Ultrafilterlar ve Bir Ayrık Uzayın Stone-Čech Kompaktifikasyonu

Gizem Kahrıman

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Mayıs 2016

Ultrafilters and The Stone-Čech Compactification of a Discrete Space

Gizem Kahrıman

MASTER

Mathematics-Computer Department

May 2016

Ultrafilterlar ve Bir Ayrık Uzayın Stone-Čech Kompaktifikasyonu

Gizem Kahrıman

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof.Dr. Mahmut KOÇAK

-

Mayıs 2016

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Gizem Kahrıman'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Ultrafilterlar ve Bir Ayrık Uzayın Stone-Čech Kompaktifikasyonu**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof.Dr. Mahmut KOÇAK

İkinci Danışman : -

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof.Dr. Mahmut KOÇAK

Üye : Doç.Dr. İlker AKÇA

Üye : Doç.Dr. Enver Önder USLU

Üye : Yrd.Doç.Dr. Ali AYTEKİN

Üye : Yrd.Doç.Dr. Osman AVCIOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof.Dr. Mahmut KOÇAK danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Ultrafilterlar ve Bir Ayrık Uzayın Stone-Čech Kompaktifikasyonu**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 20/05/2016

Gizem Kahrıman

ÖZET

Tezin giriş bölümünde, ilerleyen bölümlerde kullanılmak üzere yarıgrup yapıları ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Sonraki bölümde filterlar, ultrafilterlar, βD topolojik uzayı ve bir ayrık uzayın Stone-Cech kompaktifikasyonuna değinilmiştir. Bu bölümü takiben βS de çarpma işlemi, βS de değişme özelliğinin olmaması, βS dinamik sistemi ve ayrıca sadeleştirme kavramı ve bu kavramın $\beta\mathbb{N}$ ve $\beta\mathbb{Z}$ deki durumu incelenmiştir. Son bölümde ise $\beta\mathbb{N}$ üzerinde yarıgrup yapıları ve bazı yarıgrup özellikleri verilmiştir. Sonuç bölümünde tezin genel yapısı yorumlanarak tez sonlandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yarıgruplar, Topolojik Yarıgruplar, Filterlar, Ultrafilterlar, Kompaktifikasyon, Stone-Cech Kompaktifikasyonu, βD Topolojik Uzayı, Cancellation (Sadeleştirme), βS Yarıgrubu, $\beta\mathbb{N}$ Üzerinde Yarıgrup Yapıları.

SUMMARY

In the introduction of this thesis, basic definitions and theorems of semigroups are given to use in the following chapters. In the next chapter, filters, ultrafilters, the topological space βD, the Stone-Cech compactification of a discrete space are given. Following this chapter, under the title of βS as a semigroup, the multiplication on βS, non-commutativity in βS and βS as a dynamic system, notion of cancellation are given. In the chapter, a proof that $\mathbb{N}^*$ does not contain an algebraic and topological copy of $\beta\mathbb{N}$ and semigroup structures on $\beta\mathbb{N}$ are examined.

Keywords: Semigroups, Topological Semigroups, Filters, Ultrafilters, Compactification, Stone-Cech Compactification, The Topological Space βD, Cancellation, βS as a Semigroup, Semigroup Structures on $\beta\mathbb{N}$.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın her aşamasında bilgi ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam, sayın Prof. Dr. Mahmut KOÇAK'a, yüksek lisansımın ders ve tez aşamasındaki desteğinden dolayı değerli hocam, sayın Doç. Dr. İlker AKÇA'ya, tezimin yazım ve düzenleme aşamasındaki yardımlarından dolayı değerli hocam, sayın Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ'a, her zaman yanımda olan değerli hocalarım Arş. Gör. Elif ILGAZ'a ve Arş. Gör. Elis SOYLU'ya, beni bu günlere getiren ve eğitim hayatım boyunca manevi ve maddi desteklerini esirgemeyen değerli ANNEM'e ve BABAM'a ayrı ayrı sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Tezin ilk bölümünde yarıgrup kavramı verilerek yarıgrupların kompaktifikasyonu incelenmiştir. Yarıgrup en basit cebirsel yapıdır. Yarıgrup şartları zayıflatılabilir veya güçlendirilebilir. Örneğin birleşme şartı kaldırılırsa grupoid elde edilir. Ayrıca yarıgrup şartına birim eleman veya ters eleman özellikleri eklenirse grup tanımı elde edilir. Bu özelliklere değişme özelliği eklenirse değişmeli grup tanımı elde edilir.

Tezin ikinci bölümünde filter, ultrafilter tanımları verilerek bir D kümesi üzerinde tanımlı bütün ultrafilterların kümesi olan βD oluşturulmuş, sonrasında kompaktlaştırma kavramından bahsedilerek Stone-Cech kompaktifikasyonu hakkında bilgi verilmiştir. Filter kavramının ilk izleri Root'un makalesinde (Root, 1914) olmakla birlikte asıl filter tanımı Cartan (Cartan, 1937b; Cartan, 1937a) tarafından yapılmıştır. Bourbaki (Bourbaki, 1940) filterları çalışmalarında kullanmış ve aynı yıl Tukey ağlarla filterların değişik şekillerini çalışmıştır. 1955'te Bartle ağlarla filterlar arasındaki eşdeğerlikten bahsetmiştir. Kowalsky (Kowalsky, 1961), topolojinin gelişmesi için filterlar üzerinde çalışmalar yapmıştır. Verilen bir D kümesi üzerinde bir çok filter olabilir. Bu filterların "$\subseteq$ " yarı sıralama bağıntısına göre maksimaline ultrafilter denir. Yani başka bir filter tarafından kapsanmayan filtera ultrafilter denir.

Kompaktlık kavramını ilk olarak Fréchet (Fréchet, 1906) kullanmıştır. Daha sonra sonlu arakesit özelliğine sahip olan kapalı kümeler ailesi ile kompaktlık kavramı 1908 de Riesz tarafından incelenmiştir. Alexandroff ve Urysohn (Alexandroff ve Urysohn, 1924) kompakt kümeyi tanımlamıştır. Sonrasında Tychonoff (Tychonoff, 1930) herhangi bir sayıda kompakt uzayın kartezyen çarpımının da kompakt uzay olduğunu göstermiştir. Bourbaki (Bourbaki, 1940) Heine-Borel özelliğine karşılık gelen bikompaktlık kavramını ele almıştır.

$\mathbb{R}$ deki kapalı ve sınırlı alt kümelerin sahip olduğu özelliklere benzer özelliğe genel topolojik uzayların sahip olup olmadığı sorusu, kompaktlık kavramına işaret etmektedir. $\mathbb{R}$ deki kapalı küme kavramına karşılık olarak genel topolojik uzaylarda kapalı alt küme kavramı vardır. Fakat $\mathbb{R}$ deki sınırlı küme kavramının genel topolojik uzaylarda bir karşılığı yoktur. Çünkü her topolojik uzayda bir metrik tanımlamak mümkün olmayabilir. Topolojik uzaylarda $\mathbb{R}$ deki sınırlılık kavramı ile benzer özellik gösteren kompaktlık kavramı mevcuttur. Ayrıca matematikte bazen çalışılan uzay yeterli olmayabilir ve verilen topolojik uzay bazı durumlarda kompakt olmayabilir. Bu durumda kompaktifikasyon yardımıyla, verilen uzay kompakt bir uzayın bir alt uzayına homeomorf kılınabilir. Buradan hareketle kompaktifikasyon kavramının ana fikrinin bir topolojik uzayın genişlemesi olduğu anlaşılır. Genel topolojide kompaktifikasyon sadece T_1 uzayının bir T_2 uzayı olması durumunda göz önünde bulundurulur. Bu tür kompaktifikasyonlara sahip uzaylar Tychonoff uzaylar olarak da bilinirler. Tychonoff uzaylar ele alındığında verilen bir uzayın tüm kompaktifikasyonları doğal olarak sıralanabilir ve her zaman bir en büyüğü vardır, buna Stone-Cech kompaktifikasyonu denir. Ayrıca kompakt genişleme kavramı topolojide bilinen Stone-Cech kompaktifikasyonu fikrinin bir genellemesidir.

Tezin sonraki bölümünde βS yarıgrup olarak incelenmiştir. Bunun için öncelikle βS de p ve q noktalarının $p \cdot q$ çarpımı tanımlanarak βS de çarpma işleminin özellikleri incelenmiştir. Daha sonra $p \cdot q$ daki kümelerin özeliklerinden bahsedilmiş ve βS de değişme özelliğinin olmadığı gösterilmiştir. Sonrasında S üzerindeki dinamik sistemlerin βS kompakt sağ topolojik yarıgrubuyla bağlantılı olduğu gösterilmiştir. Burada βS, S üzerindeki dinamik sistemlerdeki bazı kavramların açıklanması için gereklidir. Ayrıca βS, S üzerindeki bir dinamik sistem olarak görülebilir.

Tezin son bölümünde βS üzerindeki incelemeler özel olarak $\mathbb{N}$ kümesi için yapılmıştır. Burada $\beta\mathbb{N}$ den $\mathbb{N}^*$ ın bir alt uzayına tanımlanan bir homeomorfizm olmadığı ispatlanarak $\mathbb{N}^*$ ın $\beta\mathbb{N}$ nin bir cebirsel kopyasını içermediği gösterilmiştir. Sonrasında özel olarak incelenen $\beta\mathbb{N}$ üzerinde yarıgrup yapıları ele alınmıştır. $\mathbb{N}$ üzerindeki bir ikili işlem $\mathbb{N}$ nin $\beta\mathbb{N}$ Stone-Cech kompaktifikasyonu üzerinde bir ikili işleme genişletilerek özellikleri incelenmiştir. Ayrıca $(\beta\mathbb{N}, +)$ ve $(\beta\mathbb{N}, \times)$ nın bazı yarıgrup özellikleri ele alınmış ve son olarak $\mathbb{N}$ üzerinde genel ikili işlem özellikleri incelenerek tez sonlandırılmıştır.

2. YARIGRUPLARIN KOMPAKTİFİKASYONU

2.1 Yarıgruplar

Tanım 1. *S boş olmayan bir küme olmak üzere*

$$\begin{array}{rcl} S \times S & \longrightarrow & S \\ (s,t) & \longmapsto & s \cdot t \end{array}$$

S üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer bu ikili işlem birleşmeli ise yani her $r, s, t \in S$ için

$$r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$$

oluyorsa $(S, \cdot)$ sıralı ikilisine bir yarıgrup denir. Eğer her $s, t \in S$ için $s \cdot t = t \cdot s$ ise S ye değişmeli yarıgrup denir. Yarıgrup en basit cebirsel yapıdır. Yarıgrup şartları zayıflatılabilir veya güçlendirilebilir. Örneğin birleşme şartı kaldırılırsa grupoid elde edilir. Ayrıca yarıgrup şartına birim eleman veya ters eleman özellikleri eklenirse grup tanımı elde edilir. Bu özelliklere değişme özelliği eklenirse değişmeli grup tanımı elde edilir. Yarıgrup operasyonu genellikle çarpımsaldır. $s \cdot t$ ye genellikle s ile t nin çarpımı denir. Yarıgrup operasyonu olarak $+$ veya $*$ gibi semboller de kullanılır. Genellikle $(S, \cdot)$ yerine kısaca S ve $s \cdot t$ yerine st yazılımı kullanılır.

Eğer $s \in S$ ise $n \in \mathbb{N}$ için $s \cdot s \cdots s = s^n$ ile gösterilir.

Eğer S bir yarıgrup ise $s \in S$ için

$$\lambda_s : S \longrightarrow S,\ \lambda_s(t) = st$$

fonksiyonuna s ile sol öteleme fonksiyonu ve

$$\rho_s : S \longrightarrow S,\ \rho_s(t) = ts$$

fonksiyonuna ise s ile sağ öteleme fonksiyonu denir. Bütün sol öteleme fonksiyonlarının kümesi

$$L(S) = \{\lambda_s : s \in S\}$$

ve bütün sağ öteleme fonksiyonlarının kümesi

$$R(S) = \{\rho_s : s \in S\}$$

ile gösterilir.

$$Z(S) = \{s \in S : \textit{her } t \in S \textit{ için } st = ts\}$$

kümesine S nin (cebirsel) merkezi denir.

$A, B \subseteq S$ *ve* $s \in S$ *ise*

$$\begin{aligned} sA &= \lambda_s(A) \textit{ ve } As = \rho_s(A) \\ s^{-1}A &= \lambda_s^{-1}(A) \textit{ ve } As^{-1} = \rho_s^{-1}(A) \end{aligned}$$

ve

$$AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\} = \bigcup_{t \in A} tB = \bigcup_{t \in B} At$$

olarak tanımlanır.

Örnek 1. *Aşağıdakiler yarıgrup örnekleridir.*

$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^+, +)$, $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

Örnek 2. $s, t \in \mathbb{N}$ *için* $s \vee t = \max\{s, t\}$, $s \wedge \min\{s, t\}$ *olmak üzere* $(\mathbb{N}, \vee)$ *ve* $(\mathbb{N}, \wedge)$ *birer yarıgruptur.*

Örnek 3. *S boş olmayan bir küme olmak üzere her $s, t \in S$ için $s \cdot t = t$ ve $a \in S$ olmak üzere her $s, t \in S$ için $s * t = a$ olarak tanımlanırsa $(S, \cdot)$ ve $(S, *)$ birer yarıgrup olurlar.*

Örnek 4. *S bir küme olmak üzere $X^X = \{f | f : X \longrightarrow X$ bir fonksiyon$\}$ kümesi fonksiyon bileşke işlemine göre bir yarıgruptur.*

Örnek 5. *S bir küme ve $\mathcal{P}(S)$, S nin bir kuvvet kümesi ve $\mathcal{P}_f(S) = \{F \subseteq S : \emptyset \neq F$, sonlu$\}$ olmak üzere $(\mathcal{P}_f(S), \subseteq)$, $(\mathcal{P}(S), \cup)$, $(\mathcal{P}(S), \cap)$ ikilileri birer yarıgruptur.*

Örnek 6. *S bir yarıgrup olmak üzere $(L(S), \circ)$ ve $(R(S), \circ)$ ikilileri birer yarıgruptur.*

Tanım 2. *(i) $(S, *)$ ve $(T, \cdot)$ iki yarıgrup ve $f : S \longrightarrow T$ bir fonksiyon olsun. Her $s, t \in S$ için*

$$f(s * t) = f(s) \cdot f(t)$$

oluyorsa f fonksiyonuna bir homomorfizm denir. Eğer f birebir örten ise f ye bir izomorfizm denir. Bu durumda S ve T ye izomorfik denir ve $S \simeq T$ şeklinde yazılır.

(ii) $(S, *)$ ve $(T, \cdot)$ iki yarıgrup ve $f : S \longrightarrow T$ bir fonksiyon olsun. Her $s, t \in S$ için

$$f(s * t) = f(t) \cdot f(s)$$

oluyorsa f fonksiyonuna bir antihomomorfizm denir. Eğer f birebir örten ise f ye bir antiizomorfizm denir. Bu durumda S ve T ye antiizomorfik denir.

Eğer $f : S \longrightarrow T$ *ve* $g : T \longrightarrow G$ *iki homomorfizm ise*

$$g \circ f : S \longrightarrow G$$

bir homomorfizmdir. Benzer şekilde eğer $f : S \longrightarrow T$ *ve* $g : T \longrightarrow G$ *iki izomorfizm ise*

$$g \circ f : S \longrightarrow G$$

de bir izomorfizmdir.

Teorem 1. *(Hindman ve Strauss, 2010)* S *bir yarıgrup olsun.*

(i)

$$\begin{aligned} \lambda : S &\longrightarrow L(S) \\ s &\longmapsto \lambda(s) = \lambda_s \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı λ *fonksiyonu örten bir homomorfizmdir.*

(ii)

$$\begin{aligned} \rho : S &\longrightarrow R(S) \\ s &\longmapsto \rho(s) = \rho_s \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ρ *fonksiyonu örten bir antihomomorfizmdir.*

İspat. *(i)* $s, t \in S$ *olsun. Bu durumda her* $u \in S$ *için*

$$(\lambda_s \circ \lambda_t)(u) = \lambda_s(tu) = s(tu) = (st)u = \lambda_{st}(u)$$

olur. Bu durumda $\lambda_s \circ \lambda_t = \lambda_{st}$ *olur. Yani* $\lambda(st) = \lambda(s) \circ \lambda(t)$ *dir. Diğer bir değişle* λ *bir homomorfizmdir.*

(ii) $s, t \in S$ *olsun. Bu durumda her* $u \in S$ *için*

$$(\rho_s \circ \rho_t)(u) = \rho_s(ut) = (ut)s = u(ts) = \rho_{ts}(u)$$

olur. Bu durumda

$$\rho_s \circ \rho_t = \rho_{ts}$$

olur. Yani $\rho(ts) = \rho(s) \circ \rho(t)$ *dir. Diğer bir değişle* ρ *bir antihomomorfizmdir.*

Tanım 3. S *bir yarıgrup olsun.*

(i) $ts = us$ *özelliğindeki her* $t, u \in S$ *için* $t = u$ *oluyorsa* $s \in S$ *ye sağ sadeleşebilir eleman denir.*

(ii) $st = su$ özelliğindeki her $t, u \in S$ için $t = u$ oluyorsa $s \in S$ ye sol sadeleşebilir eleman denir.

(iii) Eğer her $s \in S$ elemanı sağ sadeleşebilir ise S ye sağ sadeleşebilir denir.

(iv) Eğer her $s \in S$ elemanı sol sadeleşebilir ise S ye sol sadeleşebilir denir.

(v) Eğer S hem sağ sadeleşebilir hem de sol sadeleşebilir ise S ye sadeleşebilir denir.

Tanım 4. *S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Bu durumda,*

(i) Her $s \in S$ için $es = s$ ise e ye sol birim denir.

(ii) Her $s \in S$ için $se = s$ ise e ye sağ birim denir.

(iii) Eğer e hem sağ hem de sol birim ise e ye birim eleman denir.

(iv) Her $s \in S$ için $es = e$ ise e ye sol sıfır denir.

(v) Her $s \in S$ için $se = e$ ise e ye sağ sıfır denir.

(vi) Eğer e hem sağ hem de sol sıfır ise e ye sıfır eleman denir.

Birim elemanlı bir yarıgruba monoid denir. Bir sıfıra sahip olan yarıgruba null yarıgrup denir.

S birim elemansız bir yarıgrup ise S ye bir e elemanı ekleyip $S^1 = S \cup \{e\}$ kümesi elde edilir. S üzerindeki işlem S^1 de her $s \in S^1$ kümesi için $es = se = s$ olarak tanımlanırsa S^1 bir birimli yarıgrup olur. Benzer şekilde S sıfır elemansız bir yarıgrup ise S ye bir e elemanı ekleyip $S^1 = S \cup \{e\}$ kümesi elde edilir. S üzerindeki işlem S^1 de her $s \in S^1$ kümesi için $es = se = e$ olarak tanımlanırsa S^1 bir sıfırlı yarıgrup olur.

Teorem 2. *(i) Eğer e, S nin sol birimi ve e', S nin sağ birimi ise $e = e'$ dir.*

(ii) Eğer e, S nin sol sıfırı ve e', S nin sağ sıfırı ise $e = e'$ dir.

İspat. *(i) e, S nin sol birimi olduğundan $ee' = e'$ ve e', S nin sağ birimi olduğundan $ee' = e$ olur. Bu durumda $e = ee' = e'$ olur.*

(ii) e, S nin sol sıfırı olduğundan $ee' = e$ ve e', S nin sağ sıfırı olduğundan $ee' = e'$ olur. Bu durumda $e = ee' = e'$ olur.

Tanım 5. *S birimli bir yarıgrup ve $s \in S$ olsun. $st = e$ olacak şekilde bir $t \in S$ varsa t ye s nin sağ tersi ve s ye de sağdan terslenebilirdir denir. Benzer şekilde $ts = e$ olacak şekilde bir $t \in S$ varsa t ye s nin sol tersi ve s ye de soldan terslenebilir denir. Eğer s hem sağ hem de sol terslenebilir ise s ye terslenebilir denir.*

Tanım 6. *S boş olmayan bir küme olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa S ye bir grup denir.*

(i) S bir yarıgruptur.

(ii) S nin bir e sol birimi ve S nin her s elemanının bir t sol tersi vardır.

Teorem 3. *(Hindman ve Strauss, 2010) Bir S yarıgrubu için aşağıdakiler denktir.*

(i) S bir gruptur.

(ii) S nin bir e iki taraflı birim elemanı her bir $s \in S$ için s nin (iki taraflı) tersi olacak şekilde en az bir $t \in S$ elemanı vardır.

(iii) S nin bir sol birimi vardır ve S nin verilen herhangi bir e sol birimi ve herhangi bir $s \in S$ için en az bir $t \in S$, s nin sol tersi olacak şekilde vardır.

(iv) S nin bir sağ birimi her bir $s \in S$ için en az bir $t \in S$, s nin sağ tersi olacak şekilde vardır.

(v) S nin bir sağ birimi vardır ve S nin verilen herhangi bir e sağ birimi ve herhangi bir $s \in S$ için en az bir $t \in S$, s nin sağ tersi olacak şekilde vardır.

Bir yarıgubun bir çok sağ birimi olabilir. Eğer bir yarıgrubun hem bir sağ birimi hem de bir sol birimi varsa bunlar çakışırlar. Bu eleman yarıgrubun birimi olur. Bir yarıgrubun en çok bir birimi vardır.

Örnek 7. $S = \{\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R}\}$ *matris çarpımına göre bir yarıgruptur. Her* $\begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S$ *için*

$$\begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *sağ birimdir.*

Tanım 7. *S bir yarıgrup olsun. Bu durumda*

(i) Eğer S nin bir 0 sıfırı var ve $n \in \mathbb{N}$ ler için $S^n = \{0\}$ ise S ye nilpotent denir.

(ii) Eğer S nin bir 0 sıfırı var ve $s \in S$ $s^n = \{0 = \{f | f : X \longrightarrow X\}\}$ olacak şekilde bazı $n \in \mathbb{N}$ ler vardır.

Eğer bir yarıgrubun hem bir sağ sıfırı hem de bir sol sıfırı varsa bunlar çakışırlar. Bu eleman yarıgrubun sıfırı olur. Bir yarıgrubun en çok bir sıfırı vardır.

Örnek 8. $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *olmak üzere $S = \{a, b, c, d\}$ matris çarpımına göre bir yarıgruptur. Bu yarıgrubun bir sol sıfırı sağ sıfır olmayacak şekilde vardır. Benzer şekilde bu yarıgrubun bir sol birimi sağ birim olmayacak şekilde vardır.*

Teorem 4. *(Hindman ve Strauss, 2010) S bir yarıgrup olsun.*

(i) Eğer S sağ sadeleşebilir ise S ve $L(S)$ izomorfiktir.

(ii) Eğer S sol sadeleşebilir ise S ve $R(S)$ antiizomorfiktir.

İspat. *(i) $\lambda(s) = \lambda_s$ şeklinde tanımlı $\lambda : S \longrightarrow L(S)$ fonksiyonunun örten bir homomorfizm olduğunu biliyoruz. Şimdi λ nın birebir olduğunu gösterelim. $s, t \in S$ için $\lambda(s) = \lambda(t)$ olsun. Bu durumda her $u \in S$ için*

$$\begin{aligned} \lambda_s(u) = \lambda_t(u) \quad &\Longrightarrow \quad su = tu \\ &\Longrightarrow \quad s = t \quad (S \text{ sağ sadeleşebilir olduğundan}) \end{aligned}$$

olup bu durumda λ fonksiyonu birebirdir. O halde λ fonksiyonu bir izomorfizmdir. Bu durumda S ve $L(S)$ izomorfiktir.

(ii) $\rho(s) = \rho_s$ şeklinde tanımlı $\rho : S \longrightarrow R(S)$ fonksiyonunun örten bir antihomomorfizm olduğunu biliyoruz. Şimdi ρ nin birebir olduğunu gösterelim. $s, t \in S$ için

$\rho(s) = \rho(t)$ *olsun. Bu durumda her* $u \in S$ *için*

$$\begin{aligned} \rho_s(u) = \rho_t(u) \quad &\Longrightarrow \quad us = ut \\ &\Longrightarrow \quad s = t \quad (S \text{ sol sadeleşebilir olduğundan}) \end{aligned}$$

olup bu durumda ρ *fonksiyonu birebirdir. O halde* ρ *fonksiyonu bir antiizomorfizmdir. Bu durumda* S *ve* $R(S)$ *antiizomorfiktir.*

Tanım 8. S *bir yarıgrup ve* T, S *nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda* $T \subseteq S$ *olsun. Eğer* $TT = \{st : s, t \in T\} \subseteq T$ *oluyorsa* T *ye* S *nin alt yarıgrubu denir.*

Tanım 9. S *bir yarıgrup ve* $e \in S$ *olsun. Bu durumda*

(i) $e^2 = e$ *ise* e *ye bir idempotent denir.*

(ii) Bir S *yarıgrubunun idempotent elemanlarının kümesi* $E(S)$ *ile gösterilir. Yani* $E(S) = \{e \in S : e, \text{idempotent}\}$ *dir.*

(iii) Eğer $E(S) = S$ *ise* S *ye idempotent yarıgrup denir.*

(iv) $Q \subseteq S$ *ve* Q, S *üzerindeki işleme göre bir yarıgrup ise* Q *ya* S *nin altyarıgrubu denir. Diğer bir değişle* $QQ \subseteq Q$ *oluyorsa* Q *ya* S *nin altyarıgrubu denir.*

(v) $Q \subseteq S$ *ve* Q, S *üzerindeki işleme göre bir grup ise* Q *ya* S *nin altgrubu denir. Diğer bir değişle* $QQ \subseteq Q$ *oluyorsa* Q *ya* S *nin altgrubu denir.*

(vi) A, S *nin boş olmayan bir altkümesi olsun.* A *yı kapsayan altyarıgrupların arakesitine* A *nın ürettiği altyarıgrup denir. Bu durumda* A *nın elemanlarına bu altgrubun üreteçleri denir.* A *nın ürettiği altyarıgrup* $\langle A \rangle$ *ile gösterilir.* $S = \langle A \rangle$ *ise* S *ye* A *tarafından üretilen yarıgrup denir. Tek bir eleman tarafından üretilen yarıgruba devirli yarıgrup denir.* S *sonlu bir küme tarafından üretiliyorsa* S *ye sonlu üreteçli yarıgrup denir.*

Teorem 5. A, S *yarıgrubunun boş kümeden farklı bir altkümesi olsun. Bu durumda* $\langle A \rangle = \{a_1 a_2 \cdots a_n : n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n \text{ için } a_i \in A\}$ *dir.*

İspat. $T = \{a_1 a_2 \cdots a_n : a_i \in A\}$ *olsun. Bu durumda* T *çarpma işlemi altında kapalıdır. Böylece* T, S *nin bir altyarıgrubudur. Diğer taraftan* $A \subseteq T$ *olduğundan* T*,* A *yı kapsayan bir altyarıgruptur. Böylece* $\langle A \rangle \subseteq A$ *dır.* $A \subseteq \langle A \rangle$ *ve* $\langle A \rangle$ *çarpama işlemi altında kapalı olduğundan* $T \subseteq \langle A \rangle$ *olur. Bu durumda* $\langle A \rangle = T$ *olur.*

Teorem 6. S*, birim elemanı* e *olan bir grup ise* $E(S) = \{e\}$ *dir.*

İspat. *$b \in E(S)$ olsun. Bu durumda*

$$bb = b = be$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanı sol taraftan b nin tersi ile çarpılırsa $b = e$ elde edilir.

Tanım 10. *S bir yarıgrup ve e bir idempotent olsun. S nin e yi eleman kabul eden altgruplarının birleşimine e yi içeren maksimal altgrup denir ve $H(e)$ ile gösterilir. Yani $e \in E(S)$ için*

$$H(e) = \bigcup\{G : G,\ S \text{ nin altgrubu ve } e \in G\}$$

dir. Eğer S nin bir e birimi varsa $H(e)$ ye S nin birim grubu denir.

