Bazı Minkowski Geometrilerde Alan Kavramı Üzerine

Bilal Saraç

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ağustos 2016

On The Concept of Area in Some Minkowski Geometries

Bilal Saraç

MASTER

Department of Mathematics and Computer Sciences Department

August 2016

Bazı Minkowski Geometrilerde Alan Kavramı Üzerine

Bilal Saraç

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN

Ağustos 2016

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Bilal Saraç'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Bazı Minkowski Geometrilerde Alan Kavramı Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Mine TURAN

Üye : Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Temel ERMİŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Bazı Minkowski Geometrilerde Alan Kavramı Üzerine**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 09/08/2016

Bilal Saraç

ÖZET

Bu tez çalışmasında, Taksi Düzlem Geometride, Maksimum Düzlem Geometride, Çin Dama Düzlem Geometride, α-Düzlem Geometride ve m-Düzlem Geometride standart alan formülleri ile Heron formülünün benzerleri ifade edilmiştir.

Birinci bölümde, alan kavramı ve alan hesabı ile ilgili tarihsel gelişimden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, bu geometrilerle ilgili temel kavramlara değinilmiş, alan hesabının yapılmasına yardımcı olacak eşitlikler verilmiştir.

Üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci bölümlerde, hesaplanan standart alan formülleri ve Heron formülünün benzerleri sırasıyla **Taksi, Maksimum, Çin Dama,** α **ve** m-Geometrilerdeki durumlarına göre hesaplanmıştır.

Sekizinci bölümde, çalışmadan elde edilen bulgulara yer verilmiş, bundan sonra yapılabilecek çalışmalara dikkat çekilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Alan, Taksi Geometri, Maksimum Geometri, α-Geometri, Çin Dama Geometri, m-Geometri, Heron Formülü.

SUMMARY

In this thesis, similar standart area formulas used in Taxicab, Maximum, α, Chinese Checkers and m-Geometry are determined. Similar to Heron's formula is consider also. Thesis consisted of eight sections.

In the first chapter, the historical development of the concept of space and the account field is discussed.

In the second chapter, geometrics related basic concepts are explained and additional equations are given for area calculation.

Similar standart area and Heron formulas are calculated in the following chapters according to the conditions in **Taxicab, Maximum,** α**, Chinese Checker,** m-geometries.

In the last chapter, thesis findings are presented and related future studies are pointed out too.

Keywords: Area, Taxicab Geometry, Maximum Geometry, α-Geometry, Chinese Checkers Geometry, m-Geometry, Heron Formula.

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimime başladığım günden itibaren fikirleri ile bana yol gösteren, bilgi birikimini, sabrını ve ilgisini esirgemeyen, üzerimde emeği olan çok değerli danışman hocam

Doç.Dr. Özcan GELİŞGEN'e,

tüm yaşantım boyunca maddi ve manevi desteğini benden asla esirgemeyen, her kararımda arkamda olan, bugünlere gelmemde en büyük emeği veren

ANNEM ve TEYZEANNEM'e

en içten teşekkürlerimi sunarım.

ESKİŞEHİR, 2016
Bilal Saraç

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam)

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

1. GİRİŞ

Tarihte matematiksel düşünce; ölçme, borç, vergi, astronomi hesapları gibi pratik problemler için çözüm tekniklerinin geliştirilmesiyle başlamıştır. Eski Yunan'da matematiğin felsefe ile etkileşimi, matematiği genelleme ve soyutlamalara götürmüştür. Öte yandan bu genelleme ve soyutlamalar matematiğin kullanım alanını genişletmiştir. Örneğin Romalılar, arazi ölçümleri, şehir yerleşimleri, su kanalları ve savaş sanatında matematiği kullanmışlardır.

İlk geometrinin tümü, kendi doğası nedeniyle sezgiseldir. Bunlar daha çok ilk insanların çevresinde görünen doğal şekillerdir. Bu geometriler daha çok görsel türdendir. İkinci olarak şekillerin ölçülmesi aşaması gelir. Üçgenlerin ölçülmesi ilk kez Mısır'da *Ahmes*'in (İ.Ö. 1550) papirüsünde görülür. Bu papirüs 6 metre uzunluğunda ve 35 cm genişliğindedir. Matematik öğretmek gayesiyle yazılmış bir kitaptır. Giriş kısmında, kesirli sayılarla işlemleri öğretmek için verilen birkaç alıştırmadan sonra, çözümleriyle birlikte 87 soru verilmektedir. Bunlardan biri de b tabanlı ve h yükseklikli bir ikizkenar üçgenin alanının $\frac{bh}{2}$ olduğudur. Bu formül geometrik şekilden yaklaşık olarak elde edilmiştir.

Alan hesabı, Herodotos'a (M.Ö. 485-415) göre, Mısır'a hayat veren Nil deltasının %3'lük değerli kısmının her sene Nil nehrinin neden olduğu taşkınlar sonucunda toprak sahiplerinin arazilerinin hudutlarının belirsizleşmesinden dolayı ortaya çıkmıştır. Toprak sahipleri, sahip oldukları toprakla orantılı olarak vergi ödediklerinden, her taşkından sonra devletin bu işlerle görevli ”geometricileri” gelip, gerekli ölçümleri yapıp, toprak sahiplerine bir önceki yılda sahip oldukları toprak kadar toprak vermeleri gerekmekte idi. Heredot, geometrinin bu ölçüm ve hesapların sonucu olarak oluşmaya başladığını ifade etmiştir. Bu durum hakkında ikinci bir görüşte Aristo (M.Ö. 384-322) tarafından ileri sürülmüştür. Aristo'ya göre alan hesabı, Nil taşmalarının neden olduğu ölçme-hesaplama ihtiyacından değil, din adamlarının, rahiplerin can sıkıntısından ortaya çıkmıştır. O tarihlerde, Mısır gibi devletlerin tek entellektüel sınıfı rahip sınıfı idi. Bu sınıfın geçimi halk veya devlet tarafından sağlandığı için, entellektüel uğraşlara ayıracak çok zamanları olmaktaydı. Kendilerini meşgul etmek için, başkalarının satranç, briç, go gibi oyunlar icat ettikleri gibi, onlar da geometri ve aritmetiği, yani o zamanın matematiğini icat etmişlerdir. Bu her iki görüşte doğru olabilir. Rahipler geometricilerin işini kolaylaştırmak istemiş, yada dağıtımın adil yapıldığını kontrol için, üçgen, yamuk gibi bazı geometrik şekillerdeki arazilerin alanlarının nasıl hesaplanacağını bulmuş ve bu şekilde geometrinin doğmasına neden olmuş da olabilirler.

Bu soyut düşüncelerden yüzyıllar sonra M.Ö. 100 ile M.S. 100 arasında bir tarihte yaşamış olan Yunanlı matematikçi ve mühendis Heron, üçgenin alanını tam olarak veren bir formül geliştirmiştir. Heron'un formülünde, kenarları a, b, c olan bir ABC üçgeninde, çevrenin yarısı s ise alan;

$$x = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dir. Bu formülü Arşimed'in bulduğuna inananlar olsa da aslında onu bulan ve kanıtlayan İskenderiyeli Herondur. Antik çağın en büyük deneycilerinden biri olarak kabul edilen Heron, *Metrica* adlı kitabında değişik geometrik cisimlerin alanlarının bulunmasıyla ilgili formüller vermiştir. Heron'un bir düzgün çokgenin alanını, kenar uzunluğunun karesinin belli bir sabitle çarpımı olarak göstermesi çabası ve kullandığı karekök algoritmasının bir benzerinin Babilliler tarafından 2000 yıl kadar önceden biliniyor olması onun Babil etkisinde kalmışlığının ve diğer antik Yunan matematikçilerden ayrıldığının bir göstergesidir. Babilliler de düzgün bir çokgenin alanını bulmak için aynı fikri kullanmışlardır. Fakat onların kullandığı katsayılar Heron'un kullandıklarından farklıdır.

Geometrik şekillerin alan formüllerinin hesaplanması tarihsel açıdan çok eski zamanlara dayansa da Öklidyen Geometri dışında geometrilerin gelişimi günümüze daha yakın zamanda gerçekleşmiştir. Bu geometrilerden başlıcaları Taksi Geometri, Maksimum Geometri, Çin Dama Geometri, α-Geometri ve m-Geometridir. Bu geometrilerin temelini, standart Öklid uzaklığının yerine kullanılan uzaklıklar oluşturur. Bu doğrultuda çalışmanın amacı, bu geometrilerdeki farklı uzaklık ölçümlerini kullanarak bir üçgenin alanın standart alan formülü ve Heron formülü benzerlerini ortaya koyabilmek olarak belirlenmiştir.

Bu kapsamda çalışmanın ikinci bölümünde, Düzlem Taksi, Maksimum, α, Çin Dama ve m-geometrilerine ait temel kavramlar anlatılmıştır.

Çalışmanın üçüncü bölümünde Taksi düzleminde, dördüncü bölümünde Maksimum düzleminde, beşinci bölümünde Çin Dama düzleminde, altıncı bölümünde α düzleminde, yedinci bölümünde m-düzleminde bir üçgenin alanını ilgili uzaklık fonksiyonu cinsinden veren üç farklı alan formülü verilmiştir. Son bölümde ise çalışmadan elde edilen bulgulara yer verilmiş, bundan sonra yapılabilecek çalışmalardan bahsedilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Minkowski geometrilerinin tanıtıldığı ve incelendiği bir çok çalışma yapılmıştır. Bu bölüm, yapılan tez çalışmasını diğer kaynaklara başvurmadan anlaşılır kılmak amacı ile Minkowski geometrileri adına bilinen bazı kavramlar ve özellikler Kaya (2002), Özcan ve Kaya (2003), Kaya ve Çolakoğlu (2006), Krause (1975), Martin (1998), Millmann and Parker (1991), Thompson (1996), Coxeter (1961), Gelişgen (2007), Çolakoglu (2009), Salihova (2006), Gelişgen ve Ermiş (2014) ve Ermiş ve Gelişgen (2015) kaynaklarından esas alınarak özetlenmiştir.

2.1 Geometrik Yapılar Ve Minkowski Geometrisi

Thompson (1996)'da ifade edildiği gibi, Minkowski geometrisi, eliptik ve hiperbolik geometrilerden farklı, sonlu boyutlu bir Öklidyen olmayan geometridir. Ayrıca Space-time Minkowskian geometrisinden de farklıdır. Minkowski geometrisindeki lineer yapı Öklidyen geometrideki ile hemen hemen aynıdır. Noktalar ve doğrular Öklidyen geometrinin nokta ve doğrularıdır. Açı ölçümü de Öklidyen geometrideki gibi yapılmaktadır. Bu iki geometri arasında sadece tek bir fark vardır. Bu fark uzaklığın tüm yönlerde aynı olmamasıdır. Bu farklılık da kullanılan metrikle ilgili kavramları değiştirmektedir. Dolayısıyla Minkowski geometrilerinde uzaklıkla ilgili kavramların incelenmesi oldukça ilgi çekici konular ortaya çıkarmaktadır. Örneğin Öklidyen uzaydaki alışılmış kürenin yerine alınan "yeni birim küre" değişebilen bir genel simetrik konveks kümedir. Bu kümede paralellik aksiyomu geçerli olmasına rağmen, Pisagor teoremi geçerli değildir. Bu geometrilere örnek olarak Taksi geometri, Maksimum geometrisi, α-geometrisi, Çin Dama geometrisi ve m-geometrisi verilebilir.

Yukarıdaki paragrafta bahsedilen Minkowski geometrilerine geçmeden önce Öklid geometrisinin aksiyomları verilmek istenirse, aşağıda verilen onüç aksiyom antik çağda Öklid tarafından düzlemsel geometri için verilen bir aksiyomlar kümesinin çağımıza indirgenmiş son, belki de en kullanışlı şeklidir. Buna göre,

$\mathbb{P}$: noktalar kümesi,
$\mathbb{L}$: $\mathbb{P}$ nin bazı alt kümelerinin bir ailesi olan doğrular kümesi,
m : açı ölçüm fonksiyonu,
d_E : uzaklık fonksiyonu,

olmak üzere aşağıda verilen onüç aksiyomu (E1-E13) sağlayan $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ matematiksel yapısı *düzlem* olarak düşünülebilir.

[**E1**] Verilen iki noktayı içeren bir tek doğru vardır.

[**E2**] Her doğru en az iki nokta içerir. $\mathbb{P}$ kümesi doğrusal olmayan en az üç nokta içerir.

[**E1**] ve [**E2**] aksiyomları *üzerinde olma* aksiyomları olarak bilinir.

Bunları izleyen dört aksiyom uzaklık fonksiyonunun sırasıyla *pozitif tanımlılık, simetri özelliği* ve *üçgen eşitsizliğini* sağlamasıyla ilgilidir. Ayrıca *cetvel aksiyomu* denilen aksiyomu da sağlar. d_E için bu dört aksiyom aşağıdaki gibidir:

[**E3**] Her sıralı (A, B) nokta çifti için d_E negatif olmayan bir $d_E(A, B)$ sayısını belirtir. Ayrıca $d_E(A, B) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

[**E4**] $d_E(A, B) = d_E(B, A)$ dır.

[**E5**] $d_E(A, B) + d_E(B, C) \geq d_E(A, C)$ dir.

[**E6**] Verilen bir l doğrusu için bir $f_l : l \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyleki tüm A, B noktaları için;

$$|f_l(A) - f_l(B)| = d_E(A, B)$$

sağlanır.

Aşağıdaki aksiyom *düzlem ayırma aksiyomu*dur.

[**E7**] Verilen bir l doğrusu için $\mathbb{P}$ nin H_1 ve H_2 gibi yarı düzlem şeklinde adlandırılan iki alt kümesi vardır öyleki,

i) H_1 ve H_2 konvekstir

ii) $H_1 \cup H_2 = \mathbb{P} - l$ (ℙ den l nin atılmışı demektir).

iii) $A \in H_1$ ve $B \in H_2$ ise $\overleftrightarrow{AB} \cap l \neq \varnothing$

olur.

Şimdi vereceğimiz dört aksiyom *açı ölçüm aksiyomu* diye bilinmektedir:

[**E8**] $m,$ her bir açı için 0 ile 180 arasında değişen bir reel sayı ile belirtilir.

[**E9**] H yarı düzlemin kenarı üzerinde bir $\overrightarrow{AB}$ ışını ve 0 ile 180 arasında herhangi bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda $P \in H$ olmak üzere $m\angle PAB = r$ olacak şekilde bir tek $\overrightarrow{AP}$ ışını vardır.

[**E10**] Eğer D noktası $\angle ABC$ nin iç bölgesinde ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$$

olur.

[**E11**] Eğer B, A ile C arasında ve $D \notin \overleftrightarrow{AC}$ ise,

$$m\angle ABD + m\angle DBC = 180$$

olur.

Sıradaki aksiyom $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ sisteminin "*kenar-açı-kenar*" aksiyomudur.

[**E12**] İki üçgenin köşe noktaları arasında bire-bir bir eşleme verilsin. Eğer birinci üçgenin iki kenarı ve aralarındaki açı, ikinci üçgenin karşılık gelen kenarlarına ve açıya eş ise bu üçgenler eştir.

Son olarak $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d_E, m]$ sistemi için *paralellik aksiyomunu* ifade edelim:

[**E13**] l doğrusu dışında bir P noktası verilsin. Bu durumda P noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan bir tek doğru vardır.

Şimdi geometrik yapıların incelenmesinde izlenen yolu takiple, daha basit yapılı geometriler üzerinde durarak Minkowski geometrisine geçişi sağlayan bilgiler Martin (1998) ile Millmann ve Parker (1991)'den özetlenerek verilecektir.

Tanım 2.1 *$\mathbb{P}$ elemanları noktalar olan bir küme ve $\mathbb{L}$ de $\mathbb{P}$ nin boş olmayan alt kümelerinden oluşan doğrular kümesi olmak üzere aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ sistemine soyut geometri adı verilir.*
i) *Her $A, B \in \mathbb{P}$ için $A \in l$ ve $B \in l$ olacak şekilde en az bir $l \in \mathbb{L}$ doğrusu vardır.*
ii) *Her doğru en az iki noktaya sahiptir.*

Tanım 2.2 $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ *soyut geometri olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlarsa* $\mathcal{A}$ *sistemine incidence geometri denir.*
i) $\mathbb{P}$ *deki her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.*
ii) *Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.*

Buna göre bir $\mathcal{A} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ sisteminin incidence geometri olması için aşağıdaki üç aksiyomu sağlamalıdır:

i) Her doğru en az iki noktaya sahiptir.
ii) Her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.
iii) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Öklid geometrisindeki metrik yaklaşımı "A Set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protractor [1932]" çalısmasıyla Amerikalı Matematikçi George David Birkhoff'a (1884-1944) dayanır. Yukarıdaki E1 - E13 aksiyomları düzlemsel Öklid geometrisini metrik yaklaşımla düzenlemektedir. Bir incidence geometrinin metrik yaklaşımla incelenebilir olması için aşağıdaki kavramlara ihtiyaç duyulur:

Tanım 2.3 $\mathcal{X}$ *boş olmayan bir küme olmak üzere* $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlarsa* $\mathcal{X}$ *kümesi üzerinde bir metriktir denir. Her* $P, Q, R \in \mathcal{X}$ *için,*

i) $d(P,Q) \geq 0$ *ve* $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
ii) $d(P,Q) = d(Q,P)$
iii) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$.

Tanım 2.4 l, $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ *incidence geometrinin bir doğrusu olsun.* d *de* $\mathbb{P}$ *üzerinde uzaklık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanırsa* $f : l \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* l *için cetveldir denir.*
i) f *fonksiyonu* $1:1$ *ve örtendir.*
ii) l *üzerindeki her* P, Q *nokta çifti için,*

$$|f(P) - f(Q)| = d(P,Q)$$

dir. ii) şıkkındaki eşitliğe cetvel denklemi ve $f(P)$ *ye de* P *nin* f *ye bağlı koordinatı denir.*

Tanım 2.5 $[\mathbb{P}, \mathbb{L}]$ *incidence geometri olmak üzere* d *uzaklık fonksiyonu cetvel aksiyomunu sağlarsa ve her* $l \in \mathbb{L}$ *doğrusu cetvele sahipse* $\mathcal{M} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ *sistemine metrik geometri denir.*

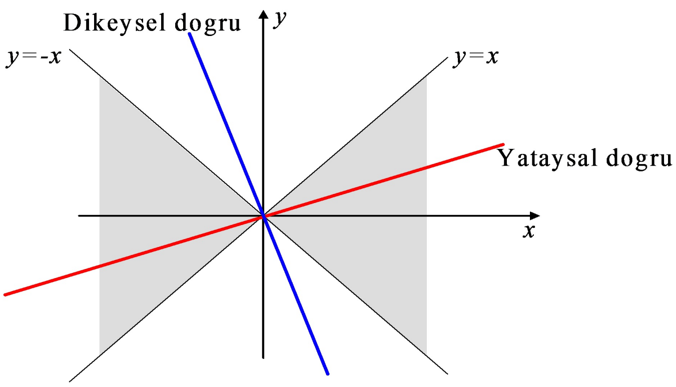
Minkowski geometrisi, $\mathbb{P}$; Öklid geometrisindeki noktalar kümesi, $\mathbb{L}$; Öklid geometrisindeki doğrular kümesi ve d; herhangi bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ metrik geometrisidir. O halde Minkowski geometrileri Öklidyen nokta ve doğrularla inşa edilen metrik geometrilerdir. Ancak açı ölçüm fonksiyonu, ilavesi ve sağladıkları aksiyomlar ile aşağıdaki tanımları verilen geometrilerle de ilişkilendirilebilirler.

Tanım 2.6 *Düzlem ayırma aksiyomunu sağlayan bir metrik geometriye bir Pasch geometrisi denir.*

Tanım 2.7 $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ *Pasch geometrisi ile birlikte* m *açı ölçüm fonksiyonu ile oluşturulan* $[\mathbb{P}, \mathbb{L}, d, m]$ *sistemine Protractor (iletki) geometri denir. Kenar-Açı-Kenar aksiyomunu sağlayan Protractor geometriye Absolute (mutlak) geometri denir.*

2.2 Analitik Düzlemde Doğruların Sınıflandırılması Ve Düzlemin Bölgelere Ayrılması

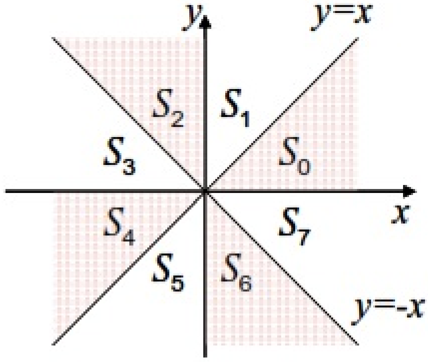
Analitik düzlemde $l \ldots ax + by + c = 0$ doğrusu verilsin. l doğrusuna, $\left|-\frac{a}{b}\right| > 1$ ise *dikeysel doğru*; $\left|-\frac{a}{b}\right| < 1$ ise *yataysal doğru*; $\left|-\frac{a}{b}\right| = 1$ ise *ayıraç doğru* denir (Krause, 1975). Bu doğrular aşağıdaki Şekil 2.1.'de gösterilmiştir.



Şekil 2.1 Doğruların Sınıflandırılması

$\mathbb{R}^2$ analitik düzlemi aşağıda belirtildiği gibi sekiz bölgeye ayırılabilir (Krause, 1975). Buna göre oluşan sekiz bölge Şekil 2.2.'de gösterilmektedir.

$$S_0 = \{(x,y)|x \geq y \geq 0\}$$
$$S_1 = \{(x,y)|y \geq x \geq 0\}$$
$$S_2 = \{(x,y)|y \geq |x| \geq 0 \ \ , \ \ x < 0\}$$
$$S_3 = \{(x,y)|\,|x| \geq y \geq 0 \ \ , \ \ x < 0\}$$
$$S_4 = \{(x,y)|x \leq y \leq 0\}$$
$$S_5 = \{(x,y)|y \leq x \leq 0\}$$
$$S_6 = \{(x,y)|\,|y| \geq x \geq 0 \ \ , \ \ y < 0\}$$
$$S_7 = \{(x,y)|x \geq |y| \geq 0 \ \ , \ \ y < 0\}$$

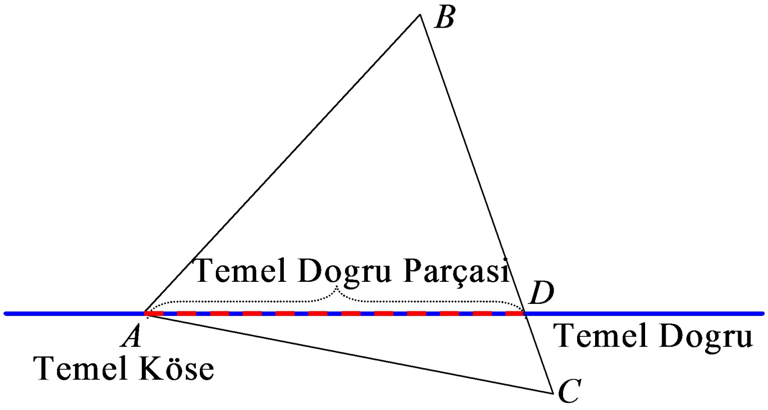


Şekil 2.2 Düzlemin Bölgelere Ayrılması

Ayrıca S_{i+1}, S_{i+2}, S_{i+3} ve S_{i+4} ifadeleri, sırasıyla, $S_{i+1(\text{mod } 8)}$, $S_{i+2(\text{mod } 8)}$, $S_{i+3(\text{mod } 8)}$ ve $S_{i+4(\text{mod } 8)}$ ifadelerini göstermektedir. Özcan ve Kaya (2003)'ten alınan aşağıdaki tanım tez boyunca sıkça kullanılacaktır.

Tanım 2.8 $\overset{\triangle}{ABC}$, $\mathbb{R}^2$ *analitik düzlemde herhangi bir üçgen olsun. Üçgenin her köşesinde koordinat eksenlerine paralel olacak şekilde bir çift doğru vardır. Bu doğrulardan geçtiği köşenin karşısındaki kenarla kesişenlere* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin temel doğrusu adı verilir. Temel doğrunun geçtiği köşeye de* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin temel köşesi denir. Temel doğru üzerinde yatan ve temel köşe ile karşısındaki kenarla sınırlı doğru parçasına da temel doğru parçası adı verilir.*

Bu tanıma göre analitik düzlemdeki herhangi bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin köşelerinden birinin daima bir veya iki temel doğruya sahip olduğu açıktır. Aşağıdaki Şekil2.3.'te herhangi bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin temel köşesi, temel doğrusu, temel doğru parçası görülmektedir.



Şekil 2.3 Temel Köşe, Temel Doğru, Temel Doğru Parçası

Tanım 2.9 *P_1 ve P_2 analitik $n-$uzayda herhangi iki nokta ve d de burada tanımlı bir uzaklık fonksiyonu olsun. Bu taktirde*

$$\{X \in \mathbb{R}^n \mid d(P_1, X) + d(P_2, X) = d(P_1, P_2)\}$$

kümesine P_1 ve P_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi denir.

Bu küme d ye bağlı olarak P_1 den P_2 ye gidilebilen yolların birleşimidir.

2.3 Düzlem Taksi Geometri

20. yüzyılın başlarında H. Minkowski Taksi metriğini de kapsayan bir metrik ailesi tanımladı. Daha sonra K. Menger analitik düzlemde herhangi iki nokta arasındaki uzaklık için iyi bilinen Öklidyen metrik yerine Taksi metriğini kullanarak Taksi düzlem geometriyi ile tanıttı (Menger, 1952). Sonralarda E. F. Krause düzlem Taksi geometrideki temel kavramları işleyen bir kitap yayınladı (Krause, 1975). Geçen yüzyıl boyunca Taksi geometri pek çok matematikçi tarafından çalışılarak çeşitli yönlerde geliştirildi. Bunlardan bazıları Akça ve Kaya (1997), Akça ve Kaya (2004a), Akça ve Kaya (2004b), Bayar ve Ekmekçi (2006), Ho ve Liu (1996), Kaya vd. (2000), Kaya (2006), Laatsch (1982), Özcan vd.(2002), Özcan ve Kaya (2002), Reynolds (1980), Schattschneider (1984), So ve Al-Maskari (1995), So (2002), Thompson ve Dray (2000) ve Tian vd. (1997) kaynaklarıdır.

Tanım 2.10 *$P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.*

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

şeklinde tanımlanan $d_T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ *fonksiyonuna analitik düzlemde* P_1 *ve* P_2 *noktaları arasındaki Taksi uzaklık fonksiyonu adı verilir.*

Taksi düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularıdır. Açı ölçümü de Öklidyen düzlemdeki aynı yolla yapılmaktadır. Analitik düzlemde alınan $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklid uzaklığı

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iken K. Menger ve E. F. Krause bu noktalar arasındaki uzaklık için H. Minkowski tarafından tanımlanan

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Taksi uzaklık fonksiyonunu kullanarak düzlemsel Taksi geometriyi geliştirmişlerdir.

Tanımda verilen Taksi uzaklık fonksiyonu analitik düzlemde bir metrik belirtir.

Önerme 2.1 *Analitik düzlemde tanımlanan Taksi uzaklık fonksiyonu bir metriktir.*

İspat *Metrik tanımı gereğince Taksi uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı ve simetrik olduğunu, ayrıca üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz.* $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *olmak üzere mutlak değer tanımından dolayı* $|x_1 - x_2| \geq 0$ *ve* $|y_1 - y_2| \geq 0$ *olduğundan* $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$ *olup* $d_T(P_1, P_2) \geq 0$ *dır. Ayrıca*

$$d_T(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$$

olduğundan $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ *elde edilir. Yani* $x_1 = x_2$ *ve* $y_1 = y_2$ *olup* $P_1 = P_2$ *dir. Açıkca* $P_1 = P_2$ *ise* $d_T(P_1, P_2) = 0$ *dır. O halde* $d_T(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ *dir. Yani* d_T*-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.*

Mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ *ve* $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ *olduğundan* $d_T(P_1, P_2) = d_T(P_2, P_1)$ *dir. Bu nedenle* d_T*-uzaklık fonksiyonu simetriktir.*

$P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ *olsun. Mutlak değer özelliği gereğince*

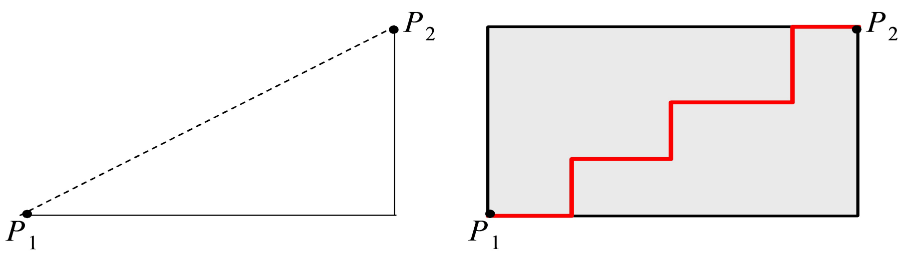
$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \\ |y_1 - y_2| &\leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} d_T(P_1,P_2) &= |x_1-x_2|+|y_1-y_2| \\ &\leq |x_1-x_3|+|x_3-x_2|+|y_1-y_3|+|y_3-y_2| \\ &= (|x_1-x_3|+|y_1-y_3|)+(|x_3-x_2|+|y_3-y_2|) \\ &= d_T(P_1,P_3)+d_T(P_3,P_2) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bir başka deyişle Taksi uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. Buna göre analitik düzlemde tanımlanan Taksi uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığından d_T, $\mathbb{R}^2$ de bir metriktir.

Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki Taksi yolu Şekil 2.4.'te görüldüğü üzere her biri bir koordinat eksenine paralel olan iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki taksi uzaklık ifade edilen şekildeki iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. P_1 den P_2 ye gitmek için Şekil 2.4.'teki yollar izlenebilir.



Şekil 2.4 Taksi Uzaklıklar

Yardımcı Teorem 2.1 *Analitik düzlemde farklı $P_1 = (x_1,y_1)$ ve $P_2 = (x_2,y_2)$ noktalarından geçen doğru l olsun ve d_E ile Öklidyen metrik gösterilsin. m, l doğrusunun eğimi ise*

$$d_T(P_1,P_2) = \frac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}} d_E(P_1,P_2)$$

dir (Kaya, 2006).

İspat *$P_1 = (x_1,y_1)$ ve $P_2 = (x_2,y_2)$ analitik düzlemde farklı herhangi iki nokta olmak üzere $d_T(P_1,P_2) = \lambda d_E(P_1,P_2)$ olacak şekilde bir λ parametresi vardır. Ayrıca P_1 ve P_2*

noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = (y_1 - y_2) \diagup (x_1 - x_2)$ *dir.*

$$d_T(P_1, P_2) = \lambda d_E(P_1, P_2)$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = \lambda(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2})$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

olup $P_1 \neq P_2$ *olduğundan* $x_1 - x_2$ *veya* $y_1 - y_2$ *den en az biri sıfırdan farklıdır. Buna göre,*

$$d_T(P_1, P_2) = \lambda d_E(P_1, P_2) \Rightarrow \lambda = \frac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan ise

$$d_T(P_1, P_2) = \frac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}} d_E(P_1, P_2)$$

olarak verilebilir. Burada eğer $x_1 = x_2$ *veya* $y_1 = y_2$ *ise* $d_T(P_1, P_2) = d_E(P_1, P_2)$ *olduğu açıktır. Yani* P_1 *ile* P_2 *noktaları yatay veya dikey bir doğru üzerinde iken Taksi ve Öklidyen uzaklıklar birbirine eşittir.*

Bu yardımcı teoreme göre herhangi bir doğru boyunca olan Taksi uzaklığı, aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığının sabit bir pozitif katıdır. Bu yardımcı teorem kullanılarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır (Gelişgen, 2007).

Sonuç 2.1 P_1, P_2 *ve* X *analitik düzlemde herhangi doğrudaş farklı üç nokta olsun. Bu taktirde* $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ *olması için gerek ve yeter koşul* $d_T(P_1, X) = d_T(P_2, X)$ *olmasıdır.*

İspat P_1, P_2 *ve* X *analitik düzlemde doğrudaş olan farklı üç nokta olsun. Yardımcı Teorem 2.1'den dolayı* $\lambda = \dfrac{1 + |m|}{\sqrt{1 + m^2}}$ *olmak üzere;*

$$\begin{aligned} d_T(P_1, X) &= \lambda d_E(P_1, X) \\ d_T(P_2, X) &= \lambda d_E(P_2, X) \end{aligned}$$

dir. $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ *ise;*

$$d_T(P_1, X) = \lambda d_E(P_1, X) = \lambda d_E(P_2, X) = d_T(P_2, X)$$

dir. Eğer $d_T(P_1, X) = d_T(P_2, X)$ *ise;*

$$d_E(P_1, X) = \frac{1}{\lambda} d_T(P_1, X) = \frac{1}{\lambda} d_T(P_2, X) = d_E(P_2, X)$$

olur.

Sonuç 2.2 *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi farklı ve doğrudaş olan üç nokta olsun. Bu taktirde*

$$\frac{d_T(P_1,X)}{d_T(P_2,X)} = \frac{d_E(P_1,X)}{d_E(P_2,X)}$$

dir. Bir başka deyişle aynı doğru boyunca Öklidyen ve Taksi uzaklıklarının oranı aynıdır.

İspat *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde farklı ve doğrudaş olan üç nokta olsun. Yardımcı Teorem 2.1'den dolayı $\lambda = \dfrac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}}$ olmak üzere;*

$$\begin{aligned} d_T(P_1,X) &= \lambda d_E(P_1,X) \\ d_T(P_2,X) &= \lambda d_E(P_2,X) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\frac{d_T(P_1,X)}{d_T(P_2,X)} = \frac{\lambda d_E(P_1,X)}{\lambda d_E(P_2,X)} = \frac{d_E(P_1,X)}{d_E(P_2,X)}$$

olur.

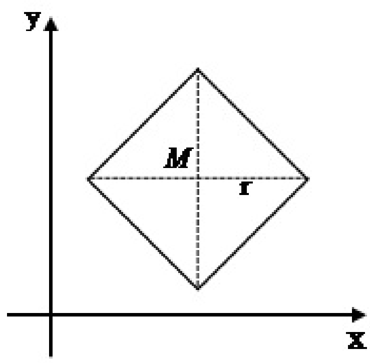
Tanım 2.11 *Taksi düzleminde sabit bir noktadan sabit bir Taksi uzaklıktaki noktaların geometrik yerine Taksi Çemberi denir. Sabit noktaya Taksi çemberinin merkezi, sabit taksi uzaklığa da çemberin yarıçapı adı verilir.*

Analitik düzlemde $M = (m_1, m_2)$ noktasına, r taksi uzaklığında bulunan tüm noktalar

$$\text{T} = \{X = (x,y) : d_T(M,X) = r\}$$

$$\text{T} = \{X = (x,y) : |x - m_1| + |y - m_2| = r\}$$

kümesini oluşturur. Buna göre T kümesinin belirttiği M merkezli, r yarıçaplı Taksi çemberi Şekil 2.5.'te gösterilmiştir (Gelişgen, 2007).



Şekil 2.5 M Merkezli r Yarıçaplı Taksi Çemberi

Geometrik araştırmalardaki temel problemlerden biri d metriği ile donatılmış olarak verilen bir S uzayının G izometriler grubunu tespit etmektir. Eğer S alışılmış metrikle verilmiş Öklid düzlemi ise G izometriler grubunun düzlemin tüm ötelemeler, dönmeler, yansımalar ve kayma-yansımalarından oluştuğu bilinmektedir. Öklidyen düzlem için iyi bilinmektedir ki, $G = E(2)$, kendisinin iki altgrubu olan $O(2)$ ortagonal grup ve $T(2)$ ötelemeler grubunun yarı direkt çarpımıdır. Burada $O(2)$ birim çemberin simetriler grubu ve $T(2)$ ise düzlemdeki tüm ötelemelerden oluşan gruptur.

Taksi düzleminin izometrileri için aşağıdaki önermeler Schattschneider (1984)'ten verilebilir.

Önerme 2.2 *Tüm Öklidyen ötelemeler $\mathbb{R}^2_T$ nin bir izometrisidir.*

Önerme 2.3 *Taksi düzleminde $y = mx$ doğrusuna ilişkin bir yansımanın bir izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$m \in \{0, \ \pm 1, \ \infty\}$$

olmasıdır.

Önerme 2.4 *Taksi düzleminde d_T-uzaklığını koruyan sadece dört tane Öklidyen dönme vardır. Bir başka deyişle Taksi düzleminde izometrik dönmelerin kümesi*

$$R_T = \left\{ r_\theta \mid \theta = k\frac{\pi}{2} \ , \ k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

dir.

Bu önermeler yardımıyla Taksi düzleminin izometriler grubunun $D(4)$ dihedral grubu ile $T(2)$ ötelemeler grubunun yarı direkt çarpımı olduğu Schattschneider (1984)'ten söylenebilir. Buradaki $D(4)$ dihedral grup Öklidyen karenin simetriler grubu ve $T(2)$ ise düzlemdeki tüm ötelemelerden oluşan gruptur.

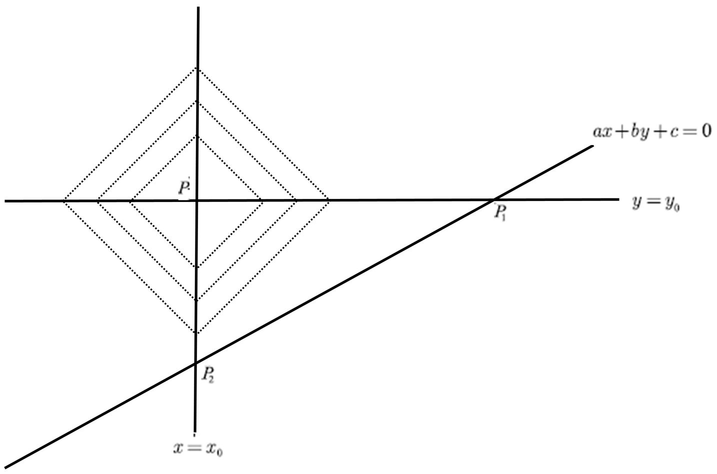
Önerme 2.5 *Taksi düzleminde verilen bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının bir $l : ax + by + c = 0$ doğrusuna taksi uzaklığı*

$$d_T(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|\}}$$

eşitliği ile hesaplanabilir(Kaya vd., 2000).

İspat *Eğer P noktası l doğrusunun üzerinde ise bu ifadenin doğru olduğu açıktır.*

Eğer P noktası l doğrusunun üzerinde değil ise, o zaman P noktasının l doğrusuna en yakın taksi uzaklığını bulmak için P merkezli ve sıfır yarıçaplı taksi çemberini l doğrusuna teğet olana kadar genişletiriz. Bu sayede kolaylıkla görülebilir ki bir doğru, bir taksi çemberinin sadece bir köşesine ya da iki köşesinin birleşimi olan doğrusuna teğet olabilir.



Şekil 2.6 Genişleyen Taksi Çemberi

Genişleyen taksi çemberinin köşeleri P noktasından geçen ve $y = x$ ya da $y = -x$ doğrularına paralel doğrular üzerinde olduğu için

$$P_1 = (\tfrac{-c-by_0}{a}, y_0) \quad veya \quad P_2 = (x_0, \tfrac{-c-ax_0}{b})$$

den biri teğet noktadır. Bu sebepten

$$d_T(P,l) = \min\{d_T(P,P_i) : i = 1,2\}$$

olup

$$d_T(P,P_1) = \tfrac{|ax_0+by_0+c|}{|a|} \quad ve \quad d_T(P,P_2) = \tfrac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}$$

dir. Dolayısıyla

$$d_T(P,l) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\max\{|a|\,,|b|\}}$$

olarak bulunur.

Önerme 2.6 *Analitik düzlemde* l *dikey olmayan bir doğru ve bir* P *noktası verilsin. Eğer* l *doğrusunun eğimi* m *ise, o zaman*

$$d_T(P,l) = d_E(P,l)(1+m^2)^{\frac{1}{2}}/\max\{1,|m|\}$$

dir (Kaya, 2006).

İspat *Eğer* l *doğrusu yatay ya da dikey bir doğru değil ise, o zaman* $b \neq 0$ *ve* $m = -\frac{a}{b}$ *dir. Bu eşitlik yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa*

$$d_T(P,l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b| \max\{1,|m|\}}$$

ve

$$d_E(P,l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b| \, (m^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

olduğu için

$$\tau(m) = (1+m^2)^{\frac{1}{2}}/\max\{1,|m|\}$$

olarak bulunur.

Eğer l *doğrusu yatay ya da dikey bir doğru ise*

$$d_T(P,l) = d_E(P,l)$$

olduğu açıktır.

2.4 Düzlem Maksimum Geometri

Düzlem Maksimum geometri incelenirken Kaya vd. (2006), Turan ve Özcan (2004), Turan ve Özcan (2005), Salihova (2006) ve Ermiş ve Gelişgen (2015) kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.12 $P_1 = (x_1, y_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2)$ *analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.*

$$d_M(P_1,P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlanan $d_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ *fonksiyonuna analitik düzlemde* P_1 *ve* P_2 *noktaları arasındaki Maksimum uzaklık fonksiyonu adı verilir.*

Maksimum düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularıdır. Açı ölçümü de Öklid düzlemindeki gibi yapılmaktadır. Analitik düzlemde alınan $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklid uzaklığı

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iken bu noktalar arasındaki uzaklık için yukarıdaki tanımda verilen

$$d_M(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

Maksimum uzaklık fonksiyonunu kullanarak düzlem maksimum geometrisi oluşturulur.

Önerme 2.7 *Analitik düzlemde tanımlanan Maksimum uzaklık fonksiyonu bir metriktir.*

İspat *Metrik tanımı gereğince, Maksimum uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı ve simetrik olduğunu, ayrıca üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz.* $P_1 = (x_1, y_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *olmak üzere mutlak değer tanımından dolayı* $|x_1 - x_2| \geq 0$, $|y_1 - y_2| \geq 0$ *olduğundan* $d_M(P_1, P_2) \geq 0$ *dır. Ayrıca*

$$d_M(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$$

olduğundan $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ *elde edilir. Yani* $x_1 = x_2$ *ve* $y_1 = y_2$ *olup* $P_1 = P_2$ *dir. Açıkca* $P_1 = P_2$ *ise* $d_M(P_1, P_2) = 0$ *dır. Bu taktirde* $d_M(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ *dir. Yani* d_M*-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.*

Mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ *ve* $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ *olduğundan* $d_M(P_1, P_2) = d_M(P_2, P_1)$ *dir. Bu nedenle* d_M*-uzaklık fonksiyonu simetriktir.*

$P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_M(P_1, P_2) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|\} \\ &\leq \max\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|\} \\ &= k \end{aligned}$$

olsun. Burada dört durum vardır.

