açılımı,

$$\frac{PA}{NkT} = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{a}_l(q) \left(\frac{\lambda^2 N}{A} \right)^{l-1} \quad (4.41)$$

dir. Burada $\tilde{a}_l(q)$ ile verilen virial katsayılarından ilk dört tanesi aşağıdaki formdadır:

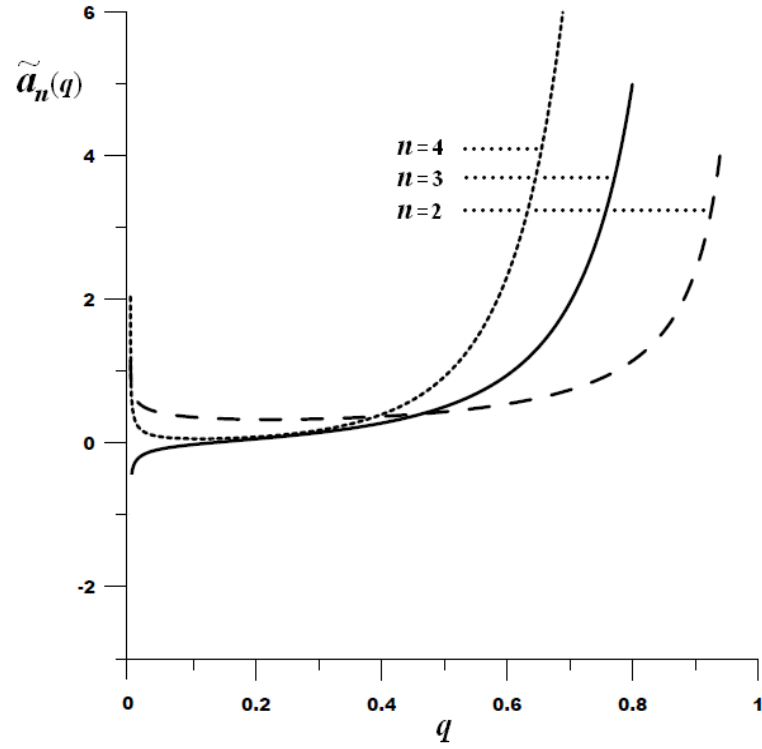
$$\tilde{a}_1(q) = 1 \quad (4.42)$$

$$\tilde{a}_2(q) = \frac{1}{2^3} \frac{|\ln q|}{(q-1)^2} (q^2 + 1) \quad (4.43)$$

$$\tilde{a}_3(q) = \frac{1}{2^4} \frac{|\ln q|^2}{(q-1)^4} (q^2 + 1)^2 - \frac{2}{3^3} \frac{|\ln q|^2}{(q-1)^3} (q^3 - 1) \quad (4.44)$$

$$\tilde{a}_4(q) = \frac{5}{2^7} \frac{|\ln q|^3}{(q-1)^6} (q^2 + 1)^3 - \frac{1}{2^2 3} \frac{|\ln q|^3}{(q-1)^5} (q^3 - 1)(q^2 + 1) + \frac{3}{2^6} \frac{|\ln q|^3}{(q-1)^4} (q^4 + 1) \quad (4.45)$$

Şekil 4.5’de buradaki virial katsayılarının q deformasyon parametresine göre değişimi gösterilmiştir (Ek-10’da iki boyutlu uzayda virial katsayılarının grafiğinin elde edilmişindeki Fortran yazılımı verilmiştir). Yine yüksek sıcaklıklar limiti incelendiği için diğer virial katsayıları ihmal edilmiştir.



Şekil 4.5. İki boyutlu uzayda, virial katsayılarının q deformasyon parametresine göre değişimleri.

Gerek üç gerekse iki boyutlu uzay için elde edilen yüksek sıcaklıklar limitinde modelin termo-istatistiksel fonksiyonlarına ((4.10)-(4.45) eşitlikleri) deformasyonun etkileri, hem ideal Fermi gazı sonuçları hem de literatürde çalışılan diğer deforme fermiyon gazları sonuçlarıyla kıyaslamalı olarak son bölümünde tartışılacaktır.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada ilk olarak, özdeş parçacık sistemlerinin genel kuantum mekaniksel özellikleri ele alınmıştır. Özel olarak bu sistemlerin sahip oldukları simetrik ve anti-simetrik dalga fonksiyonlarıyla birlikte, tek boyutlu bozon ve fermiyon operatör cebirleri incelenmiştir. Bunlar yardımıyla sistemlerin istatistiksel dağılım fonksiyonları da ayrıca çalışılmıştır.

