

Bazı Kısmi Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Üstel Kübik B-spline Kolokeyşin
Çözümlerinin Üretilmesi

Özlem Ersoy Hepson

DOKTORA TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ağustos 2015

Generation of the Exponential Cubic B-Spline Collocation Solutions for Some Partial
Differential Equation Systems

Özlem Ersoy Hepson

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Science

August 2015

Bazı Kısmi Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Üstel Kübik B-spline Kolokeyşin
Çözümlerinin Üretilmesi

Özlem Ersoy Hepson

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
olarak hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. İdiris Dağ

Ağustos 2015

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Özlem Ersoy Hepson'un DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Bazı Kısmi Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Üstel Kübik B-spline Kolokeyşin Çözümlerinin Üretilmesi" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İdiris Dağ

İkinci Danışman : ____

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. İdiris Dağ

Üye : Prof. Dr. Bülent Saka

Üye : Doç. Dr. Murat Sarı

Üye : Doç. Dr. Dursun İrk

Üye : Doç. Dr. Alper Korkmaz

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. İdris Dağ danışmanlığında hazırlamış olduğum “Bazı Kısmi Diferensiyel Denklemlerinin Üstel Kübik B-spline Kolokeyşin Çözümlerinin Üretilmesi” başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 03/08/2015

Özlem Ersoy Hepson

İmza

ÖZET

Bu tezde, üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak bazı kısmi diferensiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri araştırılmıştır. Kısmi diferensiyel denklem sistemlerine Crank-Nicolson zaman ayrıştırması uygulanmış ve zaman ayrıştırılmış sistemlerdeki lineer olmayan terimler için Taylor metodu kullanılarak lineerleştirilme yapılmıştır. Zaman ayrıştırılmış sistemin konum ayrıştırması için üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu uygulanmış ve sistem, cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüştür. Böylece kısmi diferensiyel denklem sistemlerinin üstel kübik B-spline kolokeyşin algoritması tasarlanmış ve elde edilen sonuçlar, literatürdeki farklı metotlar ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak algoritmanın deneysel doğruluğu tartışılmıştır. Üstel kübik B-spline fonksiyonlarının serbest parametresi en iyi çözümü verecek şekilde belirlenmeye çalışılmıştır. Farklı başlangıç koşulları uygulandığında oluşan çözümlerin mevcut fiziksel modelleri gösterilmiştir.

Birinci bölümde sonlu farklar yaklaşımı, sonlu elemanlar metotları, B-spline fonksiyonlar, üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu, lineer olmayan oluşum denklemleri, korunum kanunları ve soliton dalgaları tanıtılmıştır. İlerleyen bölümlerde ise lineer olmayan Schrödinger denklemi, reaksiyon difüzyon denklem sistemi, ikili Burgers denklem sistemi ve Boussinesq denklem sistemlerinin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Sayısal metodun doğruluğu analitik çözümü bilinen problemler için maksimum hata normu ile, analitik çözümü bilinmeyen problemler için ise bağıl hata ile gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: B-spline, Üstel kübik B-spline, Kolokeyşin metodu, Sonlu elemanlar, Lineer olmayan Schrödinger denklemi, Reaksiyon-difüzyon denklem sistemi, İkili Burgers Denklemi, Boussinesq denklem sistemi.

SUMMARY

In this study, numerical solutions of some partial differential equation systems using exponential cubic B-spline collocation method are investigated. The systems are time-discretized using the Crank-Nicolson method. The nonlinear terms in the time-discretized form of the system are discretized by way of the Taylor method. The application of the exponential B-spline collocation method to the time-discretized system gives the fully-discretized systems which is an algebraic diagonal banded equation system. So an exponential cubic B-spline collocation algorithm is designed for numerical solutions of the system of partial differential equation. Experimental accuracy of algorithm is discussed with comparing obtained solutions with the solutions existing in the literature. Free parameter of exponential cubic B-spline functions is determined experimentally over the predefined interval to give best solution. Obtained solutions of physical models are shown when different initial conditions are applied,

In the first chapter, the finite difference, the finite element methods, B-spline functions, exponential cubic B-spline collocation method, nonlinear evolution equations, conversation laws and soliton waves are described. In later chapters, the numerical solutions of nonlinear Schrödinger equation, reaction-diffusion equation system, coupled Burgers' equation and Boussinesq equation system are obtained. The accuracy of numerical method is shown with maximum error norm for when analytical solution is known and relative error norm for when analytical solution is unknown.

Keywords:B-spline, Exponential B-spline, Collocation method finite elements, Nonlinear Schrödinger equation, Reaction-diffusion equation system, Coupled Burgers' equation, Boussinesq equation system.

TEŞEKKÜR

Hem hayatımda hem bilimsel çalışmalarım da hiçbir zaman desteğini esirgemeyen, tecrübeleriyle bana ışık tutan, bilimsel hayatındaki tutumunu ve araştırmacı kişiliğini örnek aldığım ve öğrencisi olmaktan onur duyduğum Sayın Prof. Dr. İdiris Dağ'a,

Doktora tez izleme jürimde bulunarak değerli fikirleri ile çalışmalarım a yön veren ve zor zamanlarımda yaptığı olumlu eleştiriler ile beni motive eden hocam Sayın Doç. Dr. Murat Sarı'ya ve benim bu mesleği seçmemde ve sevmemde çok büyük emeği olan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Dursun İrk'a,

Tez savunma jürimde yer alarak yaptıkları katkılardan dolayı hocalarım Sayın Prof. Dr. Bülent Saka ve Sayın Doç. Dr. Alper Korkmaz'a,

Eğitim hayatım boyunca beni hep iyiye ve doğruya yönlendiren ve her kararım da beni destekleyen annem Akgül Ersoy'a, manevi bütün destekleriyle ve dualarıyla her zaman yanımda olan babam Ali Sait Ersoy'a ve yorulduğum zamanlarda beni neşelendiren kardeşlerim Zeynep Nur Ersoy ve Mehmet Akif Ersoy'a,

Sonsuz sabrı ve anlayışı ile doktora çalışmalarım boyunca her zaman yanımda olan ve hayatıma güzellikler katan eşim Vedat Orkun Hepson'a,

Doktora çalışmalarım süresince sağladığı burs desteği nedeniyle TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xvi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xviii
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Kavramlar	1
1.2. Sonlu Farklar Yaklaşımı	2
1.2.1. Crank-Nicolson metodu	3
1.3. Sonlu Elemanlar Metodu	4
1.3.1. Ağırlıklı rezidü metodu	5
1.3.2. Kolokeyşın metodu	6
1.3.3. Galerkin metodu	6
1.3.4. Subdomain Galerkin metodu	7
1.3.5. Moment metodu	7
1.4. Thomas Algoritmaları	8
1.4.1. 3-Bant katsayı matrisli cebirsel denklem sistemi ve çözüm algoritması	9
1.4.2. 7-Bant katsayı matrisli cebirsel denklem sistemi ve çözüm algoritması	10
1.4.3. 6-Bant katsayı matrisli cebirsel denklem sistemi ve çözüm algoritması	11
1.5. Hata Normları	12
1.6. Noktasal Yakınsaklık Oranı	13
1.7. B-spline Fonksiyonlar	13
1.8. Üstel Kübik B-spline Kolokeyşın Metodu	15
1.9. Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri	20

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
1.10. Korunum Kanunları	21
1.11. Solitonlar.....	22
1.12. Linear Olmayan Schrödinger Denklemi (NLS) ve Test Problemleri	25
1.12.1. Soliton dalga çözümü.....	27
1.12.2. İki soliton dalgasının çarpışması.....	27
1.12.3. Sabit soliton dalgasının doğuşu	28
1.12.4. Hareketli soliton dalgasının doğuşu.....	28
1.12.5. Bağlı durumlu solitonlar	28
1.13. Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sistemi ve Test Problemleri.....	29
1.13.1. Linear problem.....	30
1.13.2. İzotermal kimyasal sistem	31
1.13.3. Brusselator modeli	32
1.13.4. Schnakenberg modeli.....	34
1.13.5. Gray-Scott modeli.....	35
1.14. İkili Burgers Denklemi ve Test Problemleri.....	38
1.14.1. Problem 1	39
1.14.2. Problem 2.....	40
1.14.3. Problem 3	40
1.15. Boussinesq Denklem Sistemi ve Test Problemleri	41
1.15.1. Regularized Boussinesq (RB) sistemi ve test problemleri.....	43
1.15.2. Klasik Boussinesq (KB) sistemi ve test problemleri	45
2. NLS DENKLEMİNİN ÜSTEL KÜBİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN	
ÇÖZÜMLERİNİN ÜRETİLMESİ	48
2.1. NLS Denklemine Sayısal Çözümü İçin Üstel Kübik B-spline Kolokeyşin	
Metodu.....	48
2.2. Başlangıç Durumu	52
2.3. Test Problemleri.....	53
2.3.1. Soliton dalga çözümü.....	53

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
2.3.2. İki soliton dalgasının çarpışması.....	57
2.3.3. Sabit soliton dalgasının doğuşu	60
2.3.4. Hareketli soliton dalgasının doğuşu.....	61
2.3.5. Bağlı durumlu solitonlar	63
3. REAKSİYON-DİFÜZYON DENKLEM SİSTEMİNİN ÜSTEL KÜBİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN ÇÖZÜMLERİNİN ÜRETİLMESİ.....	66
3.1. Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sisteminin Sayısal Çözüm İçin Üstel Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu	66
3.2. Başlangıç Durumu	70
3.3. Test Problemleri.....	71
3.3.1. Lineer problem.....	71
3.3.2. İzotermal kimyasal sistem	81
3.3.3. Brusselator modeli	85
3.3.4. Schnakenberg modeli.....	87
3.3.5. Gray-Scott modeli.....	89
4. İKİLİ BURGERS DENKLEMİNİN ÜSTEL KÜBİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN ÇÖZÜMLERİNİN ÜRETİLMESİ	92
4.1. İkili Burgers Denklemine Sayısal Çözümü İçin Üstel Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu.....	92
4.2. Başlangıç Durumu	95
4.3. Test Problemleri.....	95
4.3.1. Problem 1	95
4.3.2. Problem 2.....	99
4.3.3. Problem 3.....	102

İÇİNDEKİLER

Sayfa

5. BOUSSINESQ DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÜSTEL KÜBİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METODU YARDIMIYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ.....	104
5.1. RB ve KB Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Üstel Kübik B-Spline Kolokeyşin Metodu.....	104
5.2. Başlangıç Durumu	107
5.3. RB Denklem Sistemi İçin Test Problemleri	107
5.3.1. İlerleyen dalga çözümü.....	107
5.3.2. İki ilerleyen dalganın çarpışması	110
5.4. KB Denklem Sistemi İçin Test Problemleri	113
5.4.1. İlerleyen dalga çözümü.....	113
5.4.2. İki ilerleyen dalganın çarpışması	115
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	118
7. KAYNAKLAR DİZİNİ	120
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. $p = 1, 5, 25, 125$ için üstel kübik B-spline fonksiyonları.....	19
1.2. Basit bir dalga profili.....	23
1.3. Bir solitary dalgasının hareketi	24
2.1. $p = 0,0000182$ için $t = 0$ ve $t = 2,5$ anındaki soliton dalga çözümü ve maksimum hatanın grafiği	55
2.2. $p = 1$ için iki soliton dalgasının çarpışması.....	59
2.3. $\alpha = 1, q = 2, N = 1334, p = 1$ iken sırasıyla $A = 1$ ve $A = 1,78$ için sabit soliton dalgasının doğuşu	60
2.4. $\alpha = 1, q = 2, N = 1334, p = 1$ iken sırasıyla $A = 1$ ve $A = 1,78$ için hareketli soliton dalgasının doğuşu.....	62
2.5. $M = 4, q = 32$ için yoğunluk değişimi	64
2.6. $M = 5, q = 50$ için yoğunluk değişimi	64
2.7. $M = 6, q = 72$ için yoğunluk değişimi	65
2.8. $M = 7, q = 98$ için yoğunluk değişimi	65
3.1. $N = 400, k = 0,1, p = 1$ için ilerleyen dalga çözümleri	81
3.2. $N = 400, k = 0,5, p = 1$ için ilerleyen dalga çözümleri	82
3.3. $N = 400, k = 0,5, p = 1$ için konum ve zamana göre yoğunluk değişimi hareketleri	83
3.4. $N = 400, k = 0,9, p = 1$ için ilerleyen dalga çözümleri.....	84
3.5. $N = 400, k = 0,9, p = 1$ için konum ve zamana göre yoğunluk değişimi hareketleri	84
3.6. $N = 200, \Delta t = 0,01, p = 1$ değerleri için $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ fonksiyonlarının periyodik dalga hareketleri	86
3.7. Brusselator modelinde konum ve zamana göre $u(x,t)$ 'nin yoğunluk değişimi hareketleri.....	87
3.8. Brusselator modelinde konum ve zamana göre $v(x,t)$ 'nin yoğunluk değişimi hareketleri.....	87