I. Durum: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ *ve* $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu taktirde*

$$\begin{aligned} d_M(P_1, P_2) &\leq k = (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= d_M(P_1, P_3) + d_M(P_3, P_2) \end{aligned}$$

olur.

II. Durum: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ *ve* $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ *olsun. Burada iki altdurum söz konusudur.*

Alt Durum II.1*:* $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d_M(P_1, P_2) &\leq k = |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \\ &= d_M(P_1, P_3) + d_M(P_3, P_2) \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$d_M(P_1, P_2) \leq d_M(P_1, P_3) + d_M(P_3, P_2)$$

olur.

Alt Durum II.2: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d_M(P_1, P_2) &\leq k = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= d_M(P_1, P_3) + d_M(P_3, P_2) \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$d_M(P_1, P_2) \leq d_M(P_1, P_3) + d_M(P_3, P_2)$$

dir.

III. Durum: $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ *ve* $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ *olsun. Burada II. duruma benzer olarak iki altdurum söz konusudur.*

Altdurum III.1*:* $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d_M(P_1, P_2) &\leq k = (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= d_M(P_1, P_3) + d_M(P_3, P_2) \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$d_M(P_1, P_2) \leq d_M(P_1, P_3) + d_M(P_3, P_2)$$

olur.

Alt Durum III.2: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d_M(P_1, P_2) &\leq k = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= d_M(P_1, P_3) + d_M(P_3, P_2) \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$d_M(P_1,P_2) \leq d_M(P_1,P_3) + d_M(P_3,P_2)$$

dir.

IV. Durum: *$|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ ve $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ olsun. Bu taktirde*

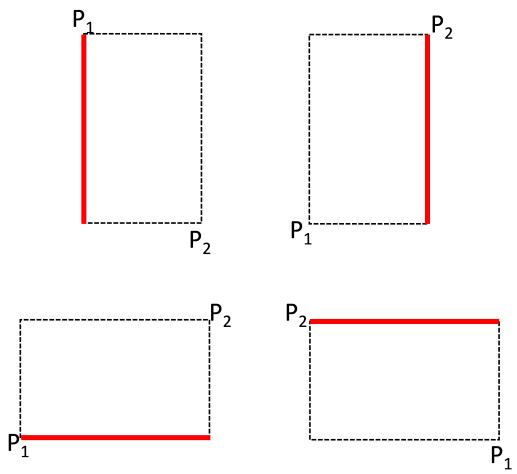
$$\begin{aligned} d_M(P_1,P_2) &\leq k = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= d_M(P_1,P_3) + d_M(P_3,P_2) \end{aligned}$$

olur. Tüm durumların sonuçları birleştirildiğinde her P_1, P_2, $P_3 \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_M(P_1,P_2) \leq d_M(P_1,P_3) + d_M(P_3,P_2)$$

sonucu elde edilir. Yani Maksimum uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. Buna göre analitik düzlemde tanımlanan Maksimum uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığından $\mathbb{R}^2$ de bir metriktir.

Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki Maksimum yolu Şekil 2.7.'de görüldüğü gibi koordinat eksenlerinden birine paralel doğru parçasıdır. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki Maksimum uzaklık ifade edilen şekildeki doğru parçasının Öklidyen uzunluğudur.



Şekil 2.7 Maksimum Uzaklıklar

Yardımcı Teorem 2.2 *Analitik düzlemde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan herhangi iki nokta $P_1 = (x_1,y_1)$, $P_2 = (x_2,y_2)$ ve bu noktalardan geçen doğru l olsun. Eğer bu* *noktalardan geçen l doğrusunun eğimi m ise*

$$\rho(m) = \begin{cases} 1/\sqrt{1+m^2} & , \quad |m| < 1 \textit{ ise} \\ \\ |m|/\sqrt{1+m^2} & , \quad |m| \geq 1 \textit{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$d_M(P_1, P_2) = \rho(m) d_E(P_1, P_2)$$

dir. Eğer bu noktalardan geçen l doğrusu dikey bir doğru ise

$$d_E(P_1, P_2) = d_M(P_1, P_2)$$

dir (Salihova, 2006).

İspat *$P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olmak üzere $d_M(P_1, P_2) = \rho(m) d_E(P_1, P_2)$ olacak şekilde bir $\rho(m)$ parametresi vardır. Ayrıca P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = (y_1 - y_2) \diagup (x_1 - x_2)$ dir. Eğer l dikey bir doğru değil ise,*

$$d_M(P_1, P_2) = \rho(m) d_E(P_1, P_2)$$

$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = \rho(m)\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\rho(m) = \frac{\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

olup l doğrusunun eğimi $m = (y_1 - y_2) \diagup (x_1 - x_2)$ olduğu için,

$$\rho(m) = \frac{\max\{1, |m|\}}{\sqrt{1+m^2}}$$

olarak elde edilir. Buradan maksimum fonksiyonunun yardımıyla,

$$\rho(m) = \begin{cases} 1/\sqrt{1+m^2} & , \quad |m| < 1 \textit{ ise} \\ \\ |m|/\sqrt{1+m^2} & , \quad |m| \geq 1 \textit{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak,

$$d_M(P_1, P_2) = \rho(m) d_E(P_1, P_2)$$

eşitliğine ulaşılır.

Eğer l dikey bir doğru ise $x_1 = x_2$ olup $d_M(P_1, P_2) = d_E(P_1, P_2)$ olduğu açıktır. Yani P_1 ile P_2 noktaları dikey bir doğru üzerinde iken Öklidyen ve Maksimum uzaklıklar birbirine eşittir.

Sonuç 2.3 *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi doğrudaş farklı üç nokta olsun. Bu taktirde $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ olması için gerek ve yeter koşul $d_M(P_1, X) = d_M(P_2, X)$ olmasıdır.*

İspat *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde doğrudaş olan üç nokta olsun. Yardımcı Teorem 2.2'den dolayı $\rho(m) = \dfrac{\max\{1, |m|\}}{\sqrt{1+m^2}}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_M(P_1, X) &= \rho(m) d_E(P_1, X) \\ d_M(P_2, X) &= \rho(m) d_E(P_2, X) \end{aligned}$$

dir. Eğer $d_M(P_1, X) = d_M(P_2, X)$ ise

$$d_E(P_1, X) = \frac{1}{\rho(m)} d_M(P_1, X) = \frac{1}{\rho(m)} d_M(P_2, X) = d_E(P_2, X)$$

dir. Eğer $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ ise

$$d_M(P_1, X) = \rho(m) d_E(P_1, X) = \rho(m) d_E(P_2, X) = d_M(P_2, X)$$

olur.

Sonuç 2.4 *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi doğrudaş üç farklı nokta olsun. Bu taktirde*

$$\frac{d_M(P_1, X)}{d_M(P_2, X)} = \frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)}$$

dir. Bir başka deyişle aynı doğru boyunca Öklidyen ve Maksimum uzaklıklarının oranı aynıdır.

İspat *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde farklı ve doğrudaş olan üç nokta olsun. Yardımcı Teorem 2.2'den dolayı $\rho(m) = \dfrac{\max\{1, |m|\}}{\sqrt{1+m^2}}$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} d_M(P_1, X) &= \rho(m) d_E(P_1, X) \\ d_M(P_2, X) &= \rho(m) d_E(P_2, X) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\frac{d_M(P_1, X)}{d_M(P_2, X)} = \frac{\rho(m) d_E(P_1, X)}{\rho(m) d_E(P_2, X)} = \frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)}$$

olur.

Tanım 2.13 *Maksimum düzlemde sabit bir noktadan sabit bir Maksimum uzaklıktaki noktaların geometrik yerine Maksimum çemberi denir. Sabit noktaya Maksimum çemberinin merkezi, sabit Maksimum uzaklığa da çemberin yarıçapı adı verilir.*

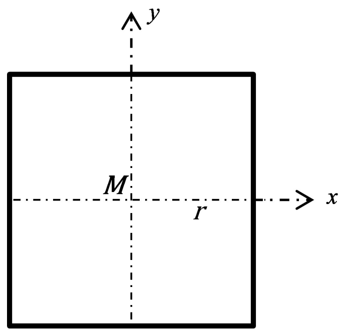
Analitik düzlemde $M = (m_1, m_2)$ noktasına, r Maksimum uzaklığında bulunan bütün noktalar

$$B = \{X = (x, y) : d_M(M, X) = r\}$$

yani

$$B = \{X = (x, y) : \max\{|x - m_1|, |y - m_2|\} = r\}$$

kümesini oluşturur. M merkezli, r yarıçaplı Maksimum çemberidir ve Şekil 2.8.'de gösterilmiştir (Salihova, 2006).



Şekil 2.8 M Merkezli r Yarıçaplı Maksimum Çemberi

Maksimum düzleminin izometrileri için aşağıdaki önermeler Salihova (2006)'dan verilebilir.

Önerme 2.8 *Tüm Öklidyen ötelemeler $\mathbb{R}^2_M$ nin bir izometrisidir.*

Önerme 2.9 *Maksimum düzleminde $y = mx$ doğrusuna ilişkin bir yansımanın bir izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$m \in \{0, \ \pm 1, \ \infty\}$$

olmasıdır.

Önerme 2.10 *Maksimum düzleminde d_M-uzaklığını koruyan sadece dört tane Öklidyen dönme vardır. Bir başka deyişle Maksimum düzlemde izometrik dönmelerin kümesi*

$$R_M = \left\{ r_\theta \mid \theta = k\frac{\pi}{2}, \ k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

dir.

Bu önermeler yardımıyla Maksimum düzlemin izometriler grubunun $D\,(4)$ dihedral grubu ile $T\,(2)$ ötelemeler grubunun yarı direkt çarpımı olduğu Salihova (2006)'da gösterilmiştir. Buradaki $D\,(4)$ dihedral grup Öklidyen karenin simetriler grubu ve $T\,(2)$ ise düzlemdeki tüm ötelemelerden oluşan gruptur.

Yardımcı Teorem 2.3 *Herhangibir $m \neq 0$ reel sayısı için $\rho(m) = \rho(-m) = \rho(1/m) = \rho(-1/m)$ dir.*

İspat *Önerme 2.8, Önerme 2.9 ve Önerme 2.10'da sırasıyla, iki nokta arasındaki maksimum uzaklığının düzlemdeki tüm ötelemeler, bir nokta etrafındaki $\pi/2$, π ve $3\pi/2$ radyanlık dönmeler ve $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ ve $y = -x$ doğrularına paralel doğrular etrafındaki yansımalarda değişmez kaldığı ifade edilmişti. Bu önermeler gereği iki nokta arasındaki maksimum uzaklığı değişmez kaldığından $\rho(m) = \rho(-m) = \rho(1/m) = \rho(-1/m)$ olur.*

Yardımcı Teorem 2.4 *Bir dik üçgenin hipotenüsü üzerinde bulunan ve her iki dik kenara eşit uzaklıkta olan bir tek nokta vardır. Üstelik, bu uzaklık u, dik kenarların uzunlukları a ve b ise*

$$u = ab/(a+b)$$

dir (Salihova, 2006).

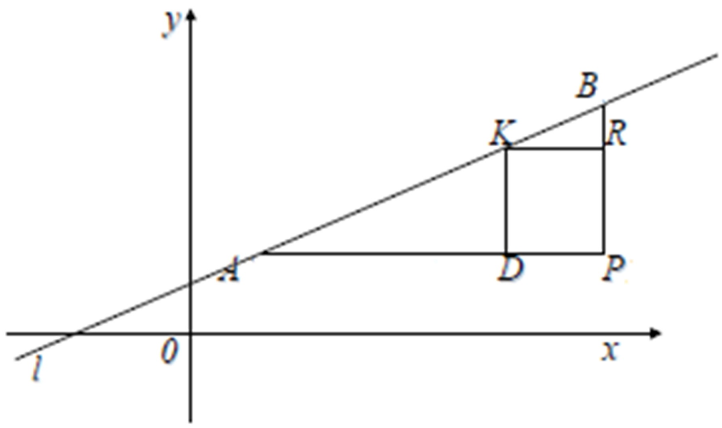
Bu eşitlik yardımıyla $\mathbb{R}^2_M$ de bir noktanın bir doğruya Maksimum uzaklığını aşağıdaki formül ile hesaplayabiliriz.

Önerme 2.11 *Maksimum düzleminde verilen bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının bir $l : ax+by+c = 0$ doğrusuna Maksimum uzaklığı*

$$d_M(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a| + |b|}$$

eşitliği ile hesaplanabilir (Salihova, 2006).

İspat *Bir noktanın bir doğruya olan uzaklığı demek, bu nokta ile doğrunun bu noktaya en yakın noktası arasındaki uzaklık demektir. Yardımcı Teorem 2.3'e göre böyle bir nokta vardır. Bu durumda l doğrusunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ dir. Verilen nokta ve doğrunun konumuna göre 4 durum söz konusu olabilir.*



Şekil 2.9 Maksimum Düzlemde Verilen Bir Noktanın, Bir Doğruya Maksimum Uzaklığı

I. Durum: *Şekil 2.9.'da verilen* l *doğrusunun eğimi* $m = -\frac{a}{b}$*,* $a > 0$*,* $b < 0$ *ve* $P = (x_0, y_0)$ *noktası* l *doğrusunun alt bölgesinde olsun.* $A(-\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a}, y_0)$ *ve* $B(x_0, -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b})$ *olmak üzere* l *doğrusu üzerinde iki nokta alalım.* $|AP| = (x_0 + \frac{b}{a}y_0 + \frac{c}{a})$, $|PB| = (-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0)$ *dır.*

$d_M(P, K) = |DP| = |PR| = |KD| = u$ *olsun.* $d_M(P, l) = u$ *olduğundan* u*'nun değeri*

$$u = |AP|\,|PB|\,/(|AP| + |PB|)$$

dir. $|AP| = (x_0 + \frac{b}{a}y_0 + \frac{c}{a})$, $|PB| = (-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0)$ *olup*

$$\begin{aligned} u &= (x_0 + \tfrac{b}{a}y_0 + \tfrac{c}{a})(-\tfrac{a}{b}x_0 - \tfrac{c}{b} - y_0)/((x_0 + \tfrac{b}{a}y_0 + \tfrac{c}{a}) + (-\tfrac{a}{b}x_0 - \tfrac{c}{b} - y_0)) \\ &= \tfrac{1}{ab}(ax_0 + by_0 + c)(-ax_0 - by_0 - c)/(\tfrac{1}{a}(ax_0 + by_0 + c) - \tfrac{1}{b}(ax_0 + by_0 + c)) \\ &= -\tfrac{1}{ab}(ax_0 + by_0 + c)^2/(\tfrac{1}{a} - \tfrac{1}{b})(ax_0 + by_0 + c) \\ &= (ax_0 + by_0 + c)/(a - b) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$u = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a - b}$$

olarak elde edilir.

II. Durum: l *doğrusunun eğimi* $m = -\frac{a}{b}$*,* $a > 0$*,* $b < 0$ *ve* $P = (x_0, y_0)$ *noktası* l *doğrusunun üst bölgesinde olsun.* A *ve* B *noktaları I.Durumda olduğu gibi doğru üzerindeki*

$A(-\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a}, y_0)$ ve $B(x_0, -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b})$ koordinatlı noktalardır. $|AP| = (-x_0 - \frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a})$ ve $|PB| = (\frac{a}{b}x_0 + \frac{c}{b} + y_0)$ olduğundan benzer şekilde

$$u = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{-a + b}$$

olarak elde edilir.

III. Durum: *l doğrusunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$, $a > 0$, $b > 0$ ve $P = (x_0, y_0)$ noktası l doğrusunun alt bölgesinde olsun. Bu durumda $|AP| = (-x_0 - \frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a})$ ve $|PB| = (-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0)$ dir. Benzer şekilde*

$$u = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{-a - b}$$

olarak elde edilir.

IV. Durum: *l doğrusunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$, $a > 0$, $b > 0$ ve $P = (x_0, y_0)$ noktası l doğrusunun üst bölgesinde olsun. Bu durumda $|AP| = (x_0 + \frac{b}{a}y_0 + \frac{c}{a})$ ve $|PB| = (\frac{a}{b}x_0 + \frac{c}{b} + y_0)$ dir. Benzer şekilde*

$$u = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a + b}$$

olarak elde edilir. Yukarıda elde edilen (i), (ii), (iii), (iv) durumlarını birleştirirsek,

$$u = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a| + |b|}$$

eşitliğini elde ederiz. $d_M(P, l) = u$ olarak alınmıştı. O halde $P = (x_0, y_0)$ noktasının $l : ax + by + c = 0$ doğrusuna Maksimum uzaklığı

$$d_M(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a| + |b|}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} a = b \quad & iken \quad d_M(P, l) = |ax_0 + ay_0 + c| \,/(2\,|a|) \\ a = 0 \quad & iken \quad d_M(P, l) = |by_0 + c| \,/\, |b| \\ b = 0 \quad & iken \quad d_M(P, l) = |ax_0 + c| \,/\, |a| \end{aligned}$$

olur.

Önerme 2.12 *Analitik düzlemde dikey olmayan bir l doğrusu ve bir P noktası verilsin. Eğer l doğrusunun eğimi m ise, o zaman*

$$\tau(m) = (1 + m^2)^{\frac{1}{2}}/(1 + |m|)$$

olmak üzere,

$$d_M(P, l) = \tau(m) d_E(P, l)$$

dir.

İspat *Eğer l doğrusu dikey bir doğru değil ise, o zaman $b \neq 0$ ve $m = -\frac{a}{b}$ dir. Bu eşitlik yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa*

$$d_M(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|\,(1 + |m|)}$$

ve

$$d_E(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|\,(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

olduğu için

$$\tau(m) = (1 + m^2)^{\frac{1}{2}}/(1 + |m|)$$

olarak bulunur.

Eğer l doğrusu dikey bir doğru ise

$$d_M(P, l) = d_E(P, l)$$

olduğu açıktır.

2.5 Düzlem Çin Dama Geometri

E.F. Krause, kitabında Çin Dama oyununda yapılan hareketi taklit eden bir metriğin nasıl oluşturulabileceği sorusunu ortaya attı (Krause, 1975). Bu sorunun cevabını da G. Chen verdi (Chen, 1992). Aradan geçen süreç boyunca Çin Dama geometrisi pek çok matematikçi tarafından çalışılarak çeşitli yönlerde geliştirildi. Bu çalışmalardan bazıları Kaya vd. (2006), Turan ve Özcan (2004) Turan ve Özcan (2005), Turan (2004), Uymaz (2002) ve Gelişgen (2007)'dir.

Tanım 2.14 $P_1 = (x_1, y_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2)$ *analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.*

$$d_c\,(P_1, P_2) = \max\left\{|x_1 - x_2|\,,|y_1 - y_2|\right\} + \left(\sqrt{2} - 1\right)\min\left\{|x_1 - x_2|\,,|y_1 - y_2|\right\}$$

şeklinde tanımlanan $d_c : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Çin Dama uzaklık fonksiyonu adı verilir.

Çin Dama (CC) düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularıdır. Açı ölçümü de Öklidyen düzlemdeki aynı yolla yapılmaktadır. Analitik düzlemde alınan $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklid uzaklığı

$$d_E\,(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iken bu noktalar arasındaki uzaklık için yukarıdaki tanımda verilen

$$d_c\left(P_1, P_2\right) = \max\left\{\left|x_1 - x_2\right|, \left|y_1 - y_2\right|\right\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\left\{\left|x_1 - x_2\right|, \left|y_1 - y_2\right|\right\}$$

Çin Dama uzaklık fonksiyonunu kullanarak düzlem Çin Dama geometrisi oluşturulur (Gelişgen, 2007).

Önerme 2.13 *Analitik düzlemde tanımlanan Çin Dama uzaklık fonksiyonu bir metriktir.*

İspat *Metrik tanımı gereğince Çin Dama uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı ve simetrik olduğunu, ayrıca üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz.* $P_1 = (x_1, y_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *olmak üzere mutlak değer tanımından dolayı* $|x_1 - x_2| \geq 0$, $|y_1 - y_2| \geq 0$ *ve* $\sqrt{2} - 1 \geq 0$ *olduğundan* $d_c\left(P_1, P_2\right) \geq 0$ *dır. Ayrıca*

$$d_c(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow \max\left\{\left|x_1 - x_2\right|, \left|y_1 - y_2\right|\right\} = 0$$

olduğundan $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ *elde edilir. Yani* $x_1 = x_2$ *ve* $y_1 = y_2$ *olup* $P_1 = P_2$ *dir. Açıkca* $P_1 = P_2$ *ise* $d_c(P_1, P_2) = 0$ *dır. Bu taktirde* $d_c(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ *dir. Yani* d_c*-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.*

Mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ *ve* $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ *olduğundan* $d_c(P_1, P_2) = d_c(P_2, P_1)$ *dir. Bu nedenle* d_c*-uzaklık fonksiyonu simetriktir.*

$P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}
d_c(P_1, P_2) &= \max\left\{\left|x_1 - x_2\right|, \left|y_1 - y_2\right|\right\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\left\{\left|x_1 - x_2\right|, \left|y_1 - y_2\right|\right\} \\
&= \max\left\{\left|x_1 - x_3 + x_3 - x_2\right|, \left|y_1 - y_3 + y_3 - y_2\right|\right\} + \\
&\qquad \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\left\{\left|x_1 - x_3 + x_3 - x_2\right|, \left|y_1 - y_3 + y_3 - y_2\right|\right\} \\
&\leq \max\left\{\left|x_1 - x_3\right| + \left|x_3 - x_2\right|, \left|y_1 - y_3\right| + \left|y_3 - y_2\right|\right\} + \\
&\qquad \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\left\{\left|x_1 - x_3\right| + \left|x_3 - x_2\right|, \left|y_1 - y_3\right| + \left|y_3 - y_2\right|\right\} \\
&= k
\end{aligned}$$

olsun. Burada dört durum vardır.

I. Durum: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ *ve* $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu taktirde*

$$\begin{aligned}
d_c(P_1, P_2) &\leq k = \left(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|\right) + \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|\right) \\
&= \left(|x_1 - x_3| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|y_1 - y_3|\right) + \left(|x_3 - x_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|y_3 - y_2|\right) \\
&= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)
\end{aligned}$$

olur.

II. Durum: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ *ve* $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ *olsun. Burada iki altdurum söz konusudur.*

Alt Durum II.1*:* $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq k = (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + \left(\sqrt{2} - 1\right)(|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= \left(|x_1 - x_3| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|y_1 - y_3|\right) + \left(|x_3 - x_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|y_3 - y_2|\right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) - (2 - \sqrt{2})(|y_3 - y_2| - |x_3 - x_2|) \end{aligned}$$

olup burada $2 - \sqrt{2} > 0$ *ve* $|y_3 - y_2| - |x_3 - x_2| \geq 0$ *olduğundan dolayı*

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

olur.

Alt Durum II.2: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq k = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) + \left(\sqrt{2} - 1\right)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= \left(|y_1 - y_3| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|x_1 - x_3|\right) + \left(|y_3 - y_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|x_3 - x_2|\right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) - (2 - \sqrt{2})(|x_1 - x_3| - |y_1 - y_3|) \end{aligned}$$

olup burada $2 - \sqrt{2} > 0$ *ve* $|x_1 - x_3| - |y_1 - y_3| \geq 0$ *olduğundan dolayı*

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

dir.

III. Durum: $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ *ve* $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ *olsun. Burada II. duruma benzer olarak iki altdurum söz konusudur.*

Altdurum III.1*:* $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq k = (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + \left(\sqrt{2} - 1\right)(|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= \left(|x_1 - x_3| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|y_1 - y_3|\right) + \left(|x_3 - x_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|y_3 - y_2|\right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) - (2 - \sqrt{2})(|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3|) \end{aligned}$$

olup burada $2 - \sqrt{2} > 0$ *ve* $|y_1 - y_3| - |x_1 - x_3| \geq 0$ *olduğundan dolayı*

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

olur.

Alt Durum III.2: $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq k = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) + \left(\sqrt{2} - 1\right)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= \left(|y_1 - y_3| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|x_1 - x_3|\right) + \left(|y_3 - y_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|x_3 - x_2|\right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) - (2 - \sqrt{2})\,(|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2|) \end{aligned}$$

olup burada $2 - \sqrt{2} > 0$ *ve* $|x_3 - x_2| - |y_3 - y_2| \geq 0$ *olduğundan dolayı*

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

dir.

IV. Durum: $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ *ve* $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu taktirde*

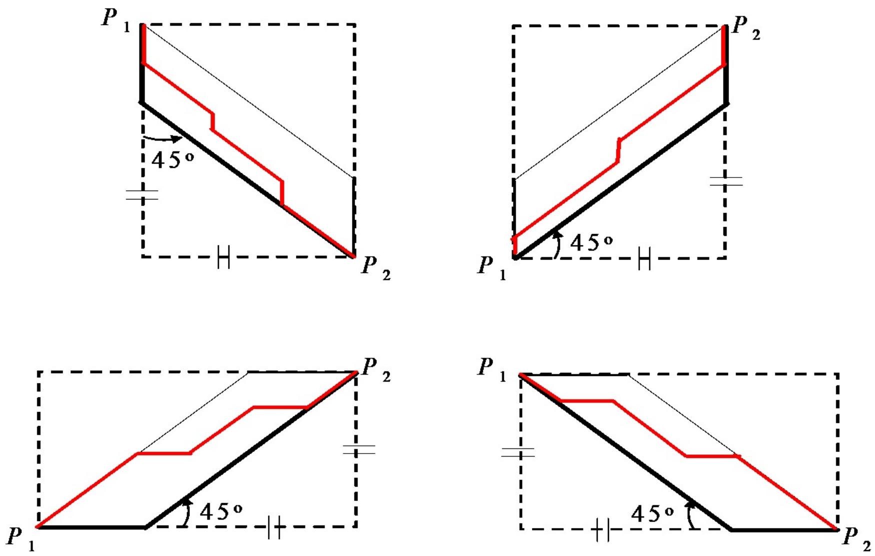
$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq k = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) + \left(\sqrt{2} - 1\right)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= \left(|y_1 - y_3| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|x_1 - x_3|\right) + \left(|y_3 - y_2| + \left(\sqrt{2} - 1\right)|x_3 - x_2|\right) \\ &= d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2) \end{aligned}$$

olur. Tüm durumların sonuçları birleştirildiğinde her P_1, P_2, $P_3 \in \mathbb{R}^2$ *için*

$$d_c(P_1, P_2) \leq d_c(P_1, P_3) + d_c(P_3, P_2)$$

sonucu elde edilir. Yani Çin Dama uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. Buna göre analitik düzlemde tanımlanan Çin dama uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığından $\mathbb{R}^2$ *de bir metriktir.*

Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki Çin Dama yolu Şekil 2.10.'da görüldüğü gibi biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri 1 veya -1 eğimli olan iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki Çin Dama uzaklığı ifade eden şekildeki iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. P_1 den P_2'ye olan yolların birleşimi, yani P_1 ile P_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi Şekil 2.10.'da görüldüğü gibi bir kenar çifti koordinat eksenlerinden birine paralel, diğer kenar çifti ise diğer koordinat ekseni ile 45° lik açı yapan paralelkenardır.



Şekil 2.10 Çin Dama Uzaklıklar

Yardımcı Teorem 2.5 *Analitik düzlemde farklı* $P_1 = (x_1, y_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2)$ *noktalarından geçen doğru* l *olsun ve* d_E *ile Öklidyen metrik gösterilsin.* m, l *doğrusunun eğimi ise*

$$M = \begin{cases} 1 + (\sqrt{2} - 1)\,|m| & , \quad |m| \leq 1 \text{ ise} \\ \\ (\sqrt{2} - 1) + |m| & , \quad |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$d_c(P_1, P_2) = \frac{M}{\sqrt{1 + m^2}} d_E(P_1, P_2)$$

dir (Gelişgen ve Kaya, 2009).

İspat $P_1 = (x_1, y_1)\,, P_2 = (x_2, y_2)$ *analitik düzlemde farklı herhangi iki nokta olmak üzere* $d_c(P_1, P_2) = \lambda d_E(P_1, P_2)$ *olacak şekilde bir* λ *parametresi vardır. Ayrıca* P_1 *ve* P_2 *noktalarından geçen doğrunun eğimi* $m = (y_1 - y_2) \diagup (x_1 - x_2)$ *dir.*

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &= \lambda d_E(P_1, P_2) \\ d_c(P_1, P_2) &= \max\{|x_1 - x_2|\,, |y_1 - y_2|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_2|\,, |y_1 - y_2|\} \\ &= \lambda \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \lambda &= \frac{\max\{|x_1 - x_2|\,, |y_1 - y_2|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_2|\,, |y_1 - y_2|\}}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \end{aligned}$$

olup $P_1 \neq P_2$ *olduğundan* $x_1 - x_2$ *veya* $y_1 - y_2$ *den en az biri sıfırdan farklıdır. Buna göre*

$$d_c(P_1, P_2) = \frac{\max\{1, |m|\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1, |m|\}}{\sqrt{1+m^2}} d_E(P_1, P_2)$$

olarak verilebilir. $M = \max\{1, |m|\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1, |m|\}$ *diyelim.* $\lambda = \frac{M}{\sqrt{1+m^2}}$ *olur. Dolayısıyla maksimum ve minimum fonksiyonları yardımıyla* M *parametresi*

$$M = \begin{cases} 1 + (\sqrt{2}-1)\,|m| & , \quad |m| \leq 1 \text{ ise} \\ \\ (\sqrt{2}-1) + |m| & , \quad |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak

$$d_c(P_1, P_2) = \frac{M}{\sqrt{1+m^2}} d_E(P_1, P_2)$$

eşitliğine ulaşılır.

Burada eğer $x_1 = x_2$ *veya* $y_1 = y_2$ *veya* $m = \mp 1$ *ise* $d_c(P_1, P_2) = d_E(P_1, P_2)$ *olduğu açıktır. Yani* P_1 *ile* P_2 *noktaları yatay, dikey veya* ∓ 1 *eğimli bir doğru üzerinde iken Çin Dama ve Öklidyen uzaklıklar birbirine eşittir.*

Bu yardımcı teoreme göre herhangi bir doğru boyunca olan Çin Dama uzaklığı, aynı doğru boyunca olan Öklidyen uzaklığının sabit bir pozitif katıdır. Bu yardımcı teorem kullanılarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır (Gelişgen, 2007).

Sonuç 2.5 P_1, P_2 *ve* X *analitik düzlemde herhangi doğrudaş üç nokta olsun. Bu taktirde* $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ *olması için gerek ve yeter koşul* $d_c(P_1, X) = d_c(P_2, X)$ *olmasıdır.*

İspat P_1, P_2 *ve* X *analitik düzlemde doğrudaş olan üç nokta olsun. Yardımcı Teorem 2.5'ten dolayı* $\lambda = \dfrac{M}{\sqrt{1+m^2}}$ *olmak üzere;*

$$\begin{aligned} d_c(P_1, X) &= \lambda d_E(P_1, X) \\ d_c(P_2, X) &= \lambda d_E(P_2, X) \end{aligned}$$

dir. $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ *ise*

$$d_c(P_1, X) = \lambda d_E(P_1, X) = \lambda d_E(P_2, X) = d_c(P_2, X)$$

dir. Eğer $d_c(P_1, X) = d_c(P_2, X)$ *ise*

$$d_E(P_1, X) = \frac{1}{\lambda} d_c(P_1, X) = \frac{1}{\lambda} d_c(P_2, X) = d_E(P_2, X)$$

olur. .

Sonuç 2.6 *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi doğrudaş üç farklı nokta olsun. Bu taktirde*

$$\frac{d_c(P_1,X)}{d_c(P_2,X)}=\frac{d_E(P_1,X)}{d_E(P_2,X)}$$

dir. Bir başka deyişle aynı doğru boyunca Öklidyen ve Çin Dama uzaklıklarının oranı aynıdır.

İspat *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde farklı ve doğrudaş olan üç nokta olsun. Yardımcı Teorem 2.5'ten dolayı $\lambda=\dfrac{M}{\sqrt{1+m^2}}$ olmak üzere;*

$$\begin{aligned} d_c(P_1,X) &= \lambda d_E(P_1,X) \\ d_c(P_2,X) &= \lambda d_E(P_2,X) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\frac{d_c(P_1,X)}{d_c(P_2,X)}=\frac{\lambda d_E(P_1,X)}{\lambda d_E(P_2,X)}=\frac{d_E(P_1,X)}{d_E(P_2,X)}$$

olur.

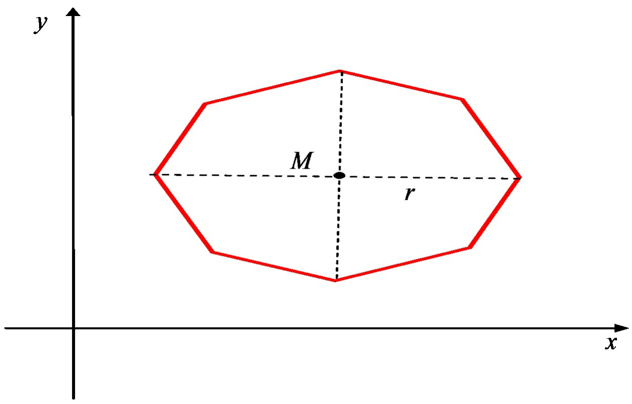
Tanım 2.15 *Çin Dama düzleminde sabit bir noktadan sabit bir CC-uzaklıktaki noktaların geometrik yerine Çin Dama (CC) çemberi denir. Sabit noktaya CC-çemberinin merkezi, sabit CC-uzaklığa da çemberin yarıçapı adı verilir.*

Analitik düzlemde $M=(m_1,m_2)$ noktasına, r CC-uzaklığında bulunan bütün noktalar

$$C=\{X=(x,y):d_c(M,X)=r\}$$

$$C=\left\{X=(x,y):\max\{|x-m_1|,|y-m_2|\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x-m_1|,|y-m_2|\}=r\right\}$$

kümesini oluşturur. Buna göre C kümesi M merkezli, r yarıçaplı CC-çemberidir (Uymaz, 2002). M merkezli r yarıçaplı CC-çemberi Şekil 2.11.'de gösterilmiştir.



Şekil 2.11 M Merkezli r Yarıçaplı CC-Çemberi

Öklidyen düzlem için iyi bilinmektedir ki, $G = E(2)$, kendisinin iki altgrubu olan $O(2)$ ortagonal grup ve $T(2)$ ötelemeler grubunun yarı direkt çarpımıdır. Burada $O(2)$ birim çemberin simetriler grubu ve $T(2)$ ise düzlemdeki tüm ötelemelerden oluşan gruptur.

Çin Dama düzleminin izometrileri için aşağıdaki önermeler (Gelişgen, 2007)'den verilebilir:

Önerme 2.14 *Tüm Öklidyen ötelemeler $\mathbb{R}^2_c$ nin bir izometrisidir.*

Önerme 2.15 *Çin Dama düzleminde $y = mx$ doğrusuna ilişkin bir yansımanın bir izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$m \in \left\{0,\ \pm 1,\ \pm(\sqrt{2}-1),\ \pm(\sqrt{2}+1),\ \infty\right\}$$

olmasıdır.

Önerme 2.16 *Çin Dama düzleminde d_c-uzaklığını koruyan sadece sekiz tane Öklidyen dönme vardır. Bir başka deyişle Çin Dama düzleminde izometrik dönmelerin kümesi*

$$R_c = \left\{r_\theta \mid \theta = k\frac{\pi}{4}\ ,\ k = 0, 1, \ldots, 7\right\}$$

dir.

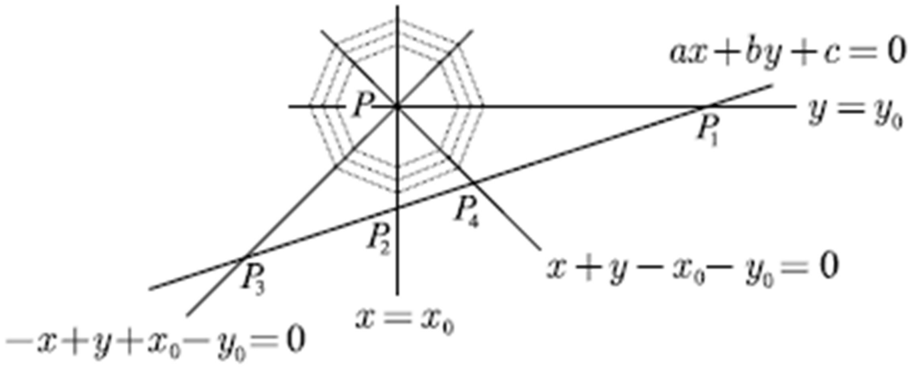
Bu önermeler yardımıyla Çin Dama düzleminin izometriler grubunun $D(8)$ dihedral grubu ile $T(2)$ ötelemeler grubunun yarı direkt çarpımı olduğu Kaya vd. (2006)'da gösterildi. Buradaki $D(8)$ dihedral grup Öklidyen düzgün sekizgenin simetriler grubu ve $T(2)$ ise düzlemdeki tüm ötelemelerden oluşan gruptur.

Önerme 2.17 *Çin Dama düzleminde verilen bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının bir $l : ax+by+c = 0$ doğrusuna Çin Dama uzaklığı*

$$d_c(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|, \frac{|a+b|}{\sqrt{2}}, \frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\}}$$

eşitliği ile hesaplanabilir (Turan, 2004).

İspat *Eğer P noktası l doğrusunun üzerinde değil ise, o zaman P noktasının l doğrusuna en yakın Çin Dama uzaklığını bulmak için Önerme 2.5'te izlenen yolu kullanabiliriz.*



Şekil 2.12 Genişleyen CC-Çemberi

Genişleyen Çin Dama çemberinin köşeleri P noktasından geçen ve $y = 0$, $x = 0$, $y = x$ ve $y = -x$ doğrularına paralel doğrular üzerinde olduğu için, eğer l doğrusu P merkezli bir çin dama çemberine teğet ise

$$P_1 = (\tfrac{-c-by_0}{a}, y_0) \qquad P_2 = (x_0, \tfrac{-c-ax_0}{b})$$

ve

$$P_3 = (\tfrac{bx_0-by_0-c}{a+b}, \tfrac{-ax_0+ay_0-c}{a+b}) \qquad P_4 = (\tfrac{-bx_0-by_0-c}{a-b}, \tfrac{ax_0+ay_0+c}{a-b})$$

noktalarından biri teğet noktadır. Bu noktalar l doğrusu ve sırasıyla $y = y_0$, $x = x_0$, $-x + y + x_0 - y_0 = 0$ ve $x + y - x_0 - y_0 = 0$ doğrularının kesim noktalarıdır. Bu sebepten

$$d_c(P, l) = \min\{d_c(P, P_i) : i = 1, 2, 3, 4\}$$

olup

$$d_c(P, P_1) = \tfrac{|ax_0+by_0+c|}{|a|} \qquad d_c(P, P_2) = \tfrac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}$$

$$d_c(P, P_3) = \tfrac{|ax_0+by_0+c|}{\frac{|a+b|}{\sqrt{2}}} \qquad d_c(P, P_4) = \tfrac{|ax_0+by_0+c|}{\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}}$$

olduğu için

$$d_c(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|, \frac{|a+b|}{\sqrt{2}}, \frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\}}$$

dir.

Önerme 2.18 *Analitik düzlemde dikey olmayan bir l doğrusu ve bir P noktası verilsin. Eğer l doğrusunun eğimi m ise, o zaman*

$$\tau(m) = (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} / \max\{1, |m|, \frac{|1 + m|}{\sqrt{2}}, \frac{|1 - m|}{\sqrt{2}}\}$$

olmak üzere,

$$d_c(P,l) = \tau(m) d_E(P,l)$$

dir.

İspat *Eğer l doğrusu dikey bir doğru değil ise, o zaman $b \neq 0$ ve $m = -\frac{a}{b}$ dir. Bu eşitlik yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa*

$$d_c(P,l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b| \max\{1, |m|, \frac{|1+m|}{\sqrt{2}}, \frac{|1-m|}{\sqrt{2}}\}}$$

ve

$$d_E(P,l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b| (m^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

olduğu için

$$\tau(m) = (1+m^2)^{\frac{1}{2}} / \max\{1, |m|, \frac{|1+m|}{\sqrt{2}}, \frac{|1-m|}{\sqrt{2}}\}$$

olarak bulunur.

Eğer l doğrusu dikey bir doğru ise

$$d_c(P,l) = d_E(P,l)$$

olduğu açıktır.

2.6 Düzlem $\alpha-$Geometrisi

S. Tian, $\alpha-$uzaklığı adını verdiği, Taksi ve Çin Dama uzaklıklarını özel hal olarak bulunduran bir metrik ailesi geliştirdi (Tian, 2005).

Tanım 2.16 *$P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.*

$$\Delta_{P_1P_2} = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \quad ve \quad \delta_{P_1P_2} = \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$\alpha \in [0, \pi/4]$ olmak üzere

$$d_\alpha(P_1, P_2) = \Delta_{P_1P_2} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\,\delta_{P_1P_2}$$

şeklinde tanımlanan $d_\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktaları arasındaki α-uzaklık fonksiyonu denir.

Önerme 2.19 *Analitik düzlemde, α-uzaklık fonksiyonu metrik belirtir.*

İspat *Metrik tanımı gereğince* α*- uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı ve simetrik olduğunu, ayrıca üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz.* $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *olmak üzere mutlak değer tanımından dolayı* $|x_1 - x_2| \geq 0$, $|y_1 - y_2| \geq 0$ *ve* $\alpha \in [0, \pi/4]$ *için* $\sec\alpha - \tan\alpha \geq 0$ *olduğundan* $d_\alpha(P_1, P_2) \geq 0$ *dır. Ayrıca*

$$d_\alpha(P_1, P_2) = 0 \Rightarrow \Delta_{P_1P_2} = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$$

olması gerektiğinden $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ *elde edilir. Yani* $x_1 = x_2$ *ve* $y_1 = y_2$ *olup* $P_1 = P_2$ *dir. Açıkca* $P_1 = P_2$ *ise* $d_\alpha(P_1, P_2) = 0$ *dır. Bu taktirde* $d_\alpha(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ *dir. Yani* d_α*-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.*

Mutlak değer tanımı gereğince $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ *ve* $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ *olduğundan* $d_\alpha(P_1, P_2) = d_\alpha(P_2, P_1)$ *dir. Bu nedenle* d_α*-uzaklık fonksiyonu simetriktir.*

$P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1, P_2) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|\} + \\ &\qquad (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|\} \\ &\leq \max\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|\} + \\ &\qquad (\sec\alpha - \tan\alpha)\min\{|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|\} \\ &= k \end{aligned}$$

olsun. Burada dört durum vardır.

