Hamilton-Jacobi Teorisi ve Minimal Yüzeyler Üzerine

Harun Ayvaz

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Haziran 2016

On Hamilton-Jacobi Theory and Minimal Surfaces

Harun Ayvaz

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

June 2016

Hamilton-Jacobi Teorisi ve Minimal Yüzeyler Üzerine

Harun Ayvaz

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ali Görgülü

Haziran 2016

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Harun Ayvaz' ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Hamilton-Jacobi Teorisi ve Minimal Yüzeyler Üzerine** " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ali Görgülü

İkinci Danışman : - -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ali Görgülü

Üye : Prof. Dr. Cumali Ekici

Üye : Doç. Dr. Yılmaz Dereli

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet Erşahan

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ali Görgülü danışmanlığında hazırlamış olduğum ”Hamilton-Jacobi Teorisi ve Minimal Yüzeyler Üzerine” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

06/06/2016

Harun AYVAZ

ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı Hamilton-Jacobi Teorisi ve Minimal Yüzeyler üzerine bazı araştırmalar yapmak ve bazı özel durumları incelemektir.

Beş bölümden oluşan çalışmamızda giriş bölümünde konunun tarihsel gelişimi hakkında bilgiler aktarılmıştır. İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Hamilton-Jacobi Teorisi hakkında genel bilgiler verilerek bazı özel durumlar için örnekler çözülmüştür. Dördüncü bölümde ise Minimal hiperyüzeylerin genel olarak tanım, teorem ve örnekleri verilerek bazı hesaplamalar yapılmıştır.

Son bölümde ise; yapılan çalışmanın sonucu ve bu çalışma neticesinde verilen öneriler gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hamilton-Jacobi, Minimal yüzeyler, Lagrangian, Hareket fonksiyonu, Euler-Lagrange.

SUMMARY

The aim of this thesis is conduct research about the Hamilton-Jacobi Theory and Minimal Surfaces, and to investigate some special cases.

The study consisting of five parts, provides information about the historical progress of the topic in the first part of introduction. Basic definitions, theorems and concepts take place in the second part while in the following part, examples are solved for some special cases by giving general information about the Hamilton-Jacobi Theory. On the other hand, some calculations are done by giving definitions, theorems and examples related to Minimal Surfaces in the fourth part.

Finally, the results of conducted study and some suggestions related to the study are provided as the last part.

Keywords: Hamilton-Jacobi, Minimal surfaces, Lagrangian, Action function, Euler-Lagrange .

TEŞEKKÜR

Hamilton-Jacobi Teorisi ve Minimal Yüzeyler Üzerine adlı bu tez çalışmamda, bana engin bilgileri ve deneyimleri ile desteklerini esirgemeyen, her konuda bana yol gösteren, her zaman örnek aldığım kıymetli danışmanım Sayın

Prof. Dr. Ali Görgülü

hocama, çalışmam süresince her zaman yanımda olan, motivasyonumun düştüğü anlarda elinden gelen tüm yardımı yapan, bu çalışmanın başından sonuna kadar her ayrıntısında bana yol gösteren, gerektiğinde işin başına geçip bir işin nasıl yapılacağını en iyi şekilde tatbik eden, lisans düzeyinden bugüne kadar yaptığı işler ile bize her daim örnek olan pek kıymetlı hocam Sayın

Prof. Dr. Cumali Ekici

hocama, bizim bu dünyaya gelmemize vesile olan ve bizi yetiştirip buralara kadar taşıyan ve sevgilerini her zaman hissettiğim değerli Annem Songül Ayvaz ve Babam Hüseyin Ayvaz' a, beraber onlarca yıl aynı odayı paylaştığım kardeşim Ebrar Ayvaz' a, ayrıca hayatın ayrı ayrı değil bir bütün olduğu gerçeğiyle yüzleşen bizlerin her zaman maddi ve manevi yanında olan ve sevgilerini bizim üzerimizden eksik etmeyen Mevlüde Yeşilyurt, Fikri Yeşilyurt, Özlem Şenlik ve Servet Seçkin Şenlik' e kalbi teşekkürlerimi iletmeyi bir borç bilirim.

Bu çalışmanın bitilrilmesinde mihenk taşı olan, hayatıma girdiği günden bugüne azmin elinden hiçbir şeyin kurtulamayacağını bana kanıtlayan, her daim destekleri ile beni yüceltip ayakta tutan, sevgili eşim Ülkü Ayvaz' a yaptığı her şey için, en derin duygularımla, teşekkür ederim.

Harun Ayvaz

Haziran 2016

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam)

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
ϕ	Diferensiyellenebilir Eğri
d	Diferensiyel Operatör
g	Riemann Metriği
$[,]$	Lie Bracket Operatörü
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Cümlesi
$C^{\infty}(M,\mathbb{R})$	M Manifoldundan $\mathbb{R}$ ye C^{∞} Fonksiyonların Uzayı
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türev Operatörü
$\chi(M)$	M Manifoldu Üzerindeki Vektör Alanlarının Uzayı
T_PM	$P \in M$ Noktasındaki Tanjant Uzay
∇	Riemann Koneksiyonu
∇_X	X e Göre Kovaryant Türev Operatörü
grad	Gradient Operatörü
Δ	Laplacian
R	Riemann Eğrilik Tensörü
S	Ricci Eğrilik Tensörü
curl	Kurl Tensörü
τ	Skaler Eğrilik
div	Divergens Operatörü
H	Hamiltonian
V	Reel Vektör Uzayı

1. GİRİŞ

Fiziksel matematiğin, ülkemizde hala ikinci sınıf muamele görmesi, çalışma alanlarının sınırlandırılmış olması ve yapılan çalışmaların azlığı, fiziksel matematiğe alan içerisinde yeterince önem verilmediğini ortaya koymaktadır. Bu nedenle birkaç temel fizik kuralına değinmek araştırma açısından önemli görülmektedir. Bir fizik problemini çalışırken yapılması gereken en temel üç şey; uygun bir Lagrangian belirlenmesi (basitçe kinetik ve potansiyel enerjinin farkı alınarak bulunur), sonra Euler-Lagrange denklemlerinin bulunması, daha sonra ise Hamilton-Jacobi denklemi vasıtasıyla da problemin netlik kazanmasıdır. Probleme uygun denklem seçilerek denklemin varlık, teklik ve çözümü olup olmadığı durumları incelenerek problemin gerçek anlamda bir fizik problemi haline gelip gelmediği yukarıda açıklanan yöntemlerle belirlenir. Bu yöntem bir fizikçi için ne kadar kolay olsa da bazen matematikçiler için oldukça zor bir ”meydan okuma” haline dönüşebilir. Bunun sonucunda da, alanın disiplinler arası işlerliğin azlığı sebebiyle, çalışma yapmak oldukça zor bir hale gelmektedir. Bu sebeple araştırmada ele alınan konular, sırasıyla, matematiksel tanımlar, önermeler, yardımcı teoremler ve teoremler olarak verilmiş, çalışma için gerekli fiziksel tanım, teorem ve yardımcı teoremler ise bölümlerin altında ifade edilmiştir.

Tarihsel olarak incelendiğinde yapılan araştırmaların büyük fizik ve matematik dahilerine kadar gittiği kolaylıkla fark edilebilir. Bu alanda yapılan ilk çalışmaların kökeninin 18. yüz yıla kadar dayanıyor olması (Davis vd., 1995), çalışmanın temellerinin sağlam olduğunu göstermektedir. 1900’ lü yıllara doğru gelindikçe fizik ve matematik alanlarının önemi daha da belirginleşmiş ve gerekli çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. 1930’ lardan sonra gerek O’Neill, Spivak gerekse de Do Carmo, Kuhnel, Oprea gibi geometrinin devleri tarafından alana katkı sağlanmaya başlanmış ve bugün kullanılmakta olan temel dergiler, kitaplar ve makaleler oluşmuştur. 1970 ve sonrasında J. Eells ve L. Lemaire fiziksel matematiğin temelleri olan harmonik haritalar hakkında bir çok makale yayınlamıştır. 2000 yılından sonra ise Ovidiu Calin ve Der-Chen Chang bu alanda önemli eserler vermişlerdir.

Minimal yüzeyler teorisi hakkında ilk çalışma Langrange tarafından 1762 yılında yapılmıştır. Lagrange ilk olarak $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ açık aralığındaki yüzeyler arasında bulunabilecek en küçük alanlı yüzeyi araştırmakla işe başlamıştır (Anonim, 2016).

Meusnier 1776 yılında minimal grafik denklemine geometrik bir yorum yaparak, $H = 0$ olduğu zaman yüzeyin en küçük alana sahip olduğunu açıklamıştır. Bu tanımlamadan sonra geleneksel olarak $H = 0$ eşitliğini sağlayan yüzeylere minimal yüzeyler denilmiştir. Bununla birlikte $H = 0$ şartını sağlayan bazı minimal yüzeyler minimum alana sahip olmayabilir.

Ondokuzuncu yüzyılın ortalarına doğru Plateau minimal yüzeylerin fiziksel olarak sabun film olarak incelenebileceğini farketmiştir. Bu yüzden sabit topoloji ve Jordan eğrileri ile sınırlanmış minimal yüzey tanımlama problemine **Plateau Problemi** denir. Bu problem eğriliği özdeş olarak sıfır olan yüzeylere, Plateau minimum probleminin çözümleri olarak göz önüne alınmaları itibaryle minimal yüzeyler denir (Blaschke, 1949; Sinpo, 2004).

Aynı yüzyıl boyunca bu konuyla ilgili Catalan, Bonnet, Serret, Riemann, Weierstrass, Enneper ve daha bir çok matematikçi çalışmalarda bulunmuştur. Modern teori bakımından incelendiğinde Weierstrass ve Enneper'in incelemeleri çok önemlidir. Minimal yüzeyin Weierstrass Enneper gösterimi minimal yüzeyler için önemlidir. Çünkü minimal yüzeyler ve kompleks analiz arasında bağlantı kurmuştur (Anonim, 2016).

Yukarıdaki bilgiler ışığında tezin ikinci ve üçüncü bölümünde temel olabilecek matematiksel bazı tanımlar, yardımcı teoremler ve teoremler verildikten sonra Euler-Lagrange denklemleri, Hamiltonian denklemleri, Lagrange denklemleri ve bu denklemlerin Riemann manifoldları ile olan etkileşimleri verilmiştir. Dördüncü bölümde de minimal yüzeylerin tanımları, teoremleri ve örnekleri verilerek beşinci bölümde sonuç ve öneri kısmına geçilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Öklid Uzayı ve Metrik

Bu kısımda çalışmamızda yararlanacağımız bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1

$$\begin{array}{rlll} d: & E^n \times E^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightarrow & d\,(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} \end{array} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d\,(x,y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.2

$$\begin{array}{rlll} d: & E^n \times E^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightarrow & d\,(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\| \end{array} \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.3 E^n de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, ..., P_n\}$ nokta $n+1$ lisine $\mathbb{R}^n$ de karşılık gelen $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0Pn}\right\}$ vektör $n-$lisi $\mathbb{R}^n$ için ortonormal bir baz ise $\{P_0, P_1, P_2, ..., P_n\}$ sistemine E^n in bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir (Hacısalihoğlu,1998).

Tanım 2.1.4 Bir X cümlesi ve üzerinde bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.5 X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı noktaları için, X de sırasıyla, P *ve* Q noktalarını içine alan A_P *ve* A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak şekilde bulunabilirse X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.6 X *ve* Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise, f fonksiyonuna X den Y ye bir homeomorfizim (topolojik dönüşüm) denir. f bir homeomorfizm olduğu zaman X ile Y uzaylarına da topolojik olarak denktirler ya da kısaca homeomorfiktirler denir (Hacısalihoğlu, 1998).

2.2 Harita, Atlas, Manifold, Riemann Manifoldlar ve Koneksiyonlar

Çalışmanın bu kısmında harita, atlas, manifold, koneksiyon kavramı, koneksiyon kavramı yardımıyla tanımlanan diğer kavramlar, 1-form ve Lie operatörü verilmiştir.

Tanım 2.2.1 M bir $n-$ boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. O zaman tanım gereğince, U bir Ψ homeomorfizmi ile M nin bir W açık alt cümlesine eşlenebilir.

$$\Psi : U \subset E^n \to W \subset M$$

Bu durumda (Ψ, W) ikilisine M de koordinat komşuluğu veya harita denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.2.2 M bir $n-$ boyutlu topolojik manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ yazılır. E^n de U_α ya bir Ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle V_α olsun. Böylece ortaya çıkan

$$\{(\Psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$$

koleksiyonuna bir atlas (koordinat komşuluğu sistemi) denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.2.3 V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay M olsun. $p \in M$ ve $\overrightarrow{v} \in V$ için $(p, \overrightarrow{v})$ sıralı ikilisine M afin uzayının p noktasındaki bir tanjant vektörü denir. M afin uzayının, $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi T_pM ile gösterilir. Bu durumda uzayın adı tanjant uzayı olur. Bu uzay n-boyutlu bir vektör uzayıdır. O halde,

$$T_pM = \{(p, \overrightarrow{v}) \mid \overrightarrow{v} \in V\} \tag{2.3}$$

biçiminde yazılır. Bu uzay da verilen tabanları, $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ tanjant koordinat vektörleri yardımı ile

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial u^i}(\phi(p)) \tag{2.4}$$

ifade edilir. Burada $\phi = (x^1, x^2, ..., x^n)$ p nin civarındaki koordinat sistemini, $(u^1, ..., u^n)$ ler ise $\mathbb{R}^n$ de tanmlı koordinat fonksiyonlarını, $f : M \to \mathbb{R}$ ise düzgün fonksiyonu belirtmektedir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.2.4 M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M manifoldundan $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir Riemann manifoldu adı verilir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.2.5 M bir C^{∞} manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$, $\forall\, f,g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rrcl} \nabla: & \chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X,Y) & \to & \nabla(X,Y)=\nabla_X Y \end{array} \tag{2.5}$$

fonksiyonu için;

i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X\left(fY\right) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ye M manifoldu üzerinde bir afin koneksiyon ve ∇_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir (Hacısalihoğlu, 1998; Spivak, 1979).