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.9.	Sırasıyla $N = 100$ ve $N = 200$ için $t = 2,5$ anındaki salınım hareketleri 89
3.10.	Schnakenberg modelinde konum ve zamana göresırasıyla $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ 'nin yoğunluk değişimi hareketleri 89
3.11.	Gray-Scott modeli için $t = 0$ ve $t = 2000$ anındaki çözümler profilleri 90
3.12.	Gray-Scott modelinde konum ve zaman göre $u(x,t)$ 'nin yoğunluk değişimi .. 91
3.13.	Gray-Scott modelinde konum ve zaman göre $v(x,t)$ 'nin yoğunluk değişimi .. 91
4.1.	Sabit $k_1 = -2$, $k_2 = 1$ parametreleri için sırasıyla $k_3 = -8$ ve $k_3 = -4$ iken farklı zamanlardaki sayısal çözümler 98
4.2.	Sabit $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ parametreleri için sırasıyla $k_1 = -8$ ve $k_1 = -4$ iken farklı zamanlardaki sayısal çözümler 99
4.3.	$N = 21$, $\Delta t = 0,001$, $a_0 = 0,05$, $0 \leq x \leq 1$, $k_2 = 1$ ve $k_3 = 0,3$ için $t = 1$ zamanındaki sayısal çözümler 101
4.4.	$N = 21$, $\Delta t = 0,001$, $a_0 = 0,05$, $0 \leq x \leq 1$, $k_2 = 1$ ve $k_3 = 0,3$ için $t = 1$ zamanındaki $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ fonksiyonu için maksimum hatalar 101
4.5.	$k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 10$ parametreleri için sırasıyla $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ çözümleri 103
4.6.	$k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 100$ parametreleri için sırasıyla $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ çözümleri 103
5.1.	$N = 1000$, $\Delta t = 0,005$, $p = 0,0000058339$, $-20 \leq x \leq 30$ aralığında sırasıyla $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ için $t = 5$ anındaki maksimum hata 109
5.2.	$N = 1000$, $\Delta t = 0,005$, $p = 0,0000058339$, $-20 \leq x \leq 30$ için $t = 0, 5, 10, 15$ anlarındaki $u(x,t)$ sayısal çözümleri 110
5.3.	$t = 0$ anında $u(x,t)$ için dalgaların durumu 111
5.4.	İlerleyen iki dalğanın çarpışması 112
5.5.	$N = 1000$, $\Delta t = 0,005$, $p = 0,0000086530$, $-20 \leq x \leq 30$ aralığında sırasıyla $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ için $t = 5$ anındaki maksimum hata 114
5.6.	$N = 1000$, $\Delta t = 0,005$, $p = 0,0000086530$, $-20 \leq x \leq 30$ için $t = 0, 5, 10, 15$ anlarındaki $u(x,t)$ sayısal çözümleri 115

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>		<u>Sayfa</u>
5.7.	$t = 0$ anında $u(x, t)$ için dalgaların durumu	115
5.8.	İlerleyen iki dalganın çarpışması	117

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. Bölünme noktalarındaki üstel kübik B-spline değerleri	19
2.1. $q=2, S=4, \alpha=1, \Delta t=0,005, h=0,03$ için hata normları ve korunum sabitleri .	54
2.2. $q=2, S=4, \alpha=1$, değişken Δt ve h için hata normları.....	56
2.3. İki soliton dalgasının çarpışması.....	58
2.4. $N=1334, \Delta t=0,005, A=1,78$ için sabit soliton dalgasının doğuşu.....	61
2.5. $N=1334, \Delta t=0,005, A=1,78$ için hareketli soliton dalgasının doğuşu	63
3.1. $t=1$ anında difüzyon baskın olduğu durumda $u(x,t)$ için elde edilen hata normları	73
3.2. $t=1$ anında difüzyon baskın olduğu durumda $v(x,t)$ için elde edilen hata normları	74
3.3. $t=1$ anında reaksiyon baskın olduğu durumda $u(x,t)$ için elde edilen hata normları	76
3.4. $t=1$ anında reaksiyon baskın olduğu durumda $v(x,t)$ için elde edilen hata normları	77
3.5. $t=1$ anında reaksiyon baskın olduğu durumda $u(x,t)$ için elde edilen hata normları	79
3.6. $t=1$ anında reaksiyon baskın olduğu durumda $v(x,t)$ için elde edilen hata normları	80
3.7. $p=1, k=0,1, t=300$ için hesaplanan bağıl hata değerleri	82
3.8. $p=1, k=0,5, t=300$ için hesaplanan bağıl hata değerleri	83
3.9. $p=1, k=0,9, t=300$ için hesaplanan bağıl hata değerleri	85
3.10. Periyodik hareket için yoğunluk değerleri	86
3.11. $N=200$ ve $t=2,5$ için farklı Δt zaman adımlarındaki periyodik hareket için yoğunluk değerleri	88
4.1. $t=0,1$ zamanında, farklı N ve Δt için sayısal çözümlerin karşılaştırılması	96

ÇİZELGELER DİZİNİ (devam)

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
4.2.	<i>N=400, t=1</i> seçildiğinde farklı zaman adımı uzunlukları için sayısal çözümlerin karşılaştırılması..... 97
4.3.	<i>Δt=0,01, N=50, u(x,t)=v(x,t)</i> seçildiğinde farklı zamanlardaki sayısal çözümlerin karşılaştırılması..... 97
4.4.	<i>Δt=0,01</i> ve <i>Δt=0,0001</i> seçildiği durumda noktasal yakınsaklık oranları..... 98
4.5.	<i>Δt=0,001, k₂=1</i> ve <i>k₃=0,3, 0≤x≤1</i> olmak üzere, <i>t=1</i> zamanında farklı adım uzunluklarındaki <i>u(x,t)</i> fonksiyonu için maksimum hatalar 99
4.6.	<i>Δt=0,001, k₂=1</i> ve <i>k₃=0,3, 0≤x≤1</i> olmak üzere, <i>t=1</i> zamanında farklı adım uzunluklarındaki <i>v(x,t)</i> fonksiyonu için maksimum hatalar 99
4.7.	<i>N=21, Δt=0,01, 0≤x≤1</i> olmak üzere, farklı <i>t</i> zamanındaki <i>u(x,t)</i> fonksiyonu için maksimum hatalar..... 100
4.8.	<i>N=21, Δt=0,01, 0≤x≤1</i> olmak üzere, farklı <i>t</i> zamanındaki <i>v(x,t)</i> fonksiyonu için maksimum hatalar..... 100
4.9.	<i>k₂=k₃=10</i> için farklı zamanlardaki maksimum <i>u(x,t)</i> değerleri..... 102
4.10.	<i>k₂=k₃=10</i> için farklı zamanlardaki maksimum <i>v(x,t)</i> değerleri..... 102
5.1.	RB sisteminde <i>v(x,t)</i> için <i>N=1000</i> ve <i>-20≤x≤30</i> olmak üzere <i>t=5</i> zamanındaki hata normlarının kıyaslanması..... 108
5.2.	RB sisteminde <i>u(x,t)</i> için <i>N=1000</i> ve <i>-20≤x≤30</i> olmak üzere <i>t=5</i> zamanındaki hata normlarının kıyaslanması..... 109
5.3.	KB sisteminde <i>v(x,t)</i> için <i>N=1000</i> ve <i>-20≤x≤30</i> olmak üzere <i>t=5</i> zamanındaki hata normlarının kıyaslanması..... 113
5.4.	KB sisteminde <i>u(x,t)</i> için <i>N=1000</i> ve <i>-20≤x≤30</i> olmak üzere <i>t=5</i> zamanındaki hata normlarının kıyaslanması..... 114

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ**Kısaltmalar Açıklama**

CMKdV	Komplex Modifiye Korteweg-de Vries
CN-MG	Crank-Nicolson-Multi Grid
KB	Klasik Boussinesq
NLS	Lineer Olmayan Schrödinger
NYO	Noktasal yakınsaklık oranı
RB	Regularized Boussinesq

1. GİRİŞ

Fizik, kimya, biyoloji, matematik, ekonomi, işletme gibi pek çok alanda ve çeşitli mühendislik dallarında karşılaşılan bir çok problem, kısmi diferensiyel denklemlerle modellenir. Model problemleri analitik olarak çözmek her zaman mümkün olmadığından alternatif olarak sayısal çözüm metotları kullanılır. Dolayısıyla diferensiyel denklem sistemlerinin verilen başlangıç ve sınır şartlarını sağlayan çözümlerini elde etmek için sayısal metotlar geliştirilmektedir. Sayısal çözüm metotları arasında, sonlu farklar metodu ve sonlu elemanlar metotları en çok kullanılan metotlardır. Bu bölümde bu metotlardan kısaca bahsedildikten sonra üstel kübik B-spline kolokeyşim metodu tanıtılmıştır. Tezde sayısal çözümleri araştırılacak olan lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi, reaksiyon-difüzyon denklem sistemi, ikili Burgers denklemi ve Boussinesq denklem sistemi, başlangıç ve sınır şartları ile birlikte verilmiş ve test problemleri tanıtılmıştır.

1.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda, tezin ilerleyen aşamalarında ortaya çıkan bazı kavramların fiziksel ve kimyasal anlamları üzerinde kısaca durulmuştur.

Aktivatör: Enzim aktivitesini hızlandırarak, bir reaksiyonun oluşumunu kolaylaştıran uyarıcı madde.

Dalga: Titreşim hareketi yapan bir fiziksel niceliğin maddi ortamda veya uzayda yayılması.

Dalga boyu: Dalganın bir tam döngü yaptığında kat ettiği mesafe.

Dalga frekansı: Dalganın birim zamandaki titreşim sayısı.

Dalga periyodu: Dalganın bir dalga boyu kadar yol alması için geçen süre.

Dalganın hızı: Dalganın birim zamanda aldığı yol.

Difüzyon: Maddelerin çok yoğun ortamdaki, az yoğun ortama doğru kendiliğinden yayılması.

Difüzyon katsayısı: Birim yüzey arasında yer değiştiren malzeme miktarının, bu yüzeye dikey konsantrasyon gradyanına oranı.

Enzim: Hücredeki biyokimyasal reaksiyonların gerçekleşmesini sağlayan biyolojik katalizör.

Genlik: Bir dalganın tepesinden çukuruna kadar olan düşey uzaklığın yarısı.

İzotermal: Isı derecesi değişmeyen, devamlı aynı ısıyı gösteren.

İnhibitör: Kimyasal ve biyokimyasal reaksiyonları yavaşlatmak amacı ile kullanılan, genellikle organik yapıda olan bileşikler.

Kataliz: Bir kimyasal tepkimenin katalizörler tarafından hızlandırılması olayı.

Katalizör: Kimyasal tepkimeyi hızlandıran fakat kendisi değişmeden kalan madde.

Model: Fiziksel ya da kimyasal bir olayın ifade edildiği denklem sistemi.

Mutualizm: Ortak yaşayan iki canlının birbirinden faydalandığı yaşama şekli.

Otokataliz: Bir reaksiyon türününün, o reaksiyonu katalizleme durumu.

Popülasyon: Sınırlandırılmış coğrafik bölgede yaşayan aynı tür bireylerin oluşturduğu topluluk.

Reaksiyon: İki veya daha fazla maddenin birbiri ile etkileşmesi sonucu kendi özelliklerini kaybederek yeni özellikte maddeler oluşturması.

Reaktant: Kimyasal reaksiyona dahil olan molekül.