Tez çalışmasında ikinci olarak, düşük ve yüksek sıcaklıklar limitinde ideal Fermi gazının termo-istatistiksel özellikleri ele alınmıştır. Standart Fermi-Dirac fonksiyonları hesaplanarak bu sistemin iç enerjisi, entropisi, öz ısı ve Helmholtz serbest enerjisi gibi önemli termodinamik fonksiyonları incelenmiştir. İdeal Fermi gazının yüksek sıcaklıklar limitinde basınç ve öz hacim ifadelerinden yararlanarak sistemin hal denkleminin virial açılımı yapılarak, virial katsayıları incelenmiştir. Ayrıca özel olarak, iki boyutlu uzayda da yüksek sıcaklıklar limitinde sistemin hal denkleminin virial açılımı yapılarak, virial katsayıları ele alınmıştır.

Tezde üçüncü olarak, standart fermiyon osilatörlerinin olası bir genelleştirilmesi olarak önerilen (Viswanathan et al., 1992; Chaichian et al., 1993; Algin, 2011) deforme bir fermiyon gazı modeli oluşturan VPJC-fermion osilatörleri gazının yüksek sıcaklıklar limitinde termo-istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Bu modelin ortalama parçacık sayısı, öz hacim, iç enerji, entropi gibi termo-istatistiksel karakteristikleri üzerinde durulmuştur. Modelin q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonları elde edilerek, basınç ve öz hacim denklemlerinden virial açılımı, virial katsayıları bulunmuştur. Bundan başka, iki boyutlu uzayda modelin yüksek sıcaklıklar limitinde hal denkleminin virial açılımı, virial katsayıları bulunmuştur. Genel olarak, reel pozitif deformasyon parametresi q 'nun $0 < q < 1$ aralığında VPJC-modelinin termo-istatistiksel özelliklerine etkisi incelenmiştir.

VPJC-fermion gazı modelinde ilk olarak, q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu incelenmiştir. Şekil 4.1'de sabit η değerlerinde q deformasyon parametresi arttıkça q -deforme dağılım fonksiyonunun değerleri de artmaktadır. Ayrıca $\eta = 0$

olduğu zaman q 'nın tüm değerlerinde bu deforme dağılım fonksiyonu iraksaklık göstermektedir. VPJC-fermion modelinin serbest fermiyon gazı modelinden en önemli farkı, durum başına düşen parçacık sayısında bir sınırlamanın olmamasıdır. Yani $q \neq 1$ iken bu deforme fermiyon modeli Pauli dışarlama ilkesini sağlamamaktadır.

VPJC-fermion gazı modelinin büyük bölüşüm fonksiyonunun logaritması (4.11) eşitliğindeki gibi elde edilmiştir. Bu modelde, standart termodinamik türev operatörünün termo-istatistiksel özellikleri incelemede geçerli olmadığı (4.12) eşitliğinde gösterilmiştir. Standart termodinamik türev operatörü yerine, model için tanımlanan fermiyonik JD operatörü kullanılarak, sistemin hal denklemi ve öz hacmi q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonları cinsinden ifade edilmiştir. Modelin genelleştirilmiş Fermi-Dirac fonksiyonlarının grafiği Şekil 4.2'de verilmiştir. Şekilde sabit z değerlerinde, artan q değerleriyle birlikte bu deforme fonksiyonların değerleri de artmaktadır. Eşitlik (3.18) ve (3.19)'da verilen standart Fermi-Dirac fonksiyonları ile karşılaştırıldığında, eşitlik (4.20)'deki q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonlarının sabit z değerlerinde daha büyük değerler aldığı görülmüştür. Ayrıca standart Fermi-Dirac fonksiyonlarında $f_{5/2}(z) > f_{3/2}(z)$ olmasına rağmen, q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonlarında $f_{5/2}(z, q) < f_{3/2}(z, q)$ olmaktadır. Bunun sebebi ise q deformasyon parametresinin etkisini göstermesidir. Literatürde Narayana Swamy tarafından 2006'da incelenen başka bir deforme fermiyon gazı modeli çalışmasında da elde edilen genelleştirilmiş fonksiyonlar da $h_{5/2}(z, q) < h_{3/2}(z, q)$ olduğu görülmüştür (Narayana Swamy, 2006b). Fakat sabit z değerleri için $0 < q < 1$ aralığında q deformasyon parametresi arttıkça, Narayana Swamy'nin çalıştığı modelin deforme Fermi-Dirac fonksiyonları azalırken, VPJC-fermion gaz modelinin Şekil 4.2'de verilen deforme Fermi-Dirac fonksiyonları artmaktadır (Narayana Swamy, 2006b).

VPJC-fermion gaz modelinin iç enerji ve entropi ifadeleri sırasıyla (4.24) ve (4.25) eşitliklerinde deforme Fermi-Dirac fonksiyonlarına bağlı olarak elde edilmiştir. Şelil 4.3'de sabit z değerlerinde q deformasyon parametresi arttıkça entropi azalmaktadır. Özellikle ($0.9 < q < 1$) aralığında bu azalış diğer q değerlerindeki göre daha da fazla olmaktadır. Serbest bir fermiyon gazının eşitlik (3.27)'de verilen entropi değerleri ile kıyaslandığında, z 'nin tüm değerlerinde deforme entropi

değerlerinin daha küçük çıktığı gözlenmiştir. Bu da deformasyonun sistemin entropisine azaltıcı bir etki gösterdiğini ortaya koymaktadır.