Teorem 7. *S bir yarıgrup ve $e \in E(S)$ olsun. Bu durumda $H(e)$, S nin birim elemanlı bir altgrubudur.*

İspat. *$H(e)$ nin ürettiği altyarıgrup T olsun. Her $s \in H(e)$ için $se = es = s$ dir. Bu durumda e, $H(e)$ nin birimi olur. $s \in T$ olsun. Bu durumda $i = 1, 2, ..., n$ $(n \in \mathbb{N})$ için $s_i \in H(e)$ olmak üzere $s = s_1 s_2 \cdots s_n$ şeklinde yazılır. Her bir $i = 1, 2, ..., n$ için bir $t_i \in H(e)$ elemanını $s_i t_i = t_i s_i = e$ olacak şekilde seçelim ve $t = t_n \cdots t_2 t_1$ diyelim. Bu durumda $st = ts = e$ olur. Bu ise T nin bir grup olması demektir. Bu durumda $H(e) = T$ dir. $H(e)$ nin e yi içeren maksimal altgrup olduğu $H(e)$ nin tanımından açıktır.*

$H(e)$, e yi kapsayan maksimal altgruptur. Yani T, e yi içeren bir altgrup ise $T \subseteq H(e)$ olur.

Teorem 8. *S, birim elemanı e olan bir yarıgrup ise $E(S)$ bir altgruptur.*

İspat. *S nin terslenebilir elemanlarının kümesini T ile gösterelim. $e \in T$ olduğundan T boş olamaz. $s, t \in T$ olsun. Bu durumda s ve t terslenebilir olduğundan*

$$(st)^{-1}(st) = t^{-1}s^{-1}st = t^{-1}t = e \text{ ve } (st)(st)^{-1} = stt^{-1}s^{-1} = ss^{-1} = e$$

olur. Bu durumda st terslenebillirdir. Böylece $st \in T$ olur. O halde T, S nin altgrubu olur. Üstelik $e \in T$, T nin birim elemanıdır. Böylece T, S nin birimli bir altyarıgrubudur. Bu durumda T nin her elemanının tersi vardır. Böylece T, S nin altgrubudur.

Teorem 9. *S bir yarıgrup, $e \in E(S)$ ve $x \in S$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) $s \in H(e)$

(ii) $es = s$ ve $et = t$ ve $st = ts = e$ olacak şekilde $t \in S$ vardır.

(iii) $s = se$ ve $te = t$ ve $st = ts = e$ olacak şekilde $t \in S$ vardır.

Tanım 11. *S bir yarıgrup ve T, S nin boş olmayan bir altkümesi $T \subseteq S$ olsun.*

(i) Eğer $TS \subseteq T$ ise T ye S nin bir sağ ideali denir.

(ii) Eğer $ST \subseteq T$ ise T ye S nin bir sol ideali denir.

(iii) Eğer T, S nin hem sağ hem de sol ideali ise T ye S nin bir ideali denir.

(iv) Eğer T, S nin bir ideali ve $T \neq S$ ise T ye S nin bir has ideali denir.

Tanım 12. *S bir yarıgrup olsun.*

(i) M bir sol ideal olsun. K bir sol ideal olmak üzere $K \subseteq M$olması $M = K$ olmasını gerektiriyorsa M ye minimal sol ideal denir. Diğer bir deyişle M hiç bir sol ideali kapsamıyorsa M ye minimal sol ideal denir.

(ii) M bir sağ ideal olsun. K bir sağ ideal olmak üzere $K \subseteq M$olması $M = K$ olmasını gerektiriyorsa M ye minimal sağ ideal denir. Diğer bir deyişle M hiç bir sağ ideali kapsamıyorsa M ye minimal sağ ideal denir.

(iii) S bir minimal sol ideal ise S ye sol basittir denir.

(iv) S bir minimal sağ ideal ise S ye sağ basittir denir.

(v) S nin kendisinden başka ideali yoksa S ye basittir denir.

Teorem 10. *Eğer S yarıgrubunun bir minimal K ideali varsa K, S nin ideallerinin kesişimine eşittir.*

İspat. *:I, S nin herhangi bir ideali olsun. Bu durumda $IK \subseteq I \cap K$ dır. Böylece $I \cap K$ boş olmayan bir idealdir. K minimal olduğundan $K = I \cap K \subseteq I$ olur.*

Teorem 11. *S bir yarıgrup olsun.*

(i) M_1 ve M_2 farklı iki sol ideal ise $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ dur.

(ii) M_1 ve M_2 iki sol ideal olsun. $M_1 \cap M_2$ nin bir sol ideal olması için gerek ve yeter şart $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ olmasıdır.

(iii) M bir sol ideal ve N bir sağ ideal olsun. $M \cap N \neq \emptyset$ dur.

İspat. *(i)* $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ *olsun. Bu durumda* $M_1 \cap M_2$ *bir sol idealdir. Minimallikten dolayı* $M_1 = M_1 \cap M_2 = M_2$ *olur. Bu ise çelişkidir.*

(ii) $M_1 \cap M_2$ *bir sol ideal olsun.* $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ *ise* $m \in M_1 \cap M_2$ *olacak şekilde bir* m *elemanı vardır. Bu durumda* $m \in M_1$ *ve* $m \in M_2$ *dir. Bir* $s \in S$ *alalım. Bu durumda* $sm \in M_1$ *ve* $sm \in M_2$ *dir. Böylece* $sm \in M_1 \cap M_2$ *olur. Bu durumda* $M_1 \cap M_2$ *bir sol idealdir.*

(iii) $m \in M$ *ve* $n \in N$ *olsun.* $m \in M$ *olduğundan* $nm \in M$ *ve* $n \in N$ *olduğundan* $nm \in N$ *dir. Bu durumda* $nm \in M \cap N$ *olur. Böylece* $M \cap N \neq \emptyset$ *dur.*

Teorem 12. S *bir yarıgrup olsun.*

(i) Her $s \in S$ *için* sS *bir sağ idealdir.*

(ii) Her $s \in S$ *için* Ss *bir sol idealdir.*

(iii) Her $s \in S$ *için* sSs *bir idealdir.*

(iv) $e \in E(S)$ *ise* e, eS *nin sol birimi,* Se *nin sağ birimi ve* eSe *nin birimidir.*

İspat. *(i)* $(sS)S = s(SS) \subseteq sS$ *olduğundan* sS *bir sağ idealdir.*

(ii) $S(Ss) = (SS)s \subseteq Ss$ *olduğundan* Ss *bir sol idealdir.*

(iii) $S(SsS)S = (SS)s(SS) = SsS$ *olduğundan* SsS *bir idealdir.*

(iv) $e \in E(S)$ *olsun.* e *nin* Se *nin sağ birimi olduğunu gösterelim.* $e \in Se$ *ve* $s \in Se$ *olsun. Bu durumda* $s = te$ *olacak şekilde bir* $t \in S$ *vardır. Böylece* $se = tee = te = s$ *olur. Yani* e, Se *nin bir sağ birimidir. Benzer şekilde* e *nin* Se *nin sol birimi olduğu da gösterilebilir.*

Teorem 13. S *bir yarıgrup olsun.*

(i) S *sol basit ve* $e \in E(S)$ *ise* e, S *nin sağ birimidir.*

(ii) M, S *nin sol ideali ve* $s \in M$ *ise* $Ss \subseteq M$ *dir.*

(iii) $M \subseteq S$ *ve* $M \neq \emptyset$ *olsun.* M *nin* S *nin minimal sol ideali olması için gerek ve yeter şart her bir* $s \in M$ *için* $Ss = M$ *olmasıdır.*

İspat. *(i) Yukarıdaki teorem gereğince Se, S nin bir sol idealidir. Bu durumda S nin minimalliği gereğince $Se = S$ olur. Böylece yukarıdaki teorem gereğince e, S nin sağ birimidir.*

(ii) Tanım gereğince $s \in M$ ve $s \in S$ olduğundan $Ss \subseteq SM \subseteq M$ olur.

(iii) M minimal olsun. Yukarıdaki teorem gereğince Ss bir sol ideal olduğundan $Ss \subseteq M$ olur. Buradan $Ss = M$ olur. Tersine bazı $s \in M$ ler için $Ss = M$ olsun. Bu durumda M sol idealdir. $K \subseteq M$ özelliğindeki K, S nin bir sol ideali olsun. $s \in K$ alalım. (ii) şıkkı gereğince $Ss \subseteq K$ ve böylece $K \subseteq M = Ss \subseteq K$ olur. Yani $K = M$ olur. Bu durumda M minimaldir.

S bir yarıgrup ise

$$S^1 = \begin{cases} S & , S \text{ nin birimi varsa} \\ S \cup \{e\} & , S \text{ nin birimi yoksa} \end{cases}$$

şeklinde tanımladığımızı hatırlayalım. Eğer $A \subseteq S$ ise

$$\begin{aligned} S^1A &= \{sa : s \in S^1, a \in A\} \\ &= \{sa : s \in S \cup \{e\}, a \in A\} \\ &= \{sa : s \in S, a \in A\} \cup \{sa : s \in \{e\}, a \in A\} \\ &= SA \cup \{ea : a \in A\} \\ &= SA \cup \{a : a \in A\} \\ &= SA \cup A \end{aligned}$$

olur. Özel olarak $A = \{a\}$ ise

$$S^1a = Sa \cup \{a\}$$

olur. Benzer şekilde

$$aS^1 = aS \cup \{a\}$$

ve

$$S^1aS^1 = SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\}$$

olur.

Tanım 13. *S bir yarıgrup ve $s \in S$ olsun.*

(i) S nin s elemanını içeren en küçük sol idealine s nin ürettiği principal sol ideal denir.

(ii) S nin s elemanını içeren en küçük sağ idealine s nin ürettiği principal sağ ideal denir.

(iii) S nin s elemanını içeren en küçük idealine s nin ürettiği principal ideal denir.

Teorem 14. *S bir yarıgrup olsun.*

(i) s nin ürettiği principal ideal $S^1sS^1 = SsS \cup Ss \cup sS \cup \{s\}$ dir.

(ii) S nin birim elemanı varsa s nin ürettiği piricipal ideal SsS dir.

(iii) s nin ürettiği principal sol ideal $S^1s = Ss \cup \{s\}$ dir.

(iv) s nin ürettiği principal sağ ideal $sS^1 = sS \cup \{s\}$ dir.

İspat. *(i) $S^1sS^1 = SsS \cup Ss \cup sS \cup \{s\}$ nin s yi içeren iki taraflı bir ideal olduğu açıktır. T, s yi içeren iki taraflı bir ideal olsun. $S^1sS^1 = SsS \cup Ss \cup sS \cup \{s\} \subseteq T$ olduğunu gösterelim. Bunun için $SsS \subseteq T$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $s_1ss_2 \in SsS$ olsun. T sol ideal olduğundan $ST \subseteq T$ dir. Bu nedenle $s_1s_2 \in T$ olur. T sağ ideal olduğundan $TS \subseteq T$ olur. Buradan $(s_1s)s_2 \in T$ olur. Böylece $s_1ss_2 \in T$ olur. Bu durumda $SsS \subseteq T$ dir. Buradan $S^1sS^1 = SsS \cup Ss \cup sS \cup \{s\} \subseteq T$ olur.*

(ii) e, S nin birimi olsun. Bu durumda $S^1s = Ss \iff s \in Ss$ olduğundan

$$S^1sS^1 = SsS \cup Ss \cup sS = SsS$$

olur. Ayrıca S nin birim elemanı ya da idempotenti varsa her bir $s \in S$ için $S^1s = Ss$ olur.

(iii) S^1s in s tarafindan üretilen bir principal sol ideal olduğunu gösterelim. $s = se$ olduğundan $s \in S^1s$ olur. Bu durumda $S(S^1s) = (SS^1)s \subseteq S^1s$ olur. Böylece S^1s, s yi içeren bir sol ideal olur. M, s yi içeren bir sol ideal olsun. Bu durumda

$$S^1s \subseteq S^1M = SM \cup M \subseteq M$$

olur. O halde S^1s, s yi içeren en küçük idealdir.

(iv) Bunun ispatı (iii) ye benzer şekilde yapılır.

2.2 Kompakt Sağ Topolojik Yarıgruplar

Tanım 14. *S Hausdorff topolojiye sahip bir yarıgrup olsun.*

(i) Her $s \in S$ için sürekli $\rho_s : S \longrightarrow S$ fonksiyonu $\rho_s(t) = ts$ olacak şekilde varsa S ye sağ topolojik yarıgrup denir.

(ii) Her $s \in S$ için sürekli $\lambda_s : S \longrightarrow S$ fonksiyonu $\lambda_s(t) = st$ olacak şekilde varsa S ye sol topolojik yarıgrup denir.

(iii) Her $s \in S$ için hem ρ_s hem de λ_s fonksiyonu sürekli ise S ye yarıtopolojik yarıgrup denir.

(iv) $(s,t) \longmapsto s \cdot t : S \times S \longrightarrow S$ çarpım fonksiyonu sürekli ise S ye topolojik yarıgrup denir.

Tanım 15. *S bir sağ topolojik yarıgrup ise $\Lambda = \Lambda(S) = \{s \in S \mid \lambda_s : S \longrightarrow S$, sürekli $\}$ ye S nin topolojik merkezi denir.*

Tanım 16. *Her $s, t \in S_1$ için S_1 yarıgrubundan S_2 yarıgrubuna $\psi(st) = \psi(s)\psi(t)$ olacak şekildeki $\psi : S_1 \longrightarrow S_2$ fonksiyonu bir homomorfizmdir. ψ fonkiyonu birebir ve örten ise ψ ye izomorfizm denir. Aynı zamanda S_1 ve S_2 topolojik uzay ise ψ ye homeomorfizm denir. Bu durum topolojik izomorfizm olarak adlandırılır ve böylece S_1 ve S_2 ye topolojik olarak izomorf denir.*

Şimdi kompakt sağ topolojik yarıgrupların bazı önemli özelliklerini ifade edelim.

Önerme 1. *(Ellis, 1969) S bir kompakt sağ topolojik yarıgrup olsun. S bir idempotent içerir.*

Teorem 15. *(Hindman ve Strauss, 2010) S bir kompakt sağ topolojik yarıgrup olsun. Bu durumda $E(S) \neq \emptyset$ dir.*

İspat. *$\mathcal{A} = \{T \subseteq S : T \neq \emptyset, T$ kompakt ve $T \cdot T \subseteq T\}$ olsun. Yani $\mathcal{A}$, S nin kompakt alt yarıgruplarının bir kümesi olsun. Zorn Lemmayı kullanarak $\mathcal{A}$ nın bir minimal elemanı olduğunu gösterelim. $S \in \mathcal{A}$ olduğundan $\mathcal{A} \neq \emptyset$ dir. $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$ da bir zincir olsun. Bu durumda $\mathcal{C}$, sonlu kesişim özlliğine sahip olan S kompakt uzayının kapalı alt kümelerinin bir kolleksiyonudur. Dolayısıyla $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$ olup $\bigcap \mathcal{C}$, kompakt ve bir yarıgrup olur. Böylece $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{A}$ olur ve dolayısıyla $\mathcal{A}$ nın bir A minimal elemanını seçebiliriz. $x \in A$ alalım. $xx = x$ olduğunu göstereceğiz. ($A = \{x\}$). $Ax = A$ olduğunu gösterelim. $B = Ax$ olsun. Bu durumda $B \neq \emptyset$ ve $B = \rho_x[A]$ olduğundan, B kompakt bir uzayın sürekli bir görüntüsü olup dolayısıyla kompakttır. Ayrıca $BB = AxAx \subseteq AAAx \subseteq Ax \subseteq B$ dir. Böylece $B \in \mathcal{A}$ olur. $B = Ax \subseteq AA \subseteq A$ olduğundan ve A minimal olduğundan $B = A$ dır. $C = \{y \in A : yx = x\}$ olsun. $x \in A = Ax$ olduğundan $C \neq \emptyset$ dir. Ayrıca $C = A \cap \rho_x^{-1}[\{x\}]$ dir dolayısıyla C kapalı ve kompakttır. Verilen $y, z \in C$ için $yz \in AA \subseteq A$ ve $yzx = yx = x$ olup dolayısıyla $yz \in C$ olur. Böylece $C \in \mathcal{A}$ dır. $C \subseteq A$ ve A minimal olduğundan $C = A$ olup $x \in C$ ve dolayısıyla $xx = x$ olur.*

Önerme 2. *(Hindman ve Strauss, 2010) S bir kompakt sağ topolojik yarıgrup olsun.*

(i) S nin her sol ideali bir minimal sol ideal içerir. S nin minimal sol idealleri kapalıdır.

(ii) S nin bir en küçük $K = K(S)$ ideali vardır.

(iii) K idempotentler içerir ve bir $e \in S$ idempotenti için aşağıdakiler denktir.

(a) $e \in K$
(b) $K = SeS$
(c) Se bir minimal sol idealdir.
(d) eS bir minimal sağ idealdir.
(e) eSe, S nin bir altgrubudur.

(iv) Bazı $e \in K$ idempotentleri için her minimal sol ideal Se ve her minimal sağ ideal eS şeklindedir.

(v)

$$\begin{aligned} K &= \bigcup\{eSe : e \in E(K)\} \\ &= \bigcup\{eS : e \in E(K)\} \\ &= \bigcup\{Se : e \in E(K)\}. \end{aligned}$$

Her minimal sol ideal ve her minimal sağ ideal K da bulunmaz.

Önerme 3. *(Hindman ve Strauss, 2010) S bir kompakt sağ topolojik yarıgrup olsun. Bu durumda*

(i) S nin her sağ ideali minimal bir sağ ideal içerir.

(ii) S nin her kapalı sağ ideali minimal bir kapalı sağ ideal içerir.

Önerme 4. *(Hindman ve Strauss, 2010) S kompakt sağ topolojik yarıgrubunun topolojik merkezi*

$$\Lambda(S) = \{s \in S : \lambda_s : S \longrightarrow S, \textit{sürekli}\}$$

ya boştur ya da S nin bir altyarıgrubudur. Eğer S bir grup ise Λ, S nin bir altgrubudur.

Önerme 5. *(Hindman ve Strauss, 2010) S bir kompakt sağ topolojik yarıgrup olsun. Her $s \in S$ için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(i) $s \in K(S)$

(ii) Her $t \in S$ *için* $s \in Sts$ *dir.*

(iii) Her $t \in S$ *için* $s \in stS$ *dir.*

(iv) Her $t \in S$ *için* $s \in stS \cap stS$ *dir.*

3. FİLTERLAR, ULTRAFİLTERLAR VE BİR AYRIK UZAYIN STONE-CECH KOMPAKTİFİKASYONU

3.1 Filterlar

Filter kavramının ilk izleri Root'un makalesinde (Root, 1914) olmakla birlikte asıl filter tanımı Cartan (Cartan, 1937b; Cartan, 1937a) tarafından yapılmıştır. Bourbaki (Bourbaki, 1940) filterları çalışmalarında kullanmış ve aynı yıl Tukey ağlarla filterların değişik şekillerini çalışmıştır. 1955'te Bartle ağlarla filterlar arasındaki eşdeğerlikten bahsetmiştir. Kowalsky (Kowalsky, 1961), topolojinin gelişmesi için filterlar üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Tanım 17. *D herhangi bir küme olsun. D nin alt kümelerinin boştan farklı bir $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(D)$ ailesi verilsin. Eğer $\mathcal{F}$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\mathcal{F}$ ye bir filter denir.*

F-1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ dir.

F-2) $A, B \in \mathcal{F}$ ise $A \cap B \in \mathcal{F}$ dir.

F-3) $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subseteq B \subseteq D$ ise $B \in \mathcal{F}$ dir.

Örnek 9. *Filterlara klasik bir örnek olarak, bir topolojik uzaydaki bir noktanın komşuluklarının ailesi verilebilir. Önce komşuluklar ailesini tanımlayalım. (D, τ) bir topolojik uzay ve $x \in D$ olsun. $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir U açık kümesi varsa A ya x in bir komşuluğu denir ve x noktasının komşuluklarının ailesi genellikle $\mathcal{N}_x$ ile gösterilir. $\mathcal{N}_x$ ailesi komşuluk aksiyomları denilen aşağıdaki özelliklere sahiptir;*

N-1) $\mathcal{N}_x$ ailesine ait herhangi bir kümeyi kapsayan her küme $\mathcal{N}_x$ ailesine aittir.

N-2) $\mathcal{N}_x$ ailesine ait herhangi iki kümenin ara kesiti yine $\mathcal{N}_x$ ailesine aittir.

N-3) $\mathcal{N}_x$ ailesine ait her küme x noktasını içerir.

N-4) Eğer $A \in \mathcal{N}_x$ ise $y \in B$ için $A \in \mathcal{N}_y$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{N}_x$ vardır.

Bu özelliklerle $\mathcal{N}_x$, $x \in D$ noktasının komşuluklar filterıdır. Çünkü;

F-1) x noktasının her A komşuluğunda x noktasının kendisi bulunduğundan $\emptyset \notin \mathcal{N}_x$ dir.

F-2) $A, B \in \mathcal{N}_x$ ise N-2) aksiyomundan $A \cap B \in \mathcal{N}_x$ dir.

F-3) $A \in \mathcal{N}_x$, $B \in \mathcal{P}(D)$ ve $A \subseteq B$ ise N-1) aksiyomundan $B \in \mathcal{N}_x$ dir.

Örnek 10. *(Sonlu Tümleyenler Filterı) Sonsuz bir D kümesinin alt kümelerinden oluşan*

$$\mathcal{F} = \{S \subset D : D \setminus S \text{sonlu}\}$$

ailesi D üzerinde bir filterdır. Çünkü;

F-1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ dir.

F-2) $S_1, S_2 \in \mathcal{F}$ olsun. $\mathcal{F}$ nin tanımından, $D \setminus S_1$ ve $D \setminus S_2$ sonludur. Sonlu iki kümenin birleşimi sonlu olduğundan

$$(D \setminus S_1) \cup (D \setminus S_2) = (D \setminus S_1 \cap S_2)$$

kümesi de sonludur. O halde $\mathcal{F}$ nin tanımından $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{F}$ olur.

F-3) Her $S_1 \in \mathcal{F}$ kümesi için $S_1 \subset S_2$ ise $\mathcal{F}$ nin tanımından $D \setminus S_1$ kümesi sonlu ve $(D \setminus S_2) \subset (D \setminus S_1)$ olur. Sonlu bir kümenin her alt kümesi de sonlu olduğundan $D \setminus S_2$ kümesi sonludur. Sonuç olarak $S_2 \in \mathcal{F}$ bulunur.

Örnek 11. *$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerindeki sonlu tümleyenler filterına Fréchet Filterı denir. Yani, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde,*

$$\mathcal{F} = \{S \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus S \text{sonlu}\}$$

ailesi bir filterdır.

Örnek 12. *(Sayılabilir Tümleyenler Filterı) Sayılamaz bir D kümesinin alt kümelerinden oluşan*

$$\mathcal{F} = \{S \subset D : D \setminus S \text{sayılabilir}\}$$

ailesi D üzerinde bir filterdır.

Örnek 13. *(Principal Filter) D bir küme ve $x \in D$ olsun.*

$$\mathcal{F} = \{A : x \in A \text{ ve } A \in \mathcal{P}(D)\}$$

olarak tanımlansın. $\mathcal{F}$ bir filterdır, çünkü;

F-1) $A \in \mathcal{F}$ için $x \in A$ olacağından $A \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla $\emptyset \notin \mathcal{F}$ dir.

F-2) $A, B \in \mathcal{F}$ olsun. $A \in \mathcal{F}$ olduğundan $x \in A$ olur ve $B \in \mathcal{F}$ olduğundan $x \in B$ olur. Bu durumda $x \in A \cap B$ olur. Böylece $A \cap B \in \mathcal{F}$ dir.

F-3) Herhangi bir $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subseteq B$ özelliğine sahip bir $B \in \mathcal{P}(D)$ verilsin.

$A \in \mathcal{F}$ ise $x \in A$ dir. Dolayısıyla $A \subseteq B$ olduğundan $x \in B$ olur. Bu da $B \in \mathcal{F}$ olduğunu ifade eder.

Tanım 18. *D herhangi bir küme ve $\mathcal{F}$, D üzerinde bir filter olsun. $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ olsun. Eğer her $F \in \mathcal{F}$ için $F_0 \subseteq F$ olacak şekilde bir $F_0 \in \mathcal{F}_0$ varsa bu $\mathcal{F}_0$ alt ailesine $\mathcal{F}$ filterının tabanı denir.*

Örnek 14. *(X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $\mathcal{U}_x = \{U \subseteq X : x \in U, U$ açık$\}$ ailesi $\mathcal{N}_x$ in tabanıdır.*

Teorem 16. *(Hindman ve Strauss, 2010) D herhangi bir küme ve $\mathcal{F}$, D üzerinde bir filter ve $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{P}(D)$ olsun. $\mathcal{F}_0$ ın bir filter tabanı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.*

B-1) Her $F_0 \in \mathcal{F}_0$ için $F_0 \neq \emptyset$ dir.

B-2) Her $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_0$ için $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$ olacak şekilde bir $F_3 \in \mathcal{F}_0$ vardır.

İspat. *($\Longrightarrow$) $\mathcal{F}_0$ bir filter tabanı olsun.*

B-1) Her $F_0 \in \mathcal{F}_0$ için $F_0 \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ olduğundan $F_0 \in \mathcal{F}$ dir. $\mathcal{F}$, D üzerinde bir filter olduğundan $\emptyset \notin \mathcal{F}$ dir. Dolayısıyla $F_0 \neq \emptyset$ dir.

B-2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ ise $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ dir. $\mathcal{F}$ bir filter olduğundan $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ dir. $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}$ nin bir tabanı olduğundan taban tanımı gereği her $F = F_1 \cap F_2$ için $F_3 \subseteq F$ olacak şekilde bir $F_3 \in \mathcal{F}_0$ vardır. Bu da " her $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_0$ için $F_3 \subseteq F_1 \cap F_2$ olacak şekilde bir $F_3 \in \mathcal{F}_0$ vardır." ifadesini doğrular.

($\Longleftarrow$) $\mathcal{F}_0$ alt ailesi B-1) ve B-2) aksiyomlarını sağlasın. Bir $\mathcal{F}$ ailesini

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(D) : \exists F' \in \mathcal{F}_0 \text{ için } F' \subseteq F\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\mathcal{F}$ nin bir filter olduğunu göstermek çözümü getirecektir.

F-1) $F \in \mathcal{F}$ *alalım.* $F' \subseteq F$ *olacak şekilde bir* $F' \in \mathcal{F}_0$ *vardır. B-1) den* $F' \neq \emptyset$ *dir.* $\emptyset \neq F' \subseteq F$ *olduğundan* $F \neq \emptyset$ *dir. Buradan* $\emptyset \notin \mathcal{F}$ *olur.*

F-2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ *ise* $F_1' \subseteq F_1$ *ve* $F_2' \subseteq F_2$ *olacak şekilde* $F_1', F_2' \in \mathcal{F}_0$ *vardır. Dolayısıyla bir* $F' \in \mathcal{F}_0$ *için* $F' \subseteq F_1' \cap F_2' \subseteq F_1 \cap F_2$ *dir. Bu da* $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ *olması anlamına gelir.*

F-3) $F \in \mathcal{F}$ *alalım.* $F' \in \mathcal{F}_0$ *için* $F' \subseteq F$ *dir. Yani* $F' \in \mathcal{F}$ *dir.*

Dolayısıyla $\mathcal{F}$ *bir filterdır.* $\mathcal{F}_0$ *alt ailesi de* $\mathcal{F}$ *yi oluşturan bir tabandır.*

3.2 Ultrafilterlar

Tanım 19. *Başka bir filter tarafından kapsanmayan filtera ultrafilter denir. Başka bir değişle;*

D herhangi bir küme olsun. D nin alt kümelerinin boştan farklı bir $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(D)$ *kolleksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu filtera D üzerinde bir ultrafilter denir.*

U-1) $\emptyset \notin \mathcal{U}$ *dur.*

U-2) $A, B \in \mathcal{U}$ *ise* $A \cap B \in \mathcal{U}$ *dur.*

U-3) $A \in \mathcal{U}$ *ve* $A \subseteq B \subseteq D$ *ise* $B \in \mathcal{U}$ *dur.*

U-4) Bütün A kümeleri için $A \in \mathcal{U}$ *ya da* $D \setminus A \in \mathcal{U}$ *dur.*

Verilen bir D kümesi üzerinde bir çok filter olabilir. Bu filterların ”$\subseteq$ ” yarı sıralama bağıntısına göre maksimaline ultrafilter denir. Ultrafilter tanımındaki U-4) koşulu aynı zamanda maksimalliğin de bir koşuludur. Yani, bir $\mathcal{F}$ filterı hem bir A kümesini hem de onun tümleyeni olan $D \setminus A$ yı içeremez. Çünkü eğer içerirse, $A \cap D \setminus A = \emptyset \in \mathcal{F}$ olur ki bu U-1) koşulu ile çelişir. Fakat bir filter bunların ikisini de içermeyebilir. Aksine ultrafilterlar geniş (ultra) olmalıdırlar ve her zaman iki kümeden birini içerirler.