Tanım 2.2.6 $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, $P \in E^n$, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ E^n için Öklid koordinat sistemi ve $f : E^n \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda $\overrightarrow{v}_p[f]$ ye f nin $\overrightarrow{v}_p$ için yöne göre türevi denir. $\overrightarrow{v}_p[f]$ yöne göre türevi

$$\overrightarrow{v}_p[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.2.7 M bir C^{∞} manifold ve ∇ da M üzerinde bir afin koneksiyon olsun. O halde her $X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere ∇ dönüşümü;

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ (Sıfır torsiyon özelliği),

ii) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Metrikle bağdaşabilme özelliği)

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde Riemann (veya Levi-Civita) koneksiyonu adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.8 $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $\mathbb{R}^n_\upsilon$ üzerinde doğal koordinat sistemi olsun. $\mathbb{R}^n_\upsilon$ üzerinde vektör alanları V ve $W = \sum W_i \partial_i$ iseler,

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^{n} V(W_i)\partial_i \tag{2.7}$$

vektör alanına W nin V ye göre kovaryant türevi denir.

Burada $\{\partial_i : 1 \leq i \leq n\}$, $\chi(\mathbb{R}^n_\upsilon)$ vektör alanları uzayının standart bazıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.9 M bir C^∞ $n-$manifold ve M üzerinde bir afin koneksiyon ∇ olsun.

$$\begin{array}{rcl} Tor: \quad \chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ (X,Y) & \to & Tor(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{array} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ koneksiyonunun torsiyon tensörü denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.2.10 V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$\begin{array}{rcl} [,]: \quad V\times V & \to & V \\ (X,Y) & \to & [X,Y] \end{array} \tag{2.9}$$

dönüşümü de $\forall\, X,Y,Z \in V$ için

1) 2-lineer

2) Alterne ($\forall X,Y \in V$ için $[X,Y] = -[Y,X]$)

3)

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \equiv 0 \tag{2.10}$$

olarak verilsin. $[,]$ dönüşümüne V üstünde bir Lie operatörü (Lie parantez operatörü) denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.2.1 M bir C^∞ manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$\begin{array}{rcl} [,]: \quad \chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ (X,Y) & \to & [X,Y] \end{array} \tag{2.11}$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için

$$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf) \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanırsa $[,]$ bir Lie operatörüdür (Boothby, 1986).

Tanım 2.2.11 (M,g) bir Riemann manifoldu ve $X \in \chi(M)$ için L_X, keyfi bir (p,q) tipinde tensör alanını yine (p,q) tipinde bir tensör alanına götüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir operatör olsun, X e göre Lie türev operatörü denir (Yano ve Kon, 1984; Duggal ve Bejancu, 1996);

i) $L_X(f) = X(f), \quad \forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$

ii) $L_X Y = [X,Y], \quad \forall Y \in \chi(M)$

iii) $L_X g(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y), \forall X,Y$ ve $Z \in \chi(M)$.

Tanım 2.2.12

$$\begin{array}{rlcl} d: & C(\mathbb{E}^n,\mathbb{R}) & \rightarrow & \chi^*(\mathbb{E}^n) \\ & f & \rightarrow & df \end{array} \tag{2.13}$$

öyle ki, $\forall\ X \in \chi(\mathbb{E}^n)$ için $df(X) = X[f]$ şeklinde tanımlı d fonksiyonuna diferensiyel operatör denir (Willmore, 1959).

Tanım 2.2.13 $P \in \mathbb{E}^n$ noktasındaki kotanjant uzayı $T^*_{\mathbb{E}^n}(P)$ olsun.

$$w: \quad \mathbb{E}^n \quad \rightarrow \quad \bigcup_{P\in\mathbb{E}^n} T^*_{\mathbb{E}^n}(P)$$

fonksiyonu için

$$\pi \circ w = I: \quad \mathbb{E}^n \quad \rightarrow \quad \mathbb{E}^n$$

bir özdeşlik fonksiyonu olacak şekilde

$$\pi: \quad \bigcup_{P\in\mathbb{E}^n} T^*_{\mathbb{E}^n}(P) \quad \rightarrow \quad \mathbb{E}^n$$

fonksiyonu mevcutsa w ya $\mathbb{E}^n$ üstünde $1-$form denir ve bu $1-$formların cümlesi $\chi^*(\mathbb{E}^n)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.2.14 T_pM nin dual uzayı T_p^*M olsun. Bu uzaya M üzerinde tanımlanan kotanjant uzayı denir. T_p^*M nin elamanları kotanjant vektör olarak adlandırılır. M üzerinde tanımlan 1-form ω öyle bir fonksiyondur ki $p \in M$ noktasında $\omega_p \in T_p^*M$ kotanjant vektörlerine denk gelmektedir. 1-formlara örnek vermek gerekirse, $f \in \mathcal{F}(M)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu gösterilebilir. Bu fonksiyonun,

$$(df)_p : T_pM \to \mathbb{R}$$

$$(df)_p(v) = v_p(f), \qquad \forall v_p \in T_pM \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanır ve yerel koordinatlarda, $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$ dir. Burada $\{dx^i\}$ T_p^*M' nin bir tabanıdır. Dual uzayda $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$, T_pM' nin bir bazıdır. Genelleme yapılacak olursa, 1-formlar,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega^i dx^i \tag{2.15}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\omega^i = \omega(\frac{\partial}{\partial x_i})$ ve M manifoldun üzerinde bulunan tüm 1-formların kümesi $\chi^*(M)$ şeklinde gösterilir (Calin ve Chang, 2005).

Yardımcı Teorem 2.2.1 (Poincare Teoremi) M bir $n-$manifold ve $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ olsun. O zaman,

$$d^2 f = d(df) = 0 \tag{2.16}$$

dır (Hacısalihoğlu, 2004).

Yardımcı Teorem 2.2.2 (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Riemann koneksiyon olsun. O zaman $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için Riemann koneksiyonu,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y,Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Kozsul formülü ile tek türlü belirtilir (Kuhnel, 2006).

Tanım 2.2.15 (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için $X\Lambda Y$ lineer operatörü

$$(X\Lambda Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \tag{2.18}$$

olarak tanımlanır (Olszak ve Rosca, 1991).

2.3 Tensörler ve Eğrilik Tensörleri

Bu kısımda çalışmanın sonraki bölümlerinde sıkça kullanılacak olan tensörler, eğrilik tensörleri tanımlanmış ve bununla ilgili bazı önemli teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.3.1 $\mathbb{R}$ sayılar cismi üzerinde $p-$tane vektör uzayı $V_1,\ V_2,\ ...,\ V_p$ olsun.

$$f:\ V_1 \times V_2 \times\ ... \times\ V_p \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $u_i, v_i \in V_i,\ \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{array}{ll} 1.\ f(u_1,\ u_2,\ ...,\ u_i+v_i,\ ...,\ u_p) & = f(u_1,\ ...,\ u_i,\ ...,\ u_p)+f(u_1,\ ...,\ v_i,\ ...,\ u_p) \\ 2.\ f(u_1,\ u_2,\ ...,\ \lambda u_i,\ ...,\ u_p) & = \lambda f(u_1,\ u_2,\ ...,u_i,\ ...,\ u_p) \end{array}$$

özellikleri sağlanıyor ise f ye $i-$yinci yere göre lineerdir denir. Bu durumda, $\forall i=1,\ 2,\ ...,p$ için (1) ve (2) özellikleri sağlanıyor ise f fonksiyonuna $p-$lineer fonksiyon denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.2 $\mathbb{R}$, reel sayılar cismi üzerinde $r-$ tane vektör uzayı $V_1,\ V_2,\ ...,\ V_r$ ve $r-$lineer dönüşümlerin

$$\mathcal{L}(V_1,\ V_2,\ ...,\ V_r;\ \mathbb{R}) = \left\{ f \mid f : V_1 \times V_2 \times\ ... \times V_r \overset{r-lineer}{\to} \mathbb{R} \right\}$$

cümlesinin $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı olduğunu biliyoruz. Bu vektör uzayına $V_1^*,\ V_2^*,\ ...,\ V_r^*$ dual vektör uzaylarının tensör çarpımı denir ve

$$\mathcal{L}(V_1,\ V_2,\ ...,\ V_r;\ \mathbb{R}) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$$

ile gösterilir. Böylece $V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına $r-$yinci mertebeden (veya r. mertebeden) kovaryant tensör (veya kovaryant r-tensör) denir.

$V_1 = V_2 = ... = V_r = V$ ise $V^* \otimes V^* \otimes ... \otimes V^*$ uzayına bir kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da r. dereceden bir kovaryant tensör veya kovaryant r-tensör denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.3 V vektör uzayı ve V nin dual uzayı V^* olmak üzere

$$(V^*)^* \equiv V$$

dir. Yukarıdaki Tanım 2.3.2 de verilen ifadelerde V yerine V^* alınarak V^* üzerinde $s-$ lineer fonksiyonların vektör uzayı elde edilebilir. Bu uzaya kontravaryant tensör uzayı denir. Bu uzayı

$$\mathcal{L}(V^*) = \mathcal{L}(V^*,\ V^*,\ ...,\ V^*;\ \mathbb{R}) = \underbrace{V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_s} = \otimes^s V$$

ve

$$T^s(V^*) = \otimes^s V$$

olarak alacağız. Böylece

$$\begin{aligned} T^0(V^*) &= \mathbb{R} \\ T^1(V^*) &= V \end{aligned}$$

elde edilir. $T^s(V^*)$ tensör çarpımına bir kontravaryant $s-$ tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da $s-$ inci mertebeden bir kontravaryant tensör veya bir kontravaryant $s-$ tensör denir (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.4 $p \in M$ noktasında ki (r,s) tipindeki bir tensör,

$$T : (T_p^* M)^r \times (T_p M)^s \to \mathbb{R}$$

multi-lineer bir fonksiyondur. (r,s) tipindeki $\mathcal{T}$ tensör alanı düzgün bir haritadır. Yerel koordinatlarda,

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^{i_1 i_2 \dots i_s}_{j_1 j_2 \dots j_r} dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j^r} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \tag{2.19}$$

yazılır. Burada r ler 1-formlar gibi, s ler ise vektör alanları gibi hareket eder ve

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\omega_1, ..., \omega_r, X_1, ..., X_s) &= \mathcal{T}^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} dx_{j_1}(X_1)...dx_{j_r}(X_r) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(\omega_1)... \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}(\omega_s) \\ &= \mathcal{T}^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} X_1^{j_1} ... X_r^{j_r} \omega_1^{i_1} ... \omega_s^{i_s}. \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda $\mathcal{T}$ tensörü, $s-kovaryant$ ve $r-kontravaryant$' tır denir (Calin ve Chang, 2005; Spivak, 1979).

Tanım 2.3.5. M Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde Riemann koneksiyonu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R : \quad \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\to R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z\text{-}\nabla_Y \nabla_X Z\text{-}\nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned} \tag{2.20}$$

biçiminde tanımlanan R fonksiyonu M manifoldu üzerinde $(1,3)$ tensör alanıdır. Bu tensör alanı M manifoldunun Riemann eğrilik tensör alanı olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003; Spivak, 1979).

Yardımcı Teorem 2.3.1. (M,g) bir Riemann manifoldu ve R Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için;

i) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(Y,X)Z,W)$,

ii) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$,

iii) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

yazılır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.6 (M,g) bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$, $\chi(M)$' nin bir bazı olsun. Böylece $\forall X,Y \in \chi(M)$ için g Riemann metriği

$$g(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(X,e_i)\, g(e_i,Y) \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlanır (De ve Shaikh, 2007).