Üç boyutlu uzayda yüksek sıcaklıklar limitinde modelin (4.18) ve (4.19) eşitlikleriyle verilen P/kT ve $1/\nu$ ifadelerinden hal denkleminin virial açılımı yapılarak ilk dört virial katsayısı q 'ya bağlı olarak bulunmuştur. Sadece yüksek sıcaklıklar limiti ele alındığından (4.29)'daki diğer virial katsayıları ihmal edilmiştir. Modelin ilk dört virial katsayısının q 'ya göre değişimi Şekil 4.4'de sunulmuştur. Bu şekilden de görüldüğü gibi $0 < q < 1$ aralığındaki tüm değerlerde $a_2(q) > 0$, $a_4(q) > 0$ iken $a_3(q)$ katsayısı bazı q 'larda ($0 < q \leq 0.2019$) negatif olabilmektedir. Modelin özel olarak $a_3(q)$ virial katsayısı $q = 0.2091$ değerinde serbest bir fermiyon gazının yine karşılık gelen aynı virial katsayısı değerine sahip olmaktadır (Greiner et al., 1994; Pathria, 1996). Fakat $q = 0.1947$ değerinde de $a_3(q) = -0.0033$ olup, serbest bir bozon gazının karşılık gelen üçüncü virial katsayısı ile benzer bir değere ulaşmaktadır (Greiner et al., 1994; Pathria, 1996). Buradan $0 < q < 1$ aralığında bulunan bazı özel q değerlerinde, VPJC-fermion gazı modelinin adeta bozonik bir gaz gibi davranabildiği gözlemlenmiştir (Algin and Senay, 2012).

Aynı modelin iki boyutlu uzayda yüksek sıcaklıklar limitinde hal denkleminin virial açılımı (4.42) eşitliğinde elde edilmiştir ve ilk dört virial katsayısı (4.42), (4.43), (4.44) ve (4.45) eşitliklerindeki gibi bulunmuştur. Sadece yüksek sıcaklıklar limiti ele alındığından (4.42)'deki diğer virial katsayıları ihmal edilmiştir. Şekil 4.5'de q 'nun tüm değerlerinde $\tilde{a}_2(q)$ ve $\tilde{a}_4(q)$ deforme virial katsayıları pozitif olurken, $\tilde{a}_3(q)$ ile verilen deforme virial katsayısının q 'nun ($0 < q < 0.1270$) aralığında negatif, ($0.1270 \leq q < 1$) aralığında pozitif olduğu gözlenmiştir. $\tilde{a}_3(q)$ deforme virial katsayısı $q = 0.1632$ değerinde serbest bir fermiyon gazının karşılık gelen virial katsayısına sahiptir (Khare, 2005). Ayrıca özel olarak $q = 0.0948$ değerinde de $\tilde{a}_3(q) = -0.0278$ olup, serbest bir bozon gazının karşılık gelen üçüncü virial katsayısına benzer değer alıp, adeta bir bozonik davranış sergileyebilmektedir. O halde modelin iki boyutta da, orjinal fermiyonik karakterini adeta bozonik bir davranışa doğru değiştirebileceği görülmüştür.

Son olarak, bu tez çalışmasında incelenen genelleştirilmiş Fermi gazı modelinin olası uygulama alanlarından da bahsedilebilir: Örneğin, ilk olarak Fermi-Dirac istatistiğinin genelleştirilmiş bir formu, ${}^3\text{He}$ 'ün sıvı hal formuna uygulanabilir. Zira Landau teorisinden de bilindiği gibi, bu sıvı adeta zayıfça etkileşen parçacıkların oluşturduğu bir gaz ortamı olarak düşünülebilir. Böylece, sistemin parçacıklarına da adeta kuazi-parçacıklar olarak bakılabilir ve inceleme yapılabilir (Guenault, 1995). Dolayısıyla, dördüncü bölümde incelenen deforme fermiyon gazı modeline uyan parçacıkların da bu tür kuazi-parçacıklar olarak düşünülmesiyle, ${}^3\text{He}$ sıvısı modelinin termo-istatistiksel özelliklerini ve etkileşmelerini incelemede kullanılabilirler.