Not 1. *D bir küme ve* $\mathcal{U}$ *ve* $\mathcal{V}$*, D üzerinde ultrafilterlar olsun.* $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ *olması için gerek ve yeter şart* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ *olmasıdır.*

Yardımcı Teorem 1. *(Hindman ve Strauss, 2010)* $\mathcal{U}$, D *kümesi üzerinde bir filter ve* $A \subseteq D$ *olsun.*

(i) $A \cap B = \emptyset$ *olacak şekilde bazı* $B \in \mathcal{U}$ *lar vardır ya da*

(ii) $\{C \subseteq D : A \cap B \subseteq C$ *özelliğinde bazı* $B \in \mathcal{U}$ *lar vardır*$\}$ *kümesi* D *üzerinde bir filterdır.*

Tanım 20. D *bir küme ve bir* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(D)$ *ailesi için* $\mathcal{A}$ *nın boştan farklı sonlu her* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ *alt kümesi için* $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$ *ise,* $\mathcal{A}$ *ailesi sonlu kesişim özelliğine sahiptir denir.*

Teorem 17. *(Hindman ve Strauss, 2010)* D *bir küme ve* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(D)$ *olsun. Aşağıdaki özellikler birbirine denktir.*

(i) $\mathcal{U}$, D *de bir ultrafilterdır.*

(ii) $\mathcal{U}$*, sonlu kesişim özelliğine sahiptir ve her* $A \in \mathcal{P}(D) \setminus \mathcal{U}$ *için* $A \cap B = \emptyset$ *olacak şekilde bazı* $B \in \mathcal{U}$ *lar vardır.*

(iii) $\mathcal{U}$*, sonlu kesişim özelliğine göre maksimaldir. Yani* $\mathcal{U}$*,*

$$\{\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(D) : \mathcal{V} \text{ sonlu kesişim özelliğine sahip}\}$$

kümesinin bir maksimal elemanıdır.

(iv) $\mathcal{U}$, D *de bir filterdır ve bütün* $\mathcal{U} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{P}(D))$ *ler için eğer* $\cup\mathcal{F} \in \mathcal{U}$ *ise o zaman* $\mathcal{F} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ *dir.*

(v) $\mathcal{U}$, D *de bir filterdır ve bütün* $A \subseteq D$ *ler için ya* $A \in \mathcal{U}$ *ya da* $D \setminus A \in \mathcal{U}$ *dur.*

İspat. *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii) Tanım 17 , F-1) ve F-2) gereğince* $\mathcal{U}$ *sonlu kesişim özelliğine sahiptir.*

$A \in \mathcal{P}(D) \setminus \mathcal{U}$ *ve* $\mathcal{V} = \{C \subseteq D :$ *bazı* $B \in \mathcal{U}$ *lar için* $A \cap B \subseteq C\}$ *olsun. Bu takirde* $A \in \mathcal{V}$ *ve* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *dir dolayısıyla* $\mathcal{V}$, D *de bir filter değildir. Böylece* $A \cap B = \emptyset$ *olacak şekilde bazı* $B \in \mathcal{U}$ *lar vardır.*

(ii)$\Longrightarrow$*(iii)* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(D)$ *ise* $A \cap B = \emptyset$ *olacak şekilde* $A \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ *ve* $B \in \mathcal{U}$ *seçelim. Böylece* $A, B \in \mathcal{V}$ *dir. Dolayısıyla* $\mathcal{V}$ *sonlu kesişim özelliğine sahip değildir.*

(iii)$\Longrightarrow$*(iv) Farz edelim ki,* $\mathcal{P}(D)$ *nin altkümeleri arasında sonlu kesişim özelliğine göre* $\mathcal{U}$ *maksimal olsun. Bu takdirde* $\mathcal{U}$, D *nin alt kümelerinin boştan farklı bir ailesidir.*

$\mathcal{U} \cap \{D\}$ sonlu kesişim özelliğine sahip ve $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \cap \{D\}$ olduğundan $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap \{d\}$ dir. Yani, $D \in \mathcal{U}$ dur. Verilen $A, B \in \mathcal{U}$ için $\mathcal{U} \cup \{A \cap B\}$ sonlu kesişim özelliğine sahiptir dolayısıyla $A \cap B \in \mathcal{U}$ dur. $A \in \mathcal{U}$ ve $A \subseteq B \subseteq D$ olacak şekilde verilen A ve B için $\mathcal{U} \cup \{B\}$ sonlu kesişim özelliğine sahiptir. Dolayısıyla $B \in \mathcal{U}$ dur. Böylece $\mathcal{U}$ bir filterdır.

$\cup\mathcal{F} \in \mathcal{U}$ olacak şekilde $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{P}(D))$ olsun ve her $A \in \mathcal{F}$ için $A \notin \mathcal{U}$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde verilen $A \in \mathcal{F}$ için $\mathcal{U} \subset \mathcal{U} \cup \{A\}$ dır. Dolayısıyla $\mathcal{U} \cup \{A\}$ sonlu kesişim özelliğine sahip değildir. Bu nedenle $A \cap (\cap\mathcal{G}_A) = \emptyset$ olacak şekilde $\mathcal{G}_A \in \mathcal{P}_f(\mathcal{U})$ vardır. $\mathcal{H} = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} \mathcal{G}_A$ olsun. O zaman $\mathcal{H} \cup \{\cup\mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{U}$ iken $(\cup\mathcal{F}) \cap (\cap\mathcal{H}) = \emptyset$ dir. Bu bir çelişkidir.

(iv)$\Longrightarrow$(v) $\mathcal{F} = \{A, D \setminus A\}$ alınırsa ispat tamamlanır.

(v)$\Longrightarrow$(i) Varsayalım ki $\mathcal{U}$, D de bir filter olsun ve her $A \subseteq D$ için ya $A \in \mathcal{U}$ ya da $D \setminus A \in \mathcal{U}$ olsun. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ ve $\mathcal{V}$ bir filter olsun. Farz edelim ki, $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ olsun. $A \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ seçilirse $D \setminus A \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ iken $A \cap (D \setminus A) = \emptyset$ olur. Buradan da çelişki bulunur. Böylece $\mathcal{U}$, D de bir ultrafilterdır.

Tanım 21. *Eğer $a \in D$ ise $\{A \in \mathcal{P}(D) : a \in A\}$, D de bir ultrafilterdır ve bu ultrafiltera a tarafından tanımlanan principal ultrafilter denir.*

Teorem 18. *(Hindman ve Strauss, 2010) D bir küme ve $\mathcal{U}$, D de bir ultrafilter olsun. Aşağıdaki özellikler birbirine denktir.*

(i) $\mathcal{U}$ bir principal ultrafilterdır.

(ii) $F \in \mathcal{U}$ olacak şekilde bazı $F \in \mathcal{P}_f(D)$ ler vardır.

(iii) $\mathcal{U}$, $\{A \subseteq D : D \setminus A \text{ sonlu}\}$ kümesini içermez.

(iv) $\cap\mathcal{U} \neq \emptyset$ dir.

(v) $\cap\mathcal{U} = \{x\}$ olacak şekilde bazı $x \in D$ ler vardır.

İspat. *(i)$\Longrightarrow$(ii) $\mathcal{U} = \{A \subseteq D : x \in A\}$ olacak şekilde $x \in D$ alalım. $F = \{x\}$ olur.*

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Verilen $F \in \mathcal{P}_f(D)$ ler için $D \setminus F \notin \mathcal{U}$ dur.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) $D \setminus A$ *sonlu ve* $A \notin \mathcal{U}$ *olacak şekilde* $A \subseteq D$ *alalım.* $F = D \setminus A$ *olsun. Bu takdirde* $F \in \mathcal{U}$ *ve Teorem 17 dan dolayı* $F = \cup\{\{x\} : x \in \mathcal{F}\}$ *olur,* $\{x\} \in \mathcal{U}$ *olacak şekilde* $x \in F$ *seçebiliriz. Böylece her* $B \in \mathcal{U}$ *için* $B \cap \{x\} \neq \emptyset$ *dir. Dolayısıyla* $x \in \cap\mathcal{U}$ *olur.*

(iv)$\Longrightarrow$(v) Varsayalım ki, $\cap\mathcal{U} \neq \emptyset$ *olsun ve* $x \in \cap\mathcal{U}$ *seçelim. Bu takdirde* $D \setminus \{x\} \notin \mathcal{U}$ *dur dolayısıyla* $\{x\} \in \mathcal{U}$ *olur. Bu yüzden* $\cap\mathcal{U} \subseteq \{x\}$ *dir.*

(v)$\Longrightarrow$(i) $\cap\mathcal{U} = \{x\}$ *olacak şekilde* $x \in D$ *seçelim. Bu takdirde* $\mathcal{U}$ *ve* $\{A \subseteq D : x \in A\}$ *ultrafilterdır ve bu* $\mathcal{U} \subseteq \{A \subseteq D : x \in A\}$ *yazmak için yeterlidir.*

Yardımcı Teorem 2. *(Zirnstein, 2012) (Filterların Ultrafilterlara Genişlemesi)* $\mathcal{F}$, D *de bir filter olsun. Bu durumda* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ *olacak şekilde bir* $\mathcal{U}$ *ultrafilterı vardır.*

Bu teoremin Fréchet filterına uygulaması bize nonprincipal ultrafilterların varlığını gösterir.

Sonuç 1. *(Zirnstein, 2012) (Nonprincipal Ultrafilterların Varlığı) Her nonprincipal ultrafilter bir Fréchet filterına genişler.*

İspat. *Yardımcı Teorem 2 de bahsedildiği gibi Fréchet filterına genişleyen bir* $\mathcal{U}$ *ultrafilterı vardır. Bütün* $A \in \mathcal{U}$ *kümelerinin kesişimi boş olduğundan* $\mathcal{U}$ *ultrafilterı principal olamaz.*

Sadece $\mathcal{U}$ *principal ultrafilterının sonlu kümelerden oluşabildiğine dikkat edelim. Herhangi bir* A *kümesi verilsin* A *nın tümleyeni olan* $D \setminus A$ *sonludur, dolayısıyla bir* $\mathcal{U}$ *nonprincipal ultrafilterı* A *kümesini içermelidir fakat* $D \setminus A$ *yı içeremez. Bu ise* $\mathcal{U}$ *nun bir Fréchet filterına genişlediği anlamına gelir.*

Teorem 19. *(Hindman ve Strauss, 2010)* D *bir küme ve* $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}(D)$ *nin sonlu kesişim özelliğine sahip bir alt kümesi olsun. Bu takdirde* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ *olacak şekilde* D *üzerinde bir* $\mathcal{U}$ *ultrafilterı vardır.*

İspat. $\Gamma = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(D) : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ *ve* $\mathcal{B}$ *sonlu kesişim özelliğine sahip*$\}$ *olsun. O zaman* $\mathcal{A} \subseteq \Gamma$ *ve dolayısıyla* $\Gamma \neq \emptyset$ *olur.* Γ *de verilen bir* $\mathcal{C}$ *zinciri için* $\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{C}$ *dir. Verilen* $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\cup\mathcal{C})$ *için* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ *özelliğinde bazı* $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ *ler vardır. Dolayısıyla* $\mathcal{F} \neq \emptyset$ *dir. Böylece Zorn Lemma dan dolayı* Γ *nin bir maksimal* $\mathcal{U}$ *elemanını seçebiliriz.* $\mathcal{U}$ *sadece* Γ *de maksimal değildir aynı zamanda aslında sonlu kesişim özelliğine göre de maksimaldir. Teorem 17 gereğince* $\mathcal{U}$, D *de bir ultrafilterdır.*

Sonuç 2. *(Hindman ve Strauss, 2010)* D *bir küme,* $\mathcal{A}$, D *de bir filter ve* $A \subseteq D$ *olsun. Bu takdirde* $A \notin \mathcal{A}$ *olması için gerek ve yeter şart* $\mathcal{A} \cup \{D \setminus A\} \subseteq \mathcal{U}$ *olacak şekilde bazı* $\mathcal{U}$ *ultrafilterlarının var olmasıdır.*

İspat. *:$A \in \mathcal{U}$ ve $D \setminus A \in \mathcal{U}$ olacak şekilde bir $\mathcal{U}$ filterı olmadığından yeter koşul önemsizdir.*

Gerek koşul için Teorem 19 gereğince $\mathcal{A} \cup \{D \setminus A\}$ nın sonlu kesişim özelliğine sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Bu yüzden varsayalım ki $(D \setminus A) \cap (\cap \mathcal{F}) = \emptyset$ özelliğinde boştan farklı sonlu bazı $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ lar olsun. Bu takdirde $\cap \mathcal{F} \subseteq A$ dır ve dolayısıyla $A \in \mathcal{A}$ olur.

Tanım 22. *D bir küme ve $\mathcal{U}$, D de bir ultrafilter olsun. $\mathcal{U}$ nun normu $\|\mathcal{U}\| = \min\{|A| : A \in \mathcal{U}\}$ şeklinde tanımlıdır.*

Teorem 18 den dolayı eğer $\mathcal{U}$ bir ultrafilter ise $\|\mathcal{U}\|$ nun 1 veya sonsuz olacağına dikkat edelim.

Tanım 23. *D bir küme ve κ bir sonsuz kardinal olsun. D de bir $\kappa-$düzgün ultrafilter, $\|\mathcal{U}\| \geq \kappa$ olacak şekilde D de bir $\mathcal{U}$ ultrafilterıdır. Bunların kümesi*

$$\mathcal{U}_\kappa(D) = \{\mathcal{U} : \mathcal{U},\ D \text{ de bir } \kappa - \text{düzgün ultrafilter}\}$$

şeklindedir. D de bir düzgün ultrafilter, D de bir $\kappa-$düzgün ultrafilterdır ve $\kappa = |D|$ dir.

Sonuç 3. *(Hindman ve Strauss, 2010) D herhangi bir küme ve $\mathcal{A}$, D nin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{A}$ nın her sonlu alt ailesinin kesişimi sonsuz ise $\mathcal{A}$, bütün elemanları sonsuz olan bir ultrafilter tarafından kapsanır. Daha genel olarak eğer κ bir sonsuz kardinal ve $\mathcal{A}$ nın her sonlu alt ailesinin kesişiminin kardinalitesi κ ya eşit veya daha büyükse bu takdirde $\mathcal{A}$, D de bir κ -düzgün ultrafilter tarafından kapsanır.*

İspat. *Sonsuz olma özelliği düzgün parçalanışdır ve dolayısıyla en azından κ kardinalitesine sahip olma özelliği vardır.*

Eğer $\mathcal{A}$ nın her sonlu alt ailesinin kesişimi sonsuz ise $\mathcal{A}$ sonsuz sonlu kesişim özelliğine sahiptir denir. Böylece Sonuç 3 de değindiğimiz gibi eğer $\mathcal{A}$ sonsuz sonlu kesişim özelliğine sahip ise $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ özelliğinde D de bir $\mathcal{U}$ nonprincipal ultrafilterı vardır.

3.3 βD Topolojik Uzayı

Bu bölümde bir D kümesindeki bütün ultrafilterların kümesi üzerinde bir topoloji tanımlayacağız ve oluşan topolojik uzayın bazı özelliklerini kuracağız.

Tanım 24. *D boştan farklı bir küme olsun. $\tau = \mathcal{P}(D)$ kolleksiyonu D üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye D üzerindeki ayrık topoloji ve (D, τ) topolojik uzayına da ayrık topolojik uzay denir.*

Tanım 25. *D bir ayrık topolojik uzay olsun.*

(i) $\beta D = \{p : p,\ D \text{ de bir ultrafilter}\}$ *dır.*

(ii) $A \subseteq D$ *olmak üzere* $\widehat{A} = cl(A) = \{p \in \beta D : A \in p\}$ *dır.*

Tanım 26. *D bir küme ve $a \in D$ olsun. Bu takdirde*

(i) $e(a) = \{A \subseteq D : a \in A\}$ *dır.*

(ii) $e[A] = \{e(a) : a \in A\}$ *dır.*

Böylece her $a \in D$ için $e(a)$, a ya karşılık gelen bir principal ultrafilterdır.

Yardımcı Teorem 3. *(Hindman ve Strauss, 2010) D bir küme ve $A, B \subseteq D$ olsun.*

(i) $A \subseteq B \subseteq D$ *ise* $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$ *dir.*

(ii) $(\widehat{A \cup B}) = \widehat{A} \cup \widehat{B}$ *dir.*

(iii) $(\widehat{A \cap B}) = \widehat{A} \cap \widehat{B}$ *dir.*

(iv) $\widehat{A} \cap D = A$ *dir.*

(v) $(\widehat{D \setminus A}) = \beta D \setminus \widehat{A}$ *dir.*

(vi) $\widehat{A} = \emptyset$ *olması için gerek ve yeter şart* $A = \emptyset$ *olmasıdır.*

(vii) $\widehat{A} = \beta D$ *olması için gerek ve yeter şart* $A = D$ *olmasıdır.*

(viii) $\widehat{A} = \widehat{B}$ *olması için gerek ve yeter şart* $A = B$ *olmasıdır.*

İspat. *(i) $A \subseteq B \subseteq D$ iken $A \in p$ ve $p \in \beta D$ olduğundan $B \in p$ dir. $p \in \widehat{A}$ iken $p \in \beta D$ ve $B \in p$ olduğundan $p \in \widehat{B}$ olur. Böylece $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$ elde edilir.*

(ii) Her $p \in (\widehat{A \cup B})$ *ise* $p \in \widehat{A} \cup \widehat{B}$ *olduğunu göstermek için her* $p \notin \widehat{A} \cup \widehat{B}$ *ise* $p \notin (\widehat{A \cup B})$ *olup olmadığına bakalım. Eğer* $p \in (\widehat{A} \cup \widehat{B})'$ *ise* $p \in (\widehat{A})' \cap (\widehat{B})'$ *olur. Dolayısıyla* $p \notin \widehat{A}$ *ve* $p \notin \widehat{B}$ *olduğundan* $A \notin e(a)$ *ve* $B \notin e(a)$ *dır. Dolayısıyla* $e(a)$ *bir ultrafilter olduğundan* $D \setminus A \in e(a)$ *ve* $D \setminus B \in e(a)$ *dir. Buradan* $p \in (\widehat{D \setminus A})$ *ve* $p \in (\widehat{D \setminus B})$ *ise* $p \in (\widehat{D \setminus A}) \cap (\widehat{D \setminus B})$ *olur. Yani* $p \in \widehat{D} \setminus (\widehat{A \cup B})$ *olup* $p \notin (\widehat{A \cup B})$ *elde edilir. Dolayısıyla* $p \in \widehat{A} \cup \widehat{B}$ *olur. O halde* $(\widehat{A \cup B}) \subseteq \widehat{A} \cup \widehat{B}$ *bulunur.*

$A \subseteq A \cup B$ *ise* $\widehat{A} \subseteq (\widehat{A \cup B})$ *ve* $B \subseteq A \cup B$ *ise* $\widehat{B} \subseteq (\widehat{A \cup B})$ *olur. Dolayısıyla* $\widehat{A} \cup \widehat{B} \subseteq (\widehat{A \cup B})$ *olur. O halde* $(\widehat{A \cup B}) = \widehat{A} \cup \widehat{B}$ *bulunmuş olur.*

(iii) $A \cap B \subseteq A$ *ise* $(\widehat{A \cap B}) \subseteq \widehat{A}$ *ve* $A \cap B \subseteq B$ *ise* $(\widehat{A \cap B}) \subseteq \widehat{B}$ *dir. Buradan da* $(\widehat{A \cap B}) \subseteq \widehat{A} \cap \widehat{B}$ *olur. Her* $p \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$ *iken* $p \in (\widehat{A \cap B})$ *olduğunu göstermek için,* $p \notin (\widehat{A \cap B})$ *iken* $p \notin \widehat{A} \cap \widehat{B}$ *olup olmadığına bakalım;* $A \cap B \notin e(a)$ *ve* $e(a)$ *bir ultrafilter olduğundan* $D \setminus (A \cap B) \in e(a)$ *dır. Dolayısıyla* $(D \setminus A) \cup (D \setminus B) \in e(a)$ *dır. Buradan* $p \in \Big(\widehat{(D \setminus A) \cup (D \setminus B)}\Big) = (\widehat{D \setminus A}) \cup (\widehat{D \setminus B})$ *olduğundan* $p \in (\widehat{D \setminus A}) \cup (\widehat{D \setminus B})$ *olur. Dolayısıyla* $p \in (\widehat{D \setminus A})$ *veya* $p \in (\widehat{D \setminus B})$ *elde edilir. Buradan* $e(a)$ *bir ultrafilter olduğundan* $D \setminus A \in e(a)$ *veya* $D \setminus B \in e(a)$ *ve* $A \notin e(a)$ *veya* $B \notin e(a)$ *olup* $p \notin \widehat{A}$ *veya* $p \notin \widehat{B}$ *elde edilir.* $p \notin \widehat{A} \cap \widehat{B}$ *dir. Dolayısıyla* $p \in (\widehat{A \cap B})$ *olur. O halde* $\widehat{A} \cap \widehat{B} \subset (\widehat{A \cap B})$ *dir. Böylece* $(\widehat{A \cap B}) = \widehat{A} \cap \widehat{B}$ *olur.*

(iv) Her $p \in \widehat{A} \cap D$ *olması için gerek ve yeter şart* $p \in \widehat{A}$ *ve* $p \in D$ *olmasıdır. Böylece* $A \in e(a)$ *ve* $p \in D$ *dir. Buradan* $p \in A$ *ve* $p \in D$ *bulunur. Yani* $p \in A \cap D = A$ *dır. Dolayısıyla* $p \in A$ *elde edilir. Aynı şekilde* $p \in A$ *olması şartıyla* $p \in \widehat{A} \cap D$ *elde edilir. Böylece* $\widehat{A} \cap D = A$ *olur.*

(v) $A \cap (D \setminus A) = \emptyset$ *olduğundan* $(D \setminus A) \cup A = D$ *dir. Bu nedenle* $(A \,\widehat{\cap\, (D \setminus} A)) = \widehat{\emptyset}$ *olduğundan* $((D \,\widehat{\setminus A) \cup} A) = \widehat{D}$ *dir.* $\widehat{D} = \beta D$ *ve* $\widehat{\emptyset} = \emptyset$ *olduğundan ve* $(\widehat{D \setminus A}) \cap \widehat{A} = \emptyset$ *olduğu için* $(\widehat{D \setminus A}) \cup \widehat{A} = \beta D$ *olur.*

$$((\widehat{D \setminus A}) \cup \widehat{A}) \setminus \widehat{A} = \beta D \setminus \widehat{A}$$

ve

$$((\widehat{D \setminus A}) \setminus \widehat{A}) \cup (\widehat{A} \setminus \widehat{A}) = (\widehat{X \setminus A}) \cup \emptyset$$

olup $(\widehat{X \setminus A}) \cup \emptyset = (\widehat{X \setminus A})$ *olduğundan* $(\widehat{X \setminus A}) = \beta D \setminus \widehat{A}$ *bulunur.*

(vi) $\widehat{A} = \{p \in \beta D : A \in p\} = \emptyset$ *olması için gerek ve yeter şart, ultrafilter tanımından* $\emptyset \notin e(a)$ *olduğundan* $A = \emptyset$ *olmasıdır.*

(vii) $\widehat{A} = \{p \in \beta D : A \in p\} = \beta D$ *olması için gerek ve yeter şart, D bütün filterlara ait olup* $\widehat{D}$ *kümesi* βD *in bütün* p *noktalarını kapsadığından* $A = D$ *olmasıdır.*

(viii) $A = B$ *ise* $A \subseteq B$ *ve* $p \in \widehat{A}$ *ise* $\widehat{A}$ *nın tanımından* $A \in e(a)$ *dir.* $e(a)$ *filter olduğundan* $B \in e(a)$ *olur. Dolayısıyla* $p \in \widehat{B}$ *bulunur. Böylece* $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$ *olur. Aynı şekilde* $A = B$ *ise* $B \subseteq A$ *ve* $p \in \widehat{B}$ *ise* $\widehat{B}$ *nın tanımından* $B \in e(b)$ *dir.* $e(b)$ *filter olduğundan* $A \in e(b)$ *olur. Dolayısıyla* $p \in \widehat{A}$ *bulunur. Böylece* $\widehat{B} \subseteq \widehat{A}$ *olur. Sonuç olarak* $\widehat{A} = \widehat{B}$ *elde edilir.*

$\widehat{A} \cap \widehat{B} = (\widehat{A \cap B})$ olduğundan $\widehat{A}$ kümelerinin sonlu kesişim altında kapalı olduğunu söyleriz. Sonuç olarak $\left\{\widehat{A} : A \subseteq D\right\}$, βD üzerindeki bir topoloji için bir taban oluşturur. Bu kümeleri taban olarak kabul eden βD topolojisini tanımlayacağız. Şimdi βD in bazı temel topolojik özelliklerini anlatan bir teoremi inceleyeceğiz.

Tanım 27. *Bir* X *topolojik uzayının bir* Z *topolojik uzayı içine embedding (gömmesi)* X *den* $\varphi[X]$ *e giden*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & X \longrightarrow Z \\ & X \longmapsto \varphi[X] \end{aligned}$$

şeklinde bir homeomorfizmdir.

Teorem 20. *(Hindman ve Strauss, 2010)* D *herhangi bir küme olsun.*

(i) βD *bir kompakt Hausdorff uzaydır.*

(ii) $\widehat{A}$ *kümeleri* βD *in kapalı-açık alt kümeleridir.*

(iii) Her $A \subseteq D$ *için* $\widehat{A} = cl_{\beta D} e[A]$ *dır.*

(iv) Herhangi bir $A \subseteq D$ *ve herhangi bir* $p \in \beta D$ *için* $p \in cl_{\beta D} e[A]$ *olması için gerek ve yeter şart* $A \in p$ *olmasıdır.*

(v) e *fonksiyonu bir gömmedir ve* $e[D]$*,* βD *in yoğun bir alt kümesidir.* $e[D]$ *in noktaları,* βD *in izole noktalarıdır.*

(vi) Eğer $\mathcal{U}$, βD *in açık bir alt kümesi ise* $cl_{\beta D}\mathcal{U}$ *da açıktır.*

İspat. *(i)* p *ve* q, βD *in farklı elemanları olsun. Eğer* $A \in p \backslash q$ *ise* $D \backslash A \in q$ *dur. Dolayısıyla* $\widehat{A}$ *ve* $\widehat{D \setminus A}$*,* βD *in sırasıyla* p *ve* q *yu içeren ayrık açık alt kümeleridir. Böylelikle* βD *Hausdorff uzaydır.*

$\beta D \setminus \widehat{A} = (\widehat{D \setminus A})$ olduğundan $\widehat{A}$ kümelerinin aynı zamanda kapalı kümeler için de bir taban olduğunu görebiliriz. Böylece βD in kompakt olduğunu göstermek için sonlu kesişim özelliğine sahip $\widehat{A}$ kümelerinin bir $\mathcal{A}$ ailesini düşüneceğiz ve $\mathcal{A}$ nın boştan farklı bir kesişime sahip olduğunu göstereceğiz. $\mathcal{B} = \left\{A \subseteq D : \widehat{A} \in \mathcal{A}\right\}$ alalım. Eğer $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{B})$ ise bazı $p \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \widehat{A}$ lar vardır ve dolayısıyla $\cap\mathcal{F} \in p$ dir ve böylece $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$ dir. Yani $\mathcal{B}$ sonlu kesişim özelliğine sahiptir ve dolayısıyla Teorem 19 gereğince $\mathcal{B} \subseteq q$ olacak şekilde $q \in \beta D$ alabiliriz. Böylece $q \in \cap\mathcal{A}$ olur.