Tanım 2.3.7 (M,g) bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu ve $\{X_1,...,X_n\}$, $\chi(M)$' nin bir bazı olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rlll} Q: & \chi(M) & \rightarrow & \chi(M) \\ & X & \rightarrow & Q(X) = -\sum\limits_{i=1}^{n} R(X_i,X)X_i \end{array} \tag{2.22}$$

şeklinde tanımlı Q operatörüne M nin Ricci operatörü adı verilir. Ayrıca Q yardımı ile M' nin Ricci eğrilik tensörü S,

$$\begin{array}{rlll} S: & \chi(M)\times\chi(M) & \rightarrow & C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\ & (X,Y) & \rightarrow & S(X,Y) = g(Q(X),Y) \end{array} \tag{2.23}$$

biçiminde tanımlanan $(0,2)$ tipinde bir tensördür. Eğer

$$S(X,Y) = \lambda g(X,Y) - \mu\eta(X)\eta(Y) \tag{2.24}$$

ise (M,g) manifolduna bir $\mu-$Einstein manifoldu denir. $\mu = 0$ ise (M,g) manifoldu Einstein manifold olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.3.8 n-boyutlu M Riemann manifoldu üzerinde R Riemann eğrilik tensörü ve $\{e_1,...,e_n\}$, $\chi(M)$' nin bir bazı olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için S Ricci eğrilik tensörü,

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \tag{2.25}$$

şeklinde tanımlanır (Oprea, 1997).

Tanım 2.3.9 (M,g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,...,e_n\}$, T_PM tanjant uzayının bir bazı olmak üzere M nin skaler eğriliği,

$$\tau=\sum_{i=1}^{n}S(e_i,e_i) \tag{2.26}$$

biçiminde tanımlanır (Chen, 1973).

Teorem 2.3.1 M Riemann manifoldu üzerinde tanımlı 3-boyutlu R Riemann eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için S Ricci eğrilik tensörü, Q Ricci operatörü ve τ skaler eğriliği cinsinden

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= S(Y,Z)X-g(X,Z)QY+g(Y,Z)QX \\ &\quad -S(X,Z)Y-\frac{\tau}{2}\left[g(Y,Z)W-g(X,Z)Y\right] \end{aligned} \tag{2.27}$$

şeklinde yazılır (Yıldız, vd., 2013).

2.4 Gradient Vektör Alanı ve Divergens

Tanım 2.4.1 (M,g) Riemann manifoldu olmak üzere, $f\in\mathcal{F}(M)$ düzgün bir fonksiyon olsun. f nin gradienti,

$$g(\nabla f,X)=df(X), \qquad \forall X\in\chi(M) \tag{2.28}$$

şeklinde yazılır. Burada kullanılan ∇f, M üzerinde tanımlanan ve metrik olarak df ye denk olan bir vektör alanıdır. Unutulmaması gereken bir nokta da gradientin,

$$df(X)=X(f)$$

şeklinde yazılabilir olmasıdır. Yerel koordinatlarda Levi-Civita koneksiyonu ile olan karışıklığı gidermek amacıyla gradienti,

$$\nabla f=\sum_{i=1}^{n}(\nabla f)^j\frac{\partial}{\partial x_j}$$

notasyonu ile ifade ederiz. Bu durumda,

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

kullanılarak (2.28) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$g_{ij}(\nabla f)^jX^i=\frac{\partial f}{\partial x_j}X^i, \qquad \forall X\in\chi(M) \tag{2.29}$$

denklemi elde edilir. Gradientin bileşenleri olarak,

$$(\nabla f)^j = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

ve daha sonra da,

$$\nabla f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

tekrarlanan indekslerin toplamı olarak ifade edilir (Calin ve Chang, 2005).

Tanım 2.4.2 M manifoldu üzerinde tanımlanan bir vektör alanı $X \in \chi(M)$ olsun. X in $p \in M$ noktasındaki divergensi

$$\operatorname{div}(X)_p = \sum_{i=1}^{n} g_p(\nabla_{E_i}X, E_i) \tag{2.30}$$

yazılır. Burada $E_1, ..., E_n$ T_pM nin ortonormal bir bazını ve ∇ da g ye göre M manifoldu üzerinde tanımlanan Levi-Civita koneksiyonunu göstermektedir (Calin ve Chang, 2005; O'Neill, 1983).

2.5 Euler-Lagrange ve Lagrange Denklemleri

Tanım 2.5.1 (M, g) bir Riemann manifold olmak üzere, $\phi \in \mathcal{F}(M)$ olsun. $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ yönünde ϕ nin türevi; $\phi_{;\,j}$ şeklinde gösterilir. Ayrıca T_pM' nin bir bazı $\{\dfrac{\partial}{\partial x_{1|p}}, \ ..., \dfrac{\partial}{\partial x_{m|p}}\}$ ise

$$\phi_{;\,j} = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \phi, \tag{2.31}$$

yazılır. Burada kullanılan ∇, M manifoldu üzerinde tanımlanan Levi-Civita koneksiyonudur (O'Neill, 1983).

Tanım 2.5.2 M ve N Riemann manifoldlar olmak üzere $\Psi : M \to N$ haritası verilsin. İlk kısım parametrelerin uzayını, ikinci kısım ise koordinatların uzayını göstermek üzere, $p \in M$ için $(x_1, \ ..., x_m)$ yerel koordinatları ve $(y_1, \ ..., y_n)$ de $\Psi(p) \in N$ için var ise, vektör alanı

$$\Psi_{;\,i} = \Psi_*(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \Psi^j_{;\,i}\frac{\partial}{\partial y_j} \tag{2.32}$$

$\Psi_{;\,i} \in \chi(\Psi(M))$ şeklinde belirtilir (Calin ve Chang, 2005; O'Neill, 1983).

Bazı özel durumlar için, örneğin, $M = \mathbb{R}_t$ olmak üzere tanjant vektör alanı,

$$\dot{\Psi}(t) = \Psi_*(\frac{d}{dt}) \tag{2.33}$$

şeklinde ifade edilir (Calin ve Chang, 2005; O'Neill, 1983).

Tanım 2.5.3 N koordinat uzayı olmak üzere bir Lagrangian, $L : TN \to \mathbb{R}$ şeklinde ifade edilir. Bir Lagrangianın, Tanım 2.4.2 de verilen $\Psi : M \to N$ için Ψ *ve* $\Psi_{;\,i}$ skalar fonksiyonları ile ilişkisi kaçınılmazdır. Lagrangian ifadesi, sırasıyla, M üzerinde tanımlanan g_{ij} *ve* h_{ij} metriklerini içerir (Calin ve Chang, 2005).

Tanım 2.5.4 (M, g) kompakt bir Riemann manifoldu ve $f \in \mathcal{F}(M)$ olsun. f 'nin kinetik enerjisi,

$$E(f) = \int_M \frac{1}{2} |\nabla f|^2 \; dv \tag{2.34}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $|\nabla f|^2 = g(\nabla f, \nabla f)$ ve $\nabla f = \text{grad } f$ olarak tanımlanır. M kompakt olduğunda, $0 < E(M) < \infty$ olur. O halde Lagrangian,

$$L = \frac{1}{2} |\nabla f|^2 \tag{2.35}$$

olarak tanımlanır (M. P. do Carmo, 1995).

Teorem 2.5.1 (2.34) denklemi ile verilen Lagrangian için Euler-Lagrange denklemi,

$$\Delta f = 0 \tag{2.36}$$

şeklinde yazılır (Calin ve Chang, 2005).

İspat Yerel koordinatlarda,

$$L = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{1}{2} g^{ij} \; f_{;i} \, f_{;j} \tag{2.37}$$

yazılır. L f fonksiyonuna bağlı olmaksızın, (2.36) denkleminin sağ tarafı sıfırlandığında ifadenin sol tarafında,

$$\frac{\partial L}{\partial f_{;k}} = g^{kj} \; f_{;j} = (\nabla f)^k \tag{2.38}$$

bulunur. Böylece $(\nabla f)^k_{;\,k} = 0$ ya da $\text{div}(\nabla f) = 0$ olduğu kolaylıkla bulunabilir.

Tanım 2.5.5 Bir Riemann manifoldu üzerinde tanımlanan eğri $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \to (M, g)$ olsun. Doğal Lagrangian, ϕ eğrisi ve $U : M \to \mathbb{R}$' ye tanımlı potansiyel ile ilişkilidir. K

kinetik enerjiyi ve U potansiyel enerjiyi göstermek üzere, aralarındaki fark doğal Lagrangian' ı tanımlamaya yardımcı olacaktır. Bir ϕ eğrisi üzerinde $\phi(t)$ noktasında, bir t anında $\dot{\phi}(t)$ hızıyla hareket eden bir birim kütle parçacığı düşünülsün. Daha sonra doğal Lagrangian,

$$L(\phi,\dot{\phi}) = \frac{1}{2}g(\phi,\dot{\phi}) - U(\phi) \tag{2.39}$$

şeklinde yazılır (Thirring, 1978).

3. HAMİLTON-JACOBİ TEORİSİ

3.1 Doğal Lagrangian’ ın Bir Durumu Olarak Hamilton-Jacobi Denklemi

Bu bölümde doğal Lagrangian’ ın Arnold’ un 1989 yılında yayınlamış olduğu Mathematical Methods of Classical Mechanics kitabından ve Ovidiu Calin, Der-Chen Chang in Geeometric Mechanics on Riemann Manifolds adlı kitaplarından faydalanılarak tanımı verilmiş, Euler- Lagrange denklemi tanımlanmış, bu sayede toplam enerjinin potansiyel ve kinetik enerjinin toplamı olduğu gösterilmiş ve bu denklemlerin anlaşılmasına yardımcı olacak teoremler verilmiştir.

Tanım 3.1.1 Riemann manifoldu üzerinde $\phi : (t_1, t_2) \to (M, g)$ şeklinde bir eğri verilsin. $U : M \to \mathbb{R}$ potansiyeli ve L ise doğal Lagrangian’ ı göstersin.

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} \left|\dot{\phi}(t)\right|_g^2 - U(\phi(t)) \tag{3.1}$$

Denklemin sol tarafının integralinin alınması durumunda,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(\phi, \dot{\phi}) dt \tag{3.2}$$

elde edilir. Euler-Lagrange denklemini düşündüğümüzde,

$$\nabla_{\dot{\phi}} \dot{\phi} = -\nabla U_{|\phi|} \tag{3.3}$$

3.2 de bulunan integralin denklemi sağladığı görülür.

Toplam enerji,

$$H = \frac{1}{2} \left|\dot{\phi}(t)\right|_g^2 - U(\phi(t)) \tag{3.4}$$

potansiyel ve kinetik enerjinin toplamı olarak yazılır (Arnold, 1989).

Yardımcı Teorem 3.1.1 $S : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Daha sonra,

$$dS_{|\phi} = (\frac{\partial S}{\partial t_{|\phi}} + g(\nabla S, \dot{\phi}))dt$$

dır (Arnold, 1989).

İspat Teoremin sol tarafı açılırsa,

$$dS=\frac{\partial S}{\partial t}dt+\sum_r\frac{\partial S}{\partial x^r}dx^r=\frac{\partial S}{\partial t}dt+(\sum_r\frac{\partial S}{\partial x^r}\dot{x}^r)dt$$

bulunur. Bundan dolayı

$$dS_{|\phi}=(\frac{\partial S}{\partial t_{|\phi}}+\sum_r\frac{\partial S}{\partial x^r}\dot{\phi}^r)dt$$

Gradient,

$$\nabla S=g^{ij}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu durumda,

$$g(\nabla S,\dot{\phi})=g_{ij}(\nabla S)^i\dot{\phi}^j=g^{ij}g^{ki}\frac{\partial S}{\partial x^k}\dot{\phi}^j=\frac{\partial S}{\partial x^j}\dot{\phi}^j$$

denklemi elde edilir. O halde,

$$\partial S_{|\phi}=(\frac{\partial S}{\partial t_{|\phi}}+g(\nabla S,\dot{\phi}))dt$$

bulunur.

$$I=\int_{t_1}^{t_2}Ldt \quad ve\ J=\int_{t_1}^{t_2}(Ldt-dS)$$

integralleri aynı $\phi:(t_1,t_2)\to(M,g)$ eğrisi için extremum noktalarını sağlarlar. Çünkü,

$$J=I-S(t_2,\phi(t_2))+S(t_1,\phi(t_1))$$

dir.

Yardımcı Teorem 3.1.2 J integrali $\frac{1}{2}\left|\dot{\phi}-\nabla S\right|_g^2-(\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left|\nabla S\right|^2+U)$' ya eşittir (Calin ve Chang, 2005).

İspat: J nin integrali $L-dS/dt$ dir. Yardımcı teorem 3.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned}L-\frac{\partial S}{dt} &= L-(\frac{\partial S}{dt}+g(\nabla S,\dot{\phi}))\\ &= \frac{1}{2}\left|\dot{\phi}\right|_g^2-U-\frac{\partial S}{\partial t}-g(\nabla S,\dot{\phi})\\ &= \frac{1}{2}\left|\dot{\phi}\right|_g^2-g(\nabla S,\dot{\phi})+\frac{1}{2}\left|\nabla S\right|^2-\frac{1}{2}\left|\nabla S\right|^2-\frac{\partial S}{\partial t}-U\\ &= \frac{1}{2}\left|\dot{\phi}-\nabla S\right|_g^2-(\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left|\nabla S\right|^2+U).\end{aligned}$$

Böylece, I integrali ve

$$J=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}\left|\dot{\phi}-\nabla S\right|_g^2-(\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left|\nabla S\right|^2+U)\right]dt \qquad (3.5)$$

integrali aynı $\phi : (t_1,t_2) \to M$ eğrisi için (t_1,t_2) noktalarını sağlar. Ayrıca yukarıdaki integraldeki $S : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ keyfi bir fonksiyondur. (3.5) denklemini sağlayan S fonksiyonu,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla S|^2 + U = 0 \tag{3.6}$$

şeklinde seçilir. Daha sonra J integrali,

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}\left|\dot{\phi} - \nabla S\right|_g^2 dt \tag{3.7}$$

olur. Böylece J nin minimal olabilmesi ancak ve ancak,

$$\dot{\phi} = \nabla S \tag{3.8}$$

olması ile mümkündür. Burada S fonksiyonu (3.6) eşitliğinin bir çözümüdür.