1.2. Sonlu Farklar Yaklaşımı

Taylor serisi açılımı yardımı ile türevlere yaklaşımlar bulunabilir. Buna göre bir değişken içeren ifadeler için sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımı ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

$[a, b]$ tanım aralığı için, N bir pozitif tamsayı, $h = \frac{b-a}{N}$ ve bölünme noktaları

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

olsun. Bu durumda, $u(x)$ fonksiyonu ve türevleri tanım aralığı üzerinde sürekli olmak üzere, $u(x_i + h)$ ve $u(x_i - h)$ ifadelerinin x_i noktasındaki Taylor seri açılımları

$$u(x_i + h) = u(x_i) + hu_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_i) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_i) + \dots, \quad (1.1)$$

$$u(x_i - h) = u(x_i) - hu_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_i) - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_i) + \dots \quad (1.2)$$

olarak bulunabilir. (1.1-1.2) eşitliklerinden $u_x(x_i)$ çözülrse

$$u_x(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - \frac{h}{2!}u_{xx}(x_i) - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}(x_i) - \dots, \quad (1.3)$$

$$u_x(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} + \frac{h}{2!}u_{xx}(x_i) - \frac{h^2}{3!}u_{xxx}(x_i) + \dots \quad (1.4)$$

elde edilir ve (1.3-1.4) düzenlenirse, u fonksiyonunun x_i noktasındaki birinci türevi

$$u_x(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (1.5)$$

$$u_x(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} + \mathcal{O}(h) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.6)$$

formunda yaklaşık olarak bulunabilir. (1.5-1.6) ile bulunan yaklaşımlar sırası ile ileri ve geri fark yaklaşımları olarak adlandırılır. Her iki yaklaşımda da görüldüğü gibi, seri belli bir yerden kesildiği için bir hata oluşacaktır. Oluşan hatalar, serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir ve $\mathcal{O}(\cdot)$ ile gösterilir.

Eğer (1.2) eşitliği, (1.1) eşitliğinden çıkarılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} u_x(x_i) &= \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \\ u_x(x_i) &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

formunda birinci türev için merkezi fark yaklaşımı da bulunabilir. Ayrıca, (1.1) ve (1.2) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i) &= \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \\ u_{xx}(x_i) &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

formunda ikinci türev için sonlu fark yaklaşımı da bulunabilir.

Ayrıntılı bilgi için (Lapidus ve Pinder, 1982; Smith, 1978; Thomas, 1995; Irk, 2007) referansları incelenebilir.

1.2.1. Crank-Nicolson metodu

Sayısal analizde Crank-Nicolson metodu bir sonlu farklar metodudur. Crank-Nicolson metodu, ikinci mertebeden ve kapalı bir metot olup John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından bulunmuştur (Crank ve Nicolson, 1947). Crank ve Nicolson çalışmalarında, $u(x, t)$ iki değişkenli bilinmeyen içeren diferensiyel denklemin sonlu fark metodu ile sayısal çözümünü araştırmak için bilinmeyen fonksiyona ve türevlere

$$\begin{aligned} u_t &\simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \\ u &= \frac{u^{n+1} + u^n}{2} \\ u_x &= \frac{u_x^{n+1} + u_x^n}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

formunda yaklaşımlar önermişlerdir. Burada Δt zamana ifade eder. Görüldüğü gibi, zamana göre türev için ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırken bilinmeyen fonksiyon ve konuma göre ardışık iki ayrık zamanlardaki ortalamaları alınmıştır. Zamana göre türev için geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımları da kullanılabilir. Bu tezde kullanılacak olan Crank-Nicolson yaklaşımları aşağıdaki gibidir.

$$r_t \simeq \frac{r^{n+1} - r^n}{\Delta t}, \quad s_t \simeq \frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t}, \quad (1.9)$$

$$r^3 = \frac{(r^3)^{n+1} + (r^3)^n}{2}, \quad s^3 = \frac{(s^3)^{n+1} + (s^3)^n}{2}, \quad (1.10)$$

$$r^2 s = \frac{(r^2 s)^{n+1} + (r^2 s)^n}{2}, \quad s^2 r = \frac{(s^2 r)^{n+1} + (s^2 r)^n}{2}, \quad (1.11)$$

$$r_{xx} = \frac{r_{xx}^{n+1} + r_{xx}^n}{2}, \quad s_{xx} = \frac{s_{xx}^{n+1} + s_{xx}^n}{2}, \quad (1.12)$$

$$u_t \simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \quad v_t \simeq \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t}, \quad (1.13)$$

$$u = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \quad v = \frac{v^{n+1} + v^n}{2}, \quad uv = \frac{(uv)^{n+1} + (uv)^n}{2}, \quad (1.14)$$

$$u_x = \frac{u_x^{n+1} + u_x^n}{2}, \quad v_x = \frac{v_x^{n+1} + v_x^n}{2}, \quad (1.15)$$

$$u_{xx} = \frac{u_{xx}^{n+1} + u_{xx}^n}{2}, \quad v_{xx} = \frac{v_{xx}^{n+1} + v_{xx}^n}{2}, \quad (1.16)$$

$$(u^2 v) = \frac{(u^2 v)^{n+1} + (u^2 v)^n}{2}, \quad (uv^2) = \frac{(uv^2)^{n+1} + (uv^2)^n}{2}, \quad (1.17)$$

$$uu_x = \frac{(uu_x)^{n+1} + (uu_x)^n}{2}, \quad vv_x = \frac{(vv_x)^{n+1} + (vv_x)^n}{2}, \quad (1.18)$$

$$(uv)_x = \frac{(uv)_x^{n+1} + (uv)_x^n}{2}, \quad (vu)_x = \frac{(vu)_x^{n+1} + (vu)_x^n}{2}, \quad (1.19)$$

$$u_{xxt} \simeq \frac{u_{xxt}^{n+1} - u_{xxt}^n}{\Delta t}, \quad v_{xxt} \simeq \frac{v_{xxt}^{n+1} - v_{xxt}^n}{\Delta t}. \quad (1.20)$$

1.3. Sonlu Elemanlar Metodu

Fiziksel sürecin matematiksel formülasyonu ve matematiksel modelin sayısal olarak analizi, fiziksel olaylar üzerinde çalışan bir çok mühendis ve bilim adamının ilgilendiği iki temel konudur. Fiziksel sürecin matematiksel formülasyonu, ilgili konu (örneğin fizik yasaları) hakkında ve kullanılacak matematiksel metot hakkında deneyim gerektirir. Formülasyon sonucunda genellikle bir diferensiyel denklem ortaya çıkar. Matematiksel modelin elde edilmesi ve fiziksel sürecin karakteristik özelliklerinin tahmin edilebilmesi için analitik ya da yaklaşık metotlara ihtiyaç vardır. Yaklaşık metotlardan sonlu elemanlar metodu yaygın olarak kullanılmaktadır.

Sonlu elemanlar metodu, varyasyonel metotlardandır. Fakat geleneksel varyasyonel metotlarına göre daha avantajlıdır. Sonlu elemanlar metodunu diğer sayısal metotlardan üstün kılan üç temel özellik vardır. Sonlu elemanlar metodu hem düzgün, hem de düzgün olmayan karmaşık geometrik bölgelerde iyi sonuçlar vermektedir. Pratik, uygulanması kolay ve bilgisayar programlama mantığına uygun bir metottur (Logan, 2007).

1. Geometrik olarak karmaşık olan çözüm bölgesinin, sonlu eleman denen ve geometrik olarak daha basit olan alt bölgelerin bir koleksiyonu olarak yeniden gösterilmesi.
2. Herhangi bir sürekli fonksiyon, cebirsel polinomların bir lineer kombinasyonu olarak gösterilebilir düşüncesinden hareketle, herbir sonlu eleman üzerinde, yaklaşım fonksiyonları oluşturulması
3. Diferensiyel denklem kullanılarak, herbir sonlu eleman üzerinde, bilinmeyen katsayılar arasında cebirsel bağıntılar elde edilmesi (Reddy, 1993).

Sonlu elemanlar metotlarından bazıları aşağıda verilmiştir.

1.3.1. Ağırlıklı rezidü metodu

$$Lu(x) = f(x) \quad (1.21)$$

şeklinde ifade edilen bir diferensiyel denklemde; L bir diferensiyel operatör, $f(x)$ bilinen bir fonksiyon ve $u(x)$ aranan çözüm olsun. (1.21) diferensiyel denkleminin sayısal çözümü için ağırlıklı rezidü metodu kullanıldığında $u(x)$ fonksiyonu için

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (1.22)$$

formundaki sonlu yaklaşım serisi kullanılır.

(1.22) eşitliğinde verilen $\phi_j(x)$, $j = 1, \dots, N$ fonksiyonları, diferensiyel denklemin çözüm bölgesi üzerinde tanımlıdır ve a_j , $j = 1, \dots, N$ bilinmeyen katsayılardır. Sonlu elemanlar metodunda, $\phi_j(\cdot)$ fonksiyonları problem için verilen tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler ama genelde diferensiyel denklemi sağlamazlar.

Ağırlıklı rezidü metodu, $\tilde{u}(x)$ sayısal çözüm ile tam çözüm arasındaki sapma miktarını minimuma indirmeyi amaçlar. Bu sapma ölçüsü rezidü olarak tanımlanır.

$$R(x) = L\tilde{u}(x) - f(x) = L\tilde{u}(x) - Lu(x). \quad (1.23)$$

V_j ağırlık fonksiyonları aşağıdaki integrasyonu minimize edecek biçimde tanımlanmış olan özel fonksiyonlar olmak üzere, (1.23) ile verilen rezidü ifadesi, $V_j(x)$ ağırlık fonksiyonları ile çarpılarak problemin Ω tanım bölgesi üzerindeki integrali alınırsa

$$\int_{\Omega} V_j(x) R(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.24)$$

formunda N bilinmeyen N denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden a_j bilinmeyenleri bulunarak (1.22) eşitliğinde yerine yazılırsa $\tilde{u}(x)$ sayısal çözümüne ulaşılır (Reddy, 1993).

1.3.2. Kolokeyşin metodu

Adi diferensiyel denklemlerin, kısmi diferensiyel denklemlerin ve integral denklemlerin sayısal çözümü için uygulanması kolay bir metottur. Kolokeyşin metodunda tanımlanan yaklaşım fonksiyonu denklemlerde yerine yazılarak bölünme noktalarındaki değerleri cinsinden olan cebirsel denklemleri elde edilir ve bilinmeyenler içeren cebirsel denklem çözülür. Çözülen cebirsel denklem yaklaşık fonksiyonun bilinmeyen parametreleridir.

Kolokeyşin metodu, ağırlıklı rezidü metodunun bir uygulamasıdır. Bu metotta V_j ağırlık fonksiyonları olarak

$$V_j = \delta(x - x_j) \quad (1.25)$$

fonksiyonları seçilir. Bu fonksiyonlar

$$\delta(x - x_j) = \begin{cases} 1, & x = x_j \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

özelliğine sahiptirler ve $R(x_j) = 0$, $j = 1, \dots, N$ olduğunda (1.24) integralinin sonucu sıfır olacaktır. Dolayısıyla kolokeyşin metodu için problemin tanımlanan aralığında verilen x_j , $j = 1, \dots, N$ kolokeyşin noktalarında (1.22) eşitliğinin yazılması ile

$$L\left(\sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x)\right) - f(x) = 0 \quad (1.26)$$

denklemini elde edilir. Sınır şartları kullanılarak, denklemdeki a_j bilinmeyenleri bulunduktan sonra, $\tilde{u}(x)$ sayısal çözümüne ulaşılır (Lapidus ve Pinder, 1982).

1.3.3. Galerkin metodu

Galerkin metodu, verilen diferensiyel denklemi sayısal olarak çözmek için kullanılan diğer bir metottur.

V_j ağırlık fonksiyonları, yaklaşım fonksiyonunda kullanılan $\phi_j(x)$ fonksiyonlarına eşit olarak alındığında metot Galerkin metodu olarak adlandırılır. Tanım bölgesi Ω iken, (1.24)

denkleminin cebirsel denklemleri

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i L(\phi_j) dx$$

$$F_i = \int_{\Omega} \phi_i f dx$$

olmak üzere

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} a_j = F_i \quad (1.27)$$

ile ifade edilir. Sistemin çözülmesiyle bulunan a_j bilinmeyenlerinin (1.22) denkleminde yerine yazılması ile (1.22) formunda sayısal çözüme ulaşılır (Reddy, 1993).

1.3.4. Subdomain Galerkin metodu

Tanım bölgesi Ω olan problemi çözmek için Galerkin metodunda V_i ağırlık fonksiyonu

$$V_i = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak alındığında Galerkin metodu, subdomain Galerkin metoduna dönüşür. Subdomain Galerkin metodunun cebirsel denklemleri

$$A_{ij} = \int_{\Omega} L(\phi_j) dx$$

$$F_i = \int_{\Omega} f dx$$

olmak üzere

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} a_j = F_i$$

ile ifade edilir (Karakoç, 2011).