I. Durum: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ *ve* $|x_3 - x_2| \geq |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu taktirde*

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1, P_2) &\leq k = (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + (\sec\alpha - \tan\alpha)(|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= (|x_1 - x_3| + (\sec\alpha - \tan\alpha)|y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + (\sec\alpha - \tan\alpha)|y_3 - y_2|) \\ &= d_\alpha(P_1, P_3) + d_\alpha(P_3, P_2) \end{aligned}$$

olur.

II. Durum: $|x_1 - x_3| \geq |y_1 - y_3|$ *ve* $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ *olsun. Burada iki altdurum söz konusudur.*

Alt Durum II.1*:* $|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d_c(P_1, P_2) &\leq k = (|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) + (\sec\alpha - \tan\alpha)(|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) \\ &= (|x_1 - x_3| + (\sec\alpha - \tan\alpha)|y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + (\sec\alpha - \tan\alpha)|y_3 - y_2|) \\ &= d_\alpha(P_1, P_3) + d_\alpha(P_3, P_2) - (1 - (\sec\alpha - \tan\alpha))(|y_3 - y_2| - |x_3 - x_2|) \end{aligned}$$

olup burada $1-(\sec\alpha-\tan\alpha)\geq 0$ *ve* $|y_3-y_2|-|x_3-x_2|\geq 0$ *olduğundan dolayı*

$$d_\alpha(P_1,P_2)\leq d_\alpha(P_1,P_3)+d_\alpha(P_3,P_2)$$

olur.

Alt Durum II.2: $|x_1-x_3|+|x_3-x_2|\leq|y_1-y_3|+|y_3-y_2|$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1,P_2) &\leq k=(|y_1-y_3|+|y_3-y_2|)+(\sec\alpha-\tan\alpha)(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|) \\ &= (|y_1-y_3|+(\sec\alpha-\tan\alpha)|x_1-x_3|)+(|y_3-y_2|+(\sec\alpha-\tan\alpha)|x_3-x_2|) \\ &= d_\alpha(P_1,P_3)+d_\alpha(P_3,P_2)-(1-(\sec\alpha-\tan\alpha))(|x_1-x_3|-|y_1-y_3|) \end{aligned}$$

olup burada $1-(\sec\alpha-\tan\alpha)\geq 0$ *ve* $|x_1-x_3|-|y_1-y_3|\geq 0$ *olduğundan dolayı*

$$d_\alpha(P_1,P_2)\leq d_\alpha(P_1,P_3)+d_\alpha(P_3,P_2)$$

dir.

III. Durum: $|x_1-x_3|\leq|y_1-y_3|$ *ve* $|x_3-x_2|\geq|y_3-y_2|$ *olsun. Burada II. duruma benzer olarak iki altdurum söz konusudur.*

Altdurum III.1: $|x_1-x_3|+|x_3-x_2|\geq|y_1-y_3|+|y_3-y_2|$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1,P_2) &\leq k=(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|)+(\sec\alpha-\tan\alpha)(|y_1-y_3|+|y_3-y_2|) \\ &= (|x_1-x_3|+(\sec\alpha-\tan\alpha)|y_1-y_3|)+(|x_3-x_2|+(\sec\alpha-\tan\alpha)|y_3-y_2|) \\ &= d_\alpha(P_1,P_3)+d_\alpha(P_3,P_2)-(1-(\sec\alpha-\tan\alpha))(|y_1-y_3|-|x_1-x_3|) \end{aligned}$$

olup burada $1-(\sec\alpha-\tan\alpha)\geq 0$ *ve* $|y_1-y_3|-|x_1-x_3|\geq 0$ *olduğundan dolayı*

$$d_\alpha(P_1,P_2)\leq d_\alpha(P_1,P_3)+d_\alpha(P_3,P_2)$$

olur.

Alt Durum III.2: $|x_1-x_3|+|x_3-x_2|\leq|y_1-y_3|+|y_3-y_2|$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1,P_2) &\leq k=(|y_1-y_3|+|y_3-y_2|)+(\sec\alpha-\tan\alpha)(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|) \\ &= (|y_1-y_3|+(\sec\alpha-\tan\alpha)|x_1-x_3|)+(|y_3-y_2|+(\sec\alpha-\tan\alpha)|x_3-x_2|) \\ &= d_\alpha(P_1,P_3)+d_\alpha(P_3,P_2)-(1-(\sec\alpha-\tan\alpha))(|x_3-x_2|-|y_3-y_2|) \end{aligned}$$

olup burada $1-(\sec\alpha-\tan\alpha)\geq 0$ *ve* $|x_3-x_2|-|y_3-y_2|\geq 0$ *olduğundan dolayı*

$$d_\alpha(P_1,P_2)\leq d_\alpha(P_1,P_3)+d_\alpha(P_3,P_2)$$

dir.

IV. Durum: $|x_1 - x_3| \leq |y_1 - y_3|$ *ve* $|x_3 - x_2| \leq |y_3 - y_2|$ *olsun. Bu taktirde*

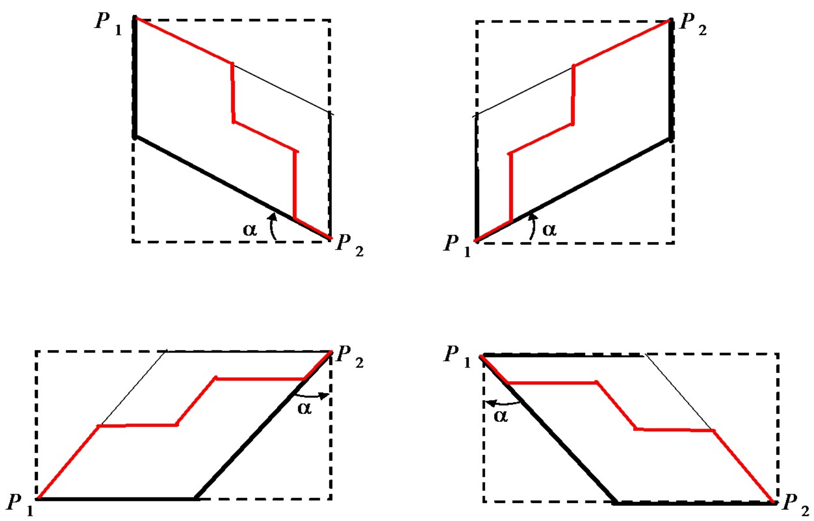
$$\begin{aligned} d_\alpha(P_1, P_2) &\leq k = (|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|) + (\sec\alpha - \tan\alpha)(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|) \\ &= (|y_1 - y_3| + (\sec\alpha - \tan\alpha)|x_1 - x_3|) + (|y_3 - y_2| + (\sec\alpha - \tan\alpha)|x_3 - x_2|) \\ &= d_\alpha(P_1, P_3) + d_\alpha(P_3, P_2) \end{aligned}$$

olur. Tüm durumların sonuçları birleştirildiğinde her P_1, P_2, $P_3 \in \mathbb{R}^2$ *için*

$$d_\alpha(P_1, P_2) \leq d_\alpha(P_1, P_3) + d_\alpha(P_3, P_2)$$

sonucu elde edilir. Yani α*-uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. Buna göre analitik düzlemde tanımlanan* α*-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığından* $\mathbb{R}^2$ *de bir metriktir.*

Geometrik olarak, P_1 ile P_2 noktaları arasındaki α-yolu Şekil 2.13.'te görüldüğü gibi biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri diğer koordinat ekseni ile α açısı yapan iki doğru parçasının birleşimidir. Böylece P_1 ile P_2 arasındaki α-uzaklığını ifade eden şekildeki iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamıdır. P_1 ile P_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi Şekil 2.13.'te görüldüğü gibi bir kenar çifti koordinat eksenlerinden birine paralel, diğer kenar çifti ise diğer koordinat ekseni ile α açısı yapan paralelkenardır.



Şekil 2.13 İki Nokta Arası α-Yolları

Yardımcı Teorem 2.6 *Analitik düzlemde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan herhangi iki nokta* $P_1 = (x_1, y_1)$*,* $P_2 = (x_2, y_2)$ *ve bu noktalardan geçen doğru* l *olsun.* $\lambda(\alpha) = (\sec(\alpha) - \tan(\alpha))$ *olmak üzere;*

Eğer bu noktalardan geçen l *doğrusunun eğimi* m *ise*

$$\rho(m) = (1 + m^2)^{\frac{1}{2}} / \max\{1, |m|\} + \lambda(\alpha) \min\{1, |m|\}$$

olmak üzere,

$$d_E(P_1, P_2) = \rho(m) d_\alpha(P_1, P_2)$$

dir. Eğer bu noktalardan geçen l *doğrusu dikey bir doğru ise*

$$d_E(P_1, P_2) = d_\alpha(P_1, P_2)$$

dir (Çolakoğlu vd., 2012).

İspat $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ *analitik düzlemde herhangi iki nokta olmak üzere* $d_\alpha(P_1, P_2) = \rho(m) d_E(P_1, P_2)$ *olacak şekilde bir* $\rho(m)$ *parametresi vardır. Ayrıca* P_1 *ve* P_2 *noktalarından geçen doğrunun eğimi* $m = (y_1 - y_2) \diagup (x_1 - x_2)$ *dir. Eğer* l *dikey bir doğru değil ise,*

$$\rho(m) = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \lambda(\alpha) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}}$$

olup

$$\begin{aligned} d_E(P_1, P_2) &= \rho(m) d_\alpha(P_1, P_2) \\ d_E(P_1, P_2) &= \rho(m) \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \lambda(\alpha) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \end{aligned}$$

l *doğrusunun eğimi* $m = (y_1 - y_2) \diagup (x_1 - x_2)$ *olduğu için,*

$$\rho(m) = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\max\{1, |m|\} + \lambda(\alpha) \min\{1, |m|\}}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak,

$$d_E(P_1, P_2) = \rho(m) d_\alpha(P_1, P_2)$$

eşitliğine ulaşılır.

Eğer l *dikey bir doğru ise* $x_1 = x_2$ *olup* $d_E(P_1, P_2) = d_\alpha(P_1, P_2)$ *olduğu açıktır. Yani* P_1 *ile* P_2 *noktaları dikey bir doğru üzerinde iken Öklidyen ve* α*-uzaklıklar birbirine eşittir.*

Sonuç 2.7 *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi doğrudaş üç nokta olsun. Bu taktirde $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ olması için gerek ve yeter koşul $d_\alpha(P_1, X) = d_\alpha(P_2, X)$ olmasıdır.*

İspat *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde doğrudaş olan üç nokta olsun. Yardımcı Teorem1.6.3'ten dolayı $\rho(m) = \dfrac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|\} + \lambda(\alpha)\min\{1, |m|\}}$ olmak üzere;*

$$\begin{aligned} d_E(P_1, X) &= \rho(m) d_\alpha(P_1, X) \\ d_E(P_2, X) &= \rho(m) d_\alpha(P_2, X) \end{aligned}$$

dir. Eğer $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ ise

$$d_\alpha(P_1, X) = \rho(m) d_E(P_1, X) = \rho(m) d_E(P_2, X) = d_\alpha(P_2, X)$$

dir. Eğer $d_\alpha(P_1, X) = d_\alpha(P_2, X)$ ise

$$d_E(P_1, X) = \frac{1}{\rho(m)} d_\alpha(P_1, X) = \frac{1}{\rho(m)} d_\alpha(P_2, X) = d_E(P_2, X)$$

olur.

Sonuç 2.8 *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi doğrudaş farklı üç nokta olsun. Bu taktirde*

$$\frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)} = \frac{d_\alpha(P_1, X)}{d_\alpha(P_2, X)}$$

dir. Bir başka deyişle aynı doğru boyunca Öklidyen ve α-uzaklıklarının oranı aynıdır.

İspat *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde farklı ve doğrudaş olan üç nokta olsun. Yardımcı Teorem 2.6'dan dolayı $\rho(m) = \dfrac{\sqrt{1+m^2}}{\max\{1, |m|\} + \lambda(\alpha)\min\{1, |m|\}}$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} d_E(P_1, X) &= \rho(m) d_\alpha(P_1, X) \\ d_E(P_2, X) &= \rho(m) d_\alpha(P_2, X) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)} = \frac{\rho(m) d_\alpha(P_1, X)}{\rho(m) d_\alpha(P_2, X)} = \frac{d_\alpha(P_1, X)}{d_\alpha(P_2, X)}$$

olur.

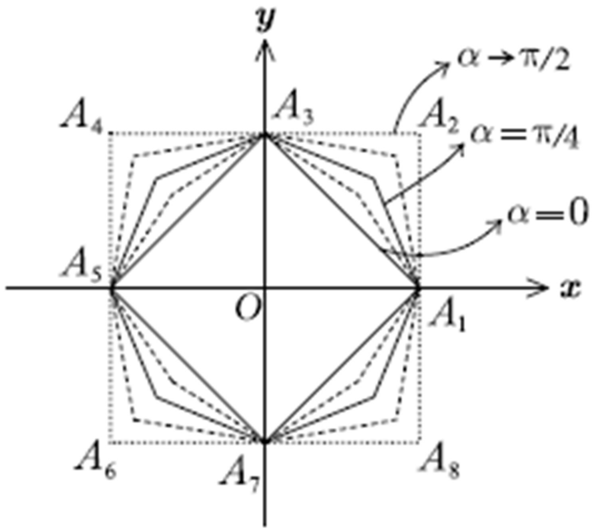
Tanım 2.17 *α düzleminde sabit bir noktadan sabit bir α-uzaklıktaki noktaların geometrik yerine α-çemberi denir. Sabit noktaya α-çemberinin merkezi, sabit α-uzaklığa da çemberin yarıçapı adı verilir.*

Analitik düzlemde $M = (m_1, m_2)$ noktasına, r α-uzaklığında bulunan bütün noktaların kümesi

$$A = \{X = (x, y) : d_\alpha (M, X) = r\}$$

$$A = \{X = (x, y) : \max \{|x - m_1|, |y - m_2|\} + \lambda(\alpha) \min \{|x - m_1|, |y - m_2|\} = r\}$$

kümesini oluşturur (Çolakoğlu vd., 2012). Buna göre A kümesi M merkezli, r yarıçaplı α-çemberidir ve Şekil 2.14.'te gösterilmiştir.



Şekil 2.14 M Merkezli r Yarıçaplı α Çemberi

α düzleminin izometrileri için aşağıdaki önermeler Çolakoglu vd. (2012)'den verilebilir.

Önerme 2.20 *Tüm Öklidyen ötelemeler $\mathbb{R}^2_\alpha$ nin bir izometrisidir.*

Önerme 2.21 *α düzleminde $y = mx$ doğrusuna ilişkin bir yansımanın bir izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$m \in \{0, \ \pm 1, , \ \infty\}$$

olmasıdır.

Önerme 2.22 *α düzleminde d_α-uzaklığını koruyan sadece dört tane Öklidyen dönme vardır. Bir başka deyişle α düzleminde izometrik dönmelerin kümesi*

$$R_\alpha = \left\{ r_\theta \mid \theta = k\frac{\pi}{2}\,,\ k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

dir.

Bu önermeler yardımıyla α düzleminin izometriler grubunun $D\,(4)$ dihedral grubu ile $T\,(2)$ ötelemeler grubunun yarı direkt çarpımı olduğu Çolakoglu ve Kaya (2011)'de gösterilmiştir. Buradaki $D\,(4)$ dihedral grup Öklidyen düzgün dörtgenin simetriler grubu ve $T\,(2)$ ise düzlemdeki tüm ötelemelerden oluşan gruptur.

Önerme 2.23 *Herhangibir $m \neq 0$ reel sayısı için $\rho(m) = \rho(-m) = \rho(1/m) = \rho(-1/m)$ dir.*

İspat *Önerme 2.20, Önerme 2.21 ve Önerme 2.22'de sırasıyla, iki nokta arasındaki α-uzaklığının düzlemdeki tüm ötelemeler, bir nokta etrafındaki $\pi/2$, π ve $3\pi/2$ radyanlık dönmeler ve $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ ve $y = -x$ doğrularına paralel doğrular etrafındaki yansımalarda değişmez kaldığı ifade edilmişti. Bu önermeler gereği iki nokta arasındaki α-uzaklığı değişmez kaldığından $\rho(m) = \rho(-m) = \rho(1/m) = \rho(-1/m)$ olur.*

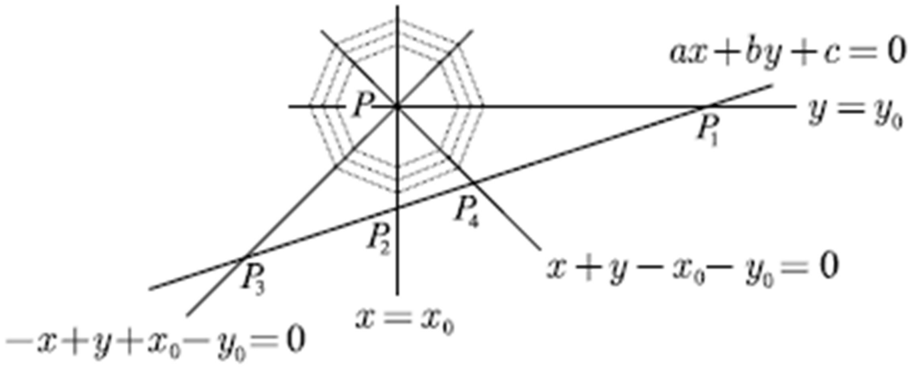
Önerme 2.24 *α düzleminde verilen bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının bir $l : ax + by + c = 0$ doğrusuna α-uzaklığı*

$$d_\alpha(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|\,, |b|\,, \frac{|a+b|}{1+\lambda(\alpha)}, \frac{|a-b|}{1+\lambda(\alpha)}\}}$$

eşitliği ile hesaplanabilir (Çolakoglu, 2009).

İspat *Eğer P noktası l doğrusunun üzerinde ise bu ifadenin doğru olduğu açıktır.*

Eğer P noktası l doğrusunun üzerinde değil ise, o zaman P noktasının l doğrusuna en yakın olduğu noktaya olan α-uzaklığını bulmak için Önerme 2.5'te izlenen yolu kullanabilirz.



Şekil 2.15 Genişleyen α Çemberi

Genişleyen α-çemberinin köşeleri P noktasından geçen ve $y=0$, $x=0$, $y=x$ ve $y=-x$ doğrularına paralel doğrular üzerinde olduğu için , eğer l doğrusu P merkezli bir α-çemberine teğet ise,

$$P_1=(\tfrac{-c-by_0}{a},y_0) \qquad P_3=(\tfrac{bx_0-by_0-c}{a+b},\tfrac{-ax_0+ay_0-c}{a+b})$$

$$P_2=(x_0,\tfrac{-c-ax_0}{b}) \qquad P_4=(\tfrac{-bx_0-by_0-c}{a-b},\tfrac{ax_0+ay_0+c}{a-b})$$

noktalarından biri teğet noktadır. Bu noktalar l doğrusu ve sırasıyla $y=y_0$, $x=x_0$, $-x+y+x_0-y_0=0$ ve $x+y-x_0-y_0=0$ doğrularının kesim noktalarıdır. Bu sebepten

$$d_\alpha(P,l)=\min\{d_\alpha(P,P_i):i=1,2,3,4\}$$

olup

$$d_\alpha(P,P_1)=\tfrac{|ax_0+by_0+c|}{|a|} \qquad d_\alpha(P,P_2)=\tfrac{|ax_0+by_0+c|}{|b|}$$

$$d_\alpha(P,P_3)=\tfrac{|ax_0+by_0+c|}{\frac{|a+b|}{1+\lambda(\alpha)}} \qquad d_\alpha(P,P_4)=\tfrac{|ax_0+by_0+c|}{\frac{|a-b|}{1+\lambda(\alpha)}}$$

olduğu için

$$d_\alpha(P,l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\max\{|a|,|b|,\frac{|a+b|}{1+\lambda(\alpha)},\frac{|a-b|}{1+\lambda(\alpha)}\}}$$

dir.

Önerme 2.25 *Analitik düzlemde dikey olmayan bir l doğrusu ve bir P noktası verilsin. Eğer l doğrusunun eğimi m ise, o zaman*

$$\tau(m)=\max\{1,|m|,\frac{|1+m|}{1+\lambda(\alpha)},\frac{|1-m|}{1+\lambda(\alpha)}\}/(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere,

$$d_E(P,l) = \tau(m) d_\alpha(P,l)$$

dir.

İspat *Eğer l doğrusu dikey bir doğru değil ise, o zaman $b \neq 0$ ve $m = -\frac{a}{b}$ dir. Bu eşitlik yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa*

$$d_E(P,l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|\,(m^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

ve

$$d_\alpha(P,l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b| \max\{1, |m|, \frac{|1+m|}{1+\lambda(\alpha)}, \frac{|1-m|}{1+\lambda(\alpha)}\}}$$

olduğu için

$$\tau(m) = \max\{1, |m|, \frac{|1+m|}{1+\lambda(\alpha)}, \frac{|1-m|}{1+\lambda(\alpha)}\}/(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$$

olarak bulunur.

Eğer l doğrusu dikey bir doğru ise o zaman $b = 0$ ve $a \neq 0$ dır. Bu sebepten $d_E(P,l) = |ax_0 + c| \,/\, |a|$ ve $d_\alpha(P,l) = |ax_0 + c| \,/\, |a|$ olur. Buradan

$$d_E(P,l) = d_\alpha(P,l)$$

eşitliği elde edilir.

2.7 Düzlem m-Geometrisi

Bu bölümde incelenecek olan düzlem m-geometrisi Gelişgen ve Ermiş (2014) ile Çolakoğlu (2009) kaynaklarından esas alınarak özetlenmiştir.

Tanım 2.18 *$P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta u, v, m de $u \geq v \geq 0 \neq u$ özelliğindeki reel sayılar olsun. Buna göre*

$$\Delta_{AB} = \max\{|(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)|, |m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\}$$

ve

$$\delta_{AB} = \min\{|(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)|, |m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\}$$

olmak üzere

$$d_m(P_1, P_2) = (u\Delta_{AB} + v\delta_{AB})/\sqrt{1+m^2}$$

şeklinde tanımlanan $d_m : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktaları arasındaki m-uzaklık fonksiyonu adı verilir.

m-düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularıdır. Açı ölçümü de Öklid düzlemindeki gibi yapılmaktadır. Analitik düzlemde alınan $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklid uzaklığı

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iken bu noktalar arasındaki uzaklık için yukarıdaki tanımda verilen

$$d_m(P_1, P_2) = (u\Delta_{AB} + v\delta_{AB})/\sqrt{1+m^2}$$

m-uzaklık fonksiyonunu kullanarak düzlem m-geometrisi oluşturulur.

Kolayca görülebileceği üzere, Taksi, Çin Dama, Maksimum ve α metrikleri m-metriğinin özel halleridir. Eğer d_m de $u = v = 1$ olduğunda Taksi metriği d_T elde edilir. Benzer şekilde eğer d_m de $u = 1$, $v = \sqrt{2} - 1$ olduğunda Çin Dama metriği d_c, $u = 1$, $v = 0$ olduğunda Maksimum metriği d_M, $u = 1$ ve $\alpha \in [0, \pi/2)$ olmak üzere $v = (\sec(\alpha) - \tan(\alpha))$ olduğunda ise α metriği d_α elde edilir.

Önerme 2.26 *Analitik düzlemde tanımlanan m-uzaklık fonksiyonu bir metriktir.*

İspat *Metrik tanımı gereğince m-uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı ve simetrik olduğunu, ayrıca üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz. $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere mutlak değer tanımından dolayı $|x_1 - x_2| \geq 0$, $|y_1 - y_2| \geq 0$ olup $d_m(P_1, P_2) \geq 0$ dır. Ayrıca*

$$\begin{aligned} d_m(P_1,P_2) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (u\Delta_{AB} + v\delta_{AB})/\sqrt{1+m^2} = 0 \\ &\Rightarrow \quad (u\Delta_{AB} + v\delta_{AB}) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \Delta_{AB} = 0 \text{ ve } \delta_{AB} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \max\{|(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)|, |m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \min\{|(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)|, |m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|\} = 0 \end{aligned}$$

olması gerektiğinden dolayı $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ elde edilir. Yani $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olup $P_1 = P_2$ dir. Açıkca $P_1 = P_2$ ise $d_m(P_1, P_2) = 0$ dır. Bu taktirde $d_m(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ dir. Yani d_m-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.

Mutlak değer tanımı gereğince $|(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)| = |(x_2 - x_1) + m(y_2 - y_1)|$ ve $|m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)| = |m(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)|$ olup $d_m(P_1, P_2) = d_m(P_2, P_1)$ dir. Bu nedenle d_m-uzaklık fonksiyonu simetriktir.

$P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ ve ifadeleri kısaltmak amacıyla $u' = u/\sqrt{1+m^2}$, $v' = v/\sqrt{1+m^2}$ ve $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$ olmak üzere $u_{i+j-2} = |(x_i - x_j) + m(y_i - y_j)|$ ve $v_{i+j-2} = |m(x_i - x_j) - (y_i - y_j)|$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} d_m(P_1, P_2) &= u' \max\{u_1, v_1\} + v' \min\{u_1, v_1\} \\ d_m(P_1, P_3) &= u' \max\{u_2, v_2\} + v' \min\{u_2, v_2\} \\ d_m(P_2, P_3) &= u' \max\{u_3, v_3\} + v' \min\{u_3, v_3\} \end{aligned}$$

olacaktır. Açıkça,

$$|(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)| \leq |(x_1 - x_3) + m(y_1 - y_3)| + |(x_3 - x_2) + m(y_3 - y_2)|$$

$$|m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)| \leq |m(x_1 - x_3) - (y_1 - y_3)| + |m(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)|$$

yani $u_1 \leq u_2 + u_3$ ve $v_1 \leq v_2 + v_3$ olduğundan kolayca

$$d_m(P_1, P_2) \leq u' \max\{u_2 + u_3, v_2 + v_3\} + v' \min\{u_2 + u_3, v_2 + v_3\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak, aşağıdaki olası dört durumdan d_m nin üçgen eşitsizliğini sağladığı kolayca görülebilir.

***I. Durum:** Eğer $u_2 \geq v_2, u_3 \geq v_3$ ise, $u_2 + u_3 \geq v_2 + v_3$ ve böylece $d_m(P_1, P_2) \leq u'(u_2 + u_3) + v'(v_2 + v_3) = d_m(P_1, P_3) + d_m(P_2, P_3)$ olur.*

***II. Durum:** Eğer $u_2 \leq v_2, u_3 \leq v_3$ ise, benzer olarak $u_2 + u_3 \leq v_2 + v_3$ ve böylece $d_m(P_1, P_2) \leq u'(v_2 + v_3) + v'(u_2 + u_3) = d_m(P_1, P_3) + d_m(P_2, P_3)$ olur.*

***III. Durum:** Eğer $u_2 \geq v_2, u_3 \leq v_3$ ise, iki alt durum söz konusudur.*

***Altdurum III.1**: $u_2 + u_3 \geq v_2 + v_3$ ise, açıkça, $u' \geq v'$ ve $u_3 \leq v_3$ olduğundan $(u' - v')(u_3 - v_3) \leq 0$ dir. O halde $u'(u_3 - v_3 + u_2 - u_2) + v'(v_3 - u_3 + v_2 - v_2) \leq 0$ dır. Buradan $u'(u_2 + u_3) + v'(v_2 + v_3) \leq (u'u_2 + v'v_2) + (u'v_3 + v'u_3)$ elde edilir. Böylece $d_m(P_1, P_2) \leq d_m(P_1, P_3) + d_m(P_2, P_3)$ olur.*

***Altdurum III.2**: $u_2 + u_3 \leq v_2 + v_3$ ise, açıkça, $u' \geq v'$ ve $u_2 \geq v_2$ olduğundan $(u' - v')(v_2 - u_2) \leq 0$ dir. O halde $u'(v_2 - u_2 + v_3 - v_3) + v'(u_2 - v_2 + u_3 - u_3) \leq 0$ dır. Buradan $u'(v_2 + v_3) + v'(u_2 + u_3) \leq (u'u_2 + v'v_2) + (u'v_3 + v'u_3)$ elde edilir. Böylece $d_m(P_1, P_2) \leq d_m(P_1, P_3) + d_m(P_2, P_3)$ olur.*

***IV. Durum:** Eğer $u_2 \leq v_2, u_3 \geq v_3$ ise, yine iki alt durum söz konusudur.*

***Altdurum IV.1**: $u_2 + u_3 \geq v_2 + v_3$ ise, açıkça, $u' \geq v'$ ve $u_2 \leq v_2$ olduğundan $(u' - v')(u_2 - v_2) \leq 0$ dir. O halde $u'(u_2 - v_2 + u_3 - u_3) + v'(v_2 - u_2 + v_3 - v_3) \leq 0$*

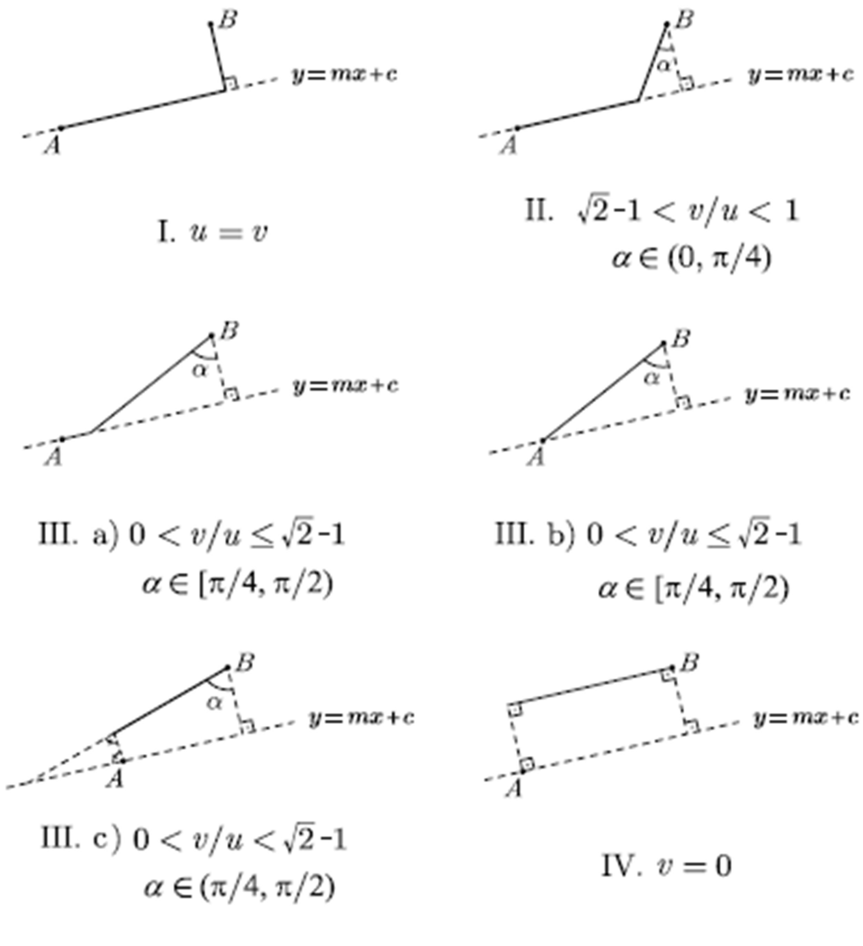
dır. Buradan $u'(u_3 + u_2) + v'(v_3 + v_2) \leq (u'u_3 + v'v_3) + (u'v_2 + v'u_2)$ *elde edilir. Böylece* $d_m(P_1, P_2) \leq d_m(P_1, P_3) + d_m(P_2, P_3)$ *olur.*

Altdurum IV.2*:* $u_2 + u_3 \leq v_2 + v_3$ *ise, açıkça,* $u' \geq v'$ *ve* $u_3 \geq v_3$ *olduğundan* $(u' - v')(v_3 - u_3) \leq 0$ *dir. O halde* $u'(v_3 - u_3 + v_2 - v_2) + v'(u_3 - v_3 + u_2 - u_2) \leq 0$ *dır. Buradan* $u'(v_2 + v_3) + v'(u_2 + u_3) \leq (u'u_3 + v'v_3) + (u'v_2 + v'u_2)$ *elde edilir. Böylece* $d_m(P_1, P_2) \leq d_m(P_1, P_3) + d_m(P_2, P_3)$ *olur.*

Tüm durumların sonuçları birleştirildiğinde her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ *için*

$$d_m(P_1, P_2) \leq d_m(P_1, P_3) + d_m(P_3, P_2)$$

sonucu elde edilir. Yani m*-uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. Buna göre analitik düzlemde tanımlanan* m*-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlı, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığından* $\mathbb{R}^2$ *de bir metriktir.*



Şekil 2.16 İki Nokta Arası m-Yolları

Bu gerçeğe göre P_1 ile P_2 noktaları arasındaki m-uzaklık, P_1 den P_2 ye her biri m, $-1/m$, $[m(u^2-v^2)+2uv]\ /\ [(u^2-v^2)-2uvm]$ veya $[m(u^2-v^2)-2uv]\ /\ [(u^2-v^2)+2uvm]$ eğimli doğrulardan birine paralel olan doğru parçalarının oluşturduğu en kısa yolun Öklidyen uzunluğunun u katıdır. Genel olarak P_1 ve P_2 noktaları arasında sonsuz farklı en kısa yol vardır. Bunlardan Şekil 1.16.'da gösterilenlerine *temel yol* diyeceğiz. Ayrıca $mx-y=0$ ve $x+my=0$ doğrularının her birine de *doğrultu ekseni* diyeceğiz. Burada $m\in\mathbb{R}-\{0\}$ için $d_m(P_1,P_2)=d_{-1/m}(P_1,P_2)$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Yardımcı Teorem 2.7 *Analitik düzlemde dikey bir doğru üzerinde bulunmayan herhangi iki nokta $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$ ve bu noktalardan geçen doğru l olsun. Eğer bu noktalardan geçen l doğrusunun eğimi n ve $u'=u/\sqrt{1+m^2}$, $v'=v/\sqrt{1+m^2}$ ise*

$$\rho(n)=(1+n^2)^{\frac{1}{2}}/(u'\max\{|1+mn|\,,|m-n|\}+v'\min\{|1+mn|\,,|m-n|\})$$

olmak üzere,

$$d_E\left(P_1,P_2\right)=\rho(n)d_m\left(P_1,P_2\right)$$

dir. Eğer bu noktalardan geçen l doğrusu dikey bir doğru ise

$$d_E\left(P_1,P_2\right)=\left[1/(u'\max\{1,|m|\}+v'\min\{1,|m|\})\right]d_m\left(P_1,P_2\right)$$

dir.

İspat $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$ *analitik düzlemde herhangi iki nokta olmak üzere $d_E\left(P_1,P_2\right)=\rho(n)d_m\left(P_1,P_2\right)$ olacak şekilde bir $\rho(n)$ parametresi vardır. Ayrıca P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğrunun eğimi $n=(y_1-y_2)\diagup(x_1-x_2)$ dir. Eğer l dikey bir doğru değil ise,*

$$d_E\left(P_1,P_2\right)=\rho(n)d_m\left(P_1,P_2\right)$$

$$\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\rho(n)(u'\Delta_{AB}+v'\delta_{AB})$$

$$\rho(n)=\frac{\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}}{(u'\Delta_{AB}+v'\delta_{AB})}$$

olup l doğrusunun eğimi $n=(y_1-y_2)\diagup(x_1-x_2)$ olduğu için,

$$\rho(n)=\frac{(1+n^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+n^2)^{\frac{1}{2}}/(u'\max\{|1+mn|\,,|m-n|\}+v'\min\{|1+mn|\,,|m-n|\})}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak,

$$d_E(P_1, P_2) = \rho(n) d_m(P_1, P_2)$$

eşitliğine ulaşılır.

Eğer l dikey bir doğru ise $x_1 = x_2$ olup $n = 0$ dır. Buradan,

$$d_E(P_1, P_2) = \left[1/(u' \max\{1, |m|\} + v' \min\{1, |m|\})\right] d_m(P_1, P_2)$$

olduğu açıktır.

Sonuç 2.9 *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi doğrudaş üç nokta olsun. Bu taktirde $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ olması için gerek ve yeter koşul $d_m(P_1, X) = d_m(P_2, X)$ olmasıdır.*

İspat *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde doğrudaş olan üç nokta olsun. Yardımcı Teorem 2.7'den dolayı*

$$\rho(n) = \frac{\sqrt{1+n^2}}{(u' \max\{|1+mn|, |m-n|\} + v' \min\{|1+mn|, |m-n|\})}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} d_E(P_1, X) &= \rho(n) d_m(P_1, X) \\ d_E(P_2, X) &= \rho(n) d_m(P_2, X) \end{aligned}$$

dir. Eğer $d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X)$ ise

$$d_m(P_1, X) = \rho(n) d_E(P_1, X) = \rho(n) d_E(P_2, X) = d_m(P_2, X)$$

dir. Eğer $d_m(P_1, X) = d_m(P_2, X)$ ise

$$d_E(P_1, X) = \frac{1}{\rho(n)} d_m(P_1, X) = \frac{1}{\rho(n)} d_m(P_2, X) = d_E(P_2, X)$$

olur.

Sonuç 2.10 *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde herhangi doğrudaş üç nokta olsun. Bu taktirde*

$$\frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)} = \frac{d_m(P_1, X)}{d_m(P_2, X)}$$

dir. Bir başka deyişle aynı doğru boyunca Öklidyen ve m-uzaklıklarının oranı aynıdır.

İspat *P_1, P_2 ve X analitik düzlemde farklı ve doğrudaş olan üç nokta olsun. Yardımcı Teorem 2.7'den dolayı*

$$\rho(n) = \frac{\sqrt{1+n^2}}{(u' \max\{|1+mn|, |m-n|\} + v' \min\{|1+mn|, |m-n|\})}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} d_E(P_1, X) &= \rho(n) d_m(P_1, X) \\ d_E(P_2, X) &= \rho(n) d_m(P_2, X) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\frac{d_E(P_1,X)}{d_E(P_2,X)} = \frac{\rho(n) d_m(P_1,X)}{\rho(n) d_m(P_2,X)} = \frac{d_m(P_1,X)}{d_m(P_2,X)}$$

olur.

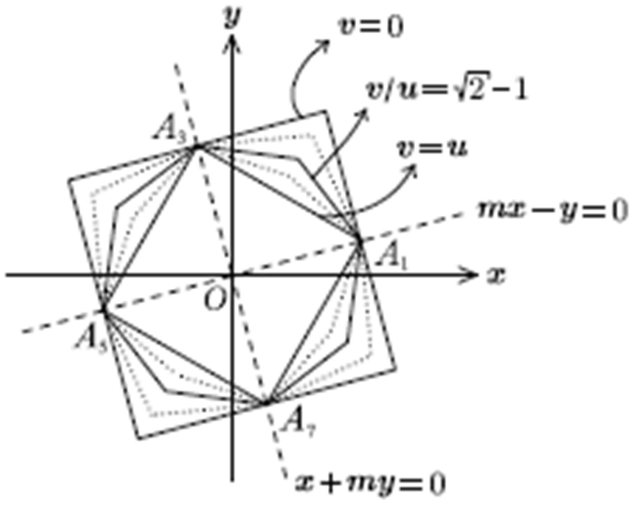
Tanım 2.19 *m-düzleminde sabit bir noktadan sabit bir m-uzaklıktaki noktaların geometrik yerine m-çemberi denir. Sabit noktaya m-çemberinin merkezi, sabit m-uzaklığa da çemberin yarıçapı adı verilir.*

Analitik düzlemde $M = (m_1, m_2)$ noktasına, r m-uzaklığında bulunan bütün noktalar

$$F = \{X = (x, y) : d_m(M, X) = r\}$$

$$F = \left\{X = (x, y) : (u\Delta_{AB} + v\delta_{AB})/\sqrt{1+m^2} = r\right\}$$

kümesini oluşturur (Çolakoğlu, 2009). Buna göre F kümesi M merkezli, r yarıçaplı m-çemberidir ve Şekil 2.17.'de gösterilmiştir.



Şekil 2.17 M Merkezli r Yarıçaplı m-Çemberi

m-düzleminin izometrileri için aşağıdaki önermeler (Çolakoglu, 2009)'dan verilebilir:

Önerme 2.27 *Tüm Öklidyen ötelemeler $\mathbb{R}^2_m$ nin bir izometrisidir.*

Önerme 2.28 ***(i)*** *$v/u \neq \sqrt{2}-1$ iken, m-düzleminde bir nokta etrafında θ radyanlık dönmenin $\mathbb{R}^2_m$ nin bir izometrisi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\theta \in \left\{ \frac{t\pi}{2} + 2k\pi : 0 \leq t \leq 3,\, t,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

olmasıdır.

(ii) *$v/u = \sqrt{2}-1$ iken, m-düzleminde bir nokta etrafında θ radyanlık dönmenin $\mathbb{R}^2_m$ nin bir izometrisi olması için gerek ve yeter koşul*

$$\theta \in \left\{ \frac{t\pi}{4} + 2k\pi : 0 \leq t \leq 7,\, t,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

olmasıdır.

Önerme 2.29 ***(i)*** *$v/u \neq \sqrt{2}-1$ iken, m-düzleminde $ax+by+c=0$ doğrusuna göre simetrinin $\mathbb{R}^2_m$ nin bir izometrisi olması için gerek ve yeter koşul*

$$-\frac{a}{b} \in \left\{ m,\ -\frac{1}{m}, \frac{m-1}{1+m}, \frac{m+1}{1-m} \right\}$$

olmasıdır.

(ii) *$v/u = \sqrt{2}-1$ iken, m-düzleminde $ax+by+c=0$ doğrusuna göre simetrinin $\mathbb{R}^2_m$ nin bir izometrisi olması için gerek ve yeter koşul*

$$-\tfrac{a}{b} \in \left\{ m, -\tfrac{1}{m}, \tfrac{m-1}{1+m}, \tfrac{m+1}{1-m}, \tfrac{(1-\sqrt{2})m-1}{(1-\sqrt{2})+m}, \tfrac{(1+\sqrt{2})m-1}{(1+\sqrt{2})+m}, \tfrac{(1-\sqrt{2})m+1}{(1-\sqrt{2})-m}, \tfrac{(1+\sqrt{2})m+1}{(1+\sqrt{2})-m} \right\}$$

olmasıdır.

Açıkça, iki izometrinin bileşkesi yine bir izometridir. Böylece m-uzaklığı koruyan Öklidyen izometriler, Önerme 2.27'de verilen tüm ötelemeler, Önerme 2.28'de verilen dönmeler, Önerme 2.29'da verilen yansımalar ve bunların bileşkeleridir.

