

**Burgers Denkleminin B-spline Kolokeyşin Yöntemiyle Sayısal  
Çözümleri**

**Özer Çelik**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı**  
**Şubat 2015**

**Numerical Solutions of Burgers' Equation with B-spline Collocation  
Method**

**Özer Çelik**

**MASTER OF SCIENCE THESIS**  
**Department of Electric Electronic Engineering**  
**February 2015**

# **Burgers Denklemine B-spline Kolokeyşin Yöntemiyle Sayısal Çözümleri**

**Özer Çelik**

**Eskişehir Osmangazi Üniversitesi**

**Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Lisansüstü Yönetmeliğı Uyarınca**

**Elektrik Elektronik Mühendisliğı Anabilim Dalı**

**Telekomünikasyon - Sinyal İşleme Bilim Dalında**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Olarak Hazırlanmıştır**

**Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nihat ADAR**

**Şubat 2015**

# ONAY

Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Özer Çelik'in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı “**Burgers Denklemine B-spline Kolokeyşin Yöntemiyle Sayısal Çözümleri**” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliğiyle kabul edilmiştir.

**Danışman** : Yrd. Doç. Dr. Nihat ADAR

**İkinci Danışman** : Prof. Dr. İdris DAĞ

## **Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:**

**Üye** : Prof. Dr. İdris DAĞ

**Üye** : Doç. Dr. Dursun IRK

**Üye** : Doç. Dr. Bülent SAKA

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Nihat ADAR

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Selçuk CANBEK

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN

Enstitü Müdürü

# ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Yrd. Doç. Dr. Nihat ADAR danışmanlığında hazırlamış olduğum "Burgers Denklemine B-spline Kolokeyşin Yöntemiyle Sayısal Çözümleri" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaparak kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

05.02.2015

Özer Çelik

## ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sonlu farklar ve sonlu elamanlar metodları tanıtılıp spline ve B-spline fonksiyonlar ve bu fonksiyonların özellikleri verildi. Daha sonra ise kuadratik ve kübik B-spline fonksiyonlar ifade edilip Burgers denklemin-den kısaca bahsedildi.

Konuma göre parçalanmış Burgers denkleminin kuadratik B-spline kolokeyşin metodu ile çözümü ikinci bölümde verildi. Üçüncü bölümde ise zamana göre parçalanmış Burgers denkleminin kübik B-spline kolokeyşin metodu ile çözümü incelendi.

Dördüncü bölümde Burgers denkleminin kübik spline kolokeyşin metodu ile çözümü çalışıldı. Beşinci bölümde Burgers denkleminin genişletilmiş kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile sayısal çözümü araştırıldı ve son olarak altıncı bölümde kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile elde edilen sonuçlar ikinci, üçüncü, dördüncü bölümlerde daha önceki yöntemlerle bulunmuş olan burgers denkleminin sayısal çözümleri karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Burgers Denklemi, B-spline fonksiyonlar, Kolokeyşin metodu, Sonlu elemanlar metodu.

## SUMMARY

This thesis contains of six chapters. In the first chapter, we recalled the finite differences, finite elements methods and give the properties of spline and B-spline functions. Then we recalled quadratic and cubic, B-spline functions and Burgers's' equation.

In the second chapter, application of cubic B-spline collocation method on finally the numerical solutions of space-splitted Burgers' equation is studied.

In the fourth chapter, Burgers' equation solved by using cubic spline collocation. In the fifth chapter the numerical solutions of Burgers' equation by using extended cubic B-spline collocation method was investigated and finally in the sixth chapter we compare the results.

Keywords : Burgers' Equation, B-spline Functions, Collocation Method, Finite elements methods.

## TEŞEKKÜR / ACKNOWLEDGEMENTS

Beni bu çalıŐmaya sevkeden ve yöneten, çalışma boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen, sayın hocalarım, Nihat ADAR, İdris DAĞ ve Dursun IRK'a desteklerini hep yanımda hissettiğim aileme sonsuz saygı ve teŐekkürlerimi sunarım.



# İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b>	<b>vi</b>
<b>SUMMARY</b>	<b>vii</b>
<b>TEŞEKKÜR / ACKNOWLEDGEMENTS</b>	<b>viii</b>
<b>ÇİZELGELER DİZİNİ</b>	<b>xi</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b>	<b>xii</b>
<b>1. TEMEL KAVRAMLAR</b>	<b>1</b>
1.1 Sonlu Farklar-Sonlu Elemanlar Metotları . . . . .	1
1.1.1 Sonlu farklar yöntemi . . . . .	1
1.1.2 Sonlu elemanlar yöntemi . . . . .	4
1.2 Spline Fonksiyonlar . . . . .	7
1.2.1 Spline fonksiyonların bazı özellikleri . . . . .	8
1.3 B-spline Fonksiyonlar . . . . .	8
1.3.1 Kuadratik B-spline fonksiyonlar . . . . .	9
1.3.2 Kübik B-spline fonksiyonlar . . . . .	10
1.3.3 Genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar . . . . .	11
1.4 Burgers Denklemi . . . . .	13

<b>2. KONUMA GÖRE PARÇALANMIŞ BURGER DENKLEMİNİN KUADRATİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ</b>	<b>16</b>
2.1 Kuadratik B-spline Kolokeyşin Metodu . . . . .	16
2.2 Başlangıç Durumu . . . . .	22
<b>3. ZAMANA GÖRE PARÇALANMIŞ BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ</b>	<b>25</b>
3.1 Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu . . . . .	25
3.2 Başlangıç Durumu . . . . .	29
<b>4. BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ</b>	<b>31</b>
4.1 Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu . . . . .	31
4.2 Başlangıç Durumu . . . . .	34
<b>5. BURGER DENKLEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN YÖNTEMIYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ</b>	<b>36</b>
5.1 Metodun Uygulanması . . . . .	36
5.2 Başlangıç Durumu . . . . .	39
5.3 Test Problemleri . . . . .	41
<b>6. SONUÇLAR</b>	<b>54</b>
6.1 İlk Test Problemi İçin Kıyaslamalar . . . . .	54
6.2 İkinci Test Problemi İçin Kıyaslamalar . . . . .	55
<b>KAYNAKLAR DİZİNİ</b>	<b>58</b>

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge	Sayfa
1.1 Bölünme noktalarındaki kuadratik B-spline değerleri . . . . .	10
1.2 Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri . . . . .	11
1.3 Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri . . . . .	12
4.1 Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri . . . . .	32
5.1 $h = 0.005, \Delta t = 0.001$ ve farklı zaman artımları için $L_\infty$ Hata normları . . . . .	42
5.2 $\Delta t = 0.001$ ve farklı zaman artımları için $L_\infty$ Hata normları . . . . .	47
5.3 $h = 0.1, \Delta t = 0.025$ ve farklı zaman artımları için $L_\infty$ Hata normları . . . . .	51
6.1 $h = 0.005$ ve $\Delta t = 0.01$ için 3.25 zamanındaki mutlak hatalar . . . . .	54
6.2 $h = 1/36$ ve $\Delta t = 0.01$ için 0.5 zamanındaki sayısal ve analitik değerler . . . . .	55

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
1.1	Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları . . . . . 10
1.2	Kübik B-spline şekil fonksiyonları . . . . . 11
5.1	$v = 0.005$ için $t = 1, t = 1.5, t = 2, t = 2.5$ ve $t = 3.1$ zamanlarında dalgaların durumu . . . . . 41
5.2	$v = 0.0005$ için $t = 1, t = 1.5, t = 2, t = 2.5$ ve $t = 3.1$ zamanlarında dalgaların durumu . . . . . 42
5.3	$v = 0.005, \lambda = 0$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $t = 3.1$ deki mutlak hata . . . . . 43
5.4	$v = 0.005, \lambda = 0$ ve $0 \leq x \leq 1.2$ için $t = 3.1$ deki mutlak hata . . . . . 44
5.5	$v = 0.005, \lambda = -0.00055$ ve $0 \leq x \leq 1.2$ için $t = 3.1$ deki mutlak hata . . . 44
5.6	$v = 0.0005, \lambda = 0$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $t = 3.1$ deki mutlak hata . . . . . 45
5.7	$v = 0.0005, \lambda = -0.00019$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $t = 3.1$ deki mutlak hata . . . 45
5.8	$v = 0.01$ için $t = 0, t = 0.125, t = 0.25, t = 0.375$ ve $t = 0.5$ zamanlarında dalgaların durumu . . . . . 46
5.9	$v = 0.001$ için $t = 0, t = 0.125, t = 0.25, t = 0.375$ ve $t = 0.5$ zamanlarında dalgaların durumu . . . . . 47
5.10	$v = 0.01, \lambda = 0$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $t = 0.5$ deki mutlak hata . . . . . 48
5.11	$v = 0.01, \lambda = -0.01071$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $t = 0.5$ deki mutlak hata . . . . . 48
5.12	$v = 0.001, \lambda = 0$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $t = 0.5$ deki mutlak hata . . . . . 49
5.13	$v = 0.001, \lambda = -0.01071$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $t = 0.5$ deki mutlak hata . . . . . 49
5.14	$v = 1/8$ için $t = 0, t = 2, t = 4, t = 6, t = 8$ ve $t = 10$ zamanlarında dalgaların durumu . . . . . 50

5.15 $v = 1/24$ için $t = 0, t = 2, t = 4, t = 6, t = 8$ ve $t = 10$ zamanlarında dal- gaların durumu . . . . .	51
5.16 $v = 1/8, \lambda = 0$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 10$ daki mutlak hata . . . . .	52
5.17 $v = 1/8, \lambda = -0.00514$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 10$ daki mutlak hata . . . . .	52
5.18 $v = 1/24, \lambda = 0$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 10$ daki mutlak hata . . . . .	53
5.19 $v = 1/24, \lambda = -0.03499$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 10$ daki mutlak hata . . . . .	53

# 1. TEMEL KAVRAMLAR

## 1.1 Sonlu Farklar-Sonlu Elemanlar Metotları

Mühendislik ve fen alanlarında karşılaşılan ve fiziksel olayları modelleyen çoğu problemler adi diferansiyel denklemler, kısmi türevli diferansiyel denklemler, adi diferansiyel denklem sistemleri veya kısmi türevli diferansiyel denklem sistemleri ile ifade edilirler. Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin analitik çözümlerinin olmadığı ya da analitik çözümlerin çok karmaşık olduğu durumlarda, bu denklemlerin çözümleri sayısal yöntemler kullanılarak elde edilir. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar metotları diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için yaygın olarak kullanılmaktadır.

### 1.1.1 Sonlu farklar yöntemi

Sonlu farklar yönteminde diferansiyel denklemin tanım aralığında sonlu sayıda bölünme noktası seçilir ve her bir bölünme noktasından diferansiyel denklemin bilinmeyen fonksiyonunun bölünme noktasındaki değeri ve bilinmeyen fonksiyonun türevleri yerine Taylor seri açılımı ile elde edilen sonlu sayıdaki bilinmeyen fonksiyonun bölünme noktasındaki değerlerinin bir kombinasyonu olan sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece diferansiyel denklem bir cebirsel denkleme dönüşür.

Bir değişken içeren ifadeler için sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla aşağıdaki şekilde elde edilir.

$[a, b]$  tanım aralığının eşit aralıklı bölünme noktaları

$$x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N$$

olarak seçilsin ve  $h = \frac{b-a}{N}$  bölünme noktaları arasındaki fark olsun. Bu durumda,  $U(x)$  fonksiyonu ve bütün türevleri tanım aralığı üzerinde sürekli olmak üzere,  $U(x_i +$

$h$ ) ve  $U(x_i - h)$  ifadelerinin  $x_i$  noktasındaki Taylor seri açılımları

$$U(x_i + h) = U(x_i) + hU'(x_i) + \frac{h^2}{2!}U''(x_i) + \frac{h^3}{3!}U'''(x_i) + \dots, \quad (1.1)$$

$$U(x_i - h) = U(x_i) - hU'(x_i) + \frac{h^2}{2!}U''(x_i) - \frac{h^3}{3!}U'''(x_i) + \dots, \quad (1.2)$$

olarak yazılabilir. (1.1-1.2) eşitliklerinden  $U'(x_i)$  değerleri için

$$U'(x_i) = \frac{U(x_i + h) - U(x_i)}{h} - \frac{h}{2!}U''(x_i) - \frac{h^2}{3!}U'''(x_i) - \dots, \quad (1.3)$$

$$U'(x_i) = \frac{U(x_i) - U(x_i - h)}{h} + \frac{h}{2!}U''(x_i) - \frac{h^2}{3!}U'''(x_i) + \dots, \quad (1.4)$$

şeklinde düzenlenirse,  $U$  ifadesinin  $x_i$  noktasındaki birinci türevi

$$U'(x_i) = \frac{U(x_i + h) - U(x_i)}{h} + O(h) = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + O(h), \quad (1.5)$$

$$U'(x_i) = \frac{U(x_i) - U(x_i + h)}{h} + O(h) = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + O(h), \quad (1.6)$$

formunda yaklaşık olarak bulunabilir. (1.5-1.6) ile bulunan yaklaşımlar sırasıyla ileri ve geri fark yaklaşımları olarak adlandırılırlar. Her iki yaklaşımda da görüldüğü gibi, seri belli bir yerden kesildiği için bir hata oluşacaktır. Oluşan hatalar, serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir ve  $O(\cdot)$  ile gösterilir.

(1.1) eşitliği, (1.2) eşitliğinden çıkarılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} U'(x_i) &= \frac{U(x_i + h) - U(x_i - h)}{2h} + O(h^2), \\ U'(x_i) &= \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + O(h^2), \end{aligned} \quad (1.7)$$

formunda birinci türev için merkezi fark yaklaşımı bulunur. Ayrıca, (1.1) ve (1.2) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} U''(x_i) &= \frac{U(x_i + h) - 2U(x_i) + U(x_i - h)}{h^2} + O(h^2), \\ U''(x_i) &= \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

formunda ikinci türev için sonlu fark yaklaşımı da bulunabilir.

Ayrıntılı bilgi için (Lapidus and Pinder, 1982; Smith, 1978; Thomas, 1995; Irk, 2007) referansları incelenebilir.

### **Crank-Nicolson metodu**

Sayısal analizde Crank-Nicolson metodu bir sonlu farklar metodudur. Crank-Nicolson metodu, zamana göre ikinci dereceden ve kapalı bir metot olup John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından bulunmuştur (Crank and Nicolson, 1947 [8]). Bu metod diferansiyel denklemin bilinmeyen fonksiyonunu ardışık iki noktasındaki değerleri cinsinden yazılması olarak geliştirilmiştir.  $U(x, t)$  iki değişkenli bir fonksiyon olmak üzere  $x$  konum ve  $t$  zaman değişkenlerini belirtsin. Crank ve Nicolson, metotlarında diferensiyel denklemin sonlu fark metoduyla sayısal çözümünü araştırmak için kesikli zaman ayrışımını için  $\Delta t$  zaman artımı olmak üzere

$$\begin{aligned} u_t &\simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \\ u &= \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \\ u_x &= \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

eşitliklerinin kullanılmasını önermişlerdir. Görüldüğü gibi, zamana göre türev için ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırken, kalan terimlerde şimdiki zaman ve bir sonraki zamandaki değerlerin ortalamaları alınmıştır. Zamana göre türev için geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımları da kullanılabilir.

Crank-Nicolson metodunun uygulanmasını basit bir örnek üzerinde incelersek,  $[a, b]$  aralığının eşit aralıklı bölünme noktaları  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  ve  $h = \frac{b-a}{N}$  olsun. Zaman artımı  $k > 0$  ve  $nk$ . zaman olmak üzere  $U(x, t)$  fonksiyonunun konum ve zaman kesikli ayrışımı  $U(a + mh, nk) = U_m^n$  ile gösterilsin.  $U_m^n$  gösterimini  $U$  çözümlerinin  $nk$ . zamandaki ve  $a + mh$  konumundaki çözümlerini ifade eder.



$[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı kısmı türevli diferensiyel denklemin

$$u_t = u_{xx}$$

sonlu fark yaklaşımları

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = \frac{(u_{xx})_m^{n+1} - (u_{xx})_m^n}{2}$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right]$$

olarak bulunabilir.