1.3.5. Moment metodu

Uygulanışı itibariyle Galerkin metoduna benzeyen bu metotta, $P_j(x)$ ler polinom olmak üzere, ağırlık fonksiyonları

$$V_j = P_j(x)$$

şeklinde seçilir. Böylece (1.24) ile verilen iç çarpım

$$\int_{\Omega} P_j(x)R(x)dx = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

formuna döner. Moment metodunun Galerkin metodundan farkı şu şekilde ifade edilebilir. Bu metotta rezidü ifadesi, seçilen fonksiyonlar ile ortogonal olacak şekilde düzenlenir ve bu işlem için seçilen fonksiyonlar Galerkin metodunda olduğu gibi yaklaşım fonksiyonu ile aynı olmak zorunda değildir. Uygulamada, ortogonalleştirme işlemi yapıldığı takdirde, $V_j = x^j$ seçiminin daha iyi sonuçlar ürettiği de görülmüştür (Jain, 1984).

1.4. Thomas Algoritmaları

Diferensiyel denklemlerin sonlu elemanlar metotları ile sayısal ayrıştırılması sırasında oluşan cebirsel denklem sistemlerinin katsayı matrisleri bant matrislerdir. Katsayı matrisleri bant şeklinde olan cebirsel denklemlerin çözümlerinde sıkça kullanılan metotlardan birisi de Gauss eleme metodundan türetilen Thomas algoritmalarıdır. Thomas algoritmalarının temel mantığı, Gauss eliminasyon metodunda katsayıları sıfır geldiğinde yoketmelerin gerçekleştirilmemesidir. Thomas algoritmaları 3-bant, 5-bant, 7-bant,... gibi tek sayılı bant matrisler için geliştirilmiştir. Bant genişliği çift olan matrisler için bu algoritmalar modifiye edilerek kullanılırlar. Genel olarak Thomas algoritmaları iki ana kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım katsayı matrisinin köşegen altında bulunan kısmında bulunan elemanlarının elenmesi, ikinci kısım ise çözümün elde edilmesidir.

Bant biçimindeki matrislerin klasik Gauss eliminasyonu ile çözümleri de mümkündür. Ancak, Thomas algoritmaları köşegen ve köşegen yakınlarında bulunan sıfırdan farklı katsayıları vektör biçiminde tanımladığından programlama sırasında bellek kullanımını oldukça azaltmaktadır. Bu sayede algoritmanın çalışma maliyeti azalır.

Bu tezde kısmi diferensiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan 3-bant, 7-bant ve 6-bant matrislerin çözümü için kullanılan Thomas algoritmaları aşağıdaki gibi sıralanabilir (Ames, 1992).

1.4.1. 3-Bant katsayı matrisli cebirsel denklem sistemi ve çözüm algoritması

3-bant katsayı matrisli bir cebirsel denklem sisteminin genel biçimi

$$\begin{bmatrix} b_0 & c_0 & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ & & & & a_N & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$

ile verilebilir. Bu denklem sisteminin çözümünde kullanılacak Thomas algoritması aşağıdaki gibidir:

Eleme Algoritması:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= b_0, \beta_0 = d_0, \\ \alpha_i &= \frac{b_i - a_i c_{i-1}}{\alpha_{i-1}}, \beta_i = \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{\alpha_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Çözüm Algoritması:

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{\beta_N}{\alpha_N}, \\ x_i &= \frac{(\beta_i + c_i x_{i+1})}{\alpha_i}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= b_i - a_i \zeta_{i-3}, \\
\beta_i &= c_i - a_i \lambda_{i-3} - \alpha_i \zeta_{i-2}, \\
\mu_i &= d_i - a_i \eta_{i-3} - \lambda_{i-2} \alpha_i - \beta_i \zeta_{i-1}, \\
\zeta_i &= (e_i - \eta_{i-2} \alpha_i - \beta_i \lambda_{i-1}) / \mu_i, \\
\lambda_i &= (f_i - \beta_i \eta_{i-1}) / \mu_i, \\
\eta_i &= g_i / \mu_i, \\
\gamma_i &= (h_i - \beta_i \gamma_{i-1} - \alpha_i \gamma_{i-2} - a_i \gamma_{i-3}) / \mu_i, \quad i = 3, 4, \dots, N.
\end{aligned}$$

Çözüm Algoritması:

$$\begin{aligned}
x_N &= \gamma_N, \\
x_{N-1} &= \gamma_{N-1} - \zeta_{N-1} x_N, \\
x_{N-2} &= \gamma_{N-2} - \lambda_{N-2} x_N - \zeta_{N-2} x_{N-1}
\end{aligned}$$

ve

$$x_j = \gamma_j - \zeta_j x_{j+1} - x_{j+2} \lambda_j - x_{j+3} \eta_j, \quad i = N-3, N-4, \dots, 0.$$

1.4.3. 6-Bant katsayı matrisli cebirsel denklem sistemi ve çözüm algoritması

6-bant katsayı matrisli cebirsel denklem sistemlerinin çözüm algoritması 7-bant katsayı matrisli sistemlerin çözümlerinde kullanılan Thomas algoritmasının uyarlanması ile elde edilir. Buna göre; ardışık iki denklem için ilk denklemin soluna 0, ikinci denklemin sağına 0 ilave edilerek oluşturulan 7-bant matris sistemi Thomas algoritması ile çözülür. Bu durum görsel olarak gösterilmiştir.

1.6. Noktasal Yakınsaklık Oranı

Konuma göre noktasal yakınsaklık oranı (NYO), zaman artımı mümkün olduğunca küçük ve sabit olmak üzere aşağıdaki gibi formüle edilebilir:

$$NYO = \frac{\log_{10}(|u - u_{h_j}| / |u - u_{h_{j+1}}|)}{\log_{10}(h_j/h_{j+1})}$$

Benzer şekilde zamana göre NYO ise, konum artımı mümkün olduğunca küçük ve sabit olmak üzere

$$NYO = \frac{\log_{10}(|u - u_{t_j}| / |u - u_{t_{j+1}}|)}{\log_{10}(t_j/t_{j+1})}$$

formunda verilebilir. Burada u tam çözüm iken u_{h_j} ve u_{t_j} , sırası ile h_j konum anındaki ve t_j zaman adımıdaki sayısal çözümdür.

1.7. B-spline Fonksiyonlar

Çok sayıda veri noktalarından geçen interpolasyon polinomu bulmak kolay değildir. Lagrange ve Newton interpolasyon polinomlarının dereceleri, nokta sayıları ile doğru orantılıdır. Nokta sayısı arttıkça, polinomun derecesi de artar. Dolayısıyla yapılacak işlemlerin karmaşıklığı artar. Bunun yerine art arda gelen iki veri arasında birinci, ikinci ya da daha yüksek dereceden fonksiyonlarla yaklaşım yapılması daha uygundur. Çok sayıda veri noktalarına düşük dereceden polinom yaklaşımı spline interpolasyonu yardımı ile yapılabilir. Böylece spline interpolasyonu; tanım aralığı üzerinde, birbirlerini örtmeyen alt aralıklarda, daha küçük dereceden polinom bulmayı amaçlar (Davies, 1980).

Reel sayıların monoton artan bir x_1, x_2, \dots, x_N dizisinin noktalarında tanımlı m . mertebeden $s(x)$ spline fonksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahiptir ve reel doğru üzerinde tanımlı bir fonksiyondur (Dağ, 1994):

1. $s(x)$ her $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında m . mertebeden ya da daha küçük mertebeden bir polinomdur. (Burada $x_0 \rightarrow -\infty$ ve $x_{N+1} \rightarrow \infty$ olabilir.)
2. $s(x)$ ve kendisinin $1, 2, \dots, m - 1$ mertebeden türevleri tanımlı oldukları her aralıkta ve x_i , ($i = 1, 2, \dots, N$) bölünme noktalarında süreklidir.

Bu tanıma göre, spline fonksiyonları, tanımlanan alt aralıklarda ve bölünme noktalarında süreklilik ve türevlenme şartlarını sağlayan parçalı sürekli fonksiyonlardır. $m = 0$ için 2 şartı geçersizdir ve 0. mertebeden bir spline fonksiyonu adım fonksiyonu olarak adlandırılır. $m = 1$ için ise spline fonksiyonu kırık bir çizgidir. $m > 0$ için m . mertebeden bir

spline fonksiyonunun m . türevi bir adım fonksiyonudur. Tersine m . mertebeden bir spline fonksiyonu, bir adım fonksiyonunun m . mertebeden belirsiz integralidir.

Spline fonksiyonlar aşağıdaki özellikleri sağlayan parçalı polinom fonksiyonlardır.

- Düzgün fonksiyonlardır.
- Uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Hesaplanması kolay olan fonksiyonlardır.
- Türevleri ve integralleri de spline fonksiyondur.
- Küçük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektir ve polinomlarda olduğu gibi salım yapmazlar.
- Çözüm bölgesi üzerinde sürekli olan her fonksiyon, bir spline fonksiyon cinsinden gösterilebilir.

Belirli derecede ve düzgünlükteki her spline fonksiyon B-spline fonksiyonların lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots \text{ ve } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \infty, \lim_{i \rightarrow \infty} x_{-i} = -\infty \quad (1.30)$$

olmak üzere, 0. dereceden B-spline fonksiyon,

$$B_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.31)$$

olarak tanımlanır (Boor, 1978). Görüldüğü gibi B_i^0 , B-spline fonksiyonu bölünme noktalarında süreksizdir. Yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned} B_i^k &= \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \\ k &= 1, 2, \dots \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (1.32)$$

bağıntısı yardımı ile hesaplanır (Höllig, 2003). B-spline fonksiyonlar geometrik olarak farklı uzunluklara sahip alt aralıklar üzerinde de tanımlanabilirler.

1.8. Üstel Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

$[a, b]$ aralığı

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (1.33)$$

olacak şekilde düzgün aralıklara bölünstün. Bu bölünme noktaları ile birlikte $[a, b]$ aralığı dışındaki $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}$ ilave bölünme noktaları üzerinde üstel kübik B-spline fonksiyonları tanımlanabilir. Bu durumda B_{-1}, \dots, B_{N+1} fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır. Bundan dolayı $y(x, t)$ fonksiyonu için,

$$y_m(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} B_m(x) \delta_m(t) \quad (1.34)$$

formunda bir $y_m(x, t)$ sayısal çözümü alınabilir.

B_m üstel kübik B-spline fonksiyonları, $m = -1, 0, \dots, N + 1$ için

$$B_m(x) = \begin{cases} \epsilon_1 \left((x_{m-2} - x) - \frac{1}{p} (\sinh(p(x_{m-2} - x))) \right), & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ \epsilon_2 + \epsilon_3 (x_m - x) + \epsilon_4 e^{p(x_m - x)} + \epsilon_5 e^{-p(x_m - x)}, & [x_{m-1}, x_m] \\ \epsilon_2 + \epsilon_3 (x - x_m) + \epsilon_4 e^{p(x - x_m)} + \epsilon_5 e^{-p(x - x_m)}, & [x_m, x_{m+1}] \\ \epsilon_1 \left((x - x_{m+2}) - \frac{1}{p} (\sinh(p(x - x_{m+2}))) \right), & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases} \quad (1.35)$$

bağıntısı ile verilir (McCartin, 1991). Burada $s = \sinh(ph)$, $c = \cosh(ph)$,

$$\epsilon_1 = \frac{p}{2(phc - s)}, \quad \epsilon_2 = \frac{phc}{phc - s},$$

$$\epsilon_3 = \frac{p}{2} \left(\frac{c(c-1) + s^2}{(phc - s)(1 - c)} \right),$$

$$\epsilon_4 = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-ph}(1 - c) + s(e^{-ph} - 1)}{(phc - s)(1 - c)} \right),$$

$$\epsilon_5 = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{ph}(c - 1) + s(e^{ph} - 1)}{(phc - s)(1 - c)} \right)$$

ve p serbest parametredir. McCartin (1991). $[a, b]$ üzerinde $B_m(x)$ fonksiyonları 2. mertebeye kadar sürekli türevlenebilir fonksiyondur. B_m üstel kübik B-spline fonksiyonlarının birinci ve ikinci türevleri sırası ile aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$B'_m(x) = \begin{cases} \epsilon_1 (-1 + \cosh(p(x_{m-2} - x))), & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ -\epsilon_3 - \epsilon_4 p e^{p(x_m - x)} + \epsilon_5 p e^{-p(x_m - x)}, & [x_{m-1}, x_m] \\ \epsilon_3 + \epsilon_4 p e^{p(x - x_m)} - \epsilon_5 p e^{-p(x - x_m)}, & [x_m, x_{m+1}] \\ \epsilon_1 (1 - \cosh(p(x - x_{m+2}))), & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{d. d.} \end{cases} \quad (1.36)$$

ve

$$B''_m(x) = \begin{cases} -\epsilon_1 p \sinh(p(x_{m-2} - x)), & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ \epsilon_4 p^2 e^{p(x_m - x)} + \epsilon_5 p^2 e^{-p(x_m - x)}, & [x_{m-1}, x_m] \\ \epsilon_4 p^2 e^{p(x - x_m)} + \epsilon_5 p^2 e^{-p(x - x_m)}, & [x_m, x_{m+1}] \\ -\epsilon_1 p \sinh(p(x - x_{m+2})), & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{d. d.} \end{cases} \quad (1.37)$$

Bu bağıntının katsayıları, p serbest parametresine bağlıdır. Üstel kübik B-spline fonksiyonları $p \rightarrow 0$ iken kübik B-spline fonksiyonuna, $p \rightarrow \infty$ iken ise lineer B-spline fonksiyonuna dönüşür (McCartin, 1991).