İkinci olarak, beyaz cücelerden bahsedilebilir. İdeal bir beyaz cüce, yaklaşık olarak güneşin kütlelerinde, merkez sıcaklıkları 10^7 K ve yoğunlukları 10^7 g/cm³ olan yıldızlardır (Huang, 1987; Tayler, 2004). İlk olarak 1926 yılında Fowler tarafından beyaz cüce içindeki Fermi gazının tamamen dejenere olduğu fark edildirmiştir (Greiner et al., 1994). Bu nedenle düşük sıcaklıklar limitinde, beyaz cüce yıldızların merkezlerinin dejenere bir Fermi gazı bakış açısıyla incelenmesi, pekala genelleştirilmiş VPJC-fermiyon modeli parçacıklarının istatistik mekaniksel özellikleriyle de çalışılabilir.

Öte yandan, serbest gaz bakış açısında moleküller arası etkileşmeler ihmal edilir. Ancak gerçek gazlar ve gerçek sıvılarda, moleküller arasında etkileşmeler vardır. Gerçek sıvılar için, parçacıklar arası potansiyelin katı bir merkezsel bölgesi ile zayıf bir çekim bölgesi mevcuttur (Reichl, 1998; Karaoğlu, 2008). Bu yüzden, bilindik pertürbasyon teorileri istenilen sonuçları vermemektedir. Fakat, seyreltik ya da görece yoğun sıvılar için, tek küçük parametre yoğunluktur ve bu nedenle çeşitli termodinamik fonksiyonlar yoğunluk cinsinden bir açılımla ifade edilebilirler. İlgili bir diğer yöntem de, sistemin büyük potansiyeli ve basıncı, kümelerin (clusters) fonksiyonları cinsinden ifade edilebilirler (Greiner, 1994; Reichl, 1998). Böylece sistemin hal denkleminin virial açılımı dolayısıyla mikroskobik teori yardımıyla virial katsayıları küme fonksiyonlarıyla ilişkilendirilip, parçacıklar arasındaki etkileşmeler çalışılabilir. Benzer şekilde VPJC-fermiyon gazı için üç boyutlu uzayda (4.30), (4.31), (4.32) ve (4.33) eşitlikleriyle elde edilen virial katsayılarının da etkileşen gerçek sıvıların küme açılımlarında kullanılabileceği söylenebilir.