### 1.1.2 Sonlu elemanlar yöntemi

Fiziksel sürecin matematiksel formül ile ifade edilmesi ve matematiksel formülün ihtiyaca göre kullanılması ve gerekirse istenilen çözümlerinin yapılması, birçok mühendis ve bilim insanlarının uğraştığı alanlardır. Matematiksel formülün ortaya çıkarılması fiziksel problemin durumuna göre diferensiyel denklemlerin oluşmasına sebep olur. Bu diferansiyel denklemler her zamna analitik olarak çözülemediğinden, diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünün bulunmasında sayısal yöntemler kullanılır. Bu sayısal yöntemlerin birisi de sonlu elemanlar yöntemidir.

Sonlu elemanlar yönteminde problem aralığı yada bölgesi sonlu alt aralık ve bölgelere bölünür. Temsili bir aralıkta yaklaşık çözüm belirlenir. Bu yaklaşık çözüm bilinmeyen parametreler ve bazı fonksiyonların kombinasyonundan oluşacak şekilde seçilir. Yaklaşım fonksiyonu ve gerekli türevleri diferansiyel denklemlerin tanımlanan bölgedeki kolokeyşin ve galerkin formunda yerine yazılarak bilinmeyenlere göre cebirsel bir denklem elde edilir. Herbir aralıktaki cebirsel denklemlerin uygun olarak birleştirilmesi ile genel cebirsel denklemlere ulaşılır. Problemin sınır ve başlangıç koşulları cebirsel denklemlere adapte edilerek bu denklem seçilen uygun bir denklem sistemi çözme algoritması ile çözümlür. Denkemin lineer yada liner olmayan olmasına göre cebirsel denklemler lineer yada lineer olmayan formda olur. Lineer olmayan denklemler lineerleştirilerek yada lineer olmayan denklemleri çözen sayısal yöntemlerle çözümlür. Parametreler bulunduktan sonra

yaklaşık çözümlerde yerine yazılarak yaklaşık çözüm belirlenen çözümler fonksiyonel yaklaşık çözümlerdir.

Sonlu elemanlar metodu hem düzgün, hem de düzgün olmayan karmaşık geometrik bölgelerde iyi sonuçlar vermektedir. Pratik, uygulanması kolay ve bilgisayar programlama mantığına uygun bir yöntemdir (Logan, 2007).

Problemin çözüm bölgesinin, alt bölgelerin bir koleksiyonu olarak gösterilmesi sadece sonlu elemanlar yöntemine ait bir yaklaşım değildir. Antik matematikçiler, bu yaklaşımı  $\pi$  sayısının değerini hesaplamak için kullanmışlar ve  $\pi$  sayısının yaklaşık 40 basamağını doğru olarak hesaplamışlardır. Hesaplamaları yaparken bir çemberi sonlu sayıda kenarları olan bir çokgen olarak ele almışlardır. Burada çokgenin herbir kenarı bir sonlu eleman olarak ele alınmıştır. Hrenikoff (1941), bir elastik düzlemi kolonlar ve kirişlerin bir koleksiyonu olarak yapısal analizde kullanmıştır. Courant (1943), bilinmeyen bir fonksiyona yaklaşım yapmak için alt bölgelerde tanımlı parçalı ve sürekli fonksiyonları kullanmıştır. Yöntemin formal gösterimi ise virtuel iş prensibi kullanılarak Argyris and Kelsey (1960) ve bir üçgen matris için rijitlik matrisi oluşturularak Turner, et al. (1956) referanslarında ortaya konulmuştur. Sonlu eleman terimi ilk olarak 1960 da Clough tarafından kullanılmıştır (Reddy, 1993).

### Ağırlıklı rezidü metodu

Sonlu elemanlar yönteminin bir diferansiyel denkleme nasıl uygulandığını ifade edelim.  $L$  bir diferansiyel operatör ve  $v(x)$  bilinen fonksiyon olmak üzere,

$$Lu(x) = v(x) \quad (1.9)$$

bir diferansiyel denklem olsun.  $u(x)$  çözümüne

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (1.10)$$

yaklaşım yapılsın. (1.10) eşitliğinde verilen  $\phi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, N$  fonksiyonları, tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilen taban fonksiyonları ve  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  bilinmeyen

katsayılarıdır.  $u_N(x)$  yaklaşık çözümü (1.9) denkleminde yerine yazılırsa,

$$R(x) = Lu_N(x) - v(x) = Lu_N(x) - Lu(x) \quad (1.11)$$

rezidüsü elde edilir. Rezidüyü küçültmek için,  $\Omega$  tanım bölgesi üzerindeki ağırlıklı integral sifra eşitlenir. Böylece

$$\int_{\Omega} W_j(x)R(x)dx = 0, j = 1, \dots, N \quad (1.12)$$

formunda,  $N$  bilinmeyen ve  $N$  denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir (Irk, 2007). Burada  $W_j, j = 1, \dots, N$  ağırlık fonksiyonlarıdır. (1.12) denklem sisteminin çözülebilir olması için,  $\{W_j\}$  kümesi lineer bağımsız olmalıdır (Reddy, 1993). (1.12) sistemi çözümlenerek  $a_j$  katsayıları bulunur. Bulunan katsayılar (1.2) eşitliğinde yerlerine yazıldığında da  $u_N(x)$  yaklaşık çözümü bulunur.

### Kolokeyşin metodu

Kolokeyşin metodunda (1.9) daki  $U$  bilinmeyenleri için bir (1.10) formunda  $u_N$  yaklaşık çözümü bulunmaya çalışılır. Bu yöntemde  $W_j$  ağırlık fonksiyonları olarak,

$$W_j = \delta(x - x_j) \quad (1.13)$$

Dirac Delta fonksiyonları seçilir. Burada  $x_j$  ler keyfi olarak seçilen kolokeyşin noktalarıdır. Kolokeyşin noktaları genelde birbirlerine eşit uzaklıkta olacak şekilde seçilmektedir. 1.12 denkleminde  $W_j$  ağırlık fonksiyonları yerine  $\delta(x - x_j)$  yazılırsa

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_j)R(x)dx = 0, j = 1, \dots, N \quad (1.14)$$

elde edilir. Kolokeyşin yönteminde rezidü,  $\Omega$  tanım bölgesi üzerindeki  $x_j$  noktalarında sıfır olmalıdır (Reddy, 1993). Buradan

$$\begin{aligned} R(x) &= 0 \\ Lu_N - v(x) &= 0 \\ L \left( \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \right) - v(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

bulunur. 1.15 den  $a_j$  katsayıları hesaplanır ve bu katsayılar (1.10) düğümünde yerine yazılarak fonksiyonel çözüm bulunur.

## 1.2 Spline Fonksiyonlar

İnterpolasyon yöntemi kullanılarak verilen noktalardan geçecek şekilde nokta sayısına uygun eğriler belirlenmektedir. Veri sayısı arttırıldığında buna paralel olarak eğri derecesi artacağından hesaplama sıkıntıları oluşmaktadır. Bunun yerine her bir ardışık veri aralarının uygun düşük dereceli parçalı fonksiyonlar ile yaklaşmak mümkündür. Bu parçalı sürekli fonksiyonlar spline fonksiyonlar olarak adlandırılır. Günümüzde çeşitli formda spline fonksiyonlar geliştirilmiştir. Bu fonksiyonlar sonlu elemanlar metodlarında yaygınca kullanılmaktadır.

$[a, b]$  aralığında seçilen  $x_i, i = 0..N$  bölünme noktaları olsun ( $x_0 = a$  ve  $x_N = b$ ) ardışık bölünme noktaları arasında tanımlı fonksiyonların koleksiyonu spline fonksiyon olarak adlandırılır. Bu fonksiyonlar aşağıdaki ilki özelliğe sahiptir.

- a.  $s(x), j = 1, \dots, N - 1$  olmak üzere, her  $[x_j, x_{j+1}]$  aralığında  $m$ . ya da daha küçük dereceden bir polinomdur. (Burada  $x_0 = -\infty$  ve  $x_{n+1} = -\infty$  olabilir.)
- b.  $s(x)$  ve kendisinin  $1, 2, \dots, (m - 1)$ -inci basamaktan türevleri tanımlanan her aralıkta ve  $x_i (i = 1, \dots, N)$  bölünme noktalarında süreklidir.

Yukarıdaki tanıma göre, parçalı polinom fonksiyonlar, süreklilik ve türevlerinin belirli koşulları sağlaması durumunda bir spline fonksiyon oluşturur.  $m = 0$  için b koşulu geçersizdir ve 0. dereceden spline fonksiyonu birim basamak (adım) fonksiyonu olarak adlandırılır.  $m = 1$  için  $s(x)$  polinomu kırık çizgidir.

Genel olarak,  $s(x); [x_{j-1}, x_j], [x_j, x_{j+1}], j = 1, \dots, N$  ardışık iki alt aralıklarının her birinde derecesi  $m$  ya da daha küçük olan farklı fonksiyonlar olarak verilebilir.  $m > 0$  için  $m$ . dereceden bir  $s(x)$  spline fonksiyonun  $m$ . türevi bir birim basamak fonksiyonudur. Farklı bir tanım olarak  $m$ . dereceden bir spline fonksiyonu bir birim basamak fonksiyonunun  $m$ . basamaktan belirsiz integralidir.

### 1.2.1 Spline fonksiyonların bazı özellikleri

1. Spline fonksiyonları, düzgün (smooth) fonksiyonlardır.
2. Spline fonksiyonları, uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
3. Spline fonksiyonlar, elle yapılan hesaplamalarda ve sayısal bilgisayarlarda uygun programların yapılması için kullanışlıdır.
4. Spline fonksiyonların türevleri ve integralleride yine spline fonksiyonlardır.
5. Yeteri kadar alt bölmelere ayrılmış  $[a, b]$  aralığı üzerinde her sürekli fonksiyon,  $m$ . dereceden spline fonksiyonu ile iyi bir şekilde temsil edilebilir.
6. Küçük dereceden spline' lar çok esnektir ve polinomlardaki gibi salınım sergilemezler.

## 1.3 B-spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyonların oluşturduğu fonksiyon uzaylarının bazıları tanımlanmıştır. Bu tür fonksiyonlar B-spline fonksiyonlar olarak bilinir. Spline fonksiyon uzayındaki fonksiyonların derecelerine göre de farklı dereceden baz fonksiyonlar geliştirilmiştir. Uygulamalarda en çok kullanılan baz fonksiyonları kuadratik, kübik ve kuintik B-spline baz fonksiyonlarıdır. B-spline fonksiyonlarda fonksiyon ve yüzey yaklaşımları diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Eğri uydurma ve interplasyon işlemlerinde B-spline fonksiyon kullanımı yaygındır.

B-spline fonksiyonları yaklaşım fonksiyonunun tamamlansında kullanıldığından sonlu elemanlar fonksiyon algoritmalarının yazılmasında faydalanılmaktadır. Böylece sonlu elemanlar üzerinde diferansiyel denklemin kolokeyşin, Galerkin ve en küçük kareler yöntemlerinin oluşmasında B-spline fonksiyon tanımlı yaklaşım fonksiyonları kullanılabilir.

B-spline kullanımı ile oluşturulan sayısal yöntemler için daha ekonomik ve kolay bilgisayar programı yazılabileceği çalışmalarda ifade edilmiştir.

### 1.3.1 Kuadratik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$  çözüm aralığını,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b \quad (1.16)$$

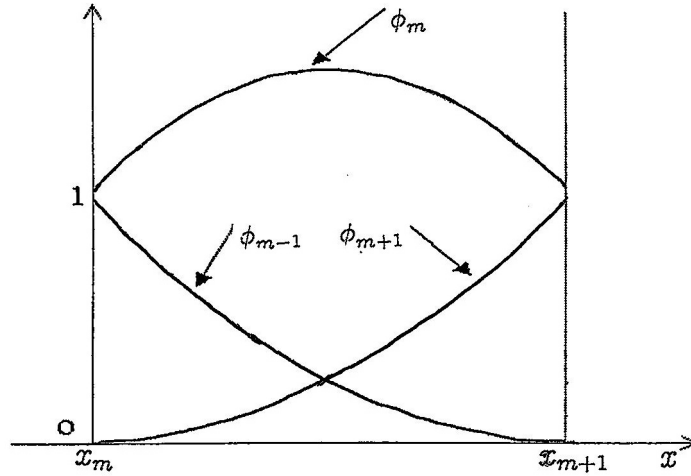
olacak şekilde eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. İlave olarak problem aralığının dışında  $x_{-2}, x_{-1}, x_{N+1}, x_{N+2}$  noktalarını alalım

$$h = x_{m+1} - x_m \text{ ve } m = 0..N + 1$$

olsun. Bu durumda  $[x_{m-1}, x_{m+1}]$   $m = -1..N$  aralıkları üzerinde tanımlı kuadratik B-spline fonksiyonu  $\phi_m^2$  ile gösterilirse,  $\phi_m^2$ ,  $m = -1..N$  fonksiyonları

$$\phi_m^2 = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.17)$$

şeklinde tanımlanır.  $\phi_m^2$  kuadratik B-spline fonksiyonu ardışık üç aralıkta sıfırdan farklı değer aldığından  $[x_m, x_{m+1}]$  şeklindeki bir aralık, ardışık üç kuadratik B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. Bu durum 1.3.1 ile gösterilmiştir.



Şekil 1.1: Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları.

$\phi_m^2$  kuadratik B-spline fonksiyonu ve onun türevinin (1.16) bölünme noktalarında alacağı değerler  $\phi_m^2$  fonksiyonunun tanımından kolayca hesaplanabilir. Buna göre ilgili değerler çizelge 1.3.1 ile verilmiştir.

Çizelge 1.1: Bölünme noktalarındaki kuadratik B-spline değerleri

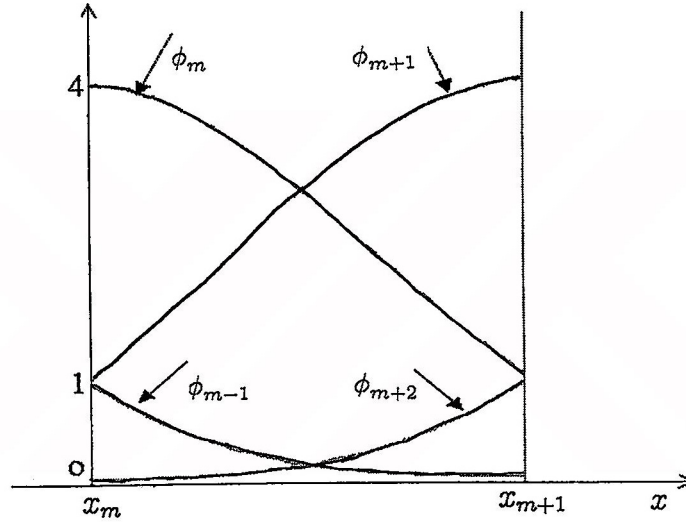
	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$
$\phi_m$	0	1	1	0
$h(\phi_m^2)_x$	0	2	-2	0

### 1.3.2 Kübik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığında  $a = x < \dots < x_N = b$  olacak şekilde eşit mesafeli bölünme noktaları olsun. Bu bölünme noktalarına ilave olarak  $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}$  bölünme noktaları tanımlayalım. Bu bölünme noktaları üzerinde  $\phi_i^3, i = -1..N+1$  B-spline fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyonlar

$$\phi_m^3 = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - (x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1.18)$$

şeklinde tanımlanır.  $\phi_m^3$  kübik B-spline fonksiyonu ardışık dört aralığı örttüğünden  $[x_m, x_{m+1}]$  şeklindeki bir aralık da ardışık dört kübik B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. Bu durum Şekil 1.3.2 ile gösterilmiştir.



Şekil 1.2: Kübik B-spline şekil fonksiyonları

Bölünme noktalarında,  $\phi_m^3$  kübik B-spline fonksiyonu ve onun türevlerinin alacağı değerler çizelge 1.2 de verilmiştir.

Çizelge 1.2: Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri

	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$
$\phi_m^3$	0	1	4	1	0
$h(\phi_m^3)_x$	0	3	0	-3	0
$h^2(\phi_m^3)_{xx}$	0	6	-12	6	0

### 1.3.3 Genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının eşit uzunluklu bölünme noktaları  $x_m$ ,  $m = 0, \dots, N$  olsun. ve  $h = x_m - x_{m-1}$ ,  $m = -2, \dots, N+3$ .  $[a, b]$  aralığın dışında  $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}$



ilave bölünme noktaları alalım. Bu aralıkta tanımlı genişletilmiş kübik B-spline  $E_m$ ,  $m = -1, \dots, N + 1$  fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır (Gang et. al., 2008):

$$E_m(x) = \frac{1}{24h^4} \begin{cases} 4h(1-\lambda)(x-x_{m-2})^3 + 3\lambda(x-x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (4-\lambda)h^4 + 12h^3(x-x_{m-1}) + 6h^2(2+\lambda)(x-x_{m-1})^2 - \\ 12h(x-x_{m-1})^3 - 3\lambda(x-x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (4-\lambda)h^4 - 12h^3(x-x_{m+1}) + 6h^2(2+\lambda)(x-x_{m+1})^2 + \\ 12h(x-x_{m+1})^3 - 3\lambda(x-x_{m+1})^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ 4h(\lambda-1)(x-x_{m+2})^3 + 3\lambda(x-x_{m+2})^4 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{D.D} \end{cases} \quad (1.19)$$

bu fonksiyonda  $\lambda$  bir serbest parametredir.  $\lambda = 0$  olduğunda fonksiyon (1.19) kübik B-spline formuna indirgenir.