(ii) (i) nin ispatındaki her $\widehat{A}$ kümesinin açık olmasının yanı sıra kapalı olduğuna dikkat edelim. C, βD in herhangi bir clopen alt kümesi olsun.

$$\mathcal{A} = \left\{\widehat{A} : A \subseteq D \text{ ve } \widehat{A} \subseteq C\right\}$$

alalım. C açık olduğundan $\mathcal{A}$, C nin bir açık örtüsüdür. C kapalı olduğundan (i) den dolayı kompakttır, dolayısıyla $C = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \widehat{A}$ olacak şekilde $\mathcal{P}(D)$ in sonlu bir $\mathcal{F}$ alt ailesi alınabilir. Bu takdirde Yardımcı Teorem 3 den dolayı $C = \widehat{\cup\mathcal{F}}$ olur.

(iii) Açıkça her $a \in A$ için $e(a) \in \widehat{A}$ dır ve bundan dolayı $cl_{\beta D} e[A] \subseteq \widehat{A}$ dır. Ters kapsamayı ispatlamak için $p \in \widehat{A}$ alalım. Eğer $\widehat{B}$, p nin temel komşuluğunu belirtiyorsa $A \in p$ ve $B \in p$ dir ve dolayısıyla $A \cap B \neq \emptyset$ olur. Herhangi bir $a \in A \cap B$ seçelim. $e(a) \in e[A] \cap \widehat{B}$ olduğundan $e[A] \cap \widehat{B} \neq \emptyset$ dir ve böylece $p \in cl_{\beta D} e[A]$ olur.

(iv) (iii) den ve $\widehat{A}$ nın tanımından, $p \in cl_{\beta D} e[A]$ olması için gerek ve yeter şart $p \in \widehat{A}$ olmasıdır ve dolayısıyla $A \in p$ dir.

(v) Eğer $a, b \in D$ farklı elemanlar ise $D \setminus \{a\} \in e(b) \setminus e(a)$ dır ve dolayısıyla $e(a) \neq e(b)$ dir.

Eğer $\widehat{A}$, βD in boştan farklı açık bir temel alt kümesi ise $A \neq \emptyset$ dir. Herhangi bir $a \in A$, $e(a) \in e[D] \cap \widehat{A}$ yı sağlar ve dolayısıyla $e[D] \cap \widehat{A} \neq \emptyset$ dir. Böylece $e[D]$, βD de yoğundur.

Herhangi bir $a \in D$ için $\widehat{\{a\}}$, tek elemanı $e(a)$ olan βD in açık bir alt kümesi olduğundan; $e(a)$, βD nin bir izole noktasıdır. Tersine eğer p, βD in izole noktası ise bu takdirde $\{p\} \cap e[D] \neq \emptyset$ dir ve dolayısıyla $p \in e[D]$ dir.

(vi) $\mathcal{U} = \emptyset$ iken sonuç önemsiz olduğundan $\mathcal{U} \neq \emptyset$ alalım. $A = e^{-1}[\mathcal{U}]$ olsun. İlk olarak $\mathcal{U} \subseteq cl_{\beta D} e[A]$ olduğunu iddia edelim. Dolayısıyla $p \in \mathcal{U}$ ve p nin bir temel komşuluğu $\widehat{B}$ olsun. Bu takdirde $\mathcal{U} \cap \widehat{B}$ boştan farklı açık bir kümedir ve dolayısıyla (v) den $\mathcal{U} \cap \widehat{B} \cap$

$e[D] \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla $e(b) \in \mathcal{U}$ olacak şekilde $b \in B$ seçelim. Böylece $e(b) \in \widehat{B} \cap e[A]$ dır ve dolayısıyla $\widehat{B} \cap e[A] \neq \emptyset$ dir.

Ayrıca $e[A] \subseteq \mathcal{U}$ ve bu yüzden $\mathcal{U} \subseteq cl_{\beta D}e[A] \subseteq cl_{\beta D}\mathcal{U}$ olur. Böylece (iii) den $cl_{\beta D}\mathcal{U} = cl_{\beta D}e[A] = \widehat{A}$ dır ve dolayısıyla $cl_{\beta D}\mathcal{U}$, βD de açıktır.

Tanım 28. *D bir küme ve $\mathcal{A}$, D de bir filter olsun. Bu takdirde $\widehat{\mathcal{A}} = \{p \in \beta D : \mathcal{A} \subseteq p\}$ dır.*

Teorem 21. *(Hindman ve Strauss, 2010) D bir küme olsun.*

(i) $\mathcal{A}$, D de bir filter ise $\widehat{\mathcal{A}}$, βD in kapalı bir alt kümesidir.

(ii) $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \beta D$ ve $\mathcal{A} = \cap A$ ise $\mathcal{A}$, D de bir filter ve $\widehat{\mathcal{A}} = clA$ dır.

İspat. *(i) $p \in \beta D \setminus \widehat{\mathcal{A}}$ olsun. $B \in \mathcal{A} \setminus p$ alalım. Bu takdirde $\widehat{D \setminus B}$, p nin $\widehat{\mathcal{A}}$ yı kapsamayan bir komşuluğudur.*

(ii) $\mathcal{A}$, filterlar kümesinin bir kesişimidir, dolayısıyla bir filterdır. Ayrıca, her $p \in A$ için $\mathcal{A} \subseteq p$ dir dolayısıyla $A \subseteq \widehat{\mathcal{A}}$ dır böylece (i) den $clA \subseteq \widehat{\mathcal{A}}$ olur. $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq clA$ olduğunu görmek için $p \in \widehat{\mathcal{A}}$ ve $B \in p$ alalım. $\widehat{B} \cap A = \emptyset$ olsun. Bu takdirde her $q \in A$ için $D \setminus B \in q$ dur ve dolayısıyla $D \setminus B \in \mathcal{A} \subseteq p$ olur bu bir çelişkidir.

Tanım 29. *D bir küme ve $A \subseteq D$ olsun. Bu takdirde $A^* = \widehat{A} \setminus e[A]$ olarak tanımlanır.*

3.4 Stone-Čech Kompaktifikasyonu

Kompaktlık kavramını ilk olarak Fréchet (Fréchet, 1906) kullanmıştır. Daha sonra sonlu arakesit özelliğine sahip olan kapalı kümeler ailesi ile kompaktlık kavramı 1908 de Riesz tarafından incelenmiştir. Alexandroff ve Urysohn (Alexandroff ve Urysohn, 1924) kompakt kümeyi tanımlamıştır. Sonrasında Tychonoff (Tychonoff, 1930) herhangi bir sayıda kompakt uzayın kartezyen çarpımının da kompakt uzay olduğunu göstermiştir. Bourbaki (Bourbaki, 1940) Heine-Borel özelliğine karşılık gelen bikompaktlık kavramını ele almıştır.

$\mathbb{R}$ deki kapalı ve sınırlı alt kümelerin sahip olduğu özelliklere benzer özelliğe genel topolojik uzayların sahip olup olmadığı sorusu, kompaktlık kavramına işaret etmektedir. $\mathbb{R}$ deki kapalı küme kavramına karşılık olarak genel topolojik uzaylarda kapalı alt küme kavramı vardır. Fakat $\mathbb{R}$ deki sınırlı küme kavramının genel topolojik uzaylarda bir karşılığı yoktur. Çünkü her topolojik uzayda bir metrik tanımlamak mümkün olmayabilir. Topolojik uzaylarda $\mathbb{R}$ deki sınırlılık kavramıyla ile benzer özellik gösteren kompaktlık kavramı mevcuttur.

$\mathbb{R}$ de $[a, b]$ tipindeki kapalı ve sınırlı aralıklar üzerinde tanımlı reel değerli bütün sürekli fonksiyonlar maksimum ve minimum değerlerini bu aralıklar üzerinde alırlar. Heine-Borel teoreminden dolayı bu aralıkların açık kümelerden oluşan her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Kapalı ve sınırlı aralıkların bu özelliği kullanılarak herhangi bir topolojik uzayda kompaktlık kavramı tanımlanabilir.

Matematikte bazen çalışılan uzay yeterli olmayabilir ve verilen topolojik bir uzay bazı durumlarda kompakt olmayabilir. Bu durumda verilen uzay, kompakt bir uzayın bir alt uzayına homeomorf kılınabilir. Bu konuyla ilgili analiz ve geometride somut örnekler vardır.

$x^2 = 2$ denkleminin çözümü, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi üzerinde yoktur. Ancak $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesine $\pm\sqrt{2}$ irrasyonel sayılarının eklenmesi ile yani, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin genişlemesiyle çözüm mümkün olur.

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem üzerinde tanımlı kompleks analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun $z \to \infty$ için değerlerine bakılırken, $\mathbb{C}$ kompleks düzlem Riemann küresinin bir alt uzayı olarak ele alınır. Riemann küresinin kuzey kutbu, ”∞” notasyonu ile gösterilen ve ”ideal nokta” olarak adlandırılan noktaya karşılık getirilerek, Riemann küresi ile

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}^*$$

kümesi arasında bire bir eşleme yapılmış olur. Bu ise $f(z)$ fonksiyonunun ”∞” noktasında nasıl davranığını gösterir.

Kompaktlaştırma kavramının ana fikri, verdiğimiz örneklerde bahsedildiği üzere, verilen topolojik uzayın genişlemesidir. Bu konudaki çalışmalar 1924 de Tietze nin makalesinde kullandığı ”bir nokta kompaklaştırması” kavramı ile başlamıştır. Aynı tarihte Alexandroff ve Urysohn, kompaktlaştırmayı ilk önce sayılabilir kompakt uzayların genişlemesi olarak düşünmüşlerdir. Daha sonra Tychonoff (Tychonoff, 1930) tamamen düzenli uzaylarda kompaktlaştırma üzerine çalışmıştır. 1937 yılında Tychonoff un çalışmalarını Stone ve Čech (Stone, 1937; Čech, 1937) daha da geliştirmiştir. Kompaktlaştırma konusundaki çalışmalar Freudenthal, 1949 da Myskis, Kelley (Kelley, 1955), 1957 de Wagner ve 1961 de ise Kowalsky (Kowalsky, 1961) ile devam etmiş ve halen devam etmektedir.

Burada βD in D ayrık uzayının Stone-Čech Kompaktifikasyonu olduğunu göstereceğiz. Burada geçen tüm topolojik uzaylar Hausdorff olarak alınmıştır.

Tanım 30. *(X, τ) uzayı hem bir $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayı hem de bir T_1-uzayı ise (X, τ) uzayına tamamen regüler bir uzay veya Tychonoff uzayı denir.*

Şimdi kompaktlaştırma uzayının ne anlama geldiğine bakalım.

X yerel kompakt olması gerekmeyen herhangi bir Tychonoff uzayı olsun. X uzayını yoğun bir alt uzay kabul eden herhangi bir $Y(\supseteq X)$ kompakt T_2-uzayına X uzayının bir kompaktifikasyonu denir. Eğer X kompakt ise, $X \subseteq Y$ alt kümesi Y Hausdorff uzayında da kompakttır. Böylelikle kapalıdır ve $Y \setminus X$ tümleyen kümesi Y uzayında açıktır. Üstelik $(Y \setminus X) \cap X = \emptyset$ olduğundan eğer $Y \setminus X \neq \emptyset$ olsaydı X alt uzayının Y uzayında yoğun olamayacağı gözlenerek zorunlu olarak $Y \setminus X = \emptyset$ yani $X \subseteq Y \subseteq X$ olduğu bulunur. Kısacası kompakt bir T_2-uzayının birircik kompaktifikasyonunun kendisi olduğu anlaşılır. X uzayının herhangi bir Y kompaktifikasyonu bir T_4-uzayı ve böylelikle bir $T_{3\frac{1}{2}}-$uzayı olacağından, X zorunlu olarak bir Tychonoff uzayıdır. Demek ki Tychonoff olmayan bir uzayın kompaktifikasyonu var olamaz (tanımlanamaz). Yerel kompakt bir Hausdorff uzayının en ünlü kompaktifikasyonu Aleksandroff tek nokta konpaktifikasyonudur. Tychonoff uzaylarının bir başka kompaktifikasyonu ise Stone-Čech Kompaktifikasyonudur.

Tanım 31. *(Ergun, 2014) κ sonsuz bir nicel sayı ve I kısaca $([0,1], \mathbb{R}^1_{[0,1]})$ alt uzayını göstermek üzere I^κ çarpım uzayına Tychonoff kübü denir.*

Tanım 32. *(Ergun, 2014) X normal bir uzay ve K_1 ve K_2 kümeleri bu uzayda kapalı ve ayrık olsunlar. Her $x \in K_1$ için $f(x) = 0$, her $x \in K_2$ için $f(x) = 1$ ve $f(X) \subseteq [0,1]$ koşullarını gerçekleyen sürekli $f : X \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonuna X uzayında K_1 ve K_2 ayrık kapalı küme çiftine karşılık tanımlanmış bir Urysohn fonksiyonu denir.*

Tanım 33. *(Ergun, 2014) $I = [0,1]$ aralığı üzerinde $\mathbb{R}^1$ uzayından edinilen alt uzay topolojisi tanımlansın. X Tychonoff uzayında farklı noktaları ve noktalarla onları içermeyen kapalı kümeleri $C(X,I)$ elemanı olan Urysohn fonksiyonları ile ayırdığımızı ve her bir $f \in C(X,I)$ ve her bir $x \in X$ için $f(x) \in I$ nin gerçeklendiğini unutmadan her $x \in X$ için*

$$h_X(x) = \{f(x)\}_{f \in C(X,I)} \in \prod_{f \in C(X,I)} I_f = I^{C(X,I)}$$

biçimindeki $h_X : X \longrightarrow I^{C(X,I)}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Tychonoff teoremi nedeniyle $I^{C(X,I)} = \prod_{f \in C(X,I)} I_f$ Tychonoff kübünün kompakt bir T_2 ve böylece kompakt bir T_4 uzayı olduğunu hatırlayarak $h_X(X)(\subseteq I^{C(X,I)})$ alt kümesinin bu kompakt uzaydaki kapanışı $cl_{I^{C(X,I)}}(h_X(X))$ kompakttır. İşte bu kompakt T_2 uzayına X uzayının Stone-Čech Kompaktifikasyon Uzayı denir. Genellikle βX ile ifade edilir. Yani

$$\beta X = cl_{I^{C(X,I)}}(h_X(X)) \subseteq I^{C(X,I)}$$

dir.

Tanımladığımız $h_X : X \longrightarrow h_X(X)$ fonksiyonu bir eşyapı fonksiyonudur. Gerçekten her bir $f \in C(X,I)$ için $\pi_f \circ h_X = f \in C(X,I)$ olduğundan h_X süreklidir. Ayrıca X bir

Tychonoff uzayı olduğundan $x_1 \neq x_2$ ve $x_1, x_2 \in X$ olduğunda $g(x_1) = 0 < 1 = g(x_2)$ ifadesini gerçekleyen en az bir $g \in C(X, I)$ vardır. Böylece $\pi_g(h_X(x_1)) \neq \pi_g(h_X(x_2))$ den $h_X(x_1) \neq h_X(x_2)$ bulunur. Kısacası h_X birebirdir ayrıca açıktır ve örtendir ve bu nedenle bir eşyapı fonksiyonudur. Topolojide X ile topolojik kopyası $h_X(X)$ arasında hiç bir ayrım yapılmaz ve dikkat edilirse $h_X(X)$ kopya uzayı $I^{C(X,I)}$ Tychonoff kübündeki kapanışı olan $cl_{I^{C(X,I)}}(h_X(x)) = \beta X$ için yoğun bir alt uzaydır. $\beta X = cl_{\beta X}(h_X(X))$ dir ve X Tychonoff uzayının kopyası $h_X(X)$ bu kompakt ve Hausdorff βX uzayında yoğundur.

Ayrıca X uzayından herhangi bir kompakt ve Hausdorff Y uzayına tanımlanan herhangi bir sürekli $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunun $f^\beta : \beta X \longrightarrow Y$ gibi tek türlü belirli bir sürekli genişlemesi vardır. Gerçekten f sayesinde sürekli bir $F : I^{C(X,I)} \longrightarrow I^{C(Y,I)}$ fonksiyonu

$$F(\{t_g\}_{g \in C(X,I)}) = \{t_{h \circ f}\}_{h \in C(Y,I)} \in I^{C(Y,I)}$$

biçiminde tanımlansın. Dikkat edilirse her bir $h \in C(Y, I)$ için $h \circ f \in C(Y, I)$ olur. Böylelikle $I^{C(X,I)}$ kübünün $\{t_g\}_{g \in C(X,I)}$ noktasının $t_{h \circ f} \in I$ dir. Bu nedenle $F : I^{C(X,I)} \longrightarrow I^{C(Y,I)}$ fonksiyonu iyi tanımlıdır. $h_Y : Y \longrightarrow I^{C(Y,I)}$ fonksiyonu $h_Y(y) = \{h(y)_{h \in C(Y,I)}\}$ eşitliğini gerçeklediğinden $F \circ h_X = h_Y \circ f$ dir. Çünkü her $x \in X$ için

$$F(h_X(x)) = F(\{g(x)\}_{g \in C(X,I)}) = \{(h \circ f)(x)\}_{h \in C(Y,I)} = h_Y(f(x)) = (h_Y \circ f)(x)$$

bulunur. Ayrıca her bir $h \in C(Y, I)$ için $\pi_h \circ F = h \circ f \in C(X, I)$ olduğundan tanımlanan F fonksiyonu süreklidir. Böylece

$$F(\beta X) = F(cl_{I^{C(X,I)}}(h_X(X)) \subseteq cl_{I^{C(Y,I)}} F(h_X(X)) \subseteq cl_{I^{C(Y,I)}}(h_Y(f(X))) \subseteq cl_{I^{C(Y,I)}}(h_Y(Y)) = \beta Y$$

dir. Dolayısıyla $F(\beta X) \subseteq \beta Y = Y$ sonucu bulunur. O halde $(F \mid \beta X) \circ h_X$ sonucu bulunmuştur. Aranılan genişleme fonksiyonunu $f^\beta = h_Y^{-1} \circ (F \mid \beta X)$ biçiminde tanımlarsak

$$f^\beta \circ h_X = h_Y^{-1} \circ (F \mid \beta X) \circ h_X = f$$

bulunur. Diğer taraftan eşyapılı X ve $h_X(X)$ Tychonoff uzaylarının Stone-Čech kompaktifikasyonları da eşyapılı kısacası $\beta X \cong \beta(h_X(X))$ olduğundan X Tychonoff uzayının topolojik kopyası $h_X(X)$ uzayından herhangi bir kompakt Hausdorff Y uzayına tanımlanan herhangi bir f sürekli fonksiyonunun $f^\beta : \beta X(\cong \beta(h_X(X))) \longrightarrow Y$ gibi tek türlü biçimde belirli bir genişlemesi vardır. O halde $h_X(X)$ uzayının sahip olduğu bu özelliğe X uzayı da sahiptir.

Stone-Čech Kompaktifikasyonunun bir başka tanımına bakalım.

Tanım 34. *X bir topolojik uzay olsun. C kompakt bir uzay, φ, X in C içine bir gömmesi ve $\varphi[X]$, C de yoğun ise (φ, C) ikilisine X in bir kompaktifikasyonu denir.*

Herhangi bir tamamen regüler X uzayı Stone-Čech Kompaktifikasyonu olarak adlandırılan bir en geniş kompaktifikasyona sahiptir.

Tanım 35. *X bir tamamen regüler topolojik uzay olsun. X in bir Stone-Čech Kompaktifikasyonu aşağıdaki özelliklerle birlikte (φ, Z) ikilisidir.*

(i) Z bir kompakt uzaydır.

(ii) φ, X in Z içine bir gömmesidir.

(iii) $\varphi[X]$, Z de yoğundur.

(iv) Verilen herhangi kompakt Y uzayı ve herhangi bir sürekli $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu için $g \circ \varphi = f$ olacak şekilde sürekli bir $g : Z \longrightarrow Y$ fonksiyonu

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde vardır.

Not 2. *X bir tamamen regüler topolojik uzay ve (φ, Z) ve (τ, W), X in Stone-Čech kompaktifikasyonu olsunlar. Bu takdirde $\gamma \circ \varphi = \tau$ olacak şekilde bir $\gamma : Z \longrightarrow W$ homeomorfizmi vardır.*

Teorem 22. *(Hindman ve Strauss, 2010) D bir ayrık uzay olsun. $(e, \beta D)$, D nin Stone-Čech kompaktifikasyonudur.*

İspat. *Tanım 35 ın (i), (ii), (iii) şartları Teorem 20 ye dayandığından sadece (iv) şartını açıklayacağız.*

Y bir kompakt uzay, $f : D \longrightarrow Y$ ve her $p \in \beta D$ için $\mathcal{A}_p = \{cl_Y f[A] : A \in p\}$ olsun. Her $p \in \beta D$ için $\mathcal{A}_p$ sonlu kesişim özelliğine sahiptir ve dolayısıyla boştan farklı bir kesişime sahiptir. $g(p) \in \cap \mathcal{A}_p$ seçelim. Bu takdirde aşağıdaki diyagramı elde ederiz.

$$\begin{tikzcd} & \beta D \arrow[dr, "g"] & \\ D \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Diyagramın değişmeli ve g nin sürekli olduğunu göstermeliyiz.

İlk iddia için $x \in D$ olsun. $\{x\} \in e(x)$ dir. Dolayısıyla

$$g(e(x)) \in cl_Y f[\{x\}] = cl_Y [\{f(x)\}] = \{f(x)\}$$

olur. Bu da $g \circ e = f$ olmasını gerektirir.

g nin sürekli olduğunu görmek için $p \in \beta D$ ve U, Y de $g(p)$ nin bir komşuluğu olsun. Y regüler olduğundan $cl_Y V \subseteq U$ olacak şekilde $g(p)$ nin bir V komşuluğunu alalım ve $A = f^{-1}[V]$ olsun. $A \in p$ olduğunu iddia edelim fakat bunun yerine $D \setminus A \in p$ olduğunu düşünelim. Bu takdirde $g(p) \in cl_Y f[D \setminus A]$ dır ve V, $g(p)$ nin bir komşuluğu olduğundan $A = f^{-1}[V]$ nin aksine $V \cap f[D \setminus A] \neq \emptyset$ dir. Böylece $\widehat{A}$, p nin bir komşuluğudur. $g\left[\widehat{A}\right] \subseteq U$ oluğunu iddia edelim. Dolayısıyla $q \in \widehat{A}$ olsun ve $g(q) \notin U$ oluğunu iddia edelim. Bu takdirde $Y \setminus cl_Y V$, $g(q)$ nun bir komşuluğudur ve $g(q) \in cl_Y f[A]$ dır bu yüzden $(Y \setminus cl_Y V) \cap f[A] \neq \emptyset$ olur ve tekrar $A = f^{-1}[V]$ olması ile çelişir.

Teorem 22 de D nin Stone-Čech kompaktifikasyonunun βD olduğunu göstermiştik. Bu durum, bu uzay için βD notasyonunun kullanım amacını açıklar. Şöyle ki; D herhangi bir tamamen regüler uzay ise βD bu uzayın Stone-Čech kompaktifikasyonu için standart bir notasyondur. D yi genellikle βD in bir alt uzayı olarak görürüz.

Tanım 36. *X bir topolojik uzay $x \in X$ ve $(x_s)_{s\in D}$, X in noktalarının bir dizisi olsun. p, D de bir filter olmak üzere $x \in X$ in her U komşuluğu için $\{x_s : s \in A\} \subseteq U$ olacak şekilde bazı $A \in p$ ler varsa x e $(x_s)_{s\in D}$ nin bir $p - \lim$ i denir. Başka bir ifadeyle x in her U komşuluğu için $\{s \in D : x_s \in U\}$ kümesi p de ise x, $(x_s)_{s\in D}$ nin bir $p - \lim$ dir. Yani q, p den genişleyen bir filter ise $(x_s)_{s\in D}$ nin bir $p - \lim$ i aynı zamanda $(x_s)_{s\in D}$ nin bir $q - \lim$ idir.*

Tanım 37. *(D nin $e[D]$ ile Tanımlanması) Ultrafilterların noktaları tarafından üretilen principal ultrafilterlı D nin noktalarını tanımlamak için pratikte βD kullanımı yaygındır. Biz de bunu benimseyeceğiz. s yazdığımızda bazen $e(s)$ anlamına geldiğini hatırlatmaya nadiren ihtiyaç duyacağız.*

$e(s) \in \beta D$ olacak şekilde $s \in D$ yi tanımladıktan sonra $D \subseteq \beta D$ olduğunu iddia edip $D^* = \beta D \setminus e[D]$ yerine $D^* = \beta D \setminus D$ yazacağız. Dahası bu adlandırma ile Teorem 20 gereğince her $A \in \mathcal{P}(D)$ için $\widehat{A} = cl_{\beta D} A$ olur. Bu nedenle $\widehat{A}$ notasyonu ve $\overline{A}$ notasyonu aralarında değişebilir.

Şimdi Teorem 22 yı tekrar açıklayarak değişim sürecini anlatalım.

Teorem 23. *(Hindman ve Strauss, 2010) D sonsuz ayrık bir uzay olsun. Bu takdirde*

(i) βD kompakt bir uzaydır.

(ii) $D \subseteq \beta D$ dir.

(iii) D, βD de yoğundur.

(iv) Verilen herhangi bir kompakt X uzayı ve herhangi bir $f : D \longrightarrow X$ fonksiyonu için $\widetilde{f} \circ e = f$ olacak şekilde f nin bir Stone-Čech genişlemesi denilen sürekli bir $\widetilde{f} : \beta D \longrightarrow X$ fonksiyonu vardır.

İspat. *(iv) İspatın tekliği; $e[D]$, βD de yoğundur böylece $e[D]$ den bir Hausdorff uzaya giden her fonksiyon en çok bir sürekli genişlemeye sahiptir. İspatın varlığı için $p - \lim$ kavramından yararlanacağız. $(f(s))_{s \in D}$, X in noktalarının bir ailesi olsun. X kompakt Hausdorff uzayı olduğundan $p \in \beta D$ için*

$$\widetilde{f}(p) = p - \lim_{s \in D} f(s)$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz. $a \in D$ ve $p \in e(a)$ için $p - \lim_{s \in D} f(s) = f(a)$ olduğundan $\widetilde{f}$ fonksiyonu $\widetilde{f} \circ e = f$ eşitliğini sağlar. $\widetilde{f}$ fonksiyonu süreklidir dolayısıyla bazı $p \in \beta D$ ve $x = \widetilde{f}(p)$ için βS deki p nin bir $\widehat{A}$ komşuluğunu bulmak için U, x in X de bir komşuluğu olsun. x in kapanışı U da olsun ve x in bir V komşuluğunu alalım. $x = p - \lim_{s \in D} f(s) \in V$ oluğundan $\{f(s) : s \in A\} \subseteq V$ olacak şekilde bazı $A \in p$ ler vardır. Her $q \in \widehat{A}$ için $A \in q$ ve $\widetilde{f}(q) = q - \lim_{s \in D} f(s) \in cl\{f(s) : s \in A\} \subseteq cl(V) \subseteq U$ olur.

Tanım 38. *($A \subseteq D$ için $\widehat{A}$ ile βD nin Tanımlanması) $A \subseteq D$ olmak üzere p, D üzerinde bir ultrafilter ve $p \in \widehat{A}$ ise $\{B \cap A : B \in p\}$ de A da bir ultrafilterdır. Bu durumda $\beta A \subseteq \beta D$ olur.*

Önerme 6. *(Hindman ve Strauss, 2010) Herhangi bir $A \subseteq D$ için $\widehat{A}$, βA ya homeomorfiktir.*

İspat. *$\widehat{A}$ nın noktaları D üzerinde A tarafından kapsanan ultrafilterlardır ve βA nın noktaları ise A üzerindeki ultrafilterlardır. Buradan*

$$f(p) = p \cap \mathcal{P}(A)$$

ve

$$g(q) = \{B \subseteq D : B \cap A \in q\}$$

şeklinde tanımlı $f : \widehat{A} \longrightarrow \beta A$ ve $g : \beta A \longrightarrow \widehat{A}$ fonksiyonları sürekli ve birbirlerinin tersidir.