Önerme 2.30 *Herhangibir $n \neq 0$ reel sayısı için $\rho(n) = \rho(-1/n)$ dir.*

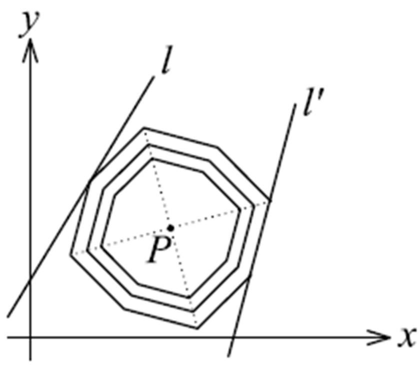
İspat *Önerme 2.27, Önerme 2.28 ve Önerme 2.29'da sırasıyla, iki nokta arasındaki m-uzaklığının düzlemdeki tüm ötelemeler, $b/a \neq \sqrt{2}-1$ olduğunda bir nokta etrafındaki $\pi/2$, π ve $3\pi/2$ radyanlık dönmeler ve $b/a = \sqrt{2}-1$ olduğunda bir nokta etrafındaki $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π, $5\pi/4$, $3\pi/2$, $7\pi/4$ radyanlık dönmeler, $n \in \left\{m, -\frac{1}{m}, \frac{m-1}{1+m}, \frac{m+1}{1-m}, \frac{(1-\sqrt{2})m-1}{(1-\sqrt{2})+m}, \frac{(1+\sqrt{2})m-1}{(1+\sqrt{2})+m}, \frac{(1-\sqrt{2})m+1}{(1-\sqrt{2})-m}, \frac{(1+\sqrt{2})m+1}{(1+\sqrt{2})-m}\right\}$ olmak üzere $y = nx + c$ doğrularına paralel doğrular etrafındaki yansımalarda değişmez kaldığı ifade edilmişti. Bu önermeler gereği iki nokta arasındaki m-uzaklığı değişmez kaldığından $\rho(n) = \rho(-1/n)$ olarak elde edilir.*

Önerme 2.31 *m-düzleminde verilen bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının bir $l : ax + by + c = 0$ doğrusuna m-uzaklığı*

$$d_m(P,l) = \begin{cases} \dfrac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{\max\left\{\frac{|a+bm|}{u}, \frac{|am-b|}{u}\right\}} & , \quad u = v \\[2ex] \dfrac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{\max\left\{\frac{|a(1-m)+b(1+m)|}{u}, \frac{|a(1+m)-b(1-m)|}{u}\right\}} & , \quad v = 0 \\[2ex] \dfrac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{\max\left\{\frac{|a+bm|}{u}, \frac{|am-b|}{u}, \frac{|a(1-m)+b(1+m)|}{u+v}, \frac{|a(1+m)-b(1-m)|}{u+v}\right\}} & , \quad 0 < v/u < 1 \end{cases}$$

eşitliği ile hesaplanabilir (Çolakoglu, 2009).

İspat *m-düzleminde verilen bir P noktasının bir l doğrusuna m-uzaklığı $d_m(P,l) = \min\limits_{X\in l} d_m(P,X)$ şeklinde tanımlanır. Bu uzaklık geometrik olarak P noktasını merkez kabul eden ve l doğrusu ile en az bir ortak noktası olan m-çemberlerinin en küçüğünün yarıçap uzunluğu olarak düşünülebilir. Bununla birlikte, aranan çember, l doğrusunu kesmeyen P merkezli bir m-çemberini doğruya değene kadar büyütmekle elde edilebilir. Bu düşünceler, verilen bir noktanın bir doğruya olan m-uzaklığını bulmak için kullanışlıdır. Bunun sebebi m-çemberinin çokgen oluşudur. Açıkça, istediğimiz uzaklığı bulmak için aradığımız m-çemberi, doğruya köşe noktalarından birinde teğettir ya da bir kenarı bu doğru üzerinde olur.*



Şekil 2.18 Genişleyen m-Çemberi

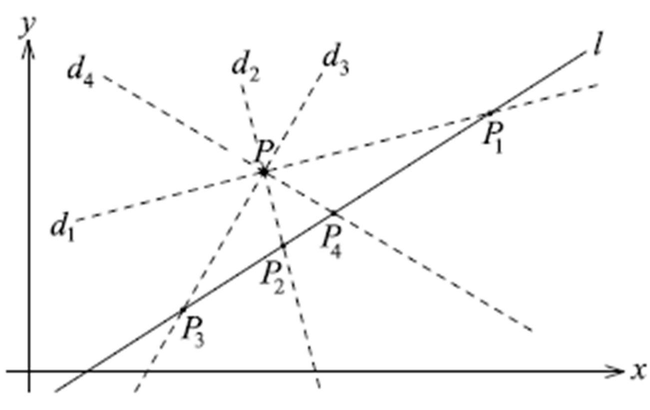
(i) Eğer $u = v$ ise m-çemberinin karşılıklı köşelerini birleştiren iki doğru vardır:

$$d_1 : mx - y - mx_0 + y_0 = 0 \text{ ve } d_2 : x + my - x_0 - my_0 = 0$$

(ii) Eğer $v = 0$ ise m-çemberinin karşılıklı köşelerini birleştiren iki doğru vardır:

$$d_3 : (m-1)x - (1+m)y - (m-1)x_0 + (1+m)y_0 = 0$$
$$d_4 : (m+1)x + (m-1)y - (m+1)x_0 - (m-1)y_0 = 0$$

(iii) Eğer $0 < v/u < 1$ ise m-çemberinin karşılıklı köşelerini birleştiren dört doğru vardır: Bunlar yukarıda ifade edilen d_1, d_2, d_3, d_4 doğrularıdır. Bu doğrulardan hiç birinin l doğrusuna paralel olmadığını ve d_1, d_2, d_3, d_4 doğrularının l doğrusu ile kesişimlerinin sırasıyla, P_1, P_2, P_3, P_4 noktaları olduğunu kabul edelim. P noktasının l doğrusuna m-uzaklığının



Şekil 2.19 m Düzlemde Verilen Bir Noktanın, Bir Doğruya Uzaklığı

$$d_m(P,l) = \begin{cases} \min\{d_m(P,P_1), d_m(P,P_2)\} & , \quad u = v \\ \min\{d_m(P,P_3), d_m(P,P_4)\} & , \quad v = 0 \\ \min\{d_m(P,P_1), d_m(P,P_2), d_m(P,P_3), d_m(P,P_4)\} & , \quad 0 < v/u < 1 \end{cases}$$

olacağı aşikardır. Hesaplamalardan sonra bu noktaların koordinatları,

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\tfrac{bmx_0 - by_0 - c}{a+bm}, \tfrac{-amx_0 + ay_0 - cm}{a+bm}\right) \\ P_2 &= \left(\tfrac{bx_0 - bmy_0 - mc}{am-b}, \tfrac{ax_0 + amy_0 + c}{am-b}\right) \\ P_3 &= \left(\tfrac{b(1+m)x_0 - b(1-m)y_0 - (1-m)c}{a(1-m)+b(1+m)}, \tfrac{-a(1+m)x_0 + a(1-m)y_0 - c(1+m)}{a(1-m)+b(1+m)}\right) \\ P_4 &= \left(\tfrac{-b(1-m)x_0 - b(1+m)y_0 - (1+m)c}{a(1+m)-b(1-m)}, \tfrac{a(1-m)x_0 + a(1+m)y_0 + c(1-m)}{a(1+m)-b(1-m)}\right) \end{aligned}$$

şeklinde, aranan uzaklıklar da

$$d_m(P,P_1) = \frac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{\frac{|a+bm|}{u}} \qquad d_m(P,P_2) = \frac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{\frac{|am-b|}{u}}$$

$$d_m(P,P_3) = \frac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{\frac{|a(1-m)+b(1+m)|}{u+v}} \qquad d_m(P,P_4) = \frac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{\frac{|a(1+m)-b(1-m)|}{u+v}}$$

şeklinde bulunur. Burada m değeri $-a/b$, b/a, $(a+b)/(a-b)$ ve $-(a-b)/(a+b)$ değerlerini alamayacağından, $u > 0$ olduğundan ve a ve b nin ikisi birden sıfır olamayacağından verilen ifadelerin hepsinin tanımlı olduğuna dikkat ediniz. Açıkça, payları aynı olan kesirli ifadenin minimumu, paydası maksimum olandır. Bu gerçek, d_1, d_2, d_3, d_4 doğrularından hiçbirinin l doğrusuna paralel olmadığı durumda, önermede verilen formülün geçerli olduğunun ispatıdır. Eğer bu doğrulardan biri l doğrusuna paralel ise, açıkça, P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarından biri var olmayacaktır. Böylece P noktasının var olmayan noktaya uzaklığı söz konusu olmayacaktır. O halde, d_1, d_2, d_3, d_4 doğrularından biri l doğrusuna paralel olduğunda da yukarıdaki eşitlik geçerli olur. Bu doğrulardan en çok birinin l doğrusuna paralel olacağı açıktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 2.32 *Analitik düzlemde dikey olmayan bir l doğrusu ve bir P noktası verilsin.Eğer l doğrusunun eğimi n ise, o zaman*

$$\tau(n) = \begin{cases} \dfrac{\max\left\{\frac{|1+nm|}{u}, \frac{|m-n|}{u}\right\}}{\sqrt{(1+n^2)(1+m^2)}} & , \quad u = v \\[2ex] \dfrac{\max\left\{\frac{|n(1-m)-(1+m)|}{u}, \frac{|n(1+m)+(1-m)|}{u}\right\}}{\sqrt{(1+n^2)(1+m^2)}} & , \quad v = 0 \\[2ex] \dfrac{\max\left\{\frac{|1+nm|}{u}, \frac{|m-n|}{u}, \frac{|n(1-m)-(1+m)|}{u+v}, \frac{|n(1+m)+(1-m)|}{u+v}\right\}}{\sqrt{(1+n^2)(1+m^2)}} & , \quad 0 < v/u < 1 \end{cases}$$

olmak üzere,

$$d_E(P,l) = \tau(n) d_m(P,l)$$

dir. Eğer l dikey bir doğru ise, o zaman

$$\tau(n) = \begin{cases} \dfrac{\max\left\{\frac{1}{u}, \frac{|m|}{u}\right\}}{\sqrt{(1+m^2)}} & , \quad u = v \\[2ex] \dfrac{\max\left\{\frac{|1+m|}{u}, \frac{|1-m|}{u}\right\}}{\sqrt{(1+m^2)}} & , \quad v = 0 \\[2ex] \dfrac{\max\left\{\frac{1}{u}, \frac{|m|}{u}, \frac{|1+m|}{u+}, \frac{|1-m|}{u+v}\right\}}{\sqrt{(1+m^2)}} & , \quad 0 < v/u < 1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$d_E(P,l) = \tau(n) d_m(P,l)$$

dir.

İspat *Eğer l doğrusu dikey bir doğru değil ise, o zaman $b \neq 0$ ve $n = -\frac{a}{b}$ dir. Bu eşitlik yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa*

$$d_E(P,l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|\,(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

ve

$$d_m(P,l) = \begin{cases} \dfrac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{|b| \max\left\{\frac{|1+nm|}{u}, \frac{|m-n|}{u}\right\}} & , \quad u = v \\[2ex] \dfrac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{|b| \max\left\{\frac{|n(1-m)-(1+m)|}{u}, \frac{|n(1+m)+(1-m)|}{u}\right\}} & , \quad v = 0 \\[2ex] \dfrac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{|b| \max\left\{\frac{|1+nm|}{u}, \frac{|m-n|}{u}, \frac{|n(1-m)-(1+m)|}{u}, \frac{|n(1+m)+(1-m)|}{u}\right\}} & , \quad 0 < v/u < 1 \end{cases}$$

olduğu için

$$\tau(n) = \begin{cases} \dfrac{\max\left\{\frac{|1+nm|}{u}, \frac{|m-n|}{u}\right\}}{\sqrt{(1+n^2)(1+m^2)}} & , \quad u = v \\[2ex] \dfrac{\max\left\{\frac{|n(1-m)-(1+m)|}{u}, \frac{|n(1+m)+(1-m)|}{u}\right\}}{\sqrt{(1+n^2)(1+m^2)}} & , \quad v = 0 \\[2ex] \dfrac{\max\left\{\frac{|1+nm|}{u}, \frac{|m-n|}{u}, \frac{|n(1-m)-(1+m)|}{u+v}, \frac{|n(1+m)+(1-m)|}{u+v}\right\}}{\sqrt{(1+n^2)(1+m^2)}} & , \quad 0 < v/u < 1 \end{cases}$$

olarak bulunur.

Eğer l doğrusu dikey bir doğru ise, o zaman $b = 0$ ve $a \neq 0$ dır. Bu yüzden, $d_E(P,l) = |ax_0 + c| \, / \, |a|$ ve

$$d_m(P,l) = \begin{cases} \frac{|ax_0+c|\sqrt{1+m^2}}{|a| \max\left\{\frac{|1|}{u}, \frac{|m|}{u}\right\}} & , \quad u = v \\ \\ \frac{|ax_0+c|\sqrt{1+m^2}}{|a| \max\left\{\frac{|1+m|}{u}, \frac{|1-m|}{u}\right\}} & , \quad v = 0 \\ \\ \frac{|ax_0+c|\sqrt{1+m^2}}{|a| \max\left\{\frac{|1|}{u}, \frac{|m|}{u}, \frac{|1+m|}{u+v}, \frac{|1-m|}{u+v}\right\}} & , \quad 0 < v/u < 1 \end{cases}$$

olup

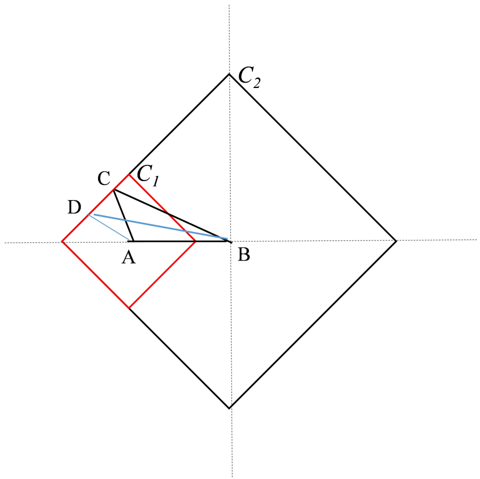
$$\tau(n) = \begin{cases} \frac{\max\left\{\frac{1}{u}, \frac{|m|}{u}\right\}}{\sqrt{(1+m^2)}} & , \quad u = v \\ \\ \frac{\max\left\{\frac{|1+m|}{u}, \frac{|1-m|}{u}\right\}}{\sqrt{(1+m^2)}} & , \quad v = 0 \\ \\ \frac{\max\left\{\frac{1}{u}, \frac{|m|}{u}, \frac{|1+m|}{u+}, \frac{|1-m|}{u+v}\right\}}{\sqrt{(1+m^2)}} & , \quad 0 < v/u < 1 \end{cases}$$

olarak elde edilir.

3. TAKSİ GEOMETRİ

Bu bölümde Taksi düzleminde bir üçgenin alanını Taksi uzaklıkları cinsinden veren üç farklı alan formülü verilecektir. Bu formüllerden ikisi Öklidyen düzlemde bir üçgenin standart alan formülünün Taksi versiyonlarıdır. Üçüncüsü ise bölümün ikinci kısmında verilen Öklid düzlem geometrisinde iyi bilinen Heron formülünün Taksi karşılığı olup Özcan ve Kaya (2003)'teki gibi verilmektedir.

Burada ele alınan alan kavramı alışılmış Öklidyen alan kavramıdır. Taksi düzleminde karşılıklı kenarlarının Taksi uzunlukları aynı olan ancak alanları farklı olan üçgenlerin varlığı kolaylıkla görülebilir. Buna bir örnek olarak Şekil 3.1.'e bakılabilir.



Şekil 3.1 Taksi Uzunlukları Aynı, Alanları Farklı Üçgenler

Şekilde AB, x-eksenine paralel bir doğru olsun. C_1, A merkezli ve b yarıçaplı bir Taksi çemberi ve C_2, B merkezli ve $b+c$ yarıçaplı bir Taksi çemberi olsun. Ayrıca C ve D de $C_1 \cap C_2$ de AB doğrusuna göre simetrik olmayan iki nokta olsun. Buna göre açıkça $d_T(A,C) = d_T(A,D)$ ve $d_T(B,C) = d_T(B,D)$ dir. Fakat $A(\overset{\triangle}{ABC}) \neq A(\overset{\triangle}{ABD})$ olur. Bu gerçek ise "Taksi düzlemde bir üçgenin alanı nasıl hesaplanır?" sorusunun ortaya çıkmasına sebep olur. Açıkça bir üçgenin alanını hesaplamak için verilen her formül bazı parametrelere bağlıdır. Burada Taksi düzlemde farklı parametreler kullanarak bir üçgenin alanını hesaplamak için üç formül verilecektir.

3.1 Taksi Düzleminde Bir Üçgenin Standart Alan Formülleri

$\overset{\triangle}{ABC}$, Öklidyen düzlemde bir üçgen ve H, üçgenin A köşesinden BC doğrusuna inilen dikme ayağı olsun. $a = d_E(B, C)$, $h = d_E(A, H)$ veya $h = d_E(A, BC)$ olmak üzere $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgenin standart alan formülü

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$$

şeklindedir. Bu kısımda Taksi uzaklıkları cinsinden üçgenin standart alan formülünün iki Taksi karşılığı verilecektir. Verilen formüllerde **a** $=d_T(B, C)$, **h** $= d_T(A, H)$ veya **h** $= d_T(A, BC)$ olmak üzere bir parametre kullanılmıştır. Bu parametre de taban doğru parçasının eğimidir.

Kartezyen koordinat düzlemindeki iki nokta arasındaki Öklidyen ve Taksi uzaklıklarına ilişkin bağıntı Yardımcı Teorem 2.1'de verilmişti. Bu bağıntı alan formülünün ilk Taksi karşılığında önemli bir rol oynamaktadır. Aşağıdaki teorem bir üçgenin iyi bilinen Öklidyen alan formülünün taksi benzerini vermektedir.

Teorem 3.1 *$\overset{\triangle}{ABC}$, Taksi düzlemde bir üçgen; H, üçgenin A köşesinden BC doğrusuna inilen dikme ayağı ve m de BC doğrusunun eğimi olsun. Ayrıca* **a** $=d_T(B, C)$, **h** $= d_T(A, H)$ *olsun. Buna göre,*

(i) BC doğrusu herhangi bir koordinat eksenine paralel ise $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ dir.

(ii) BC doğrusu herhangi bir koordinat eksenine paralel değil ise $\rho(m) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}$ olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = [\rho(m)]^2 \frac{\mathbf{ah}}{2}$ dir.

İspat $a = d_E(B, C)$, $h = d_E(A, H)$ *olmak üzere Öklidyen geometriden iyi bilinir ki* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *dir.*

(i) BC doğrusu herhangi bir koordinat eksenine paralel olsun. m, BC doğrusunun eğimi olmak üzere $m \in \{0, \infty\}$ dur. AH, BC ye dik olduğundan AH nin eğimi 0 veya ∞ dur. Buna göre Yardımcı Teorem 2.1'deki λ parametresi 1 olur. Yani **a** $=a$ *ve* **h** $=h$ *dir. Bu nedenle açıkça* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ *olur.*

(ii) BC doğrusu herhangi bir koordinat eksenine paralel olmasın ve m, BC doğrusunun eğimi olsun. Bu durumda AH ın eğimi $-\frac{1}{m}$ olur. Kolaylıkla görülebilir ki $\lambda(m) = \lambda(-\frac{1}{m})$ dir. Yardımcı Teorem 2.1'ten dolayı $a = \lambda(m)\mathbf{a}$ ve $h = \lambda(m)\mathbf{h}$ olur. Buna göre $A(\overset{\triangle}{ABC}) = [\rho(m)]^2 \frac{\mathbf{ah}}{2}$ olarak bulunur.

Önerme 2.5'te Taksi düzleminde bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının, bir $l : ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığının

$$d_T(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|\}}$$

olduğu verilmişti. Ayrıca kartezyen koordinat düzleminde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığının Taksi uzaklık ile Öklidyen uzaklık arasındaki bağıntı Önerme 2.6'da verilmişti. Bu bağıntı aşağıdaki gibi ifade edilen alan formülünün ikinci Taksi benzeri için önemlidir.

Teorem 3.2 *$\overset{\triangle}{ABC}$, Taksi düzlemde bir üçgen, m de BC doğrusunun eğimi,* $\mathbf{a} = d_T(B, C)$, $\mathbf{h} = d_T(A, H)$ *olsun. Buna göre,*

(i) BC doğrusu herhangi bir koordinat eksenine paralel ise $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ dir.

(ii) BC doğrusu herhangi bir koordinat eksenine paralel değil ise $\sigma(m) = \frac{\max\{1,|m|\}}{1+|m|}$ olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \sigma(m)\frac{\mathbf{ah}}{2}$ dir.

İspat *$a = d_E(B, C)$ ve $h = d_E(A, BC)$ olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ olduğu bilinmektedir.*

(i) BC doğrusu herhangi bir koordinat eksenine paralel ise $m \in \{0, \infty\}$ dur. Bu taktirde $\mathbf{a} = a$ ve $h = \mathbf{h}$ olur. Bu nedenle açıkça $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ olarak bulunur.

(ii) BC doğrusu herhangi bir koordinat eksenine paralel olmasın ve m, BC doğrusunun eğimi olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.1 ve Önerme 2.6 gereğince $a = \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|}\mathbf{a}$ ve $h = \frac{\max\{1,|m|\}}{\sqrt{1+m^2}}\mathbf{h}$ olur. Böylece $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \sigma(m)\frac{\mathbf{ah}}{2}$ olmaktadır.

3.2 Heron Formülünün Taksi Benzeri

Bu kısımda Öklidyen düzlem için çok iyi bilinen Heron formülünün taksi düzlemindeki karşılığı verilmektedir. Öklid düzleminde iyi bilinen

$$\text{Üçgenin Alanı} = (\text{Taban} \times \text{Yükseklik})/2$$

formülü Taksi düzleminde genel olarak geçerli değildir. Bu formülün aynen geçerli olması için gerek ve yeter koşul üçgenin tabanın koordinat eksenlerinden birine paralel olmasıdır. Çünkü bu durumda Öklidyen ve Taksi uzaklıkları aynıdır. Ayrıca bir üçgenin alanı üçgenin üç kenarının uzunlukları kullanılarak da hesaplanabilir. a, b, c herhangi bir üçgenin kenar uzunlukları olsun. $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ yarı çevre olmak üzere üçgenin alanı

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

şeklinde de bulunabilir. Bu formül Heron formülü olarak bilinir. Taksi düzleminde bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin kenar uzunlukları

$$\mathbf{a} = d_T(B,C) \quad , \quad \mathbf{b} = d_T(A,C) \quad , \quad \mathbf{c} = d_T(A,B)$$

ve Taksi yarıçevresi

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$$

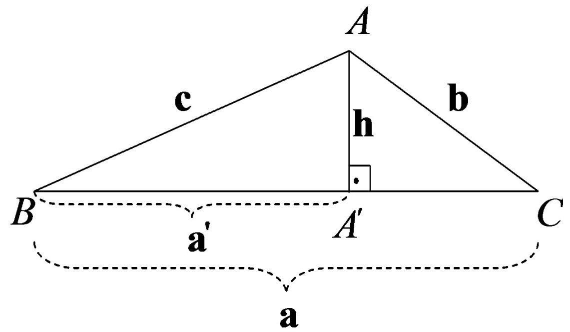
olsun. Ayrıca temel kavramlar kısmında belirtilen doğru sınıflandırılmasını ve temel köşe, temel doğru gibi kavramlar kullanılmaktadır. Aşağıdaki önermeler Heron formülünün bazı özel durumlardaki Taksi karşılıklarını vermektedir.

Önerme 3.1 *Taksi düzlemde, herhangi bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin bir kenarı, örneğin BC kenarı, koordinat eksenlerinden birisine paralel olsun. Ayrıca üçgenin B ve C köşelerindeki açılardan hiçbiri geniş açı değilse, $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanı*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) \;=\; \tfrac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{p}-\mathbf{a})$$

dır.

İspat *BC kenarı $x-$eksenine paralel olacak şekilde bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni gözönüne alınsın. Üçgenin A köşesinden inilen dikmenin ayağı A' ile gösterilmek üzere $\mathbf{h} = d_T(A, A')$ ve $\mathbf{a}' = d_T(B, A')$ olsun. Buna göre*



Şekil 3.2 B ve C Açıları Geniş Açı Olmayan ABC Üçgeni

Şekil 3.2.'de oluşan $\overset{\triangle}{ABA'}$ ve $\overset{\triangle}{AA'C}$ üçgenleri ele alındığında

$$\mathbf{a}' = \mathbf{c} - \mathbf{h} \qquad \textit{ve} \qquad \mathbf{b} = \mathbf{h} + (\mathbf{a} - \mathbf{a}')$$

eşitliklerine ulaşabiliriz. Bu eşitliklerden

$$\mathbf{b} = \mathbf{h} + (\mathbf{a} - \mathbf{c} + \mathbf{h}) \qquad \textit{ve} \qquad \mathbf{h} = \tfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a}}{2}$$

olarak elde ederiz. Elde edilen bu değerler $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2}\mathbf{ah}$ ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} A(\overset{\triangle}{ABC}) &= \tfrac{1}{2}\mathbf{ah} \\ &= (\tfrac{\mathbf{a}}{2})(\tfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a}}{2}) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \end{aligned}$$

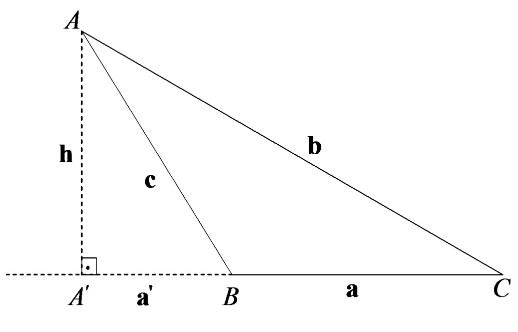
olarak bulunur. Kalan diğer tüm durumlarda verilen bir üçgenin alanını bulmak için her durumda yeniden $\mathbf{a}'$ *taksi uzunluk parametresini tanımlamamız gerekmektedir.*

Önerme 3.2 *Taksi düzlemde, herhangi bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin bir kenarı, örneğin BC kenarı, koordinat eksenlerinden birisine paralel olsun. Ayrıca üçgenin B ve C köşelerindeki açılardan biri, örneğin B açısı, geniş açı ise, üçgenin A köşesinden inilen dikmenin ayağı A' ve $\mathbf{a}' = d_T(B, A')$ olmak üzere $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanı;*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{p} + (\mathbf{a} + \mathbf{a}')$$

dür.

İspat *BC kenarı $x-$eksenine paralel ve B köşesindeki geniş açı olacak şekilde bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni gözönüne alınsın. Üçgenin A köşesinden inilen dikmenin ayağı A' ile gösterilmek üzere $\mathbf{h} = d_T(A, A')$ ve $\mathbf{a}' = d_T(B, A')$ olsun. Buna göre*



Şekil 3.3 B Açısı Geniş Açı Olan ABC Üçgeni

Şekil 3.3.'te oluşan $\overset{\triangle}{ACA'}$ *ve* $\overset{\triangle}{AA'B}$ *üçgenleri ele alındığında*

$$\mathbf{h} = \mathbf{b} - (\mathbf{a} + \mathbf{a}') \qquad ve \qquad \mathbf{h} = \mathbf{c} - \mathbf{a}'$$

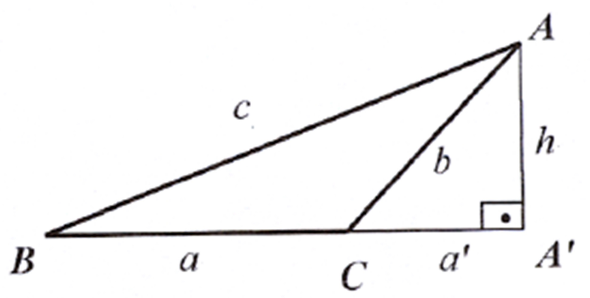
olduğu anlaşılır. Bu eşitlikler yardımıyla

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu değerler $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2}\mathbf{ah}$ *ifadesinde kullanılırsa*

$$\begin{aligned} A(\overset{\triangle}{ABC}) &= \tfrac{1}{2}\mathbf{ah} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{b} - (\mathbf{a} + \mathbf{a}')) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{a}(\tfrac{\mathbf{b}+\mathbf{b}}{2} - (\mathbf{a} + \mathbf{a}')) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{a}(\tfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} - (\mathbf{a} + \mathbf{a}')) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{p} - (\mathbf{a} + \mathbf{a}')) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde BC *kenarı* $x-$*eksenine paralel ve* C *köşesindeki geniş açı olacak şekilde bir* ABC *üçgeni gözönüne alınsın.*



Şekil 3.4 C Açısı Geniş Açı Olan ABC Üçgeni

Buna göre Şekil 3.4.'te oluşan $\overset{\triangle}{ABA'}$ *ve* $\overset{\triangle}{AA'C}$ *üçgenleri ele alındığında*

$$\mathbf{h} = \mathbf{c} - (\mathbf{a} + \mathbf{a}') \qquad ve \qquad \mathbf{h} = \mathbf{b} - \mathbf{a}'$$

olduğu anlaşılır.Bu eşitlikler yardımıyla

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu değerler $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2}\mathbf{ah}$ *ifadesinde kullanılırsa*

$$\begin{aligned} A(\overset{\triangle}{ABC}) &= \tfrac{1}{2}\mathbf{ah} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{c} - (\mathbf{a} + \mathbf{a}')) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{a}(\tfrac{\mathbf{c}+\mathbf{c}}{2} - (\mathbf{a} + \mathbf{a}')) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{a}(\tfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} - (\mathbf{a} + \mathbf{a}')) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{p} - (\mathbf{a} + \mathbf{a}')) \end{aligned}$$

olarak bulunacaktır.

Sonuç 3.1 *Taksi düzlemde verilen bir* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin* BC *kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel olsun. O halde* B *açısı ya da* C *açısı için* $B \geq \pi/2$ *veya* $C \geq \pi/2$ *ise sırasıyla* $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ *ya da* $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ *dir.*

Şimdi temel kavramlar kısmında belirtilen temel köşe, temel doğru, temel doğru parçası kavramlarını kullanarak hiçbir kenarı herhangi bir koordinat eksenine paralel olmayan üçgenler için Heron formülünün Taksi benzeri verilmektedir.

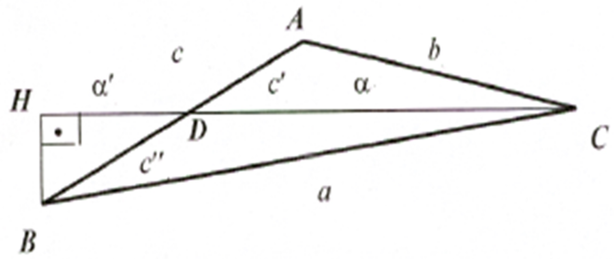
Teorem 3.3 $\overset{\triangle}{ABC}$ *Taksi düzlemde bir üçgen olsun.* D*, temel doğru ile karşısındaki kenarın kesim noktası,* H *geriye kalan iki köşeden birinin temel doğru parçası üzerinde olmayan temel doğruya inilen dikme ayağı ve* H' *de üçüncü köşeden temel doğru parçası üzerinde olmayan temel doğruya inilen dikme ayağı olsun.* α*, temel doğru parçasının Taksi uzunluğu,* $\alpha' = d_T(D, H)$ *ve* $\alpha'' = ($*Temel köşe,* $H')$ *olmak üzere* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin alanı*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \begin{cases} \alpha(\mathbf{p} - (\alpha + \alpha'))/2 & , \quad \text{temel köşeden geçen bir tek temel doğru var ise,} \\ \alpha(\mathbf{p} - (\alpha + \alpha' + \alpha''))/2 & , \quad \text{temel köşeden geçen iki temel doğru var ise,} \end{cases}$$

ile hesaplanabilir.

İspat *Düzlemdeki herhangi bir üçgen için temel doğrunun geçtiği en az bir temel köşe vardır. O halde* C*,* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin temel köşesi,* C *köşesinden geçen temel doğru* l_c *ve temel doğrunun* AB *kenarını kestiği nokta* D *olsun.* B *den* l_c *ye inilen dikmenin ayağı* H *olsun ve* H*,* CD *doğru parçası üzerinde olmasın. Bu seçimi* A *ve* B *simetrik rollere sahip olduğundan her zaman mümkündür.* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeni,* $\overset{\triangle}{ADC}$ *ve* $\overset{\triangle}{BDC}$ *üçgenlerinin* *birleşimidir. Eğer* $\mathbf{c}' = d_T(A,D)$ *ve* $\mathbf{c}'' = d_T(B,D)$ *ise* $\overset{\triangle}{ADC}$ *ve* $\overset{\triangle}{BDC}$ *üçgenlerinin taksi yarı çevre uzunlukları sırasıyla* $\mathbf{p}' = (\alpha + \mathbf{b} + \mathbf{c}')/2$ *ve* $\mathbf{p}'' = (\alpha + \mathbf{a} + \mathbf{c}'')/2$ *dir. Buradan* $\mathbf{p} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/2$ *eşitliğini kullanarak* $\mathbf{p}' + \mathbf{p}'' = \mathbf{p} + \alpha$ *olarak elde edilir. O halde* C *den geçen temel doğru sayısına göre iki başlıca durum söz konusudur:*

I. Durum: *l_c, C den geçen tek temel doğru olsun. Buna göre,*



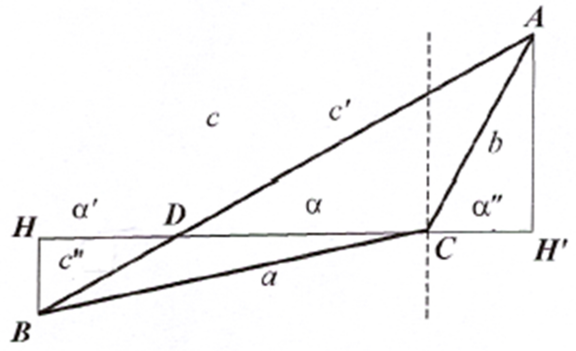
Şekil 3.5 C Köşesinden Tek Temel Doğru Geçen ABC Üçgeni

$\overset{\triangle}{ADC}$ üçgeninin alanı $A(\overset{\triangle}{ADC}) = \alpha(\mathbf{p}' - \alpha)/2$ eşitliği ve $\overset{\triangle}{BDC}$ üçgeninin alanı $A(\overset{\triangle}{BDC}) = \alpha(\mathbf{p}'' - (\alpha + \alpha'))/2$ eşitliği ile bulunur. Buradan $\mathbf{p}' + \mathbf{p}'' = \mathbf{p} + \alpha$ eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ADC}) + A(\overset{\triangle}{BDC}) \\ &= \alpha(\mathbf{p}' - \alpha)/2 + \alpha(\mathbf{p}'' - (\alpha + \alpha'))/2 \\ &= \alpha(\mathbf{p} - (\alpha + \alpha'))/2 \end{aligned}$$

dir.

II. Durum: C den geçen iki temel doğru var olsun. O halde



Şekil 3.6 C Köşesinden İki Temel Doğru Geçen ABC Üçgeni

$\overset{\triangle}{ADC}$ üçgeninin alanı $A(\overset{\triangle}{ADC}) = \alpha(\mathbf{p}' - (\alpha + \alpha''))/2$ eşitliği ve $\overset{\triangle}{BDC}$ üçgeninin alanı $A(\overset{\triangle}{BDC}) = \alpha(\mathbf{p}'' - (\alpha + \alpha'))/2$ eşitliği ile bulunur. Buradan $\mathbf{p}' + \mathbf{p}'' = \mathbf{p} + \alpha$ eşitliğini kullanarak,

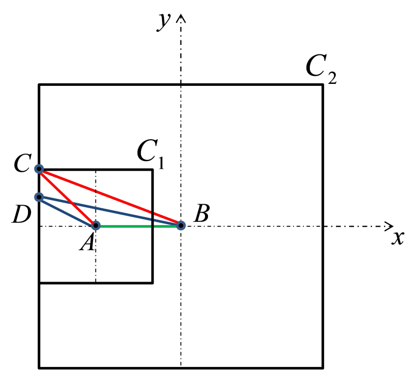
$$\begin{aligned} A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ADC}) + A(\overset{\triangle}{BDC}) \\ &= \alpha(\mathbf{p}' - (\alpha + \alpha''))/2 + \alpha(\mathbf{p}'' - (\alpha + \alpha'))/2 \\ &= \alpha(\mathbf{p} - (\alpha + \alpha' + \alpha''))/2 \end{aligned}$$

dir. Burada $(\alpha + \alpha' + \alpha'') = d_T(H, H')$ dür.

4. MAKSİMUM GEOMETRİ

Bu bölümde Maksimum düzlemde bir üçgenin alanını Maksimum uzunlukları cinsinden veren üç farklı alan formülü Ermiş ve Gelişgen (2015)'teki gibi verilecektir. Ayrıca farklı bir yaklaşım için Salihova (2006)'ya da bakılabilir. Burada sunulacak formüllerden ikisi Öklidyen düzlemde bir üçgenin standart alan formülünün Maksimum benzerleri olup ilk kısımda verilecektir. Bölümün ikinci kısmında ise Öklidyen düzlem geometride iyi bilinen Heron formülünün Maksimum karşılığı verilecektir.

Burada ele alınan alan kavramı alışılmış Öklidyen alan kavramıdır. Maksimum düzleminde karşılıklı kenarlarının Maksimum uzunlukları aynı olan ancak alanları farklı olan üçgenlerin varlığı kolaylıkla görülebilir. Aşağıdaki Şekil 4.1. bu duruma bir örnek olarak verilmiştir.



Şekil 4.1 Maksimum Uzunlukları Aynı, Alanları Farklı Üçgenler

Şekilde AB, x-eksenine paralel bir doğru olsun. C_1, A merkezli ve b yarıçaplı bir Maksimum çemberi ve C_2, B merkezli ve $b+c$ yarıçaplı bir Maksimum çemberi olsun. Ayrıca C ve D de $C_1 \cap C_2$ de AB doğrusuna göre simetrik olmayan iki nokta olmak üzere $d_M(A,C) = d_M(A,D)$ ve $d_M(B,C) = d_M(B,D)$ olmasına rağmen $A(\overset{\triangle}{ABC}) \neq A(\overset{\triangle}{ABD})$ dir. Bu durumda "Maksimum düzleminde bir üçgenin alanı nasıl hesaplanır?" sorusu akla gelmektedir. Bir üçgenin alanını hesaplamak için verilen her formül bir takım parametrelere bağlı olur. Bu bölümde Maksimum düzleminde farklı parametreleri kullanarak bir üçgenin alanını hesaplamak için üç formül verilecektir.

4.1 Maksimum Düzleminde Bir Üçgenin Alanı

$\overset{\triangle}{ABC}$ Öklidyen düzlemde bir üçgen ve H, üçgenin A köşesinden BC doğrusuna inilen dikme ayağı olsun. $a = d_E(B,C)$, $h = d_E(A,H)$ veya $h = d_E(A,BC)$ olmak üzere $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgenin standart alan formülü

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$$

şeklindedir. Bu kısımda Maksimum uzaklıkları cinsinden üçgenin standart alan formülünün iki maksimum karşılığı verilecektir. Verilen formüllerde **a** $=d_M(B,C)$, **h** $= d_M(A,H)$ veya **h** $= d_M(A,BC)$ olmak üzere bir parametre kullanılmıştır. Bu parametre taban doğru parçasının üzerinde bulunduğu doğrunun eğimidir.

Analitik düzlemde iki nokta arasındaki Öklidyen ve Maksimum uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısı Yardımcı Teorem 2.2'de verilmişti. Bu bağıntı alan formülünün ilk maksimum karşılığında önemli bir rol oynamaktadır. Aşağıdaki teorem bir üçgenin iyi bilinen Öklidyen alan formülünün Maksimum benzerini vermektedir.

Teorem 4.1 *$\overset{\triangle}{ABC}$, Maksimum düzleminde bir üçgen; H, üçgenin A köşesinden BC doğrusuna inilen dikme ayağı ve m de BC doğrusunun eğimi olsun. Ayrıca* **a** $=d_M(B,C)$, **h** $= d_M(A,H)$ *olsun. Bu taktirde,*

(i) BC doğrusun koordinat eksenlerinden birine paralel ise $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ dir.

(ii) BC doğrusu herhangibir koordinat eksenine paralel değil ise

$$\rho(m) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} & , \quad |m| < 1 \text{ ise} \\ \\ \frac{|m|}{\sqrt{1+m^2}} & , \quad |m| > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = [\rho(m)]^2 \, \frac{\mathbf{ah}}{2}$ dir.

İspat *$a = d_E(B,C)$ ve $h = d_E(A,H)$ olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ dir.*

(i) BC doğrusu koordinat eksenlerinden birine paralel ise m, BC doğrusunun eğimi olmak üzere $m \in \{0, \infty\}$ olur. AH, BC ye dik olduğundan AH nin eğimi ise 0 veya ∞ olur. Bu taktirde Yardımcı Teorem 2.2'deki $\rho(m)$ parametresi 1 olur. Yani **a** $=a$ *ve* **h** $=h$ *dir. Bu nedenle açıkça $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ dir.*

(ii) BC doğrusu herhangi bir koordinat eksenine paralel olmasın ve m, BC doğrusunun eğimi olsun. Bu durumda AH ın eğimi $-\frac{1}{m}$ olur. Yardımcı Teorem 2.3'e göre $\rho(m) = \rho(-\frac{1}{m})$ dir. Yardımcı Teorem 2.2'den dolayı da $a = \rho(m)\mathbf{a}$ ve $h = \rho(m)\mathbf{h}$ olur. Buna göre $A(\overset{\triangle}{ABC}) = [\rho(m)]^2 \frac{\mathbf{ah}}{2}$ olarak bulunur.

Önerme 2.11'de Maksimum düzleminde bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının, bir $l : ax+by+c = 0$ doğrusuna uzaklığının

$$d_M(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a| + |b|}$$

olduğu verilmişti. Ayrıca kartezyen koordinat düzleminde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığının Maksimum ve Öklidyen uzaklıkları arasındaki bağıntı Önerme 2.12'de verilmişti. Bu bağıntı aşağıdaki gibi ifade edilen alan formülünün ikinci Maksimum benzeri için önemlidir.

Teorem 4.2 *$\overset{\triangle}{ABC}$, Maksimum düzleminde bir üçgen, m de BC doğrusunun eğimi, $\mathbf{a}$ $=d_M(B, C)$, $\mathbf{h} = d_M(A, H)$ olsun. Buna göre,*

(i) BC doğrusu herhangi bir koordinat eksenine paralel ise $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ dir.

(ii) BC doğrusu herhangi bir koordinat eksenine paralel değil ise

$$\sigma(m) = \frac{\max\{|1+m|, |1-m|\}}{\max\{1, |m|\}}$$

olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \sigma(m)\frac{\mathbf{ah}}{2}$ dir.