Sonuç olarak, özel bir genelleştirilmiş fermiyon sistemi olan VPJC-fermion gazı modelinin yüksek sıcaklıklar limitinde termo-istatistiksel özelliklerini içeren bu tez çalışmasının gelecekte yukarıda bahsedilen olası uygulama alanlarının yanı sıra, aynı modelin düşük sıcaklıklar limitinde de kuantum istatistik yönlerinin çalışılmasında da yardımcı olabileceği umulmaktadır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abers, E.S., 2004, Quantum mechanics, Pearson Education, New Jersey, 444 p.
- Algin, A., 2011, A comparative study on q -deformed fermion oscillators, Int. J. Theor. Phys., 50, 1554-1568.
- Algin, A. and Senay, M., 2012, High-temperature behavior of a deformed Fermi gas obeying interpolating statistics, Phys. Rev. E, 85, 041123-1-041123-10.
- Apaydın, F., 2004, İstatistik Fizik, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara, 42 s.
- Arik, M. and Coon, D.D., 1976, Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states, J. Math. Phys., 17, 524-527.
- Arslan, E., 2009, Q -deforme fermiyonik Newton osilatörlerinin istatistik mekaniksel özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Ballentine, L.E., 1998, Quantum mechanics: a modern development, World Scientific, Singapore, 475 p.
- Başer, M., 2007, $SU_{p/q}(2)$ -invariant (p,q) -deforme fermiyon gazının düşük sıcaklıklardaki termo-istatistiksel özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Besier, A., 1997, Modern fiziğin kavramları, (Çev. G. Önengüt), Akademi Yayınları, İstanbul, 307 s., 482 s.
- Biedenharn, L.C., 1989, The quantum group $SU_q(2)$ and a q -analogue of the boson operators, J. Phys. A: Math. Gen., 22, L873-L878.
- Boas, M.L., 1983, Mathematical methods in the physical sciences, John Wiley and Sons, Canada, 458 p.
- Cai, S.K., Su, G.Z. and Chen, J.C., 2010, General thermostatistical properties of a q -deformed Fermi gas trapped in a power-law potential, Int. J. Mod. Phys. B 24, 3323-3330
- Chaichian, M., Felipe, R.G. and Montonen, C., 1993, Statistics of q -oscillators, quons, and relations to fractional statistics, J. Phys. A: Math. Gen., 26, 4017-4034.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. and Laloë, F., 2005, Quantum mechanics (cilt 2), John Wiley and Sons, Canada, 1371 p.
- Dereli, T. ve Verçin, A., 2000, Kuantum mekaniği II, Metu Yayınları, Ankara, 59 s.
- Deviren, B., 2005, İki-parametre ile deforme kuantum grup bozon gazının düşük sıcaklıklardaki termodinamiği, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Gasiorowicz, S., 2003, Quantum physics, John Wiley and Sons, New York, 202 p.
- Greiner, W., Neise, L. and Stöcker, H., 1994, Thermodynamics and statistical mechanics, Springer-Verlag, New York, 322 p., 342 p.
- Griffiths, D., 1987, Introduction to elementary particles, John Wiley and Sons, New York, 47 p.
- Guenalt, T., 1995, Statistical physics, Chapman and Hall, UK, 99 p.
- Gündüz, E., 1999, Modern fiziğe giriş, Ege Üniversitesi Basımevi, İzmir, 343 s.
- Huang, K., 1987, Statistical mechanics, John Wiley and Sons, New York, 151 s., 185 s., 241 s., 247 s.
- Jakson, F.H., 1909, A q -form of Taylor's theorem, Mess. Math. 38, 62-64.
- Karaoğlu, B., 2008, Kuantum mekaniğine giriş, Seçkin Yayıncılık, Ankara, 9 s., 237 s., 250 s.
- Karaoğlu, B., 2009, İstatistik mekaniğine giriş, Seçkin Yayıncılık, Ankara, 32 s., 127 s.
- Khare, A., 2005, Fractional statistics and quantum theory, World Scientific, Singapore, 104 p., 111 p.
- Lavagno, A. and Narayana Swamy, P., 2002, Generalized thermodynamics of q -deformed bosons and fermions, Phys. Rev. E 65, 036101-036105.
- Lavagno, A. and Narayana Swamy, P., 2010, Thermostatistics of deformed bosons and fermions, Found. Phys., 40, 814-828.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Lee, C.R. and Yu, J.P., 1990, On q -analogues of the statistical distribution, Phys. Lett. A, 150, 63-66.
- Lee, C.R. and Yu, J.P., 1992, On q -deformed free electron gases, Phys. Lett. A, 164, 164-166.
- Liboff, R.L., 1997, Introductory quantum mechanics, Addison Wesley Longman, New York, 202 p.
- Macfarlane, A.J., 1989, On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$, J. Phys. A: Math. Gen., 22, 4581-4588.
- McGervey, J.D., 1995, Quantum mechanics concepts and application, Academic Pres, New York, 221 p.
- Merzbacher, E., 1970, Quantum mechanics, John Wiley and Sons, New York, 167 p., 515 p.
- Narayana Swamy, P., 2003, Deformed Heisenberg algebra: origin of q -calculus, Physica A, 328, 145-153.
- Narayana Swamy, P., 2006a, Interpolating statistics and q -deformed oscillator algebras, Int. J. Mod. Phys. B, 20, 697-713.
- Narayana Swamy, P., 2006b, q -Deformed fermions: algebra, Fock space and thermodynamics, Int. J. Mod. Phys. B, 20, 2537-2550.
- Narayana Swamy, P., 2006c, q -Deformed fermions, Eur. Phys. J. B, 50, 291-294.
- Ng, Y.J., 1990, Comment on the q -analogues of the harmonic oscillator, J. Phys. A: Math. Gen., 23, 1023-1027.
- Parthasarathy, R. and Viswanathan, K.S., 1991, A q -analogue of the supersymmetric oscillator and its q -superalgebra, J. Phys. A: Math. Gen., 24, 613-617.
- Pathria, R.K., 1996, Statistical mechanics, Betterworth Heinemann, Burlington, 160 p., 195 p.
- Reichl, L.E., 1998, A modern course in statistical physics, John Willey and Sons, Canada, 488 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Shankar, R., 1994, Principles of quantum mechanics, Plenum Press, New York, 640 p.
- Song, H.S., Ding, S.X. and An, I., 1993, Statistical mechanical properties of the q -oscillator system, J. Phys. A: Math. Gen., 26, 5197-5205.
- Tayler, R.J., 2004, Yıldızlar yapıları ve evrimleri, (Çev. C. Aydın ve Z. Aslan), Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 210 s.
- Tuszynski, J.A., Rubin, J.L., Meyer, J. And Kibler, J., 1993, Statistical mechanics of a q -deformed boson gas, Phys. Lett. A 175, 173-177.
- Viswanathan, K.S., Parthasarathy, R. and Jagannathan, R., 1992, Generalized q -fermion oscillators and q -coherent states, J. Phys. A: Math. Gen., 25, L335-L339.
- Zettili, N., 2001, Quantum mechanics, John Wiley and Sons, New York, 229 p.