4. βS NİN YARIGRUP OLARAK İNCELENMESİ

4.1 βS de Çarpma İşlemi

βS nin p ve q noktalarının $p \cdot q$ çarpımını tanımlayacağız. Bu çarpımı genel olarak pq şeklinde ifade edeceğiz. Herhangi bir $s \in S$ için $l_s(x) = sx$ şekilde tanımlı bir $l_s : S \longrightarrow S$ sol öteleme işlemi vardır. $S \subseteq \beta S$ olduğundan l_s aynı zamanda S den βS kompakt Hausadorff uzayına giden bir fonksiyondur.

Tanım 39. *(Berlin, 2016d) (i) Keyfi bir $s \in S$ için $\widetilde{l_s} : \beta S \longrightarrow \beta S$ fonksiyonu $l_s : S \longrightarrow \beta S$ nin Stone-Čech genişlemesidir. Keyfi bir $q \in \beta S$ için $sq = \widetilde{l_s}(q)$ dur.*

(ii) Keyfi bir $q \in \beta S$ için $r_q(s) = sq$ şeklinde tanımlı sağ öteleme fonksiyonu $r_q : S \longrightarrow \beta S$ olsun ve $\widetilde{r_q} : \beta S \longrightarrow \beta S$ fonksiyonu $r_q : S \longrightarrow \beta S$ fonksiyonunun Stone-Čech genişlemesi olsun. Keyfi bir $p \in \beta S$ için $pq = \widetilde{r_q}(p)$ olur.

Keyfi bir $p \in \beta S$ için $\lambda_p(q) = pq$ olacak şekilde $\lambda_p : \beta S \longrightarrow \beta S$ tanımlanır. Benzer biçimde keyfi bir $q \in \beta S$ için $\rho_q(p) = pq$ olacak şekilde $\rho_q : \beta S \longrightarrow \beta S$ olur. Tanım 39 her $q \in \beta S$ için ρ_q sağ ötelemesinin ve her $s \in S$ için λ_s sol ötelemesinin sürekli olduğunu ifade eder.

Teorem 24. *(Berlin, 2016d) $s \in S$ ve $q \in \beta S$ için $s \cdot q = \widetilde{l_s}(q)$ işlemi altında βS, kompakt sağ topolojik yarıgruptur.*

İspat. *Herhangi $p, q, r \in \beta S$ için $p(qr) = (pq)r$ olduğunu ispatlayalım. $p, q, r \in S$ için $p = s \in S$, $q = t \in S$ ve $r = u \in S$ alalım.*

İspat için $p = s \in S$, $q = t \in S$ ve keyfi bir $r \in \beta S$ için eşitliğin her iki tarafı r nin sürekli fonksiyonlarıdır. Sol taraf $\lambda_s(\lambda_t(r))$ olarak ve sağ tarafı ise $\lambda_{st}(r)$ olarak yazılabilir. Bu fonksiyonlar S de çakışırlar ve dolayısıyla βS üzerinde de çakışıktırlar çünkü S, βS de yoğundur.

İspatın ikinci kısmı için $p = s \in S$, $r \in \beta S$ ve keyfi bir $q \in \beta S$ alalım.

$$s(qr) = \lambda_s(\rho_r(q))$$

ve

$$(sq)r = \rho_r(\lambda_s(q))$$

lerin her ikisi de S de ve dolayısıyla βS üzerinde de çakışan q nun sürekli fonksiyonlarıdır.

İspatın son kısmı için $q, r \in \beta S$ ve keyfi bir $p \in \beta S$ alalım. $p(qr) = \rho_{qr}(p)$ ve $(pq)r = \rho_r(\rho_q(p))$, S de çakışan p nin sürekli fonksiyonlarıdır. ■

Not 3. *(Berlin, 2016d) $s \in S$ ve $p, q \in \beta S$ olsun. Bu takdirde*

(i) $sq = q - \lim_{t\in S} st$ dir.

(ii) $pq = p - \lim_{s\in S} sq = p - \lim_{s\in S}(q - \lim_{t\in S} st)$ dir.

Önerme 7. *(Berlin, 2016d) $f : S \longrightarrow T$ ayrık yarıgruplar arasında bir homomorfizm olsun. Bu takdirde $\widetilde{f} : \beta S \longrightarrow \beta T$ de bir yarıgrup homomorfizmidir.*

İspat. *Eğer $p = s \in S$ ve $q = t \in S$ ise*

$$\widetilde{f}(p \cdot q) = \widetilde{f}(p) \cdot \widetilde{f}(q)$$

eşitliği geçerlidir. Eşitlik $p = s \in S$ ve herhangi bir $q \in \beta S$ için de geçerlidir çünkü s sol ötelemesi ve $\widetilde{f}(s)$ süreklidir. Ayrıca herhangi $p, q \in \beta S$ için q sağ ötelemesinin ve $\widetilde{f}(q)$ nun sürekliliğinden eşitlik sağlanır. ■

4.2 $p \cdot q$ daki Kümeler

Tanım 40. *(Berlin, 2016d) (i) $A \subseteq S$ ve $s \in S$ için $s^{-1}A = \{t \in S : st \in A\}$ tanımlayalım.*

(ii) $A \subseteq S$ ve $q \in \beta S$ için $A^{-q} = \{s \in S : s^{-1}A \in q\}$ alalım.

Eğer S yarıgrubu bir grup oluyorsa bu takdirde her $s \in S$ nin bir $s^{-1} \in S$ tersi vardır ve A, s^{-1} ile soldan çarpılırsa $s^{-1}A$ elde edilir. Ancak keyfi bir S yarıgrubunda genellikle elemanların bir tersleri yoktur; $s^{-1}A$ nın tanımından A nın s^{-1} ile çarpıldığı anlamı çıkmaz ancak $s^{-1}A$ ya ait herhangi bir $t \in S$ in var olması için $st \in A$ olmalıdır.

Önerme 8. *(Berlin, 2016d) $s \in S$, $q \in \beta S$ ve $A \subseteq S$ olsun. Bu takdirde $A \in sq$ olması için gerek ve yeter şart $s^{-1}A \in q$ olmasıdır.*

İspat. *:$A \in sq$ olduğundan $q - \lim_{t\in S} st \in \widehat{A}$ dır. $\widehat{A}$, βS nin kapalı-açık altkümesi olduğundan*

$$\{t \in S : st \in \widehat{A}\} \in q$$

olur ve $\widehat{A} \cap S = A$ olduğundan $s^{-1}A = \{t \in S : st \in \widehat{A}\} \in q$ olur. ■

Teorem 25. *(Berlin, 2016d) $p, q \in \beta S$ ve $A \subseteq S$ olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.*

(i) $A \in pq$

(ii) $A^{-q} \in p$

(iii) $\{s \in S : \{t \in S : st \in A\} \in q\} \in p$

(iv) $\bigcup\limits_{v \in V} v \cdot W_v \subseteq A$ *olacak şekilde* q *daki kümelerin bir* $(W_v)_{v \in V}$ *ailesi ve* $V \in p$ *vardır.*

İspat. $A \in pq$ *olması için* $pq = p - \lim_{s \in S} sq \in \widehat{A}$ *olması gerekir buradan*

$$\{s \in S : sq \in \widehat{A}\} = \{s \in S : s^{-1}A \in q\} = A^{-q} \in p$$

olur. Böylece (i), (ii) ye eşittir. (ii) ve (iii) nin eşitliği ise $s^{-1}A$ *ve* A^{-q} *nun tanımlarından anlaşılır. (iv) ise (iii) nin yeniden formüle edilmiş halidir.* ■

Not 4. *(Berlin, 2016d)* $A, B, C \subseteq S$ *ve* $p, q \in \beta S$ *olsun.*

(i) Eğer $A \in p$ *ve* $B \in q$ *ise bu takdirde* $AB \in pq$ *dur. Her* $v \in V$ *için* $V = A$ *ve* $W_v = B$ *alalım, bu takdirde* $AB = \bigcup\limits_{v \in V} v \cdot W_v \in pq$ *olur.*

(ii) (i) nin başka bir ifadesi ise $\widehat{A} \cdot \widehat{B} \subseteq \widehat{AB}$ *dir. Eğer* $A \cdot B \subseteq C$ *ise bu takdirde* $\widehat{A} \cdot \widehat{B} \subseteq \widehat{C}$ *dir. Eğer* T*,* S *nin bir altyarıgrubu ise bu takdirde* $\widehat{T}$*,* $\widehat{S} = \beta S$ *nin bir altyarıgrubudur.*

(iii) T, S *nin bir altyarıgrubu dolayısıyla* $\widehat{T}, \beta S$ *nin bir altyarıgrubu olsun.* $\widehat{T}$ *den* βT *ye bir* f *kanonik homeomorfizmi vardır.*

4.3 βS de Değişme Özelliğinin Yokluğu

Önerme 9. *(Berlin, 2016d)* $A = \{x_k y_n : k < n\}$ *ve* $B = \{x_k y_n : n < k\}$ *kümeleri ayrık olmak üzere* $(x_k)_{k \in \omega}$ *ve* $(y_n)_{n \in \omega}$ *dizilerinin* S *yarıgrubunda olduğunu varsayalım. Bu takdirde* βS *değişmeli değildir.*

İspat. $\{X_k : k \in \omega\}$ *ailesi sonlu kesişim özelliğine sahip olduğundan tüm* $k \in \omega$ *ler için* $X_k = \{x_n : n \geq k\}$ *kümelerini içeren* S *üzerinde bir* p *ultrafilterını belirleyebiliriz. Benzer şekilde* $Y_k = \{y_n : n \geq k\}$ *kümelerini içeren bazı* $q \in \beta S$ *ler belirleyelim. Bu takdirde Teorem 25 dan dolayı* $V = X_0 = \{x_k : k \in \omega\}$*,* p *de ve* $v = x_k \in V$ *için*

$$W_v = Y_{k+1} = \{y_n : n > k\}$$

q da olacak şekilde $\bigcup\limits_{v\in V} vW_v$ olarak yazılabildiğinden yukarıda tanımlanan A kümesi pq dadır. Benzer şekilde $B \in qp$ dir ve böylece $pq \neq qp$ olur. ■

4.4 İdempotentler

Tanım 41. *(Berlin, 2016a) (i) Herhangi X kümesi için $\mathcal{P}_f(X)$, X in boştan farklı sonlu tüm alt kümelerinin kümesidir.*

(ii) $(S,\cdot)$ yarıgrubu için $e \in \mathcal{P}_f(\omega)$ olsun ve $\overline{x} = (x_i)_{i\in\omega}$, S de sonsuz bir dizi olsun. $i \in e$ için p_e, x_i elemanlarının çarpımıdır. $i_1 < ... < i_k$ için $e = \{i_1, ..., i_k\}$ ise $p_e = x_{i_1}...x_{i_k}$ alalım.

(iii) $\overline{x} = (x_i)_{i\in\omega}$ dizisi verilsin. S nin $FP(\overline{x})$ ($\overline{x}$ üzerindeki sonlu çarpımların kümesi) altkümesi

$$FP(\overline{x}) = \{p_e : e \in \mathcal{P}_f(\omega)\}$$

şeklinde tanımlıdır. Yani $FP(\overline{x}) = \{x_0, x_1, x_0x_1, x_2, x_0x_2, x_1x_2, x_0x_1x_2, x_3, ...\}$ dir.

Benzer şekilde $I \subseteq \omega$ olacak şekilde $\overline{x}$ nin herhangi $\overline{y} = (y_i)_{i\in I}$ altdizisi için

$$FP(\overline{y}) = \{p_e : e \in \mathcal{P}_f(I)\}$$

olur.

(iv) S deki bazı sonsuz $\overline{x} = (x_i)_{i\in\omega}$ dizileri için $FP(\overline{x}) \subseteq A$ ise S nin bir A altkümesine bir IP-küme denir.

(v) $(S,+)$ değişmeli yarıgrubu için p_e yerine $s_e = \Sigma_{i\in e} x_i$ ifadesini kullanacağız ve benzer şekilde $FP(\overline{x})$ yerine $FS(\overline{x})$ ($\overline{x}$ üzerindeki sonlu toplamların kümesi) yazacağız. S deki bazı sonsuz $\overline{x}$ dizileri için $FS(\overline{x}) \subseteq A$ ise $A \subseteq S$ altkümesine bir IS-küme denir.

Tanım 42. *(Berlin, 2016a) Bir $(S,\cdot)$ yarıgrubunun altkümelerinin boştan farklı bir $\mathcal{C}$ ailesine çarpımsal aile denir. $\mathcal{C}$ sonlu kesişim özelliğine sahiptir, her $C \in \mathcal{C}$ ve her $c \in C$ için $c{\cdot}D \subseteq C$ olacak şekilde bazı $D \in \mathcal{C}$ ler vardır.*

Yardımcı Teorem 4. *(Berlin, 2016a) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(S)$ çarpımsal bir aile olsun. Bu takdirde*

$$T = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} \widehat{C} = \{p \in \beta S : \mathcal{C} \subseteq p\}$$

βS nin kapalı bir altyarıgrubudur.

İspat. *:T, kapalı kümelerin kesişimi olduğundan kapalıdır. $\mathcal{C}$ sonlu kesişim özelliğine sahip olduğundan T boştan farklıdır. Dolayısıyla $pq \in T$ olduğunu göstermek için T nin p ve q elemanlarını alalım. C, $\mathcal{C}$ nin herhangi bir elemanı olsun. $C \in pq$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{C}$ nin çarpımsal özelliklerinden faydalanarak her $c \in C$ için $c \cdot D_c \subseteq C$ olacak şekilde bazı $D_c \in \mathcal{C}$ leri alalım. Böylece $\bigcup\limits_{c\in C} c \cdot D_c \subseteq C$ olur. $C \in p$ ve her $c \in C$ için $D_c \in q$ olduğundan $C \in pq$ olur.* ■

Yardımcı Teorem 5. *(Berlin, 2016a) $A, B \subseteq S$, $s, t \in S$ ve $p, q \in \beta S$ için aşağıdakiler sağlanır.*

(i) $s^{-1}(A \cap B) = s^{-1}A \cap s^{-1}B$ dir.

(ii) $t^{-1}s^{-1}A = (st)^{-1}A$ dır.

(iii) $(A \cap B)^{-q} = A^{-q} \cap B^{-q}$ dır.

(iv) $A^{-pq} = (A^{-q})^{-p}$ dir.

İspat. *$s^{-1}A$, s ile soldan çarpma işlemi $\lambda_s : S \longrightarrow S$ altında A nın öngörüntüsü ve $\lambda_{st} = \lambda_s \circ \lambda_t$ olduğundan (i) ve (ii) açıktır. $s^{-1}A$ tanımı ve (i) den (iii) açıktır. (iv) için herhangi $s \in S$ için $s \in A^{-pq}$ iken $s \in (A^{-q})^{-p}$ olduğunu ve $s \in (A^{-q})^{-p}$ iken $s \in A^{-pq}$ olduğunu göstermeliyiz.*

$$s \in A^{-pq} \iff s^{-1}A \in pq \iff A \in s(pq)$$

ve

$$s \in (A^{-q})^{-p} \iff A^{-q} \in sp \iff A \in (sp)q$$

olur. ■

Tanım 43. *(Berlin, 2016a) $A \subseteq S$ ve $p \in \beta S$ için S nin A^* altkümesini*

$$A^* = A \cap A^{-p}$$

olarak tanımlayalım.

Yardımcı Teorem 6. *(Berlin, 2016a) A^* nın bir p idempotent ultrafilterına göre tanımlandığını varsayalım. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.*

(i) $A \in p \iff A^{-p} \in p \iff A^* \in p$

(ii) $A^{**} = A^*$

(iii) $A \in p$ ve L, A^* nın sonlu bir altkümesi olsun. Bu takdirde $W \subseteq A^*$ ve $L \cdot W \subseteq A^*$ olacak şekilde bazı $W \in p$ ler vardır.

İspat. *(i)* $A \in p = p \cdot p$ *ifadesi* $A^{-p} \in p$ *ye denktir.*

(ii) $B = A^*$, $A^{**} = B \cap B^{-p} = (A \cap A^{-p}) \cap (A^{-p} \cap (A^{-p})^{-p}) = A \cap A^{-p} = A^*$ *olur.* p *idempotent olduğundan* $(A^{-p})^{-p} = A^{-p}$ *oldu.*

(iii) (i) ve (ii) den $A^{**} = A^*$ *nın* p *nin bir elemanıdır. Her* $x \in L$ *ve* $x \in A^{**}$ *için* $xW_x \subseteq A^*$ *olacak şekilde bazı* $W_x \in p$ *ler vardır. Dolayısıyla* $W = A^* \cap \bigcap_{x \in L} W_x$ *olur.* ■

Teorem 26. *(Berlin, 2016a) Keyfi bir* $(S, \cdot)$ *yarıgrubunun herhangi bir* A *altkümesi için aşağıdakiler eşittir.*

(i) A, S *deki bir idempotent ultrafilter tarafından kapsanır. (Yani* $\widehat{A}$, βS *nin bir idempotentini kapsar.)*

(ii) A *bir* IP*-kümedir.*

(iii) A *nın* $\mathcal{P}(A)$ *kuvvet kümesi çarpımsal bir aileyi içerir.*

(iv) $\widehat{A}$, βS *nin kapalı bir altyarıgrubunu içerir.*

İspat. *(iv)* $\Longrightarrow$ *(i)* $\widehat{A}$ *daki* βS *nin kapalı bir* T *altyarıgrubu bir kompakt sağ topolojik yarıgruptur ve* T *de bir idempotent vardır dolayısıyla* $\widehat{A}$ *da bir idempotent içerir.*

(iii) $\Longrightarrow$ *(iv)* $\mathcal{C}$ *çarpımsal bir aile ve bazı* $D \in \mathcal{C}$ *ler için* $D \subseteq A$ *olduğunu varsayalım.* βS *nin* $T = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \widehat{C}$ *kapalı altyarıgrubu* $\widehat{D}$ *de ve dolaysıyla* $\widehat{A}$ *dadır.*

(ii) $\Longrightarrow$ *(iii)* A *bir* IP*-küme yani* $FP(\overline{x}) \subseteq A$ *olacak şekilde* $\overline{x} = (x_i)_{i \in \omega}$, S *de bir dizi olsun. Her* $n \in \omega$ *için* $\overline{x}$ *in* $(x_i)_{n \leq i \leq \omega}$ *dizisini düşünelim.* e, $\{n, n+1, n+2, ...\}$ *nin boştan farklı sonlu bir altkümesi olmak üzere* p_e *çarpımlarını içeren* A *nın*

$$C_n = FP((x_i)_{n \leq i \leq \omega})$$

altkümesini tanımlayalım. Dolayısıyla

$$\mathcal{C} = \{C_n : n \in \omega\}$$

$\mathcal{P}(A)$ *nın bir altailesidir. Her* n *için* $C_{n+1} \subseteq C_n$ *olduğundan* $\mathcal{C}$ *sonlu kesişim özelliğine sahiptir.* $\mathcal{C}$ *nin çarpımsal olduğunu görmek için bazı* $n \in \omega$ *leri ve bazı* $c \in C_n$ *leri düşünelim* $e \subseteq \{n, n+1, n+2, ...\}$ *sonlu ve boştan farklı olacak şekilde* $c = p_e$ *olsun. Bu takdirde* e *nin her elemanından büyük olan bazı* $m \in \omega$ *ler seçelim ve* $D = C_m \in \mathcal{C}$ *olduğunu düşünelim.* $c \cdot D \subseteq C_n$ *olduğunu gösterelim. Herhangi* $d \in D$ *için* $\varepsilon \subseteq \{m, m+1, m+2, ...\}$ *sonlu* *ve boştan farklı olmak üzere $d = p_\varepsilon$ alalım. Buradan $c \cdot d = p_e \cdot p_\varepsilon = p_{e \cup \varepsilon}$ olur. e nin her elemanı ε nun her elemanından küçük olduğundan son eşitlik sağlanır.*

(i) $\implies$ (ii) p, S de bir idempotent ultrafilter ve $A \in p$ olsun. $A^* \in p$, her $n \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$ için ve $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dizisi tümevarımsal iddiayı sağlayacak şekilde

$$FP(x_i)_{1 \leq i \leq n} \subseteq A^*$$

Dolayısıyla A^* ve A birer IP-kümedir. A^* nın keyfi bir x_1 elemanını seçelim. Dolayısıyla tümevarımsal iddia $n = 1$ için sağlanır. n için tümevarımsal iddiayı sağlayacak şekilde $x_1, ..., x_n$ verilsin. A^* nın sonlu $L = FP(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ altkümesini alırız ve $W \in p$ ve $L \cdot W \subseteq A^*$ olacak şekilde bir $W \subseteq A^*$ kümesini elde ederiz. x_{n+1}, W nin keyfi bir elemanı olsun. $n+1$ için tümevarımsal iddiayı göstermek için $p_e \in A^*$ olduğunu görmek amacıyla $\{1, ..., n+1\}$ kümesinin boştan farklı bir e altkümesini düşünelim. Eğer $e \subseteq \{1, ..., n\}$ ise bu takdirde $p_e \in A^*$, n için tümevarımsal ifadeyi doğrular. Eğer $e = \{n+1\}$ ise $p_e = x_{n+1} \in W \subseteq A^*$ olur. Aksi takdirde $\{1, ..., n\}$ nin boştan farklı bir ε için $p_e = p_\varepsilon \cdot x_{n+1}$ olurdu. Bu durumda $p_e \in L \cdot W \subseteq A^*$ olur. ■

4.5 İdealler

$(S, \cdot)$ yi keyfi bir ayrık yarıgrup olarak alacağız.

Tanım 44. *I, S nin bir altkümesi olsun.*

(i) I boştan farklı ve $SI \subseteq I$ ise yani $i \in I$ ve $s \in S$ için $si \in I$ ise I, S nin bir sol idealidir.

(ii) I boştan farklı ve $IS \subseteq I$ ise yani $i \in I$ ve $s \in S$ için $is \in I$ ise I, S nin bir sağ idealidir.

(iii) I, S nin hem sol hem de sağ ideali ise S nin iki taraflı idealidir.

Tanım 45. *S nin M deki her I sol ideali M ile çakışıyorsa S nin bir M sol ideali minimaldir.*

Yardımcı Teorem 7. *(Berlin, 2016b) L, S nin bir sol ideali olsun. Aşağıdakiler eşittir.*

(i) L bir minimal sol idealdir.

(ii) Her $x \in L$ için $Sx = L$ dir.

(iii) Her $x \in L$ için $Lx = L$ dir.

İspat. *(i) $\Longrightarrow$ (iii) L minimal ve $x \in L$ olsun. Bu takdirde L bir sol ideal olduğundan $Lx \subseteq L$ olur. Dahası Lx bir sol idealdir ve L nin minimalliğinden $Lx = L$ dir.*

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) $x \in L$ için L bir sol ideal olduğundan $Lx \subseteq Sx \subseteq L$ dir. (iii) den $Lx = L$ dir ve böylece $Sx = L$ olur.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) I, L de bir sol ideal olsun. $L \subseteq I$ olduğunu ispatlamalıyız. I nın keyfi bir x elemanını alalım. Bu takirde $x \in L$ ve dolayısıyla $x \in I$ ve I bir sol ideal olduğundan (ii) den $L = Sx \subseteq I$ olur. ■

Yardımcı Teorem 8. *(Berlin, 2016b) L, S nin bir minimal sol ideali olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir.*

(i) Her $s \in S$ için Ls aynı zamanda bir minimal sol idealdir.

(ii) L, S nin iki taraflı her idealinde bulunur.

İspat. *(i) Ls bir sol idealdir. x, Ls nin keyfi bir elemanı olsun. $(Ls)x = Ls$ olduğunu göstermeliyiz. $l \in L$ için $x = ls$ diyelim. Buradan $(Ls)x = (Ls)(ls) = (L(sl))s = Ls$ olup L nin minimalliğinden ve $sl \in L$ olduğundan son eşitlik sağlanır.*

(ii) I herhengi bir iki taraflı ideal olsun. Bu durumda $l \in L$ ve $i \in I$ için $il \in L \cap I$ olduğundan $L' = L \cap I$ boştan farklıdır. $L = L' \subseteq I$ olur. ■

Tanım 46. *(Berlin, 2016b) Herhangi S yarıgrubu için*

$$K(S) = \bigcup\{L : L,\ S \textit{ nin bir minimal sol ideali}\}$$

S nin tüm minimal sol ideallerinin birleşimi olsun. Dolayısıyla $K(S)$ nin boştan farklı olması için S nin en az bir tane minimal sol ideali olmalıdır. Bu durumda $K(S)$, sol ideallerin boştan farklı ailesinin bir birleşimi olduğundan bir sol idealdir.

Teorem 27. *(Berlin, 2016b) $K(S) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $K(S)$, S nin iki taraflı bir idealidir.*

İspat. *$K(S)$, S nin iki taraflı her idealinde bulunur. $K(S)$ nin bir sağ ideal olduğunu kanıtlamak için $s \in S$ alalım böylece $K(S) \cdot s \subseteq K(S)$ olur. $K(S) \cdot s = \bigcup\{L_s : L, S$ nin bir minimal sol ideali$\} \subseteq K(S)$ olur.* ■

Tanım 47. *(Berlin, 2016b) Aşağıdakiler sağlanıyorsa S bir abundant yarıgruptur.*

(i) S nin her sol ideali minimal bir ideal içerir.

(ii) S nin her minimal sol ideali bir idempotent eleman içerir.

Sonuç 4. *(Berlin, 2016b) Her kompakt sağ topolojik yarıgrup abundanttır.*

Tanım 48. *Bir S yarıgrubunun idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ üzerinde*

$$e \leq f \iff ef = fe = e$$

yapısını tanımlayalım. Bu yapı $E(S)$ üzerinde bir kısmi sıralamadır. Yani $e, f, g \in E(S)$ için $e \leq e$ olur, $e \leq f$, $f \leq e$ olduğundan $e = f$ olur. ve $e \leq f$, $f \leq g$ olduğundan $e \leq g$ olur. Buradan $ef = e$ ifadesi $Se \subseteq Sf$ ye eşittir.

Tanım 49. *(Berlin, 2016b) Bir S yarıgrubunda*

$$E_{\text{min}}(S) = \{e \in E(S) : (E(S), \leq) \text{ de } e \text{ minimal}\}$$

$$\mathcal{L} = \{L \subseteq S : L,\ S \text{ nin minimal bir sol ideali}\}$$

dir.

Teorem 28. *(Berlin, 2016b) S bir abundant yarıgrup ve $e \in E(S)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(i) Eğer $L \subseteq Se$ bir minimal sol ideal ise $f \leq e$ olacak şekilde $f \in L$ idempotenti vardır.

(ii) e nin bir minimal idempotent olması için gerek ve yeter şart bazı L minimal sol idealleri için $e \in L$ olmasıdır yani $e \in K(S)$ olmasıdır.

(iii) e nin bir minimal idempotent olması için gerek ve yeter şart $L = Se$ sol idealinin minimal olmasıdır.

(iv) $f \leq e$ olacak şekilde bazı f minimal idempotentleri vardır.

İspat. *(i) S abundant olduğundan $\varepsilon \in L \cap E(S)$ seçelim. Bu takdirde iddiamız için $f = e\varepsilon$ alalım. İlk olarak L bir sol ideal olduğundan $f \in L$ dir. Daha sonra $\varepsilon \in L \cap E(S)$ olduğundan $\varepsilon e = \varepsilon$ alalım. $s \in S$ olacak şekilde $\varepsilon = se$ olsun. Böylece $\varepsilon e = see = se = \varepsilon$ olur. $f^2 = e\varepsilon e\varepsilon = e\varepsilon\varepsilon = e\varepsilon = f$ olduğundan f idempotettir. Son olarak $ef = ee\varepsilon = e\varepsilon = f$ ve $fe = e\varepsilon e = e\varepsilon = f$ olur. Dolayısıyla $f \leq e$ dir.*

(ii) e nin bir minimal idempotent olduğunu varsayalım. Bazı $L \in \mathcal{L}$ ler için $L \subseteq Se$ olur. (i) den $f \leq e$ olacak şekilde $f \in L \cap E(S)$ alalım. Bu takdirde e nin minimalliğinden $f = e$ olur ve böylece $e \in L$ dir. Tersine $L \in \mathcal{L}$ iken $e \in L$ olsun. e nin minimalliğini

ispatlamak için, $x = e$ olduğunu göstermek amacıyla $x \leq e$ özelliğinde $x \in E(S)$ alalım. $x \leq e$ olduğundan $Sx \subseteq Se$ olur. L nin minimalliğinden $L = Se = Sx$ olur. Dolayısıyla $s \in S$ için $e = sx$ olur. $x \leq e$ olduğundan $x = ex$ dir ve böylece

$$x = ex = sxx = sx = e$$

olur.