İspat *$a = d_E(B, C)$ ve $h = d_E(A, BC)$ olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ olduğu bilinmektedir.*

(i) BC doğrusu herhangibir koordinat eksenine paralel ise $m \in \{0, \infty\}$ olur. Bu taktirde $\mathbf{a} = a$ ve $h = \mathbf{h}$ olacağından $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ olur.

(ii) BC doğrusu herhangibir koordinat eksenine paralel değil ise m, BC doğrusunun eğimi olmak üzere Yardımcı Teorem 2.2 ve Önerme 2.12 gereğince için $a = \rho(m)\mathbf{a}$ ve $h = \tau(m)\mathbf{h}$ olur. Bundan dolayı $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2} = \rho(m)\tau(m)\frac{\mathbf{ah}}{2}$=$\sigma(m)\frac{\mathbf{ah}}{2}$ olarak elde edilir. Yani $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \sigma(m)\frac{\mathbf{ah}}{2}$.olur.

4.2 Heron Formülünün Maksimum Benzeri

Bu kısımda Öklidyen düzlem için çok iyi bilinen Heron formülünün Maksimum düzlemindeki karşılığı verilmektedir. Öklid düzleminde iyi bilinen

$$\text{Üçgenin Alanı} = (\text{Taban} \times \text{Yükseklik})/2$$

formülü Maksimum düzleminde genel olarak geçerli değildir. Bu formülün geçerli olması için gerek ve yeter koşul üçgenin tabanın koordinat eksenlerinden birine paralel olmasıdır. Çünkü bu durumda Öklidyen ve Maksimum uzaklıkları aynıdır. Ayrıca bir üçgenin alanı üçgenin üç kenarının uzunlukları kullanılarak da hesaplanabilir. a, b, c herhangi bir üçgenin kenar uzunlukları olsun. $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ yarı çevre olmak üzere üçgenin alanı A;

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

şeklinde de bulunabilir. Bu formül Heron formülü olarak bilinir. Maksimum düzlemde bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin kenar uzunlukları

$$\mathbf{a} = d_M(B,C) \quad , \quad \mathbf{b} = d_M(A,C) \quad , \quad \mathbf{c} = d_M(A,B)$$

ve maksimum yarıçevresi

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$$

olsun. Ayrıca temel kavramlar kısmında belirtilen doğru sınıflandırılmasını ve temel köşe, temel doğru gibi kavramlar kullanılmaktadır. Aşağıdaki teorem Heron formülünün Maksimum karşılığını vermektedir.

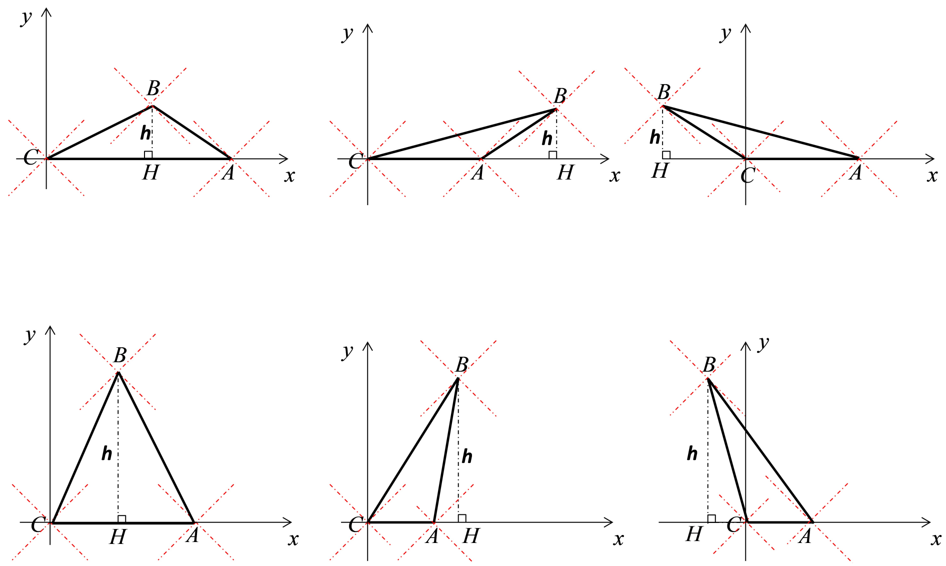
Teorem 4.3 *Maksimum düzlemde, herhangi bir* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin bir kenarı, örneğin* AC *kenarı*, x*-eksenine paralel olsun. Ayrıca üçgenin* B *köşesinden inilen dikmenin ayağı* H, $\mathbf{h} = d_M(B,H)$, $\mathbf{a} = d_M(B,C)$, $\mathbf{b} = d_M(A,C)$, $\mathbf{c} = d_M(A,B)$ *ve* $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$ *olmak üzere* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin Maksimum düzlemdeki alanı,*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2}\mathbf{h}\,(2\mathbf{p} - (\mathbf{a}+\mathbf{c}))$$

olarak tanımlanan Heron formülünün maksimum benzeri yardımıyla bulunur.

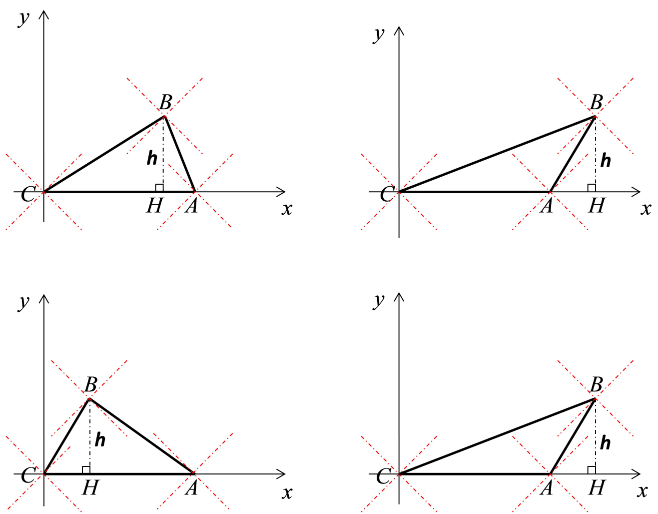
İspat *Maksimum düzlemde* AC *kenarı* $x-$*eksenine paralel olacak şekilde bir* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeni gözönüne alınsın. Üçgenin* B *köşesinden inilen dikmenin ayağı* H *ile gösterilmek üzere* $\mathbf{h} = d_M(B,H)$ *ve* $\mathbf{b} = d_M(A,C)$ *ve* $\mathbf{c} = d_M(A,B)$ *olsun. Bu durumda maksimum düzlemde bir üçgenin alanı üçgenin* AB *ve* BC *kenarlarının eğimlerine göre dört grup altında sınıflandırılabilir.*

(i) *AB ve BC kenarları Şekil 4.2.'de görüldüğü gibi yataysal (dikeysel) doğrular üzerinde ise,*



Şekil 4.2 AB ve BC Kenarları Yataysal(Dikeysel) Doğrular Üzerinde Olan ABC Üçgeni

(ii) *Şekil 4.3.'te görüldüğü gibi AB kenarı dikeysel (yataysal) doğru üzerinde, BC kenarı yataysal (dikeysel) doğru üzerinde ise,*



Şekil 4.3 AB Kenarı Dikeysel(Yataysal), BC Kenarı Yataysal(Dikeysel) Doğru Üzerinde Olan ABC Üçgeni

durumları geçerlidir.

I. Durum: *AB ve BC kenarları yataysal (dikeysel) doğrular üzerinde olsun. Burada oluşan $\overset{\triangle}{ABH}$ ve $\overset{\triangle}{BCH}$ üçgenleri ele alındığında $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanı,*

$$\begin{aligned} A(\overset{\triangle}{ABC}) &= \tfrac{1}{2}d_E(B,H)d_E(A,C) \\ &= \tfrac{1}{2}d_M(B,H)d_M(A,C) \\ &= \tfrac{1}{2}d_M(B,H)\mathbf{b} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{h}(2\mathbf{p}-(\mathbf{a}+\mathbf{c})) \end{aligned}$$

Heron formülü yardımıyla bulunur. Şekil 4.2. ve Şekil 4.3.'te $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin AC kenarının x-eksenine paralel olduğu tüm durumlar ifade edilmiştir. Eğer $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin bir kenarı, örneğin AC kenarı y-eksenine paralel ise o zaman üçgenin A ve B kenarlarının rolleri birbirleri ile değişir. Sonuç olarak $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanı,

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2}\mathbf{h}(2\mathbf{p}-(\mathbf{b}+\mathbf{c}))$$

Heron formülünün Maksimum benzeri yardımıyla bulunur.

II. Durum: *AB kenarı dikeysel (yataysal) doğru üzerinde, BC kenarı yataysal (dikeysel) doğru üzerinde olsun. Burada oluşan $\overset{\triangle}{ABH}$ ve $\overset{\triangle}{BCH}$ üçgenleri ele alındığında $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanı,*

$$\begin{aligned} A(\overset{\triangle}{ABC}) &= \tfrac{1}{2}d_E(B,H)d_E(A,C) \\ &= \tfrac{1}{2}d_M(B,H)d_M(A,C) \\ &= \tfrac{1}{2}d_M(B,H)\mathbf{c} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{h}(2\mathbf{p}-(\mathbf{a}+\mathbf{c})) \end{aligned}$$

Heron formülünün Maksimum benzeri yardımıyla bulunur. Benzer şekilde Şekil 4.2. ve.Şekil 4.3.'te $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin AC kenarının x-eksenine paralel olduğu tüm durumlar ifade edilmiştir. Eğer $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin bir kenarı, örneğin AC kenarı y-eksenine paralel ise o zaman üçgenin A ve B kenarlarının rolleri birbirleri ile değişir. Sonuç olarak $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanı,

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2}\mathbf{h}(2\mathbf{p}-(\mathbf{b}+\mathbf{c}))$$

Heron formülü yardımıyla bulunur.

Teorem 4.4 *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni Maksimum düzlemde C köşesi temel köşe olan bir üçgen olsun. C temel köşesinden üçgenin AB kenarına inilen dikme ayağı D, $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$ ve $\mathbf{h} = d_M(D,C)$*

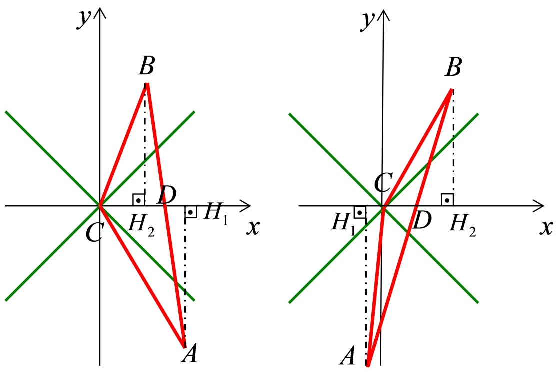
olmak üzere $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin Maksimum düzlemdeki alanı*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) \;=\; \frac{1}{2}\mathbf{h}(\mathbf{2p}-(\mathbf{a}+\mathbf{b}))$$

olarak tanımlanan Heron formülünün Maksimum benzeri ile bulunur.

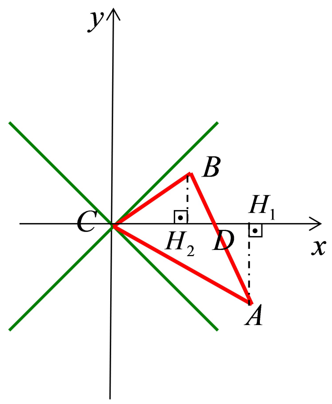
İspat *Maksimum düzlemde bir* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeni verilsin ve bu üçgenin kenarlarından biri koordinat eksenlerinden birine paralel olmasın.* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin alanını Heron formülünün Maksimum benzerini aşağıda ifade edilen dört durum ile bulabiliriz.*

(i) $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin* AC *ve* BC *kenarları yataysal olmayan ve taban doğrusu* CD *yatay doğru ise yada üçgenin* AC *ve* BC *kenarları dikeysel olmayan ve taban doğrusu* CD *dikey doğru ise,*



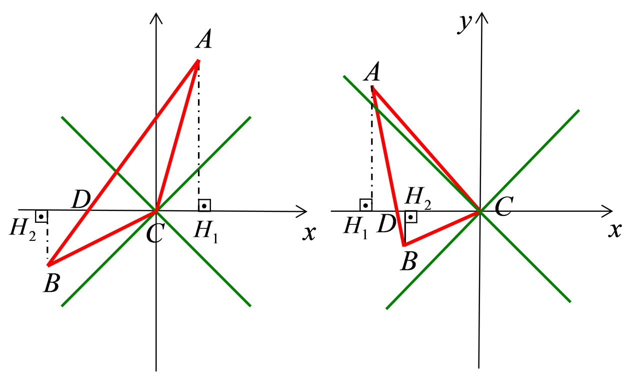
Şekil 4.4 AC ve BC Kenarları Yataysal(Dikeysel) Olmayan ve CD Kenarı Yatay(Dikey) Doğru Üzerinde Olan ABC Üçgeni

(ii) $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin* AC *ve* BC *kenarları dikeysel olmayan ve taban doğrusu* CD *yatay doğru ise yada üçgenin* AC *ve* BC *kenarları yataysal olmayan ve taban doğrusu* CD *dikey doğru ise,*



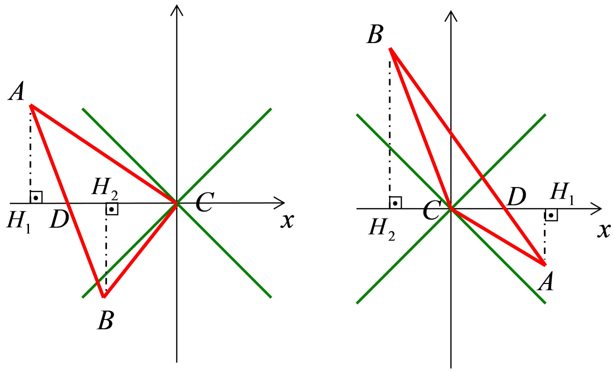
Şekil 4.5 AC ve BC Kenarları Dikeysel(Yataysal) Olmayan ve CD Kenarı Yatay(Dikey) Doğru Üzerinde Olan ABC Üçgeni

(iii) *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin AC kenarı yataysal olmayan, BC kenarı dikeysel olmayan ve taban doğrusu CD yatay doğru ise yada üçgenin AC kenarı dikeysel olmayan, BC kenarı yataysal olmayan ve taban doğrusu CD dikey doğru ise,*



Şekil 4.6 AC Kenarı Yataysal(Dikeysel) Olmayan, BC Kenarı Dikeysel(Yataysal) Olmayan ve CD Kenarı Yatay(Dikey) Doğru Üzerinde Olan ABC Üçgeni

(iv) *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin AC kenarı dikeysel olmayan, BC kenarı yataysal olmayan ve taban doğrusu CD yatay doğru ise yada üçgenin AC kenarı yataysal olmayan, BC kenarı dikeysel olmayan ve taban doğrusu CD dikey doğru ise,*



Şekil 4.7 AC Kenarı Dikeysel(Yataysal) Olmayan, BC Kenarı Yataysal(Dikeysel) Olmayan ve CD Kenarı Yatay(Dikey) Doğru Üzerinde Olan ABC Üçgeni

durumları mevcuttur.

I. Durum: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin AC ve BC kenarları Şekil 4.4.'te görüldüğü gibi yataysal olmayan ve taban doğrusu CD yatay doğru ise yada üçgenin AC ve BC kenarları dikeysel olmayan ve taban doğrusu CD dikey doğru olsun. Burada oluşan $\overset{\triangle}{ADC}$ ve $\overset{\triangle}{DCB}$ üçgenleri ele alındığında $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanı,*

$$
\begin{aligned}
A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ADC}) + A(\overset{\triangle}{DCB}) \\
&= \tfrac{1}{2} d_E(A, CD) d_E(C, D) + \tfrac{1}{2} d_E(B, CD) d_E(C, D) \\
&= \tfrac{1}{2} d_M(A, CD) d_M(C, D) + \tfrac{1}{2} d_M(B, CD) d_M(C, D) \\
&= \tfrac{1}{2} d_M(C, D) \left[d_M(A, CD) + d_M(B, CD) \right] \\
&= \tfrac{1}{2} d_M(C, D)\, \mathbf{c} \\
&= \tfrac{1}{2} \mathbf{h}(2\mathbf{p} - (\mathbf{a} + \mathbf{b}))
\end{aligned}
$$

Heron formülünün maksimum benzeri yardımıyla bulunur. Benzer şekilde, Şekil 4.4.,.Şekil 4.5., Şekil 4.6. ve Şekil 4.7.'de belirtilen tüm durumlar ifade edilmiştir. $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanı, tüm durumlarda $\overset{\triangle}{ADC}$ ve $\overset{\triangle}{DCB}$ üçgenleri ele alınarak bulunduğundan aynı sonuca ulaşılacaktır.

Önerme 4.1 *Maksimum düzlemde, $\overset{\triangle}{ABC}$ herhangi bir üçgen ve A köşesinden BC kenarına inilen dik izdüşüm noktası H, BC doğru parçasının eğimi m ve* $\mathbf{a} = d_M(B, C)$, $\mathbf{h} = d_M(A, H)$

olsun. Bu durumda

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \begin{cases} \mathbf{ah}/2 & , \ m = 0 \text{ veya } m \to \infty \\ \\ \frac{1+m^2}{2m^2}\mathbf{ah} & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir.

İspat a=$d_E(B,C)$ *ve* $h = d_E(A,H)$ *olmak üzere* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *dir.*

I. Durum: *Eğer* BC *kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel ise, bu durumda* $d_E(B,C) = d_M(B,C)$ *ve* $d_E(A,H) = d_M(A,H)$ *olup* $a = \mathbf{a}$ *ve* $h = \mathbf{h}$ *olur. Bu sebepten* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ *olarak bulunur.*

II. Durum: *Eğer* BC *kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel değil ise,* BC *kenarının eğimi* m *olup,* AH *doğrusunun eğimi* $-\frac{1}{m}$ *olur. Yardımcı Teorem 1.4.10 gereği* $\rho(m) = \rho(-m) = \rho(1/m) = \rho(-1/m)$ *olup* $a = \frac{1}{\rho(m)}\mathbf{a}$ *ve* $h = \frac{1}{\rho(-1/m)}\mathbf{h}$ *dir. Bu sebepten* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{\rho(m)\rho(-1/m)}\frac{\mathbf{ah}}{2} = \frac{1+m^2}{2m^2}\mathbf{ah}$ *olarak bulunur.*

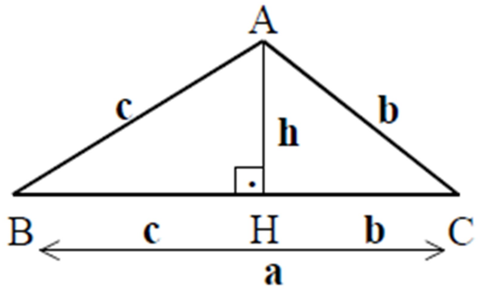
Önerme 4.2 *Maksimum düzlemde,* $\overset{\triangle}{ABC}$ *herhangi bir üçgen ve* BC *kenarı* x*-eksenine paralel,* B *ve* C *açıları da dar açı olsun.*$\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olmak üzere,*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{ab}\alpha}{2} = \frac{\mathbf{ac}\beta}{2} = \frac{\mathbf{pb}\alpha}{2} = \frac{\mathbf{pc}\beta}{2} & , \ |m_b| < 1, \ |m_c| < 1 \text{ ise,} \\ \\ \frac{\mathbf{ab}}{2} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{c})\mathbf{a}\alpha}{\alpha+1} & , \ |m_b| \geq 1, \ |m_c| < 1 \text{ ise,} \\ \\ \frac{\mathbf{ac}}{2} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{b})\mathbf{a}\beta}{\beta+1} & , \ |m_b| < 1, |m_c| \geq 1 \text{ ise,} \\ \\ \frac{\mathbf{ab}}{2} = \frac{\mathbf{ac}}{2} = \frac{\mathbf{a}\alpha(2\mathbf{p}\beta - \mathbf{c}(\beta+1))}{2\beta(\alpha+1)} & , \ |m_b| \geq 1, \ |m_c| \geq 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

dir.

İspat a=$d_E(B,C)$ *ve* $h = d_E(A,H)$ *olmak üzere* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *dir.*

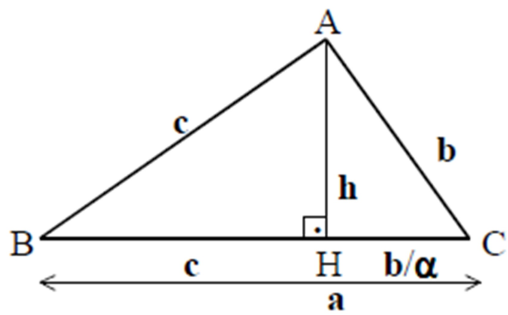
I. Durum: *Eğer* $|m_b| < 1$ *ve* $|m_c| < 1$ *ise,*



Şekil 4.8 BC x Eksenine Paralel, B ve C Açıları Dar, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| < 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $a = \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ *ve* $h = \mathbf{h} = \mathbf{b}\,|m_b| = \mathbf{c}\,|m_c|$ *dir. Buradan* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olup* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ab}\alpha}{2} = \frac{\mathbf{ac}\beta}{2}$ *olur.* $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a+b+c}}{2} = \frac{2\mathbf{a}}{2} = \mathbf{a}$ *olduğundan* $\mathbf{p} = \mathbf{a}$ *bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{pb}\alpha}{2} = \frac{\mathbf{pc}\beta}{2}$ *eşitliği elde edilir.*

II. Durum: *Eğer* $|m_b| \geq 1$ *ve* $|m_c| < 1$ *ise,*

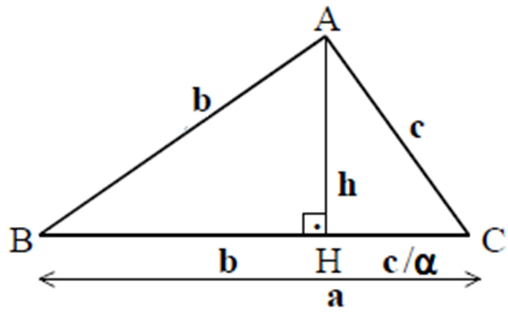


Şekil 4.9 BC x Eksenine Paralel, B ve C Açıları Dar, $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| < 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $a = \mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}}{|m_b|} + \mathbf{c}$ *ve* $h = \mathbf{h} = \mathbf{b}$ *dir. Buradan* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olup* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ab}}{2}$ *olur.*

$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{b}}{|m_b|}+\mathbf{c}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{2\mathbf{c}+\mathbf{b}(1+\frac{1}{|m_b|})}{2}$ *olduğundan* $\mathbf{b} = \frac{2(\mathbf{p}-\mathbf{c})|m_b|}{|m_b|+1}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{c})\mathbf{a}|m_b|}{|m_b|+1} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{c})\mathbf{a}\alpha}{\alpha+1}$ *eşitliği elde edilir.*

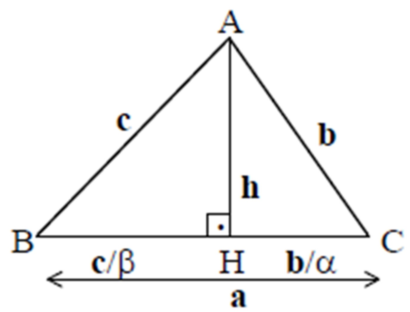
III. Durum: *Eğer* $|m_b| < 1$ *ve* $|m_c| \geq 1$ *ise,*



Şekil 4.10 BC x Eksenine Paralel, B ve C Açıları Dar, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| \geq 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $a = \mathbf{a} = \mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{|m_c|}$ *ve* $h = \mathbf{h} = \mathbf{c}$ *dir. Buradan* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olup* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ac}}{2}$ *olur.* $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{|m_c|}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{2\mathbf{b}+\mathbf{c}(1+\frac{1}{|m_c|})}{2}$ *olduğundan* $\mathbf{c} = \frac{2(\mathbf{p}-\mathbf{b})|m_c|}{|m_c|+1}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{b})\mathbf{a}|m_c|}{|m_c|+1} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{b})\mathbf{a}\beta}{\beta+1}$ *eşitliği elde edilir.*

IV. Durum: *Eğer* $|m_b| \geq 1$ *ve* $|m_c| \geq 1$ *ise,*



Şekil 4.11 BC x Eksenine Paralel, B ve C Açıları Dar, $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| \geq 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $a = \mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}}{|m_b|} + \frac{\mathbf{c}}{|m_c|}$ *ve* $h = \mathbf{h} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$ *dir. Buradan* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olup* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ab}}{2} = \frac{\mathbf{ac}}{2}$ *olur.*

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{b}}{|m_b|} + \frac{\mathbf{c}}{|m_c|} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b}(1 + \frac{1}{|m_b|}) + \mathbf{c}(1 + \frac{1}{|m_c|})}{2}$$

olduğundan $\mathbf{b} = \frac{(2\mathbf{p}|m_c| - \mathbf{c}(|m_c|+1))|m_b|}{(|m_b|+1)|m_c|}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{a}\,|m_b|\,(2\mathbf{p}\,|m_c| - \mathbf{c}(\,|m_c| + 1))}{2\,|m_c|\,(|m_b| + 1)} = \frac{\mathbf{a}\alpha(2\mathbf{p}\beta - \mathbf{c}(\beta + 1))}{2\beta(\alpha + 1)}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $\mathbf{c} = \frac{(2\mathbf{p}|m_b| - \mathbf{b}(|m_b|+1))|m_c|}{(|m_c|+1)|m_b|}$ *olup bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{a}\,|m_c|\,(2\mathbf{p}\,|m_b| - \mathbf{b}(\,|m_b| + 1))}{2\,|m_b|\,(|m_c| + 1)} = \frac{\mathbf{a}\beta(2\mathbf{p}\alpha - \mathbf{b}(\alpha + 1))}{2\alpha(\beta + 1)}$$

eşitliği elde edilir.

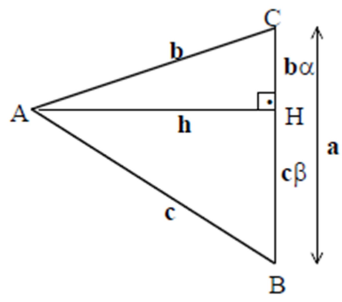
Önerme 4.3 *Maksimum düzlemde,* $\overset{\triangle}{ABC}$ *herhangi bir üçgen ve* BC *kenarı* y*-eksenine paralel,* B *ve* C *açıları da dar açı olsun.* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olmak üzere* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin alanı,*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{ab}}{2} = \frac{\mathbf{ac}}{2} = \frac{\mathbf{a}(2\mathbf{p} - \mathbf{b}(\alpha+1))}{2(\beta+1)} & , \ |m_b| < 1,\ |m_c| < 1 \textit{ ise,} \\ \frac{\mathbf{ac}}{2} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{p} - \mathbf{b})}{\beta+1} & , \ |m_b| \geq 1,\ |m_c| < 1 \textit{ ise,} \\ \frac{\mathbf{ab}}{2} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{p} - \mathbf{c})}{\alpha+1} & , \ |m_b| < 1, |m_c| \geq 1 \textit{ ise,} \\ \frac{\mathbf{ab}\alpha}{2} = \frac{\mathbf{ac}\beta}{2} = \frac{\mathbf{pb}\alpha}{2} = \frac{\mathbf{pc}\beta}{2} & , \ |m_b| \geq 1,\ |m_c| \geq 1 \textit{ ise,} \end{cases}$$

dir.

İspat a=$d_E(B, C)$ *ve* $h = d_E(A, H)$ *olmak üzere* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *dir.*

I. Durum: *Eğer* $|m_b| < 1$ *ve* $|m_c| < 1$ *ise,*



Şekil 4.12 BC y Eksenine Paralel, B ve C Açıları Dar, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| < 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $a = \mathbf{a} = \mathbf{b}\,|m_b| + \mathbf{c}\,|m_c|$ *ve* $h = \mathbf{h} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$ *dir. Buradan* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olup* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ab}}{2} = \frac{\mathbf{ac}}{2}$ *olur.*

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b}\,|m_b| + \mathbf{c}\,|m_c| + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b}(1+|m_b|) + \mathbf{c}(1+|m_c|)}{2}$$

olduğundan $\mathbf{b} = \frac{2\mathbf{p}-\mathbf{c}(|m_c|+1)}{|m_b|+1}$ *bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

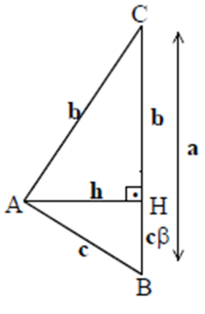
$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{a}(2\mathbf{p} - \mathbf{c}(\,|m_c|+1))}{2(|m_b|+1)} = \frac{\mathbf{a}(2\mathbf{p} - \mathbf{c}(\beta+1))}{2(\alpha+1)}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $\mathbf{c} = \frac{2\mathbf{p}-\mathbf{b}(|m_b|+1)}{|m_c|+1}$ *olup bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{a}(2\mathbf{p} - \mathbf{b}(\,|m_b|+1))}{2(|m_c|+1)} = \frac{\mathbf{a}(2\mathbf{p} - \mathbf{c}(\alpha+1))}{2(\beta+1)}$$

eşitliği elde edilir.

II. Durum: *Eğer* $|m_b| \geq 1$ *ve* $|m_c| < 1$ *ise,*



Şekil 4.13 BC y Eksenine Paralel, B ve C Açıları Dar, $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| < 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $a = \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}\,|m_c|$ *ve* $h = \mathbf{h} = \mathbf{c}$ *dir. Buradan* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olup* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ac}}{2}$ *olur.*

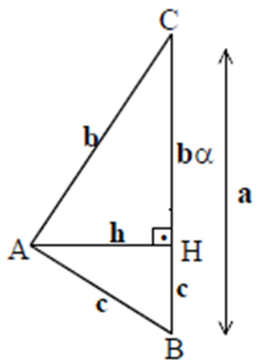
$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}\,|m_c| + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{2\mathbf{b} + \mathbf{c}(1 + |m_c|)}{2}$$

olduğundan $\mathbf{c} = \frac{2(\mathbf{p}-\mathbf{b})}{|m_c|+1}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{p} - \mathbf{b})}{|m_c| + 1} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{p} - \mathbf{b})}{\beta + 1}$$

eşitliği elde edilir.

III. Durum: *Eğer* $|m_b| < 1$ *ve* $|m_c| \geq 1$ *ise,*



Şekil 4.14 BC y Eksenine Paralel, B ve C Açıları Dar, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| \geq 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $a = \mathbf{a} = \mathbf{b}\,|m_b| + \mathbf{c}$ *ve* $h = \mathbf{h} = \mathbf{b}$ *dir. Buradan* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olup* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ab}}{2}$ *olur.*

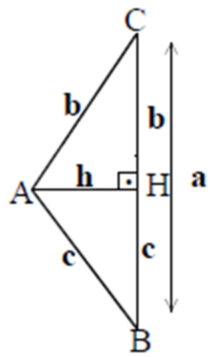
$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b}\,|m_b| + \mathbf{c} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{2\mathbf{c} + \mathbf{b}(1 + |m_b|)}{2}$$

olduğundan $\mathbf{b} = \frac{2(\mathbf{p}-\mathbf{c})}{|m_b|+1}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{p} - \mathbf{c})}{|m_b| + 1} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{p} - \mathbf{c})}{\alpha + 1}$$

eşitliği elde edilir.

IV. Durum: *Eğer* $|m_b| \geq 1$ *ve* $|m_c| \geq 1$ *ise,*



Şekil 4.15 BC y Eksenine Paralel, B ve C Açıları Dar, $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| \geq 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $a = \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ *ve* $h = \mathbf{h} = \mathbf{b}\,|m_b| = \mathbf{c}\,|m_c|$ *dir. Buradan* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olup* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ab}\alpha}{2} = \frac{\mathbf{ac}\beta}{2}$ *olur.* $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a+b+c}}{2} = \frac{\mathbf{b+c+b+c}}{2} = \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$ *yani* $\mathbf{p} = \mathbf{a}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{pb}\alpha}{2} = \frac{\mathbf{pc}\beta}{2}$ *eşitliği elde edilir.*

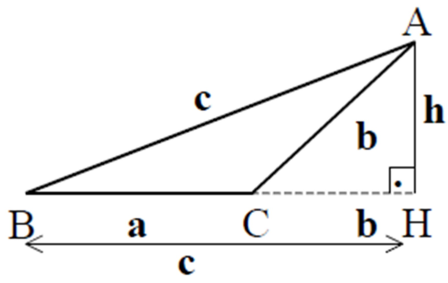
Önerme 4.4 *Maksimum düzlemde,* $\overset{\triangle}{ABC}$ *herhangi bir üçgen ve* BC *kenarı* x*-eksenine paralel,* B *ve* C *açılarından biri geniş açı olsun.* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olmak üzere,*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{ab}\alpha}{2} = \frac{\mathbf{ac}\beta}{2} = \frac{(\mathbf{p-b})\mathbf{b}\alpha}{2} = \frac{(\mathbf{p-b})\mathbf{c}\beta}{2} & , \quad |m_b| < 1, \;\; |m_c| < 1 \text{ ise,} \\ \frac{\mathbf{ab}}{2} = \frac{\mathbf{a}\alpha(\mathbf{p-a})}{\alpha+1} & , \quad |m_b| \geq 1, \;\; |m_c| < 1 \text{ ise,} \\ \frac{\mathbf{ac}}{2} = \frac{\mathbf{a}\beta(\mathbf{p-a})}{\beta+1} & , \quad |m_b| < 1, |m_c| \geq 1 \text{ ise,} \\ \frac{\mathbf{ab}}{2} = \frac{\mathbf{ac}}{2} = \frac{\mathbf{a}\beta(2\mathbf{p}\alpha+\mathbf{b}(1-\alpha))}{2\alpha(\beta+1)} & , \quad |m_b| \geq 1, \;\; |m_c| \geq 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

dir.

İspat $a{=}d_E(B,C)$ *ve* $h = d_E(A,H)$ *olmak üzere* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *dir.*

I. Durum: *Eğer* $|m_b| < 1$ *ve* $|m_c| < 1$ *ise,*



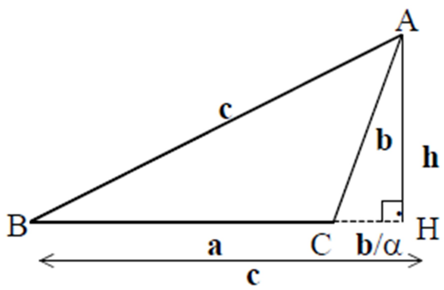
Şekil 4.16 BC x Eksenine Paralel, B ve C Açılarından Biri Geniş, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| < 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $a = \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ *ve* $h = \mathbf{h} = \mathbf{b}\,|m_b| = \mathbf{c}\,|m_c|$ *dir. Buradan* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olup* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ab}\alpha}{2} = \frac{\mathbf{ac}\beta}{2}$ *olur.* $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{2(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{2} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ *olduğundan* $\mathbf{a} = \mathbf{p} - \mathbf{b}$ *bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{b})\mathbf{b}\alpha}{2} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{b})\mathbf{c}\beta}{2}$$

eşitliği elde edilir.

II. Durum: *Eğer* $|m_b| \geq 1$ *ve* $|m_c| < 1$ *ise,*



Şekil 4.17 BC x Eksenine Paralel, B ve C Açılarından Biri Geniş, $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| < 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $a = \mathbf{c} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{|m_b|}$ *ve* $h = \mathbf{h} = \mathbf{b}$ *dir. Buradan* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olup* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ab}}{2}$ *olur.*

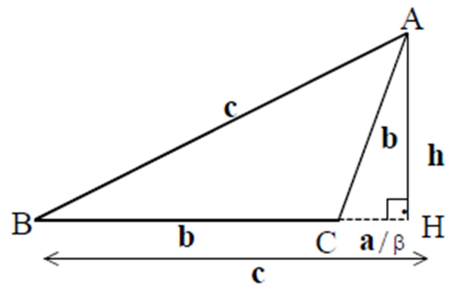
$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{|m_b|}}{2} = \frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}(1+\frac{1}{|m_b|})}{2}$$

olduğundan $\mathbf{b} = \frac{2|m_b|(\mathbf{p}-\mathbf{a})}{|m_b|+1}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{a}\,|m_b|\,(\mathbf{p}-\mathbf{a})}{|m_b|+1} = \frac{\mathbf{a}\alpha(\mathbf{p}-\mathbf{a})}{\alpha+1}$$

eşitliği elde edilir.

III. Durum: *Eğer* $|m_b| < 1$ *ve* $|m_c| \geq 1$ *ise,*



Şekil 4.18 BC x Eksenine Paralel, B ve C Açılarından Biri Geniş, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| \geq 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $a = \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}}{|m_c|} + \mathbf{b}$ *ve* $h = \mathbf{h} = \mathbf{a}$ *dir. Buradan* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olup* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ac}}{2}$ *olur.*

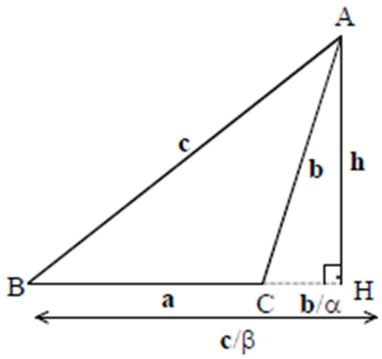
$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{m_c}|}+\mathbf{b}}{2} = \frac{2\mathbf{b}+\mathbf{a}(1+\frac{1}{|m_c|})}{2}$$

olduğundan $\mathbf{a} = \frac{2(\mathbf{p}-\mathbf{b})|m_c|}{|m_c|+1}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{a}\,|m_c|\,(\mathbf{p}-\mathbf{a})}{|m_c|+1} = \frac{\mathbf{a}\beta(\mathbf{p}-\mathbf{a})}{\beta+1}$$

eşitliği elde edilir.

IV. Durum: *Eğer* $|m_b| \geq 1$ *ve* $|m_c| \geq 1$ *ise,*



Şekil 4.19 BC x Eksenine Paralel, B ve C Açılarından Biri Geniş, $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| \geq 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $a = \mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}}{|m_b|} + \frac{\mathbf{c}}{|m_c|}$ *ve* $h = \mathbf{h} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$ *dir. Buradan* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *olup* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ab}}{2} = \frac{\mathbf{ac}}{2}$ *olur.*

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{c}}{|m_c|} - \frac{\mathbf{b}}{|m_b|} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{c}(1+\frac{1}{|m_c|}) + \mathbf{b}(1-\frac{1}{|m_b|})}{2}$$

olduğundan $\mathbf{c} = \frac{(2\mathbf{p}|m_b| + \mathbf{b}(1-|m_b|))|m_c|}{(|m_c|+1)|m_b|}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{a}\,|m_c|\,(2\mathbf{p}\,|m_b| + \mathbf{b}(1-|m_b|\,))}{2\,|m_b|\,(|m_c|+1)} = \frac{\mathbf{a}\beta(2\mathbf{p}\alpha + \mathbf{b}(1-\alpha))}{2\alpha(\beta+1)}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $\mathbf{b} = \frac{(2\mathbf{p}|m_c| - \mathbf{c}(1+|m_c|))|m_b|}{(|m_b|-1)|m_c|}$ *olup bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{a}\,|m_b|\,(2\mathbf{p}\,|m_c| - \mathbf{c}(\,|m_c|+1))}{2\,|m_c|\,(|m_b|-1)} = \frac{\mathbf{a}\alpha(2\mathbf{p}\beta - \mathbf{c}(\beta+1))}{2\beta(\alpha-1)}$$

eşitliği elde edilir.

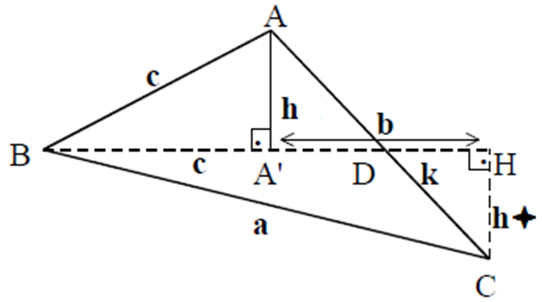
Önerme 4.5 *Maksimum düzlemde, bir* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin* BC *kenarı eksenlere paralel olmasın ve* B *temel köşesinden geçen temel doğruya diğer* A *ve* C *köşelerden inilen dikme ayakları, sırasıyla,* H_1 *ve* H_2 *olsun.* $m_a < 0$ *ise* $\mathbf{k} = d_M(D, H_2)$*,* $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *ve temel* *doğrunun, temel köşeye karşı olan kenarı kestiği nokta D olmak üzere,*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \begin{cases} \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{b}\alpha}{2} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\alpha}{2} & , \ |m_b| < 1, \ |m_c| < 1 \text{ ise,} \\ \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{b}}{2} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\alpha}{\alpha+1} & , \ |m_b| \geq 1, \ |m_c| < 1 \text{ ise,} \\ \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{b}\alpha}{2} = \frac{(2\mathbf{p}\beta-\mathbf{c}(\beta+1))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\alpha}{2\beta} & , \ |m_b| < 1, |m_c| \geq 1 \text{ ise,} \\ \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{b}}{2} = \frac{(2\mathbf{p}\beta-\mathbf{c}(\beta+1))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\alpha}{2\beta(\alpha+1)} & , \ |m_b| \geq 1, \ |m_c| \geq 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

dir. Ayrıca $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$, $\mathbf{h}_1 = d_M(A, H_1)$, $\mathbf{h}_2 = d_M(C, H_2)$ *olarak tanımlanmıştır.*

İspat *Düzlemdeki herhangi bir üçgen için temel doğrunun geçtiği en az bir temel köşe vardır. O halde* B, $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin temel köşesi, temel doğrunun* AC *kenarını kestiği nokta* D *olsun. Ayrıca* A *ve* C *köşelerinden temel doğruya inilen dikme ayakları, sırasıyla,* H_1 *ve* H_2 *olmak üzere* $\mathbf{h}_1 = d_M(A, H_1)$, $\mathbf{h}_2 = d_M(C, H_2)$ *ve* $\mathbf{k} = d_M(D, H_2)$*,* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin yarı çevre uzunluğu* $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$ *ve* $\mathbf{a} = d_M(B, C)$, $\mathbf{b} = d_M(A, C)$, $\mathbf{c} = d_M(A, B)$ *olsun.*

I. Durum: *Eğer* $|m_b| < 1$ *ve* $|m_c| < 1$ *ise,*



Şekil 4.20 $m_a < 0$, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| < 1$ Olan ABC Üçgeni

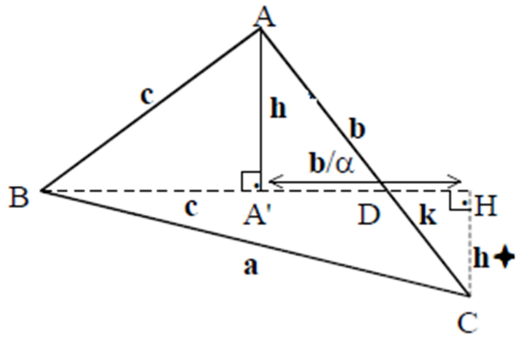
şekilde görüldüğü gibi $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ABD}) + A(\overset{\triangle}{BDC})$ *olup*

$$A(\overset{\triangle}{ABD}) = \frac{|BD|\,|AH_1|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_1}{2} \ \textit{ve}\ A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{|BD|\,|CH_2|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_2}{2}$$

olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2)}{2}$ *olarak elde edilir. Bu durumda* $\mathbf{b}\,|m_b| > \mathbf{c}\,|m_c|$ *olduğundan* $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{b}\,|m_b|$ *ve* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{b}|m_b|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{b}\alpha}{2}$ *dir.* $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ *ve*

$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{2(\mathbf{b}+\mathbf{c})}{2} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$ *olduğundan* $\mathbf{b} = \mathbf{p}-\mathbf{c}$ *olur. Bu eşitliği yerine yazarsak* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\alpha}{2}$ *eşitliği elde edilir.*

II. Durum: *Eğer* $|m_b| \geq 1$ *ve* $|m_c| < 1$ *ise,*



Şekil 4.21 $m_a < 0$, $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| < 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ABD}) + A(\overset{\triangle}{BDC})$ *olup*

$$A(\overset{\triangle}{ABD}) = \frac{|BD|\,|AH_1|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_1}{2} \;\; ve \; A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{|BD|\,|CH_2|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_2}{2}$$

olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2)}{2}$ *olarak elde edilir. Bu durumda* $\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2 = \mathbf{b}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{b}}{2}$ *olur.*

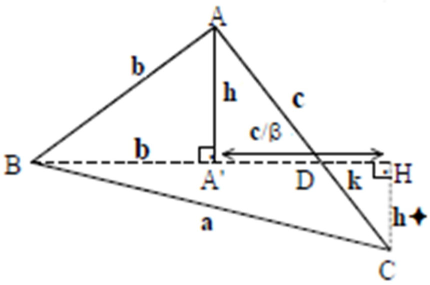
$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}}{|m_b|}+\mathbf{c} \;\; ve \;\; \mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{b}}{|m_b|}+\mathbf{c}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{2\mathbf{c}\,|m_b| + \mathbf{b}(1+|m_b|)}{2\,|m_b|}$$

olduğundan $\mathbf{b} = \frac{2|m_b|(\mathbf{p}-\mathbf{c})}{1+|m_b|}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,|m_b|}{|m_b|+1} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\alpha}{\alpha+1}$$

eşitliği elde edilir.