$[a, b]$  aralığında tanımlı bölünme noktalarında genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları değerleri (1.19) çizelge 1.3'te verilmiştir.

Çizelge 1.3: Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri

	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$
$24E_m$	0	$4-\lambda$	$2(8+\lambda)$	$4-\lambda$	0
$2h(E_m)_x$	0	1	0	-1	0
$2h^2(E_m)_{xx}$	0	$2+\lambda$	$-2(2+\lambda)$	$2+\lambda$	0

## 1.4 Burgers Denklemi

$\nu$ , bir reel sabit olmak üzere;

$$U_t + UU_x - \nu U_{xx} = 0 \quad (1.20)$$

denklemini Burgers denklemi olarak bilinir ve ilk olarak Bateman (1915) tarafından çalışılmıştır. Fakat denklemin ismi, Burgers'in çalışmalarından dolayı Burgers denklemi olarak bilinmektedir.

Burgers denklemi için başlangıç ve sınır koşulları sırasıyla

$$U(x, 0) = f(x), a \leq x \leq b \quad (1.21)$$

$$U(a, t) = \alpha, U(b, t) = \beta, t \in [0, T] \quad (1.22)$$

olarak seçilir.

Genel olarak Burgers denklemi, ısı iletimi, gaz dinamiği, esneklik, sayılar teorisi, şok dalga teorisi ve turbulans problemlerinin modellenmesinde kullanılır.

Burgers denklemi, lineer olmayan konvektif  $UU_x$  terimi ve  $\nu U_{xx}$  viskozite teriminden dolayı Navier-Stokes denklemine benzer özellikler gösterir. Bu nedenle Navier-Stokes denkleminin nümerik çözümlerine geçmeden önce daha basit bir model olan Burgers denklemini çalışmak uygun bir başlangıçtır. Bu yüzden Burgers denklemi, Navier-Stokes denkleminin nümerik çözüm metodlarının kararlılık ve doğruluğunun test edilmesinde bir model olarak kullanılır.

Hopf (1950) ve Cole (1951), keyfi başlangıç koşulları için Burgers denklemini analitik olarak birbirinden bağımsız olarak çözmüşlerdir. Birçok durumda bu çözümler,  $\nu$  viskozite sabitinin küçük değerleri için çok yavaş yakınsayabilen sonsuz serileri içerir.

Bugüne kadar birçok bilim adamı Burgers denkleminin sayısal çözümlerini bulabilmek için çeşitli nümerik çözüm metodları geliştirdiler. Çok küçük vizkozite değerlerinde denklemin nümerik çözümlerinde zorlukların ortaya çıktığı görüldü. Rubin ve Khosla (1976), kübik spline fonksiyonları olarak Kolokeyşin metoduyla Burgers denkleminin nümerik çözümünü araştırmışlardır. Jain ve Holla (1978), kübik spline fonksiyonlar yardımıyla sonlu farklar metoduyla bir ve iki boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümü üzerinde çalışmışlardır. Jain ve Lohar (1979), bir ve iki boyutlu Burgers denklemini ikiye parçaladıktan sonra kübik spline kullanarak sonlu farklar metoduyla nümerik çözümler üzerinde durmuşlardır. Varoğlu ve Finn (1980), ağırlıklı rezidü metodu ile Burgers denkleminin sayısal çözümünü vermişlerdir. Christie, Griffiths, Mitchell ve Sanz-Serna (1981), kuadratik şekil fonksiyonları olarak Burgers denkleminin Petrov-Galerkin metoduyla nümerik çözümünü elde etmişlerdir. Caldwell, Wanless ve Cook (1981), Galerkin sonlu elemanlar metoduyla Burgers denkleminin nümerik çözümünü vermişlerdir. Herbst, Schoombie ve Mitchell (1982), lineer ve kübik şekil fonksiyonları kullanarak Burgers denkleminin Petrov-Galerkin metoduyla nümerik çözümü üzerine çalışmışlardır. Fletcher (1983), bir ve iki boyutlu Burgers denkleminin beş ve yedi noktalı sonlu farklar metoduyla, lineer, kuadratik ve kübik şekil fonksiyonlarını kullanarak da sonlu elemanlar metoduyla sayısal çözümü üzerine çalışmış ve bulduğu sonuçları birbirleriyle kıyaslamıştır. Evans ve Abdullah (1984), sonlu farklar metodunun bir uygulaması olan explicit grup metodu yardımıyla Burgers denklemini nümerik olarak çözmüşler ve metodun kararlılığını incelemişlerdir. Nguyen ve Reynen (1987), lineer şekil fonksiyonları ile en küçük kareler metoduyla Burgers denklemini çözmüşlerdir. A.H.A Ali, L.R.T Gardner ve G.A. Gardner (1990), kuadratik B-Spline kullanarak Galerkin metoduyla Burgers denkleminin nümerik çözümünü araştırmışlar, metodun kararlılığını incelemişlerdir. A.H.A Ali, L.R.T Gardner ve G.A. Gardner (1991), kübik spline olarak Kolokeyşin metoduyla Burgers denkleminin nümerik çözümünü araştırmışlardır. Kakuda ve Tosaka(1990), genelleştirilmiş sınır elemanları yaklaşımıyla Burgers denkleminin nümerik çözümü üzerinde çalışmışlardır. Iskandar ve Mohsen (1992), Burgers denklemini ikiye parçalayarak sonlu farklar metoduyla sayısal çözüm üzerinde durmuşlardır. Jain, Shankar ve Singh (1995), Burgers denklemini üçe parçaladıktan sonra kübik spline ile sonlu farklar metodunu kullanmış, sayısal çözüm bulmuş ve yerel kesme hatasını hesaplayarak metodlarının kararlılığını incelemiştir.

lerdir. Kutluay, Bahadır ve Özdeş (1999), sonlu farklar metodunun bir uygulaması olan explicit ve tam explicit metodlarıyla Burgers denkleminin sayısal çözümünü elde etmişlerdir. Gülnur Yel (2012), Burgers denkleminin kuadratik ve kübik B-spline polinomları ile nümerik çözümü ve Ali Şahin (2004), Burgers denkleminin B-spline fonksiyonlar yardımıyla nümerik çözümleri üzerine çalışmışlardır. İbrahim Şentürk (2014), Kesirli mertebeden Burgers denkleminin sonlu fark yöntemi ile çözümü ve analizi ve Mustafa Sağlam (2014), Kesirli mertebeden Burgers denkleminin sonlu fark yöntemi ile çözümü ve analizi üzerine çalışmışlardır.

## 2. KONUMA GÖRE PARÇALANMIŞ BURGER DENKLEMİNİN KUADRATİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölüm Ali Şahin (2004)'in yüksek lisans tezinin bazı kısımlarının derlenmesi ile oluşturulmuştur. Burgers denklemi konumuna göre parçalanarak birinci basamaktan konum parçalı burgers denklemi için kuadratik B-spline kolokeyşin algoritması çalışılmıştır.

### 2.1 Kuadratik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda

$$U_t + UU_x - vU_{xx} = 0$$

formunda verilen (1.20) Burgers denklemine

$$V(x, t) = -U_x(x, t)$$

dönüşümü uygulanarak birinci basamaktan denklem kısmi türevli sistemine denklem sistemine dönüşür. Bu sistem bilinmeyen fonksiyonların kısmi türevlerini içerdiğinden yaklaşım fonksiyonu kendisi ve birinci türevleri olan bu fonksiyonlar seçilmelidir. Kuadratik B-spline ve kısmi türevleri sürekli olduğundan kuadratik B-spline fonksiyonlarının kombinasyonu ile oluşturulan yaklaşım fonksiyonu kolokeyşin yönteminde kullanılabilir.

$V(x, t) = -U_x(x, t)$  dönüşümü altında (1.20) ile verilen Burgers denklemi

$$\begin{aligned} U_t - UV + vV_x &= 0 \\ V + U_x &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

ve (1.21) ile verilen başlangıç koşulu

$$U(x, 0) = f(x), V(x, 0) = -f'(x), a \leq x \leq b \quad (2.2)$$

ve (1.22) ile verilen sınır koşulları ise

$$U(a,t) = \alpha, U(b,t) = \beta, V(a,t) = V(b,t) = 0, t \in (0, T) \quad (2.3)$$

olarak yeniden yazılabilir.

$[a, b]$  aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

şeklinde eşit uzunluklu bölünme noktaları seçelim ve  $h = x_{i+1} - x_i, i = 0..N - 1$  ve  $[a, b]$  aralığında tanımlı  $\phi_m(x), m = -1..N$  kuadratik B-spline fonksiyonları, düğüm noktalarında kuadratik B-Spline fonksiyonlar olsun. (2.1) denklemindeki  $U(x, t)$  ve  $V(x, t)$  analitik fonksiyonlarının yaklaşık çözümlerinin,  $U_N(x, t)$  ve  $V_N(x, t)$  olduğunu varsayalım. Bu yaklaşık çözümler kuadratik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} U_N(x, t) &= \sum_{m=-1}^N \delta_m(t) \phi_m(x) \\ &= \delta_{-1}(t) \phi_{-1}(x) + \delta_0(t) \phi_0(x) + \dots + \delta_N(t) \phi_N(x), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} V_N(x, t) &= \sum_{m=-1}^N \sigma_m(t) \phi_m(x) \\ &= \sigma_{-1}(t) \phi_{-1}(x) + \sigma_0(t) \phi_0(x) + \dots + \sigma_N(t) \phi_N(x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Buradaki  $\delta_m$  ve  $\sigma_m$  değerleri, (2.1) denkleminin kuadratik B-spline kolokeyşin formundan, (2.3) sınır koşulları kullanılarak elde edilecek zamana bağlı parametrelerdir.

Kuadratik B-spline fonksiyonlar ardışık üç aralığı örttüğünden  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı ardışık üç B-spline fonksiyonu tarafından örtülür ( 1.3.1 ).

Böylece  $U$  ve  $V$  yaklaşık çözümleri  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığında ardışık üç kuadratik B-spline fonksiyonları cinsinden

$$\begin{aligned} U_m &= \sum_{j=m-1}^{m+1} \delta_j \phi_j \\ V_m &= \sum_{j=m-1}^{m+1} \sigma_j \phi_j \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. (2.6) denklemi ve çizelge ?? kullanılarak,  $U_m, V_m$  fonksiyonlarının ve bu fonksiyonların birinci mertebeden türevlerinin,  $m = 0, 1, \dots, N$  olmak üzere,  $x_m$  bölüm noktalarındaki değerleri (2.4 – 2.5) ifadelerinden eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_m = U(x_m) &= \delta_{m-1} + \delta_m \\ U'_m = U'(x_m) &= \frac{2}{h}(\delta_m - \delta_{m-1}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

ve

$$\begin{aligned} V_m = V(x_m) &= \sigma_{m-1} + \sigma_m \\ V'_m = V'(x_m) &= \frac{2}{h}(\sigma_m - \sigma_{m-1}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

olarak bulunabilir.

o sembolü zamana bağlı türev ve  $d = \delta_{m+1} + \delta_m$  olmak üzere, (2.7 - 2.8) eşitlikleri (2.1) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa,  $2N + 2$  denklemden oluşan

$$\begin{aligned} (\delta_{m-1}^\circ + \delta_m^\circ) - d(\sigma_{m-1}^\circ + \sigma_m^\circ) + v \frac{2}{h}(\sigma_m - \sigma_{m-1}) &= 0 \\ (\sigma_{m-1} + \sigma_m) + \frac{2}{h}(\delta_m - \delta_{m-1}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

$\delta_m$  ve  $\sigma_m$  eleman parametrelerinin iki ardışık zaman aralığı  $n$  ve  $n + 1$ . zamanlarındaki değerlerinin lineer interpolasyonu

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2}, \quad \sigma_m = \frac{\sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n}{2} \quad (2.10)$$

ve bunların zamana göre türevleri, Crank-Nicolson formülü yardımıyla

$$\delta_m^\circ = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{\Delta t}, \quad \sigma_m^\circ = \frac{\sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n}{\Delta t}$$

olarak bulunur. Bu eşitlikler (2.9) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n + \delta_m^{n+1} - \delta_m^n) - \frac{d}{2}(\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n + \sigma_m^{n+1} \sigma_m^n) + \frac{2v}{2h}(\sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n - \sigma_{m-1}^{n+1} - \sigma_{m-1}^n) &= 0 \\ \frac{1}{2}(\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n + \sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n) + \frac{2}{2h}(\delta_m^{n+1} + \delta_m^n - \delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemde gerekli düzenlemeler yapılarak  $2N + 2$  denklemden oluşan  $2N + 4$  bilinmeyenli

$$\begin{aligned} 2h\delta_{m-1}^{n+1} - \beta_{m1}\sigma_{m-1}^{n+1} + 2h\delta_m^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_m^{n+1} &= 2h\delta_{m-1}^n + \beta_{m1}\sigma_{m-1}^n - 2h\delta_m^n - \beta_{m2}\sigma_m^n, \\ -2\delta_{m-1}^{n+1} - h\sigma_{m-1}^{n+1} + 2\delta_m^{n+1} + h\sigma_m^{n+1} &= 2\delta_{m-1}^n - h\sigma_{m-1}^n - 2\delta_m^n - h\sigma_m^n, \\ m &= 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.11)$$

denklemler sistemi bulunur. Burada  $\beta_{m1} = hd \Delta t + 2v \Delta t$ ,  $\beta_{m2} = -hd \Delta t + 2v \Delta t$  ve  $d = \delta_{m-1} + \delta_m$  dir.

(2.11) denklem sistemindeki lineer olmayan terim  $d = \delta_{m-1} + \delta_m$  için  $n$ . zamandaki parametre değerleri  $\delta_{m-1} = \delta_{m-1}^n$  ve  $\delta_m = \delta_m^n$  kullanılarak denklem lineerleştirilir. Bu lineer denklem sisteminin çözülebilmesi için iki bilinmeyenin yok edilerek denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşitlenmesi gerekir. Bu yüzden  $\delta_{-1}^n$  ve  $\sigma_N^n$  parametreleri,  $U_0^n = \delta_{-1}^n + \delta_0^n$  ve  $\sigma_{N-1}^n + \sigma_N^n$  sınır koşulları kullanılarak elimine edilecektir. Böylece  $(2N + 2) \times (2N + 2)$  boyutlu, 5 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

(2.3) sınır koşulları, eleman parametrelerini kullanarak

$$\begin{aligned} \delta_{-1}^n + \delta_0^n &= \alpha \\ \sigma_{N-1}^n + \sigma_N^n &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan sınır parametrelerinin değerleri

$$\begin{aligned} \delta_{-1}^n &= \alpha - \delta_0^n \\ \sigma_N^n &= \sigma_{N-1}^n \end{aligned} \quad (2.13)$$

olarak yazılabilir. Bu değerler (2.11) denklem sisteminde yerine yazıldığında istenilen eliminasyon işlemi yapılmış olur:

$$\begin{aligned} F_1 &= 2h\delta_{-1}^n + \beta_{m1}\sigma_{-1}^n + 2h\delta_0^n - \beta_{m2}\sigma_0^n \\ F_2 &= 2\delta_{-1}^n - h\sigma_{-1}^n - 2\delta_0^n - h\sigma_0^n \\ F_{2N+1} &= 2h\delta_{N-1}^n + \beta_{m1}\sigma_{N-1}^n + 2h\delta_N^n - \beta_{m2}\sigma_N^n \\ F_{2N+2} &= 2\delta_{N-1}^n - h\sigma_{N-1}^n - 2\delta_N^n - h\sigma_N^n \end{aligned}$$







## 2.2 Başlangıç Durumu

(2.16) denklem sistemine iterasyon işleminin uygulanabilmesi için  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  başlangıç parametrelerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için  $U(x, 0)$  ve  $V(x, 0)$  başlangıç koşullarından (2.4) yaklaşık fonksiyonları yardımıyla  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  başlangıç parametreleri hesaplanacaktır.