(iii) Eğer $e \in L$ ve $L \in \mathcal{L}$ ise bu takdirde $L = Se$ dir.

(iv) S abundant olduğundan ve (i) den $L \subseteq Se$ olacak şekilde $L \in \mathcal{L}$ ve $f \leq e$ olacak şekilde $f \in L \cap E(S)$ alalım bu takdirde (ii) den f minimaldir. ■

Sonuç 5. *Bir S abundant yarıgrubu için S nin minimal idempotentleri $K(S)$ dedir yani $E_{\min}(S) = E(S) \cap K(S)$ dir.*

4.6 Topolojik Dinamikler

S bir yarıgrup olmak üzere S üzerindeki dinamik sistemler βS kompakt sağ topolojik yarıgrubuyla bağlantılıdır. İlk olarak βS, S üzerindeki dinamik sistemlerdeki bazı kavramların açıklanması için gereklidir. Ayrıca βS, S üzerindeki bir dinamik sistem olarak görülebilir.

Tanım 50. *(Berlin, 2016c) $(S, \cdot)$ bir yarıgrup ve 1_S, S nin birimi yani her $x \in S$ için $1_S \cdot x = x \cdot 1_S$ olmak üzere $(S, \cdot, 1_S)$ üçlüsü bir monoidtir. Notasyonel olarak $(S, \cdot, 1_S)$ monoidi yerine kısaca $(S, \cdot)$ veya S ve 1_S yerine 1 kullanacağız.*

Not 5. *(Berlin, 2016c) $(\omega, +)$ birimi 0 olan bir monoid iken $(\mathbb{N}, +)$ bir monoid değildir. Her $(S, \cdot)$ yarıgrubu bir $(S^+, \cdot, i)$ monoidine genişletilebilir. Burada i, S de olmayan ve tüm $x \in S^+$ lar için $ix = xi = x$ olan bir elemandır.*

Tanım 51. *(Berlin, 2016c) S bir monoid olsun. S üzerinde bir dinamik sistem veya S-sistem aşağıdaki özelliklerle birlikte bir (X, μ) ikilisidir.*

(i) X boş olamyan bir Hausdorff uzaydır.

(ii) μ, S nin X üzerine bir etkisidir.

(iii) Her $s \in S$ için $m_s(x) = sx$ şeklinde verilen $m_s : X \longrightarrow X$ fonksiyonu süreklidir.

Not 6. *(Berlin, 2016c) (i) Her $\mu : S \times X \longrightarrow X$ fonksiyonu $s \in S$ için $m(s) = m_s$ olacak şekilde bir $m : S \longrightarrow X^X$ fonksiyonunu oluşturur. Tersine verilen herhangi bir*

$m : S \longrightarrow X^X$ fonksiyonundan $\mu(s,x) = m_s(x)$ olacak şekilde $\mu : S \times X \longrightarrow X$ fonksiyonu elde edilir.

X den X e giden tüm fonksiyonların id_X birimli $(X^X, \circ)$ yarıgrubunu hatırlayalım. μ nin X üzerinde S nin bir işlemi olabilmesi için $m : S \longrightarrow X^X$ fonksiyonunun bir monoid homomorfizmi olması gerekir yani $s, t \in S$ için $m(1_S) = id_X$ ve $m_{st} = m_s \circ m_t$ olmalıdır.

Bir X topolojik uzayı için X den X e giden tüm sürekli fonksiyonlardan oluşan $(X^X, \circ)$ in altyarıgruplarını $C(X)$ ile gösterelim. Bu takdirde (X, μ) in S üzerinde bir dinamik sistem olması için X kompakt Hausdorff uzay ve $m : S \longrightarrow X^X$ fonksiyonunun S den $C(X)$ e giden bir monoid homomorfizmi olması gerekir.

(ii) $(\omega, +)$ monoidi üzerindeki dinamik sistemlere ayrık denir.

(iii) X bir kompakt Hausdorff uzay ve $t : X \longrightarrow X$ sürekli bir fonksiyon olsun. $n \in \omega$ için t nin n. iterasyonu t^n ile gösterilir yani

$$t^n = \underbrace{t \circ ... \circ t}_{n \text{ tane}}$$

dir ve $t^0 = id_X$ olur. $t^{n+m} = t^n \circ t^m$ olduğundan $n \cdot x = t^n(x)$, X ile bir ayrık dinamik sistem belirtir.

(iv) Tersine her (X, μ) ayrık dinamik sistemi bu yolla oluşur. Yani $t(x) = 1 \cdot x$ şeklinde tanımlı $t : X \longrightarrow X$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu takdirde her $n \in \omega$ ve $x \in X$ için

$$n \cdot x = (1 + ... + 1) \cdot x = (t \circ ... \circ t)(x) = t^n(x)$$

dir.

(v) Böylece X uzayıyla oluşan ayrık dinamik sistemler genellikle (X, t) ikilileriyle ifade edilir ve $t : X \longrightarrow X$ süreklidir.

(vi) X bir kompakt Hausdorff uzay ve S, $C(X)$ in bir alt monoidi olsun. $s \in S$ ve $x \in X$ için $s \cdot x = s(x)$ olacak şekilde X, S üzerinde bir dinamik sistem belirtir.

Tanım 52. *(Berlin, 2016c) X, S üzerinde bir dinamik sistem olsun.*

(i) Eğer her $y \in Y$ ve $s \in S$ için $sy \in Y$ oluyorsa yani $\bigcup\limits_{s \in S} m_s[Y] \subseteq Y$ ise X in bir Y altkümesine invaryant denir. Eğer Y invaryant ise ,m_s fonksiyonu sürekli olduğundan, Y nin X deki topolojik kapanışı $cl_X(Y)$ de invaryanttır.

(ii) $Y \subseteq X$ *olmak üzere eğer* Y *boştan farklı, topolojik olarak kapalı ve invaryant ise, bu takdirde* Y, X *in* S *ye göre bir altsistemi veya* S*-altsistemidir.*

Tanım 53. X, S *üzerinde bir dinamik sistem ve* $x \in X$ *olsun.*

(i) X *deki* x *in* $(S$-$)$ *orbiti*

$$orb(x) = \{sx : s \in S\}$$

kümesidir. Bu küme x *i içeren* X *in en küçük invaryant altkümesidir.* $x = 1_S x \in orb(x)$ *dir.*

(ii)

$$\overline{x} = cl_X \, orb(x)$$

kümesi $x \in X$ *in orbit kapanışıdır ve* x *i içeren* X *in en küçük altsistemidir.*

(iii) Eğer $x \in X$ *için* $Y = \overline{x}$ *ise* X *in* Y *altsistemine basitçe üretilmiş denir.*

(iv) X *in bir* M *altsistemi olmak üzere eğer* M *nin her altsistemi* M *ye denk geliyorsa,* M *minimaldir.*

(v) $U \subseteq X$ *ve* $s \in S$ *için* $s^{-1}U = \{x \in X : sx \in U\}$ *dur.*

Önerme 10. *(Berlin, 2016c)* S *üzerindeki her* X *dinamik sistemi için aşağıdaki ifadeler eşittir.*

(i) X *bir minimal* S*-sistemdir.*

(ii) Her $x \in X$ *için* x *in* $\overline{x}$ *orbit kapanışı* X *dir.*

(iii) Her $x \in X$ *için* x *in orbiti* X *in yoğun bir altkümesidir.*

(iv) X *in boştan farklı her* U *açık altkümesi için* $X = \bigcup\limits_{s \in e} s^{-1}U$ *olacak şekilde* S *nin sonlu bir* e *altkümesi vardır.*

İspat. *(i) ve (ii) eşittir çünkü herhangi bir* x *noktasının orbit kapanışı* X *in bir altsistemidir ve aksine* X *in her altsistemi bir orbit kapanışını içerir. (ii) ve (iii) nin eşitliği açıktır. (iii) den yola çıkarsak her* $x \in X$ *ve boştan farklı her* $U \subseteq X$ *açığı için* $sx \in U$ *olacak şekilde bazı* $s \in S$ *ler vardır. Yani boştan farklı her* U *açığı için* $X = \bigcup\limits_{s \in e} s^{-1}U$ *olur.* X *kompakt olduğundan ve* $s^{-1}U$ *kümesi açık olduğundan bazı sonlu* $e \subseteq S$ *ler için* $X = \bigcup\limits_{s \in e} s^{-1}U$ *sağlanır.* ■

4.7 βS Dinamik Sistemi

Keyfi bir $(S, \cdot, 1_S)$ monoidini ve bu monoidin Stone-Čech kompaktifikasyonu olan βS yi düşüneceğiz. βS nin 1_S birimli bir monoid olduğunu hatırlayalım.

Tanım 54. *(Berlin, 2016c) S üzerine bir dinamik sistemde aşağıdaki şekilde βS elde edelim. S bir altmonoid olmak üzere βS nin bir (kompakt sağ topolojik) monoid olduğunu biliyoruz. Her $s \in S$ ve her $p \in \beta S$ için $sp \in \beta S$ çarpımı tanımlıdır. $\mu(s,p) = sp$ olacak şekilde $\mu : S \times \beta S \longrightarrow \beta S$ tanımlayalım. Genellikle $\mu(s,p)$ için sp yazacağız. S üzerinde dinamik bir sistem için tüm gereksinimler tamamlandı. Yani Bir $s \in S$ sabiti ile soldan çarpım βS üzerinde süreklidir, tüm $p \in \beta S$ için $1_S p = p$ sağlanır ve $s(tp) = (st)p$, βS üzerinde çarpmanın birleşme özelliğini verir.*

Not 7. *(Berlin, 2016c) (i) $p \in \beta S$ için p nin orbiti orb$(p) = \{sp : s \in S\} = S \cdot p$ dir. βS de p ile sağdan çarpmanın sürekliliğinden p nin orbit kapanışı $\overline{p} = \beta S \cdot p$ dir. Böylece βS nin basit olarak üretilen altsistemi βS yarıgrubunun basitçe üretilmiş $\beta S \cdot p$ (kapalı) sol idealleridir. Daha genel olarak βS nin S-altsistemleri βS nin topolojik olarak kapalı sol idealleridir.*

(ii) βS nin minimal alt sistemleri βS yarıgrubunun minimal sol idealleridir. Yani $p \in K(\beta S)$ için idealler $\beta S \cdot p$ dir.

(iii) $1_S \in S \subseteq \beta S$ nin orbit kapanışı $\beta S \cdot 1_S = \beta S$ dir. Dolayısıyla βS dinamik sistemi basit olarak üretilmiştir.

Tanım 55. *(Berlin, 2016c) X ve Y, S monoidi üzerinde dinamik sistemler olsun. Her $x \in X$ ve $s \in S$ için $sx \in X$ ve $sf(x) \in Y$ olacak şekilde*

$$f(sx) = sf(x)$$

eşitliği var ve $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ise f ye bir S-homomorfizm veya basit olarak bir homomorfizm denir.

Teorem 29. *(Berlin, 2016c) S üzerindeki her X dinamik sistemi ve her $x \in X$ için 1_S i x e götüren bir tek $f = f_x : \beta S \longrightarrow X$, S-homomorfizmi vardır. f nin değer kümesi x in $\overline{x}$ orbit kapanışıdır. Özellikle basitçe üretilmiş her S-sistemi βS nin bir homomorfik görüntüsüdür.*

İspat. *Teklik için; $f, g : \beta S \longrightarrow X$ fonksiyonları 1_S yi x e götüren S-homorfizmler olsun. Bu takdirde $M = \{p \in \beta S : f(p) = g(p)\}$ kümesi 1_S yi içerir.*

$$f(s) = f(s1_S) = sf(1_S) = sx$$

ve benzer şekilde

$$g(s) = sx$$

olduğundan her $s \in S$, M dedir. Son olarak f ve g nin sürekliliğinden M kapalıdır. Böylece M, S nin βS deki kapanışıdır. Yani $M = \beta S$ ve $f = g$ dir.

f nin varlığı için; S nin βS kompaktifikasyonunun özelliklerini kullanalım. $h(s) = sx$ şeklinde verilen $h : S \longrightarrow X$ fonksiyonunu düşünelim ve h nin $f : \beta S \longrightarrow X$ Stone-Čech genişlemesini gösterelim.

$$f(1_S) = h(1_S) = 1_S x = x$$

olup tüm $p \in \beta S$ ve $s \in S$ için $f(sp) = sf(p)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$f(st) = h(st) = (st)x = x$$

ve

$$sf(t) = sh(t) = s(tx)$$

olduğundan eğer $p = t \in S$ ise ifadeyi göstermiş oluruz.

f nin değer kümesi için, S nin h altındaki görüntüsü $S \cdot x$, X S-sistemindeki x in orbitidir, dolayısıyla βS nin f altındaki görüntüsü x in orbit kapanışıdır. ■

h nin $\widetilde{h}$, Stone-Čech genişlemesi S-homomorfizm $f_x : \beta S \longrightarrow X$

$$f_x(p) = \widetilde{h}(p) = p - \lim_{s \in S} h(s) = p - \lim_{s \in S}(sx)$$

olarak yazılabilir.

Tanım 56. *(Berlin, 2016c) X bir S monoidi üzerinde bir dinamik sistem olsun.*

(i) Her $p \in \beta S$ ve $x \in X$ için

$$p \cdot x = px = p - \lim_{s \in S}(sx)$$

tanımlarız. Yani $f_x : \beta S \longrightarrow X$, S-homorfizmi 1_S i x götürecek şekilde $px = f_x(p)$ dir.

(ii) Her $p \in \beta S$ ve sabit $x \in X$ için belirlenen $px \in X$ sürekli bir fonksiyondur. Fakat her $x \in X$ ve sabit $p \in \beta S$ için belirlenen $px \in X$ genellikle sürekli değildir.

(iii) $\mu : \beta S \times X \longrightarrow X$ fonksiyonu $\mu(p, x) = px$ olacak şekilde X üzerinde S nin etkisi ile genişler. Bu X uzayı üzerinde βS yarıgrubunun bir etkisidir. Tüm $x \in X$ ler ve $p, q \in \beta S$ için eğer $p = s$ ve $q = t$, S nin elemanı ise $(pq)x = p(qx)$ sağlanır. $q \in \beta S$ ve $p = s \in S$ olması durumunda ve p, q nun βS nin keyfi elemanları olduğu genel durumda da süreklilikten dolayı sağlanır. Fakat bu etki $p \in \beta S$ için $x \mapsto px$ fonksiyonu genellikle sürekli olmadığından βS üzerinde bir X dinamik sistemi oluşturmaz.

(iv) X in βS uzayı olduğu özel durumda $\mu : \beta S \times X \longrightarrow X$ çarpımı βS üzerindeki yarıgrup çarpımına denk gelir. Çünkü $p, q \in \beta S$ için $\mu(p,q) = p - \lim_{s \in S}(sq)$, pq nun tanımına karşılık gelir.

(v) $\overline{x} = f_x[\beta S]$ ve $p \in \beta S$ için $f_x(p) = p \cdot x$ dir dolayısıyla

$$\overline{x} = \{p \cdot x : p \in \beta S\} = \beta S \cdot x$$

olur.

4.8 Cancellation(Sadeleştirme)

Tanım 57. *(Hindman ve Strauss, 2010) S bir yarıgrup olmak üzere $S^* = \beta S \setminus S$ dir.*

Teorem 30. *(Hindman ve Strauss, 2010) S bir yarıgrup olsun. S^* ın βS nin alt yarıgrubu olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $A \in \mathcal{P}_f(S)$ ve S nin herhangi sonsuz B alt kümesi için $\bigcap_{x \in F} x^{-1}A$ sonsuz olacak şekilde $F \in \mathcal{P}_f(B)$ nin var olmasıdır.*

İspat. *Gereklilik için; S nin sonlu bir A alt kümesi ve sonsuz bir B alt kümesi verilsin. Her $F \in \mathcal{P}_f(B)$ için $\bigcap_{x \in F} x^{-1}A$ nin sonsuz olduğunu varsayalım. Bu takirde $\{x^{-1}A : x \in B\}$ kümesi tüm sonlu kesişimlerinin sonsuz olması özelliğine sahiptir dolayısıyla Sonuç 3.14 den $\{x^{-1}A : x \in B\} \subseteq p$ olacak şekilde $p \in S^*$ seçebiliriz. $B \in q$ olacak şekilde $q \in S^*$ alalım. Bu takdirde $A \in q \cdot p$ ve A sonludur dolayısıyla Teorem 3.7 den $q \cdot p \in S$ olur ki bu bir çelişkidir.*

Yeterlilik için; $p, q \in S^*$ verilsin ve $q \cdot p = y \in S$ olduğunu varsayalım. (Yani $q \cdot p$, y tarafından üretilen principal ultrafilterdır.) $A = \{y\}$ ve $B = \{x \in S : x^{-1}A \in p\}$ olsun. Bu takdirde her $F \in \mathcal{P}_f(B)$ için $B \in p$ iken $\bigcap_{x \in F} x^{-1}A$ sonsuz olacak şekilde $\bigcap_{x \in F} x^{-1}A \in p$ vardır ki bu bir çelişkidir. ■

Tanım 58. *(Hindman ve Strauss, 2010) S bir yarıgrup ve $A \subseteq S$ olsun.*

(i) A nın bir sol çözüm kümesi olması için gerek ve yeter şart $A = \{x \in S : ux = v\}$ olacak şekilde S de u ve v elemanlarının olmasıdır.

(ii) A nın bir sağ çözüm kümesi olması için gerek ve yeter şart $A = \{x \in S : xu = v\}$ olacak şekilde S de u ve v elemanlarının olmasıdır.

(iii) S nin zayıf sol sadeleşebilen olması için gerek ve yeter şart S deki her sol çözüm kümesinin sonlu olmasıdır.

(iv) *S nin zayıf sağ sadeleşebilen olması için gerek ve yeter şart S deki her sağ çözüm kümesinin sonlu olmasıdır.*

(v) *S nin sadeleşebilen olması için gerek ve yeter şart S nin hem zayıf sol sadeleşebilen hem de zayıf sağ sadeleşebilen olmasıdır.*

Eğer S bir sağ sıfır veya bir sol sıfır yarıgrup ise bu takdirde βS de aynı özelliktedir ve bu durum βS nin cebiri hakkında ilginç bir bilgi değildir. Ancak S deki sadeleşme özelliklerinin varlığı βS de zengin bir cebirsel yapı oluşturur. Örneğin eğer S, κ kardinaliteli sonsuz sadeleşme özellikli bir yarıgrup ise bu takdirde βS, 2^{2^κ} tane ayrık sol ideali içerir. Bu bölümde βS in elemanlarının sağ veya sol sadeleşebilir olduğunu göreceğiz. Eğer S, κ kardinaliteli bir sadeleşebilir yarıgrup ise βS in 2^{2^κ} tane sağ sadeleşebilir elemanı içerdiğini göstereceğiz. Eğer aynı zamanda S nin sayılabilir oluğunu varsayarsak bu takdirde βS nin sağ sadeleşebilir elemanlarının kümesi, S^* ın bir yoğun açık alt kümesini içerir. S nin $\mathbb{N}$ olduğu veya sayılabilir bir grup olduğu durumda bu ifadeyi güçlendirebilir ve iki yönlü sadeleşebilen βS nin elemanlarının kümesinin S^* ın yoğun bir açık alt kümesini içerdiğini iddia edebiliriz. Bu bölümün sonunda S nin $\mathbb{N}$ veya sayılabilir bir grup olduğunu varsayacağız ve sağ sadeleşebilir bir eleman içeren S^* ın en küçük kompakt alt yarıgrubunu tartışacağız. Bu yarıgrupların zengin cebirsel bir yapılarının olduğunu göstereceğiz.

4.9 $\beta\mathbb{N}$ ve $\beta\mathbb{Z}$ de Sağ Sadeleşme

$(\mathbb{N}, +)$ ve $(\mathbb{Z}, +)$ yarı grupları için sağ sadeleşebilirliğin bazı ek özellikleri vardır.

Teorem 31. *(Hindman ve Strauss, 2010) $p \in \beta\mathbb{N}$ olsun. p nin $\beta\mathbb{N}$ e sağ sadeleşebilir olması için gerek ve yeter şart her $k \in \mathbb{N}$ için $\{x_n : x_n + k < x_{n+1}\} = \emptyset$ olacak şekilde $\mathbb{N}$ de artan bir $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ dizisinin var olmasıdır.*

İspat. *İspatın gereklillik kısmı için, bazı her $k \in \mathbb{N}$ için $-k + B \notin p$ olacak şekilde bazı $B \in p$ leri seçelim ve $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$, B yi artan bir şekilde sıralasın. Bu takdirde verilen bir $k \in \mathbb{N}$ için $B \setminus \bigcup_{i=1}^{k}(-i + B) \in p$ ve $B \setminus \bigcup_{i=1}^{k}(-i + B) \subseteq \{x_n : x_n + k < x_{n+1}\}$ olur.*

İspatın yeterlilik kısmı için, $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Verilen $k \in \mathbb{N}$ ler için $(-k + B) \cap \{x_n : x_n + k < x_{n+1}\} = \emptyset$ olup dolayısıyla $-k + B \notin p$ olur. ■

Örnek 15. *(Hindman ve Strauss, 2010) $\beta\mathbb{N}$ de sağ saddeleşebilir olan fakat $\beta\mathbb{Z}$ de sağ sadeleşebilir olmayan bir $p \in \beta\mathbb{N}$ elemanı vardır.*

İspat. *Her $k \in \mathbb{N}$ için $FS(\langle 3^t \rangle_{t=k}^{\infty}) \in q$ olacak şekilde bir $q \in \beta\mathbb{N}$ idempotenti seçelim. $p = -q + q$ alalım ve p nin $\beta\mathbb{N}$ de sağ sadeleşebilir olduğunu fakat $\beta\mathbb{Z}$ de sağ sadeleşebilir olmadığını göstereceğiz. ($-q \in \beta\mathbb{Z}$ nin $\{-A : A \in q\}$ tarafından üretilen bir ultrafilter olduğunu hatırlayalım.) $\mathbb{N}^*$, $\beta\mathbb{Z}$ nin bir sol idealidir dolayısıyla $p \in \mathbb{N}^*$ dır. $-q \in E(\beta\mathbb{Z})$ olduğunu kontrol etmek kolaydır ve böylece $-q + p = p$ dir şöyle ki $p \in \mathbb{Z}^* + p$ ve dolayısıyla p, $\beta\mathbb{Z}$ de sağ sadeleşebilir değildir.*

p nin $\beta\mathbb{N}$ de sağ sadeleşebilir olmadığını varsayalım. Bu takdirde bazı $z \in \mathbb{N}^*$ lar için $p = z + p$ olur. Yani $-q + q = z + (-q) + q$ olur.

$$A = \{\sum_{t\in F} 3^t - \sum_{t\in H} 3^t + k : k \in \mathbb{N},\ F, H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \min F > \max H + 1 \text{ ve } k < 3^{\min H - 1}\}$$

ve

$$B = \{\sum_{t\in F} 3^t - \sum_{t\in H} 3^t : F, H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \text{ ve } \min F > \max H + 1\}$$

olsun.

$A \in z + (-q) + q$ ve $B \in -q + q$ olduğunu göstermek kolaydır.

B nin elemanlarını onların üçlü temsillerinden tanımak kolaydır. Yani, $F, H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, $j = \min F > \max H + 1$, $i = \min H$ ve $\max F = l$ ise bu takdirde tüm

$$t \in \{i, i+1, ..., j-1\}$$

için $a_i = a_{j-1} = 2$, $a_t \in \{1, 2\}$ olacak şekilde ve $t \geq j$ iken $a_t \in \{0, 1\}$ olmak koşuluyla

$$\sum_{t\in F} 3^t - \sum_{t\in H} 3^t = \sum_{t=i}^{l} a_t 3^t$$

olur. Dolayısıyla $A \cap B = \emptyset$ olup bu bir çelişkidir. ■

Bir kompakt sağ topolojik S yarı grubunda $clK(S)$ nin bir sol ideal olması gerekmez. Diğer taraftan, eğer S bir ayrık yarı grup ise $clK(\beta S)$ nin her zaman βS nin hem sağ hem sol ideali olduğunu biliyoruz.

5. $\beta\mathbb{N}$ NİN İNCELENMESİ

5.1 $\mathbb{N}^*$ ın $\beta\mathbb{N}$ nin Cebirsel ve Topolojik Kopyasını İçermemesi

Burada $\mathbb{N}^*$ ın $\beta\mathbb{N}$ nin bir topolojik ve cebirsel kopyasını içerip içermediği sorusuna yanıt arayacağız. Herhangi sürekli $\varphi : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ homomorfizmi için $\varphi(\beta\mathbb{N})$ nin sonlu olduğunu göstereceğiz. Bu temel teoremimiz olacak. $\beta\mathbb{N}$ üzerinde, $\mathbb{N}$ deki toplamanın bir genişlemesi olan ve $\beta\mathbb{N}$ yi bir sağ topolojik yarıgrup yapan bir toplama işlemi tanımlanabilir. Burada $\beta\mathbb{N}$ nin elemanlarını $\mathbb{N}$ deki ultrafilterlar olarak göreceğiz.

$\mathbb{N}$ nin bir altkümesi için G, A nın sonlu bir altkümesi olmak üzere $\sum G$ formundaki tamsayıların kümesini $FS(A)$ ile gösterelim. Eğer A boş değilse $m(A)$, A kümesinin minimumunu gösterecektir. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için G, A nın $m(G) \geq n$ özelliğini sağlayan sonlu alt kümesi olmak üzere $\sum G$ formundaki tamsayıların kümesi $FS_n(A)$ ile gösterilecektir.

Eğer $S \in \beta\mathbb{N}$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $\xi_1 = \xi$ ve $\xi_{n+1} = \xi_n + \xi$ şeklinde bir (ξ_n) dizisi tanımlarız. Eğer (ξ_n) sonsuz ise S nin mertebesi sonsuzdur diyeceğiz.

İlk yardımcı teoremde Stone uzaylarının basit bir özelliğini ispatlayacağız. Stone uzayları her açık kümenin kapanışının açık olduğu kompakt T_2 uzaylarıdır.

Yardımcı Teorem 9. *X ve Y Stone uzayın sayılabilir ve*

$$\overline{X} \cap Y = X \cap \overline{Y}$$

özelliğini sağlayan iki alt kümesi ise

$$\overline{X} \cap \overline{Y} = \emptyset$$

dir.

İspat. *$X = (x_n)$ ve $Y = (y_n)$ olsun. Her x_n noktasının $Y \cap U_n$ olacak şekilde bir clopen U_n komşuluğu vardır. Benzer şekilde her y_n noktasının $X \cap V_n$ olacak şekilde bir clopen V_n komşuluğu vardır. Eğer $G_n = U_n \setminus \bigcup_1^n V_i$ ve $H_n = V_n \setminus \bigcup_1^n U_i$ ise*

$$(\bigcup_1^\infty G_n) \cap (\bigcup_1^\infty H_n) = \emptyset$$

dir.Dolayısıyla

$$\overline{\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} G_n} \cap \overline{\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} H_n} = \emptyset$$

olur. $X \subseteq \overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} G_n$ *ve* $Y \subseteq \overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} H_n$ *olduğundan* $\overline{X} \cap \overline{Y} = \emptyset$ *olur.*

Yardımcı Teorem 10. *X bir topolojik uzay olmak üzere $f : \beta\mathbb{N} \longrightarrow X$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $\varepsilon \in \beta\mathbb{N}$ için $f(\xi) = x$ ise x in her U açık komşuluğu için $\mathbb{N} \cap f^{-1}(U) \in \xi$ dur.*

İspat.

$$f\overline{(\mathbb{N} \cap f^{-1}(X \setminus U))} \subseteq X \setminus U$$

olduğundan

$$\xi \notin \overline{\mathbb{N} \cap f^{-1}(X \setminus U)}$$

olur. Ancak $\mathbb{N} \subseteq f^{-1}(U) \cup f^{-1}(X \setminus U)$ *ve dolayısıyla* $\xi \in \overline{\mathbb{N} \cap f^{-1}(U)}$ *olur.*

Yardımcı Teorem 11. *$k > 1$ bir pozitif tamsayı ve ϵ, $\mathbb{N}^*$ da bir idempotent olsun. Her $\lambda \in \overline{k\mathbb{N}}$ için $\mathbb{N}^*$ nin*

$$\lambda + \alpha + \epsilon = \alpha + \lambda + \epsilon$$

olacak şekilde bir α elemanı yoktur.