Tanım 3.1.2 (3.8) denklemi bir Hamilton-Jacobi denklemi olarak ifade edilir. Aynı zamanda

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial x}, x) = 0$$

ya da,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\nabla S) = 0 \tag{3.9}$$

şeklinde yazılır. Burada H Hamiltonian' ı gösterir (Arnold, 1989).

Teorem 3.1.3 Euler-Lagrange denkleminin $\phi(t)$ çözümü boyunca,

$$\dot{\phi}(t) = \nabla_{\phi} S(t, \phi(t)) \tag{3.10}$$

elde edilir. Burada S, Hamilton-Jacobi denkleminin yani (3.6)' nın bir çözümüdür (Arnold, 1989).

Öte yandan (3.10) denklemini sağlayan herhangi bir eğri, yeni bir parametre belirleninceye kadar, Euler-Lagrange denklemlerinin bir çözümüdür.

3.2 S Etkisinin Tekilliği

Bu kısımda Euler-Lagrange denklemlerinin S etkisinin tekilliğini göstermek amacıyla bazı tanım ve önermeler verilmiştir.

X, Euler-Lagrange denklemlerinin çözümlerinin bir akışı tarafından oluşturulan bir vektör alanı olsun. Diğer bir deyişle,

$$X_{\phi(t)} = \dot{\phi}(t)$$

olsun. Divergensi uygulayıp Teorem 3.1.3 ü kullanarak,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \operatorname{div} \nabla S = \Delta S \\
\operatorname{div} X_{\phi(t)} &= \operatorname{div} \dot{\phi}(t) \\
&= \nabla_{\phi} S(t, \phi(t)) \\
&= \operatorname{div} \nabla S \\
&= \Delta S
\end{aligned}$$

dir. Burada Δ Laplacian' ı temsil eder (Thirring, 1978).

X çözümlerinin akışı eşlenik noktalara sahip olmadığı müddetçe, $\operatorname{div} X$' in tekilliği yoktur. Laplacianın bir hipoeliptik operatör (yani fonksiyonların tekilliğini destekler) olması sebebiyle, kullanılması durumunda S etkisinin tekilliği olmadığı görülür.

Önerme 3.2.1 Çözümlerin akışının eşlenik noktalarında S etkisi, tekildir (Calin ve Chang, 2005).

3.3 Jeodeziklerin Durumu

Bu bölümde S etkisinin tekilliğinin, Euler-Lagrange denklemlerinin çözümlerinin akışının eşlenik noktalarında tekil olduğu gösterilmiş ve bu şekilde jeodeziklerin durumunun da gösterilebileceği birkaç tanım ve yorum ifade edilmiştir.

Bu durumda, $U = 0$ ve Hamilton- Jacobi denklemi,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla S|^2 = 0 \tag{3.11}$$

ve $\dot{\phi} = \nabla S$ dir.

Ayrı değişkenler ile çözüme bakılacak olursa,

$$S(t,x) = a(t) + b(x). \tag{3.12}$$

Sonrasında (3.11) denkleminden yararlanarak,

$$a'(t) + \frac{1}{2}|\nabla b(x)|^2 = 0$$

bulunur. Burada $E > 0$ sabiti vardır, öyle ki

$$-a'(t) = \frac{1}{2}|\nabla b(x)|^2 = E$$

dir.

Burada kullanılan E notasyonu aslında; enerjiyi ifade eder. Çünkü

$$E = \frac{1}{2}|\nabla b(x)|^2 = \frac{1}{2}|\nabla(a+b)|^2 = \frac{1}{2}|\nabla S|^2 = \frac{1}{2}\left|\dot{\phi}\right|^2$$

yazılır.

Böylece

$$a(t) = -E(t) + a(0)$$

ve

$$\frac{1}{2}|\nabla b|^2 = E.$$

buradan da

$$\beta(x) = \frac{1}{\sqrt{2E}}(b(x) - b(x_0))$$

olur.

Bu durumda β, **3.4** bölümünde görülecek olan, eikonal denklemini sağlar.

$$|\nabla\beta|^2 = 1,$$

ve

$$\beta(x_0) = 0,$$

yani $\beta(x) = d(x_{0,}x)$ dir.

O halde,

$$b(x) = b(x_0) + \sqrt{2E}d(x_0, x) \tag{3.13}$$

bulunur. (3.12) ve (3.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned} S(t,x) &= -Et + \sqrt{2E}d(x_0,x) + a(0) + b(x_0) \\ &= -Et + \sqrt{2E}d(x_0,x) + S(0,x_0) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.1

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t,x)}{t} = -E$$

dir (Arnold, 1989).

Sonuç 3.3.2 t_0 ve x_0' ın genel durumları için,

$$S(t,x) = S(t_0,x_0) - (t-t_0)E + \sqrt{2E}d(x_0,x)$$

ve

$$S(t_0,x) - S(t_0,x_0) = \sqrt{2E}d(x_0,x) - (t-t_0)E$$

elde edilir (Arnold, 1989).

3.4 Riemannian Manifoldlarda Hareket Fonksiyonu

Çalışmanın bu kısmında Riemannian manifoldlarda hareket fonksiyonun tanımı yapılmış ve daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı teoremlere yer verilmiştir.

M bir Riemannian manifold ve $\phi : (t_0, t_1) \to M$ bir düzgün harita olsun. Lagrangian' ın negatif olmadığı kabul edilirse,

$$L(\phi, \dot{\phi}) \geq 0$$

olur.

Tanım 3.4.1 Başlangıç durumuyla hareket fonksiyonu

$$S(t_0, \phi(t_0)) = S_0 \tag{3.12}$$

ve

$$S(t, \phi(t)) = S_0 + \int_{t_o}^{t} L(\phi(s), \dot{\phi}(s))ds \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanır. Burada ϕ, Euler-Lagrange denkleminin $\phi(t_0)$ ve $\phi(t)$ ye bağlı çözümüdür (Calin ve Chang, 2005).

Aşağıda Hareket ve Hamilton-Jacobi denklemlerinin arasındaki bağlantı verilmiştir.

Teorem 3.4.1 (3.13) denklemde tanımlanan Hareket,

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(\frac{\partial S}{\partial \phi},\phi)=0 \tag{3.14}$$

Hamilton-Jacobi denklemini $S(t_0,\phi(t_0))=S_0$ başlangıç koşuluyla sağlar. Burada H, Hamiltonian ile ilişkilendirilmiş Lagrangian' ı temsil eder (Thirring, 1978).

İspat Zincir kuralını uygulayarak,

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial \phi_k}\dot{\phi}_k=\frac{\partial S}{\partial t}+\left\langle\frac{\partial S}{\partial \phi},\dot{\phi}\right\rangle. \tag{3.15}$$

Legendre dönüşümü yardımıyla da,

$$H(\frac{\partial S}{\partial \phi},\phi)=\left\langle\frac{\partial S}{\partial \phi},\dot{\phi}\right\rangle-L(\phi(t),\dot{\phi}(t)) \tag{3.16}$$

(3.15) ve (3.16) denklemleri kullanılarak (3.14) de geçen Hamilton-Jacobi denklemi elde edilir.

Başlangıç durumu ile Hamilton-Jacobi denkleminin, lineer olmayan bir denklem olarak, birden fazla çözümü olabilir. Bu duruma bir örnek verilecek olursa Euler-Lagrange denkleminin $\ddot{x}=0$ ile Lagrangian' ın $L(x,\dot{x})=\frac{1}{2}\dot{x}^2$ ve çözümün ise $x=x(t)=ct+x_0$ olduğunu gözönüne alalım. Hamiltonian $H(p,x)=\frac{1}{2}p^2$ dir.

Bu durumda, $f\,(t,x)=\sqrt{2}x-t$ fonksiyonu Hamilton-Jacobi denkleminin bir çözümüdür.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x})^2=0$$

ve $f(0,0)=0$ başlangıç koşulu ile $x_0=x(0)=0$ dır.

Farklı bir çözümü ise $S(t,x)$ hareketi ile gösterilsin.

$$S(t,x(t))=S(0,0)+\int_0^t\frac{1}{2}\dot{x}(s)^2ds=\frac{1}{2}c^2t=\frac{1}{2}\frac{(ct)^2}{t}=\frac{x(t)^2}{2t}.$$

Aşağıdaki soru şu şekilde ele alınabilir;

Hangi durumda Hamilton-Jacobi denkleminin bir çözümü hareket fonksiyonu olabilmeyi sağlar?

Aşağıdaki problemde momentumu gözleyerek işe başlayalım.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} = c$$

Öte yandan,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^2}{2t}) = \frac{x}{t} = c$$

dir. Böylece,

$$p = \frac{\partial S}{\partial x}$$

dir. Bu durumun açıklanabilmesi için, Euler-Lagrange denkleminin herhangi bir çözümü orijine geçiş yapar, denilir. Bir sonraki teoremde de ifade edildiği gibi, Hamilton-Jacobi denkleminin bir çözümünün olabilmesi için hareket fonksiyonunun da Euler-Lagrange denkleminin herhangi bir çözümü için dahi uygulanması gereken bir durum olduğu aşikar bir şekilde ortaya çıkmaktadır.

Teorem 3.4.2 $S = S(t,\phi)$, Hamilton-Jacobi denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial \phi}, \phi) = 0$$

veya

$$S(t_0, \phi(t_0)) = S_0$$

öyle ki,

$$p = \frac{\partial S}{\partial \phi} \tag{3.17}$$

momentum $p = \partial L / \partial \dot{\phi}$ dır. Daha sonra,

$$S(t, \phi(t)) = S_0 + \int_{t_0}^{t} L(\phi(s)\dot{\phi}(s))ds \tag{3.18}$$

burada L, Hamiltonian ile ilişkilendirilmiş Lagrangian ve ϕ $Euler - Lagrange$ denkleminin bir çözümü olacak şekilde,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^k} = \frac{\partial L}{\partial \phi^k},\ 1 \leq k \leq n \text{ ve yeterince küçük } |t - t_0|$$

dır (Calin ve Chang, 2005).

İspat Yeterince küçük $|t_1 - t_0|$ ile $\phi(t_0)$ ve $\phi(t_1)$ ile bağlantılı $Euler - Lagrange$ denleminin bir ϕ çözümü verilsin. $t \in [t_0, t_1]$ ve kabul edelim ki $t = t_1$ olsun.

$$I(\phi) = \int_{t_0}^{t_1} L(\phi(t), \dot{\phi}(t))dt$$

ve

$$J(\phi) = \int_{t_0}^{t_1} (L - \frac{dS}{dt})dt$$

dir.

Bu durumda,

$$I(\phi) = J(\phi) + S(t_1, \phi(t_1)) - S(t_0, \phi(t_0)) \tag{3.19}$$

zincir kuralı yardımıyla;

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S}{\partial \phi}, \dot{\phi} \right\rangle$$

Legendre dönüşümü uygulandığında,

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \langle p, \dot{\phi} \rangle - H(p, \phi)$$

için $p = \partial L / \partial \phi$ olsun. $J(\phi)$ integralinde değişim yapıldığında,

$$\begin{aligned} J(\phi) &= \int_{t_0}^{t_1} (\langle p, \dot{\phi} \rangle - H(p, \phi) - \frac{\partial S}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial S}{\partial \phi}, \dot{\phi} \right\rangle)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\left\langle p - \frac{\partial S}{\partial t}, \dot{\phi} \right\rangle - (\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial \phi}, \phi)))dt = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Çünkü $p = \dfrac{\partial S}{\partial \phi}$ ve S Hamilton-Jacobi denklemini sağlar. Böylece (3.19) denklemi

$$I(\phi) = S(t_1, \phi(t_1)) - S(t_0, \phi(t_0)) \tag{3.20}$$

olur. t_1 in keyfi bir $0 \leq t \leq t_1$ ile değiştirilmesi ile (3.18) hareket fonksiyonu elde edilir.

Şimdi de Momentum durumunun gerekli olup olmadığı durumu incelendiğinde,

$$S(\phi) - S_0(\phi) = \int_{t_0}^{t_1} L(\phi, \dot{\phi})ds$$

denkleminde ϕ ye göre türev alınıp, $Euler-Lagrange$ denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \phi}-\frac{\partial S_0}{\partial \phi} &= \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \phi}ds=\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{ds}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}})ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\frac{dp}{ds}ds=p(t_1)-p(t_0)\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece $p(t_0)=0$ ve $\frac{\partial S}{\partial \phi}=0$ ek hipotezleri ile, momentum durumunun gerekli olduğu rahatlıkla söylenebilir.