Başlangıç koşulu için (2.4) denklemlerinden

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) &= \sum_{m=-1}^N \delta_m^0 \phi_m(x) \\ &= \delta_{-1}^0 \phi_{-1}(x) + \delta_0^0 \phi_0(x) + \dots + \delta_N^0 \phi_N(x), \\ V_N(x, 0) &= \sum_{m=-1}^N \sigma_m^0 \phi_m(x) \\ &= \sigma_{-1}^0 \phi_{-1}(x) + \sigma_0^0 \phi_0(x) + \dots + \sigma_N^0 \phi_N(x) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradaki  $\delta_m^0$  ve  $\sigma_m^0$  parametreleri belirlenecek olan parametrelerdir. Başlangıç koşullarının bölünme noktalarındaki

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0) \text{ ve } V_N(x_m, 0) = V(x_m, 0), \quad m = 0, 1, \dots, N$$

değerleri kullanılarak,  $\delta$  parametresi için,

$$\begin{aligned} U(x_0, 0) &= \delta_{-1} + \delta_0 & (2.18) \\ U(x_1, 0) &= \delta_0 + \delta_1 \\ &\vdots \\ U(x_N, 0) &= \delta_{N-1} + \delta_N \end{aligned}$$

ve benzer şekilde  $\sigma$  parametresi için de,

$$\begin{aligned} V(x_0, 0) &= \sigma_{-1} + \sigma_0 & (2.19) \\ V(x_1, 0) &= \sigma_0 + \sigma_1 \\ &\vdots \\ V(x_N, 0) &= \sigma_{N-1} + \sigma_N \end{aligned}$$

şeklinde  $N + 1$  denklemden oluşan  $N + 2$  bilinmeyenli denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemlerinin çözülebilmesi için birer tane bilinmeyenlerinin elimine edilmesi gerekir. Eliminasyon işlemin için  $U'_N(a, 0)$  ve  $V'_N(a, 0)$  sınır koşulları kullanılarak  $\delta_{-1}$  ile  $\sigma_{-1}$  parametreleri yok edilebilir. Böylece  $N + 1$  bilinmeyenli  $N + 1$  denklem sistemleri elde edilir ki, bu sistemlerin çözümleri yerine koyma ile kolayca bulunabilir.

$U'_N(a, 0)$  ve  $V'_N(a, 0)$  sınır koşullarından

$$\begin{aligned}\frac{2}{h}(\delta_0 - \delta_{-1}) &= 0 \\ \frac{2}{h}(\sigma_0 - \sigma_{-1}) &= 0\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da  $\delta_0 = \delta_{-1}$ ,  $\sigma_0 = \sigma_{-1}$  olduğu bulunur. Elde edilen bu sınır parametreleri (2.18) ve (2.19) denklem sistemlerinde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}U(x_0, 0) &= 2\delta_0 \\ U(x_1, 0) &= \delta_0 + \delta_1 \\ &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ U(x_N, 0) &= \delta_{N-1} + \delta_N\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}V(x_0, 0) &= -U'(x_0, 0) = 2\sigma_0 \\ V(x_1, 0) &= -U'(x_1, 0) = \sigma_0 + \sigma_1 \\ &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ V(x_N, 0) &= -U'(x_N, 0) = \sigma_{N-1} + \sigma_N\end{aligned}$$

bulunur. Buradan eleman parametreleri

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \frac{U(x_0, 0)}{2} \\ \delta_1 &= U(x_1, 0) - \delta_0 \\ &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\end{aligned}$$

$$\delta_N = U(x_N, 0) - \delta_{N-1}$$

ve

$$\sigma_0 = \frac{-U(x_0, 0)}{2}$$

$$\sigma_1 = -U(x_1, 0) - \sigma_0$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\sigma_N = -U(x_N, 0) - \sigma_{N-1}$$

olarak elde edilmiş olur.

### 3. ZAMANA GÖRE PARÇALANMIŞ BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölüm Ali Şahin (2004)'in yüksek lisans tezinin bazı kısımlarının derlenmesi ile oluşturulmuştur. Bu bölümde Burgers denklemini zamana göre bölünerek denklem sistemi formunda yazılmıştır. Bölünmüş denklem sistemi kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile çözümleri çalışılmıştır. Denklem sistemleri lineer ve lineer olmayan olarak ikiye parçalanmıştır. Ara zaman değeri kullanılarak lineer olmayan kısımdan lineer olan kısma geçişler yapılarak çözümler elde dillecektir.

#### 3.1 Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda,

$$U_t + UU_x - vU_{xx} = 0$$

formunda verilen (1.20) Burgers denkleminin zamana göre

$$U_t + 2UU_x = 0 \quad (3.1)$$

$$U_t - 2vU_{xx} = 0$$

şeklinde parçalanması yapılarak sayısal çözümü üzerinde çalışılacaktır. (3.1) denklemi ikinci mertebeden türev içerdiğinden nümerik çözümler için kübik B-spline fonksiyonlar kullanılacak ve böylece fonksiyonun ikinci mertebeden türevlerinin sürekliliği sağlanacaktır.

$[a, b]$  aralığını,  $x_m$  bölüm noktalarında  $h = x_m - x_{m-1}, m = 1, \dots, N$  olmak üzere

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

eşit uzunluklu bölünme noktalarını seçelim.  $\phi_m(x), m = -1, 0, \dots, N + 1$ , fonksiyonları, bölüm noktalarında tanımlı, kübik B-spline fonksiyonlar olsun. (3.1) denklemdeki

$U(x, t)$  analitik fonksiyonunun yaklaşık çözümünün,  $U_N(x, t)$  olduğunu varsayalım. Bu yaklaşık çözüm kübik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} U_N(x, t) &= \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t) \phi_m(x) \\ &= \delta_{-1}(t) \phi_{-1}(x) + \delta_0(t) \phi_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t) \phi_{N+1}(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Buradaki  $\delta_m$  değerleri, (3.1) denkleminin kübik B-spline kolokeyşin formundan ve Burges denkleminin sınır koşulları kullanılarak elde edilecek zamana bağlı parametrelerdir.

Kübik B-spline fonksiyonlar ardışık 4 aralığı örttüğünden  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı 4 ardışık B-spline fonksiyonu tarafından örtülür (Şekil 1.3). Böylece  $U$  yaklaşık çözümleri  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığında ardışık kübik B-spline fonksiyonları cinsinden

$$U_m = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j \quad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2) denklemini ve çizelge 1.2 kullanılarak,  $U_m = U(x_m, t)$  fonksiyonunun ve bu fonksiyonun birinci ve ikinci mertebeden  $x$  e göre türevlerinin,  $m = 0, 1, \dots, N$  olmak üzere,  $x_m$  bölüm noktalarındaki değerleri, eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\ U'_m &= U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \\ U''_m &= U''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

olarak bulunur.

(3.4) eşitlikleri (3.1) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa,  $2N + 2$  denklemden oluşan

$$\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} + 2d \frac{3}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) = 0 \quad (3.5)$$

$$\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} - 2v \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) = 0 \quad (3.6)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Burada  $\circ$  sembolü zamana bağlı türev ve  $d = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_m$  olarak alınmıştır.

$n$ . ve  $n + 1$ . zaman adımlarının orta değeri  $n + 1/2$  olmak üzere  $\delta_m$  eleman parametrelerinin ve bunların zamana göre türevlerinin değeri (3.5) denklemi için,

$$\delta_m = \frac{\delta_m^n + \delta_m^{n+1/2}}{4}, \quad \delta_m^\circ = \frac{1}{\Delta t}(\delta_m^{n+1/2} - \delta_m^n) \quad (3.7)$$

eşitlikleri kullanılarak ve (3.6) denklemi için,

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^{n+1/2}}{4}, \quad \delta_m^\circ = \frac{1}{\Delta t}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^{n+1/2}) \quad (3.8)$$

eşitlikleri kullanılırsa (3.5) ve (3.6) denklemleri zamana göre parçalanmış formu bulunabilir. Böylece bu eşitlikler (3.5) ve (3.6) denklem sisteminde sırayla yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t}(\delta_{m-1}^{n+1/2} - \delta_{m-1}^n) + \frac{4}{\Delta t}(\delta_m^{n+1/2} - \delta_m^n) + \\ & \frac{1}{\Delta t}(\delta_{m+1}^{n+1/2} - \delta_{m+1}^n) + \frac{6d}{4h}(\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^{n+1/2} - \delta_{m-1}^n - \delta_{m-1}^{n+1/2}) = 0 \\ & \frac{1}{\Delta t}(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^{n+1/2}) + \frac{4}{\Delta t}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^{n+1/2}) + \frac{1}{\Delta t}(\delta_{m+1}^{n+1/2} - \delta_{m+1}^n) - \\ & \frac{12v}{4h^2}(\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^{n+1/2} - 2\delta_m^{n+1} - 2\delta_m^{n+1/2} + \delta_{m+1}^n + \delta_{m+1}^{n+1/2}) = 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde gerekli düzenlemeler yapılırsa her biri  $N + 1$  denklem ve  $N + 3$  bilinmeyen içeren

$$a_1\delta_{m-1}^{n+1/2} + a_2\delta_m^{n+1/2} + a_3\delta_{m+1}^{n+1/2} = a_3\delta_{m-1}^n + a_2\delta_m^n + a_1\delta_{m+1}^n \quad (3.9)$$

ve

$$a_4\delta_{m-1}^{n+1} + a_5\delta_m^{n+1} + a_4\delta_{m+1}^{n+1} = a_6\delta_{m-1}^{n+1/2} + a_7\delta_m^{n+1/2} + a_6\delta_{m+1}^{n+1/2} \quad (3.10)$$

$$m = 0, 1, \dots, N$$

denklem sistemleri elde edilir. Burada

$$a_1 = 2h - 3d\Delta t, \quad a_2 = 8h, \quad a_3 = 2h + 3d\Delta t$$

$$a_4 = h^2 - 3v\Delta t, \quad a_5 = 4h^2 + 6v\Delta t, \quad a_6 = h^2 + 3v\Delta t, \quad a_7 = 4h^2 - 6v\Delta t,$$

dir.



$N + 1$  denklemden oluşan  $N + 3$  bilinmeyenli (3.9) denklem sisteminin çözülebilmesi için 2 tane bilinmeyen yok edilerek sistemdeki denklem sayısı ile bilinmeyen sayısı eşitlenmelidir. Bu yüzden

$$\delta_{-1}^{n+1/2}, \delta_{-1}^{n+1} \text{ ve } \delta_{N+1}^{n+1/2}, \delta_{N+1}^{n+1}$$

parametreleri,

$$U(a, t) = \alpha \text{ ve } U(b, t) = \beta$$

sınır koşulları kullanılarak yok edilecektir.

$$U_0 = U(x_0, t) = \delta_{-1}^{n+1/2} + 4\delta_0^{n+1/2} + \delta_1^{n+1/2} = \alpha$$

eşitliğinden

$$\delta_{-1}^{n+1/2} = \alpha - 4\delta_0^{n+1/2} - \delta_1^{n+1/2}$$

değeri (3.9) denkleminde  $m = 0$  için yerine yazılır.

$$U_N = U(x_N, t) = \delta_{N-1}^{n+1/2} + 4\delta_N^{n+1/2} + \delta_{N+1}^{n+1/2} = \beta$$

eşitliğinden ise

$$\delta_{N+1}^{n+1/2} = \beta - \delta_{N-1}^{n+1/2} - 4\delta_N^{n+1/2}$$

değeri (3.9) denkleminde  $m = N$  için yerine yazılır.

Benzer şekilde

$$U_0 = U(x_0, t) = \delta_{-1}^{n+1} + 4\delta_0^{n+1} + \delta_1^{n+1} = \alpha$$

eşitliğinden

$$\delta_{-1}^{n+1} = \alpha - 4\delta_0^{n+1} - \delta_1^{n+1}$$

değeri (3.10) denklemde  $m = 0$  için yerine yazılır. Son olarak

$$U_N = U(x_N, t) = \delta_{N-1}^{n+1} + 4\delta_N^{n+1} + \delta_{N+1}^{n+1} = \beta$$

eşitliğinden  $\delta_{N+1}^{n+1} = \beta - \delta_{N-1}^{n+1} - 4\delta_N^{n+1}$  değeri (3.10) denklemde  $m = N$  için yerine yazılır.

Böylece  $(N + 1) \times (N + 1)$  boyutlu, 1. ve  $N$ . denklemlerinde 2 terimi diğer denklemlerde 3 terim elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Thomas

algoritması yardımıyla çözülebilir. (3.9) denkleminde elde edilen  $\delta_m^{n+1/2}$  parametreleri (3.10) denkleminde yerine yazılarak istenen bölünme noktalarındaki belirlenen zamanlardaki çözümler  $\delta_m^{n+1}$  parametrelerinin 3' lü ardışık lineer kombinasyonu ile (3.4) denkleminde belirlenir. Bölüm noktaları ile beraber istenen yaklaşık çözümlerde (3.2) yada (3.3) denklemlerinden bulunabilir.

Lineerleştirilen (3.9) denklemi için her zaman adımında (3.10) denkleminde  $\delta^{n+1}$  bulmadan önce (2.17) ile bir önceki bölümde tanımlanan

$$(\delta_m^*)^{n+1/2} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1/2} - \delta_m^n)$$

lineerleştirme işlemi, cebirsel denklem sisteminin çözümünün iyileştirilmesi için iki ya da üç kez uygulanmalıdır.

## 3.2 Başlangıç Durumu

(3.9) ve (3.10) iterasyon sistemlerinden  $\delta_m^{n+1}$  çözüm parametrelerinin bulunabilmesi için öncelikle  $\delta_m^0$  başlangıç parametrelerinin bulunması gerekir. Bunun için aşağıdaki başlangıç ve sınır koşulları kullanılabilir:

$$\begin{aligned} (U')_N(x_0, 0) &= \frac{3}{h}(\delta_1^0 - \delta_{-1}^0) = U'(x_0, 0) = 0 \\ U_N(x_m, 0) &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 = U(x_m, 0), \quad m = 0, \dots, N \\ (U')_N(x_N, 0) &= \frac{3}{h}(\delta_{N+1}^0 - \delta_{N-1}^0) = U'(x_N, 0) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Başlangıç koşullarının bölünme noktalarındaki değerleri kullanılarak,  $\delta_m^0$  parametresi için,

$$\begin{aligned} U(x_0, 0) &= \delta_{-1}^0 + 4\delta_0^0 + \delta_1^0 \\ U(x_1, 0) &= \delta_0^0 + 4\delta_1^0 + \delta_2^0 \\ &\vdots \\ U(x_N, 0) &= \delta_{N-1}^0 + 4\delta_N^0 + \delta_{N+1}^0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklinde  $N + 1$  denklemden oluşan  $N + 3$  bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için (3.11) ile verilen koşullar kullanılarak  $\delta_{-1}^0$  ile  $\delta_{N+1}^0$  parametreleri yok edilebilir. Böylece  $N + 1$  bilinmeyenli  $N + 1$  denklem sistemi elde edilir ki, bu sistemin çözümü, Thomas algoritması ile bulunabilir.

$$\begin{aligned}\frac{3}{h}(\delta_1^0 - \delta_{-1}^0) &= 0 \\ \frac{3}{h}(\delta_{N+1}^0 - \delta_{N-1}^0) &= 0\end{aligned}$$

eşitliklerinden elde edilen  $\delta_1^0 = \delta_{-1}^0$  ve  $\delta_{N+1}^0 = \delta_{N-1}^0$  değerleri (3.12) denklem sisteminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}U(x_0, 0) &= 4\delta_0^0 + 2\delta_1^0 \\ U(x_1, 0) &= \delta_0^0 + 4\delta_1^0 + \delta_2^0 \\ &\vdots \\ U(x_N, 0) &= 2\delta_{N-1}^0 + 4\delta_N^0\end{aligned}\tag{3.13}$$

bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı eşit olan sistem elde edilir.

(3.13) denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 2 & 4 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_0^0 \\ \delta_1^0 \\ \delta_2^0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^0 \\ \delta_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(x_0) \\ U(x_1) \\ U(x_2) \\ \vdots \\ U(x_N) \\ U(x_{N+1}) \end{bmatrix}$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Thomas algoritması ile bu sistem çözülerek bir sonraki zaman adımına geçilir.