EKLER

EK 1. Standart $f_{5/2}(z)$ fonksiyonunun Fortran yazılımı.

```

implicit none
DOUBLE PRECISION::f,z
integer :: l,i
open (unit=20,file="ideal_besboluiki.dat",action="write",status="replace")
DO z = 0.01, 1, 0.01
write (20,40) z
End Do
close (20)
open (unit=20,file="ideal_besboluiki.dat",status="old")
open (unit=10,file="ideal_besboluiki_.dat",action="write",status="replace")
Do i=1, 99, 1
Read (20,*) z
DO l = 1, 51, 1
f = f + ((-1)**(l-1)) * ((z)**(l))/(l**(5./2.))
End do
write (10,50) z,f
f=0
End Do
close (10)
close (20)
40 format(F5.2)
50 format(F5.2,2(F12.6,1X))
end

```

EKLER (devam)**EK 2. Standart $f_{3/2}(z)$ fonksiyonunun Fortran yazılımı.**

```

implicit none
DOUBLE PRECISION::f,z
integer :: l,i
open (unit=20,file="ideal_ucboluiki.dat",action="write",status="replace")
DO z = 0.01, 1, 0.01
write (20,40) z
End Do
close (20)
open (unit=20,file="ideal_ucboluiki.dat",status="old")
open (unit=10,file="ideal_ucboluiki_.dat",action="write",status="replace")
Do i=1, 99, 1
Read (20,*) z
DO l = 1, 51, 1
f = f + ((-1)**(l-1)) * ((z)**(l))/(1**(3./2.))
End do
write (10,50) z,f
f = 0
End Do
close (10)
close (20)
40 format(F5.2)
50 format(F5.2,2(F12.6,1X))
end

```

EKLER (devam)**EK 3. İdeal Fermi gazı entropisi S/Nk 'nın z 'ye göre değişimini veren Fortran yazılımı.**

```

implicit none
DOUBLE PRECISION:: f,z,h,s
integer :: l,i
open (unit=20,file="ideal_entropi.dat",action="write",status="replace")
DO z = 0.01, 1, 0.01
write (20,40) z
End Do
close (20)
open (unit=20,file="ideal_entropi.dat",status="old")
open (unit=10,file="ideal_entropi_.dat",action="write",status="replace")
Do i=1,100,1
Read (20,*) z
DO l = 1, 51, 1
f = f + ((-1)**(l-1))* ((z)**(l))/(1**(5./2.))
h = h + ((-1)**(l-1))* ((z)**(l))/(1**(3./2.))
s = (5./ 2.) * (f / h ) - (Log(z))
End do
write (10,50) z, s
f=0
h=0
End Do
close (10)
close (20)
40 format(F5.2)
50 format(F5.2,2(F12.6,1X))
End

```

EKLER (devam)

EK 4. Eşitlik (3.31)'in çözümü.

$$\begin{aligned}
 f_{3/2}(z) &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dy \frac{y^{3/2} e^{y-v}}{(e^{y-v} + 1)^2} \\
 &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dy \frac{e^{y-v}}{(e^{y-v} + 1)^2} \left(v^{3/2} + \frac{3}{2} v^{1/2} (y-v) + \frac{3}{8} v^{-1/2} (y-v)^2 + \dots \right) \\
 &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_{-v}^{\infty} dt \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} \left(v^{3/2} + \frac{3}{2} v^{1/2} t + \frac{3}{8} v^{-1/2} t^2 + \dots \right) \\
 &= \int_{-v}^{\infty} - \int_{-\infty}^{-v} \\
 &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} \left(v^{3/2} + \frac{3}{2} v^{1/2} t + \frac{3}{8} v^{-1/2} t^2 + \dots \right) + O(e^{-v}) \\
 &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(I_0 v^{3/2} + I_1 \frac{3}{2} v^{1/2} + I_2 \frac{3}{8} v^{-1/2} + \dots \right) + O(e^{-v})
 \end{aligned}$$

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{t^n e^t}{(e^t + 1)^2}$$

$n = 0$ için,

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} = -2 \int_0^{\infty} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{e^t + 1} \right) \\
 &= -2 \frac{d}{dt} (\ln(1 + e^t)) \Big|_0^{\infty} \\
 &= -2 \left(\frac{e^t}{e^t + 1} \right) \Big|_0^{\infty} = 1
 \end{aligned}$$

Çift sayılı n 'ler için;

$$I_n = -2 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{n-1}}{e^{\lambda t} + 1} \right)_{\lambda=1}$$

EKLER (devam)

$$\begin{aligned}
&= -2 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\infty} \frac{du}{\lambda} \frac{(u/\lambda)^{n-1}}{e^u + 1} \right)_{\lambda=1} \\
&= -2 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda^{-n} \int_0^{\infty} du \frac{u^{n-1}}{e^u + 1} \right)_{\lambda=1} \\
&= -2 \left((-n) \lambda^{-n-1} \int_0^{\infty} du \frac{u^{n-1}}{e^u + 1} \right)_{\lambda=1} \\
&= 2n \int_0^{\infty} du \frac{u^{n-1}}{e^u + 1} \\
&\frac{1}{e^u + 1} = \frac{e^{-u}}{1 + e^{-u}} \\
&\frac{e^{-u}}{1 + e^{-u}} = e^{-u} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l e^{-ul} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} e^{-ul} \\
I_n &= 2n \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-ul} du \\
&= 2n \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{1}{l^n} \int_0^{\infty} k^{n-1} e^{-k} dk \\
\Gamma(n) &= \int_0^{\infty} k^{n-1} e^{-k} dk = (n-1)! \\
I_n &= 2n(n-1)! \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{1}{l^n} \\
&= 2n(n-1)! \left(1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \dots \right) \\
&= 2n(n-1)! \left[\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots \right) - 2 \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \dots \right) \right]
\end{aligned}$$