III. Durum: *Eğer* $|m_b| < 1$ *ve* $|m_c| \geq 1$ *ise,*



Şekil 4.22 $m_a < 0$, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| \geq 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ABD}) + A(\overset{\triangle}{BDC})$ *olup*

$$A(\overset{\triangle}{ABD}) = \frac{|BD|\,|AH_1|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_1}{2} \;\; ve \;\; A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{|BD|\,|CH_2|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_2}{2}$$

olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2)}{2}$ *olarak elde edilir. Bu durumda* $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{b}\,|m_b|$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{b}\alpha}{2}$ *olur.*

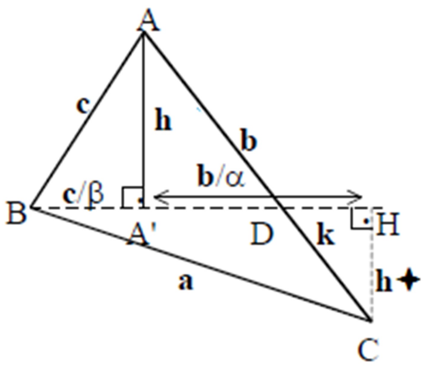
$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{|m_c|} \;\; ve \;\; \mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{|m_c|}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{2\mathbf{b}\,|m_c| + \mathbf{c}(1+|m_c|)}{2\,|m_c|}$$

olduğundan $\mathbf{b} = \frac{(2\mathbf{p}|m_b| - \mathbf{c}(|m_c|+1))}{2|m_c|}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(2\mathbf{p}\,|m_b| - \mathbf{c}(\,|m_c|+1))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,|m_b|}{2\,|m_c|} = \frac{(2\mathbf{p}\beta - \mathbf{c}(\beta+1))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\alpha}{2\beta}$$

eşitliği elde edilir.

IV. Durum: *Eğer* $|m_b| \geq 1$ *ve* $|m_c| \geq 1$ *ise,*



Şekil 4.23 $m_a < 0$, $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| \geq 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ABD}) + A(\overset{\triangle}{BDC})$ *olup*

$$A(\overset{\triangle}{ABD}) = \frac{|BD|\,|AH_1|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_1}{2} \ \ ve \ \ A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{|BD|\,|CH_2|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_2}{2}$$

olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2)}{2}$ *olarak elde edilir. Bu durumda* $\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2 = \mathbf{b}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{b}}{2}$ *olur.*

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}}{|m_b|}+\frac{\mathbf{c}}{|m_c|} \ \ ve \ \ \mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{b}}{|m_b|}+\frac{\mathbf{c}}{|m_c|}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{2\mathbf{b}\,|m_c|+\mathbf{c}(1+|m_c|)}{2\,|m_c|}$$

olduğundan $\mathbf{b} = \frac{(2\mathbf{p}|m_c|-\mathbf{c}(|m_c|+1))|m_b|}{(|m_b|+1)|m_c|}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(2\mathbf{p}\,|m_c|-\mathbf{c}(\,|m_c|+1))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,|m_b|}{2\,|m_c|\,(|m_b|+1)} = \frac{(2\mathbf{p}\beta-\mathbf{c}(\beta+1))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\alpha}{2\beta(\alpha+1)}$$

eşitliği elde edilir.

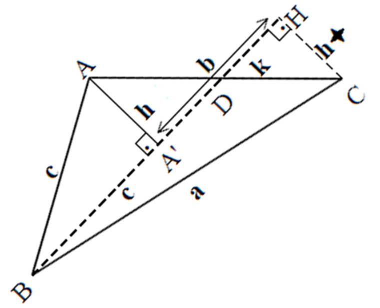
Önerme 4.6 *Maksimum düzlemde, bir* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin* BC *kenarı eksenlere paralel olmasın ve* B *temel köşesinden geçen temel doğruya diğer* A *ve* C *köşelerden inilen dikme ayakları, sırasıyla* H_1 *ve* H_2 *olsun.* $m_a > 0$ *ise* $\mathbf{k} = d_M(D, H_2)$, $\alpha = |m_b|$ *ve* $\beta = |m_c|$ *ve temel doğrunun, temel köşeye karşı olan kenarı kestiği nokta* D *olmak üzere,*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \begin{cases} \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{c}\beta}{2} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\beta}{2} & , \ |m_b| < 1, \ |m_c| < 1 \ ise, \\ \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{c}\beta}{2} = \frac{(2\mathbf{p}\alpha-\mathbf{b}(\alpha+1))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\beta}{4\beta} & , \ |m_b| \geq 1, \ |m_c| < 1 \ ise, \\ \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{c}}{2} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\beta}{\beta+1} & , \ |m_b| < 1, |m_c| \geq 1 \ ise, \\ \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{c}}{2} = \frac{(2\mathbf{p}\beta-\mathbf{c}(\beta+1))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\alpha}{2\beta(\alpha+1)} & , \ |m_b| \geq 1, \ |m_c| \geq 1 \ ise, \end{cases}$$

dir. Ayrıca $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$, $\mathbf{h}_1 = d_M(A, H_1)$, $\mathbf{h}_2 = d_M(C, H_2)$ *olarak tanımlanmıştır.*

İspat *Düzlemdeki herhangi bir üçgen için temel doğrunun geçtiği en az bir temel köşe vardır. O halde* B, $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin temel köşesi, temel doğrunun* AC *kenarını kestiği nokta* D *olsun. Ayrıca* A *ve* C *köşelerinden temel doğruya inilen dikme ayakları, sırasıyla,* H_1 *ve* H_2 *olmak üzere* $\mathbf{h}_1 = d_M(A, H_1)$, $\mathbf{h}_2 = d_M(C, H_2)$ *ve* $\mathbf{k} = d_M(D, H_2)$, $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin yarı çevre uzunluğu* $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$ *ve* $\mathbf{a} = d_M(B, C)$, $\mathbf{b} = d_M\,(A, C)$, $\mathbf{c} = d_M\,(A, B)$ *olsun.*

I. Durum: *Eğer* $|m_b| < 1$ *ve* $|m_c| < 1$ *ise,*



Şekil 4.24 $m_a > 0$, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| < 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ABD}) + A(\overset{\triangle}{BDC})$ *olup*

$$A(\overset{\triangle}{ABD}) = \frac{|BD|\,|AH_1|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_1}{2} \quad ve \quad A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{|BD|\,|CH_2|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_2}{2}$$

olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2)}{2}$ *olarak elde edilir. Bu durumda* $\mathbf{c}\,|m_c| > \mathbf{b}\,|m_b|$ *olduğundan* $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{c}\,|m_c|$ *ve* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{c}|m_c|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{c}\beta}{2}$ *dir.*

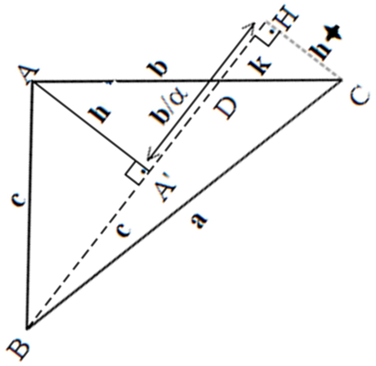
$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \;\; ve \;\; \mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{2(\mathbf{b}+\mathbf{c})}{2} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

olduğundan $\mathbf{c} = \mathbf{p} - \mathbf{b}$ *olur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\beta}{2}$$

eşitliği elde edilir.

II. Durum: *Eğer* $|m_b| \geq 1$ *ve* $|m_c| < 1$ *ise,*



Şekil 4.25 $m_a > 0$, $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| < 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ABD}) + A(\overset{\triangle}{BDC})$ *olup*

$$A(\overset{\triangle}{ABD}) = \frac{|BD|\,|AH_1|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_1}{2} \;\; ve \;\; A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{|BD|\,|CH_2|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_2}{2}$$

olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2)}{2}$ *olarak elde edilir. Bu durumda* $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{c}\,|m_c|$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{c}\beta}{2}$ *olur.*

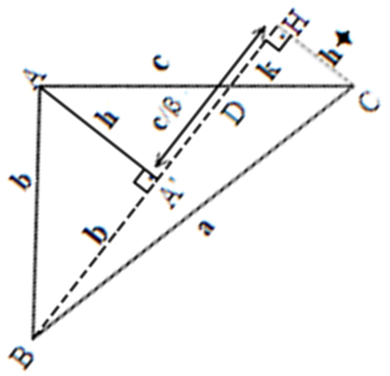
$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}}{|m_b|} + \mathbf{c} \;\; ve \;\; \mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{b}}{|m_b|} + \mathbf{c} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = \frac{2\mathbf{c}\,|m_b| + \mathbf{b}(1+|m_b|)}{2\,|m_b|}$$

olduğundan $\mathbf{b} = \frac{2|m_b|(\mathbf{p}-\mathbf{c})}{1+|m_b|}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,|m_b|}{|m_b|+1} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\alpha}{\alpha+1}$$

eşitliği elde edilir.

III. Durum: *Eğer* $|m_b| < 1$ *ve* $|m_c| \geq 1$ *ise,*



Şekil 4.26 $m_a > 0$, $|m_b| < 1$ ve $|m_c| \geq 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ABD}) + A(\overset{\triangle}{BDC})$ *olup*

$$A(\overset{\triangle}{ABD}) = \frac{|BD|\,|AH_1|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_1}{2} \;\; ve \;\; A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{|BD|\,|CH_2|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_2}{2}$$

olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2)}{2}$ *olarak elde edilir. Bu durumda* $\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2 = \mathbf{c}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{c}}{2}$ *olur.*

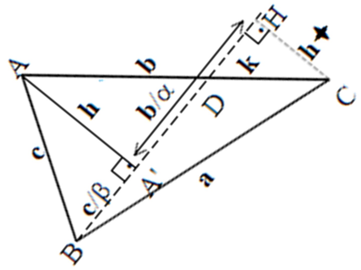
$$\mathbf{a} = \mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{|m_c|} \;\; ve \;\; \mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{|m_c|}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{2b}\,|m_c| + \mathbf{c}(1+|m_c|)}{2\,|m_c|}$$

olduğundan $\mathbf{c} = \frac{(2\mathbf{p}|m_c|-2\mathbf{b}|m_c|)}{1+|m_c|}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,|m_c|}{|m_c|+1} = \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{k})\beta}{\beta+1}$$

eşitliği elde edilir.

IV. Durum: *Eğer* $|m_b| \geq 1$ *ve* $|m_c| \geq 1$ *ise,*



Şekil 4.27 $m_a > 0$, $|m_b| \geq 1$ ve $|m_c| \geq 1$ Olan ABC Üçgeni

şekilde görüldüğü gibi $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ABD}) + A(\overset{\triangle}{BDC})$ *olup*

$$A(\overset{\triangle}{ABD}) = \frac{|BD|\,|AH_1|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_1}{2} \;\; ve \;\; A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{|BD|\,|CH_2|}{2} = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{h}_2}{2}$$

olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2)}{2}$ *olarak elde edilir. Bu durumda* $\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2 = \mathbf{b}$ *olduğundan* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(\mathbf{a}-\mathbf{k})\mathbf{b}}{2}$ *olur.*

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}}{|m_b|} + \frac{\mathbf{c}}{|m_c|} \;\; ve \;\; \mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{b}}{|m_b|}+\frac{\mathbf{c}}{|m_c|}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \frac{2\mathbf{b}\,|m_c| + \mathbf{c}(1+|m_c|)}{2\,|m_c|}$$

olduğundan $\mathbf{b} = \frac{(2\mathbf{p}|m_c| - \mathbf{c}(|m_c|+1))|m_b|}{(|m_b|+1)|m_c|}$ *olarak bulunur. Bu eşitliği yerine yazarsak*

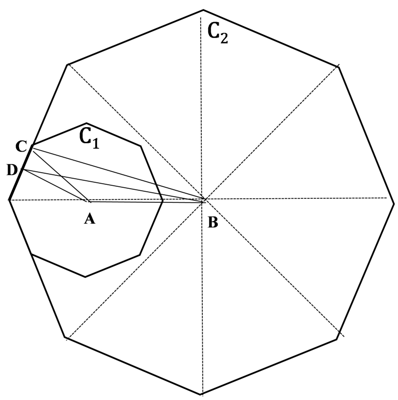
$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(2\mathbf{p}\,|m_c| - \mathbf{c}(\,|m_c|+1))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\,|m_b|}{2\,|m_c|\,(|m_b|+1)} = \frac{(2\mathbf{p}\beta - \mathbf{c}(\beta+1))(\mathbf{a}-\mathbf{k})\alpha}{2\beta(\alpha+1)}$$

eşitliği elde edilir.

5. ÇİN DAMA GEOMETRİ

Bu bölümde Çin Dama düzlemde bir üçgenin alanını Çin Dama uzunlukları cinsinden veren üç farklı alan formülü verilecektir. Bu formüllerden ikisi Öklidyen düzlemde bir üçgenin standart alan formülünün Çin Dama benzerleri olup bölümün ilk kısmında verilecektir. Bölümün ikinci kısmında ise üçüncü formül olarak Öklid düzlem geometride iyi bilinen Heron formülünün Çin Dama karşılığı Gelişgen (2007) ve Gelişgen ve Kaya (2009)'daki gibi verilecektir.

Bu bölümde ele alınan alan kavramı alışılmış Öklidyen alan kavramıdır. Çin Dama düzleminde karşılıklı kenarlarının Çin Dama uzunlukları aynı olmasına rağmen alanları farklı olan üçgenler bulunabilir. Buna bir örnek olarak Şekil 5.1. verilebilir.



Şekil 5.1 Çin Dama Uzunlukları Aynı, Alanları Farklı Üçgenler

Şekilde AB, x-eksenine paralel bir doğru olsun. C_1, A merkezli ve b yarıçaplı bir Çin Dama çemberi ve C_2, B merkezli ve $b+c$ yarıçaplı bir çin dama çemberi olsun. Ayrıca C ve D de $C_1 \cap C_2$ de AB doğrusuna göre simetrik olmayan iki nokta olsun. O halde açıkça $d_C(A,C) = d_C(A,D)$ ve $d_C(B,C) = d_C(B,D)$ olmasına rağmen $A(\overset{\triangle}{ABC}) \neq A(\overset{\triangle}{ABD})$ dir. Bu durumda "Çin Dama düzleminde bir üçgenin alanı nasıl hesaplanır?" sorusu ortaya çıkar. Bir üçgenin alanını hesaplamak için verilen her formül bir takım parametrelere bağlı olur. Bu bölümde Çin Dama düzleminde farklı parametreleri kullanarak bir üçgenin alanını hesaplamak için üç formül verilecektir.

5.1 Çin Dama Düzleminde Bir Üçgenin Alanı

$\overset{\triangle}{ABC}$ Öklidyen düzlemde bir üçgen ve H, üçgenin A köşesinden BC doğrusuna inilen dikme ayağı olsun. $a = d_E(B,C)$, $h = d_E(A,H)$ veya $h = d_E(A,BC)$ olmak üzere $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgenin standart alan formülü

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$$

şeklindedir. Bu kısımda Çin Dama uzaklıkları cinsinden üçgenin standart alan formülünün iki Çin Dama karşılığı verilecektir. Verilen formüllerde **a** $=d_C(B,C)$, **h** $= d_C(A,H)$ veya **h** $=$ $d_C(A,BC)$ olmak üzere bir parametre kullanılmıştır. Bu parametre taban doğru parçasının üzerinde bulunduğu doğrunun eğimidir.

Analitik düzlemde iki nokta arasındaki Öklidyen ve Çin Dama uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısı Yardımcı Teorem 2.5'te verilmişti. Bu bağıntı alan formülünün ilk Çin Dama karşılığında önemli bir rol oynamaktadır. Aşağıdaki teorem bir üçgenin iyi bilinen Öklidyen alan formülünün Çin Dama benzerini vermektedir.

Teorem 5.1 *$\overset{\triangle}{ABC}$, Çin Dama düzleminde bir üçgen; H, üçgenin A köşesinden BC doğrusuna inilen dikme ayağı ve m de BC doğrusunun eğimi olsun. Ayrıca* **a** $=d_C(B,C)$*,* **h** $= d_C(A,H)$ *olsun. Bu taktirde,*

(i) BC doğrusunun koordinat eksenlerinden birine veya bir ayıraç doğrusuna paralel ise $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ dir.

(ii) BC doğrusu herhangi bir koordinat eksenine veya bir ayıraç doğrusuna paralel değil ise $\rho(m) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{M}$ ve

$$M = \begin{cases} 1 + (\sqrt{2}-1)\,|m| & , \quad |m| \leq 1 \text{ ise} \\ \\ (\sqrt{2}-1) + |m| & , \quad |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = [\rho(m)]^2\, \frac{\mathbf{ah}}{2}$ dir.

İspat *$a = d_E(B,C)$ ve $h = d_E(A,H)$ olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ dir.*

(i) BC doğrusu koordinat eksenlerinden birine veya bir ayıraç doğrusuna paralel ise m, BC doğrusunun eğimi olmak üzere $m \in \{0, \infty, 1, -1\}$ olur. AH, BC ye dik olduğundan

AH nin eğimi ise $0, \infty, -1$ *veya* 1 *dir. Bu taktirde Yardımcı Teorem 2.5'teki* $\rho(m)$ *parametresi* 1 *olur. Yani* **a** $=a$ *ve* **h** $=h$ *dir. Bu nedenle açıkça* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ *dir.*

(ii) BC *doğrusu herhangi bir koordinat eksenine veya bir ayıraç doğrusuna paralel olmasın ve* m*,* BC *doğrusunun eğimi olsun. Bu durumda* AH *ın eğimi* $-\frac{1}{m}$ *olur. Kolaylıkla görülebilir ki* $\rho(m) = \rho(-\frac{1}{m})$ *dir. Yardımcı Teorem 2.5'ten dolayı* $a = \rho(m)\mathbf{a}$ *ve* $h = \rho(m)\mathbf{h}$ *olur. Buna göre* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = [\rho(m)]^2 \frac{\mathbf{ah}}{2}$ *olarak bulunur.*

Önerme 2.17'de Çin Dama düzleminde bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının, bir $l : ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığının

$$d_C(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|, \frac{|a+b|}{\sqrt{2}}, \frac{|a-b|}{\sqrt{2}}\}}$$

olduğu verilmişti. Ayrıca kartezyen koordinat düzleminde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığının Çin Dama ve Öklidyen uzaklıkları arasındaki bağıntı Önerme 2.18'de verilmişti. Bu bağıntı aşağıdaki gibi ifade edilen alan formülünün ikinci Çin Dama benzeri için önemlidir.

Teorem 5.2 *$\overset{\triangle}{ABC}$, Çin Dama düzleminde bir üçgen,* m *de* BC *doğrusunun eğimi,* **a** $=d_C(B, C)$*,* **h** $= d_C(A, H)$ *olsun. Buna göre,*

(i) BC *doğrusu herhangi bir koordinat eksenine veya herhangi bir ayıraç doğrusuna paralel ise* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ *dir.*

(ii) BC *doğrusu herhangi bir koordinat eksenine veya herhangi bir ayıraç doğrusuna paralel değil ise*

$$\sigma(m) = \frac{\max\left\{1, |m|, \frac{|1+m|}{\sqrt{2}}, \frac{|1-m|}{\sqrt{2}}\right\}}{M} \quad ve \quad M = \begin{cases} 1 + (\sqrt{2}-1)|m| & , \quad |m| \leq 1 \text{ ise} \\ (\sqrt{2}-1) + |m| & , \quad |m| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \sigma(m)\frac{\mathbf{ah}}{2}$ *dir.*

İspat *$a = d_E(B, C)$ ve $h = d_E(A, BC)$ olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ olduğu bilinmektedir.*

(i) BC *doğrusu herhangibir koordinat eksenine veya ayıraç doğrusuna paralel ise* $m \in \{0, \infty, 1, -1\}$ *olur. Bu taktirde* **a** $= a$ *ve* $h =$ **h** *olacağından* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ *olur.*

(ii) BC doğrusu herhangibir koordinat eksenine veya ayıraç doğrusuna paralel olmasın. m, BC doğrusunun eğimi olmak üzere Yardımcı Teorem 2.5 ve Önerme 2.18 gereğince

$$M = \begin{cases} 1 + (\sqrt{2}-1)\,|m| & , \quad |m| \leq 1 \textit{ ise} \\ \\ (\sqrt{2}-1) + |m| & , \quad |m| \geq 1 \textit{ ise} \end{cases}$$

için $a = \frac{\sqrt{1+m^2}}{M}\mathbf{a}$ *ve* $h = \frac{\max\left\{1,|m|,\frac{|1+m|}{\sqrt{2}},\frac{|1-m|}{\sqrt{2}}\right\}}{\sqrt{1+m^2}}\mathbf{h}$ *olur. Bundan dolayı*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{M}\frac{\max\left\{1,|m|,\frac{|1+m|}{\sqrt{2}},\frac{|1-m|}{\sqrt{2}}\right\}}{\sqrt{1+m^2}}\frac{\mathbf{ah}}{2} = \frac{\max\left\{1,|m|,\frac{|1+m|}{\sqrt{2}},\frac{|1-m|}{\sqrt{2}}\right\}}{M}\frac{\mathbf{ah}}{2}$$

olarak elde edilir. Yani $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \sigma(m)\frac{\mathbf{ah}}{2}$*.olur.*

5.2 Heron Formülünün Çin Dama Benzeri

Bu kısımda Öklidyen düzlem için çok iyi bilinen Heron formülünün Çin Dama düzlemindeki karşılığı verilmektedir. Öklid düzleminde iyi bilinen

$$\text{Üçgenin Alanı} = (\text{Taban} \times \text{Yükseklik})/2$$

formülü Çin Dama düzleminde genel olarak geçerli değildir. Bu formülün geçerli olması için gerek ve yeter koşul tabanın koordinat eksenlerinden birine veya $y = \mp x$ doğrularından birine paralel olmasıdır. Çünkü bu hallerin herbirinde Öklidyen ve Çin Dama uzaklıkları aynıdır. Ayrıca bir üçgenin alanı üçgenin üç kenarının uzunlukları kullanılarak da hesaplanabilir. a, b, c herhangi bir üçgenin kenar uzunlukları olsun. $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ yarı çevre olmak üzere üçgenin alanı A;

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

şeklinde de bulunabilir. Bu formül Heron formülü olarak bilinir. Çin Dama düzleminde bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin kenar uzunlukları

$$\mathbf{a} = d_c(B,C) \quad , \quad \mathbf{b} = d_c(A,C) \quad , \quad \mathbf{c} = d_c(A,B)$$

ve Çin Dama yarıçevresi

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$$

olsun. Ayrıca temel kavramlar kısmında belirtilen doğru sınıflandırılmasını ve temel köşe, temel doğru gibi kavramlar kullanılmaktadır. Aşağıdaki önermeler Heron formülünün bazı özel durumlardaki Çin Dama (CC) karşılıklarını vermektedir.

Önerme 5.1 *CC-düzleminde, herhangi bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin bir kenarı, örneğin BC kenarı, koordinat eksenlerinden birisine veya $y = \mp x$ doğrularından birine paralel olsun. Ayrıca üçgenin B ve C köşelerindeki açılardan hiçbiri geniş açı değilse, $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanı*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{a}}{2(\sqrt{2}-1)}(\mathbf{p}-\mathbf{a}) & , K1 \text{ koşulu geçerli ise} \\ \dfrac{\mathbf{a}}{2\sqrt{2}}\left(\mathbf{p}-\mathbf{a}+\dfrac{\mathbf{b}}{\sqrt{2}}\right) & , K2 \text{ koşulu geçerli ise} \\ \dfrac{\mathbf{a}}{2\sqrt{2}}\left(\mathbf{p}-\mathbf{a}+\dfrac{\mathbf{c}}{\sqrt{2}}\right) & , K3 \text{ koşulu geçerli ise} \\ \dfrac{\mathbf{a}}{2}\left(\mathbf{p}-\dfrac{\mathbf{a}}{\sqrt{2}}\right) & , K4 \text{ koşulu geçerli ise} \end{cases}$$

dır. Burada $Ki, i = 1, 2, 3, 4$ koşulları aşağıdaki gibidir:

$K1$: BC kenarı x-eksenine (y-eksenine) paralel ve AB, AC kenarları yataysal (dikeysel) doğrular üzerindedir veya BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB, AC kenarlarından biri yataysal diğeri dikeyseldir.

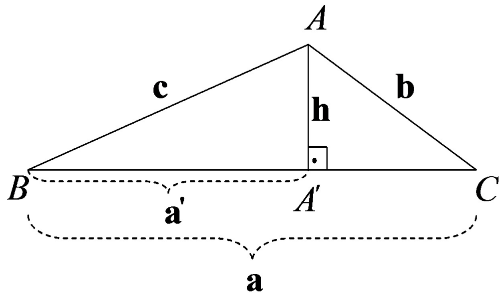
$K2$: BC kenarı x-eksenine (y-eksenine) paralel ve AB kenarı yataysal (dikeysel) doğru üzerinde, AC kenarı dikeysel (yataysal) doğru üzerindedir veya BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB kenarı dikeysel doğru üzerinde, AC kenarı yataysal doğru üzerindedir.

$K3$: BC kenarı x-eksenine (y-eksenine) paralel ve AB kenarı dikeysel (yataysal) doğru üzerinde, AC kenarı yataysal (dikeysel) doğru üzerindedir veya BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB kenarı dikeysel doğru üzerinde, AC kenarı yataysal doğru üzerindedir.

$K4$: BC kenarı x-eksenine (y-eksenine) paralel ve AB, AC kenarları dikeysel (yataysal) doğrular üzerindedir veya BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB kenarı dikeysel doğru üzerinde, AC kenarı yataysal doğru üzerindedir.

İspat *BC kenarı $x-$eksenine paralel olacak şekilde bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni gözönüne alınsın. Üçgenin A köşesinden inilen dikmenin ayağı A' ile gösterilmek üzere $\mathbf{h} = d_c(A, A')$ ve $\mathbf{a}' = d_c(B, A')$ olsun. Buna göre üçgenin AB ve AC kenarlarının düzlemdeki pozisyonlarına göre dört durum mümkündür.*

I. Durum: *B ve C köşesindeki açılar $\pi/4$ den küçük olsun. Bir başka deyişle AB ve AC kenarları yataysal doğrular üzerinde olsun.*



Şekil 5.2 BC Kenarı x Eksenine Paralel AB ve AC Kenarları Yataysal Doğrular Üzerinde Olan ABC Üçgeni

Burada oluşan $\overset{\triangle}{ABA'}$ *ve* $\overset{\triangle}{AA'C}$ *üçgenleri ele alındığında*

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}' + \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{c} - \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{h}$$

ve

$$\mathbf{b} = (\mathbf{a}-\mathbf{a}') + \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{h} = (-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})/2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

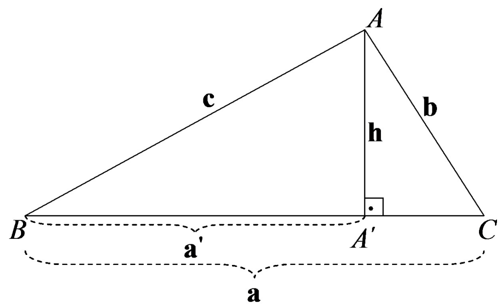
bulunur. Elde edilen bu değerler $A = \frac{1}{2}\mathbf{ah}$ *ifadesinde kullanılırsa*

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\mathbf{ah} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{a}\left(\frac{-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\right) \\ &= \frac{\mathbf{a}}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}(\mathbf{p}-\mathbf{a}) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Çin Dama düzleminde $\frac{\pi}{2}$ *ve* $\frac{\pi}{4}$ *lük dönmeler izometri olduğundan dolayı yukarıda bulunan ifade, sırasıyla,* BC *kenarı* y*-eksenine paralel ve* AB, AC *kenarları dikeysel doğrular üzerinde iken ve* BC *kenarı* $y = \mp x$ *doğrularından birine paralel ve* AB, AC *kenarlarından biri yataysal diğeri dikeysel iken de geçerlidir.*

II. Durum: $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin* BC *kenarı* x*-eksenine paralel,* AB *kenarı yataysal bir doğru üzerinde ve* AC *kenarı bir dikeysel doğru üzerinde olsun.*



Şekil 5.3 BC Kenarı x Eksenine Paralel, AB Kenarı Yataysal ve AC Kenarı Dikeysel Doğru Üzerinde Olan ABC Üçgeni

Benzer şekilde burada oluşan $\overset{\triangle}{ABA'}$ ve $\overset{\triangle}{AA'C}$ üçgenlerinden

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}' + \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{c} - \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{h}$$

ve

$$\mathbf{b} = \mathbf{h} + \left(\sqrt{2}-1\right)(\mathbf{a}-\mathbf{a}') \Rightarrow \mathbf{h} = \frac{-\mathbf{a} + \left(\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{1}\right)\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2\sqrt{2}}$$

elde edilir. Bulunan bu değerler $A = \frac{1}{2}\mathbf{ah}$ ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\mathbf{ah} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{a}\left(\frac{-\mathbf{a} + \left(\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{1}\right)\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\right) \\ &= \frac{\mathbf{a}}{2\sqrt{2}}\left(\mathbf{p}-\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

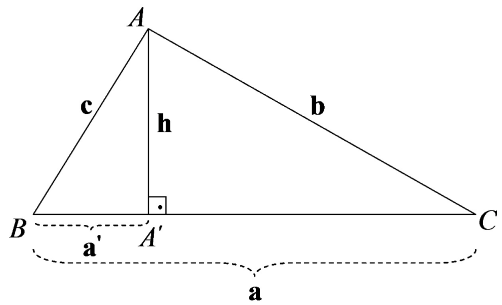
sonucu bulunur.

Çin Dama düzleminde $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{4}$ lük dönmeler birer izometri olduğundan dolayı yukarıda bulunan ifade, sırasıyla, BC kenarı y-eksenine paralel ve AB kenarı dikeysel doğru üzerinde, AC kenarı yataysal doğru üzerinde iken ve BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB kenarı dikeysel doğru üzerinde, AC kenarı yataysal doğru üzerinde iken de geçerlidir.

III. Durum: *Varsayalım ki $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin BC kenarı x-eksenine paralel, AB kenarı dikeysel bir doğru üzerinde ve AC kenarı bir yataysal doğru üzerinde olsun. II. Duruma* *benzer şekilde*

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\mathbf{ah} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{a}\left(\frac{-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\left(\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{1}\right)\mathbf{c}}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\right) \\ &= \frac{\mathbf{a}}{2\sqrt{2}}\left(\mathbf{p}-\mathbf{a}+\frac{\mathbf{c}}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

sonucu bulunur.



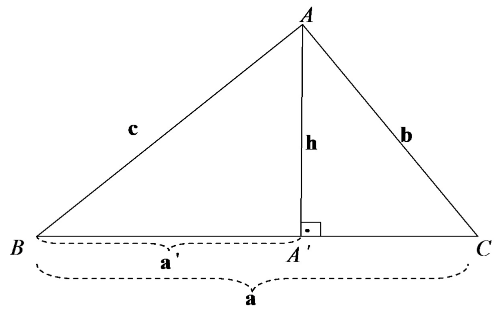
Şekil 5.4 BC Kenarı x Eksenine Paralel, AB Kenarı Dikeysel ve AC Kenarı Yataysal Doğru Üzerinde Olan ABC Üçgeni

CC-düzleminde $\frac{\pi}{2}$ *ve* $\frac{\pi}{4}$ *lük dönmeler birer izometri olduğundan dolayı elde edilen bu ifade, sırasıyla,* BC *kenarı* y*-eksenine paralel ve* AB *kenarı yataysal doğru üzerinde,* AC *kenarı dikeysel doğru üzerinde olması halinde ve de* BC *kenarı* $y = \mp x$ *doğrularından birine paralel ve* AB *kenarı dikeysel doğru üzerinde,* AC *kenarı yataysal doğru üzerinde olması halinde de geçerlidir.*

IV. Durum: AB *ve* AC *kenarları dikeysel doğrular üzerinde olsun. Diğer durumlarda olduğu gibi benzer şekilde*

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\mathbf{ah} \\ &= \frac{\mathbf{a}}{2}\left(\mathbf{p}-\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.



Şekil 5.5 BC Kenarı x Eksenine Paralel, AB ve AC Kenarları Dikeysel Doğrular Üzerinde Olan ABC Üçgeni

Diğer hallerde de belirtildiği gibi CC-düzleminde $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{4}$ lük dönmeler birer izometri olduğundan dolayı elde edilen bu ifade, sırasıyla, BC kenarı y-eksenine paralel ve AB, AC kenarları yataysal doğrular üzerinde iken ve BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB kenarı dikeysel doğru üzerinde, AC kenarı yataysal doğru üzerinde olması halinde de geçerlidir.

Önerme 5.2 *CC-düzleminde, herhangi bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin bir kenarı, örneğin BC kenarı, koordinat eksenlerinden birisine veya $y = \mp x$ doğrularından birine paralel olsun. Ayrıca üçgenin B ve C köşelerindeki açılardan biri, örneğin B açısı, geniş açı ise, üçgenin A köşesinden inilen dikmenin ayağı A' ve $\mathbf{a}' = d_c\left(B, A'\right)$ olmak üzere $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanı*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{a}}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\left(\mathbf{p} - (\mathbf{a} + \mathbf{a}')\right) & , K1 \text{ koşulu geçerli ise} \\[2ex] \dfrac{\mathbf{a}}{2\sqrt{2}}\left(\mathbf{p} - \mathbf{b} + \dfrac{\mathbf{c}}{\sqrt{2}}\right) & , K2 \text{ koşulu geçerli ise} \\[2ex] \dfrac{\mathbf{a}}{2}\left(\mathbf{p} - \dfrac{\mathbf{a}}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2}-1)\mathbf{a}'\right) & , K3 \text{ koşulu geçerli ise} \end{cases}$$

dır. Burada $Ki, i = 1, 2, 3$ koşulları aşağıdaki gibidir:

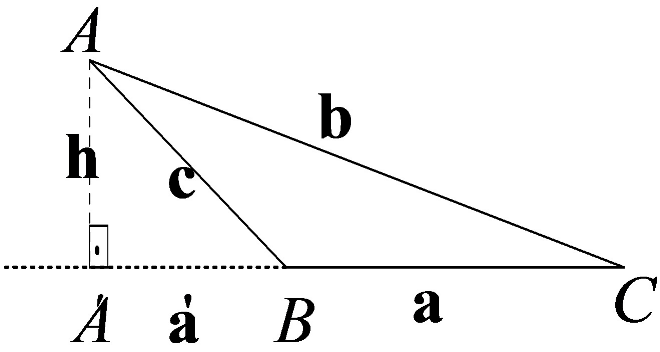
$K1$: BC kenarı x-eksenine (y-eksenine) paralel ve AB, AC kenarları yataysal (dikeysel) doğrular üzerindedir.

$K2$: BC kenarı x-eksenine (y-eksenine) paralel ve AB kenarı dikeysel (yataysal) doğru üzerinde, AC kenarı yataysal (dikeysel) doğru üzerindedir veya BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB ile AC kenarları yataysal veya dikeysel doğrular üzerindedir.

$K3$: BC kenarı x-eksenine (y-eksenine) paralel ve AB, AC kenarları dikeysel (yataysal) doğrular üzerindedir.

İspat *BC kenarı $x-$eksenine paralel ve B köşesindeki geniş açı olacak şekilde bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni gözönüne alınsın. Üçgenin A köşesinden inilen dikmenin ayağı A' ile gösterilmek üzere $\mathbf{h} = d_c(A, A')$ ve $\mathbf{a}' = d_c(B, A')$ olsun. Buna göre üçgenin AB ve AC kenarlarının düzlemdeki pozisyonlarına göre üç durum mümkündür:*

I. Durum: *AB ve AC kenarları Şekil 5.6.'da görüldüğü gibi yataysal doğrular üzerinde olsun.*



Şekil 5.6 BC Kenarı $x(y)$ Eksenine Paralel ve AB, AC Kenarları Yataysal(Dikeysel) Doğrular Üzerinde Olan ABC Üçgeni

Burada oluşan $\overset{\triangle}{ABA'}$ ve $\overset{\triangle}{ACA'}$ üçgenleri ele alındığında

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}' + \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{h} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}' = \mathbf{c} - \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{h} \\ \mathbf{h} = \dfrac{\mathbf{c}-\mathbf{a}'}{\left(\sqrt{2}-1\right)} \end{cases}$$

ve

$$\mathbf{b} = (\mathbf{a}+\mathbf{a}') + \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{a}+\mathbf{c}$$

bulunur. Elde edilen bu değerler kullanılarak

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} = \mathbf{a}+\mathbf{c}$$

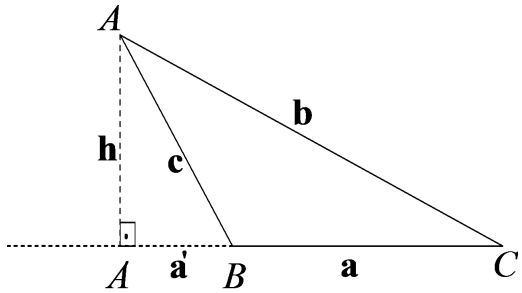
ve

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{h} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{a}\left(\frac{\mathbf{c}-\mathbf{a}'}{\left(\sqrt{2}-1\right)}\right) \\ &= \frac{\mathbf{a}}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\left(\mathbf{p}-(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\right) \end{aligned}$$

sonuçlarına ulaşılır.

Çin Dama düzleminde $\frac{\pi}{2}$ lik dönmeler izometri olduğundan dolayı yukarıda bulunan ifade BC kenarı y-eksenine paralel ve AB, AC kenarları dikeysel doğrular üzerinde olması halinde de geçerlidir.

II. Durum: *Varsayalım ki AB kenarı dikeysel bir doğru üzerinde ve AC kenarı yataysal bir doğru üzerinde olsun.*



Şekil 5.7 BC Kenarı $x(y)$ Eksenine Paralel ve AB Kenarı Dikeysel(Yataysal) Doğru, AC Kenarı Yataysal (Dikeysel) Doğru Üzerinde Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.7.'de görüldüğü gibi $\overset{\triangle}{ABA'}$ ve $\overset{\triangle}{AA'C}$ üçgenlerinden

$$\mathbf{c} = \mathbf{h} + \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{a}' \Rightarrow \mathbf{a}' = \frac{\mathbf{c}-\mathbf{h}}{\sqrt{2}-1}$$

ve

$$\mathbf{b} = (\mathbf{a}+\mathbf{a}') + \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{h} = \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}+\left(\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{1}\right)\mathbf{c}}{2}$$

bulunur. Bulunan bu değerler $A = \frac{1}{2}\mathbf{ah}$ ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\mathbf{ah} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{a}\left(\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}+\left(\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{1}\right)\mathbf{c}}{2}\right) \\ &= \frac{\mathbf{a}}{2\sqrt{2}}\left(\mathbf{p}-\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır.

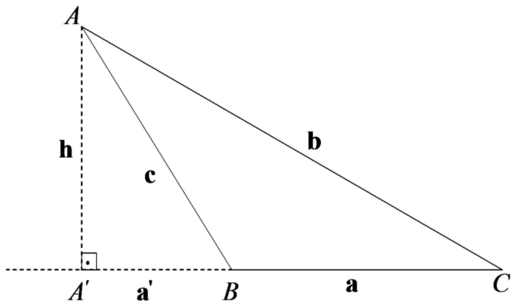
CC-düzleminde $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{4}$ lük dönmeler birer izometri olduğundan bu halde elde edilen sonuç, sırasıyla, BC kenarı y-eksenine paralel ve AB kenarı yataysal doğru üzerinde, AC

kenarı dikeysel doğru üzerinde iken ve BC kenarı $y = \mp x$ doğrularından birine paralel ve AB ile AC kenarları dikeysel doğru üzerinde veya yataysal doğru üzerinde iken de geçerlidir.