3.5 Korunumlu Sistemler İçin Hamilton-Jacobi Denklemi

Bu kısımda çalışmanın Hamilton-Jacobi denklemlerinin korunumlu sistemler ile ilişkisi anlatılmıştır.

Hamiltonian' ın t zamanına açıkça bağlı kalmadığı durumlarda Hamilton denklemleri kullanılarak,

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}\dot{p}+\frac{\partial H}{\partial \phi}\dot{\phi}+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}=0 \tag{3.21}$$

elde edilir. Bundan dolayı, $H(p,\phi)$ sisteminin çözümü boyunca sabit E enerjisine eşittir. Böylece Hamilton-Jacobi sistemi

$$\frac{\partial S}{\partial t}+E=0$$

ile

$$\begin{aligned}S(t_0,\phi(t_0)) &= S_0, \\ S(t_0,\phi(t_0)) &= S_0-Et\end{aligned}$$

çözümü elde edilir. E enerjisi, $\phi(0)$ ve $\phi(t)$ nin bitim noktalarının yanı sıra t ye de bağlıdır.

3.6 Keyfi Bir Lagrangian İçin Hareket Fonksiyonu

Bu bölümde Hareket fonksiyonlarının keyfi bir Lagrangian ile ilişkisinin ana sonucu, aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 3.6.1 $L = L(x, \dot{x}, t)$ bir Lagrangian fonksiyonu olsun.

$$Ldt = dS$$

şeklindeki denklemlerin $Euler - Lagrange$ sisteminin çözümünü oluşturan,

$$S = S(x,t)$$

şeklinde bir fonksiyon vardır (Arnold, 1989).

İspat. $X = x(t)$ $Euler - Lagrange$ sisteminin bir çözümü

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial L}{\partial x_k} \tag{3.22}$$

ve

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \tag{3.23}$$

k. momentum olsun. (3.20) genişletilirse,

$$\sum_k \left[\frac{\partial p_k}{\partial x_r}\dot{x}_r + \frac{\partial p_k}{\partial x_r}\ddot{x}_r + \frac{\partial p_k}{\partial t} \right] = \frac{\partial L}{\partial x_k} \tag{3.24}$$

sonucu elde edilir.

Lagrangian $L = L(x, \dot{x}, t)$, $\ddot{x}$ e bağlı olmaksızın, (3.22) denklemde $\ddot{x}_r$ nin kat sayısı,

$$\frac{\partial p_k}{\partial \dot{x}_r} = 0 \tag{3.25}$$

dır.

(3.23)' de (3.22)' i kullanılırsa,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_r \partial \dot{x}_k} = 0$$

sağlanır ve böylece L doğrusal bir fonsiyon olur öyle ki,

$$L = L_0(x,t) + \sum_r a_r \dot{x}_r$$

bu doğrusal fonksiyonun hız vektörü olur. (3.22)' i kullanarak $a_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_r} = p_r$ elde edilir. Daha sonra,

$$L = L_0(x,t) + \sum_r p_r \dot{x}_r \tag{3.26}$$

bulunur.

$\dfrac{\partial L}{\partial x_k} = \dot{p}_k \; Euler - Lagrange$ sistemi,

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_k} + \sum_k \frac{\partial p_r}{\partial x_k}\dot{x}_r = \sum_r \frac{\partial p_k}{\partial x_r}\dot{x}_r + \frac{\partial p_k}{\partial t}$$

şeklinde açılırsa, denklemin sol tarafında (3.26) ve sağ tarafında da $p_k = p_k(x,t)$ kullanılmış olur. Kat sayıların belirlenmesiyle,

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_r}, \qquad \frac{\partial p_k}{\partial t} = \frac{\partial L_0}{\partial x_k} \tag{3.27}$$

ve

$$Ldt = L_0 dt + \sum_r p_r dx_r$$

1-formunun elde edilmesi sağlanmış olur. Bu durumda rahatlıkla söylenebilir ki, $S = S(x,t)$ şeklinde bir fonksiyon vardır ki $Ldt = dS$ boyunca çözümleri mevcuttur.

Sonuç 3.6.1 S Teorem 3.6.1 de verilen bir fonksiyon olsun.

$$\int_0^{\tau} Ldt = S(\tau) - S(0).$$

dır. Burada kullanılan $S\ fonksiyonu\ L\ \ Lagrangian$ ile ilgili bir hareket fonksiyonudur (Thirring, 1978).

3.7 Örnekler

Çalışmanın bu kısmında hareket fonksiyonun Lagrange, Euler-Lagrange ve Hamilton-Jacobi denklemlerinde nasıl kullanıldığını gösteren örneklerle anlatılması amaçlanmıştır.

Örnek 3.7.1 Aynı dairesel hareket içerisindeki birim kütle parçacığı alalım.

Lagrangian hesaplanırsa

$$L(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - y\dot{x}) \tag{3.28}$$

dır.

Polar koordinatlardaki $x = r\cos\phi$ ve $y = r\sin\phi$ yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left[(\dot{r}\cos\phi - r\sin\phi.\dot{\phi})^2 + (\dot{r}\sin\phi + r\cos\phi.\dot{\phi})^2\right] \\ &\quad + \left[r\cos\phi(\dot{r}\sin\phi + r\cos\phi.\dot{\phi}) - r\sin\phi(\dot{r}\cos\phi - r\sin\phi.\dot{\phi}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\dot{r}^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi.\dot{\phi}^2 - 2r.\dot{r}\sin\phi\cos\phi.\dot{\phi} + \dot{r}^2\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi.\dot{\phi}^2 + 2r.\dot{r}\sin\phi\cos\phi.\dot{\phi}\right] \\ &\quad + \left[r.\dot{r}\cos\phi\sin\phi + r^2\cos^2\phi.\dot{\phi} - r.\dot{r}\sin\phi\cos\phi + r^2\sin^2\phi.\dot{\phi}\right] \end{aligned}$$

olur. Bu durumda gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, Lagrangian,

$$L(r,\dot{r},\dot{\phi}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + r^2\dot{\phi} \tag{3.29}$$

şeklini alır.

$Euler-Lagrange$ sistemi,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi}$$

olmak üzere,

$$\ddot{r} = r\dot{\phi}^2 + 2r\dot{\phi}, \qquad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi} + r^2) = 0 \tag{3.30}$$

elde edilir. İkinci denklem, ilk integralin $r^2(\dot{\phi}+1) = C$ sabit bir değer elde edilmesine olanak verir. Başlangıçtaki durumu düşündüğümüzde, $r(0) = 0$ için $C = 0$ ve $\dot{\phi} = -1$ bulunur. Böylece (3.30) in ilk denklemi $\ddot{r} = -r$ olur. Çözümün sınır kurallarına uyduğu ve $r(0) = 0$, $r(\tau) = R$ gözönüne alınırsa,

$$r(t) = \frac{R\sin t}{\sin\tau}, \qquad t \in [0,\tau] \tag{3.31}$$

sonucu elde edilir.

Lagrangian,

$$L(r(t),\dot{r}(t),\dot{\phi}(t)) = \frac{1}{2}\frac{R^2}{\sin^2\tau} - \frac{R^2\sin^2 t}{\sin^2\tau} = \frac{R^2}{2\sin^2\tau}\cos 2t$$

şeklinde yazılır. Hareket fonksiyonu da momentin tam sıfır olduğu anda yani, $t_0 = 0$ da,

$$\begin{aligned}
S(\tau, x(\tau), y(\tau)) &= \int_0^\tau L(r(t), \dot{r}(t), \dot{\phi}(t))dt \\
&= \frac{1}{2}\frac{R^2}{\sin^2\tau}\int_0^\tau \cos 2t \; dt \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\tau}\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^\tau \\
&= \frac{R^2}{2\sin^2\tau}(\frac{\sin 2\tau}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\tau}\frac{2\sin\tau\cos\tau}{2}R^2 \\
&= \frac{R^2}{2}\cos\tau \\
&= \frac{1}{2}(x^2(\tau) + y^2(\tau))\cot\tau
\end{aligned}$$

şeklini alır. O halde S, orijinden uzaklaştıkça Öklidyen gibi davranır. Orijinin dışındaki hareket fonksiyonu için mekanik eğriler ile ilgili çalışmalara bakılabilir.

Önerme 3.7.1 Hareket fonksiyonu,

$$S(\tau, x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\cot\tau$$

Hamilton-Jacobi denkleminin bir çözümüdür. Burada

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial S}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2\right] + \frac{1}{2}(\frac{\partial S}{\partial x}y - \frac{\partial S}{\partial y}x) + \frac{1}{8}(x^2 + y^2) = 0$$

ve

$$S(0, (0, 0)) = 0$$

dır.

İspat Aşağıdaki Lagrangian ile ilişkili olan Hamiltonian,

$$H = p_1\dot{x} + p_2\dot{y} - L$$

dir. Buradan

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - \frac{1}{2}y, \qquad \dot{x} = p_1 + \frac{1}{2}y$$

ve

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} - \frac{1}{2}x, \qquad \dot{y} = p_2 + \frac{1}{2}x$$

şeklinde yazılır. Gerekli düzenlemeler yapılınca,

$$H(p,x,y) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) + \frac{1}{2}(p_1 y - p_2 x) + \frac{1}{8}(x^2 + y^2)$$

sonucu elde edilir.

Örnek 3.7.2 Ters kuadratik potansiyelin etkisi altındaki birim kütle parçacığı.

Lagrangian düşünülsün.

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}\frac{k^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

Bu denklemden, potansiyelin etkisi altında kalan ve $x-$düzleminde bulunan bir parçacığın yörüngesinin tanımlandığı söylenir.

$$U(x) = -\frac{1}{2}\frac{k^2}{|x|^2} \tag{3.33}$$

burada k bir sabittir. Böylece Lagrangian dönel değişmezlerinin (r,ϕ) kutupsal koordinatlarında çok daha uygun hale gelip,

$$L(r,\dot{r},\dot{\phi}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}\frac{k^2}{r^2} \tag{3.34}$$

denklemini oluşturduğu kolayca söylenebilir. Hareket fonksiyonunu bulmak için Hamiltonian formülllerini kullanalım. Moment,

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \qquad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = r^2\dot{\phi} \tag{3.35}$$

şeklinde olacak ve bu durumda Hamiltonian,

$$H(p,r) = p_1\dot{r} + p_2\dot{\phi} - L = \frac{1}{2}(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2}) - \frac{1}{2}\frac{k^2}{r^2} \tag{3.36}$$

dır.

$\dot{p}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial \phi} = 0$ olduğunda, Momentum p_2 hareketinin bir sabiti olacaktır. Hareketin diğer bir sabiti ise total enerjidir. $\dfrac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow$ H bir sabittir. (3.34), (3.35) ve (3.36) denklemlerinden bir çözümün yanısıra,

$$L = H + \frac{k^2}{r^2} = H + \frac{k^2}{p_2}\dot{\phi}$$

bulunur ve böylece hareket fonksiyonu,

$$S(\tau) = S(0) + \int_0^\tau L = S(0) + H\tau + \frac{k^2}{p_2}(\phi(\tau) - \phi(0)) \tag{3.37}$$

olur. H ve p_2 sabitleri sınırların belirlendiği durumların açısından yazılırsa,

$$R = r(\tau), \qquad r_0 = r(0), \qquad \Phi = \phi(\tau), \qquad \phi_0 = \phi(0)$$

bulunur. Genel olarak bu durum açık bir şekilde yazılamaz. (3.34) ve (3.35) denklemlerinden,

$$E = \dot{r}^2 + \frac{p_2^2 - k^2}{r^2}$$

bulunur ve buradan da $E = 2H$ kolaylıkla yazılır.

$\alpha = p_2^2 - k^2$ olsun ve

$$\dot{r} = \pm\frac{\sqrt{r^2 E - \alpha}}{r} \tag{3.38}$$

dır.

O halde inceleme yapmak için üç durum vardır:

i) $\alpha = 0: \ r(t) = \pm\sqrt{Et} + r_0, \ ve \ r_0 < R$ alınırsa,

$$r(t) = \frac{R - r_0}{\tau}t + r_0$$

bulunur. Hamilton denkleminin integrali alınırsa,

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{r^2} = \frac{k}{r^2}$$

ve

$$\phi(\tau) - \phi_0 = k\int_0^\tau \frac{dt}{(\sqrt{Et} + r_0)^2} = \frac{k}{\sqrt{E}}(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{\sqrt{E\tau} + r_0}) = \frac{k}{\sqrt{E}}(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R})$$

elde edilir. E için ifadeyi kullanırsak,

$$\Phi - \phi_0 = \frac{k\tau}{R - r_0}(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R}) = \frac{k\tau}{r_0 R} \tag{3.39}$$

bulunur.