$B_m(x)$ B-spline fonksiyonu ve ilk iki türevi, $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. ' ve '' , x 'e göre birinci ve ikinci türevi göstermek üzere, $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında, $B_m(x)$, $B'_m(x)$ ve $B''_m(x)$ fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri sırası ile,

$$\begin{aligned} B_m(x_{m-2}) &= \epsilon_1 \left((x_{m-2} - x_{m-2}) - \frac{1}{p} (\sinh(p(x_{m-2} - x_{m-2}))) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_m(x_{m-1}) &= \epsilon_1 \left((x_{m-2} - x_{m-1}) - \frac{1}{p} (\sinh(p(x_{m-2} - x_{m-1}))) \right) \\ &= \frac{s - ph}{2(phc - s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_m(x_m) &= \epsilon_2 + \epsilon_3 (x_m - x_{m-1}) + \epsilon_4 e^{p(x_m - x_{m-1})} + \epsilon_5 e^{-p(x_m - x_{m-1})} \\ &= \frac{s - ph}{2(phc - s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_m(x_{m+1}) &= \epsilon_2 + \epsilon_3 (x_m - x_m) + \epsilon_4 e^{p(x_m - x_m)} + \epsilon_5 e^{-p(x_m - x_m)} \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_m(x_m) &= \epsilon_2 + \epsilon_3(x_m - x_m) + \epsilon_4 e^{p(x_m - x_m)} + \epsilon_5 e^{-p(x_m - x_m)} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_m(x_{m+1}) &= \epsilon_2 + \epsilon_3(x_{m+1} - x_m) + \epsilon_4 e^{p(x_{m+1} - x_m)} + \epsilon_5 e^{-p(x_{m+1} - x_m)} \\
&= \frac{s - ph}{2(phc - s)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_m(x_{m+1}) &= \epsilon_1 \left((x_{m+1} - x_{m+2}) - \frac{1}{p} (\sinh(p(x_{m+1} - x_{m+2}))) \right) \\
&= \frac{s - ph}{2(phc - s)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_m(x_{m+2}) &= \epsilon_1 \left((x_{m+2} - x_{m+2}) - \frac{1}{p} (\sinh(p(x_{m+2} - x_{m+2}))) \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'_m(x_{m-2}) &= \epsilon_1 (-1 + \cosh(p(x_{m-2} - x_{m-2}))) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'_m(x_{m-1}) &= \epsilon_1 (-1 + \cosh(p(x_{m-2} - x_{m-1}))) \\
&= \frac{p(1 - c)}{2(phc - s)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'_m(x_{m-1}) &= -\epsilon_3 - \epsilon_4 p e^{p(x_m - x_{m-1})} + \epsilon_5 p e^{-p(x_m - x_{m-1})} \\
&= \frac{p(1 - c)}{2(phc - s)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'_m(x_m) &= -\epsilon_3 - \epsilon_4 p e^{p(x_m - x_m)} + \epsilon_5 p e^{-p(x_m - x_m)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'_m(x_m) &= \epsilon_3 + \epsilon_4 p e^{p(x_m - x_m)} - \epsilon_5 p e^{-p(x_m - x_m)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'_m(x_{m+1}) &= \epsilon_3 + \epsilon_4 p e^{p(x_{m+1} - x_m)} - \epsilon_5 p e^{-p(x_{m+1} - x_m)} \\
&= \frac{p(c - 1)}{2(phc - s)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'_m(x_{m+1}) &= \epsilon_1 (1 - \cosh(p(x_{m+1} - x_{m+2}))) \\ &= \frac{p(c-1)}{2(phc-s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'_m(x_{m+2}) &= \epsilon_1 (1 - \cosh(p(x_{m+2} - x_{m+2}))) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B''_m(x_{m-2}) &= -\epsilon_1 p \sinh(p(x_{m-2} - x_{m-2})), \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B''_m(x_{m-1}) &= -\epsilon_1 p \sinh(p(x_{m-2} - x_{m-1})), \\ &= \frac{p^2 s}{2(phc-s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B''_m(x_{m-1}) &= \epsilon_4 p^2 e^{p(x_m - x_{m-1})} + \epsilon_5 p^2 e^{-p(x_m - x_{m-1})} \\ &= \frac{p^2 s}{2(phc-s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B''_m(x_m) &= \epsilon_4 p^2 e^{p(x_m - x_m)} + \epsilon_5 p^2 e^{-p(x_m - x_m)} \\ &= -\frac{p^2 s}{(phc-s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B''_m(x_m) &= \epsilon_4 p^2 e^{p(x_m - x_m)} + \epsilon_5 p^2 e^{-p(x_m - x_m)} \\ &= -\frac{p^2 s}{(phc-s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B''_m(x_{m+1}) &= \epsilon_4 p^2 e^{p(x_{m+1} - x_m)} + \epsilon_5 p^2 e^{-p(x_{m+1} - x_m)} \\ &= \frac{p^2 s}{2(phc-s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B''_m(x_{m+1}) &= -\epsilon_1 p \sinh(p(x_{m+1} - x_{m+2})) \\ &= \frac{p^2 s}{2(phc-s)}, \end{aligned}$$

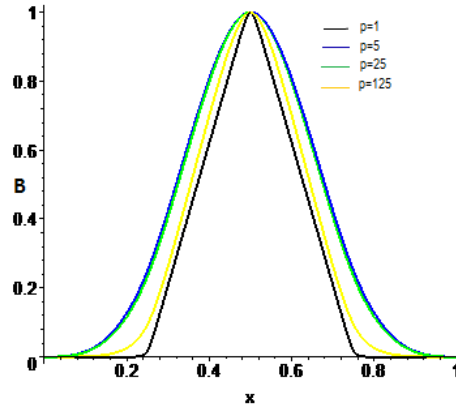
$$\begin{aligned} B''_m(x_{m+2}) &= -\epsilon_1 p \sinh(p(x_{m+2} - x_{m+2})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değerler, izelge 1.1'de listelenmiřtir.

Çizelge 1.1. Bölünme noktalarındaki üstel kübik B-spline değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$B_m(x)$	0	$\frac{s-ph}{2(phc-s)}$	1	$\frac{s-ph}{2(phc-s)}$	0
$B'_m(x)$	0	$\frac{p(1-c)}{2(phc-s)}$	0	$\frac{p(c-1)}{2(phc-s)}$	0
$B''_m(x)$	0	$\frac{p^2s}{2(phc-s)}$	$-\frac{p^2s}{(phc-s)}$	$\frac{p^2s}{2(phc-s)}$	0

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı 4 ardışık $B_{m-1}, B_m, B_{m+1}, B_{m+2}$ üstel kübik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür. Farklı p parametreleri için farklı şekil fonksiyonları elde edilir. Temsili olarak $p = 1, 5, 25, 125$ olduğu durumda $[0, 1]$ aralığındaki üstel kübik B-spline fonksiyonlarının grafiği Şekil 1.1'de gösterilmiştir.

Şekil 1.1: $p = 1, 5, 25, 125$ için üstel kübik B-spline fonksiyonları

Ayrıca $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde, 4 ardışık $B_{m-1}, B_m, B_{m+1}, B_{m+2}$ üstel kübik B-spline fonksiyonu dışındaki diğer tüm üstel kübik B-spline fonksiyonları sıfır olacağından, bu aralık üzerinde tanımlı herhangi bir y fonksiyonu için

$$y_m(x, t) \approx y_m = \sum_{j=m-1}^{m+2} B_j(x) \delta_j(t) \quad (1.38)$$

yaklaşım fonksiyonu bulunabilir.

Çizelge 1.1 ve (1.38) sayısal çözümünün kullanılması ile y_m, y'_m ve y''_m yaklaşımlarının bölünme noktalarındaki değerleri δ_m parametresine göre aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{aligned} y_m &= y_m(x_m, t) = \frac{s-ph}{2(phc-s)} \delta_{m-1} + \delta_m + \frac{s-ph}{2(phc-s)} \delta_{m+1}, \\ y'_m &= y'_m(x_m, t) = \frac{p(1-c)}{2(phc-s)} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1}), \\ y''_m &= y''_m(x_m, t) = \frac{p^2s}{2(phc-s)} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}). \end{aligned} \quad (1.39)$$

1.9. Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Oluşum denklemleri,

$$u_t = K[u]$$

formundadır. Burada $K[u]$; u fonksiyonu ve u fonksiyonunun x değişkenine göre türevlerini içeren bir fonksiyonu, t alt indisi zamana göre türevi, $u(x, t)$ ise çözüm fonksiyonunu göstermektedir. Eğer $K[u]$, u terimine göre lineer ise, bu tip denklemlere lineer oluşum denklemleri aksi halde lineer olmayan oluşum denklemleri denilmektedir.

Fizik, kimya, biyoloji gibi bir çok bilim dalında ve çeşitli mühendislik alanlarında geniş uygulama alanına sahip olan, lineer olmayan oluşum denklemlerinden bazıları aşağıda verilmiştir.

(i) Kimyasal reaksiyonlar ve popülasyon biyolojisinde model problem olan

$$u_t = u_{xx} + f(u)$$

formundaki reaksiyon-difüzyon denklemi.

(ii) Bulaşıcıların taşınmasını ve yoğun akışkan akışını modelleyen

$$u_t + f(u)_x = u_{xx}$$

formunda verilen adveksiyon-difüzyon denklemi.

(iii) Akışkanlar mekaniğinde, plazma fiziğinde ve lineer olmayan optik problemlerinde model denklem olarak kullanılan

$$iu_t + u_{xx} + q|u|^2 u = 0$$

lineer olmayan kübik Schrödinger denklemi.

(iv) Yüzey dalgalarının yayılımı için bir model olan

$$\begin{aligned} v_t + u_x + (vu)_x &= 0, \\ u_t + v_x + uu_x - \frac{1}{3}u_{xxt} &= 0 \end{aligned}$$

formundaki klasik Boussinesq denklemi.

(v) Akışkanlar mekaniğinde kullanılan

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + k_1 uu_x + k_2(uv)_x &= 0, \\ v_t - v_{xx} + k_1 vv_x + k_3(uv)_x &= 0 \end{aligned}$$

formundaki ikili Burgers denklemi.

(vi) Lineer olmayan plazma dalgalarının oluşumunu modelleyen

$$Q_t(x, t) + Q_{xxx}(x, t) + \alpha (|Q(x, t)| Q(x, t))_x = 0$$

formundaki CMKdV denklemi.

Oluşum denklemleri ile ilgili daha detaylı bilgi için (Hunter, 1996) referansı incelenebilir.

1.10. Korunum Kanunları

Lineer olmayan oluşum denklemleri için korunum kanunu

$$\mathcal{T}_t + \mathcal{X}_x = 0 \quad (1.40)$$

formundadır. Burada $\mathcal{T}[u]$ ve $\mathcal{X}[u]$ sırası ile, u ve u fonksiyonunun x değişkenine göre türevlerini içeren korunumlu yoğunluk ve ilgili akıdır. \mathcal{T}_t ve \mathcal{X}_x sırası ile t ve x değişkenlerine göre tam türevi gösterir ve

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u} u_t + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u_x} u_{tx} + \dots, \\ \mathcal{X}_x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u} u_x + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u_x} u_{xx} + \dots \end{aligned} \quad (1.41)$$

şeklinde tanımlıdır. (1.40) denkleminin x değişkenine göre, bir (A, B) aralığında integrali alındığında

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{T} dx + \mathcal{X}|_A^B = \frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \mathcal{T} dx + \mathcal{X}|_A^B = 0 \quad (1.42)$$

elde edilir. $(B - A)$ 'nın periyodun tam katı olduğu veya $u(x, t)$ 'nin $x \rightarrow \mp\infty$ ve $(A, B) = (-\infty, \infty)$ iken sifıra gittiği uygun periyodik sınır şartları altında, (1.42) eşitliğinden

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \mathcal{T} dx = 0 \quad (1.43)$$

olup, buradan t değişkenine göre integral alındığında ise

$$\int_A^B \mathcal{T} dx = \text{sabit} \quad (1.44)$$

hareket sabiti elde edilir (Fordy, 1990; Taşcan, 2002). Bu çalışmada NLS denklemi için korunum sabitlerinin sayısal değerleri hesaplanmış ve ifadesi ilgili bölümde verilmiştir.