## 4. BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölüm Ali ve arkadaşları (1990) tarafından yapılan çalışmanın düzenlenmesinde oluşmaktadır. Bu bölümde Burgers denkleminin kübik kolokeyşin yöntemi ile çözüm algoritması tanıtılacaktır. Burgers denklemini konuma göre ikinci mertebeden türevlere sahip olduğundan sürekliliği sağlamak için yaklaşım fonksiyonu ikinci basamağa kadar türevlenebilir olmalıdır. Kübik B-spline fonksiyonları da ikinci dereceden sürekli türevlere sahip olduğundan kübik B-spline kolokeyşin yöntemi Burgers denklemine uygulanabilir.

### 4.1 Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu çalışmada

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0 \quad a < x < b \quad (4.1)$$

formundaki lineer olmayan Burgers denkleminin sayısal çözümü araştırılmıştır. Denkleminde  $\nu$  pozitif parametre olup denklem için geçerli olan başlangıç ve sınır şartları önceki bölümlerde olduğu gibidir.

$[a, b]$  aralığının eşit mesafedeki bölünme noktaları

$$a = x_0 < x_1 \dots < x_N = b$$

olarak seçelim.

$[a, b]$  aralığı dışındaki  $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+N}$  bölünme noktalarında kübik b-spline  $\phi_i(x)$ ,  $i = 1..N$  ile gösterilsin. Bu durumda  $X_N = \text{span}\{\phi_{-1}, \phi_1, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}\}$   $[a, b]$  üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için bir baz olacaktır.

Burgers denklemindeki  $U(x, t)$  bilinmeyenine bir yaklaşım fonksiyonu

$$u_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t) \phi_m(x) \quad (4.2)$$

olarak yazılabilir. Buradan  $\delta_m$  zamana bağlı bir parametredir ve kübik B-spline bilinmeyen parametreler kolokeyşin yöntemi sınır ve başlangıç koşulundan belirlenecektir.

Eşit mesafedeki bölünme noktaları seçildiğinde, her bir alt aralığın bölünme noktaları arasındaki mesafe  $h = (x_{m+1} - x_m)$  dir.  $\phi_m(x)$  kübik B-spline fonksiyonu ve onun ilk iki türevi  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığının dışında sıfırdır. Bölünme noktalarındaki  $\phi_m(x)$ ,  $\phi'_m(x)$  ve  $\phi''_m(x)$  değerleri kübik spline fonksiyonu ifadesinden elde edilebilir:

Çizelge 4.1: Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri

$x$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$
$\phi_m(x)$	0	1	4	1	0
$\phi'_m(x)$	0	$\frac{3}{h}$	0	$-\frac{3}{h}$	0
$\phi''_m(x)$	0	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	0

(4.2) eşitliği ile birlikte (4.1) kullanılırsa  $u_m$  bilinmeyen  $\delta_m$  parametreleri cinsinden

$$\left. \begin{aligned} u_m &= u(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\ u_{m+1} &= u(x_{m+1}) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+2} \end{aligned} \right) \quad (4.3)$$

olarak yazılabilir. Böylece  $[x_m, x_{m+1}]$  alt aralığında  $u$  için yaklaşım

$$u = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j \quad (4.4)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}$  eleman parametreleridir. Biz aynı yaklaşımı bölünme noktalarında  $u$  nun konuma göre birinci ve ikinci türevi içinde  $\delta_m$  parametresine göre yazabiliriz. Bu durumda bölünme noktalarında

$$\left. \begin{aligned} u'_m &= u'(x_m) = \frac{3}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \\ u''_m &= u''(x_m) = \frac{3}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

eşitlikleri bulunur.

$\mathbf{d} = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$  vektörünün zamana bağlı parametrelerinin  $n$ . ve  $(n+1)$ . zaman aralığında doğrusal olarak interpolasyonu ve  $\mathbf{d}'$ 'nin zamana göre türevi

$$\mathbf{d} = (1 - \theta)\mathbf{d}^n + \theta\mathbf{d}^{n+1} \quad \frac{d\mathbf{d}}{dt} = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n) \quad (4.6)$$

olarak yazılabilir. Burada  $0 \leq \theta \leq 1$  ve  $\mathbf{d}^n$   $n\Delta t$  zamanındaki parametre değeridir.

$x_m$  bölünme noktalarında (4.3) ve (4.5) eşitlikleri Burgers denkleminde kullanılır ve  $\theta = \frac{1}{2}$  seçimi ile birlikte zaman ayrışımı için (4.6) eşitlikleri kullanılırsa her bir bölünme noktasında

$$\begin{aligned} a_{m1} &= 1 - R_2 Z_m - 2R_2, & a_{m2} &= 4(1 + R_2), & a_{m3} &= 1 + R_1 Z_m - 2R_2, \\ a_{m4} &= 1 + R_{11} Z_m + 2R_{22}, & a_{m5} &= 4(1 + R_2) Z_m + 2R_{22}, & a_{m6} &= 1 - R_{11} Z_m + 2R_{22}, \\ Z_m &= \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n, & R_1 &= \frac{3\theta}{h} \Delta t, & R_2 &= \frac{3\theta}{h^2} \Delta t \\ R_{11} &= \frac{3(1-\theta)}{h} \Delta t, & R_{22} &= \frac{3(1-\theta)}{h^2} \nu \Delta t \end{aligned} \quad (4.7)$$

olmak üzere

$$a_{m1} \delta_{m-1}^{n+1} + a_{m2} \delta_m^{n+1} + a_{m3} \delta_{m+1}^{n+1} = a_{m4} \delta_{m-1}^n + a_{m5} \delta_m^n + a_{m6} \delta_{m+1}^n, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (4.8)$$

elde edilir.

(4.8) sistemi  $N + 1$  denklem ve  $N + 3$  bilinmeyenli  $\mathbf{d} = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$  parametresini içerir. Bu sistemin tek bir çözümünü elde etmek için, iki tane denkleme ihtiyacımız vardır ve bu koşullar, sınırlı koşullardan elde edilir. Sınır koşulundan  $U(a, t) = \alpha$  ve  $U(b, t) = \alpha$  sınır koşullarından  $\delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 = \alpha_1$  ve  $\delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} = \alpha_2$  denklemleri elde edilir.

(4.8) denkleminde  $m = 0$  için

$$a_{01} \delta_{-1}^{n+1} + a_{02} \delta_0^{n+1} + a_{03} \delta_1^{n+1} = a_{04} \delta_{-1}^n + a_{05} \delta_0^n + a_{06} \delta_1^n$$

bulunur ve bu denklemde  $\delta_{-1}^{n+1} = 0 - 4\delta_0^{n+1} + \delta_1^{n+1}$  değeri yerine yazılırsa (4.8)'un birinci denklemini

$$(a_{02} - 4a_{01})\delta_0^{n+1} + (a_{03} - a_{01})\delta_1^{n+1} = a_{04}\delta_{-1}^n + a_{05}\delta_0^n + a_{06}\delta_1^n - a_{01}a_{01}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde (4.8) denkleminde  $m = N$  için

$$a_{N1} \delta_{N-1}^{n+1} + a_{N2} \delta_N^{n+1} + a_{N3} \delta_{N+1}^{n+1} = a_{N4} \delta_{N-1}^n + a_{N5} \delta_N^n + a_{N6} \delta_{N+1}^n$$

elde edilir. Bu denklemde  $\delta_{N+1}^{n+1} = \alpha_2 - 4\delta_{N-1}^{n+1} - 4\delta_N^{n+1}$  değeri yerine yazılırsa (4.8)'un son denklemi

$$(a_{N1} - 4a_{N3})\delta_{N-1}^{n+1} + (a_{N2} - a_{N3})\delta_N^{n+1} = a_{N4}\delta_{N-1}^{n+1} + a_{N5}\delta_N^n + a_{N6}\delta_{N+1}^n - a_{N3}a_2$$

olarak bulunur. Böylece sistem

$$A(\mathbf{d}) \mathbf{d}^{n+1} = B(\mathbf{d}) \mathbf{d}^n + \mathbf{r} \text{ ve } \mathbf{d}^{n+1} = (\delta_0^{n+1}, \delta_1^{n+1} \dots \delta_N^{n+1}) \quad (4.9)$$

olarak matris formunda yazılabilir. Burada  $A(\mathbf{d})$  ve  $B(\mathbf{d})$  üçgensel matrislerdir. İlk ve son satırda iki eleman, aralarda 3 eleman bulunur.  $\mathbf{r}$  vektörü sınır koşullarına bağlı gelen vektördür.

$u_N(x, t)$  'nin yaklaşık çözümü için zamana göre hesaplanması  $\mathbf{d}^n$  vektörünün hesaplanması ile mümkündür.  $\mathbf{d}^0$  vektörü bir kere başlangıç koşulundan hesaplandıktan sonra (4.9) denklem sistemi ile diğer tüm zaman adımlarındaki  $\mathbf{d}$  bilinmeyenler parametresi bulunabilir. Bu ardışık çözüm için gereken katsayılar matrisi üçgensel olduğu için, üçgensel sistem Thomas algoritması kullanılarak çözülür. Katsayılar matrisinde lineerliği bozan terim için ise diğer bölümlerde olduğu gibi bir iç iterasyon işlemi yapılmıştır.

## 4.2 Başlangıç Durumu

$u(x, 0)$  başlangıç şartından,  $\mathbf{d}^0$  parametresi bulunabilir. Bunun için

$$U_N(x, 0) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i^0 \phi_i(x) \quad (4.10)$$

yaklaşımı kullanılabilir. Burada  $\delta_i^0$  aranılan parametredir. Aranılan değer bulunabilmesi için aşağıdaki koşullara ihtiyaç vardır.

a)  $N + 1$  koşul,  $u(x, 0)$ 'ın bölünme noktalarındaki değerlerdir.

b) Başlangıç koşullarının birinci ve ikinci türevlerinin aralığın uç noktalarında aldığı değerler kullanılarak iki ilave denklem elde edilebilir.

Böylece  $\mathbf{d}^0$  vektörünün başlangıç değeri

$$A\mathbf{d}^n = \mathbf{b} \quad (4.11)$$

denklem sisteminin çözülmesi ile bulunur.



## 5. BURGER DENKLEMİNİN GENİŞLETİLMİŞ KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN YÖNTEMİYLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, Burger denkleminin genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak kolokeyşin yöntemi ile sayısal çözümü araştırılmıştır. Sayısal çözümün doğruluğu test problemleri yardımıyla incelenmiştir.

### 5.1 Metodun Uygulanması

Burgers denklemi

$$U_t + UU_x - \nu U_{xx} = 0 \quad (5.1)$$

formundadır. (5.1) Burgers denkleminin Crank Nicolson zaman parçalanması uygulanırsa  $x_m$  bölünme noktalarında

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + \frac{(UU_x)_m^{n+1} + (UU_x)_m^n}{2} - \nu \frac{(U_{xx})_m^{n+1} + (U_{xx})_m^n}{2} = 0 \quad (5.2)$$

eşitliğine ulaşılır. (5.2) denklemi düzenlenirse

$$U_m^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} [(UU_x)_m^{n+1} - \nu (U_{xx})_m^{n+1}] = U_m^n - \frac{\Delta t}{2} [(UU_x)_m^n - \nu (U_{xx})_m^n] \quad (5.3)$$

bulunur.

$x_m$  noktasında genişletilmiş kübik B-spline eşitlikleri

$$U_m = U(x_m) = \frac{4-\lambda}{24}\delta_{m-1} + \frac{8+\lambda}{12}\delta_m + \frac{4-\lambda}{24}\delta_{m+1}, \quad (5.4)$$

$$U'_m = U'(x_m) = -\frac{\delta_{m-1}}{2h} + \frac{\delta_{m+1}}{2h}, \quad (5.5)$$

$$U''_m = U''(x_m) = \frac{2+\lambda}{2h^2}\delta_{m-1} - \frac{2+\lambda}{h^2}\delta_m + \frac{2+\lambda}{2h^2}\delta_{m+1}. \quad (5.6)$$

formunda elde edilmiştir. Bu eşitlikleri (5.3) denkleminde yerine koyarsak

$$a_1 = \frac{4-\lambda}{24}, a_2 = \frac{8+\lambda}{12}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{2h}, b_2 = \frac{1}{2h} \\ c_1 &= \frac{2+\lambda}{2h^2}, c_2 = -\frac{2+\lambda}{h^2} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\left(a_1 + \frac{\Delta t}{2} [U_m^{n+1} b_1 - v c_1]\right) \delta_{m-1}^{n+1} + \left(a_2 - \frac{\Delta t}{2} v c_2\right) \delta_m^{n+1} + \left(a_1 + \frac{\Delta t}{2} [U_m^{n+1} b_2 - v c_1]\right) \delta_{m+1}^{n+1} = \\ &\left(a_1 - \frac{\Delta t}{2} [U_m^n b_1 - v c_1]\right) \delta_{m-1}^n + \left(a_2 + \frac{\Delta t}{2} v c_2\right) \delta_m^n + \left(a_1 - \frac{\Delta t}{2} [U_m^n b_2 - v c_1]\right) \delta_{m+1}^n \end{aligned} \quad (5.7)$$

eşitliğine ulaşılır.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \beta_1 &= a_1 + \frac{\Delta t}{2} [U_m^{n+1} b_1 - v c_1], & \beta_4 &= a_1 - \frac{\Delta t}{2} [U_m^n b_1 - v c_1], \\ \beta_2 &= a_2 - \frac{\Delta t}{2} v c_2, & \beta_5 &= a_2 + \frac{\Delta t}{2} v c_2, \\ \beta_3 &= a_1 + \frac{\Delta t}{2} [U_m^{n+1} b_2 - v c_1], & \beta_6 &= a_1 - \frac{\Delta t}{2} [U_m^n b_2 - v c_1], \end{aligned}$$

olmak üzere  $m = 0, 1, \dots, N$  için

$$\beta_1 \delta_{m-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_m^{n+1} + \beta_3 \delta_{m+1}^{n+1} = \beta_4 \delta_{m-1}^n + \beta_5 \delta_m^n + \beta_6 \delta_{m+1}^n \quad (5.8)$$

denklemleri bulunur. Bu sistem  $N + 3$  bilinmeyenli  $N + 1$  lineer olmayan denklemden oluşmaktadır. Denklem sayısı ile bilinmeyen sayısını eşitlemek için  $\delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}$  parametreleri sınır koşullarının kullanılmasıyla yok edilerek  $(N + 1) \times (N + 1)$  boyutlu 3 bantlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

Sınır koşulları

$$\begin{aligned} U(a, t) &= \frac{4-\lambda}{24} \delta_{-1} + \frac{8+\lambda}{12} \delta_0 + \frac{4-\lambda}{24} \delta_1 = U_0 \\ U(b, t) &= \frac{4-\lambda}{24} \delta_{N-1} + \frac{8+\lambda}{12} \delta_N + \frac{4-\lambda}{24} \delta_{N+1} = U_N \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan sınır parametrelerinin değerleri

$$\delta_{-1} = \frac{24}{4-\lambda} \left( U_0 - \frac{8+\lambda}{12} \delta_0 - \frac{4-\lambda}{24} \delta_1 \right) \quad (5.9)$$



olmak üzere

$$AX^{n+1} = BY^n \quad (5.13)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. (5.13) sisteminde Thomas algoritması kullanılarak  $(n+1)\Delta t$  zaman aralığındaki  $X^{n+1}$  yaklaşımı elde edilir.

(5.13) bir kapalı sistem olduğundan sistemi çözebilmek için her bir zaman adımında aşağıda verilen iç iterasyonlu lineerleştirme işlemi 10 kez yapılmıştır.

- Adım 1:  $\delta_m^* = \delta_m^n$  olmak üzere  $i = 1$  alarak  $\beta_1$  ve  $\beta_3$  katsayılarında  $\delta_m^* = \delta_m^{n+1}$  al.  
 Adım 2:  $i \leq 10$  iken 3. ve 4. adımı gerçekleştir,  
 Adım 3:  $\delta_m^{n+1}$  hesapla ve  $\delta_m^* = \delta_m^{n+1}$  al,  
 Adım 4:  $i = i + 1$ ,  
 Bitir ve bir sonraki zaman adımına geç.