(3.36) denklemini ele alalım. Bu denklemde,

$$H = \frac{E}{2}, \ \ H\tau = \frac{E\tau}{2} = \frac{(R - r_0)^2}{\tau}$$

yazılıp (3.36) değiştirilerek,

$$S(\tau) = S(0) + \frac{(R - r_0)^2}{2\tau} + \frac{k^2\tau}{r_0 R} \tag{3.40}$$

denklemi elde edilir.

ii) $\alpha > 0$: (3.37) denkleminin integrasyonu ile pozitif bir yapı düşünülsün. O halde,

$$\int_{r_0}^{r(t)} \frac{rdr}{\sqrt{Er^2-\alpha}} = t$$

burada

$$\sqrt{Er^2(t)-\alpha} = \sqrt{Er_0^2-\alpha}+Et$$

ve

$$r^2(t) = \frac{1}{E}(\alpha + (Et+\sqrt{Er_0^2-\alpha})^2) \tag{3.41}$$

sonucuna ulaşılır.

Hamilton denkleminin integralinin alınmasıyla,

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{p_2} = \frac{p_2}{r^2}$$

ve

$$\phi(t)-\phi_0 = p_2\int_0^t \frac{ds}{r^2(s)} = \frac{p_2}{\sqrt{a}}(\tan^{-1}\frac{Et+\sqrt{Er_0^2-\alpha}}{\sqrt{a}} - \tan^{-1}\frac{\sqrt{Er_0^2-\alpha}}{\sqrt{a}})$$

elde edilir.

iii) $\alpha < 0 : \alpha = -a^2$ olsun. $r(t)$ fonksiyonu (3.38) da verilmişti. Ancak ϕ,

$$\phi(t)-\phi_0 = p_2\int_0^t \frac{ds}{r^2(s)} = \frac{p_2}{2a}\ln\left|\frac{Et+\sqrt{Er_0^2-a^2}-a}{\sqrt{Er_0^2+a^2}-a}\cdot\frac{\sqrt{Er_0^2+a^2}+a}{\sqrt{Et+Er_0^2+a^2}+a}\right|$$

şeklinde tanımlanabilir.

$\alpha = 0$ durumunda incelendiği gibi $\alpha \neq 0$ olduğunda, E ve p_2 sabitleri, sınır durumlarının bir fonksiyonu olarak yazılamaz. Hareket fonksiyonu için aşikar bir çözüm bulunması, lineer olmayan Hamilton-Jacobi denkleminin çözümüne denktir. Yani,

$$2\frac{\partial S}{\partial \tau} + (\frac{\partial S}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial S}{\partial \phi})^2 = \frac{k^2}{r^2}$$

dır.

Örnek 3.7.3 Kepler problemi

Lagrangianı gözönüne alalım. Bu durumda yer çekiminin potansiyel etkisi altında kalan birim kütle parçacığının hareketinin tanımı yapılmış olur.

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{M}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \tag{3.42}$$

Euler-Lagrange denklemi, $\ddot{x} = -\frac{M}{|x|^3}$ dir. Kutupsal koordinatlarda (r, ϕ), Euler-Lagrange denklemleri $r^2\dot{\phi} = sabit$ olacak şekilde,

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = \frac{M}{r^2}$$

ve

$$\frac{d}{dt}(r^2\phi) = 0$$

bulunur.

Bu Kepler kurallarının ikincisi olup, bölgesel hızın sabit olduğunu belirtmektedir.

$H(p; r, \phi) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{M}{r}$ denklemi Hamiltonian' dır ve çözümler boyunca bu durum değişmeden kalır.

$\dot{p}_2 = \frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$ olduğunda, p_2 sabittir. Öte yandan $p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}r^2$ ve bu durumda p_2 momentumu bölgesel hızı oluşturur.

$E = 2H$ olsun. $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r}$ kullanılarak,

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{E - \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{2M}{r}} \tag{3.43}$$

sonucuna ulaşılır.

Bölgesel hız sabit olduğunda,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{p_2}{r^2} \tag{3.44}$$

elde edilir.

(3.42) ve (3.43) denklemleri bölünüp, değişkenlerine ayrılıp,

$$\int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{r\sqrt{Er^2+2Mr-p_2^2}} = p_2 \int_{\phi_0}^{\phi(t)} d\phi$$

integrali kullanılırsa, denklem sağlanmış olur.

$u = 1/r$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int_{1/r_0}^{1/r(t)} \frac{du}{\sqrt{E+2Mu-p_2^2u^2}} = p_2(\phi(t)-\phi_0) \tag{3.45}$$

bulunur.

$A = E/p_2^2$ ve $B = M/p_2^2$ için

$$-\int_{1/r_0}^{1/r(t)} \frac{du}{\sqrt{A+2Bu-u^2}} = p_2^2(\phi(t)-\phi_0) \tag{3.46}$$

denklemi elde edilmiş olur.

$A+2Bu-u^2 = A+B^2-(u-B)^2$ eşitliğini kullanarak,

$$\arccos\left(\frac{u-B}{\sqrt{A+B^2}}\right)\Big|_{1/r_0}^{1/r(t)} = p_2^2(\phi(t)-\phi_0)$$

sonucu bulunur.

Bu eşitlik,

$$r(t) = \frac{1}{B+\sqrt{A+B^2}\cos(p_2^2(\phi(t)-\phi_0))+C} \tag{3.47}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, burada kullanılan

$$C = \arccos\left(\frac{\frac{1}{r_0}-B}{\sqrt{A+B^2}}\right)$$

eşitliği kutupsal koordinatlarda konik bir denklemi temsil eder.

4. MİNİMAL YÜZEYLER

4.1 Rotasyonel Tensörü

Bu bölümde minimal yüzeylerin temel bileşenleri verilerek, gerekli tanım, teorem ve önermeler yardımıyla çalışmanın içeriğinin daha net anlaşılması sağlanmıştır. Böylece, klasik mekanikte bir akışkanın dinamiğinin, akışkanın dönmesi ve genişlemesi ile açıklanması, dönme bileşenin **rotasyonel** vektörü ile tanımlanırken genişlemenin ise **divergens** fonksiyonu ile açıklandığı gösterilecektir. Dönme ve genişlemeyi içeren klasik formüller bir $\phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ fonksiyonu ve $V \in \chi(\mathbb{R}^3)$ vektör alanı için,

$$rot\ (\mathrm{grad}\,\phi) = 0 \text{ ve } \mathrm{div}(rot\ V) = 0 \tag{4.1}$$

dir. Yukarıdaki formüllerden ilki gradient vektör alanının dönmeye(rotasyona) sahip olmamasını, sonraki ise rotasyonel vektör alanının sıkıştırılamaz olduğunu gösterir. Bu durumda Riemann manifoldu üzerindeki bir vektör alanının rotasyoneli bir vektör alanı değildir. Ancak bu alanın tensör olduğu rahatlıkla söylenebilir.

Tanım 4.1.1 Bir (M,g) Riemann manifoldu üzerinde bulunan X vektör alanının rotasyoneli bir anti-simetrik 2-kovaryant tensörden oluşur. Bu A tensörünün bileşenleri,

$$A_{ij} = X_{i;j} - X_{j;i} \tag{4.2}$$

dir. Kovaryant türevin tanımı kullanılarak,

$$A_{i,j} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \tag{4.3}$$

olduğu kolaylıkla bulunur (Calin ve Chang, 2005).

Gelecek teoremde (4.1) formülünün manifoldlar üzerinde ifadesi gösterilecektir .

Önerme 4.1.1 $X \in \chi(M)$ bir vektör alanı ise,

$$X = \mathrm{grad}\,\phi \iff rot\ X = 0$$

dır (Calin ve Chang, 2005).

İspat Kabul edelim ki $X = \text{grad}\,\phi$ olsun. Sonra $X^k = g^{kj}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}$ ya da $X_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$ yazılabilir. Bu durumda (4.3) de bulunan denklem yardımıyla,

$$(rot\ X)_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

bulunur.

Tersine, $rot\ (X) = 0$ olacak şekilde bir X vektör alanı alalım. Bu durumda $\dfrac{\partial X_k}{\partial x_j} = \dfrac{\partial X_j}{\partial x_k}$ olur. Böylece $\omega = \sum X_k dx_k$ 1-formu kesin bir şekilde ifade edilir. Bu şu anlama gelmektedir; f yerel olarak tanımlanan bir fonksiyon olsun. Öyle ki, $\omega = df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$ olsun. Böylece $X_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ ya da $X^j = \sum g^{kj}\frac{\partial f}{\partial x_k}$, yani diğer bir deyişle, $X = \text{grad}\, f$ dir.

Bir sonraki önerme (4.1)' in benzer bir sonucundan ibarettir.

Önerme 4.1.2 *İz* $rot\ X = 0$, $\forall X \in \chi(M)$ dir (Fecko, 2006).

İspat *İz* $rot\ X = g^{ij}(X_{i;j} - X_{j,i}) = X^j_{;j} - X^i_{;i} = 0$ yazılabilir.

Bir sonraki sonuç ise Bianchi tipi birim fonksiyon ile ilişkilidir.

Önerme 4.1.3 A nın dairesel kovaryant türevi $rot\ X = 0$ dır. Bu durumda,

$$A_{ij;k} + A_{jk;i} + A_{ki;j} = 0 \tag{4.4}$$

dır (Fecko, 2006).

İspat *rot* tanımı kullanılarak bileşenleri yok edebiliriz.

Bir sonraki önerme *rotasyonel* (rot) için globalliği ve invaryantlığı sağlar. Riemann metriği $\langle\ \rangle$ şeklinde ve Levi-Civita koneksiyonu ∇ ile gösterilir.

Önerme 4.1.4 Eğer $A =\ rot\ X$ ise

$$A(U,V) = \langle \nabla_V X, U \rangle - \langle \nabla_U X, V \rangle \quad \forall U,V \in \chi(M) \tag{4.5}$$

dir (Sharipov, 1996).

İspat. Her $U,V\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned} A(U,V) &= A_{ij}U^iV^j=(X_{i;j}-X_{j;i})U^iV^j=(\nabla_{\partial j}X)_iU^iV^j-(\nabla_{\partial i}X)_jU^iV^j \\ &= \langle\nabla_{\partial_j}X,U\rangle V^j-\langle\nabla_{\partial_i}X,U\rangle U^i=\langle\nabla_{V^j\partial_j}X,U\rangle-\langle\nabla_{U^i\partial_i}X,V\rangle \\ &= \langle\nabla_V X,U\rangle-\langle\nabla_U X,V\rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1 $X\in\chi(M)$ olmak üzere $A=rot\ X$ olsun. O zaman,

$$A(U,V)=V\langle X,U\rangle-U\langle X,V\rangle+\langle X,[U,V]\rangle \tag{4.6}$$

olur (Sharipov, 1996).

İspat Levi-Civita koneksiyonu metrik koneksiyon ise,

$$\begin{aligned} V\langle X,U\rangle &= \langle\nabla_V X,U\rangle+\langle X,\nabla_U U\rangle \\ U\langle X,V\rangle &= \langle\nabla_U X,V\rangle+\langle X,\nabla_U V\rangle \end{aligned}$$

dir. Koneksiyonun simetri özelliği kullanılıp, çıkarma işlemi yapılırsa,

$$V\langle X,U\rangle-U\langle X,V\rangle=A(U,V)+\langle X,[U,V]\rangle$$

elde edilir. Bu denklem dikkatlice incelenirse, (4.6) denklemine denktir.

Bir sonraki teoremde *rot*, Levi-Civita koneksiyonu ve Lee türevi arasındaki bağlantıyı vermektedir.

Teorem 4.1.2 Eğer $A=rot\ X$ ve ∇, (M,g) üzerinde tanımlanan koneksiyon Levi-Civita koneksiyonu ise

$$A(U,V)=2\langle\nabla_V X,U\rangle-(L_X g)(U,V) \tag{4.7}$$

dir (O'Neill, 1983).

İspat Levi-Civita koneksiyonu için Koszul formülünden;

$$2\langle\nabla_V X,U\rangle=V\langle X,U\rangle+X\langle U,V\rangle-U\langle V,X\rangle-\langle V,[X,U]\rangle+\langle X,[U,V]\rangle+\langle U,[V,X]\rangle$$

bulunur.

Teorem 4.1.1 yardımıyla,

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_V X, U\rangle &= A(U,V) + X\langle U,V\rangle - \langle V,[X,U]\rangle + \langle U,[V,X]\rangle \\ &= A(U,V) + X\langle U,V\rangle - \langle V,L_X U\rangle - \langle U,L_X V\rangle \end{aligned}$$

eşitliği sağlanmış olur.

$$(L_X g)(U,V) = X\langle U,V\rangle - \langle L_X U,V\rangle - \langle U,L_X V\rangle$$

denklemini kullanılarak,

$$2\langle \nabla_V X, U\rangle = A(U,V) + (L_X g)(U,V)$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.1 Eğer X bir vektör alanı ve $L_X g = 0$ için,

$$(rot\ X)(U,V) = 2\langle \nabla_V X, U\rangle \tag{4.8}$$

yazılır (Calin ve Chang, 2005).

Sonuç 4.1.2 Eğer $X = \text{grad}\ \phi$ olacak biçimde vektör alanı ise,

$$(L_X g)(U,V) = 2\langle \nabla_V X, U\rangle \tag{4.9}$$

dır (Calin ve Chang, 2005).