İspat. *:Aksini iddia edelim. Yani bir $\alpha \in \mathbb{N}^*$ sayısı*

$$\lambda + \alpha + \epsilon = \alpha + \lambda + \epsilon$$

olacak şekilde var olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı $a_n \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}$ olmak üzere $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n k^n$ şeklinde tek türlü yazılır. $\mathbb{N}$ den $\{0, 1, 2, ..., k-1\}^\omega$ ye tanımlı $f : n \longmapsto (a_n)$ foksiyonunun

$$f^\beta : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1, 2, ..., k-1\}^\omega$$

şeklinde bir genişlemesi vardır. Başka bir fonksiyona daha ihtiyacımız var. $m = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n k^n$ ise n sayısı $a_n \neq 0$ özelliğindeki ilk tamsayı olmak üzere

$$g(m) = a_n k^n$$

ve

$$c(m) = |\{n \in \mathbb{N} : a_n\}|$$

olarak tanımlayalım. Bu fonksiyonların $\beta\mathbb{N}$ den $\beta\mathbb{N}$ ye genişlemeleri vardır. Herhangi $\mu \in \beta\mathbb{N}$ ve herhangi $\upsilon \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \overline{k^n\mathbb{N}}$ için

$$g^\beta(\mu + \upsilon) = g^\beta(\mu)$$

ve

$$c^\beta(\mu + \upsilon) = c^\beta(\mu) + c^\beta(\upsilon)$$

olduğunu doğrulamak zor değildir. Her $m \in \mathbb{N}$ ve her $(a_n) \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}$ için $s_m((a_n))$, sonlu $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_m\}$ dizisini ifade edecek. Eğer $\mu \in \beta\mathbb{N}$ ise Teorem 10 gereğince $(s_m f)^{-1}(f^\beta(\mu)) \in \mu$ olur.

$f^\beta(\alpha) = (a_n)$ olsun. (a_n) nin hiçbir zaman 0 olmadığına dikkat edelim. Aksi takdirde eğer (a_n), 0 olsaydı bazı $m \in \mathbb{N}$ ve bazı $\beta \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{k^n\mathbb{N}}$ için $\alpha = m + \beta$ olurdu. Buradan her $\lambda \in \overline{k\mathbb{N}}$ için $\lambda + \beta + \epsilon = \beta + \lambda + \epsilon$ olurdu. Herhangi $\lambda \in \overline{\{k^n\}} \cap \mathbb{N}^*$ seçersek ve g^β uygularsak $\lambda = g^\beta(\beta)$ olur. Bu durum için $2^{\mathbb{C}}$ tane farklı seçim olduğunda mümkün değildir.

Aynı zamanda (a_n) nin hiçbir zaman $k-1$ olamayacağını da gösterebiliriz. Bunun için $n > n_0$ için $a_n = k-1$ olduğunu varsayalım.

$$\beta = -\sum_0^{n_0} a_n k^n + k^{n_0+1} + \alpha$$

alalım. $r > n_0$ özelliğinde bir tamsayı r olsun. $t \in (s_r f)^{-1}(a_n)$ ise

$$\sum_0^{n_0} a_n k^n + k^{n_0+1} + t \in k^{r+1}\mathbb{N}$$

olur. Böylece

$$\beta = \sum_0^{n_0} a_n k^n + k^{n_0+1} + \alpha \in \overline{k^{r+1}\mathbb{N}}$$

olur. Buradan $\beta \in \overline{k^n\mathbb{N}}$ bulunur.

$$m = k^{n_0+1} - \sum_0^{n_0} a_n k^n$$

olmak üzere $\alpha = m + \beta$ olduğundan önceki gibi bir çelişki elde edilir.

$$L = \{n \in \mathbb{N} : 0 < a_n < k-1\}$$

olsun. L nin sonlu olduğunu göstereceğiz. Bunun için sonsuz olduğunu varsayalım ve $\lambda \in \overline{\{k^n\}_{n \in L}} \cap \mathbb{N}^*$ olsun. Bu takdirde

$$c^\beta(\alpha + \lambda + \epsilon) = c^\beta(\alpha) + 1 + c^\beta(\epsilon)$$

olur. Ancak eğer $n \in L$ ve $r > n$ için $t \in (s_r f)^{-1}(a_n)$ ise

$$c(k^n + t) = c(t)$$

olur. Böylece $c^\beta(\lambda + \alpha) = c^\beta(\alpha)$ ve dolayısıyla $c^\beta(\lambda + \alpha + \epsilon) = c^\beta(\alpha) + c^\beta(\epsilon)$ olur ki bu $\lambda + \alpha + \epsilon = \alpha + \lambda + \epsilon$ varsayımımız ile çelişir. Buradan

$$M = \{n \in \mathbb{N} : a_n = k-1 \text{ ve } a_{n+1} = 0\}$$

sonsuz olmalıdır.

$\lambda \in \overline{\{k^n\}_{n\in M}} \cap \mathbb{N}^*$ *olsun. Böylece*

$$c^\beta(\alpha+\lambda+\epsilon) = c^\beta(\alpha) + 1 + c^\beta(\epsilon)$$

olur. Ancak eğer $n \in M$ *ve* $r > n$ *iken* $t \in (s_r f)^{-1}(a_n)$ *ise*

$$c(k^n + t) = c(t)$$

olur. Buradan

$$c^\beta(\lambda+\alpha) = c^\beta(\alpha)$$

olur. Böylece

$$c^\beta(\lambda+\alpha+\epsilon) = c^\beta(\alpha) + c^\beta(\epsilon)$$

olur. Bu bir çelişkidir.

Yardımcı Teorem 12. $\varphi : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *sürekli bir homomorfizm olsun. Eğer* α *ve* β, $\beta\mathbb{N}$ *de herhangi iki idempotent ise* $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ *olur. Dahası her* $x \geq m$, $x \in \mathbb{N}$ *için*

$$\varphi(x) = \varphi(x) + \varphi(\alpha)$$

olacak şekilde bir m *tamsayısı vardır.*

İspat. ϵ, $\beta\mathbb{N}$ *de herhangi idempotent olsun.*

$$\varphi(1) + \varphi(\epsilon) = \varphi(\epsilon) + \varphi(1)$$

$$\varphi(1) + \varphi(\epsilon) \in \overline{\mathbb{N} + \varphi(\epsilon)}$$

ve

$$\varphi(\epsilon) + \varphi(1) \in \overline{\varphi(\mathbb{N}) + \varphi(1)}$$

olduğundan Yardımcı Teorem 9 gereğince bazı $k \in \mathbb{N}$ *ler için* $k + \varphi(\epsilon) \in \varphi(\beta\mathbb{N})$ *veya bazı* $\mu \in \beta\mathbb{N}$ *ve bazı* $k \in \mathbb{N}$ *ler için*

$$\mu + \varphi(\epsilon) = \varphi(k) + \varphi(1)$$

olur.

Her $m \in \mathbb{N}$ *için* $km + \varphi(\epsilon) \in \varphi(\beta\mathbb{N})$ *ve böylece her* $\lambda \in \overline{k\mathbb{N}}$ *için*

$$\lambda + \varphi(\epsilon) \in \varphi(\beta\mathbb{N})$$

olurdu. O zaman $\lambda + \varphi(\epsilon)$ *ile* $\varphi(1)$ *değişmeli olacağından*

$$\lambda + \varphi(1) + \varphi(\epsilon) = \varphi(1) + \lambda + \varphi(\epsilon)$$

olurdu ki bu Yardımcı Teorem 11 ile çelişir.

Bu durumda ilk olasılık mümkün değildir. Dolayısıyla bazı $m \in \mathbb{N}$ ler için

$$\varphi(m) \in \beta\mathbb{N} + \varphi(\epsilon)$$

olur. $\mathbb{N}$ *deki her $x \geq m$ için $\varphi(x) \in \beta\mathbb{N} + \varphi(\epsilon)$ olur ve böylece her $\upsilon \in \mathbb{N}^*$ için $\varphi(\upsilon) \in \beta\mathbb{N} + \varphi(\epsilon)$ olur. Buradan her $\upsilon \in \mathbb{N}^*$ için $\varphi(\upsilon) = \varphi(\upsilon) + \varphi(\epsilon)$ bulunur.*

Böylece her $\varphi(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ idempotenti için $\varphi(\mathbb{N}^*) = \varphi(\mathbb{N}^*) + \varphi(\epsilon)$ olduğunu gösterdik. Eğer δ, $\varphi(\mathbb{N}^*)$ da bir idempotent ise $\varphi^{-1}(\delta)$ kompakt bir yarıgruptur ve bir idempotent içerir. Dolayısıyla bazı $\epsilon \in \mathbb{N}^*$ idempotentleri için $\delta = \varphi(\epsilon)$ dir. Buradan $\varphi(\mathbb{N}^*)$ kendisinin bir minimal sol idealidir ve böylece $\varphi(\mathbb{N}^*)$ nin her elemanı $\varphi(\mathbb{N}^*)$ de bir tek sol birime sahiptir. Ancak eğer α, $\mathbb{N}^*$ da herhangi bir idempotent ise

$$\varphi(\alpha) + \varphi(m) = \varphi(m) + \varphi(\alpha) = \varphi(m)$$

olur. Böylece φ ile $\mathbb{N}^*$ nın tüm idempotentlerini belirleyebiliriz.

Yardımcı Teorem 13. *$\varphi : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ sürkli bir fonksiyon olsun. $x \geq m$ özelliğindeki her $x \in \mathbb{N}$ için $\varphi(x) = \varphi(x + \alpha)$ olacak şekilde bir $\alpha \in \beta\mathbb{N} \setminus \varphi(\mathbb{N})$ elemanı ve bir m tamsayısı var olsun. Bu takdirde tamsayıların artan bir $(n_k)_{k=\{0,1,2,...\}}$ dizisini ve $k_1 < k_2 < ... < k_r$ iken*

$$\varphi(n_{k_1} + n_{k_2} + ... + n_{k_r}) \in W_{k_1} \setminus W_{k_1+1}$$

olacak şekilde $\varphi(\alpha)$ nın komşuluklarının kapalı-açık azalan bir $(W_k)_{k=\{0,1,2,...\}}$ dizisini tanımlayabiliriz.

İspat. *İlk olarak $n_0 = m$ ve $W_0 = \beta\mathbb{N}$ seçelim ve daha sonra $\varphi(n_0) \notin W_1$ olacak şekilde $\varphi(\alpha)$ nın clopen bir komşuluğunu seçelim. İstenilen özelliklere sahip $n_0, n_1, ..., n_k$ ve $W_0, W_1, ..., W_{k+1}$ kümeleri tanımlanmış olsun. $k_1 < k_2 < ... < k_r \leq k$ için*

$$\varphi(n_{k_1} + n_{k_2} + ... + n_{k_r} + n)$$

yi gözönüne alalım. n, α ya yakınsarken $\varphi(n_{k_1} + n_{k_2} + ... + n_{k_r} + n)$,

$$\varphi(n_{k_1} + n_{k_r}) \in W_{k_1} \setminus W_{k_1+1}$$

e yakınsar. Böylece $k_1 < k_2 < ... < k_r \leq k$ olmak üzere

$$\varphi(n_{k_1} + n_{k_2} + ... + n_{k_r} + n_{k+1}) \in W_{k_1} \setminus W_{k_1+1}$$

ve

$$\varphi(n_{k+1}) \in W_{k+1}$$

olacak şekilde $n_{k+1} > n_k$ *seçebiliriz.* $k_1 < k_2 < ... < k_r \leq k+1$ *ise* $\varphi(\alpha)$ *nın*

$$\varphi(n_{k_1} + n_{k_2} + ... + n_{k_r})$$

formunda hiç bir eleman içermeyen bir $W_{k+2} \subseteq W_{k+1}$ *şeklinde bir komşuluğunu seçebiliriz.*

Yardımcı Teorem 14. *Yardımcı Teorem 13 in şartları altında* $\mathbb{N}$ *nin* $\varphi(\overline{FS(B)}) \cap \varphi(\overline{FS(C)}) = \emptyset$ *özelliğini sağlayan sonsuz ve ayrık* B *ve* C *altkümeleri vardır.*

İspat. B *ve* C *yukarıdaki teoremde tanımlanan* (n_k) *dizisinin sonsuz ve ayrık altkümeleri olsun. Eğer* $x \in FS(B)$ *ise* $\varphi(x) \notin \varphi(\overline{FS(C)})$ *dir. Bunu kanıtlamak için* F, B *nin sonlu bir altkümesi olmak üzere* $x = \sum F$ *ve* $m(F) = n_k$ *olsun. Bu takdirde* $\varphi(x) \in W_k \setminus W_{k+1}$ *olur.* $y \in FS(C)$ *ise* C *nin bazı sonlu* G *altkümeleri için* $y = \sum G$ *dir. Eğer* $m(G) < n_k$ *ise* $\varphi(y) \notin W_k$ *olur. Eğer* $m(G) > n_k$ *ise* $\varphi(y) \in W_{k+1}$ *olur. Dolayısıyla*

$$\varphi(\overline{FS(C)}) \subseteq W_k \cup W_{k+1}$$

olup $\varphi(x) \notin \varphi(\overline{FS(C)})$ *olur.*

Benzer şekilde eğer $y \in FS(C)$ *ise* $\varphi(y) \notin \varphi(\overline{FS(B)})$ *olur. 9 gereğince*

$$\varphi(\overline{FS(B)}) \cap \varphi(\overline{FS(C)}) = \emptyset$$

olur.

Teorem 32. *Herhangi bir* $\varphi : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *sürekli homomorfizmi için* $\varphi(\beta\mathbb{N})$ *sonlu olmalıdır.*

İspat. *Eğer* $\varphi(\beta\mathbb{N})$ *sonsuz ise* $\varphi(\mathbb{N})$ *hiç bir idempotent içeremez. Dolayısıyla eğer* α, $\mathbb{N}^*$ *da bir idempotent ise Yardımcı Teorem 13 in şartları sağlanır. Böylece (Yardımcı Teorem 14 gereğince)* $\varphi(\overline{FS(B)}) \cap \varphi(\overline{FS(C)}) = \emptyset$ *özelliğine sahip* $\mathbb{N}$ *nin sonsuz ve ayrık* B *ve* C *alkümelerini seçebiliriz.* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\overline{FS_n(B)})$ *ve* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\overline{FS_n(C)})$ *boştan farklı yarıgruplardır. Dolayısıyla her biri bir idempotent içerir. Eğer* $\delta \in \cap\overline{FS_n(B)}$ *ve* $\epsilon \in \overline{FS_n(C)}$ *idempotentlerse* $\varphi(\delta) \neq \varphi(\epsilon)$ *ifadesi Yardımcı Teorem 14 ile çelişir.* ■

Sonuç 6. *Eğer* $\varphi : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *sürekli homomorfizm ise bazı* $m \in \mathbb{N}$ *ler için* $\varphi(\beta\mathbb{N}) \cong \mathbb{Z}_m$ *dir.*

İspat. $\varphi(\beta\mathbb{N})$ *sonlu bir devirli yarıgruptur.*

Sonuç 7. *Eğer* $\varphi : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *sürekli homomorfizm ise* $|\varphi^2(\beta\mathbb{N})| = 1$ *dir.*

İspat. $\varphi(\beta\mathbb{N}) \cong \mathbb{Z}_m$ *ve* $\varphi(1) = \xi$ *olduğunu varsayalım.* ξ_m *idempotent olduğundan* $m\mathbb{N} \in \xi$ *olur. Bunu gösterelim.* q_{m^2}, $\mathbb{N}$ *den* $\mathbb{Z}_{m^2}$ *üzerine kanonik dönüşümü olsun. Böylece* $q^\beta_{m^2}$ *bir homomorfizm olacaktır ve dolayısıyla* $q^\beta_{m^2}(\xi_m) = 0$ *olur.* $q^\beta_{2m^2}(\xi_m) = mq^\beta_{m^2}(\xi)$ *olduğundan* $mq^\beta_{m^2}(\xi_m) = 0$ *olur.* n *doğal sayısının* $mq^\beta_{m^2}(n) = 0$ *olması için gerek ve yeter şart* $n \in m\mathbb{N}$ *olmasıdır. Dolayısıyla* $m\mathbb{N} \in \xi$ *olur. Eğer* α, $\varphi(\beta\mathbb{N})$ *nin birimi ise her* $n \in m\mathbb{N}$ *için* $\varphi(n) = \alpha$ *olur. Böylece* $\varphi(\xi) = \alpha$ *olur.*

Sonuç 8. *Eğer $\xi \in \beta\mathbb{N}$ sonsuz mertebeli ise ξ, $\overline{\{\xi_n\}}$ nin hiç bir elemanıyla değişmeli değildir. Dolayısıyla sonsuz mertebeden hiç bir eleman $\beta\mathbb{N}$ nin herhangi kompakt altyarıgrubunun merkezinde olamaz.*

İspat. *$\varphi : n \longmapsto \xi_n$ fonksiyonu $\beta\mathbb{N}$ den $\overline{\{\xi_n\}}$ üzerine sürekli bir fonksiyona genişler. Eğer ξ, $\overline{\{\xi_n\}}$ nin her elemanıyla değişmeli olsaydıbu fonksiyon bir homomorfizm olurdu. Çünkü, eğer (m_α) ve (n_β), $\mathbb{N}$ de sırasıyla μ ve υ ye yakınsayan ağlar ise*

$$\begin{aligned}
\varphi^\beta(\mu+\upsilon) &= \lim_\alpha(\lim_\beta \varphi^\beta(m_\alpha+n_\beta)) \\
&= \lim_\alpha(\lim_\beta \varphi^\beta(n_\beta)+\varphi^\beta(m_\alpha)) \\
&= \lim_\alpha(\varphi^\beta(\upsilon)+\varphi^\beta(m_\alpha)) \\
&= \lim_\alpha(\varphi^\beta(m_\alpha)+\varphi^\beta(\upsilon)) \\
&= \varphi^\beta(\mu)+\varphi^\beta(\upsilon)
\end{aligned}$$

olur ve bu Yardımcı Teorem 9 ile çelişir.

Teorem 33. *$\xi \in \mathbb{N}^*$ olsun. ξ nin sağ sadeleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki özelliği sağlayan bir $X \in \xi$ olmasıdır.*

"Eğer X kümesi artan bir (x_n) dizisi olarak yeniden düzenlenirse her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\{x_n : x_{n+1} - x_n > k\} \in \xi$ olur. "

İspat. *Hiç bir $X \in \xi$ kümesinin bu özelliği sağlamadığını varsayalım. Bu durumda her bir $X \in \xi$ için X, artan (x_n) dizisi şeklinde düzenlenmiş olmak üzere*

$$\{x_n : x_{n+1} - x_n \leq k\} \in \xi$$

olacak şekilde pozitif bir k_x sayısı vardır.

$$\{x_n : x_{n+1} - x_n \leq k\} = \bigcup_{m=1}^{k_x} \{x_n : x_{n+1} - x_n = m\}$$

olduğundan

$$\{x_n : x_{n+1} - x_n = k_x\}$$

olduğunu varsayabiliriz.

$k_x + x_n = x_{n+1}$ olarak yazalım. Eğer x_n, ξ na yakınsıyorsa x_{n+1} de $k_x + \xi = \xi_x$ özelliğini sağlayan bir ultrafilterına yakınsar. ξ_x in ξ na yakınsadığını kabul edebiliriz. (k_x) netinin herhangi μ limit noktası $\mu + \xi = \xi$ eşitliğini sağlar. Dolayısıyla ξ sağ sadeleşebilir değildir.

Eğer ξ sağ sadeleşebilir değilse bazı $\mu \in \mathbb{N}^*$ için $\xi = \mu + \xi$ olur. Eğer $X \in \xi$ ise her $y \in Y$ için $\bigcup_{y \in Y}(y + X_y) \subseteq X$ olacak şekilde tanımlanmış bir $Y \in \mu$ ve bir $X_y \in \xi$ kümesi *vardır. X artan bir (x_n) dizisi olarak düzenlenmiş ve $y \in Y$ olsun. Eğer $x_n \in X \cap X_y$ ise $y + x_n \in X$ olur ve dolayısıyla $x_{n+1} - x_n \leq y$ olur. Bu nedenle*

$$\{x_n : x_{n+1} - x_n \leq y\} \in \xi$$

olur.

Not 8. *$\mathbb{N}^*$ ın sağ sadeleşebilir elemanlarının kümesi, $\mathbb{N}^* \setminus (\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*)$ kümesini ve böylece $\mathbb{N}^*$ nin yoğun bir açık altkümesini içerir. $\mathbb{N}^*$ ın sağ sadeleşebilir elemanlarının kümesi bir yarıgrup olduğundan açıktır. Böylece tümleyeni de minimal ideal içeren bir sağ idealdir.*

Not 9. *Boştan farklı ayrık ve sonlu $F, G \subseteq X$ için $\sum F \neq \sum G$ özelliğini sağlayan $\mathbb{N}$ nin sonsuz bir altkümesi X olsun. Eğer $\xi \in \overline{X} \cap \mathbb{N}^*$ ise $\overline{\{\xi_n\}}$ nin bir yarıgrup olmadığını biliyoruz. ξ nin sağ sadeleşebilir olduğunu göstermek kolaydır. Eğer $X = (x_n)$ ve $k \in \mathbb{N}$ ise $x_{n+1} - x_n = k$ ve $x_{m+1} - x_m = k$ eşitliklerinden $x_m + x_{n+1} = x_n + x_{m+1}$ olur ve buradan $m = n$ veya $m = n - 1$ veya $m = n + 1$ olur. Böylece $\{x_n : x_{n+1} - x_n = k\}$ sonludur ve ξ da değildir.*

Teorem 34. *Eğer $\xi \in \mathbb{N}^*$ sağ sadeleşbilir ise $\overline{\{\xi_n\}}$ bir yarıgrup değildir.*

İspat. *$\overline{\{\xi_n\}}$ nin bir yarıgrup olduğunu varsayalım. $X \in \xi$ elemanı, X artan bir (x_n) dizisi düzenlensin ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\{x_n : x_{n+1} - x_n > k\} \in \xi$ olsun. Her $r = 1, 2, ..., k$ için $n_1 < n_2 < ... < n_k$ ve*

$$\sum_{i=1}^{r-1} n_i < x_{n_r+1} - x_{n_r}$$

olmak üzere $x_{n_1} + x_{n_2} + ... + x_{n_k}$ toplamını düşünelim. Bu yazılış tek türlü olduğunu göstermek kolaydır. Eğer

$$x_{n_1} + x_{n_2} + ... + x_{n_k} = x_{m_1} + x_{m_2} + ... + x_{m_s}$$

yukarıdaki formda ise $n_k = m_s$ olur. Bunu göstermek için eğer $n_k > m_s$ ise

$$x_{n_k} - x_{m_s} \geq x_{m_s+1} - x_{m_s} > \sum_{i=1}^{s-1} x_{m_s}$$

olur ki bu bir çelişkidir.

S bu tür toplamların kümesi ve $m \in \mathbb{N}$ için S_m kümesi de bu türden ve "her bir $i = 1, 2, ..., k$ için $x_{n_i+1} - x_{n_i} > m$ " özelliğini sağlayan toplamların kümesi olsun. Eğer $s \in S$ ise her bir $i = 1, 2, ..., k$ için

$$S = x_{n_1} + x_{n_2} + ... + x_{n_k} \text{ ve } x_{n_r+1} - x_{n_r} > \sum_{i=1}^{r-1} x_{n_i}$$

olmak üzere $c(s) = k$ olarak tanımlayalım.

r üzerinde indüksiyon metodunu kullanarak her bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\{s \in S_m : c(s) = r\} \in \xi_r$$

olduğunu göstereceğiz. $r - 1$ için iddia doğru olsun. Her $V \subset S_r$ kümesinin

$$\{s \in S_m : c(s) = r\}$$

ile kesiştiğini göstereceğiz.

Her $v \in V$ ve bazı $W_v \in \xi$ özelliğini sağlayan bir $V \in \xi_{r-1}$ vardır. İndüksiyon basamağından $c(v) = r - 1$ olacak şekilde bir $v \in V \cap S_m$ elemanı vardır. Bu durumda $W_v \cap X$ kümesi $x_{n+1} - x_n > m$ ve $x_{n+1} - x_n > v$ özelliğini sağlayan bir x_n içerir. Bu durumda $v + x_n \in S_m \cap U$, $c(v + x) = r$ özelliğini sağlar. Bu da indüksiyon basamaklarının sağlanması demektir. Böylece eğer $c^\beta : \overline{S} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ fonksiyonu c nin bir genişlemesi ise $c^\beta(\xi_r) = r$ olur. $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \overline{S_k}$, $\overline{\{\xi_n\}}$ yi içeren $\mathbb{N}^*$ da bir yarıgurptur. c^β, $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \overline{S_k}$ üzerinde bir homomorfizm olduğundan c^β aynı zamanda $\overline{\{\xi_n\}}$ bir homomorfizmdir.

$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ fonksiyonunu $\varphi(n) = \xi_n$ olacak şekilde tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $c^\beta \varphi(n) = n$ ve $\varphi c^\beta(\xi_n) = \xi_n$ olduğundan her $\mu \in \beta\mathbb{N}$ için $c^\beta \varphi^\beta(\mu) = \mu$ ve her $v \in \overline{\{\xi_n\}}$ için $\varphi^\beta c^\beta(v) = v$ olur. c^β bir homomorfizm olduğu için φ^β de bir homomorfizmdir ve bu Teorem 3.1 ile çelişir.

5.2 $\beta\mathbb{N}$ Üzerinde Yarıgrup Yapılarının İncelenmesi

$\circ$, $\mathbb{N}$ pozitif tam sayılar kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu işlem $\mathbb{N}$ nin $\beta\mathbb{N}$ Stone-Čech kompaktifikasyonu üzerinde bir ikili işleme aşağıdaki şekilde genişletilebilir. Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & m \circ n \end{array}$$

fonksiyonu $\beta\mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ sürekli fonksiyonuna genişletilebilir. Eğer $\eta \in \beta\mathbb{N}$ ise η nin bu fonksiyon altındaki görüntüsü $m \circ \eta$ ile gösterilir. Bu takdirde her $\eta \in \beta\mathbb{N}$ için

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \beta\mathbb{N} \\ m & \longmapsto & m \circ \eta \end{array}$$

fonksiyonu

$$\begin{array}{ccc} \beta\mathbb{N} & \longrightarrow & \beta\mathbb{N} \\ \xi & \longmapsto & \xi \circ \eta \end{array}$$

sürekli fonksiyonuna genişler.

Bu şekilde $\beta\mathbb{N}$ üzerindeki $\circ$ ikili işlemi tanımlanır. Bu işlem aşağıdaki özelliklere sahiptir. Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{array}{ccc} \beta\mathbb{N} & \longrightarrow & \beta\mathbb{N} \\ \eta & \longmapsto & m \circ \eta \end{array}$$

fonksiyonu süreklidir ve her $\eta \in \beta\mathbb{N}$ için

$$\begin{array}{ccc} \beta\mathbb{N} & \longrightarrow & \beta\mathbb{N} \\ \xi & \longmapsto & \xi \circ \eta \end{array}$$

fonksiyonu da sürekli olur. Eğer $\circ$ işlemi $\mathbb{N}$ üzerinde birleşmeli ise bu işlemin $\beta\mathbb{N}$ ye genişlemesi de birleşme özelliğini korur. Dolayısıyla $(\beta\mathbb{N}, \circ)$ bir kompakt sağ yarıtopolojik yarıgruptur.