## 5.2 Başlangıç Durumu

$X^{n+1}$  bilinmeyen vektörünün bulunabilmesi için öncelikle  $X^0$  başlangıç vektörünün bulunması gerektiğini yukarıda belirtmiştik. Başlangıç vektörü

$$U_m^0 = \frac{4-\lambda}{24}\delta_{m-1}^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_m^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_{m+1}^0, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (5.14)$$

sistemi çözümlenerek elde edilebilir. Bu sistem  $N+3$  bilinmeyenli  $N+1$  lineer denklemden oluşmaktadır. Bölünme noktalarında

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0) = f(x_m), \quad m = 0, \dots, N$$

olduğundan (5.14) eşitliği açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} U(x_0, 0) &= \frac{4-\lambda}{24}\delta_{-1}^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_0^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_1^0 = f(x_0) \\ U(x_1, 0) &= \frac{4-\lambda}{24}\delta_0^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_1^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_2^0 = f(x_1) \\ &\vdots \\ U(x_{N-1}, 0) &= \frac{4-\lambda}{24}\delta_{N-2}^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_{N-1}^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_N^0 = f(x_{N-1}) \\ U(x_N, 0) &= \frac{4-\lambda}{24}\delta_{N-1}^0 + \frac{8+\lambda}{12}\delta_N^0 + \frac{4-\lambda}{24}\delta_{N+1}^0 = f(x_N) \end{aligned} \quad (5.15)$$

elde edilir. Böylece  $N + 3$  bilinmeyenli  $N + 1$  denklemden oluşan lineer denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sisteminde  $\delta_{-1}^0$  ve  $\delta_{N+1}^0$  parametreleri yok edilirse,  $N + 1$  bilinmeyenli  $N + 1$  denklemden oluşan bir karesel sistem elde edilir. Bunun için

$$U(m, 0) = f(m), \quad m = 0, \dots, N$$

başlangıç koşullardan

$$U'(a, 0) = f'(a)$$

$$U'(b, 0) = f'(b)$$

ve türev koşulları yardımıyla  $\delta_1^0$  ve  $\delta_{N+1}^0$  parametreleri belirlenir.

$$\begin{aligned} \frac{2}{h}(\delta_1^0 - \delta_{-1}^0) &= f'(a) \Rightarrow \delta_{-1}^0 = \delta_1^0 - \frac{h}{2}f'(a) \\ \frac{2}{h}(\delta_{N+1}^0 - \delta_{N-1}^0) &= f'(b) \Rightarrow \delta_{N+1}^0 = \delta_{N-1}^0 + \frac{h}{2}f'(b) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeler (5.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$K = \begin{bmatrix} \frac{8+\lambda}{24} & \frac{4-\lambda}{24} & & & & & \\ \frac{12}{4-\lambda} & \frac{12}{8+\lambda} & \frac{4-\lambda}{24} & & & & \\ & \frac{12}{4-\lambda} & \frac{24}{8+\lambda} & \frac{4-\lambda}{24} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \frac{4-\lambda}{24} & \frac{8+\lambda}{12} & \frac{4-\lambda}{12} & \\ & & & & \frac{12}{4-\lambda} & \frac{24}{8+\lambda} & \\ & & & & & \frac{12}{12} & \frac{4-\lambda}{12} \end{bmatrix},$$

$$X^0 = \begin{bmatrix} \delta_0^0 \\ \delta_1^0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^0 \\ \delta_N^0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} f(x_0) + \frac{h}{2}f'(a)\frac{4-\lambda}{24} \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) - \frac{h}{2}f'(b)\frac{4-\lambda}{24} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$KX^0 = H \quad (5.16)$$

denklem sistemi elde edilir. Dolayısıyla  $(N + 1) \times (N + 1)$  tipinde üç bantlı köşegen denklem sistemi bulunmuş olur. Bu sistemde kolaylıkla Thomas Algoritması ile çözülebilir.

### 5.3 Test Problemleri

Önerilen sayısal yöntemin doğruluğunun kontrolü

$$L_\infty = |U_{\text{tam}} - U_{\text{yaklaşık}}|_\infty = \max_m |(U_m)_{\text{tam}} - (U_m)_{\text{yaklaşık}}|$$

hata normu hesaplanarak kontrol edilecektir.

(a) İlk test probleminde Burgers denklemi için

$$U(x, 1) = \frac{x}{1 + \sqrt{1/t_0} \exp(x^2/(4v))}, \quad a \leq x \leq b, \quad (5.17)$$

formundaki başlangıç şartını ve

$$U(a, t) = U_x(a, t) = 0 \text{ ve } U(b, t) = U_x(b, t) = 0 \quad (5.18)$$

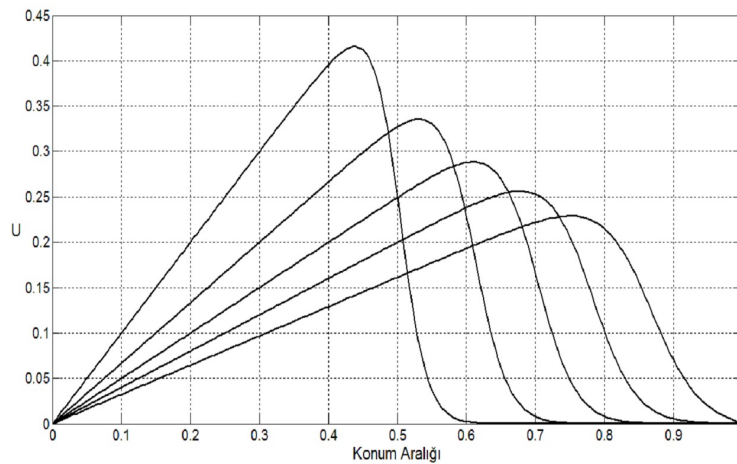
sınır şartları kullanılacaktır.

Bu problem için analitik çözüm ise  $t_0 = \exp(1/(8v))$  olmak üzere

$$U(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{t/t_0} \exp(x^2/(4vt))}, \quad t \geq 1, \quad a \leq x \leq b, \quad (5.19)$$

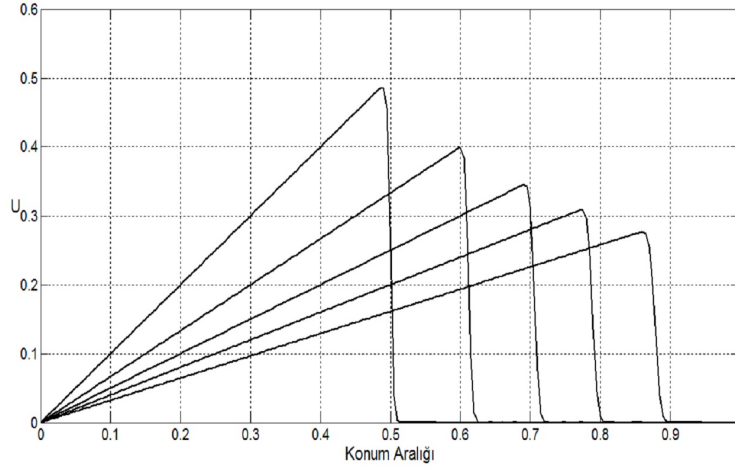
formundadır.

Şekil 5.1 de  $v = 0.005$  için  $t = 1, t = 1.5, t = 2, t = 2.5$  ve  $t = 3.1$  zamanlarında dalgaların durumu verilmiştir.



Şekil 5.1:  $v = 0.005$  için  $t = 1, t = 1.5, t = 2, t = 2.5$  ve  $t = 3.1$  zamanlarında dalgaların durumu

Şekil 5.2 de ise  $v = 0.0005$  için  $t = 1, t = 1.5, t = 2, t = 2.5$  ve  $t = 3.1$  zamanlarında dalgaların durumu verilmiştir.  $v$  değerinin yani vizkozite katsayısının daha düşük değer seçilmesi sonucunda dalgaların keskin hatlara sahip olduğu kolaylıkla görülebilir.



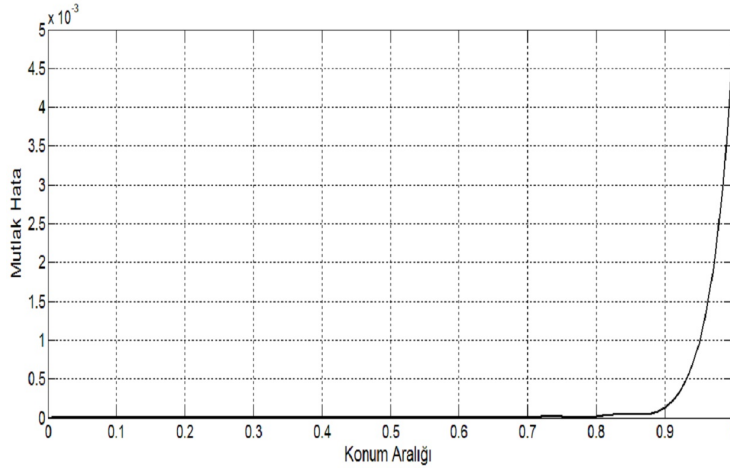
Şekil 5.2:  $v = 0.0005$  için  $t = 1, t = 1.5, t = 2, t = 2.5$  ve  $t = 3.1$  zamanlarında dalgaların durumu

Çizelge 5.1 de ise konum adım uzunluğu olarak  $h = 0.005$  ve zaman adım uzunluğu olarak  $\Delta t = 0.01$  alınmış ve program  $t = 3.1$  zamanına kadar farklı vizkozite katsayıları ve konum aralıkları için çalıştırılmıştır.

Çizelge 5.1:  $h = 0.005, \Delta t = 0.001$  ve farklı zaman artımları için  $L_\infty$  Hata normları

	$L_\infty \times 10^3 (\lambda = 0)$	$L_\infty \times 10^3$
$v = 0.01,$		
$0 \leq x \leq 1$	27.3206	Aynı
$0 \leq x \leq 1.6$	0.0090	0.0063 ( $\lambda = -0.00019$ )
$v = 0.005,$		
$0 \leq x \leq 1$	4.7906	Aynı
$0 \leq x \leq 1.2$	0.0347	0.0241 ( $\lambda = -0.00055$ )
$v = 0.001,$		
$0 \leq x \leq 1$	0.8779	0.5646 ( $\lambda = -0.01450$ )
$v = 0.0005,$		
$0 \leq x \leq 1$	2.9680	1.6195 ( $\lambda = -0.03334$ )

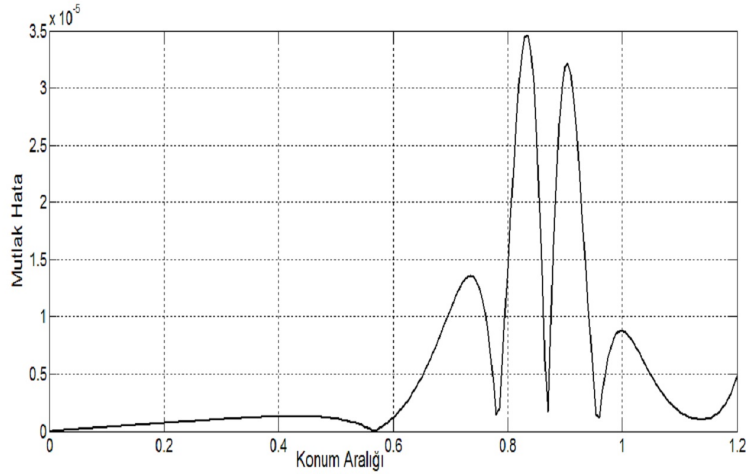
Şekil 5.3 de  $v = 0.005$  ile konum aralığı olarak  $0 \leq x \leq 1$  ve konum adım uzunluğu olarak  $h = 0.005$  ve zaman adım uzunluğu olarak  $\Delta t = 0.01$  seçimleri yapılarak  $t = 3.1$  zamanındaki mutlak hata çizilmiştir. Şekil incelendiğinde maksimum hatanın çizelge 5.1 de verilen değerle uyumlu olduğu ve konum aralığının uç noktalarında olduğu görülür. Maksimum hatanın konum aralığının uç noktalarında olmasının sebebi, sınır şartlarının seçiminden kaynaklanmaktadır.



Şekil 5.3:  $v = 0.005, \lambda = 0$  ve  $0 \leq x \leq 1$  için  $t = 3.1$  deki mutlak hata

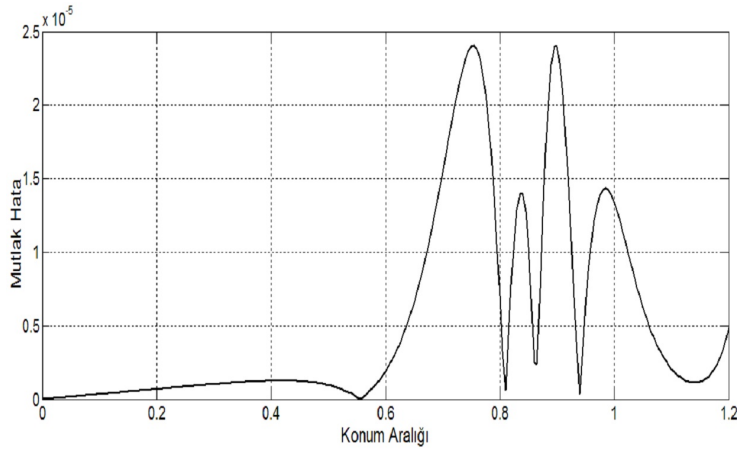
Hatayı düşürmek için konum aralığı  $0 \leq x \leq 1.2$  olarak genişletilmiş ve aynı parametreler kullanılarak maksimum hata tekrar çizilmiştir. Bir önceki şekilde sınır şartlarından kaynaklanan hatadan dolayı  $\lambda$  değerinin değiştirilmesi hatayı etkilememiştir. Konum aralığının genişletilmesi sonucunda artık mutlak hata sınır şartlarından bağımsız olmuştur. Bu sebeble  $\lambda = 0$  ve aynı parametreler için en iyi değer olan  $\lambda = -0.00055$  için grafikler sırasıyla Şekil 5.4 ve Şekil 5.5 de verilmiştir.





Şekil 5.4:  $\nu = 0.005, \lambda = 0$  ve  $0 \leq x \leq 1.2$  için  $t = 3.1$  deki mutlak hata

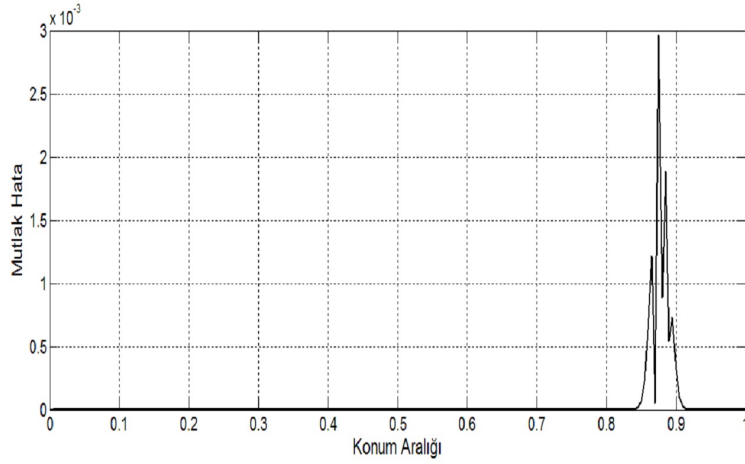
Şekil 5.4 ve Şekil 5.5 incelendiğinde artık mutlak hatanın konum aralığının orta noktalarında olduğu ve çizelge 5.1 ile de uyumlu olduğu görülür. Genişletilmiş kübik B-spline da bulunan  $\lambda$  parametresinin değiştirilmesininde hatayı bir miktar düşürdüğü sonucuna varılabilir.



Şekil 5.5:  $\nu = 0.005, \lambda = -0.00055$  ve  $0 \leq x \leq 1.2$  için  $t = 3.1$  deki mutlak hata

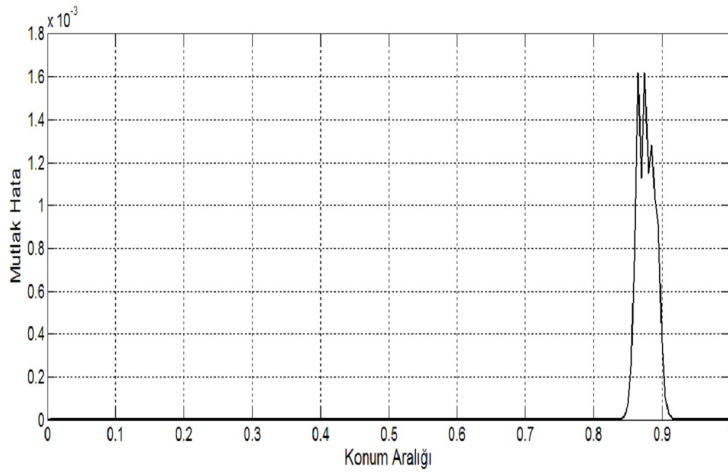
Şekil 5.6 da  $\nu = 0.0005$  olarak seçilen vizkozite katsayısıyla  $0 \leq x \leq 1$  konum aralığı,  $h = 0.005$  konum adım uzunluğu ve  $\Delta t = 0.01$  zaman adım uzunluğu seçimleri yapılarak  $t = 3.1$  zamanındaki mutlak hata  $\lambda = 0$  için çizilmiştir. Mutlak hatanın en büyük değeri konum aralığının uç noktalarında yani sınırlarında gelmediğinden dolayı konum aralığını

geniřletmek mutlak hatayı dahada dūřürtmeyecektir.