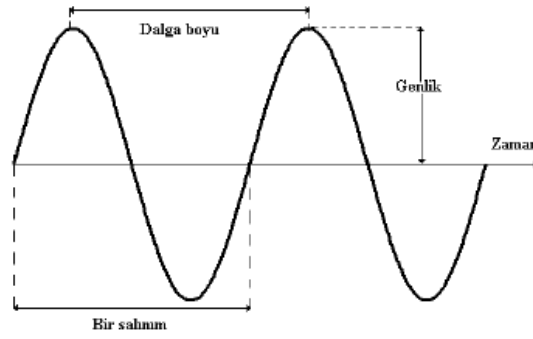
1.11. Solitonlar

Dalga, titreşim hareketi yapan bir fiziksel niceliğin ortamda veya uzayda yayılması olarak tanımlanabilir. Dalga bir titreşim hareketidir. Bir ortama aktarılan enerjiyi başka bir ortama iletme şeklidir. Dalgalar titreşim doğrultusuna ve taşıdığı enerjiye göre sınıflandırılır. Titreşim doğrultusuna göre dalgalar enine dalgalar ve boyuna dalgalar olarak ikiye ayrılır. Titreşim doğrultusu yayılma doğrultusuna dik olan dalgalara enine dalgalar denilirken, titreşim doğrultusu yayılma doğrultusuna paralel olan dalgalara da boyuna dalgalar denir. Enine dalgalara elektromanyetik dalgalar, boyuna dalgalara ise ses dalgaları örnek olarak verilebilirken, yay dalgaları, deprem dalgaları, su dalgaları ise hem enine hem boyuna dalgalara örnek olarak verilebilir. Taşıdığı enerjiye göre ise dalgalar mekanik dalga ve elektromanyetik dalga olarak ikiye ayrılır. Yayılabilmesi için maddesel bir ortama ihtiyaç duyan dalgalara mekanik dalga, yüklerin ivmeli hareketi ile oluşturulan, boşlukta ışık hızı ile yayılan, elektrik ve manyetik alana sahip dalgalara da elektromanyetik dalga denir. Ses, yay, su, deprem dalgaları mekanik dalgalar iken, radyo dalgaları, morötesi dalgalar, kızılötesi dalgalar, X ışınları ise elektromanyetik dalgalardır (Anonim, 2014).

Dalgalar bir yerden başka bir yere uzanırlar. Titreşimleri, periyodik (bir kemandaki nota sesi gibi) olabileceği gibi, periyodik olmayabilir (bir patlama sesi gibi). Bununla birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özelliklerini gösterirler. Dalgalar aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- Genlikleri vardır.
- Frekansa sahiptir.
- Dalga boyları vardır.

Basit bir dalga profili Şekil 1.2’de gösterilmiştir.



Şekil 1.2 Basit bir dalga profili

Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabilir. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, ortamın dalgaya zıt yönde hareket etmesi sonucunda meydana gelebilir ya da durağan bir ortamda zıt yönlerde hareket eden iki dalga arasındaki girişimin bir sonucu olarak ortaya çıkabilir. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

Solitonlar ise lineer olmayan dalgalardır ve kararlaştırılmış tek bir tanım bulmak oldukça zordur. Drazin ve Johnson (1989), solitonlara şu iki özelliği atfetmişlerdir:

1. Solitonlar biçimleri kalıcı olan dalgalardır.
2. Diğer solitonlarla etkileşime geçebilirler ve çarpışma sonrasında değişmeden kalabilirler.

Solitary dalgaları ise soliton dalgalarına benzeyen dalgalar olarak tanımlanmaktadır, yani çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalardır. Bundan dolayı solitonumsu dalgalar olarak da adlandırılabilirler. Soliton terimi, ilk olarak 1834 yılında, John Scott Russell tarafından tanımlanmıştır. Russell birçok kaynakta da yer alan gözlemini aşağıdaki şekilde ifade etmiştir (Russel, 1844):

"İki çift at tarafından dar bir kanal boyunca hızla çekilen bir botun hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durduğunda, bota hareket sağlayan kanaldaki su kütlesi durmadı ve su kütlesi şiddetli bir çalkalanma şeklinde botun uç kısmı etrafında toplandı ve aniden botu arkasında bırakarak, büyük bir hızla harekete geçti. Büyük bir solitary dalga yüksekliğine sahip olarak düşündüğüm formdaki, dairesel ve düzgün bir su kütesinin kanal boyunca şekil veya hızını bozmadan yoluna devam ettiğini gördüm. Bu dalga formunu, at üzerinde takip ettim ve yaklaşık 30 feet mesafe sonunda 8 veya 9 mil/saat hızında, ilk baştaki orijinal şeklinde ve yarı yüksekliğinde yuvarlanırcı halde gördüm. Yüksekliği kademeli

olarak azaldı ve yaklaşık 1 veya 2 mil takip sonunda, kanalın kenarlarında kaybolduğunu gördüm. İşte 1834 yılının Ağustos ayı, ilk kez ötelenme dalgası olarak adlandırdığım bu ilginç ve güzel olayı gözleme şansı bulduğum zamandı."

Russell, başlangıçta ötelenme dalgası olarak adlandırdığı dalgaya, daha sonra büyük solitary dalgası ismini vermiştir. Bu isim literatürde kısaltılarak solitary dalgası olarak da kullanılmıştır (Infeld ve Rowlands, 1990).

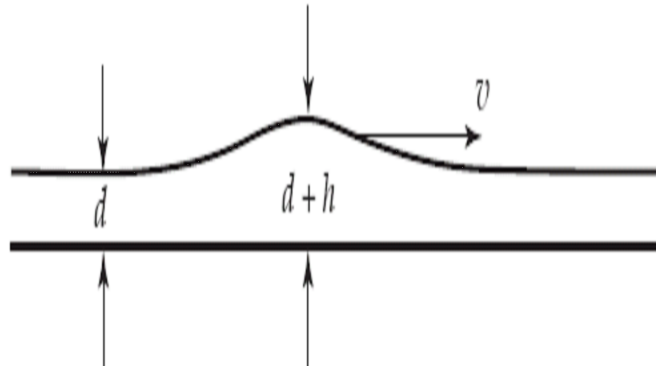
Daha sonra Russel, solitary dalgalarını daha dikkatli inceleyebilmek için, laboratuvarında oluşturduğu dalga tanklarında birçok deneyler yapmış ve aşağıdaki sonuçlara ulaşmıştır.

- (i) Solitary dalgaları $h \operatorname{sech}^2(k(x - vt))$ formuna sahiptir.
- (ii) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası üretir.
- (iii) Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler.

g yerçekimi ivmesi olmak üzere, h yüksekliğine sahip olan ve d derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgasının hızı

$$v = \sqrt{g(d + h)} \quad (1.45)$$

bağıntısı ile ifade edilir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır. Bir solitary dalgasının hareketi Şekil 1.3'de gösterilmiştir.



Şekil 1.3 Bir solitary dalgasının hareketi

O yıllarda Russel'in sonuçları deneysel olarak kaldı ve bir denklemin çözümü olarak solitary dalgaları elde edilemedi. Bununla birlikte, bir denklemin çözümünü veren solitary dalga problemleri yıllarca araştırmalara konu oldu. 1895 yılında ünlü Hollandalı matematikçi Korteweg ve öğrencisi de Vries (Korteweg ve de Vries, 1895)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \gamma u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.46)$$

denkleminin

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - vt) \quad (1.47)$$

formunda, şekli değişmeyen bir hareketli dalga çözümüne sahip olduğunu gösterdiler. Denkleminde $u(x, t)$, dalga genliğini; $c = \sqrt{gd}$, küçük genlikli dalga hızını; γ , lineer olmayan parametreyi; $\varepsilon = c(d^2/6 - T/2\rho g)$, dağılma parametresini; T , yüzey gerilimini; ρ , suyun yoğunluğunu göstermektedir. 1965 yılında Kruskal ve Zabusky, KdV denklemini sonlu farklar metodu ile çözmüş, solitary dalgalarının çarpışma sonrasında şekillerini değiştirmediklerini gözlemlemiş ve bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediğini bularak bu tip dalgalara soliton adını vermişlerdir (Zabusky ve Kruskal, 1965). 1967 yılında Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından ters saçılma dönüşüm metodu kullanılarak, KdV denkleminin soliton çözümleri analitik olarak da verilmiştir (Gardner vd, 1967).

Günümüzde solitonlar; akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, lazer fiziği, süper iletkenlik fiziği, biyofizik gibi bir çok fizik alanlarında (Chaohao, 1995), DNA ve proteinlerde de oluşabildiği için biyoloji bilim dalında da kullanılmaktadır. Solitonlar ayrıca uzun mesafelere yol alabildiğinden, teorik olarak bir fiber optikte normal dalga yerine kullanılacak olan solitonlar sayesinde, taşınan sinyalde herhangi bir kayıp olmaksızın, büyük miktardaki bilgi binlerce kilometre boyunca taşınabilecektir. Bu nedenle, soliton elektronik ve telekomünikasyon alanlarında oldukça sık çalışılmaktadır.

1.12. Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi (NLS) ve Test Problemleri

$i = \sqrt{-1}$, $u(x, t)$, x ve t ye bağlı kompleks değerli bir fonksiyon, q reel bir sabit, x ve t alt indisleri ise sıra ile konum ve zamana göre türevi göstermek üzere NLS denklemi

$$iu_t + u_{xx} + q|u|^2 u = 0 \quad (1.48)$$

formundadır. NLS denklemi için başlangıç ve sınır şartları ise sırası ile,

$$u(x, 0) = g(x), \quad (1.49)$$

$$u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0 \quad (1.50)$$

olarak tanımlanabilir. Burada $g(x)$ ilerleyen bölümlerde tanımlanacaktır.

Fizikte önemli uygulama alanlarına sahip olan (1.48) denklemi, kübik Schrödinger denklemi olarak da adlandırılır ve akışkanlar mekaniği (Hasimoto ve Ono, 1972), lineer olmayan optik problemleri (Strauss, 1978) ve plazma fiziği (Lamb, 1980) gibi alanlarda model olarak kullanılmaktadır.

(1.48) denkleminin analitik çözümü Karpman ve Krushkal (1969), Zakharov ve Shabat (1972), Scott, vd. (1973) tarafından verilmiştir. NLS denkleminin daha genel başlangıç şartları için analitik çözümü bilinmediğinden dolayı, denklemin sayısal çözümünü bulma adına günümüze kadar pek çok çalışma yapılmıştır. Çalışmalar arasında; sonlu farklar metodu (Delfour vd., 1981), sonlu elemanlar metotları (Löhner vd.,1984; Herbst vd.,1985; Argyris ve Haase,1987; Tourigny ve Morris, 1988), kübik spline sonlu elemanlar metodu (Gardner vd.,1993), kuintik B-spline sonlu elemanlar metodu (Saka, 2012), ortogonal spline kolokeyşim metodu (Robinson ve Fairweather, 1994), Galerkin metodu (Ismail, 2007), kuadratik B-spline sonlu elemanlar metodu (Dağ, 1999), yapay sinir ağları kullanılarak uygulanan sayısal çözüm metodu (Shirvany vd., 2007), diferensiyel quadrature metodu (Korkmaz ve Dag, 2008; Mokhtari vd., 2011 a), radyal taban fonksiyonları kullanılarak oluşturulan kolokeyşim metodu (Dereli vd., 2009), Pseudo-Spectral metot (Denghan ve Taleei, 2010; Taha ve Ablowitz, 1984), kapalı Crank-Nicolson metodu (Taha ve Ablowitz 1984), diferensiyel dönüşüm metodu ve indirgenmiş diferensiyel dönüşüm metodu (Abazari, 2011) örnek verilebilir.