Tanım 4.1.2 $f \in \mathcal{F}(M)$ bir fonksiyon olsun. f' nin torsiyonu $T_f : \chi \times \chi \to \chi$ olacak şekilde,

$$T_f(U,V) = V(f)U - U(f)V \tag{4.10}$$

olur. Her durum için T_f, $\mathcal{F}(M)-$ lineer ise T_f, 2-kovaryant tensördür denir (O'Neill, 1983).

Önerme 4.1.5 Torsiyonun bazı özellikleri aşağıda verilmiştir (O'Neill, 1983):

(i)

$$T_f(U,V) = -T_f(V,U)$$

(ii)

$$\dot{I}z\ T_f = 0$$

(iii)

$$T_{fh} = fT_h + hT_f,\ \forall f,h \in \mathcal{F}(M)$$

(iv)

$$T_f(U,V) = 0,\ \forall U,V \Longrightarrow f \text{ sabittir}$$

İspat

(i)

$$T_f(U,V) = -(U(f)V - V(f)U) = T_f(V,U).$$

(ii)

$$\begin{aligned} \dot{I}z\ T_f &= g^{ij}T_f(\partial_i,\partial_j) = g^{ij}((\partial_i f)\partial_j - (\partial_j f)\partial_i \\ &= \text{grad } f - \text{grad } f = 0. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} T_{fh}(U,V) &= V(fh)U - U(fh)V \\ &= fV(h)U + hV(f)U - fU(h)V - hU(f)V \\ &= f(V(h)U - U(h)V) + h(V(f)U - U(f)V) \\ &= fT_h(U,V) + hT_f(U,V). \end{aligned}$$

(iv) U ve V lineer bağımsız vektör alanı olarak alınsın. Bu durumda,

$$V(f) = U(f) = 0$$

herhangi U ve V vektör alanı için sağlanır. Böylece f sabittir.

Bir sonraki önermede *rot* un X de $\mathcal{F}(M)-$ lineer olmadığı açıktır.

Önerme 4.1.6 $f \in \mathcal{F}(M)$ ve $X \in \chi(M)$ olsun (Calin ve Chang, 2005).

$$rot\ (fX) = f\ rot\ (X) + \langle T_f, X \rangle. \tag{4.11}$$

İspat $A = rot\ (X)$ ve $A_f = rot\ (fX)$ olduğunu biliyoruz. Teorem 4.1.1' i kabul ederek,

$$\begin{aligned} A_f(U,V) &= V\langle fX,U\rangle - U\langle fX,V\rangle + \langle fX,[U,V]\rangle \\ &= V(f)\langle X,U\rangle + fV\langle X,U\rangle - fU\langle X,V\rangle - U(f)\langle X,V\rangle + f\langle X,[U,V]\rangle \\ &= f(V\langle X,U\rangle - U\langle X,V\rangle + \langle X,[U,V]\rangle) + V(f)\langle X,U\rangle - U(f)\langle X,V\rangle \\ &= fA(U,V) + \langle X, V(f)U - U(f)V\rangle = fA(U,V) + \langle X, T_f(U,V)\rangle \end{aligned}$$

denklemi sağlanır.

Önerme 4.1.7 (M,g) Riemann manifoldu üzerinde X herhangi bir vektör alanı olsun (Arnold, 1989).

$$\dot{I}z\ (L_X g) = 2\,\mathrm{div}\ X \tag{4.12}$$

İspat Önerme 4.1.2 deki $\dot{I}z$ kullanılacak olursa,

$$\dot{I}z\,A = 2\ \dot{I}z(V \to \langle \nabla_V X, V\rangle) - \dot{I}z(L_X g)$$

elde edilir. Önerme 4.1.2 yardımıyla $\dot{I}z\ A = 0$ sağlanır. $\dot{I}z$ olarak divergens teoreminin tanımı kullanılarak (4.12) elde dilir.

4.2 Minimal Yüzeylerde Uygulamalar

Çalışmanın bu kısmında minimal yüzeyler ile yapılmış uygulamalar ve bazı teoremler ile önermeler verilecektir.

$\mathcal{H} \subset M$ bir hiperyüzey olmak üzere $\phi^{-1}\{0\} = \{x \in M \mid \phi(x) = 0\}$ şeklinde tanımlansın. Gradient vektör alanı $X = \nabla\phi$ şeklinde gösterilsin. Birim normal vektör,

$$N = \frac{X}{\|X\|} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}. \tag{4.13}$$

Burada $f = \frac{1}{\|X\|}$ olarak gösterilir. $N = fX$ dir. Gradienti hesaplanırsa

$$\nabla_V N = \nabla_V(fX) = f\nabla_V X + V(f)X \tag{4.14}$$

olur. Burada kullanılan ∇, (M,g) Riemann manifoldu üzerinde tanımlı Levi-Civita koneksiyonudur. Böylece herhangi $U \in \chi(\mathcal{H})$,

$$\langle \nabla_V N, U\rangle = f\langle \nabla_V X, U\rangle + V(f)\langle X, U\rangle$$

yazılır. $X = \nabla\phi$ iken $\mathcal{H}$ nin normalidir. Bu durumda $\langle X, U\rangle = 0$ dır. Sonuç olarak,

$$\langle \nabla_V N, U\rangle = f\langle \nabla_V X, U\rangle, \qquad \forall U, V \in \chi(\mathcal{H}) \tag{4.15}$$

dır.

Sonuç 4.1.2 kullanılarak;

$$(L_X g)(U,V) = 2\,\|X\|\,\langle \nabla_V N, U\rangle, \qquad \forall U, V \in \chi(\mathcal{H}) \tag{4.16}$$

yazılır. Weingarten dönüşümünü hatırlayalım. Burada $S \in \mathcal{T}^{1,1}(\mathcal{H})$,

$$\langle S(V), U\rangle = -\langle \nabla_V N, U\rangle, \qquad \forall U, V \in \chi(\mathcal{H}) \tag{4.17}$$

bulunur. Daha sonra (4.16)' dan,

$$-2\,\|X\|\,\langle S(V), U\rangle = (L_X g)(U,V) \tag{4.18}$$

elde edilir.

Tanım 4.2.1 Eğer $\{e_1, ..., e_{n-1}\} \subset T_p\mathcal{H}$ ortonormal bir çatıysa, $\mathcal{H}$' nin bir p noktasındaki skalar eğriliği,

$$\alpha_p = \frac{-1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}\langle S(e_i), e_i\rangle = \frac{1}{n-1}\dot{I}z\, S \tag{4.19}$$

şeklinde yazılır. (4.18) yardımıyla,

$$\alpha_p = \frac{-1}{2(n-1)}\,\frac{1}{\|X\|_p}\sum_{i=1}^{n-1}(L_X g)(e_i, e_i) \tag{4.20}$$

elde edilir (Calin ve Chang, 2005).

(4.20)' nin sağ tarafındaki gibi bir denklem elde etmek için, (M,g) manifoldu üzerinde $\sum_{i=1}^{n-1}(L_X g)(e_i, e_i)$' den (4.18) ve (4.19) yardımıyla $\dot{I}z(L_X g)$ elde edilir. Bunu gerçekleştirmek için de bir sonraki sonuca ihtiyacımız olacaktır.

Teorem 4.2.1 $N = fX$ ve $f = \|X\|^{-1}$ ise,

$$(L_X g)(N,N) = -2\frac{X(f)}{f} \tag{4.21}$$

dır (Calin ve Chang, 2005).

İspat $L_X(fX) = [X, fX] = X(f)X$ olduğu bilinmektedir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} (L_X g)(N,N) &= X\langle N,N\rangle - 2\langle L_X N, N\rangle = -2\langle L_X N, N\rangle \\ &= -2\langle L_X(fX), fX\rangle = -2\langle X(f)X, fX\rangle \\ &= -2fX(f)\,\|X\|^2 = -2\frac{X(f)}{f} \end{aligned}$$

sonucuna kolaylıkla ulaşılabilir.

Teorem 4.2.2

$$\alpha_p = -\frac{1}{(n-1)}\,\mathrm{div}\ N_{|p} \tag{4.22}$$

dir (O' Neill, 1983).

İspat $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\} \subset T_p\mathcal{H}$ olmak üzere ortonormal bir taban olsun. $e_n = N_p$ seçelim. O halde T_pM deki bir ortonormal taban $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n\}$ olur. p noktasındaki $\dot{I}z$,

$$\dot{I}z\ (L_X g) = \sum_{i=1}^{n} (L_X g)(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (L_X g)(e_i, e_i) + (L_X g)(N,N) \tag{4.23}$$

şeklinde yazılır. Teorem 4.2.2 ve Önerme 4.1.7 kullanılarak,

$$2\,\mathrm{div}\ X = -2(n-1)\alpha_p\,\|X\| - 2\,\|X\|\,X(f) \tag{4.24}$$

elde edilir. Aynı zamanda bu eşitlik,

$$-(f\,\mathrm{div}X + X(f)) = (n-1)\alpha_p \tag{4.25}$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklemin sol tarafı $-\,\mathrm{div}(fX) = -\,\mathrm{div}N$ olarak yazılırsa,

$$\alpha_p = -\frac{\mathrm{div}N}{n-1} \tag{4.26}$$

bulunur.

Önerme 4.2.1 (M, g) bir Riemann manifold ve $\mathcal{H} \subset M$ birim vektör alanı N olan bir hiperyüzey olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktirler;

1) M nin minimal bir hiperyüzeyi $\mathcal{H}$ dir.

2) div $N_{|\mathcal{H}} = 0$ dır (Calin ve Chang, 2005).

Aşağıdaki örnekler önermede geçen ifadelerin açıklanmasına yardımcı olacaktır.

Örnek 4.2.1 $M = \mathbb{R}^n$ ve $\mathcal{H} = \{x_n = 0\}$ verilsin. Bu durumda normal vektör alanı $N = e_n = (0,...,0,1)$ ve $\operatorname{div} N = 0$ olur. Bu durumda $\mathcal{H}$, $\mathbb{R}^3$' de bir minimal hiperyüzeydir.

Örnek 4.2.2 $\mathbb{R}^n$ de $n-1$ boyutlu küre $\mathcal{S}^{n-1}$ olsun. Birim vektör alanı

$$N_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|} \partial x_i$$

$\mathcal{S}^{n-1}$' in normali olmak üzere; $\operatorname{div} N = \frac{n-1}{|x|}$ dir. Böylece $\mathcal{S}^{n-1}$' in skalar eğriliği, $|\alpha| = \frac{n-1}{n-1} = 1$ olur.

Önerme 4.2.2 Bir Monge yolu olarak verilen yüzeyi ele alalım. Bu durumda $(x,y) \to (x,y,f(x,y))$ şeklinde tanımlanan Monge yüzeyinin $\mathbb{R}^3$' de minimal olduğu ancak ve ancak f fonksiyonunun aşağıdaki denklemi sağlamasıyla mümkündür (Calin ve Chang, 2005):

$$\frac{1}{2}(\partial_x^2 f + \partial_y^2 f)\sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1} = (\partial_x f)^2 \partial_x^2 f + (\partial_y f)^2 \partial_y^2 f + 2\partial_x f.\partial_y f.\partial_{xy} f \qquad (4.27)$$

İspat Yüzey, $\phi^{-1}(0)$ ve $\phi(x,y,z) = f(x,y) - z$ şeklinde verilsin. $\nabla_\phi = (\partial_x f, \partial_y f, -1)$ ve $|\nabla_\phi| = \sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1}$ dır.

Verilen denklemler yardımıyla,

$$\operatorname{div} N = \operatorname{div}(\frac{1}{|\nabla\phi|}\nabla\phi) = \frac{1}{|\nabla\phi|}\operatorname{div}\nabla\phi + \nabla\phi(\frac{1}{|\nabla\phi|}) \qquad (4.28)$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\partial_x(\frac{1}{|\nabla\phi|}) &= \frac{-2}{|\nabla\phi|^2}(\partial_x f.\partial_x^2 f + \partial_y f.\partial_{xy} f), \\
\partial_y(\frac{1}{|\nabla\phi|}) &= \frac{-2}{|\nabla\phi|^2}(\partial_y f.\partial_y^2 f + \partial_x f.\partial_{xy} f)
\end{aligned}$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned}\nabla\phi(\frac{1}{|\nabla\phi|}) &= \partial_x f.\partial_x(\frac{1}{|\nabla\phi|}) + \partial_y f.\partial_y(\frac{1}{|\nabla\phi|}) - \partial_z(\frac{1}{|\nabla\phi|}) \\ &= \frac{-2}{|\nabla\phi|^2}((\partial_x f)^2.\partial_x^2 f + (\partial_y f)^2.\partial_y^2 f + 2\partial_x f.\partial_y f.\partial_{xy} f)\end{aligned}$$

elde edilir. (4.28) de elde edilen sonuçlar yerlerine yazılır ve $\operatorname{div}\nabla\phi = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f$ olduğu göz önüne alınırsa (4.27) bulunur.

Sonuç 4.2.1 $f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k y^{m-k}$, $a_m, a_0 \neq 0$ şeklinde tanımlansın. O halde $f(x,y)$ yüzeyinde $m = 1$ olması durumunda ancak ve ancak $f(x,y)$ yüzeyinin $\mathbb{R}^3$ de minimal olduğu söylenir. Bu durumda $f(x,y) = a_0 y + a_2 y$ fonksiyonu bir yüzeye karşılık gelir (Calin ve Chang, 2005).