Şekil 5.6:  $v = 0.0005$ , ve  $0 \leq x \leq 1$  için  $t = 3.1$  deki mutlak hata

Şekil 5.7 ise en düşük hatayı veren  $\lambda$  parametresi için mutlak hatanın grafiği çizilmiştir.



Şekil 5.7:  $v = 0.0005$ ,  $\lambda = -0.00019$  ve  $0 \leq x \leq 1$  için  $t = 3.1$  deki mutlak hata

(b) İkinci test probleminde Burgers denklemi için  $\alpha, \mu, \gamma$  sabitler ve

$$\eta = \frac{\alpha(x - \mu t - \gamma)}{v},$$

olmak üzere

$$U(x, t) = \frac{\alpha + \mu + (\mu - \alpha) \exp \eta}{1 + \exp \eta}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (5.20)$$

analitik çözümleri kullanılacaktır. Bu problem için

$$U(0,t) = 1 \text{ ve } U(1,t) = 0.2 \quad (5.21)$$

sınır şartları ve

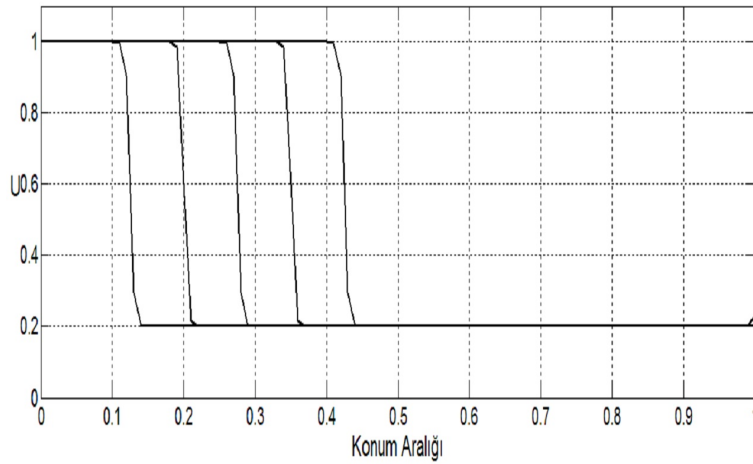
$$\eta = \frac{\alpha(x-\gamma)}{v},$$

olmak üzere

$$U(x,t) = \frac{\alpha + \mu + (\mu - \alpha) \exp \eta}{1 + \exp \eta}, \quad (5.22)$$

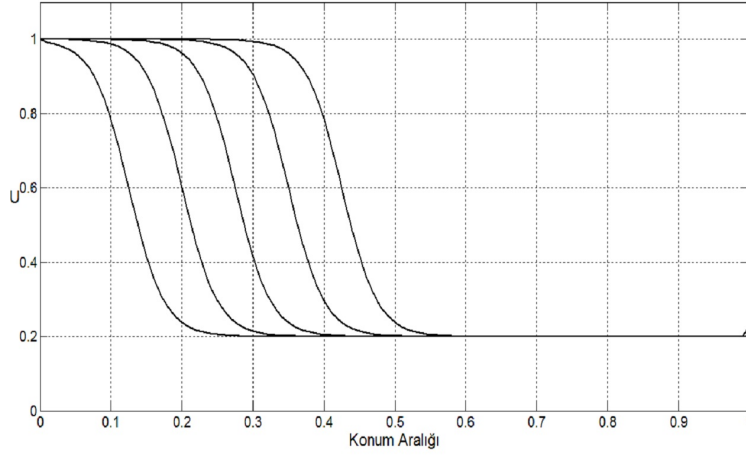
formundaki başlangıç şartı analitik çözümden elde edilebilir.

Şekil 5.8 de  $v = 0.01$  için  $t = 0, t = 0.125, t = 0.25, t = 0.375$  ve  $t = 0.5$  zamanlarında dalgaların durumu verilmiştir.



Şekil 5.8:  $v = 0.01$  için  $t = 0, t = 0.125, t = 0.25, t = 0.375$  ve  $t = 0.5$  zamanlarında dalgaların durumu

Şekil 5.9 de ise  $v = 0.001$  için  $t = 0, t = 0.125, t = 0.25, t = 0.375$  ve  $t = 0.5$  zamanlarında dalgaların durumu verilmiştir.  $v$  viskozite değerinin daha düşük seçilmesi sonucunda dalgaların keskin hatlara sahip olduğu kolaylıkla görülebilir.



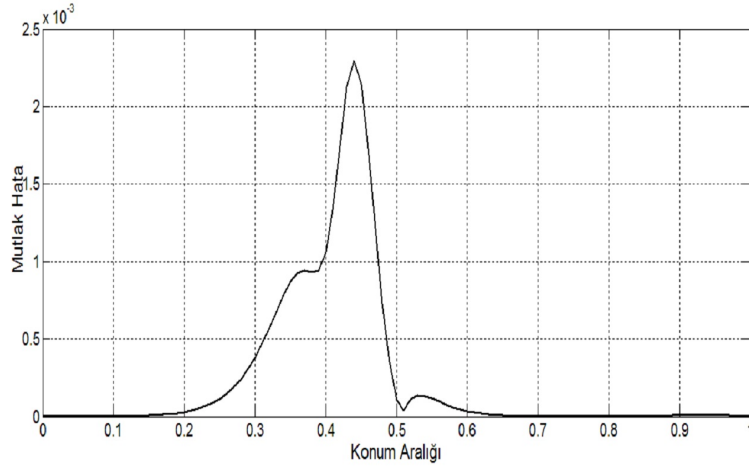
Şekil 5.9:  $v = 0.001$  için  $t = 0, t = 0.125, t = 0.25, t = 0.375$  ve  $t = 0.5$  zamanlarında dalgaların durumu

Çizelge 5.2 de ise farklı konum, zaman adım uzunlukları ve vizkozite değerleri için program  $t = 0.5$  zamanına kadar  $0 \leq x \leq 1$  konum aralığında çalıştırılmıştır.

Çizelge 5.2:  $\Delta t = 0.001$  ve farklı zaman artımları için  $L_\infty$  Hata normları

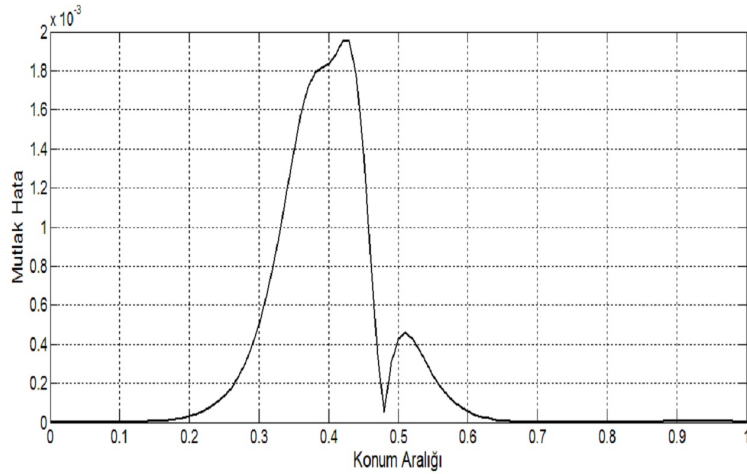
	$L_\infty(\lambda = 0)$	$L_\infty$
$v = 0.01,$		
$h = 0.1$	0.1207741	0.0721418( $\lambda = -1.08901$ )
$h = 0.01$	0.0022945	0.0019513( $\lambda = -0.01071$ )
$v = 0.001,$		
$h = 0.1$	0.6523242	0.2004436( $\lambda = -1.64260$ )
$h = 0.01$	0.0756228	0.0416005( $\lambda = -0.97630$ )

Şekil 5.10 ve Şekil 5.11 de ise sırasıyla  $v = 0.01$  ile konum aralığı olarak  $0 \leq x \leq 1$  ve konum ile zaman adım uzunluğu olarak  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.001$  seçimleri yapılarak  $t = 0.5$  zamanındaki mutlak hatanın grafiği  $\lambda = 0$  ve  $\lambda = -0.97630$  serbest parametreleri kullanılarak çizilmiştir.



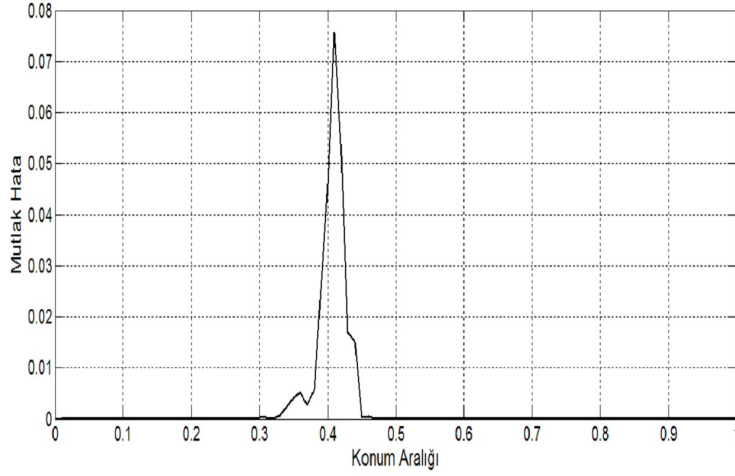
Şekil 5.10:  $\nu = 0.01, \lambda = 0$  ve  $0 \leq x \leq 1$  için  $t = 0.5$  deki mutlak hata

Şekil 5. 10 ve Şekil 5.11 incelendiğinde çizelge 5.2 de bulunan hatalar ile uyumlu olduğu görülebilir. Ayrıca her iki şekildedeki farkedilebileceği gibi en büyük hata konum aralığının uç noktalarında görülmektedir.



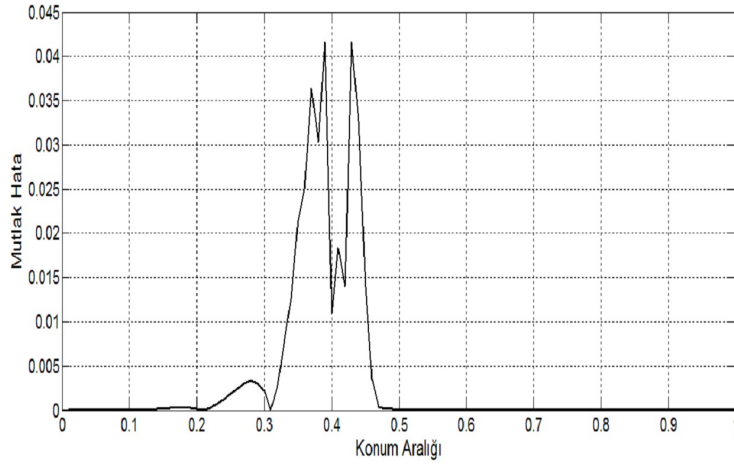
Şekil 5.11:  $\nu = 0.01, \lambda = -0.01071$  ve  $0 \leq x \leq 1$  için  $t = 0.5$  deki mutlak hata

Bu sefer Şekil 5.12 ve Şekil 5.13 de sırasıyla  $\nu = 0.001$  ile konum aralığı olarak  $0 \leq x \leq 1$  ve konum ile zaman adım uzunluğu olarak  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.001$  seçimleri yapılarak  $t = 0.5$  zamanındaki mutlak hatanın grafiği  $\lambda = 0$  ve  $\lambda = -0.01071$  serbest parametreleri kullanılarak çizilmiştir.



Şekil 5.12:  $\nu = 0.001, \lambda = 0$  ve  $0 \leq x \leq 1$  için  $t = 0.5$  deki mutlak hata

$\nu = 0.001$  için çizilen iki şekil incelendiğinde çizelge 5.2 de bulunan hatalar ile uyumlu olduğu görülebilir. Ayrıca her iki şekildedeki de farkedilebileceği gibi en büyük hata konum aralığının uç noktalarında görülmektedir.



Şekil 5.13:  $\nu = 0.001, \lambda = -0.01071$  ve  $0 \leq x \leq 1$  için  $t = 0.5$  deki mutlak hata

(c) Üçüncü test probleminde Burgers denkleminin için

$$U(x, 0) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x - 15}{4\nu} \right) \right], \quad 0 \leq x \leq 30, \quad (5.23)$$

formundaki başlangıç şartını ve

$$U(0, t) = 1 \text{ ve } U(30, t) = 0 \quad (5.24)$$

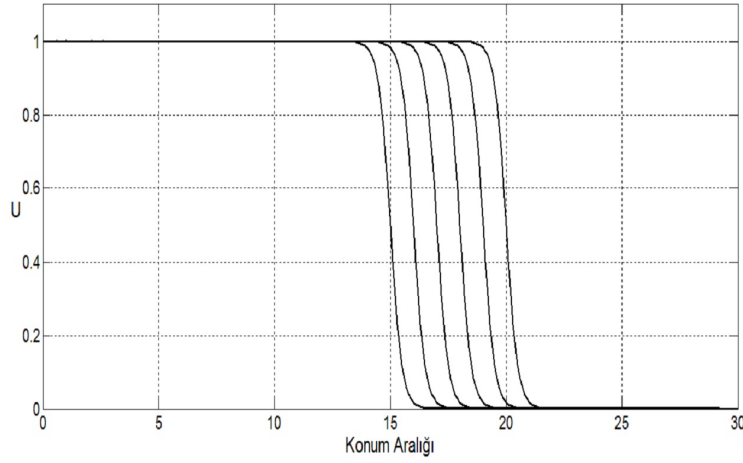
sınır şartları kullanılacaktır.

Bu problem için analitik çözüm ise  $t_0 = \exp(1/(8v))$  olmak üzere

$$U(x,t) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x - \frac{t}{2} - 15}{4v} \right) \right] \quad (5.25)$$

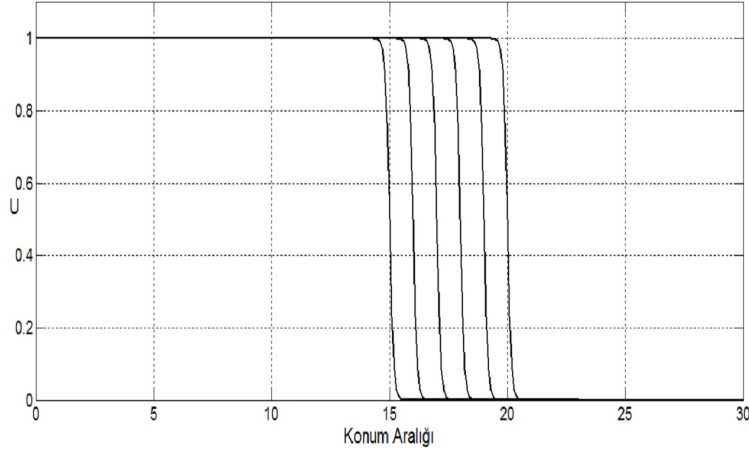
formundadır.

Şekil 5.14 de  $v = 1/8$  için  $t = 0, t = 2, t = 4, t = 6, t = 8$  ve  $t = 10$  zamanlarında dalgaların durumu verilmiştir.



Şekil 5.14:  $v = 1/8$  için  $t = 0, t = 2, t = 4, t = 6, t = 8$  ve  $t = 10$  zamanlarında dalgaların durumu

Şekil 5.15 de ise  $v = 1/24$  için  $t = 0, t = 2, t = 4, t = 6, t = 8$  ve  $t = 10$  zamanlarında dalgaların durumu verilmiştir.  $v$  değerinin yani vizkozite katsayısının daha düşük değer seçilmesi sonucunda dalgaların keskin hatlara sahip olduğu kolaylıkla görülebilir.