(1.48) denkleminin çözümü olan $u(x, t)$ fonksiyonu

$$u(x, t) = r(x, t) + is(x, t) \quad (1.51)$$

olacak şekilde reel ve sanal kısımlarına ayrılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $r(x, t)$ ve $s(x, t)$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} s_t - r_{xx} - q(r^2 + s^2)r &= 0, \\ r_t + s_{xx} + q(r^2 + s^2)s &= 0 \end{aligned} \quad (1.52)$$

denklem sistemi elde edilir.

NLS denklemini aşağıdaki korunum kanunlarına sahiptir:

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx \simeq \int_a^b |u|^2 dx, \quad (1.53)$$

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(|u_x|^2 - \frac{1}{2}q|u|^4 \right) dx \simeq \int_a^b \left(|u_x|^2 - \frac{1}{2}q|u|^4 \right) dx. \quad (1.54)$$

Korunum sabitlerinin sayısal değerleri yamuklar kuralı kullanılarak aşağıdaki gibi sayısal olarak hesaplanabilir.

$$C_1 \simeq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (|u_j|^2 + |u_{j+1}|^2),$$

$$C_2 \simeq \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left(|(u_x)_j|^2 - \frac{1}{2}q|u_j|^4 + |(u_x)_{j+1}|^2 - \frac{1}{2}q|u_{j+1}|^4 \right)$$

1.12.1. Soliton dalga çözümü

NLS denkleminin çarpışma sonrasında da çarpışma öncesindeki şekillerini ve hızlarını koruyan soliton dalga çözümleri vardır (Calogero ve Eckhaus, 1987). Soliton dalga çözümü aşağıdaki formdadır:

$$u(x, t) = \alpha \left(\frac{2}{q} \right)^{\frac{1}{2}} \exp i \left\{ \frac{1}{2}Sx - \frac{1}{4}(S^2 - \alpha^2)t \right\} \operatorname{sech} [\alpha(x - St)] \quad (1.55)$$

Burada S , büyüklüğü α ya bağlı olan soliton dalgasının hızıdır. $S = 4$, $q = 2$ ve $\alpha = 1$ olarak alındığında sayısal çözümün modülü:

$$|u| = \operatorname{sech}(x - 4t) \quad (1.56)$$

olarak bulunur. (1.56) ifadesi genliği 1, hızı 4 olan soliton dalgasının x-ekseni boyunca sağa doğru sabit hızla ilerlemesini modellemektedir.

1.12.2. İki soliton dalgasının çarpışması

NLS denklemini

$$u_1(x, 0) = \alpha_1 \left(\frac{2}{q} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2}S(x - x_a) \right\} \operatorname{sech}(\alpha_1 x) \quad (1.57)$$

$$u_2(x, 0) = \alpha_2 \left(\frac{2}{q} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2}S(x - x_b) \right\} \operatorname{sech}(\alpha_2 x) \quad (1.58)$$

olmak üzere

$$u(x, 0) = u_1(x, 0) + u_2(x, 0), \quad (1.59)$$

şeklinde bir çarpışan dalga çözümüne sahiptir (Gardner vd., 1991). (1.59) başlangıç şartı, büyüklükleri eşit ve aralarındaki uzaklık $|x_a - x_b|$ birim olan iki soliton dalgası tanımlar. Dalgalardan birincisinin tepe noktası $x = x_a$, ikincisinin tepe noktası $x = x_b$ de konumlanmıştır.

1.12.3. Sabit soliton dalgasının doğuşu

Eğer

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx \geq \pi \quad (1.60)$$

şartı sağlanıyorsa $u(x, 0)$ başlangıç şartı bir soliton dalgası üretir (Gardner vd., 1991). Bu test probleminde başlangıç şartı, A katsayı olmak üzere, kapalı bir bölge üzerinde aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$u(x, 0) = A \exp(-x^2) \quad (1.61)$$

1.12.4. Hareketli soliton dalgasının doğuşu

Burada başlangıç şartı kapalı bir bölgede A katsayısı için

$$u(x, 0) = A \exp(-x^2 + 2ix) \quad (1.62)$$

olacak şekilde seçilmiştir (Gardner vd., 1991).

1.12.5. Bağlı durumlu solitonlar

Başlangıç şartı

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}(x) \quad (1.63)$$

alındığında eğer

$$q = 2M^2, M = 1, 2, \dots \quad (1.64)$$

ise M tane soliton dalgası oluşur (Gardner vd., 1991). Bu test problemi için analitik çözüm Miles (1981) tarafından verilmiştir. Fakat analitik çözüm $M \geq 3$ olması durumunda kullanışlı değildir. $q = 2, 8, 16$ için hesaplanan sayısal çözümler (Herbst vd.,1985; Gardner vd.,1991) referaslarında ele alınmıştır.

1.13. Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sistemi ve Test Problemleri

Zamana bağlı bir boyutlu reaksiyon-difüzyon denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(u) \quad (1.65)$$

formundadır. Burada $u(x, t)$ reel değerli bir fonksiyon, $\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ difüzyon terimi, $\alpha \neq 0$ difüzyon katsayısı, $\phi(u)$ fonksiyonu, sistemin reaksiyon süreçlerini temsil etmektedir.

Kimya, biyoloji gibi bilim dallarında sıkça karşılaşılan problemler, reaksiyon-difüzyon denklem sistemi ile modellenabilir. Örneğin doğadaki av avcı etkileşimlerini, sınırlı yiyecek kaynağı için ya da birbirlerinin büyümesini engellemek için yarışan canlı türlerini ya da ortak yaşayan iki canlının birbirinden faydalandığı yaşama şekli olan mutualizm gibi, bir popülasyondaki bireylerin hareketlerini modelleyebilir. Birden fazla bağımlı değişkenin bulunduğu ekoloji problemlerinin ve kimyasal reaksiyonların modellenmesinde kullanılan reaksiyon-difüzyon denklem sistemi aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, v), \quad (1.66)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G(u, v)$$

Burada $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ doğadaki iki türün popülasyon yoğunluk fonksiyonları ya da iki farklı kimyasal maddenin konsantrasyonu, D_u ile D_v sırası ile $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ nin difüzyon katsayılarını, F ile G de sistemin reaksiyonunu temsil eden lineer olmayan fonksiyonlardır. Birçok matematiksel problemde olduğu gibi burada da $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarının süreklilik ve türevlenebilirlik gibi bazı özelliklere sahip bir fonksiyonlar olduğu kabul edilecektir. Bir bölgeyi istila eden ya da orada yayılan bir türün popülasyonu dikkate alındığında, problemin çözüm bölgesi, $(-\infty, \infty)$ olacağı gibi $[x_0, x_N]$ şeklinde sınırlı bir aralık da olabilir. (1.66) sisteminden kurulan problemlerde sınır şartları

$$u(x_0, t) = u(x_N, t) = g_1(x), \quad (1.67)$$

$$v(x_0, t) = v(x_N, t) = g_2(x) \quad (1.68)$$

bağıntıları ile verilen Dirichlet sınır şartları veya

$$u_x(x_0, t) = u_x(x_N, t) = g_3(x), \quad (1.69)$$

$$v_x(x_0, t) = v_x(x_N, t) = g_4(x) \quad (1.70)$$

bağıntıları ile verilen Neumann sınır şartları kullanılabileceği gibi bu ikisinden elde edilen Robin sınır şartları da kullanılabilir (Şahin, 2009).

Reaksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümlerini bulmaya yönelik çalışmalar arasında, Gear's metodu (Sherratt, 1997), sonlu farklar metodu (Twizell vd., 1994; Liu ve Sun, 2007; Somathilake, 2009), Crank-Nicolson metodu (Chou vd., 2007; Sherratt, 1997), varyasyonel iterasyon metodu (Barari, vd. 2010) sayılabilir. Bir ve iki boyutlu lineer olmayan reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinin sayısal çözümleri diferensiyel quadrature metodu ile Meral ve Tezer-Sezgin'in (2009) çalışmasında verilmiştir. Sonlu farklar metodu, sonlu elemanlar metodu ve en küçük kareler metodu kullanılarak elde edilen sayısal çözümler (Meral ve Tezer-Sezgin, 2011) çalışmasında karşılaştırılmıştır. Yang (2012), hem otonom hem de otonom olmayan durumlar için lineer olmayan sınır şartları altında reaksiyon-difüzyon denkleminin dinamik davranışlarını incelemiştir.

Reaksiyon-difüzyon denklem sisteminin genel formu ise

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1 u + c_1 v + d_1 u^2 v + e_1 uv + m_1 uv^2 + n_1, \quad (1.71)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_2 u + c_2 v + d_2 u^2 v + e_2 uv + m_2 uv^2 + n_2 \quad (1.72)$$

şeklinde. Burada $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, m_1, m_2, n_1, n_2$ reel sabitlerdir.

1.13.1. Linear problem

İlk test problemi olan lineer problem, (1.71-1.72) denklem sisteminde a_s, b_s, d_s reel sabitler olmak üzere

$$a_1 = d_s, \quad b_1 = -a_s, \quad c_1 = 1, \quad d_1 = 0, \quad e_1 = 0, \quad m_1 = 0, \quad n_1 = 0,$$

$$a_2 = d_s, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = -b_s, \quad d_2 = 0, \quad e_2 = 0, \quad m_2 = 0, \quad n_2 = 0$$

seçimleri yapılarak

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_s \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a_s u + v, \quad (1.73)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b_s v \quad (1.74)$$

şeklinde elde edilir. Denklem sisteminin analitik çözümleri:

$$u(x, t) = (e^{-(a_s+d_s)t} + e^{-(b_s+d_s)t}) \cos(x), \quad (1.75)$$

$$v(x, t) = (a_s - b_s) e^{-(b_s+d_s)t} \cos(x) \quad (1.76)$$

şeklindedir. (1.75-1.76) analitik çözümlerinde $t = 0$ alınrsa (1.73-1.74) sisteminin başlangıç şartları elde edilir. Sınır şartları ise

$$u_x(x_0, t) = 0, \quad (1.77)$$

$$v_x(x_0, t) = 0, \quad (1.78)$$

$$u(x_N, t) = 0, \quad (1.79)$$

$$v(x_N, t) = 0 \quad (1.80)$$

Robin sınır şartı ile verilir (Chou vd., 2007).

(Chou vd., 2007) reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinin sayısal çözümleri için Crank-Nicolson metodunu geliştirmişlerdir. Şahin (2009) ise, lineer reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinin sayısal çözümlerini kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik B-spline kolokeyşin metodu ile elde etmiştir. Bunun yanında genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokeyşin metodu yardımıyla lineer problemin sayısal çözümleri (Aksoy, 2012) çalışmasında verilmiştir.

1.13.2. İzotermal kimyasal sistem

(1.71-1.72) denklem sisteminde k reel bir sabit olmak üzere,

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad d_1 = 0, \quad e_1 = -1, \quad m_1 = 0, \quad n_1 = 0,$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = -k, \quad d_2 = 0, \quad e_2 = 1, \quad m_2 = 0, \quad n_2 = 0$$

seçimleri yapılarak elde edilen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - uv, \quad (1.81)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - kv + uv \quad (1.82)$$

formundaki lineer olmayan denklem sistemidir (Merkin vd., 1989). Buradaki $u(x, t)$ fonksiyonu A reaktantının, $v(x, t)$ fonksiyonu B reaktantının boyutsuzlaştırılmış yoğunluğu, k ise boyutsuzlaştırma parametresidir. (1.81-1.82) sisteminde uv terimi kuadratik otokatalizi, $-kv$ terimi B reaktantındaki lineer azalmayı gösterir. (1.81-1.82) sisteminin ilerleyen dalga çözümünün varlığı için gerekli şart $k < 1$ olmasıdır ve bu çözümlerin asimptotik yayılma

hızı $2(1-k)^{\frac{1}{2}}$ şeklindedir (Merkin vd., 1989). Asimptotik yayılma hızı kavramı ilk olarak Aronson ve Weinberger (1975) tarafından ortaya atılmıştır. Bu kavram, c^* hızı ile yayılan bir salgın modeli üzerinde, şu şekilde açıklanmaktadır: $c > c^*$ olacak şekilde c hızı ile hareket eden birisi salgını geride bırakacak, $c < c^*$ olacak şekilde c hızı ile hareket eden birisi ise salgının içinde kalacaktır (Wu ve Liu, 2009). Sonlu farklar metodu (Twizell vd., 1994), kısmi lineerleştirilmiş üçgensel ve köşegen θ -metotları (Lopez ve Ramos, 1996) ve kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik B-spline kolokeyşin metotları (Şahin, 2009), (1.81-1.82) sisteminin sayısal çözümlerini bulmak için daha önce kullanılan metotlardan bazılarıdır.