EKLER (devam)

$$\begin{aligned}
&= 2n(n-1)! \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^n} - 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l)^n} \right) \\
&= 2n(n-1)! \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^n} \left(1 - \frac{2}{2^n} \right) \\
&= 2n(n-1)! (1 - 2^{1-n}) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^n} \\
&= 2n(n-1)! (1 - 2^{1-n}) \xi(n) \\
\xi(2) &= \frac{\pi^2}{6}, \quad \xi(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \xi(6) = \frac{\pi^6}{945} \\
I_2 &= 2 \cdot 2(2-1)! (1 - 2^{1-2}) \xi(2) = \pi^2/3 \\
f_{3/2}(z) &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(I_0 v^{3/2} + I_1 \frac{3}{2} v^{1/2} + I_2 \frac{3}{8} v^{-1/2} + \dots \right) + O(e^{-v}) \\
&= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left((\log z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{3} \frac{3}{8} (\log z)^{-1/2} + \dots \right) + O(z^{-1}) \\
&= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\log z)^{3/2} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} (\log z)^{-2} + \dots \right) + O(z^{-1})
\end{aligned}$$

EKLER (devam)

EK 5. Sonlu sıcaklıklarda $0 < q < 1$ durumu için q -deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimini veren Fortran yazılımı.

```

implicit none
integer :: i
DOUBLE PRECISION :: E, q, n
open (unit=20,file="deformedagilim_fonksiyonu.dat",action="write",status="replace")
DO E = -3, 3.1, 0.1
Do q = 0.1, 1, 0.1
write (20,40) E, q
End Do
End Do
close (20)
open (unit=20,file="deformedagilim_fonksiyonu.dat",status="old")
open (unit=10,file="deformedagilim_fonksiyonu_.dat",action="write",status="replace")
Do i=1, 549, 1
Read (20,*) E, q
if (E==0) Then
write (10,50) E, q
else
n= 1 / ABS(Log(q)) * ABS( Log(ABS(Exp(E)-1)/( EXP(E) + q)))
write (10,50) E, q, n
end if
End do
close (10)
close (20)
40 format(F5.2,2(F6.2,1X))
50 format(F5.2,F6.2,2(F12.6,1X))
end

```


EKLER (devam)

EK 6. q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu $f_{5/2}(z, q)$ 'nin $0 < q < 1$ durumu için z 'nin bir fonksiyonu olarak Fortran yazılımı.

```

implicit none
DOUBLE PRECISION:: q,f,z
integer :: l,i
open (unit=20,file="deforme_besboluiki.dat",action="write",status="replace")
DO z = 0.01, 1, 0.01
Do q = 0.01, 0.99, 0.01
write (20,40) z, q
End Do
End Do
close (20)
open (unit=20,file="deforme_besboluiki.dat",status="old")
open (unit=10,file="deforme_besboluiki_.dat",action="write",status="replace")
Do i=1, 9900, 1
Read (20,*) z, q
DO l = 1, 51, 1
f = f + abs( 1 / ABS(Log(q)) *((-1)**(l-1) * ((q*z)**(l))/(1**(7./2.)) -
(z**l)/(1**(7./2.))))
End do
write (10,50) z, q, f
f=0
End Do
close (10)
close (20)
40 format(F5.2,F6.2,2(I4,1X))
50 format(F5.2,F6.2,2(F12.6,1X))
end

```

EKLER (devam)

EK 7. q -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu $f_{3/2}(z, q)$ 'nin $0 < q < 1$ durumu için z 'nin bir fonksiyonu olarak Fortran yazılımı.

```

implicit none
DOUBLE PRECISION:: q,f,z
integer :: l,i
open (unit=20,file="deforme_ucboluiki.dat",action="write",status="replace")
DO z = 0.01, 1, 0.01
Do q = 0.01, 0.99, 0.01
write (20,40) z, q
End Do
End Do
close (20)
open (unit=20,file="deforme_ucboluiki.dat",status="old")
open (unit=10,file="deforme_ucboluiki_.dat",action="write",status="replace")
Do i=1, 9900, 1
Read (20,*) z, q
DO l = 1, 51, 1
f = f+abs(1 / ABS(Log(q)) *((-1)**(l-1) * ((q*z)**(l))/(1**(5./2.)) -(z**l)/(1**(5./2.))))
End do
write (10,50) z, q, f
f=0
End Do
close (10)
close (20)
40 format(F5.2,F6.2,2(I4,1X))
50 format(F5.2,F6.2,2(F12.6,1X))
end