III. Durum: *Farzedelim ki, AB ve AC kenarları dikeysel doğrular üzerinde olsun. Tıpkı I. Durumda olduğu gibi kolaylıkla*

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\mathbf{ah} \\ &= \frac{\mathbf{a}}{2}\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{2}} - \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{a}'\right) \end{aligned}$$

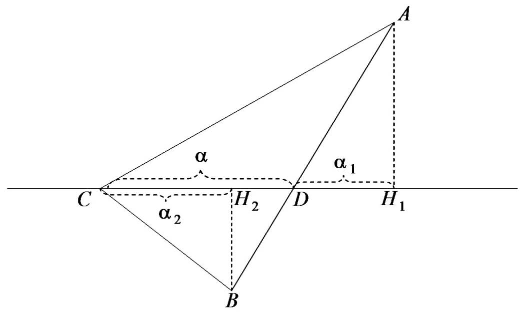
sonucu elde edilir.



Şekil 5.8 BC Kenarı $x(y)$ Eksenine Paralel ve AB, AC Kenarları Dikeysel(Yataysal) Doğrular Üzerinde Olan ABC Üçgeni

Bu sonuç CC-düzleminde $\frac{\pi}{2}$ lik dönme izometri olduğundan BC kenarı y-eksenine paralel ve AB, AC kenarları yataysal doğrular üzerinde iken de geçerlidir.

Şimdi temel kavramlar kısmında belirtilen temel köşe, temel doğru, temel doğru parçası kavramlarını kullanarak hiçbir kenarı herhangi bir koordinat eksenine paralel olmayan üçgenler için Heron formülünün CC-benzeri verilmektedir. Herhangi bir üçgenin en az bir köşesi bir veya iki temel doğruya sahiptir. Aşağıdaki teoremde ele alınacak olan herhangi üçgenin C köşesi temel köşe olsun. Ayrıca C den geçen temel doğruya diğer A ve B köşelerinden inilen dikme ayakları, sırasıyla, H_1 ve H_2 olsun. Temel doğrunun, temel köşeye karşı olan kenarı kestiği nokta D olmak üzere $\alpha = d_c(C, D)$, $\alpha_1 = d_c(C, H_1)$ ve $\alpha_2 = d_c(C, H_2)$ olarak alınmaktadır.



Şekil 5.9 Temel Köşesi C, A ve B Köşelerinden İnilen Dikme Ayakları H_1 ve H_2 Olan ABC Üçgeni

Aşağıdaki teorem Heron formülünün genel CC-benzerini vermektedir.

Teorem 5.3 *CC-düzleminde,* $\overset{\triangle}{ABC}$ *herhangi bir üçgen ve* C *temel köşesinden geçen temel doğruya diğer* A *ve* B *köşelerden inilen dikme ayakları sırasıyla* H_1 *ve* H_2 *olsun. Temel doğrunun, temel köşeye karşı olan kenarı kestiği nokta* D, $\alpha = d_c(C, D)$, $\alpha_1 = d_c(C, H_1)$ *ve* $\alpha_2 = d_c(C, H_2)$ *olmak üzere* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin alanı*

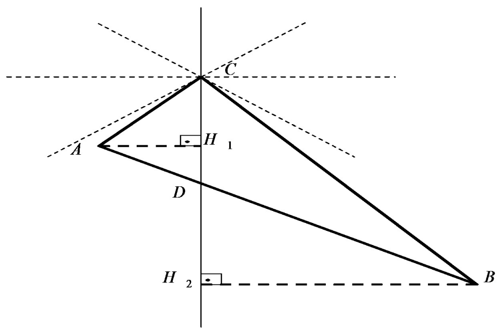
$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2}\left(2\mathbf{p} - \mathbf{c} - (\sqrt{2}-1)(\alpha_1 + \alpha_2)\right) & , K1 \text{ koşuluyla} \\ \dfrac{\alpha}{2(\sqrt{2}-1)}(2\mathbf{p} - \mathbf{c} - (\alpha_1 + \alpha_2)) & , K2 \text{ koşuluyla} \\ \dfrac{\alpha}{2}\left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{a} - \mathbf{c} - (\sqrt{2}-1)(\alpha_1 + (\sqrt{2}+1)^2\alpha_2)\right) & , K3 \text{ koşuluyla} \\ \dfrac{\alpha}{2}\left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{b} - \mathbf{c} - (\sqrt{2}-1)((\sqrt{2}+1)^2\alpha_1 + \alpha_2)\right) & , K4 \text{ koşuluyla} \end{cases}$$

dır. Burada Ki, $i = 1, 2, 3, 4$ *koşulları aşağıdaki gibidir:*
$K1$: *Tek yatay (dikey) temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar dikeysel (yataysal)dir veya iki temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar dikeyseldir*
$K2$: *Tek yatay (dikey) temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar yataysal (dikeysel)dır veya iki temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar yataysaldır.*
$K3$: *Tek yatay (dikey) temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar a yataysal (dikeysel), b dikeysel (yataysal)dir veya iki temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar a yataysal, b dikeyseldir.*
$K4$: *Tek yatay (dikey) temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar a dikeysel (yataysal), b yataysal (dikeysel)dır veya iki temel doğru var ve temel köşeden geçen kenarlar a dikeysel, b yataysaldır.*

İspat *Düzlemdeki herhangi bir üçgen için temel doğrunun geçtiği en az bir temel köşe vardır. O halde C, $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin temel köşesi, temel doğrunun AB kenarını kestiği nokta D olsun. Ayrıca A ve B köşelerinden temel doğruya inilen dikme ayakları, sırasıyla, H_1 ve H_2 olmak üzere $\alpha = d_c(C, D)$, $\alpha_1 = d_c(C, H_1)$ ve $\alpha_2 = d_c(C, H_2)$ olsun. Ayrıca $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin yarı çevre uzunluğu* **p** *olsun. O halde C den geçen temel doğru sayısına göre, öncelikle iki başlıca durum söz konusudur:*

I. Durum: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin C temel köşesinden geçen bir tek temel doğru olsun. Buna göre $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin kenarlarının eğimlerine göre sekiz alt durum vardır.*

Altdurum 1.1: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin tüm kenarları dikeysel ve temel köşeden geçen temel doğru dikey olsun.*



Şekil 5.10 Tüm Kenarları Dikeysel ve Temel Köşeden Geçen Temel Doğru Dikey Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.10.'dan da görülebileceği üzere

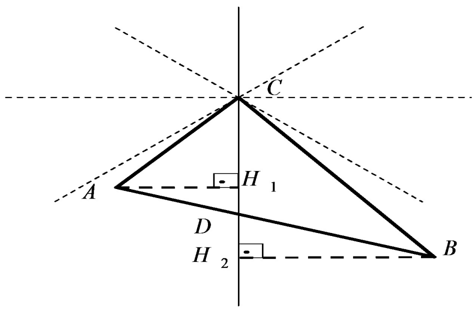
$$|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{\left(\sqrt{2}-1\right)} \qquad ve \qquad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

dir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ACD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) \\
&= \frac{|AH_1|\,|CD|}{2} + \frac{|BH_2|\,|CD|}{2} \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AH_1| + |BH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\left(|AC| + |BC| - |CH_1| - |CH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\left(2\mathbf{p} - |AB| - |CH_1| - |CH_2|\right) \\
&= \frac{\alpha}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\left(2\mathbf{p} - \mathbf{c} - (\alpha_1 + \alpha_2)\right)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2-$lik dönmeler izometri olduğundan temel doğru yatay ve tüm kenarlar yataysal olduğunda da geçerlidir.

Altdurum 1.2: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m\,(AB)| < 1$, $|m\,(AC)| > 1$, $|m\,(BC)| > 1$ ve temel doğru dikey olsun.*



Şekil 5.11 $|m\,(AB)| < 1$, $|m\,(AC)| > 1$, $|m\,(BC)| > 1$ ve Temel Doğrusu Dikey Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.11.'den de görülebileceği üzere

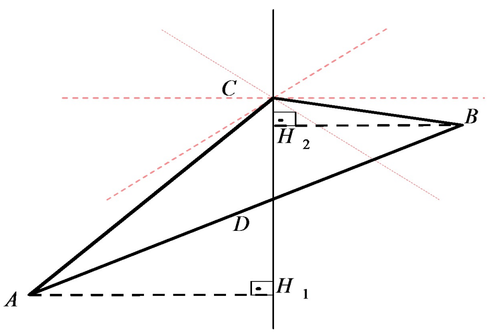
$$|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{\left(\sqrt{2}-1\right)} \qquad \textit{ve} \qquad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

dir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ACD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) \\
&= \frac{|AH_1|\,|CD|}{2} + \frac{|BH_2|\,|CD|}{2} \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AH_1| + |BH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\left(|AC| + |BC| - |CH_1| - |CH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\left(2\mathbf{p} - |AB| - |CH_1| - |CH_2|\right) \\
&= \frac{\alpha}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\left(2\mathbf{p} - \mathbf{c} - (\alpha_1 + \alpha_2)\right)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2-$lik dönmeler izometri olduğundan $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m\,(AB)| > 1$, $|m\,(AC)| < 1$, $|m\,(BC)| < 1$ ve temel doğru yatay olduğunda da geçerlidir.

Altdurum 1.3: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m\,(AB)| > 1$, $|m\,(AC)| > 1$, $|m\,(BC)| < 1$ ve temel doğru dikey olsun.*



Şekil 5.12 $|m\,(AB)| > 1$, $|m\,(AC)| > 1$, $|m\,(BC)| < 1$ ve Temel Doğrusu Dikey Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.12.'den de görülebileceği üzere

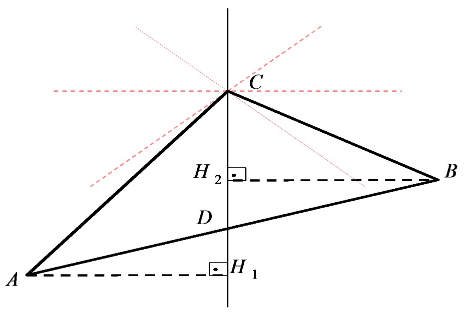
$$
|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{\left(\sqrt{2}-1\right)} \qquad \textit{ve} \qquad |BH_2| = |BC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_2|
$$

dir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ACD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) \\
&= \frac{|AH_1|\,|CD|}{2} + \frac{|BH_2|\,|CD|}{2} \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AH_1| + |BH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)|AC| + |BC| - \left(\sqrt{2}+1\right)|CH_1| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(2\mathbf{p}+\sqrt{2}\,|AC| - |AB| - (\sqrt{2}-1)\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2|CH_1| + |CH_2|\right)\right) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{b} - \mathbf{c} - \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2\alpha_1 + \alpha_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2-$lik dönmeler izometri olduğundan $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m(AB)| < 1$, $|m(AC)| < 1$, $|m(BC)| > 1$ ve temel doğru yatay olduğunda da geçerlidir.

Altdurum 1.4: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m(AB)| < 1$, $|m(AC)| > 1$, $|m(BC)| < 1$ ve temel doğru dikey olsun.*



Şekil 5.13 $|m(AB)| < 1$, $|m(AC)| > 1$, $|m(BC)| < 1$ ve Temel Doğrusu Dikey Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.13.'ten de görülebileceği üzere

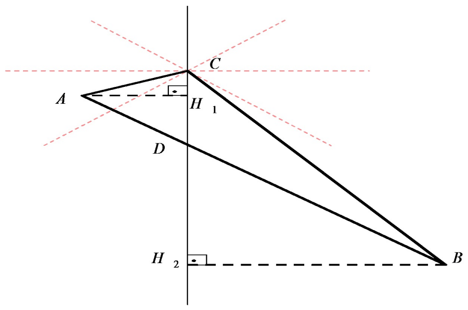
$$|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{\left(\sqrt{2}-1\right)} \qquad \textit{ve} \qquad |BH_2| = |BC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_2|$$

dir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ACD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) \\
&= \frac{|AH_1|\,|CD|}{2} + \frac{|BH_2|\,|CD|}{2} \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AH_1| + |BH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)|AC| + |BC| - \left(\sqrt{2}+1\right)|CH_1| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(2\mathbf{p}+\sqrt{2}\,|AC| - |AB| - (\sqrt{2}-1)\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2|CH_1| + |CH_2|\right)\right) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{b} - \mathbf{c} - \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2\alpha_1 + \alpha_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2-$lik dönmeler izometri olduğundan $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m\,(AB)| > 1$, $|m\,(AC)| < 1$, $|m\,(BC)| > 1$ ve temel doğru yatay olduğunda da geçerlidir.

Altdurum 1.5: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m\,(AB)| > 1$, $|m\,(AC)| < 1$, $|m\,(BC)| > 1$ ve temel doğru dikey olsun.*



Şekil 5.14 $|m\,(AB)| > 1$, $|m\,(AC)| < 1$, $|m\,(BC)| > 1$ ve Temel Doğrusu Dikey Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.14.'ten de görülebileceği üzere

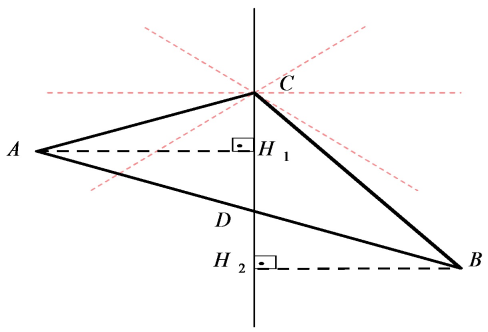
$$|AH_1| = |AC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_1| \qquad \textit{ve} \qquad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

dir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ACD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) \\
&= \frac{|AH_1|\,|CD|}{2} + \frac{|BH_2|\,|CD|}{2} \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AH_1| + |BH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AC| + \left(\sqrt{2}+1\right)|BC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_1| - \left(\sqrt{2}+1\right)|CH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(2\mathbf{p}+\sqrt{2}\,|BC| - |AB| - (\sqrt{2}-1)\left(|CH_1| + \left(\sqrt{2}+1\right)^2|CH_2|\right)\right) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{a} - \mathbf{c} - \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\alpha_1 + \left(\sqrt{2}+1\right)^2\alpha_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2-$lik dönmeler izometri olduğundan $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m\,(AB)| < 1$, $|m\,(AC)| > 1$, $|m\,(BC)| < 1$ ve temel doğru yatay olduğunda da geçerlidir.

Altdurum 1.6: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m\,(AB)| < 1$, $|m\,(AC)| < 1$, $|m\,(BC)| > 1$ ve temel doğru dikey olsun.*



Şekil 5.15 $|m\,(AB)| < 1$, $|m\,(AC)| < 1$, $|m\,(BC)| > 1$ ve Temel Doğrusu Dikey Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.15.'ten de görülebileceği üzere

$$|AH_1| = |AC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_1| \qquad \textit{ve} \qquad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

$$
\begin{aligned}
A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ACD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) \\
&= \frac{|AH_1|\,|CD|}{2} + \frac{|BH_2|\,|CD|}{2} \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AH_1| + |BH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AC| + \left(\sqrt{2}+1\right)|BC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_1| - \left(\sqrt{2}+1\right)|CH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(2\mathbf{p}+\sqrt{2}\,|BC| - |AB| - (\sqrt{2}-1)\left(|CH_1| + \left(\sqrt{2}+1\right)^2 |CH_2|\right)\right) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{a} - \mathbf{c} - \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\alpha_1 + \left(\sqrt{2}+1\right)^2 \alpha_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2-$lik dönmeler izometri olduğundan $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m\,(AB)| > 1$, $|m\,(AC)| > 1$, $|m\,(BC)| < 1$ ve temel doğru yatay olduğunda da geçerlidir.

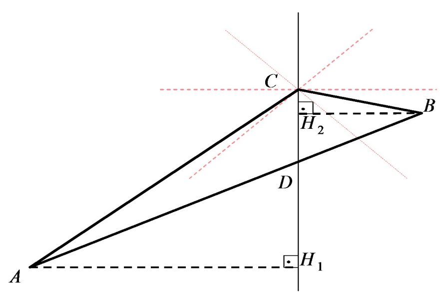
Altdurum 1.7: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m\,(AB)| > 1$, $|m\,(AC)| < 1$, $|m\,(BC)| < 1$ ve temel doğru dikey olsun. Ancak düzlemde bu koşullara uygun bir üçgen çizilemez. c_1, $c_2 \in (1,\infty)$ olmak üzere AC ve CB kenarları, sırasıyla, $y = \frac{1}{c_1}x$ ve $y = \frac{-1}{c_2}x$ doğruları üzerinde olsun. Buna göre $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $A = \left(-a, \frac{-a}{c_1}\right)$ ve $B = \left(b, \frac{-b}{c_2}\right)$ olsun. O halde AB kenarının eğimi için*

$$
\frac{\left|\frac{-a}{c_1} + \frac{b}{c_2}\right|}{|a+b|} > 1
$$

olmalıdır. Bu ise $\frac{-a}{c_1} + \frac{b}{c_2} > a + b$ veya $\frac{a}{c_1} - \frac{b}{c_2} > a + b$ koşullarını gerektirir. Bu eşitsizlikler düzenlendiğinde

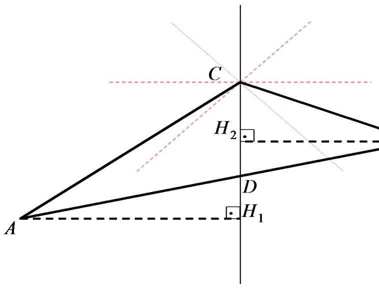
$$
\frac{-a(1+c_1)}{c_1} > \frac{b(c_2-1)}{c_2} \text{ ve } \frac{a(1-c_1)}{c_1} > \frac{b(1+c_2)}{c_2}
$$

elde edilirki, burada her iki eşitsizlikte $- > +$ olma koşulu gelir ki bu bir çelişkidir. Şekil 5.16.'da görülen AB kenarı yataysaldır.



Şekil 5.16 $|m\,(AB)| > 1$, $|m\,(AC)| < 1$, $|m\,(BC)| < 1$ ve Temel Doğrusu Dikey Olan ABC Üçgeni

Altdurum 1.8: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin tüm kenarları yataysal ve temel köşeden geçen temel doğru dikey olsun.*



Şekil 5.17 Tüm Kenarları Yataysal ve Temel Köşeden Geçen Temel Doğrusu Dikey Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.17.'den de görülebileceği üzere

$$|AH_1| = |AC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_1| \qquad \textit{ve} \qquad |BH_2| = |BC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_2|$$

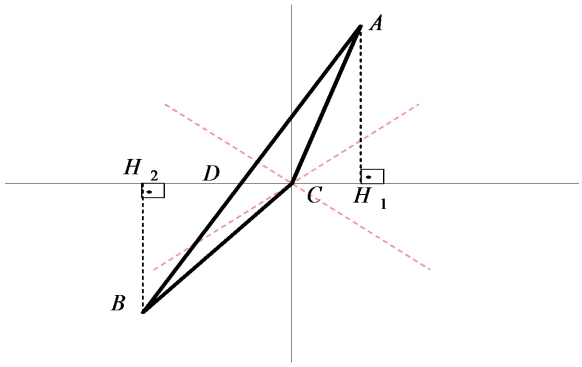
dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ACD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) \\
&= \frac{|AH_1|\,|CD|}{2} + \frac{|BH_2|\,|CD|}{2} \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AH_1| + |BH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AC| + |BC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_1| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(2\mathbf{p} - |AB| - \left(\sqrt{2}-1\right)\left(|CH_1| + |CH_2|\right)\right) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(2\mathbf{p} - \mathbf{c} - \left(\sqrt{2}-1\right)(\alpha_1 + \alpha_2)\right)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, CC-düzleminde $\pi/2-$lik dönmeler izometri olduğundan tüm kenarlar dikeysel ve temel doğru yatay olduğunda da geçerlidir.

II. Durum: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin C temel köşesinden geçen iki temel doğru olsun. Bu durum içinde $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin kenarlarının eğimlerine göre sekiz alt durum vardır.*

Altdurum 2.1: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin tüm kenarları dikeysel olsun.*



Şekil 5.18 Tüm Kenarları Dikeysel Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.18.'ten de görülebileceği üzere

$$|AH_1| = |AC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_1| \qquad ve \qquad |BH_2| = |BC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_2|$$

dir. Bu durumda

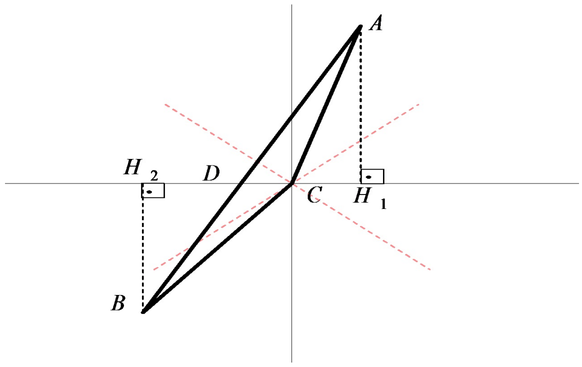
$$\begin{aligned} A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ACD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) \\ &= \frac{|AH_1|\,|CD|}{2} + \frac{|BH_2|\,|CD|}{2} \\ &= \frac{|CD|}{2}\left(|AH_1| + |BH_2|\right) \\ &= \frac{|CD|}{2}\left(|AC| + |BC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_1| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_2|\right) \\ &= \frac{|CD|}{2}\left(2\mathbf{p} - |AB| - \left(\sqrt{2}-1\right)\left(|CH_1| + |CH_2|\right)\right) \\ &= \frac{\alpha}{2}\left(2\mathbf{p} - \mathbf{c} - \left(\sqrt{2}-1\right)(\alpha_1 + \alpha_2)\right) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Altdurum 2.2: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m\,(AB)| < 1$, $|m\,(AC)| > 1$, $|m\,(BC)| > 1$ olsun. Ancak düzlemde bu koşullara uygun bir üçgen oluşturulamaz. $c_1,\, c_2 \in (1,\infty)$ olmak üzere BC ve AC kenarları, sırasıyla, $y = c_1x$ ve $y = c_2x$ doğruları üzerinde olsun. Buna göre $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $A = (-a, -c_1a)$ ve $B = (b, c_2b)$ olsun. O halde AB kenarının eğimi için*

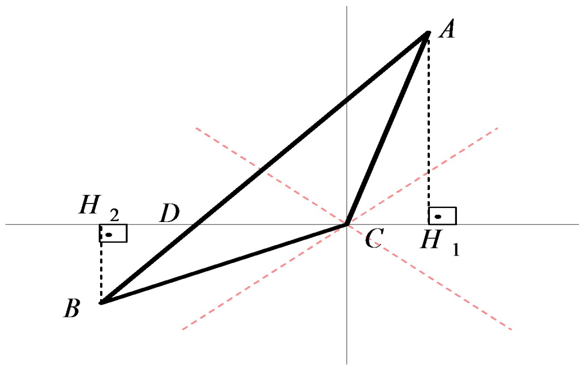
$$\frac{|c_1a + c_2b|}{|a+b|} < 1$$

olmalıdır. Bu ise $|c_1a + c_2b| < |a+b|$ koşulunu gerektirir. Fakat $c_1, c_2 \in (1,\infty)$ ve $a, b \in \mathbb{R}^+$ olduğundan bu eşitsizliğin çözüm kümesi boş kümedir. O halde bu koşullara uygun bir üçgen yoktur. Şekil 5.19.'da görülen AB kenarı dikeyseldir.



Şekil 5.19 $|m(AB)| < 1$, $|m(AC)| > 1$, $|m(BC)| > 1$ ve Temel Doğruları Dikey Olan ABC Üçgeni

Altdurum 2.3: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m(AB)| > 1$, $|m(AC)| > 1$, $|m(BC)| < 1$ olsun.*



Şekil 5.20 $|m(AB)| > 1$, $|m(AC)| > 1$, $|m(BC)| < 1$ ve Temel Doğruları Dikey Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.20.'den de görülebileceği üzere

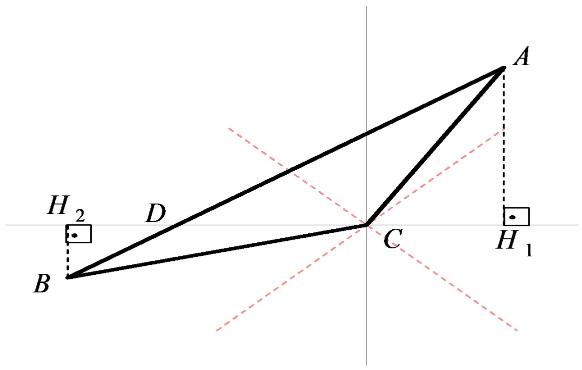
$$|AH_1| = |AC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_1| \qquad \textit{ve} \qquad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

dir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ACD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) \\
&= \frac{|AH_1|\,|CD|}{2} + \frac{|BH_2|\,|CD|}{2} \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AH_1| + |BH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AC| + \left(\sqrt{2}+1\right)|BC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_1| - \left(\sqrt{2}+1\right)|CH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(2\mathbf{p}+\sqrt{2}\,|BC| - |AB| - (\sqrt{2}-1)\left(|CH_1| + \left(\sqrt{2}+1\right)^2 |CH_2|\right)\right) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{a} - \mathbf{c} - \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\alpha_1 + \left(\sqrt{2}+1\right)^2 \alpha_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

Altdurum 2.4: $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeni için* $|m\,(AB)| < 1, |m\,(AC)| > 1, |m\,(BC)| < 1$ *olsun.*



Şekil 5.21 $|m\,(AB)| < 1, |m\,(AC)| > 1, |m\,(BC)| < 1$ ve Temel Doğruları Dikey Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.21.'den de görülebileceği üzere

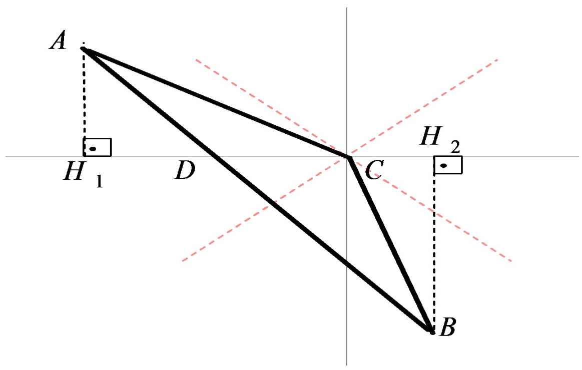
$$|AH_1| = |AC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_1| \qquad ve \qquad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

dir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ACD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) \\
&= \frac{|AH_1|\,|CD|}{2} + \frac{|BH_2|\,|CD|}{2} \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AH_1| + |BH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AC| + \left(\sqrt{2}+1\right)|BC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_1| - \left(\sqrt{2}+1\right)|CH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(2\mathbf{p}+\sqrt{2}\,|BC| - |AB| - (\sqrt{2}-1)\left(|CH_1| + \left(\sqrt{2}+1\right)^2 |CH_2|\right)\right) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{a} - \mathbf{c} - \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\alpha_1 + \left(\sqrt{2}+1\right)^2 \alpha_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

Altdurum 2.5: $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeni için* $|m(AB)| > 1, |m(AC)| < 1, |m(BC)| > 1$ *olsun.*



Şekil 5.22 $|m(AB)| > 1, |m(AC)| < 1, |m(BC)| > 1$ ve Temel Doğruları Dikey Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.22.'den de görülebileceği üzere

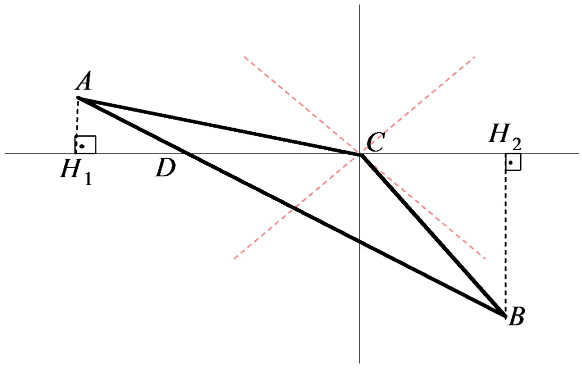
$$|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{\left(\sqrt{2}-1\right)} \qquad \textit{ve} \qquad |BH_2| = |BC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_2|$$

dir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ACD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) \\
&= \frac{|AH_1|\,|CD|}{2} + \frac{|BH_2|\,|CD|}{2} \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AH_1| + |BH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)|AC| + |BC| - \left(\sqrt{2}+1\right)|CH_1| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(2\mathbf{p}+\sqrt{2}\,|AC| - |AB| - (\sqrt{2}-1)\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2|CH_1| + |CH_2|\right)\right) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{b} - \mathbf{c} - \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2\alpha_1 + \alpha_2\right)\right)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

Altdurum 2.6: $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeni için* $|m\,(AB)| < 1$, $|m\,(AC)| < 1$, $|m\,(BC)| > 1$ *olsun.*



Şekil 5.23 $|m\,(AB)| < 1$, $|m\,(AC)| < 1$, $|m\,(BC)| > 1$ ve Temel Doğruları Dikey Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.23.'ten de görülebileceği üzere

$$|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{\left(\sqrt{2}-1\right)} \qquad \textit{ve} \qquad |BH_2| = |BC| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_2|$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ACD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) \\
&= \frac{|AH_1|\,|CD|}{2} + \frac{|BH_2|\,|CD|}{2} \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(|AH_1| + |BH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)|AC| + |BC| - \left(\sqrt{2}+1\right)|CH_1| - \left(\sqrt{2}-1\right)|CH_2|\right) \\
&= \frac{|CD|}{2}\left(2\mathbf{p}+\sqrt{2}\,|AC| - |AB| - (\sqrt{2}-1)\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2|CH_1| + |CH_2|\right)\right) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(2\mathbf{p} + \sqrt{2}\mathbf{b} - \mathbf{c} - \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2\alpha_1 + \alpha_2\right)\right)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

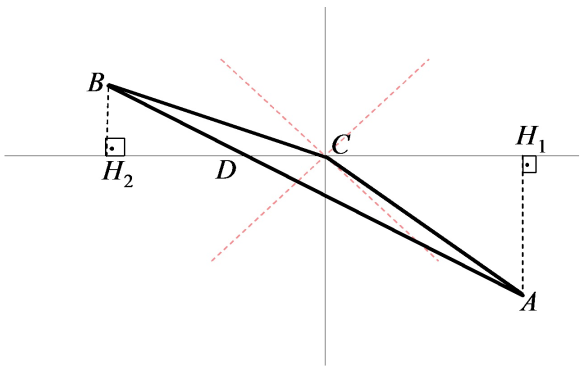
Altdurum 2.7: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için $|m\,(AB)| > 1$, $|m\,(AC)| < 1$, $|m\,(BC)| < 1$ olsun. Ancak düzlemde bu koşullara uygun bir üçgen çizilemez. $c_1, c_2 \in (1, \infty)$ olmak üzere AC ve CB kenarları, sırasıyla, $y = \frac{-1}{c_1}x$ ve $y = \frac{-1}{c_2}x$ doğruları üzerinde olsun. Buna göre $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $A = \left(-a, \frac{a}{c_1}\right)$ ve $B = \left(b, \frac{-b}{c_2}\right)$ olsun. O halde AB kenarının eğimi için*

$$\frac{\left|\frac{a}{c_1} + \frac{b}{c_2}\right|}{|a+b|} > 1$$

olmalıdır. Bu ise $\frac{a}{c_1} + \frac{b}{c_2} > a + b$ koşulunu gerektirir. Bu eşitsizlik düzenlendiğinde

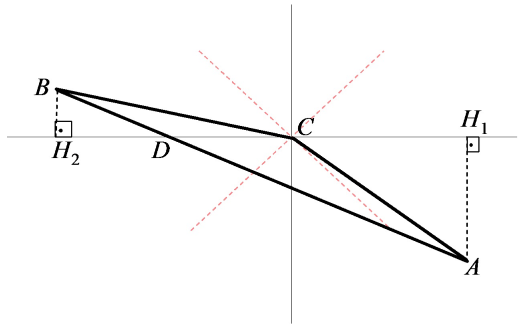
$$c_2 a + c_1 b > (c_1 + c_2)(a + b)$$

elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Şekil 5.24.'te görülen AB kenarı yataysaldır.



Şekil 5.24 $|m\,(AB)| > 1$, $|m\,(AC)| < 1$, $|m\,(BC)| < 1$ ve Temel Doğruları Dikey Olan ABC Üçgeni

Altdurum 2.8: *$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin tüm kenarları yataysal olsun.*



Şekil 5.25 Tüm Kenarları Yataysal Olan ABC Üçgeni

Şekil 5.25.'ten de görülebileceği üzere

$$|AH_1| = \frac{|AC| - |CH_1|}{\left(\sqrt{2}-1\right)} \qquad \textit{ve} \qquad |BH_2| = \frac{|BC| - |CH_2|}{\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(\overset{\triangle}{ABC}) &= A(\overset{\triangle}{ACD}) + A(\overset{\triangle}{BCD}) \\ &= \frac{|AH_1|\,|CD|}{2} + \frac{|BH_2|\,|CD|}{2} \\ &= \frac{|CD|}{2}\left(|AH_1| + |BH_2|\right) \\ &= \frac{|CD|}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\left(|AC| + |BC| - |CH_1| - |CH_2|\right) \\ &= \frac{|CD|}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\left(2\mathbf{p} - |AB| - \left(|CH_1| + |CH_2|\right)\right) \\ &= \frac{\alpha}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\left(2\mathbf{p} - \mathbf{c} - \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right) \end{aligned}$$

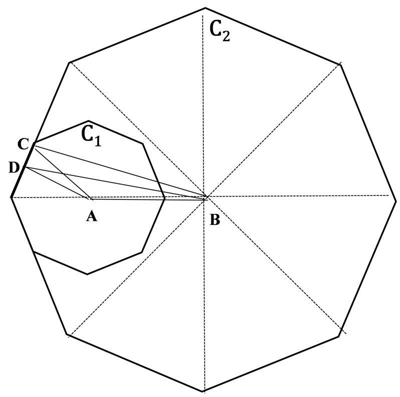
sonucu elde edilir.

Tüm durumlardaki sonuçlar birlikte ele alınırsa istenen formüle ulaşılmış olur.

6. α - GEOMETRİ

Bu bölümde Öklid düzlem geometrisinde iyi bilinen Heron formülünün α-düzlemindeki hali Çolakoğlu vd. (2013)'teki gibi verilmektedir. Burada bahsedilen formüllerden ikisi Öklidyen düzlemde bir üçgenin standart alan formülünün α-benzeri olup bölümün ilk kısımda ve üçüncüsü ise bölümün ikinci kısmında verilen Öklid düzlem geometrisinde iyi bilinen Heron formülünün α-karşılığıdır.

Burada ele alınan alan kavramı alışılmış Öklid alan kavramıdır. α-düzleminde karşılıklı kenarlarının α-uzunlukları aynı olan ancak alanları farklı olan üçgenlerin varlığı kolaylıkla görülebilir. Buna bir örnek için Şekil 6.1.'e bakılabilir.



Şekil 6.1 α-Uzunlukları Aynı, Alanları Farklı Üçgenler

Şekilde AB, x-eksenine paralel bir doğru olsun. C_1, A merkezli ve b yarıçaplı bir α-çemberi ve C_2, B merkezli ve $b+c$ yarıçaplı bir α-çemberi olsun. Ayrıca C ve D de $C_1 \cap C_2$ de AB doğrusuna göre simetrik olmayan iki nokta olsun. O halde açıkça $d_\alpha(A,C) = d_\alpha(A,D)$ ve $d_\alpha(B,C) = d_\alpha(B,D)$ olmasına rağmen $A(A\overset{\triangle}{B}C) \neq A(A\overset{\triangle}{B}D)$ dir. Bu gerçek ise "α-düzleminde bir üçgenin alanı nasıl hesaplanır?" sorusunu doğurur. Açıkça, bir üçgenin alanını hesaplamak için verilen her formül bir takım parametrelere bağlı olur. Bu bölümde α-düzleminde farklı parametreleri kullanarak bir üçgenin alanını hesaplamak için üç formül verilecektir. Ayrıca, α-uzaklığı, Taksi ve Çin Dama uzaklığını kapsadığından elde edilen sonuçların Taksi ve Çin Dama düzlemi için elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılması verilecektir.

6.1 α-Düzleminde Bir Üçgenin Alanı

$\overset{\triangle}{ABC}$ Öklidyen düzlemde bir üçgen ve H, üçgenin A köşesinden BC doğrusuna inilen dikme ayağı olsun. $a = d_E(B, C)$, $h = d_E(A, H)$ veya $h = d_E(A, BC)$ olmak üzere $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgenin standart alan formülü

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$$

şeklindedir. Bu kısımda α-uzaklıkları cinsinden üçgenin standart alan formülünün iki α-karşılığı verilecektir. Verilen formüllerde **a** $=d_\alpha(B, C)$, **h** $= d_\alpha(A, H)$ veya **h** $= d_\alpha(A, BC)$ olmak üzere bir parametre kullanılmıştır. Bu parametre taban doğru parçasının üzerinde bulunduğu doğrunun eğimidir. Ayrıca uzaklık fonksiyonundaki $\lambda(\alpha)$ parametresinin sabit olduğuna dikkat ediniz.

Analitik düzlemde iki nokta arasındaki Öklidyen ve α-uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısı Yardımcı Teorem 2.6'da verilmişti. Bu bağıntı alan formülünün ilk α-karşılığında önemli bir rol oynamaktadır. Aşağıdaki teorem bir üçgenin iyi bilinen Öklidyen alan formülünün α-benzerini vermektedir.

Teorem 6.1 *$\overset{\triangle}{ABC}$, α-düzleminde herhangi bir üçgen ve A köşesinden BC kenarına inilen dikme ayağı H, BC doğru parçasının eğimi m ve $a = d_\alpha(B, C)$, $h = d_\alpha(A, H)$ olsun. Bu durumda*

(i) BC doğrusu koordinat eksenlerinden birine paralel ise,

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$$

(ii) BC doğrusu koordinat eksenlerinden birine paralel değil ise,

$\rho(m) = \sqrt{1+m^2}/(\max\{1, |m|\} + \lambda(\alpha)\min\{1, |m|\})$ *olmak üzere,*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = [\rho(m)]^2\,\frac{\mathbf{ah}}{2}$$

dir.

İspat *a=$d_E(B, C)$ ve $h = d_E(A, H)$ olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ olduğu iyi bilinmektedir.*

***(i)** Eğer BC kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel ise, bu durumda Yardımcı Teorem 2.6'daki $\rho(m)$ ifadesi 1 e eşit olacağından $d_E(B, C) = d_\alpha(B, C)$ ve $d_E(A, H) = d_\alpha(A, H)$ dır. Yani $a =$ **a** ve $h =$ **h** olur. O halde $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ olarak bulunur.*

***(ii)** Eğer BC kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel değil ise, BC kenarını eğimi m olup, AH doğrusunun eğimi $-\frac{1}{m}$ olur. Önerme 2.23 gereği $\rho(m) = \rho(-m) =$*

$\rho(1/m) = \rho(-1/m)$ *olup* $a = \mathbf{a}\rho(m)$ *ve* $h = \mathbf{h}\rho(m)$ *dir. Bu sebepten* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2} = [\rho(m)]^2 \frac{\mathbf{ah}}{2}$ *olarak bulunur.*

Önerme 2.24'te α-düzleminde bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının, bir $l : ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığının $d_\alpha(P, l) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\max\left\{|a|,|b|,\frac{|a+b|}{1+\lambda(\alpha)},\frac{|a-b|}{1+\lambda(\alpha)}\right\}}$ olduğu verilmişti. Ayrıca analitik düzlemde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığının α-uzaklık ve Öklidyen uzaklık arasındaki geçiş bağıntısı Önerme 2.25'te verilmişti. Bu bağıntı aşağıda ifade edilen alan formülünün ikinci α-benzerinde önemli bir yer tutar.

Teorem 6.2 *$\overset{\triangle}{ABC}$,α-düzleminde bir üçgen ve BC doğru parçasının eğimi m ve* $\mathbf{a}$ *$=d_\alpha(B, C)$,* $\mathbf{h}$ *$=d_\alpha(A, BC)$ olsun. Bu durumda*

(i) BC kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel ise,

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$$

(ii) BC kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel değil ise,

$\tau(m) = \max\{1, |m|, \frac{|1+m|}{1+\lambda(\alpha)}, \frac{|1-m|}{1+\lambda(\alpha)}\}/(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ *olmak üzere,*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \rho(m)\tau(m)\frac{\mathbf{ah}}{2}$$

olur.

İspat *a=$d_E(B, C)$ ve $h = d_E(A, H)$ olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ dir.*

(i) *Eğer BC kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel ise, bu durumda $d_E(B, C) = d_\alpha(B, C)$ ve $d_E(A, H) = d_\alpha(A, H)$ olup $a =$* $\mathbf{a}$ *ve $h =$* $\mathbf{h}$ *olur. Bu sebepten $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\mathbf{ah}}{2}$ olarak bulunur.*

(ii) *Eğer BC kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel değil ise, BC kenarını eğimi m olup, AH doğrusunun eğimi $-\frac{1}{m}$ olur. Önerme 2.23 ve Önerme 2.24 gereği $\rho(m) = \rho(-m) = \rho(1/m) = \rho(-1/m)$ olup $a = \mathbf{a}\rho(m)$ ve $h = \mathbf{h}\tau(m)$ dir. Bu sebepten $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2} = \rho(m)\tau(m)\frac{\mathbf{ah}}{2}$ olarak bulunur.*

6.2 Heron Formülünün α-Benzeri

Bu kısımda Öklidyen düzlem için çok iyi bilinen Heron formülünün α-düzlemindeki karşılığı verilmektedir. Öklid düzleminde iyi bilinen

$$\text{Üçgenin Alanı} = (\text{Taban} \times \text{Yükseklik})/2$$

formülü α-düzleminde genel olarak geçerli değildir. Bu formülün geçerli olması için gerek ve yeter koşul üçgenin tabanın koordinat eksenlerinden birine paralel veya eğimi m olan bir doğru üzerinde olmasıdır. Çünkü bu durumda Öklidyen ve α-uzaklıkları aynıdır. Ayrıca bir üçgenin alanı üçgenin üç kenarının uzunlukları kullanılarak da hesaplanabilir. a, b, c herhangi bir üçgenin kenar uzunlukları olsun. $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ yarı çevre olmak üzere üçgenin alanı A;

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

şeklinde de bulunabilir. Bu formül Heron formülü olarak bilinir. α-düzleminde bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin kenar uzunlukları

$$\mathbf{a} = d_\alpha(B,C) \quad , \quad \mathbf{b} = d_\alpha(A,C) \quad , \quad \mathbf{c} = d_\alpha(A,B)$$

ve α-yarıçevresi

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$$

olsun. Ayrıca temel kavramlar kısmında belirtilen doğru sınıflandırılmasını ve temel köşe, temel doğru gibi kavramlar kullanılmaktadır. Aşağıdaki teoremler Heron formülünün bazı özel durumlardaki α-karşılıklarını vermektedir.