Şekil 5.15:  $v = 1/24$  için  $t = 0, t = 2, t = 4, t = 6, t = 8$  ve  $t = 10$  zamanlarında dalgaların durumu

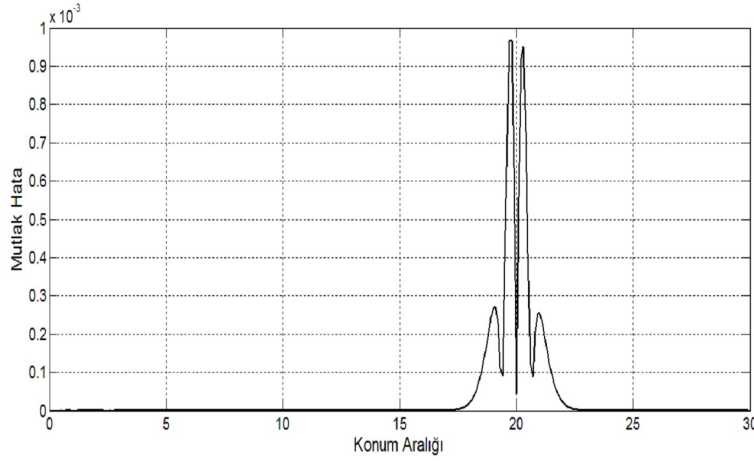
Çizelge 5.3 de ise konum adım uzunluğu olarak  $h = 0.1$  ve zaman adım uzunluğu olarak  $\Delta t = 0.025$  değerleri alınmış ve program  $t = 10$  zamanına kadar farklı vizkozite katsayıları için çalıştırılarak  $L_\infty$  hataları bulunmuştur.

Çizelge 5.3:  $h = 0.1, \Delta t = 0.025$  ve farklı zaman artımları için  $L_\infty$  Hata normları

	$L_\infty \times 10^3 (\lambda = 0)$	$L_\infty \times 10^3$
$v = 1/8$	0.9687	0.5362 ( $\lambda = -0.00514$ )
$v = 1/24$	7.2625	4.0941 ( $\lambda = -0.03499$ )

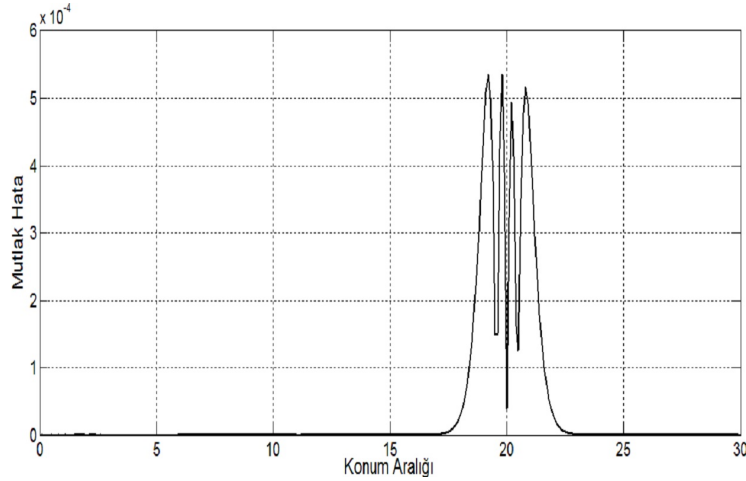
Şekil 5.16 ve Şekil 5.17 de sırasıyla  $v = 1/8$  vizkozite değeriyle  $0 \leq x \leq 30$  konum aralığı üzerinde  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.025$  konum ile zaman adım uzunluğu değerleri seçilerek  $t = 10$  zamanındaki mutlak hatanın grafiği  $\lambda = 0$  ve  $\lambda = -0.00514$  serbest parametreleri için çizilmiştir.





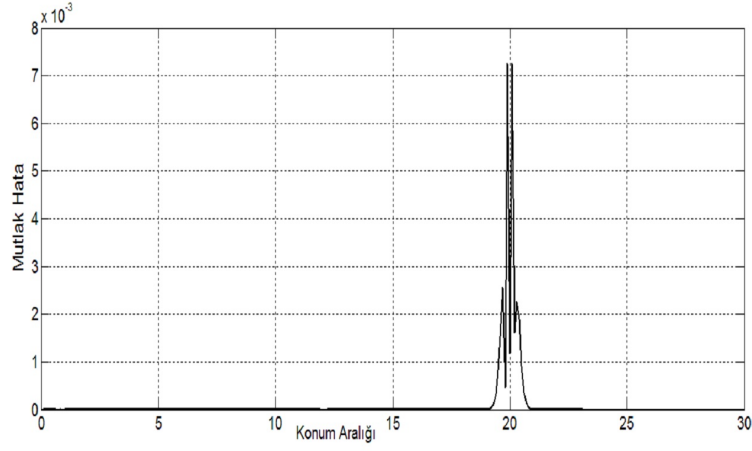
Şekil 5.16:  $\nu = 1/8, \lambda = 0$  ve  $0 \leq x \leq 30$  için  $t = 10$  daki mutlak hata

Şekil 5.16 ve Şekil 5.17 incelendiğinde Çizelge 5.3 de bulunan hatalar ile uyumlu olduğu görülebilir. Ayrıca her iki şekil incelendiğinde en büyük hata konum aralığının orta bölgesinde oluşmaktadır.



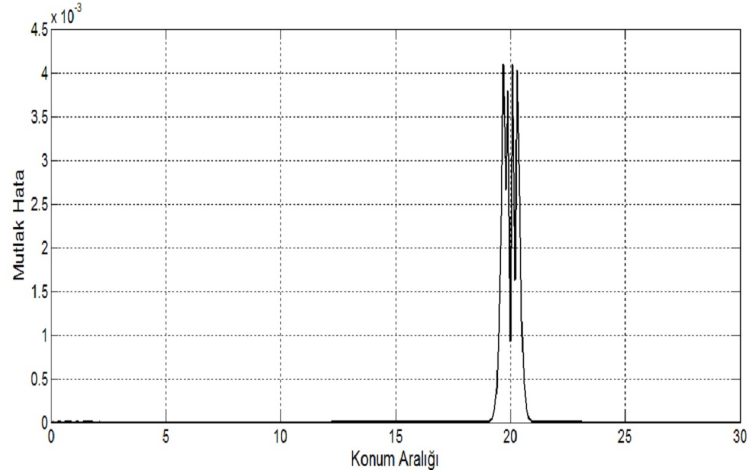
Şekil 5.17:  $\nu = 1/8, \lambda = -0.00514$  ve  $0 \leq x \leq 30$  için  $t = 10$  daki mutlak hata

Şekil 5.18 ve Şekil 5.19 da ise sırasıyla  $\nu = 1/24$  viskozite değeriyle konum aralığı olarak  $0 \leq x \leq 30$  ve konum ile zaman adım uzunluğu olarak  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.025$  seçimleri yapılarak  $t = 10$  zamanındaki mutlak hatanın grafiği  $\lambda = 0$  ve  $\lambda = -0.03499$  serbest parametreleri için çizilmiştir.



Şekil 5.18:  $\nu = 1/24, \lambda = 0$  ve  $0 \leq x \leq 30$  için  $t = 10$  daki mutlak hata

$\nu = 1/24$  için çizilen iki şekil incelendiğinde Çizelge 5.3 de bulunan hatalar ile uyumlu olduğu görülebilir.



Şekil 5.19:  $\nu = 1/24, \lambda = -0.03499$  ve  $0 \leq x \leq 30$  için  $t = 10$  daki mutlak hata

## 6. SONUÇLAR

Bu bölümde önerilen yöntem sonucunda elde edilen sonuçlar, bu tezde tanımlanan metodların sonuçları ve başka yöntemlerin sonuçları ile karşılaştırılacaktır.

### 6.1 İlk Test Problemi İçin Kıyaslamalar

Çizelge 6.1 de farklı  $\nu$  değerleri için  $L_\infty$  hata normları hesaplanarak 5. bölümde önerilen yöntem ile 2., 3. ve 4. bölümde önerilmiş yöntemlerin kıyaslamaları yapılmıştır.

Çizelge 6.1:  $h = 0.005$  ve  $\Delta t = 0.01$  için 3.25 zamanındaki mutlak hatalar

Yöntemler	Konum aralığı	$\nu$	$L_\infty$	
Önerilen yöntem	[0, 1]	0.005	$\lambda = 0$	$9.25 \times 10^{-3}$
			Aynı	
Önerilen yöntem	[0, 1.2]	0.005	$\lambda = 0$	$0.032 \times 10^{-3}$
			$\lambda = -0.00054$	$0.023 \times 10^{-3}$
Önerilen yöntem	[0, 1]	0.0005	$\lambda = 0$	$2.59 \times 10^{-3}$
			$\lambda = -0.04190$	$1.58 \times 10^{-3}$
Kuadratik (Şahin, 2004)	[0, 1]	0.005	$8.98 \times 10^{-3}$	
Kuadratik (Şahin, 2004)	[0, 1]	0.0005	$13.81 \times 10^{-3}$	
Kübik (Şahin, 2004)	[0, 1]	0.005	$21.04 \times 10^{-3}$	
Kübik B-spline (Şahin, 2004)	[0, 1]	0.0005	$21.05 \times 10^{-3}$	
(Ali et.al, 1990)	[0, 1]	0.0005	$2.29 \times 10^{-3}$	

Çizelge incelendiğinde önerilen yöntemin Şahin (2004) tarafından önerilen yöntemlere göre daha iyi sonuçlar verdiği görülür.  $\nu$  vizkozite teriminin daha yüksek olduğu durumda hataların yüksek çıkmasının sebebi  $t = 3.25$  zamanında dalga'nın uç noktasının tam olarak sifira gitmememesinden kaynaklanmaktadır. Sayısal yöntemi uygularken aralığın uç noktalarındaki değeri sınır şartları sebebiyle sıfır almamız sebebiyle bir hata oluşmuştur. Bu durumu bu çalışmada aralığı genişleterek giderdik. Bazı çalışmalarda ise bu durum analitik sınır şartları kullanılarak giderilmiştir.

## 6.2 İkinci Test Problemi İçin Kıyaslamalar

Çizelge 6.2 de ise ikinci test problemi için  $L_\infty$  hata normları ve sayısal değerler hesaplanarak 5. bölümde önerilen yöntem ile 2., 3. ve 4. bölümde önerilmiş yöntemlerin kıyaslamaları yapılmıştır.

Çizelge 6.2:  $h = 1/36$  ve  $\Delta t = 0.01$  için 0.5 zamanındaki sayısal ve analitik değerler

$x$	Kuadratik (Şahin,2004)	Kübik (Şahin,2004)	(Ali et.al.,1990) $\Delta t = 0.025$	Ön. Yön. $\lambda = 0$	Ön. Yön. $\lambda = -0.0397$	Tam Çöz.
0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.278	0.997	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998
0.333	0.977	0.983	0.985	0.982	0.984	0.980
0.389	0.838	0.825	0.847	0.844	0.848	0.847
0.444	0.472	0.465	0.452	0.458	0.456	0.452
0.500	0.237	0.244	0.238	0.238	0.236	0.238
0.556	0.202	0.204	0.204	0.203	0.203	0.204
0.611	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.667	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
1.00	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
$L_\infty$	$19.81 \times 10^{-3}$	$22.23 \times 10^{-3}$		$5.67 \times 10^{-3}$	$3.75 \times 10^{-3}$	

Çizelge incelendiğinde önerilen yöntemin yine diğer iki yönteme göre daha iyi sonuçlar verdiği görülür.

Sonuç olarak bu çalışmanın orjinal kısmı olan genişletilmiş kübik b-spline kolokeyşin metodu Burgers denkleminin sayısal çözümü için uygulandığında elde edilen sonuçlar kabul edilebilir düzeydedir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] Ali, A.H.A., Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., 1990, A Collocation Method for Burgers' Equation Using Cubic Splines, UCNW Maths Pre-Print, 90.29.
- [2] Ali, A.H.A., Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., 1991, A Method of Line Solutions for Burgers' Equation, Proceedings of the Asian Pasific Conference on Computational Mechanics, 11-13 December, Hong Kong.
- [3] Bateman, H., 1915, Some Recent Researches on the Motion of Fluids, Monthly Weather Rec., 43, 163-170.
- [4] Burgers, J.M., 1948, A Mathematical Model Illustrating The Theory of Turbulence, Adv. in App. Mech. 1, 171-199.
- [5] Caldwell, J., Wanless, P., Cook, A.E., 1981, A Finite Element Approach to Burgers' Equation, App. Math. Modelling, 5, 189-193.
- [6] Christie, I., Griffiths, D.F., Mitchell, A.R., Sanz-Serna, J.M., 1981, Product Approximation for Non-linear Problems in the Finite Element Method, IMA, J. Num. Anal., 1, 253-266.
- [7] Cole, J.D., 1951, On a Quasi-linear Parabol in Aerodynamics, Quarterly of Applied Math., 9, 225-236.
- [8] Crank J., Nicolson P., 1947, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 43, 50-64. [3](#)
- [9] Evans, D.J., Abdullah, A.R., 1984, The Group Explicit Method for the Solution of Burgers' Equation, Computing, 32, 239-253.

- [10] Fletcher, C.A.J., 1983, A Comparison of Finite Element and Finite Difference Solutions of the One- and Two Dimensional Burgers' Equations, *Jour. Comp. Physics*, 51, 159-188.
- [11] Gang, X. U., Guo-Zhao, W., 2008, Extended cubic uniform B-spline and a-B-spline, *Acta Automatica Sinica*, 34(8).
- [12] Herbst, B.M., Schoombie, S.W., Mitchell, A.R., 1982, A Moving Petrov-Galerkin Method for Transport Equations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 18, 1321-1336.
- [13] Hopf, E., 1950, The Partial Differential Equation ( $U_t + UU_x = uU_{xx}$ ), *Comm. Pure App. Math.*, 3, 201-230.
- [14] Irk, D., 2007, Bazı kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Doktora Tezi
- [15] Iskandar, L., Mohsen, A., 1992, Some Numerical Experiments on the Splitting of Burgers' Equation, *Num. Meth. Par. Diff. Eq.*, 8, 267-276.
- [16] İnan, B., 2014, Burger Denkleminin Üstel Sonlu Fark Yöntemleri İle Çözümü, İnönü Üniversitesi, Doktora Tezi
- [17] Jain, P.C., Holla, D.N., 1978, Numerical Solutions of Coupled Burgers' Equation, *Int. J. Non-linear Mechanics*, 13, 213-222.
- [18] Jain, P.C., Lohar, B.L. , 1979, Cubic Spline Technique for Coupled Non-linear Parabolic Equations, *Comp. & Maths. with Appl.*, 5, 179-185.
- [19] Jain, P.C., Shankar, R., Singh, T.V., 1995, Numerical Technique for Solving Convective-Reaction-Diffusion Equation, *Math. Comput. Modelling*, 22, 9, 113-125.
- [20] Kakuda, K., Tosaka, N., 1990, The Generalized Boundary Element Approach to Burgers' Equation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 29, 245-261.
- [21] Kutluay, S., Bahadır, A.R., Ozde, A., 1999, Numerical Solution of One Dimensional Burgers' Equation: Explicit and Exact-Explicit Finite Difference Methods, *J. Comp. App. Maths.*, 103, 251-261.

- [22] Lapidus, L., Pinder, G.F., 1982, Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, John Wiley and Sons, 677 p.
- [23] Nguyen, H., Reynen, J., 1987, A Space-Time Finite Element Approach to Burgers' Equation in "Numerical Methods for Nonlinear Problems", Eds. E Hinton et al.: Pincridge Press., 3.
- [24] Rubin, S.G., Khosla, P.K., 1976, Higher-order Splines, AIAA Journal, 14,7,851-858.
- [25] Sağlam, M., 2002, Burger Denkleminin Kuadratik Ve Kübik B-spline Polinomları İle Nümerik Çözümü, Muğla Üniversitesi, Master Tezi
- [26] Smith, G.D., 1978, Numerical solution of partial differential equations, finite difference methods, Oxford university press, 304 p.
- [27] Şahin, A., 2004, Burger Denkleminin B-spline Fonksiyonlar Yardımıyla Nümerik Çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Master Tezi
- [28] Şentürk, İ., 2014, Kesirli Mertebeden Burger Denkleminin Ssonlu Fark Yöntemi İle Çözümü ve Analizi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Doktora Tezi
- [29] Thomas, D., 1975, Artificial enzyme membrane, transport, memory, and oscillatory phenomena, in: D. Thomas, J.-P. Kervenez (Eds.) Analysis and control of imbolised enzyme systems, Springer, Berlin, Heidelberg, Nw York, 1975, 115-150.
- [30] Varoglu, E., Finn, W.D.L., 1980, Space-Time Occurrinorating Caharacteristics for the Burgers' Eng., 16,171-184.
- [31] Yel, G., 2012, Burger Denkleminin Sınır Eleman Yöntemi İle Çözümü, İnönü Üniversitesi, Master Tezi