```

EKLER (devam)

EK 8. q -deforme entropi S^q / Nk 'nin $0 < q < 1$ durumu için z 'nin bir fonksiyonu olarak Fortran yazılımı.

```

implicit none
DOUBLE PRECISION:: q,f,z,h,s
integer :: l,i
open (unit=20,file="deforme_entropi.dat",action="write",status="replace")
DO z = 0.01, 1, 0.01
Do q = 0.01, 0.99, 0.01
write (20,40) z, q
End Do
End Do
close (20)
open (unit=20,file="deforme_entropi.dat",status="old")
open (unit=10,file="deforme_entropi_.dat",action="write",status="replace")
Do i=1, 9900, 1
Read (20,*) z, q
DO l = 1, 51, 1
f = f + abs(1 / ABS(Log(q))) * ((-1)**(l-1) * (((q*z)**(l))/(l**(7./2.))) -((z**l)/(l**(7./2.))))
h = h + abs(1 / ABS(Log(q))) * ((-1)**(l-1) * (((q*z)**(l))/(l**(5./2.))) -((z**l)/(l**(5./2.))))
s = (5./2.) * ( f / h) - log(z)
End do
write (10,50) z, q, s
f=0
h=0
End Do
close (10)
close (20)
40 format(F5.2,F6.2,2(I4,1X))
50 format(F5.2,F6.2,2(F12.6,1X))
end

```

EKLER (devam)

EK 9. Üç boyutlu uzayda, virial katsayılarının q 'ya göre değişimlerini veren Fortran yazılımı.

```

implicit none
DOUBLE PRECISION::q,a,x,y,z,b,c
integer :: i
open (unit=20,file="ucboyuttavirial_iki_uc_dort.dat",action="write",status="replace")
DO q = 0.0001, 1, 0.0001
write (20,40) q
End Do
close (20)
open (unit=20,file="ucboyuttavirial_iki_uc_dort.dat",status="old")
open (unit=10,file="ucboyuttavirial_iki_uc_dort_.dat",action="write",status="replace")
Do i=1,9999, 1
Read (20,*) q
x = (5*((ABS(log(q))**3) * (((q**2) + 1)**3) / (( 2**(17./2.))* ((q-1)**6))))
y = (((ABS(log(q))**3) * ((q**2) + 1) * ((q**3)-1)) / ((12* (6**(1./2.))) * ((q-1)**5)))
z = (3*((ABS(log(q))**3) * (((q**4) + 1)) / (( 2**(7)) * ((q-1)**4))))
a = x - y + z
b = ((ABS(log(q))**2) * (((q**2) + 1)**2) / (( 2**(5)) * ((q-1)**4))) -
(2*((ABS(log(q))**2) * ((q**3) - 1) / (( 3**(7./2.)) * ((q-1)**3))))
c = ABS(log(q)) * ((q**2) + 1) / (( 2**(7./2.)) * ((q-1)**2))
write (10,50) q,c,b,a
End do
close (10)
close (20)
40 format(F6.4)
50 format(F6.4,2(F16.6,1X),2(F16.6,1X),2(F16.6,1X))
end

```

EKLER (devam)

EK 10. İki boyutlu uzayda, virial katsayılarının q 'ya göre değişimlerini veren Fortran yazılımı.

```

implicit none
DOUBLE PRECISION::q,a,x,y,z,b,c
integer :: i
open (unit=20,file="ikiboyuttavirial_iki_uc_dort.dat",action="write",status="replace")
DO q = 0.0001, 1, 0.0001
write (20,40) q
End Do
close (20)
open (unit=20,file="ikiboyuttavirial_iki_uc_dort.dat",status="old")
open (unit=10,file="ikiboyuttavirial_iki_uc_dort_.dat",action="write",status="replace")
Do i=1, 9900, 1
Read (20,*) q
x = (5*(ABS(log(q))**3) * (((q**2) + 1)**3) / (( 2**(7))* ((q-1)**6)))
y = (((ABS(log(q))**3) * ((q**2) + 1) * ((q**3)-1)) / (( 12) * ((q-1)**5)))
z = (3*(ABS(log(q))**3) * ((q**4) + 1)) / (( 2**(6)) * ((q-1)**4)))
a = x - y + z
b = ((ABS(log(q))**2) * (((q**2) + 1)**2) / (( 2**(4)) * ((q-1)**4))) -
(2*(ABS(log(q))**2) * ((q**3) - 1) / (( 3**(3)) * ((q-1)**3)))
c = ABS(log(q)) * ((q**2) + 1) / (( 2**(3)) * ((q-1)**2))
write (10,50) q,c,b,a
End do
close (10)
close (20)
40 format(F6.4)
50 format(F6.4,2(F14.6,1X),2(F14.6,1X),2(F14.6,1X))
end

```