$(\beta\mathbb{N}, +)$ ve $(\beta\mathbb{N}, \times)$ yarıgrupları üzerinde bir çok çalışma mevcuttur. Çünkü bu yarıgrupların çeşitli özellikleri ve sayılar teorisinde değişik uygulamaları vardır.

$\beta\mathbb{N}$ nin elemanlarını $\mathbb{N}$ üzerinde ultrafilterlar ve $\mathbb{N}^*$ nin elemanlarını da serbest ultrafilterlar olarak alınacaktır. Bazen $\beta\mathbb{N}$ nin elemanlarını tam sayıları çıkarmak kullanışlı olduğundan $\mathbb{N}$ yi $\mathbb{Z}$ ye ve $\beta\mathbb{N}$ yi de $\beta\mathbb{Z}$ ye gömülmüş olarak alacağız.

5.3 $(\beta\mathbb{N}, +)$ ve $(\beta\mathbb{N}, \times)$ nın Bazı Yarıgrup Özellikleri

Teorem 35. *(Strauss, 1992) $\eta \in \beta\mathbb{N}$ elemanı $(\beta\mathbb{N}, +)$ da sağ sadeleşebilir olmasın . Bu takdirde bazı $\alpha \in \mathbb{N}^*$ için $\eta = \alpha + \eta$ olur.*

İspat. *ξ_1 ve ξ_2, $\beta\mathbb{N}$ nin farklı iki elemanı olmak üzere $\xi_1 + \eta = \xi_2 + \eta$ olsun. X_1 ve X_2, $\mathbb{N}$ nin $X_1 \in \xi_1$ ve $X_2 \in \xi_2$ özelliğine sahip ayrık iki alt kümesi olsun. $\xi_1 + \eta \in \overline{X_1 + \eta}$ ve $\xi_2 + \eta \in \overline{X_2 + \eta}$ olduğundan bazı $x_1 \in X_1$ için $x_1 + \eta \in \overline{X_2 + \eta}$ veya bazı $x_2 \in X_2$ için $x_2 + \eta \in \overline{X_1 + \eta}$ (Yardımcı Teorem 9 gereğince) İlk ifadenin doğru olduğunu kabul edebiliriz.*

$$x_1 + \eta \in \overline{X_2 + \eta} = \overline{X_2} + \eta$$

ise bazı $\beta \in \mathbb{N}^*$ için $x_1 + \eta = \beta + \eta$ olur. Böylece $\alpha = -x_1 + \beta$ olmak üzere $\eta = x_1 + \beta$ olur.

Teorem 36. *(Strauss, 1992) $(\beta\mathbb{N}, +)$ nin herhangi iki principal sol ideali, ayrıktır veya biri diğerini kapsar.*

İspat. *$\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{N}^*$ ve $(\beta\mathbb{N} + \eta_1) \cap (\beta\mathbb{N} + \eta_2) \neq \emptyset$ olduğunu iddia edelim. $\eta_1 \in \beta\mathbb{N} + \eta_2$ veya $\eta_2 \in \beta\mathbb{N} + \eta_1$ olduğunu göstereceğiz. $i = 1, 2$ için $\beta\mathbb{N} + \eta_i = \overline{\mathbb{N} + \eta_i}$ olduğundan Yardımcı Teorem 9 gereğince bazı $n \in \mathbb{N}$ için $n + \eta_1 \in \beta\mathbb{N} + \eta_2$ veya $n + \eta_2 \in \beta\mathbb{N} + \eta_1$ olur.*

$V = \mathbb{N}^* \setminus (\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*)$ olsun. Aşağıdaki teorem V nin $(\mathbb{N}^*, +)$ nin bir altyarıgrubunu ürettiğini gösterecektir.

Teorem 37. *(Strauss, 1992)* $\mathbb{N}^*$ *üzerinde bazı* $m, n \in \mathbb{N}$ *için* $m + \xi = n + \eta$ *ise* $\xi \equiv \eta$ *olur şeklinde bir denklik bağıntısı tanımlayalım. Her* $\xi_i, \eta_j \in V$ *için*

$$\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_k = \eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_m$$

olsun. Bu takdirde $k = m$ *ve her* $i = 1, 2, ..., k$ *için* $\xi_i \equiv \eta_i$ *olur.*

İspat. *İlk olarak Teorem 36 gereğince* $\xi_k \in \beta\mathbb{N} + \eta_m$ *veya* $\eta_m \in \beta\mathbb{N} + \xi_k$ *olur.* $\xi_k, \eta_m \notin \mathbb{N}^* + \mathbb{N}$ *olduğundan* $\xi_k \equiv \eta_m$ *olur. Teorem 35 gereğince* ξ_k *sağ sadeleşebilirdir. Böylece* ξ_{k-1} *veya* η_{m-1} *yi denk elemanlarla yer değiştirebiliriz ve bu takdirde*

$$\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_{k-1} = \eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_{m-1}$$

eşittliğini elde ederiz. İspat k *için tümevarımla sonlanır.*

Aşağıdaki teorem $(\beta\mathbb{N}, X)$ için ifade edilecektir. Bazı $m, n \in \mathbb{N}$ ler için $\mathbb{N}^*$ üzerinde $m\xi = n\eta$ ise $\xi \equiv \eta$ şeklinde bir denklik bağıntısı tanımlayalım.

Yardımcı Teorem 15. *(Strauss, 1992) (i) Herhangi bir* $a \in \mathbb{N}$ *ve herhangi* $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{N}^*$ *için* $a\xi_1 = a\xi_2$ *olması* $\xi_1 = \xi_2$ *olmasını gerektirir.*

(ii) Herhangi $a \in \mathbb{N}$ *ve* $\xi \in \mathbb{N}^*$ *için* $a\mathbb{N} \in \xi$ *olması bazı* $\eta \in \mathbb{N}^*$ *için* $\xi = a\eta$ *olmasını gerektirir.*

(iii) Herhangi $m, n \in \mathbb{N}$ *ve* $\xi \in \mathbb{N}^*$ *için* $m\xi = n\xi$ *olması* $m = n$ *olmasını gerektirir.*

İspat. *(i)* $\xi_1 \neq \xi_2$ *ise* $\mathbb{N}$ *nin* $X_1 \in \xi_1$ *ve* $X_2 \in \xi_2$ *olacak şekilde ayrık* X_1 *ve* X_2 *altkümeleri vardır. Bu durumda* $aX_1 \in a\xi_1$ *ve* $aX_2 \in a\xi_2$ *olur. Fakat* $aX_1 \cap aX_2 = \emptyset$ *dir.*

(ii) $\eta = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : aX \in \xi\}$ *alınması yeterlidir.*

(iii) $m\xi = n\xi$ *ve* $n > m$ *olduğunu iddia edelim. Bu takdirde her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $m^k\xi = n^k\xi$ *olur.*

$h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *fonksiyonunu* $h(q) = \sup\{r \in \mathbb{Z} : 2^r \leq q\}$ *şeklinde tanımlayalım.* h *fonksiyonunu* $\beta\mathbb{N}$ *den* $\beta\mathbb{Z}$ *ye genişletelim. Her* $r \in \mathbb{N}$ *ve* $\eta \in \beta\mathbb{N}$ *için*

$$h(r\eta) = h(r) + h(\eta) \text{ veya } h(r) + h(\eta) + 1$$

dir. Ancak burada k *nın değeri için* $h(n^k) > h(m^k) + 1$ *dir.*

Teorem 38. *(Strauss, 1992) (i)* $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}^*\mathbb{N}^*$ *nin her elemanı* $(\beta\mathbb{N}, X)$ *de sağ sadeleşebilirdir.*

(ii) $\xi, \eta \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}^*\mathbb{N}^*$ *olsun. Eğer* $(\beta\mathbb{N})\xi \cap (\beta\mathbb{N})\eta \neq \emptyset$ *ise* $\xi \equiv_\times \eta$ *dir.*

(iii) Eğer her $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}^*\mathbb{N}^*$ *için* $\xi_1\xi_2...\xi_k = \eta_1\eta_2...\eta_m$ *ise her* $i = 1, 2, ..., k$ *için* $k = m$ *ve* $\xi_i \equiv_\times \eta_i$ *olur.*

İspat. *(i)* $\xi \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}^*\mathbb{N}^*$ *olmak üzere* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ *ve* $\alpha \neq \beta$ *için* $\alpha\xi = \beta\xi$ *olsun.* $A \in \alpha$ *ve* $B \in \beta$ *olacak şekilde* A *ve* B, $\mathbb{N}$ *nin ayrık altkümeleri olsun.* $\overline{A\xi} \cap \overline{B\xi} \neq \emptyset$ *olduğundan Yardımcı Teorem 9 gereğince bazı* $a \in \mathbb{N}$ *ler için* $\alpha\xi \in \overline{B\xi} = \overline{B}\xi$ *olduğunu kabul edebiliriz.*

Böylece bazı $\gamma \in \mathbb{N}^*$ *için* $\alpha\xi = \gamma\xi$ *olur.* a *nın* p *asal çarpanına sahip olduğunu varsayalım.* $q_p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ *kanonik dönüşümü* $\beta\mathbb{N}$ *den* $\mathbb{Z}_p$ *ye giden bir fonksiyona genişler.* $q_p(\gamma) = 0$ *veya* $q_p(\xi) = 0$ *olduğundan bazı* $\gamma' \in \mathbb{N}^*$ *için* $\gamma = p\gamma'$ *veya bazı* $\xi' \in \mathbb{N}^*$ *için* $\xi = p\xi'$ *olur. Buradan* $\dfrac{a}{p}\xi = \gamma'\xi$ *veya* $\dfrac{a}{p}\xi = \gamma\xi'$ *olur. Bu işlem tekrar edilirse* $\xi \in \mathbb{N}^*\mathbb{N}^*$ *bulunur, bu bir çelişkidir.*

(ii) Eğer $(\beta\mathbb{N})\xi \cap (\beta\mathbb{N})\eta \neq \emptyset$ *ise 9 gereğince bazı* $a \in \mathbb{N}$ *için* $a\xi \in (\beta\mathbb{N})\eta$ *olduğunu iddia edebiliriz. Dolayısıyla* $\xi \equiv_\times \eta$ *ya da* $a\xi \in \mathbb{N}^*\mathbb{N}^*$ *olur. İkinci ihtimal* $\xi \in \mathbb{N}^*\mathbb{N}^*$ *çelişkisini yaratır.*

(iii) Bu aşikardır.

Not 10. *(Strauss, 1992)* $s_{n+1} \longrightarrow s_n \longrightarrow \infty$ *için* $S = (s_n)$, *pozitif tamsayıların*

$$s_{n+1} - s_n \longrightarrow \infty$$

özelliğinde bir dizisi olsun. $\overline{S} \cap (\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*) = \emptyset$ *olduğunu göstermek zor değildir. Bunu şu şekilde gösterebiliriz.* $\xi \in \overline{S}$ *ve* $\eta, \zeta \in \mathbb{N}^*$ *için* $\xi = \eta + \zeta$ *olsun. Bu takdirde*

$$Y = \{y \in \mathbb{N} : S - y \in \zeta\} \in \eta$$

olur aksi halde $\mathbb{N} \setminus Y \in \eta$ *ve* $\eta + \zeta \in \overline{\{y + \zeta\}_{y \in \mathbb{N} \setminus Y}}$ *olurdu. Fakat* $y \in \mathbb{N} \setminus Y$ *ise* $\mathbb{N} \setminus S \in y + \zeta$ *olur. Böylece* $y + \zeta \in \overline{\mathbb{N} \setminus S}$ *olur. Ancak* $\xi \notin \overline{\mathbb{N} \setminus S}$ *dir.*

Eğer $y_1, y_2 \in Y$ *ise* $S - y_1$ *ve* $S - y_2$ *sonsuz çoklukta ortak elemana sahiptir. Diğer yandan eğer* $y_1 \neq y_2$ *ise bu mümkün değildir. Dolayısıyla* $\overline{S} \cap \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{N}^*, +)$ *nın serbest bir altyarıgrubunu üreten* $2^{\mathbb{C}}$ *kardinaliteli* $\mathbb{N}^*$ *nin bir clopen altkümesidir. Aynı zamanda* $\mathbb{N}^* \setminus (\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*)$, $\mathbb{N}^*$ *nin her yerde yoğun bir açık altkümesini içerir. Her yerde yoğun olan bu altküme* S *nin yukarıdaki özelliğe sahip bir dizi olmak üzere* $\overline{S} \cap \mathbb{N}^*$ *kümelerinin bir birleşimi şeklindedir. Benzer şekilde* $S = (s_n)$, $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} \longrightarrow \infty$ *özelliğine sahip pozitif* *tamsayıların bir dizisi ise* $\overline{S} \cap \mathbb{N}^*\mathbb{N}^* = \emptyset$ *olur. Dolayısıyla* $\overline{S} \cap \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{N}^*, \times)$ *nın bir serbest altyarıgrubunu üretir.*

Teorem 39. *(Strauss, 1992)* $\xi, \eta, \sigma, \tau \in \mathbb{N}^*$ *olmak üzere* $\xi + \eta = \sigma\tau$ *olsun. Bu takdirde* τ *nun,sonlu tane tamsayı çarpanı vardır.*

İspat. $S = \{s \in \mathbb{N} : s\tau \in \beta\mathbb{N} + \eta\}$ *olsun.* S *nin sonlu olması gerektiğini göstermeliyiz.* h, *Teorem 33 in (iii) ifadesinde tanımlanan fonksiyon olsun. Bu takdirde*

$$h(s\tau) = h(s) + h(\tau)$$

veya

$$h(s\tau) = h(s) + h(\tau) + 1$$

dir. Ancak herhangi $a, y \in \mathbb{N}$ *için eğer* $a < y$ *ise* $h(a + y) = h(y)$ *veya* $h(a + y) = h(y + 1)$ *olur. Dolayısıyla* $h(a + \eta) = h(\eta)$ *ya da* $h(a + \eta) = h(\eta) + 1$ *dir ve böylece her* $\alpha \in \mathbb{N}^*$ *için* $h(\alpha + \eta) = h(\eta)$ *veya* $h(\alpha + \eta) = h(\eta) + 1$ *dir. Buradan* $h(S)$ *sonludur ve dolayısıyla* S *sonludur.*

$$X = \{x \in \mathbb{N} : x + \eta \in (\beta\mathbb{N})\tau\}$$

olsun. Bu takdirde $X \in \xi$ *dir aksi halde* $\xi + \eta \in \overline{(\mathbb{N} \setminus X + \eta)}$ *ve* $\sigma\tau \in \overline{(\mathbb{N} \setminus S)\tau}$ *olurdu ki bu Yardımcı Teorem 9 daki*

$$((\mathbb{N} \setminus X) + \eta) \cap \overline{(\mathbb{N} \setminus S)\tau} = \overline{((\mathbb{N} \setminus S)\tau)} \cap (\mathbb{N} \setminus S)\tau = \emptyset$$

ile çelişir.

Dolayısıyla farklı iki $a, b \in X$ *tamsayısı vardır. Herhangi bir pozitif* n *tamsayısı için* $q_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ *kanonik dönüşümü* $\beta\mathbb{N}$ *den* $\mathbb{Z}_n$ *ye giden bir fonksiyona genişler. Eğer* $n > a, b$ *ise* $q_n(a + \eta) \neq q_n(b + \eta)$ *dir ve dolayısıyla* $q_n(\tau) \neq 0$ *olur.*

Sonuç 9. *(Strauss, 1992)* $\mathbb{N}^*$ *ın bir elemanı hem* $(\beta\mathbb{N}, +)$ *da hem de* $(\beta\mathbb{N}, \times)$ *de bir idempotent olamaz.*

İspat. $(\beta\mathbb{N}, +)$ *da bir idempotent her tamsayıyı bir çarpan olarak kabul eder.*

Teorem 40. *(Strauss, 1992)* $S = (2^n)$ *dizisi olsun.* $\overline{S} \cap \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{N}^*, +)$ *nin bir serbest altyarıgrubunu üretir.*

İspat. $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *ve* $n_1 < n_2 < ... < n_k$ *olmak üzere her* $n \in \mathbb{N}$ *sayısı* $2^{n_1} + 2^{n_2} + ... + 2^{n_k}$ *olarak tek türlü ifade edilir.* $c, f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ *fonksiyonlarını* $c(n) = k$ *ve her* $r \in \mathbb{N}$ *için*

$$f_r(n) = \{ \begin{array}{ll} 2^{n_r} & , \quad r < k \\ 2^{n_k} & , \quad r \geq k \end{array}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyonlar $\beta\mathbb{N}$ den $\beta\mathbb{N} \cup \{0\}$ a giden fonksiyonlara genişler.

$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k \in \overline{S} \cap \mathbb{N}^*$ olsun. Eğer $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}$ ve $n_1 < n_2 < ... < n_k$ ise her $r \leq k$ için

$$c(2^{n_1} + 2^{n_2} + ... + 2^{n_k}) = k$$

$$f_r(2^{n_1} + 2^{n_2} + ... + 2^{n_k}) = 2^{n_r}$$

olur.

Eğer 2^{n_k} dizisi ξ_k ya yakınsarsa $2^{n_{k-1}}$ de ξ_{k-1} e yakınsar. Bu şekilde devam edilirse

$$c(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_k) = k$$

$$f(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_k) = \xi_r$$

dir. $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m \in \overline{S} \cap \mathbb{N}^*$ ve $\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_k = \eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_m$ olsun. Bu eşitliğe c fonksiyonu uygulanırsa $k = m$ ve f fonksiyonu uygulanırsa her bir $r = 1, 2, ..., k$ için $\xi_r = \eta_r$ olur.

5.4 $\mathbb{N}$ Üzerinde Genel İkili İşlemler

Teorem 41. *(Strauss, 1992) $\circ$ işlemi her $m \in \mathbb{N}$ için $n \longrightarrow \infty$ iken $m \circ n \longrightarrow \infty$ özelliğe sahip $\mathbb{N}$ üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu takdirde $(\mathbb{N}^*, \circ)$ değişmeli değildir. Her $\xi \in \mathbb{N}^*$ için*

$$C_\xi = \{\eta \in \mathbb{N}^* : (\mathbb{N}^* \circ \xi) \cap (\mathbb{N}^* \circ \eta) \neq \emptyset\}$$

kümesi $\mathbb{N}^*$ de hiçbir yerde yoğun olmayan bir kapanışa sahiptir. Üstelik $\eta \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^* \circ \eta$ şeklinde $2^{\mathbb{C}}$ tane ayrık altkümesiye sahiptir.

İspat. *(i) İlk olarak $\overline{C_\xi}$ nin boş bir içe sahip olduğunu gösterelim. Eğer böyle olmasaydı $\overline{X} \cap \mathbb{N}^* \subseteq \overline{C_\xi}$ olacak şekilde $\mathbb{N}$ nin sonsuz bir X altkümesi olacaktı. Herhangi bir $s_1 \in X$ seçelim. $s_1, s_2, ..., s_n$ seçildikten sonra $s_{n+1} > s_n$ olacak şekilde $s_{n+1} \in X$ alırız. $k, m \leq s_n$ ve $r \geq s_{n+1}$ özelliğindeki her $k, m, r \in \mathbb{N}$ için $k \circ m < s_{n+1}$ ve $m \circ r > s_n$ olur.*

Her $n \geq s_1$ için $h(n) = \sup\{r \in \mathbb{N} : s_r \leq n\}$ şeklinde bir $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu tanımlayalım. Eğer $n < s_1$ ise $h(n)$ keyfi şekilde tanımlanır. h fonksiyonu $\beta\mathbb{N}$ den $\beta\mathbb{N}$ ye genişler.

$x, y \in \mathbb{N}$ olsun. $n > 1$ olmak üzere $x < s_{n-1}$ ve $s_n \leq y < s_{n+1}$ ise

$$s_{n-1} < x \circ y < s_{n+2}$$

olur. Dolayısıyla $h(x \circ y), h(y)-1, h(y), h(y)+1$ *değerlerinden birine eşittir.*

$\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ *olsun. Herhangi* $x \in \mathbb{N}$ *için* $\{y \in \mathbb{N} : h(x \circ y) = h(y) + i_x\} \in \beta$ *olacak şekilde* $i_x \in \{-1, 0, 1\}$ *vardır. Dolayısıyla* $h(x \circ \beta) = h(\beta) + i_x$ *olur.* $\{x \in \mathbb{N} : i_x = i\}$ *olacak şekilde bir* $i \in \{-1, 0, 1\}$ *vardır. Böylece* $h(\alpha \circ \beta) = h(\beta) + i$ *olur.*

$\eta \in \overline{C_\xi}$ *olsun.* $\alpha \circ \eta = \beta \circ \xi$ *olduğunu iddia edelim. Bazı* $i, j \in \{-1, 0, 1\}$ *ler için*

$$h(\alpha \circ \eta) = h(\eta) + i$$

ve

$$h(\beta \circ \xi) = h(\xi) + j$$

olduğundan $\eta \in h^{-1}(\bigcup_{r=-2}^{2}\{h(\xi)+r\})$ *olur. Dolayısıyla*

$$\overline{X} \cap \mathbb{N}^* \subseteq \overline{C_\varepsilon} \subseteq h^{-1}(\bigcup_{r=-2}^{2}\{h(\varepsilon)+r\})$$

dir. h *nin* $\overline{X} \cap \mathbb{N}^*$ *üzerinde* 5 *farklı değer aldığını göstererek bir çelişki elde ederiz. Her* $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *için* $C_m = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv m(mod6)\}$ *olsun.*

Herhangi $\eta \in \mathbb{N}^*$ *için* $\{s_{6n+m} : n \in \mathbb{N}\} \in \eta$ *ise* $h(\eta) \in \overline{C_m}$ *dir.* $\overline{C_m}$ *kümeleri ayrıktır.*

(ii) $\mathbb{N}^*$ *nin* $\beta\mathbb{N} \circ \eta$ *nin* $2^{\mathbb{C}}$ *tane ayrık altkümesine sahip olduğunu gösterelim. Eğer* $\eta \in \overline{S} \cap \mathbb{N}^*$ *ise*

$$(\beta\mathbb{N} \circ \eta) \cap (\beta\mathbb{N} \circ \zeta) \neq \emptyset$$

olacak şekilde en çok beş $\zeta \in \overline{S} \cap \mathbb{N}^*$ *elemanı vardır. Bunlar* $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ *için* $(s_{n_r}) \in \zeta_k$ *olması için gerek ve yeter şart* $(s_{n_r+k}) \in \eta$ *olmasıdır şeklinde tanımlanabilir.* Y_η *bu beş elemanın kümesini olsun.* $F, \overline{S} \cap \mathbb{N}^*$ *nin farklı her* $\eta_1, \eta_2 \in F$ *için* $(\beta\mathbb{N}\circ) \cap (\beta\mathbb{N} \circ \zeta) \neq \emptyset$ *özelliğine göre maksimal olan bir altkümesi olsun. Eğer* $|F| < 2^{\mathbb{C}}$ *ise* $|\cup_{\eta \in F} Y_\eta| < 2^{\mathbb{C}}$ *dir. Böylece* $(\overline{S} \cap \mathbb{N}^*) \setminus \cup_{\eta \in F} Y_\eta$ *de bir eleman vardır ve bu durum* F *nin maximalliği ile çelişir.*

Not 11. *(Strauss, 1992) Buradaki ispat metodu aşağıdaki ifadeleri iddia etmemize olanak sağlar.* $*$ *işleminin* $\mathbb{N}$ *üzerinde her* $m \in \mathbb{N}$ *için* $n \longrightarrow \infty$ *iken* $m * n \longrightarrow \infty$ *özelliğine sahip bir ikili işlem olsun. Bu takdirde her* $\xi \in \mathbb{N}^*$ *için*

$$\{\eta \in \mathbb{N}^* : (\mathbb{N}^* * \xi) \cap (\mathbb{N}^* \circ \eta) \neq \emptyset\}$$

kümesi $\mathbb{N}^*$ *de hiç bir yerde yoğun olmayan bir kapanışa sahiptir.*

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Öncelikle filter yardımıyla ultrafilter tanımlandı. Bir D kümesi üzerinde tanımlı bütün ultrafilterların kümesi olan βD oluşturuldu. Kompaktlaştırma kavramının ana fikri, verilen topolojik uzayın genişletilmesi, yani; kompakt olmayan bir topolojik uzayın kompakt bir uzay haline getirilmesidir. Bunun için Alexandroff tek nokta kompaktifikasyonu, n-nokta kompaktifikasyonu gibi yöntemler kullanılabilirken burada Stone-Cech kompaktifikasyonu ifade edilerek βD nin D ayrık uzayının kompaktifikasyonu olduğu gösterildi. Daha sonra βS bir yarıgrup olarak incelendi. βS de çarpma işlemi tanımlandı ve βS nin değişme özelliğinin olmadığı vurgulandı. İdempotent ve ideal kavramları ifade edildi. Keyfi bir $(S, \cdot, 1_S)$ monoidi ve bu monoidin Stone-Cech kompaktifikasyonu olan βS incelenerek βS dinamik sistemi tanımlandı. Cancellation (Sadeleşetirme) ifade edildi ve $\beta\mathbb{N}$ ve $\beta\mathbb{Z}$ de sağ sadeleşme durumlarına bakıldı. $\mathbb{N}^*$ ın $\beta\mathbb{N}$ nin bir topolojik cebirsel kopyasını içerip içermediği sorusuna yanıt arandı ve $\beta\mathbb{N}$ üzerinde yarıgrup yapıları incelendi. $\mathbb{N}$ üzerinde genel ikili işlemlerle tez sonlandırıldı.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alexandroff, P.S. ve P.S. Urysohn (1924). *Zur Theorie der topologischen Raume, Math. Ann.*

Berlin, Freie Universität (2016a). *Idempotents and Hindman's theorem*. URL: `http://www.mi.fu-berlin.de/math/groups/ag-logik/Lehre/UST-chapter05.pdf`.

— (2016b). *Minimal ideals and minimal idempotents*. URL: `http://www.mi.fu-berlin.de/math/groups/ag-logik/Lehre/UST-chapter06.pdf`.

— (2016c). *Topological dynamics: basic notions and examples*. URL: `http://www.mi.fu-berlin.de/math/groups/ag-logik/Lehre/UST-chapter09.pdf`.

— (2016d). *βS as a semigroup*. URL: `http://www.mi.fu-berlin.de/math/groups/ag-logik/Lehre/UST-chapter04.pdf`.

Bourbaki, Nicolas (1940). "Topologie generale". İn: *Éléments de mathématique*, p. 336.

Cartan, Henri (1937a). "Filtres et ultrafiltres". İn: *C. R. Acad. Sc.*

— (1937b). "Théorie des filtres". İn: *C. R. Acad. Sc.*

Ellis, Robert (1969). *Lectures on topological dynamics*, p. 211.

Ergun, Nurettin (2014). *Genel Topoloji*, p. 864. ISBN: 9786051338309.

Fréchet, Maurice René (1906). *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. Vol. 22, pp. 1–72.

Hindman, Nail ve Dona Strauss (2010). *Algebra in the Stone-Cech Compactification*, pp. 3–251. ISBN: 978-3-11-025623-9.

Kelley, John L. (1955). *General Topoloji*.

Kowalsky, Hans Joachim (1961). *Topologische Raume*.

Root, R. (1914). "Iterated limits in general analysis". İn: *Am. J. Math.*

Stone, M. H. (1937). “Applications of the theory of Boolean rings to general topology”. İn: *Trans. Amer. Math. Soc.* Pp. 375–481.

Strauss, Dona (1992). “Semigroup Structures on $\beta\mathbb{N}$”. İn: *Semigroup Forum*, pp. 238–244.

Tychonoff, A. (1930). *Uber die topologische Erweiterung von Raumen. Math. Annalen*.

Zirnstein, Heinrich-Gregor (2012). *Formulating Szemeredi's Theorem in Terms of Ultrafilters*, p. 64.

Čech, Eduard (1937). “On bicompact spaces”. İn: *Ann. of Math.* Pp. 823–844.