Önerme 6.1 *$\overset{\triangle}{ABC}$, α-düzleminde herhangi bir üçgen ve C temel köşesinden geçen temel doğruya diğer A ve B köşelerden inilen dikme ayakları, sırasıyla, H_1 ve H_2 olsun. Temel doğrunun, temel köşeye karşı olan kenarı kestiği nokta D, $\mathbf{a} = d_\alpha(B,C)$, $\mathbf{b} = d_\alpha(A,C)$, $\mathbf{c} = d_\alpha(A,B)$ ve $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$, $l = d_\alpha(C,D)$, $l_1 = d_\alpha(C,H_1)$ ve $l_2 = d_\alpha(C,H_2)$ olmak üzere $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin alanı;*

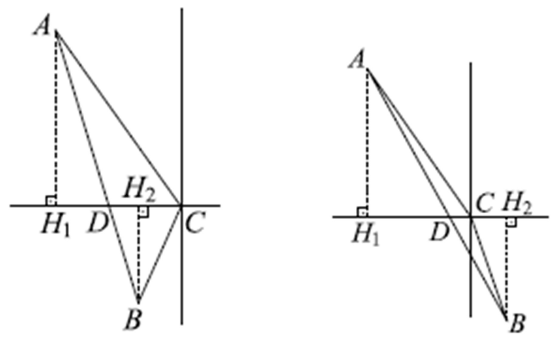
$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \begin{cases} \dfrac{l}{2}\left[2\mathbf{p} - \mathbf{c} - \lambda(\alpha)(l_1+l_2)\right] & , C1 \text{ koşuluyla} \\[2ex] \dfrac{l}{2\lambda(\alpha)}\left[2\mathbf{p} - \mathbf{c} - (l_1+l_2)\right] & , C2 \text{ koşuluyla} \\[2ex] \dfrac{l}{2\lambda(\alpha)}\left[2\mathbf{p} - \mathbf{c} + (\lambda(\alpha)-1)\mathbf{b} - (\lambda^2(\alpha)l_1 + l_2)\right] & , C3 \text{ koşuluyla} \\[2ex] \dfrac{l}{2\lambda(\alpha)}\left[2\mathbf{p} - \mathbf{c} + (\lambda(\alpha)-1)\mathbf{a} - (l_1 + \lambda^2(\alpha)l_2)\right] & , C4 \text{ koşuluyla} \end{cases}$$

dır. Burada C_i, $i = 1,2,3,4$ koşulları aşağıdaki gibidir:
$C1$: AC ve BC doğruları yataysal değildir ve temel doğru CD yatay bir doğrudur ya da AC ve BC doğruları dikeysel değildir ve temel doğru CD dikey bir doğrudur.
$C2$: AC ve BC doğruları dikeysel değildir ve temel doğru CD yatay bir doğrudur ya da AC ve BC doğruları yataysal değildir ve temel doğru CD dikey bir doğrudur.

$C3$: AC doğrusu yataysal değildir, BC doğrusu dikeysel değildir ve temel doğru CD yatay bir doğrudur ya da AC doğrusu dikeysel değildir, BC doğrusu yataysal değildir ve temel doğru CD dikey bir doğrudur.
$C4$: AC doğrusu dikeysel değildir, BC doğrusu yataysal değildir ve temel doğru CD yatay bir doğrudur ya da AC doğrusu yataysal değildir, BC doğrusu dikeysel değildir ve temel doğru CD dikey bir doğrudur.

İspat *Düzlemdeki herhangi bir üçgen için temel doğrunun geçtiği en az bir temel köşe vardır. O halde C, $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin temel köşesi, temel doğrunun AB kenarını kestiği nokta D olsun. Ayrıca A ve B köşelerinden temel doğruya inilen dikme ayakları, sırasıyla, H_1 ve H_2 olmak üzere $l = d_\alpha(C,D)$, $l_1 = d_\alpha(C,H_1)$ ve $l_2 = d_\alpha(C,H_2)$, $h_1 = d_\alpha(A,H_1)$ $h_2 = d_\alpha(B,H_2)$, $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin yarı çevre uzunluğu $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a+b+c}}{2}$ ve $\mathbf{a} = d_\alpha(B,C)$, $\mathbf{b} = d_\alpha(A,C)$, $\mathbf{c} = d_\alpha(A,B)$ olsun. İki nokta arasındaki α-uzaklığının düzlemdeki tüm ötelemeler, bir nokta etrafındaki $\pi/2$, π ve $3\pi/2$ radyanlık dönmeler ve $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ ve $y = -x$ doğrularına paralel doğrular etrafındaki yansımalarda değişmez kalır. Bu sebepten Şekil 6.2. $C1$ durumunu sağlayan tüm üçgenleri, Şekil 6.3. $C2$ durumunu sağlayan tüm üçgenleri, Şekil 6.4. $C3$ durumunu sağlayan tüm üçgenleri, Şekil 6.5. $C4$ durumunu sağlayan tüm üçgenleri temsil eder.*

I. Durum: *α-uzaklık tanımı gereği Şekil 6.2.'den*



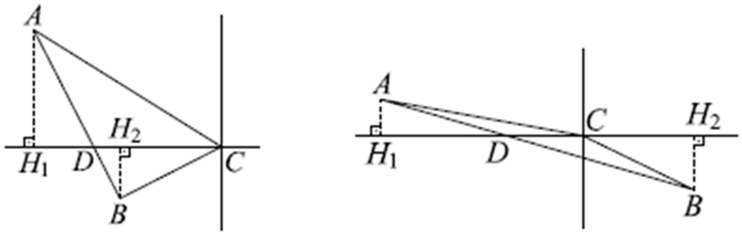
Şekil 6.2 AC ve BC Yataysal(Dikeysel) Olmayan ve Temel Doğrusu CD Yatay(Dikey) Olan ABC Üçgeni

$\mathbf{a} = h_2 + \lambda(\alpha) l_2$ *ve* $\mathbf{b} = h_1 + \lambda(\alpha) l_1$ *dir.* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ADC}) + A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{l}{2}(h_1 + h_2)$ *olduğundan* $h_1 = d_\alpha(A, H_1)$ *ve* $h_2 = d_\alpha(B, H_2)$ *eşitlikleri kullanılarak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{l}{2}\left[2\mathbf{p} - \mathbf{c} - \lambda(\alpha)\left(l_1 + l_2\right)\right]$$

olarak bulunur.

II. Durum: *α-uzaklık tanımı gereği Şekil 6.3.'ten*



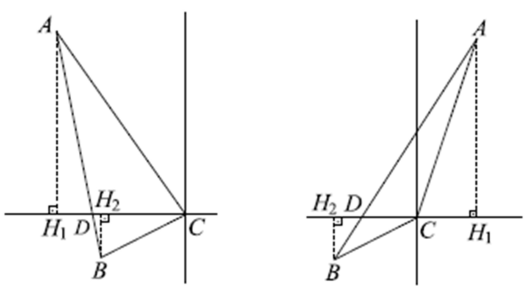
Şekil 6.3 AC ve BC Dikeysel(Yataysal) Olmayan ve Temel Doğrusu CD Yatay(Dikey) Olan ABC Üçgeni

$\mathbf{a} = l_2 + \lambda(\alpha) h_2$ *ve* $\mathbf{b} = l_1 + \lambda(\alpha) h_1$ *dir.* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ADC}) + A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{l}{2}(h_1 + h_2)$ *olduğundan* $h_1 = d_\alpha(A, H_1)$ *ve* $h_2 = d_\alpha(B, H_2)$ *eşitlikleri kullanılarak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{l}{2\lambda(\alpha)}\left[2\mathbf{p} - \mathbf{c} - \left(l_1 + l_2\right)\right]$$

olarak bulunur.

III. Durum: *α-uzaklık tanımı gereği Şekil 6.4.'ten*



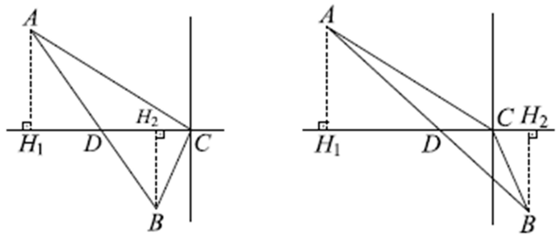
Şekil 6.4 AC Yataysal(Dikeysel) Olmayan, BC Dikeysel(Yataysal) Olmayan ve Temel Doğrusu CD Yatay(Dikey) Olan ABC Üçgeni

$\mathbf{a} = l_2 + \lambda(\alpha)h_2$*ve* $\mathbf{b} = h_1 + \lambda(\alpha)l_1$ *dir.* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ADC}) + A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{l}{2}(h_1 + h_2)$ *olduğundan* $h_1 = d_\alpha(A, H_1)$ *ve* $h_2 = d_\alpha(B, H_2)$ *eşitlikleri kullanılarak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{l}{2\lambda(\alpha)}\left[2\mathbf{p} - \mathbf{c} + (\lambda(\alpha) - 1)\mathbf{b} - (\lambda^2(\alpha)l_1 + l_2)\right]$$

olarak bulunur.

IV. Durum: *α-uzaklık tanımı gereği Şekil 6.5.'ten*



Şekil 6.5 AC Dikeysel(Yataysal) Olmayan, BC Yataysal(Dikeysel) Olmayan ve Temel Doğrusu CD Yatay(Dikey) Olan ABC Üçgeni

$\mathbf{a} = h_2 + \lambda(\alpha)l_2$ *ve* $\mathbf{b} = l_1 + \lambda(\alpha)h_1$ *dir.* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ADC}) + A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{l}{2}(h_1 + h_2)$ *olduğundan* $h_1 = d_\alpha(A, H_1)$ *ve* $h_2 = d_\alpha(B, H_2)$ *eşitlikleri kullanılarak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{l}{2\lambda(\alpha)}\left[2\mathbf{p} - \mathbf{c} + (\lambda(\alpha) - 1)\mathbf{a} - (l_1 + \lambda^2(\alpha)l_2)\right]$$

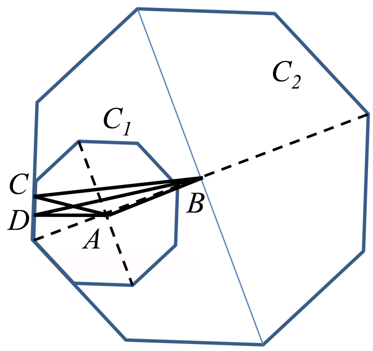
olarak bulunur.

Sonuç olarak α-uzaklığında $\alpha = 0$ ve $\alpha = \pi/4$ için sırasıyla Taksi ve CC-uzaklığı elde edilir. Dolayısıyla bu teoremde $\alpha = 0$ ve $\alpha = \pi/4$ değerleri yerine konulursa sırasıyla bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgenin Taksi ve CC-uzaklığına göre alan formülleri elde edilmiş olur.

7. $M-$ GEOMETRİ

Bu bölümde Taksi, Çin Dama, Maksimum ve α-uzaklıklarını özel hal olarak bulunduran ve Çolakoğlu ve Kaya (2009)'da tanımlanmış olan m-uzaklık fonksiyonu ile döşenmiş analitik düzlemde yani m-düzleminde bir üçgenin alanını m-uzaklıkları cinsinden veren üç farklı alan formülü Gelişgen ve Ermiş (2014)'teki gibi verilecektir. Bu bölümde sunulan formüllerden ikisi Öklidyen düzlemde bir üçgenin standart alan formülünün m-benzerleri olup ilk kısımda verilecektir. Bölümün ikinci kısmında ise Öklid düzlem geometride iyi bilinen Heron formülünün m-karşılığı verilecektir.

Bu bölümde de ele alınacak alan kavramı alışılmış Öklidyen alan kavramıdır. m-düzleminde karşılıklı kenarlarının m-uzunlukları aynı olan ancak alanları farklı olan üçgenler bulunabilir. Aşağıdaki Şekil 7.1. bu duruma örnek olarak verilmiştir.



Şekil 7.1 $m-$ Uzunlukları Aynı, Alanları Farklı Üçgenler

Şekilde AB, m-eğimli orijinden geçen doğruya paralel bir doğru olsun. C_1, A merkezli ve b yarıçaplı bir m-çemberi ve C_2, B merkezli ve $b+c$ yarıçaplı bir m-çemberi olsun. Ayrıca C ve D de $C_1 \cap C_2$ de AB doğrusuna göre simetrik olmayan iki nokta olmak üzere açıkça $d_m(A,C) = d_m(A,D)$ ve $d_m(B,C) = d_m(B,D)$ olmasına rağmen $A(\overset{\triangle}{ABC}) \neq A(\overset{\triangle}{ABD})$ dir. Bu durumda "m-düzleminde bir üçgenin alanı nasıl hesaplanır?" sorusu ortaya çıkmaktadır. Bu bölümde m-düzleminde farklı parametreler kullanarak bir üçgenin alanını hesaplamak için üç formül verilecektir. m-uzaklığı, Taksi, Çin Dama, Maksimum ve α-uzaklığı kapsadığından elde edilen sonuçların Taksi, Çin Dama, Maksimum ve α-düzlemi için elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılması ifade edilecektir.

7.1 m-Düzleminde Bir Üçgenin Alanı

$\overset{\triangle}{ABC}$ Öklidyen düzlemde bir üçgen ve H, üçgenin A köşesinden BC doğrusuna inilen dikme ayağı olsun. $a = d_E(B, C)$, $h = d_E(A, H)$ veya $h = d_E(A, BC)$ olmak üzere $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgenin standart alan formülü

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$$

şeklindedir. Bu kısımda m-uzaklıkları cinsinden üçgenin standart alan formülünün iki m-karşılığı verilecektir. Verilen formüllerde **a** $=d_m(B, C)$, **h** $= d_m(A, H)$ veya **h** $= d_m(A, BC)$ olmak üzere bir parametre kullanılmıştır. Bu parametre taban doğru parçasının üzerinde bulunduğu doğrunun eğimidir. Ayrıca uzaklık fonksiyonunda yer alan u, v ve m ifadelerinin sabit olduğuna dikkat ediniz.

Analitik düzlemde iki nokta arasındaki Öklidyen ve m-uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısı Yardımcı Teorem 2.7'de verilmişti. Bu bağıntı alan formülünün ilk m-karşılığında önemli bir rol oynamaktadır. Aşağıdaki teorem bir üçgenin iyi bilinen Öklidyen alan formülünün m-benzerini vermektedir.

Teorem 7.1 *ABC, m-düzleminde herhangi bir üçgen ve A köşesinden BC kenarına inen dik izdüşüm noktası H, BC doğru parçasının eğimi n ve* **a** $=d_m(B, C)$, **h** $=d_m(A, H)$ *olsun. Bu durumda*

(i) *BC kenarı $y = mx$ yada $y = -\frac{1}{m}x$ doğrularından birine paralel ise,*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{u^2}\frac{\mathbf{ah}}{2}$$

(ii) *BC kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel ise,*

$\rho(n) = \sqrt{1+n^2}/(u \max\{1, |n|\} + v \min\{1, |n|\})$ *olmak üzere,*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = [\rho(n)]^2 \frac{\mathbf{ah}}{2}$$

(iii) *BC kenarı koordinat eksenlerinden birine veya $y = mx$ ya da $y = -\frac{1}{m}x$ doğrularından birine paralel değil ise,*

$\rho(n) = \frac{\sqrt{(1+n^2)(1+m^2)}}{(u \max\{|m-n|, |1+mn|\} + v \min\{|m-n|, |1+mn|\})}$ *olmak üzere;*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = [\rho(n)]^2 \frac{\mathbf{ah}}{2}$$

dir.

İspat *$a=d_E(B, C)$ ve $h = d_E(A, H)$ olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ dir.*

(i) *Eğer BC kenarı $y = mx$ yada $y = -\frac{1}{m}x$ doğrularından birine paralel ise $a = \frac{1}{u}$***a*** *ve $h = \frac{1}{u}$***h*** *olur. Bu sebepten $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{u^2}\frac{\mathbf{ah}}{2}$ olarak bulunur.*

(ii) *Eğer BC kenarı koordinat eksenlerinden birine paralel ise, BC kenarını eğimi n olup, AH doğrusunun eğimi $-\frac{1}{n}$ olur. Önerme 2.30 gereği $\rho(n) = \rho(-1/n)$ olup $a = \mathbf{a}\rho(n)$ ve $h = \mathbf{h}\rho(n)$ dir. Bu sebepten $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) = [\rho(n)]^2 \frac{\mathbf{ah}}{2}$ olur.*

(iii) *Eğer BC kenarı koordinat eksenlerinden birine veya $y = mx$ yada $y = -\frac{1}{m}x$ doğrularından birine paralel değil ise, BC kenarını eğimi n olup, AH doğrusunun eğimi $-\frac{1}{n}$ olur. Önerme 2.30 gereği $\rho(n) = \rho(-1/n)$ olup $a = \mathbf{a}\rho(n)$ ve $h = \mathbf{h}\rho(n)$ dir. Bu sebepten $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) = [\rho(n)]^2 \frac{\mathbf{ah}}{2}$ olarak bulunur.*

Önerme 2.31'de m-düzleminde bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının bir $l : ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığının

$$d_m(P,l) = \begin{cases} \dfrac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{\max\left\{\frac{|a+bm|}{u}, \frac{|am-b|}{u}\right\}} & , \quad u = v \\[2ex] \dfrac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{\max\left\{\frac{|a(1-m)+b(1+m)|}{u}, \frac{|a(1+m)-b(1-m)|}{u}\right\}} & , \quad v = 0 \\[2ex] \dfrac{|ax_0+by_0+c|\sqrt{1+m^2}}{\max\left\{\frac{|a+bm|}{u}, \frac{|am-b|}{u}, \frac{|a(1-m)+b(1+m)|}{u+v}, \frac{|a(1+m)-b(1-m)|}{u+v}\right\}} & , \quad 0 < v/u < 1 \end{cases}$$

olduğu verilmişti. Ayrıca analitik düzlemde bir noktanın bir doğruya olan uzaklığının m-uzaklık ve Öklidyen uzaklık arasındaki geçiş bağıntısı Yardımcı Teorem 2.7'te verilmişti. Bu bağıntı aşağıda ifade edilen alan formülünün ikinci m-benzerinde de önemlidir.

Teorem 7.2 *ABC, m-düzleminde herhangi bir üçgen ve BC doğru parçasının eğimi n ve* **a** *$=d_\alpha(B,C)$,* **h** *$=d_\alpha(A,BC)$ olsun. Bu durumda $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \sigma(n)\frac{\mathbf{ah}}{2}$ olur.*

(i) *BC kenarı $y = mx$ yada $y = -\frac{1}{m}x$ doğrularından birine paralel ise,*

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1/u^2 & , \quad u = v \text{ yada } v = 0 \text{ iken,} \\[2ex] 1/u(u+v) & , \quad 0 < v/u < 1 \end{cases}$$

(ii) *BC kenarı $y = mx$ yada $y = -\frac{1}{m}x$ doğrularından birine paralel değil ise,*

$$\sigma(n) = \begin{cases} \dfrac{\max\left\{\frac{|1+nm|}{u}, \frac{|m-n|}{u}\right\}}{u\max\{|m-n|,|1+mn|\}+v\min\{|m-n|,|1+mn|\}} & , \quad u = v \\[2ex] \dfrac{\max\left\{\frac{|n(1-m)-(1+m)|}{u}, \frac{|n(1+m)+(1-m)|}{u}\right\}}{u\max\{|m-n|,|1+mn|\}} & , \quad v = 0 \\[2ex] \dfrac{\max\left\{\frac{|1+nm|}{u}, \frac{|m-n|}{u}, \frac{|n(1-m)-(1+m)|}{u+v}, \frac{|n(1+m)+(1-m)|}{u+v}\right\}}{u\max\{|m-n|,|1+mn|\}+v\min\{|m-n|,|1+mn|\}} & , \quad 0 < v/u < 1 \end{cases}$$

dir.

İspat *a=$d_E(B,C)$ ve $h = d_E(A,H)$ olmak üzere $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ dir.*

(i) *Eğer BC kenarı $y = mx$ yada $y = -\frac{1}{m}x$ doğrularından birine paralel ise, bu durumda $a = \frac{1}{u}\mathbf{a}$ ve $h = \sigma(n)\mathbf{h}$ olur. Bu sebepten $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \sigma(n)\frac{\mathbf{ah}}{2}$ olarak bulunur.*

(ii) *Eğer BC kenarı $y = mx$ yada $y = -\frac{1}{m}x$ doğrularından birine paralel değil ise, bu durumda $a = \rho(n)\mathbf{a}$ ve $h = \tau(n)\mathbf{h}$ olur. Bu sebepten $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{ah}{2}$ olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \sigma(n)\frac{\mathbf{ah}}{2}$ olarak bulunur.*

7.2 Heron Formülünün m-Benzeri

Bu kısımda Öklidyen düzlem için çok iyi bilinen Heron formülünün m-düzlemindeki karşılığı verilmektedir. Öklid düzleminde iyi bilinen

$$\text{Üçgenin Alanı} = (\text{Taban} \times \text{Yükseklik})/2$$

formülü m-düzleminde genel olarak geçerli değildir. Bu formülün geçerli olması için gerek ve yeter koşul üçgenin tabanın koordinat eksenlerinden birine paralel veya eğimi $n \in \left\{ m, -\frac{1}{m}, \frac{m-1}{1+m}, \frac{m+1}{1-m}, \frac{(1-\sqrt{2})m-1}{(1-\sqrt{2})+m}, \frac{(1+\sqrt{2})m-1}{(1+\sqrt{2})+m}, \frac{(1-\sqrt{2})m+1}{(1-\sqrt{2})-m}, \frac{(1+\sqrt{2})m+1}{(1+\sqrt{2})-m} \right\}$ olan bir doğru üzerinde olmasıdır. Çünkü bu durumda Öklid ve m-uzaklıkları aynıdır. Ayrıca bir üçgenin alanı üçgenin üç kenarının uzunlukları kullanılarak da hesaplanabilir. a, b, c herhangi bir üçgenin kenar uzunlukları olsun. $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ yarı çevre olmak üzere üçgenin alanı A;

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

şeklinde de bulunabilir. Bu formül Heron formülü olarak bilinir. m-düzleminde bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin kenar uzunlukları

$$\mathbf{a} = d_m(B,C) \quad , \quad \mathbf{b} = d_m(A,C) \quad , \quad \mathbf{c} = d_m(A,B)$$

ve m-yarıçevresi

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$$

olsun. Ayrıca temel kavramlar kısmında belirtilen doğru sınıflandırılmasını ve temel köşe, temel doğru gibi kavramlar kullanılmaktadır. Aşağıdaki önermeler Heron formülünün bazı özel durumlardaki m-karşılıklarını vermektedir.

Önerme 7.1 *ABC, m-düzleminde herhangi bir üçgen ve C temel köşesinden geçen temel doğruya diğer A ve B köşelerden inilen dikme ayakları, sırasıyla, H_1 ve H_2 olsun. Temel* *doğrunun, temel köşeye karşı olan kenarı kestiği nokta* D, $\mathbf{a} = d_m(B,C)$, $\mathbf{b} = d_m(A,C)$, $\mathbf{c} = d_m(A,B)$ *ve* $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$, $l = d_m(C,D)$, $l_1 = d_m(C,H_1)$ *ve* $l_2 = d_m(C,H_2)$ *olmak üzere* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin alanı;*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \begin{cases} \frac{l}{2u}\left[\sqrt{1+m^2}(2\mathbf{p}-\mathbf{c}) - v\,(l_1+l_2)\right] & ,C1 \text{ koşuluyla} \\ \frac{l}{2v}\left[\sqrt{1+m^2}(2\mathbf{p}-\mathbf{c}) - u\,(l_1+l_2)\right] & ,C2 \text{ koşuluyla} \\ \frac{l}{2uv}\left[\sqrt{1+m^2}(2\mathbf{p}-\mathbf{c}+(v-1)\mathbf{b}+(u-1)\mathbf{a}) - (v^2l_1+u^2l_2)\right] & ,C3 \text{ koşuluyla} \\ \frac{l}{2uv}\left[\sqrt{1+m^2}(2\mathbf{p}-\mathbf{c}+(u-1)\mathbf{b}+(v-1)\mathbf{a}) - (u^2l_1+v^2l_2)\right] & ,C4 \text{ koşuluyla} \end{cases}$$

dır. Burada C_i, $i = 1,2,3,4$ *koşulları aşağıdaki gibidir:*

$C1$: *AC ve BC doğruları yataysal değildir ve temel doğru* CD *yatay bir doğrudur ya da AC ve BC doğruları dikeysel değildir ve temel doğru* CD *dikey bir doğrudur.*

$C2$: *AC ve BC doğruları dikeysel değildir ve temel doğru* CD *yatay bir doğrudur ya da AC ve BC doğruları yataysal değildir ve temel doğru* CD *dikey bir doğrudur.*

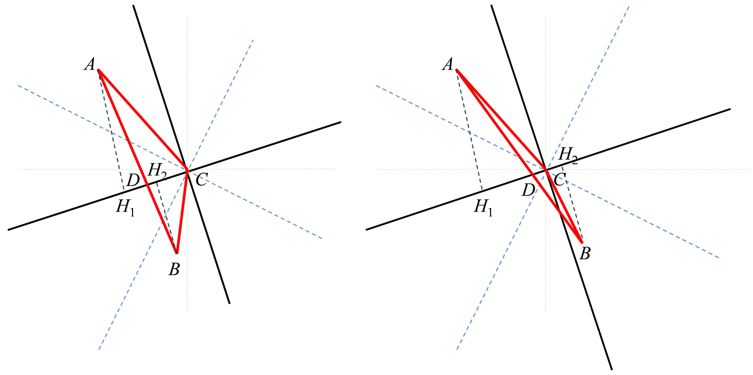
$C3$: *AC doğrusu yataysal değildir, BC doğrusu dikeysel değildir ve temel doğru* CD *yatay bir doğrudur ya da AC doğrusu dikeysel değildir, BC doğrusu yataysal değildir ve temel doğru* CD *dikey bir doğrudur.*

$C4$: *AC doğrusu dikeysel değildir, BC doğrusu yataysal değildir ve temel doğru* CD *yatay bir doğrudur ya da AC doğrusu yataysal değildir, BC doğrusu dikeysel değildir ve temel doğru* CD *dikey bir doğrudur.*

İspat *Düzlemdeki herhangi bir üçgen için temel doğrunun geçtiği en az bir temel köşe vardır. O halde* C, $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin temel köşesi, temel doğrunun* AB *kenarını kestiği nokta* D *olsun. Ayrıca* A *ve* B *köşelerinden temel doğruya inilen dikme ayakları, sırasıyla,* H_1 *ve* H_2 *olmak üzere* $l = d_m(C,D)$, $l_1 = d_m(C,H_1)$ *ve* $l_2 = d_m(C,H_2)$, $h_1 = d_m(A,H_1)$ $h_2 = d_m(B,H_2)$, $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgeninin yarı çevre uzunluğu* $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$ *ve* $\mathbf{a} = d_m(B,C)$, $\mathbf{b} = d_m(A,C)$, $\mathbf{c} = d_m(A,B)$ *olsun. İki nokta arasındaki* m*-uzaklığının düzlemdeki tüm ötelemeler,* $b/a \neq \sqrt{2}-1$ *olduğunda bir nokta etrafindaki* $\pi/2$, π *ve* $3\pi/2$ *radyanlık dönmeler ve* $b/a = \sqrt{2}-1$ *olduğunda bir nokta etrafindaki* $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π, $5\pi/4$, $3\pi/2$, $7\pi/4$ *radyanlık dönmeler,* $n \in \left\{m, -\frac{1}{m}, \frac{m-1}{1+m}, \frac{m+1}{1-m}, \frac{(1-\sqrt{2})m-1}{(1-\sqrt{2})+m}, \frac{(1+\sqrt{2})m-1}{(1+\sqrt{2})+m}, \frac{(1-\sqrt{2})m+1}{(1-\sqrt{2})-m}, \frac{(1+\sqrt{2})m+1}{(1+\sqrt{2})-m}\right\}$ *olmak üzere*

$y = nx + c$ doğrularına paralel doğrular etrafındaki yansımalarda değişmez kalır. Bu sebepten Şekil 7.2., $C1$ durumunu sağlayan tüm üçgenleri, Şekil 7.3., $C2$ durumunu sağlayan tüm üçgenleri, Şekil 7.4., $C3$ durumunu sağlayan tüm üçgenleri, Şekil 7.5., $C4$ durumunu sağlayan tüm üçgenleri temsil eder.

I. Durum: *m-uzaklık tanımı gereği*



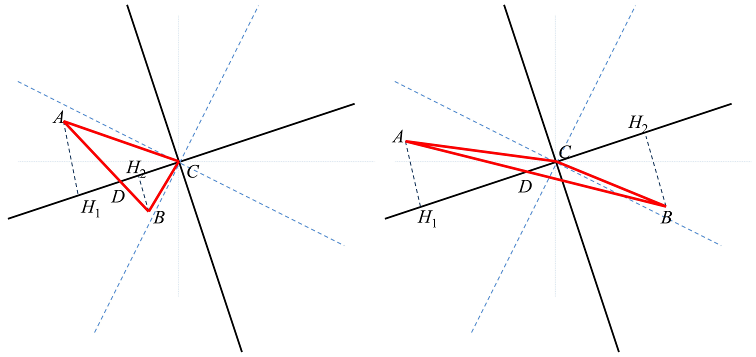
Şekil 7.2 AC ve BC Doğruları Yataysal(Dikeysel) Olmayan ve Temel Doğrusu CD Yatay(Dikey) Olan ABC Üçgeni

Şekil 7.2.'den $\mathbf{a} = (uh_2 + vl_2)/\sqrt{1+m^2}$ *ve* $\mathbf{b} = (uh_1 + vl_1)/\sqrt{1+m^2}$ *dır.* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ADC}) + A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{l}{2}(h_1 + h_2)$ *olduğundan* $h_1 = d_m(A, H_1)$ *ve* $h_2 = d_m(B, H_2)$ *eşitlikleri kullanılarak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{l}{2u}\left[\sqrt{1+m^2}(2\mathbf{p} - \mathbf{c}) - v(l_1 + l_2)\right]$$

olarak bulunur.

II. Durum: *m-uzaklık tanımı gereği*



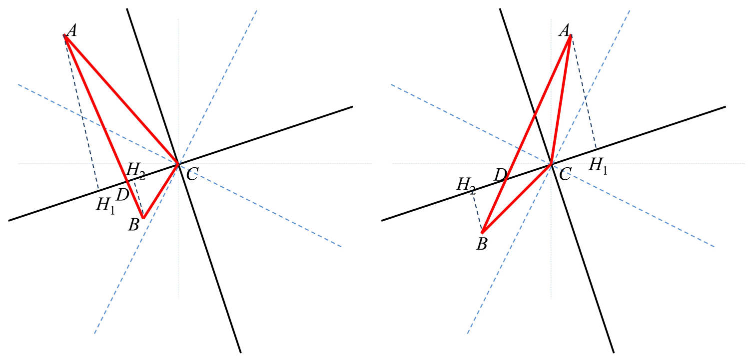
Şekil 7.3 AC ve BC Doğruları Dikeysel(Yataysal) Olmayan ve Temel Doğrusu CD Yatay(Dikey) Olan ABC Üçgeni

Şekil 7.3.'ten $\mathbf{a} = (ul_2{+}vh_2)/\sqrt{1+m^2}$ *ve* $\mathbf{b} = (ul_1{+}vh_1)/\sqrt{1+m^2}$ *dır.* $A(A\overset{\triangle}{B}C) = A(A\overset{\triangle}{D}C) + A(B\overset{\triangle}{D}C) = \frac{l}{2}(h_1 + h_2)$ *olduğundan* $h_1 = d_m(A, H_1)$ *ve* $h_2 = d_m(B, H_2)$ *eşitlikleri kullanılarak*

$$A(A\overset{\triangle}{B}C) = \frac{l}{2v}\left[\sqrt{1+m^2}(2\mathbf{p} - \mathbf{c}) - u\,(l_1 + l_2)\right]$$

olarak bulunur.

III. Durum: *m-uzaklık tanımı gereği*



Şekil 7.4 AC Yataysal(Dikeysel) Olmayan, BC Dikeysel(Yataysal) Olmayan ve Temel Doğrusu CD Yatay(Dikey) Olan ABC Üçgeni

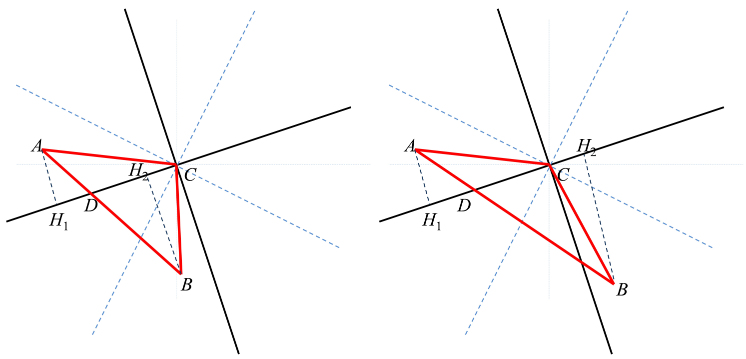
Şekil 7.4.'ten $\mathbf{a} = (ul_2{+}vh_2)/\sqrt{1+m^2}$ *ve* $\mathbf{b} = (uh_1{+}vl_1)/\sqrt{1+m^2}$ *dır.* $A(A\overset{\triangle}{B}C) = A(A\overset{\triangle}{D}C) + A(B\overset{\triangle}{D}C) = \frac{l}{2}(h_1 + h_2)$ *olduğundan* $h_1 = d_m(A, H_1)$ *ve* $h_2 = d_m(B, H_2)$

eşitlikleri kullanılarak

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{l}{2uv}\left[\sqrt{1+m^2}(2\mathbf{p} - \mathbf{c} + (v-1)\mathbf{b} + (u-1)\mathbf{a}) - (v^2 l_1 + u^2 l_2)\right]$$

olarak bulunur.

IV. Durum: *m-uzaklık tanımı gereği*



Şekil 7.5 AC Dikeysel(Yataysal) Olmayan, BC Yataysal(Dikeysel) Olmayan ve Temel Doğrusu CD Yatay(Dikey) Olan ABC Üçgeni

Şekil 7.5.'ten $\mathbf{a} = (uh_2+vl_2)/\sqrt{1+m^2}$ *ve* $\mathbf{b} = (ul_1+vh_1)/\sqrt{1+m^2}$ *dır.* $A(\overset{\triangle}{ABC}) = A(\overset{\triangle}{ADC}) + A(\overset{\triangle}{BDC}) = \frac{l}{2}(h_1 + h_2)$ *olduğundan* $h_1 = d_m(A, H_1)$ *ve* $h_2 = d_m(B, H_2)$ *eşitlikleri kullanılarak*

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{l}{2uv}\left[\sqrt{1+m^2}(2\mathbf{p} - \mathbf{c} + (u-1)\mathbf{b} + (v-1)\mathbf{a}) - (u^2 l_1 + v^2 l_2)\right]$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak $m = 0$*,* $u = v$ *ve* $v/u = \sqrt{2}-1, 0 < v/u < 1$ *için sırasıyla Taksi, CC ve* α*-uzaklığı elde edilir. Dolayısıyla bu teoremde* $m = 0$*,* $u = v$ *ve* $v/u = \sqrt{2}-1, 0 < v/u < 1$ *değerleri yerine konulursa sırasıyla bir* $\overset{\triangle}{ABC}$ *üçgenin Taksi, CC ve* α*-uzaklığına göre alan formülleri elde edilmiş olur.*

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

İnsanlık tarihi boyunca önemli problemlerden biri olan alanın nasıl hesaplanacağına dair pek çok çalışma yapılmış ve yöntemler geliştirilmiştir. Bir üçgenin alanının hesaplanabilmesi diğer tüm çokgenler üçgenlere parçalanabileceğinden önemlidir. Bu tezde ”Taksi, Maksimum, Çin Dama, α ve m-düzlemlerinde bir üçgenin alanı nasıl hesaplanır?” sorusunun cevapları verilmeye çalışılmıştır. Alan kavramı ele alınırken standart Öklidyen alan kavramı kullanılmıştır.

Tez boyunca her bölümde kenar uzunlukları eş olan üçgenlerin alanlarının farklı olabileceğine dair örnekler verilmiştir. Öklidyen düzlemde bir üçgenin standart alan formülünün benzerleri, ele alınan her düzlem için verilmiştir. Ayrıca bahsi geçen her düzlem için Öklidyen düzlemde iyi bilinen Heron formülünün benzerleri verilmiştir. Her bölümde verilen formüller Öklidyen alanın ilgili düzlemdeki uzaklık fonksiyonu cinsinden verilirken bazı ilave parametreler de kullanılmıştır. Genel olarak kullanılan parametre taban doğru parçasını üzerinde bulunduran doğrunun eğimidir.

İleride yapılabilecek çalışmalarda Öklidyen düzlemde bir üçgenin alanını hesaplamak için kullanılan bu tezde bahsedilmemiş alan formüllerinin benzerleri incelenebilir. Örneğin; ”ilgili düzlemler için geliştirilmiş trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak alan için kullanılan sinüs teoreminin benzerleri ne olacaktır?” sorusunun yanıtı araştırılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça, Z., Kaya, R., 1997, On the Taxicab Trigonometry, Journal of Institute of Mathematics & Computer Sciences, 10, 3, 151-159.

Akça, Z., Kaya, R., 2004a, On the distance formula in three dimensional Taxicab Space, Hadronic Journal, 27, 5, 521-532.

Akça, Z., Kaya, R., 2004b, On the norm in higher dimensional Taxicab Spaces, Hadronic Journal Supplement, 19, 491-501.

Bayar, A., Ekmekçi, S., 2006, On the Chinese Checker Sine and Cosine Functions, Internationnal Journal of Mathematics and Analysis, 1, 3, 249-259.

Chen, G., 1992, Lines and Circles in Taxicab Geometry, M.S. thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Centered Missouri State University, 43p.

Coxeter, H. S. M., 1961, Introduction to Geometry, John Wiley&Sons Institute, p.443.

Çolakoğlu, H. B., 2009, Taksi, Maksimum, Çin dama ve Alfa düzlemlerinin bazı özellikleri ve genelleştirilmesi, Doktora tezi, ESOGÜ Fen Edebiyat Fakültesi, 150 s.

Çolakoğlu, H. B., Kaya, R., 2012, A generalization of some well-known distances and related isometries, Mathematical Communications, 16, 1, 21-35.

Çolakoğlu, H. B., Gelişgen, Ö., Kaya, R., 2012, Area formulas for a triangle in the Alpha Plane, Mathematical Communications, 18, 123-132.

Ermiş, T., Gelişgen, Ö., 2015, On The Area Of A Triangle In Maximum Plane, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 15, 7-14.

Gelişgen, Ö., 2007, Minkowski geometrileri üzerine: Taksi, çin dama ve alfa geometrileri hakkında genel bir analiz, Doktora tezi, ESOGÜ Fen Edebiyat Fakültesi, 163 s.

Gelişgen, Ö., Kaya, R. Özcan, M., 2006, Distance formula in the Chinese Checker Space, International Journal of Pure and Applied Mathematical, 26, 1, 35-44.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Gelişgen, Ö., Kaya, R., 2009, CC-Version of The Heron's Formula, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 21, 2, 94-110.

Gelişgen, Ö., Ermiş, T., 2014, Area formulas for a triangle in the m- plane, Konuralp Journal of Mathematics, 2, 2, 85-95.

Ho, Y.P., Liu, Y., 1996, Parabolas in Taxicab Geometry, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 2, 63-72.

Kaya, R., Akça, Z., Günaltılı, İ., Özcan, M., 2000, General equation for Taxicab Conics and their classification, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, 19, 135-148.

Kaya, R., 2002, Analitik Geometri, Bilim ve Teknik Yayınevi, s.439

Kaya, R., 2006, Area formula For Taxicab Triangles, Pi Mu Epsilon, 12, 4, 219-220.

Kaya, R., Çolakoglu, H. B., 2006, Taxicab versions of some Euclidean theorems, International Journal of Pure and Applied Mathematical, 26, 1, 69-81.

Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S., Bayar, A., 2006, Group of isometries of CC-Plane, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 18, 3, 221-233.

Krause, E.F., 1975, Taxicab Geometry, Addison - Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, p.88.

Laatsch, R., 1982, Pyramidal Sections in Taxicab Geometry, Mitt. Mathematics Magazine, 55, 205-212.

Martin, G. E., 1998, The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane, Springer, p.509.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Menger, K., 1952, You Will Like Geometry, Guildbook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science and Industry, Chicago, IL.

Milmann, R. S., Parker, G. D., 1991, Geometry a Metric Approach with Models, Springer, p.370.

Minkowski, H., 1967, Gesammelte Abhandlungen, Chelsa Publishing Co. New York, 836p.

Özcan, M., Ekmekçi, S., Bayar, A., 2002, The Taxicab lengths under rotations, The Pi Mu Epsilon Journal, 11, 7, 381-384.

Özcan, M., Kaya, R., 2002, On the ratio of directed lengths in the Taxicab Plane and related properties, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 14, 2, 107-117.

Özcan, M., Kaya, R., 2003, Area of a triangle in terms of the Taxicab Distance, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 15, 3, 178-185.

Reynolds, B. E., 1980, Taxicab Geometry, Pi Mu Epsilon Journal, 7, 77-88.

Salihova, S. 2006, Maksimum metriğinin geometrisi üzerine, Doktora tezi, ESOGÜ Fen Edebiyat Fakültesi, 158 s.

Schattschneider, D. J., 1984, The Taxicab Group, The American Mathematical Monthly 91, 423-428.

So, S. S., Al-Maskari, Z. S., 1995, Two simple examples in Non-Euclidean Geometry, Kansas Science Teacher (Journal of Mathematics and Science Teaching), 11, 14-18.

So, S. S., 2002, Recent developments in Taxicab Geometry, Cubo Matematica Educational, 4, 2, 79-96.

Thompson, A. C., 1996, Minkowski Geometry, Cambridge University Press, p.346.

Thompson, K., Dray, T., 2000, Taxicab angles and trigonometry, Pi Mu Epsilon, 11, 87-96.

Tian, S., So, S. S., Chen, G., 1997, Concerning circles in Taxicab Geometry, International Journal of Mathematics Education Science Technology, 28, 727-733.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Tian, S., 2005, Alpha Distance-A Generalization of Chinese Checker Distance and Taxicab Distance, Missouri Journal of Mathematical 17, 1, 35-40.

Turan, M., 2004, Çin Dama Düzleminde Konikler Üzerine, Doktora tezi, ESOGÜ Fen Edebiyat Fakültesi, 149 s.

Turan, M., Özcan, M., 2005, Two-foci CC-Ellipses, International Pure And Applied Mathematics, 16, 1, 119-127.

Turan, M., Özcan, M., 2005, Two-foci CC-Hyperbalos, International Pure And Applied Mathematics, 16, 4, 509-520.

Uymaz, A.Ç., 2002, Çin Dama Çemberi ve Özellikleri, Yüksek Lisans tezi, ESOGÜ Fen Edebiyat Fakültesi, 227 s.