İspat. (4.27) denkleminin her iki tarafının da boyutunun derecesi incelendiğinde,

$$\partial_x f = O(|x|^{m-1}), \qquad \partial_y f = O(|y|^{m-1}), \qquad \partial_x^2 f = O(|x|^{m-2}), \qquad \partial_y^2 f = O(|y|^{m-2})$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\sqrt{(\partial_x)^2 + (\partial_y)^2 + 1} = O(|x|^{m-1}, |y|^{m-1})$$

yazılır. Ayrıca (4.27)' nin sol tarafı da $O(|x|^{2m-3}, |y|^{2m-3})$ şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned}(\partial_x f)^2.\partial_x^2 f &= O(|x|^{2(m-1)})O(|x|^{m-2}) = O(|x|^{3m-4}), \\ (\partial_y f)^2.\partial_y^2 f &= O(|y|^{2(m-1)})O(|y|^{m-2}) = O(|y|^{3m-4})\end{aligned}$$

eşitliklerinden, denklemlerin sağ taraflarının $O(|x|^{3m-4}, |y|^{3m-4})$' e eşit olduğu görülür. $m = 1$ değeri için denklemin sağ ve sol tarafı aynı boyut derecesine sahiptir.

4.3 Helmholtz Ayrışımı

Bu bölüm rotasyonel ve divergens fonksiyonlarının formülleri kullanılarak oluşturulan örnekleri içermektedir. Kompakt bir Riemann manifoldu üzerinde bulunan X vektör alanının, Y ve Z vektörlerinin toplamının ayrışımı olarak yazılabileceğinin gösterilmesi amaçlanmaktadır. Burada Y vektörü dönme bileşenini, Z vektörü ise genişleme bileşenini ifade etmektedir.

Teorem 4.3.1 Bir (M,g) Riemann manifoldu üzerinde tanımlı X vektör alanı için M üzerinde,

$$X = Y + Z \tag{4.29}$$

$Y, Z \in M$ vektör alanları vardır. Ayrıca $\operatorname{div} Y = 0$ ve $rot\ Z = 0$ olduğundan dolayı da ayrışım tektir (Calin ve Chang, 2005).

İspat Varlık: $\omega = \operatorname{div} X$ ve ϕ eliptik denklemin çözümü olsun. (M,g) üzerinde tanımlanan

$$\Delta\phi = \omega \tag{4.30}$$

verilsin. $Z = \nabla\phi$ ve $Y = X - \nabla\phi$ alınsın. Daha sonra

$$rot\ Z = rot\ \nabla\phi = 0, \operatorname{div} Y = \omega - \Delta\phi = 0$$

bulunur.

Teklik: İki ayrışım düşünelim.

$$X = Y_1 + Z_1 = Y_2 + Z_2.$$

$rot\ Z_i = 0$ iken ϕ_i nin $Z_i = \nabla\phi_i,\ i = 1,2$ olacak şekilde bir fonksiyonu vardır. Çıkarma işlemi ile,

$$Y_2 - Y_1 = \nabla(\phi_1 - \phi_2)$$

elde edilir.

$U = Y_2 - Y_1$ ve $\phi = \phi_1 - \phi_2$ alınırsa,

$$\operatorname{div} U = \operatorname{div} \nabla\phi$$

bulunur.

$U = \operatorname{div} Y_2 - \operatorname{div} Y_1$=0 iken, $\Delta\phi = 0$ dır. Hopf Teoremi hatırlanacak olursa,

$$\phi = sabit\ \text{,ya da}\ \phi_1 - \phi_2 = sabit$$

sonucuna ulaşılır. Gradient alınması durumunda, $Z_1 - Z_2 = 0$ elde edilir. Daha sonra da $Y_1 = Y_2$ olur ve ayrışımın tek olduğu ispatlanmış olur. Burada şu yorumu yapmadan geçilmemelidir: $\operatorname{div} X = \operatorname{div} Z$ ve $rot\ X = rot\ Y$ olduğunu, ayrıca Y, Z vektör alanları olmak üzere; bir ayrışımda Y vektör alanı dönmeyi, Z vektör alanı ise genişlemeyi temsil ettiği unutulmamalıdır.

Örnek 4.3.1 $X=(x_1-x_2)\partial_{x_1}+(x_1+x_2)\partial_{x_2}$ verilsin. Helmholtz ayrışımı, $X=Y+Z$ için

$$\begin{aligned} X &= x_1\partial_{x_1}-x_2\partial_{x_1}+x_1\partial_{x_2}+x_2\partial_{x_2} \\ &= (-x_2\partial_{x_1}+x_1\partial_{x_2})+(x_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{x_2}) \end{aligned}$$

buradan da

$$\begin{aligned} Z &= x_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{x_2}, \\ Y &= -x_2\partial_{x_1}+x_1\partial_{x_2} \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

4.4 Kompakt Olmama Durumu

Bu kısımda herhangi bir manifoldun kompaktlık durumu incelenerek Helmholtz ayrışımı ile aralarında ki ilişki açıklanacaktır.

Eğer manifold kompakt değil ise, o halde Helmholtz ayrışımı tek değildir. $a_1(x_1), a_2(x_2),\ b_1(x_1),\ b_2(x_2)$ düzgün fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$X=(a_2(x_2)\int b_1(x_1)dx_1)\partial x_1+(b_1(x_1)\int a_2(x_2)dx_2)\partial_{x_2} \tag{4.31}$$

vektör alanını alalım. O zaman, $\operatorname{div} X=a_2b_1-b_1a_2=0$ dır. $\mathbb{R}^2$ de ϕ harmonik fonksiyon olmak üzere, $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in\mathbb{R}$ keyfi sabitler için

$$\phi(x_1,x_2)=\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_1x_2+\delta \tag{4.32}$$

dir. Böylece

$$Z=\nabla\phi=(\alpha+\gamma x_2)\partial x_1+(\beta+\gamma x_1)\partial_{x_2} \tag{4.33}$$

vektör alanı divergensden ve $Y=X-Z$ vektör alanı da rotasyoneden bağımsızdır (Calin ve Chang, 2005).

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Riemann manifoldlar üzerinde geometrik mekanik kavramların incelenmesi, temel kavramların açıklanması ve yapılan çalışmaya yardımcı olacağı düşünülen teoremler, önermeler ve ispatlar açıklanmıştır. Öncelikle temel geometrik kavramlar ifade edilmiş, sonra bu kavramlar yardımı ile çalışmanın üçüncü bölümünde; Hamilton- Jaobi Teorisi' nin tanımları, teoremleri ve ispatları verilmiştir. Daha sonra Riemann manifoldlar üzerinde tanımlanan Eikonal denklemlerin tanımları verilmiştir. Bu denklemlerin Lagrangian ile olan ilişkisi örnekler ile araştırılmıştır. Bu araştırma neticesinde ne tür sonuçlara ulaşıldığı verilmiştir. Dördüncü bölümde minimal yüzeyler ile ilgili temel kavramlar, teoremler ve yardımcı teoremler ispatları ile beraber ifade edilmiştir. Helmholtz ayrışımının minimal yüzeyler ile ilişkisi açıklanmıştır.

Çalışma neticesinde matematik ve fizik alanlarında daha çok araştırma yapmanın, disiplinler arası etkileşim ile mümkün olacağı görüldü. İyi bir fizik problemi ile başlayan çalışmalar matematiğin de katkısı ile geometrik mekanik alanına çok daha fazla katkı sağlayacağı kaçınılmaz olacaktır. Benzer durum tersi içinde geçirlidir. Hamilton- Jacobi teorisi ile Lagrangian ve Riemann manifold üzerinde tanımlanan Eikonal denklemlerin birbirleri ile olan ilşkileri neticisinde hem fiziksel hem de geometrik yorumlara ulaşılabilir. Minimal yüzeyler için $H = 0$ olması yüzeyin en küçük alana sahip olduğunu açıklar. Bununla birlikte $H = 0$ şartını sağlayan bazı minimal yüzeyler minimum alana sahip olmayabilir yorumuna ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Anonim, 2016, Hamilton-Jacobi Equations, http://hitoshi.berkeley.edu/221a/classical2.pdf, erişim tarihi: 04.04.2016.

Anonim, 2016, Minimal Surface, https://en.wikipedia.org/wiki/Minimal_surface, erişim tarihi: 23.03.2016

Anonim, 2016, Minimal Surface, https://en.wikipedia.org/wiki/Minimal_surface_of revolution, erişim tarihi: 23.03.2016.

Arnold, V. I., 1989, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer, Berlin, 60 p.

Blaschke, W., 1949, Diferansiyel Geometri Dersleri, İstanbul Üniversitesi Yay. No. 433.

Boothby, W. M., 1986, An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, Academic Press, Florida Inc., Second Edition, 430 p.

Calin, O., Chang, D. C., 2005, Geometric mechanics on Riemannian manifolds, Birkhauser Boston, New York, 278 p.

Carmo, do. M. P., 1992, Riemannian Geometry, Birkhauser, Cambridge, MA.

Carmo, do. M. P., 1994, Differantial Forms and Applications, Universitext, Springer- Verlag, Berlin.

Chen, B. Y., 1973, Geometry of submanifolds, Marcel Dekker INY, 298 p

Davis, J. P., Hersh, R., Marchisotto, E. A., 1995, The Mathematical Experience, Study Edition, 27 p.

De, U. C., Shaikh, A.A., 2007, Differential geometry of manifolds, Alpha Science International, 298 p.

Duggal, K. L., Bejancu, A., 1996, Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Mathematics and its Applications, Dordrecht, 303 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Eells, J., Lemaire, J., 1978, Another Report on Harmonic Maps, Bulletin London Mathematic Society, 20 p.

Eells, J., Lemaire, J., 1983, Selected Topics in Harmonic Maps, C. B. M. S. Regional Conf., Series 50.

Eells, J., Sampson, J. H., 1964, Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds, American Journal of Math, 86 p.

Fecko, M., 2006, Differential Geometry and Lie Groups for Physicists, Cambridge University Press, New York, 129:178-196.

Friedan, D., 1985, Non linear models in $(n+2)$-dimensions, Annals of Physics, 163: 318– 419.

Hacısalihoğlu, H. H., 1998, Diferensiyel geometri, Ankara Üniversitesi, 269 s.

Hacısalihoğlu, H. H., Ekmekçi, N., 2003, Tensör geometri, Ankara Üniversitesi, 251 s.

Hacısalihoğlu, H. H., 2004, Diferensiyel geometri, Ankara Üniversitesi, 206 s.

Ianus, S., Calin, O., 1995, A note on harmonic maps of semi- Riemannian manifold, Volume BSG proc., 1., Proceedings of the workshop on global analysis, Differantial geometry and Lie algebras, Thessaloniki.

Kurennoy, S., 2004, Example and History of Minimal Surfaces.

Kuhnel, W., 2006, Differential geometry curves-surfaces-manifolds, American Mathematical Society, Second Edition, 380 p.

Liang, K. C., 1972, A nonoscillation theorem for the superlinear case of second order differential equations, SIAM Journal on Applied Mathematics, 23, 4, 456-459.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Mangione, V., Calin, O., 2003, Variational calculus on sub-Riemannian manifolds, Balcan Journal of Geometry and Applications, 8 p.

O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, 468 p.

Oprea, J., 1997, Differential geometry and its applications, Prentice-Hall, New Jersey Inc., 387 p.

Ossernan, R., A Survey of minimal Surfaces, Van Nostrand Reinhold, New York, 224 p.

Oubina, J. A., 1985, New class of almost contact metric manifolds, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 32: 187–193.

Prvanovic, M., 1975, On pseudo metric semi-symmetric connections, Publication De L Institut Mathematic Nouvelle Series, 18(32): 157–164.

Ratto, A., 1987, Harmonic Maps of Spheres and Equivariant Theory, Thesis, University of Warwick, 156 p.

Samir, D., S., 2007, Hamilton-Jacobi Equation, http://www.physics.ohio-state.edu/˜mathur/821hj.pdf, erişim tarihi: 01.04.2016.

Sinpo, T., 2004, The Equations of Motion on surfaces and Minimal Surfaces.

Spivak, M., 1979, Differential geometry, Berkeley, CA: Publish or Perish Press, II., III., IV., 491 p.

Sharipov, R. A., 1996, Course of Differential Geometry: the textbook, Ufa, Publ. of Bashkir State University, 132 p.

Yano, K., Kon, M., 1984, CR submanifolds of Kaehlerian and Sasakian manifolds, Birkhäuser Mathematics, 208 p.

Yıldız, A., De, U. C., Turan, M., 2013, On 3-dimensional f-Kenmotsu manifolds and Ricci solitons, Ukrainian Mathematical Journal, 65(5): 620-628.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Thirring, W., 1978, A Course in Mathematical Phsics, Volume I-II., Springer, Berlin, 539 p.

Willmore, T. J., 1959, An introduction to differentiable geometry, Oxford University Press, 317 p.