Analitik çözümü bilinmeyen (1.81-1.82) izotermal kimyasal sisteminin başlangıç şartı

$$u(x, 0) = 1, \quad (1.83)$$

$$v(x, 0) = \begin{cases} \exp(-x^2), & |x| \leq L \\ 0, & |x| > L \end{cases} \quad (1.84)$$

ve sınır şartları,

$$u_x(x_0, t) = 0, \quad (1.85)$$

$$v_x(x_0, t) = 0, \quad (1.86)$$

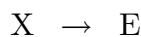
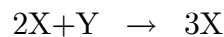
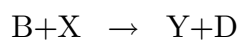
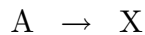
$$u(x_N, t) = 1, \quad (1.87)$$

$$v(x_N, t) = 0 \quad (1.88)$$

şeklinde alınmıştır.

1.13.3. Brusselator modeli

Brusselator modeli, üç molekül kimyasal reaksiyonunu modelleyen bir genel reaksiyon difüzyon denklem sistemidir. İlk olarak, Prigogine ve Lefever (1968) tarafından, iki değişkenli otokatalitik reaksiyonu gösteren bir sistem olarak ortaya konmuştur. Bilinen en basit reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinden birisi olmasından dolayı bu model üzerine geniş çalışmalar yapılmış ve sistem hem analitik hem de sayısal olarak incelenmiştir. Örneğin üç molekül reaksiyonunu modelleyen bu sistem için dört adımdan oluşan reaksiyon,



şeklinde verilir. Bu sistem için reaksiyon $A+B \rightarrow D+E$ dir ve bu da A ile B girdilerinin D ile E çıktıklarına dönüşmesi anlamına gelir.

(1.71-1.72) denklem sisteminde k reel bir sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_1 = \varepsilon_1, \quad b_1 = -(B+1), \quad c_1 = 0, \quad d_1 = 1, \quad e_1 = 0, \quad m_1 = 0, \quad \eta_1 = A, \\ a_2 = \varepsilon_2, \quad b_2 = B, \quad c_2 = 0, \quad d_2 = -1, \quad e_2 = 0, \quad m_2 = 0, \quad \eta_2 = 0 \end{aligned}$$

seçimleri yapılarak elde edilen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A + u^2 v - (B+1)u, \quad (1.89)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Bu - u^2 v \quad (1.90)$$

Brusselator modelindeki çeşitli desenler bir, iki ve üç boyutlu problemlerde analitik ve sayısal olarak incelenmiş ve benekli, çizgili, labirentli ve altıgenli desenler üzerine çalışmalar yayımlanmıştır (De Wit, vd., 1997; De Wit, 1999; Erneux ve Reiss, 1983; Nicolis ve Prigogine, 1977; Pena ve Garcia, 2001). Brusselator modeli için masa şekilli desenler üzerine bir çalışma Kolokolnikov vd. (2006) tarafından yayımlanmıştır. Brusselator modelinin çözümü için Laplace dönüşüm metodu ve homotopi pertürbasyon metodu Aminikhah ve Jamalian (2013) tarafından uygulanmıştır. (Twizell, vd. 1999) referansında, Brusselator modelinin sayısal çözümleri için ikinci mertebeden bir metot ele alınmıştır. Brusselator modeli için sayısal çözümler, kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak Şahin'in (2009) doktora tezinde elde edilmiştir.

Brusselator modeli için (1.89-1.90) sistemindeki parametreler

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}, \quad A = 1 \text{ ve } B = 3, 4$$

olacak şekilde seçilmiş ve sistemin başlangıç şartları

$$u(x, 0) = 0, 5, \quad (1.91)$$

$$v(x, 0) = 1 + 5x \quad (1.92)$$

ile sınır şartları,

$$u_x(x_0, t) = 0, \quad (1.93)$$

$$v_x(x_0, t) = 0, \quad (1.94)$$

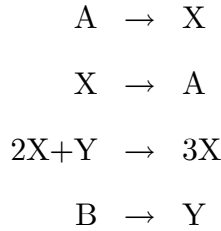
$$u_x(x_N, t) = 0, \quad (1.95)$$

$$v_x(x_N, t) = 0 \quad (1.96)$$

formundaki homojen Neumann sınır şartları alınmıştır.

1.13.4. Schnakenberg modeli

En çok bilinen reaksiyon-difüzyon modellerinden birisi olan Schnakenberg modeli, Brusselator modelinin basitleştirilmiş bir halidir. İlk olarak Schnakenberg (1979) tarafından,



şeklindeki üç molekül otokatalitik reaksiyonun modellendiği bu sistem, kütle korunumu kanununun kullanılmasıyla matematiksel olarak boyutsuzlaştırılmış formda

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma (a_s - u + u^2 v), \quad (1.97)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d_s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \gamma (b_s - u^2 v) \quad (1.98)$$

gibi ifade edilebilir. Bu ise (1.71-1.72) denklem sisteminde a_s , b_s , d_s ve γ pozitif parametreler olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_1 = 1, \quad b_1 = -\gamma, \quad c_1 = \gamma, \quad d_1 = 0, \quad e_1 = 0, \quad m_1 = 0, \quad \eta_1 = \gamma a_s, \\ a_2 = d_s, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = -\gamma, \quad d_2 = 0, \quad e_2 = 0, \quad m_2 = 0, \quad \eta_2 = \gamma b_s \end{aligned}$$

seçimleri yapılarak elde edilen lineer olmayan denklem sistemi belirtir. Burada $u^2 v$ terimi $u(x, t)$ 'nin aktivasyonunu, $v(x, t)$ 'nin de tükenişini temsil eder. Reaksiyon-difüzyon mekanizmasını modelleyen nispeten kolay bir sistem olmasından dolayı Schnakenberg modeli üzerine literatürde pek çok çalışma vardır. Murray (2003) kitabında, (1.97-1.98) sistemini detaylı şekilde incelemiştir. Ruuth (1995) yaptığı çalışmasında, önerdiği açık ve kapalı sonlu farklar metodunu kullanarak, (1.97-1.98) reaksiyon-difüzyon denklem sisteminin sayısal çözümlerini araştırmış ve salınım problemi üzerine çalışmıştır. Aynı problem, Madzvamuse (2006) tarafından hareket eden grid üzerinde sonlu elemanlar yaklaşımı ile çözülmüştür. Her iki çalışmada da salınım problemi için birinci mertebeden Euler metodunun zaman ayrıştırmasında yeterli doğrulukta sonuç üretmediği vurgulanmıştır. Zaman içerisinde genişleyen çözüm bölgesi üzerinde bir boyutlu Schnakenberg denklem sistemi Barrass vd. (2006) tarafından, iki boyutlu denklem sistemi de Madzvamuse vd. (2003) tarafından çözülmüştür. Şahin (2009) doktora tezinde verilen model için, kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik B-spline kolokeyşim metodu yardımı ile sayısal çözümler elde etmiştir.

Brusselator modelinin basitleştirilmiş hali olan Schnakenberg modelinin sayısal çözümünü araştırmak için salınım problemi dikkate alınmıştır. Bu doğrultuda, (1.97-1.98) sistemindeki parametreler

$$a_s = 0,126779, b_s = 0,792366, d_s = 10 \text{ ve } \gamma = 10^4$$

olacak şekilde seçilirse, Schnakenberg modelinin çözümleri,

$$u_0 = a_s + b_s = 0,919145$$

ve

$$v_0 = \frac{b_s}{(a_s + b_s)^2} = 0,937903$$

şeklinde olduğundan problemin başlangıç şartının, bu çözüm civarında küçük rastgele salınımlar yapacak şekilde olması amaçlandı. Bu amaca uygun olarak da

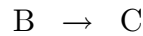
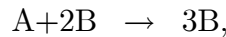
$$u(x, 0) = 0,919145 + 0,001 \sum_{j=1}^{25} \frac{\cos(2\pi jx)}{j}, \quad (1.99)$$

$$v(x, 0) = 0,937903 + 0,001 \sum_{j=1}^{25} \frac{\cos(2\pi jx)}{j} \quad (1.100)$$

başlangıç şartı dikkate alınmıştır. Çözümlerde, sınır şartları olarak ise Brusselator modelinde olduğu gibi (1.93-1.96) ile verilen homojen Neumann sınır şartları kullanılmıştır (Şahin, 2009).

1.13.5. Gray-Scott modeli

Gray-Scott modeli, doğada var olan bazı konumsal desenlerin bir kaç kimyasal tür tarafından oluşturulmasını modelleyen bir reaksiyon-difüzyon sistemidir. İlk olarak, Gray ve Scott (1984) tarafından ortaya konan bu model, A, B, C gibi üç farklı kimyasal türün



şeklindeki bir kimyasal reaksiyonuna karşılık gelir. Buradaki reaksiyonların her ikisi de tek yönlüdür. Bu nedenle C ürünü bir âtıl üründür. B kimyasalı her iki reaksiyonda da yer aldığından dolayı kendi ürünü için bir katalizör görevi görür. A kimyasalının yoğunluğu $u(x, t)$ ile B kimyasalının yoğunluğu da $v(x, t)$ ile gösterilirse Gray-Scott reaksiyonunu modelleyen matematiksel sistem boyutsuzlaştırılmış formda

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - uv^2 + f(1 - u), \quad (1.101)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + uv^2 - (f + k)v \quad (1.102)$$

ile ifade edilebilir. Bu ise (1.71-1.72) denklem sisteminde ε_1 , ε_2 , f ve k parametreleri için

$$\begin{aligned} a_1 &= \varepsilon_1, & b_1 &= -f, & c_1 &= -(f+k), & d_1 &= 0, & e_1 &= 0, & m_1 &= -1, & \eta_1 &= f, \\ a_2 &= \varepsilon_2, & b_2 &= 0, & c_2 &= 0, & d_2 &= 0, & e_2 &= 0, & m_2 &= 1, & \eta_2 &= 0 \end{aligned}$$

seçimleri yapılarak elde edilen lineer olmayan denklem sistemi belirtir. Buradaki ε_1 ve ε_2 katsayıları reaksiyon sürecindeki difüzyon oranlarını, k sayısı B nin C ye dönüşme oranını ve f de geriye kalan A ile tükenen A, B, C kimyasallarının oranını göstermektedir.

Buradaki (1.101-1.102) sisteminde birinci denklem, $u(x, t)$ 'de meydana gelen artışın zamana göre değişimini gösterir. Bu denklemde yer alan üç terimden ilki, $\varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, difüzyon terimidir. Bu terim, $u(x, t)$ 'de meydana gelen artışın, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ile orantılı olacağını belirtir. Eğer bir bölgede bir kimyasalın miktarı artıyorsa o bölgede $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ terimi pozitif demektir ve $u(x, t)$ de artacaktır. Diğer yandan, bir bölgedeki A kimyasalının yoğunluğu azalıyorsa, bu durumda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ terimi negatiftir ve $u(x, t)$ azalacaktır. Bu süreç sadece difüzyon terimini içeren bir denklemle ifade edilmek istenirse

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şeklindeki ısı denklemi elde edilir.

Sistemde yer alan ikinci terim $-uv^2$ terimidir. Bu terim reaksiyon oranını gösterir. Gray-Scott sisteminin modellediği yukarıdaki reaksiyon sürecinin ilk basamağında, 1 tane A molekülü 2 tane de B molekülü gerekmektedir. Bu şekildeki bir reaksiyon, A'nın yoğunluğu ile B'nin yoğunluğunun karesinin çarpılması ile gösterilir. Bu da uv^2 terimini ortaya çıkarır. Bu reaksiyonda A kimyasalı B'ye dönüştüğünden $v(x, t)$ deki artış $u(x, t)$ deki azalışa eşit olacaktır. Bu da ikinci denklemde uv^2 teriminin pozitif işaretli olarak yer alması demektir. Reaksiyon teriminin önünde bir sabit katsayının bulunmaması, sistemde yer alan diğer terimlerin katsayıları ile yapılan düzenlemeden dolayıdır. (1.102) denklemdeki son terim, $f(1-u)$ ile verilen yeniden türetme terimidir. Reaksiyon esnasında A kimyasalı tükenerek B kimyasalını oluşturduğundan, A kimyasalını yeniden türetecek bir yol olmadıkça bütün A kimyasalları tükenecektir. Denklemde yer alan bu yeniden türetme terimi, $u(x, t)$ büyüklüğünün, mevcut değeri ile 1 arasındaki farkla orantılı olacak şekilde artacağını ifade eder. Sonuç olarak, denklemdeki diğer iki terim hiç bir etki göstermese bile, $u(x, t)$ nin maksimum değeri 1 olacaktır. Buradaki f sabiti, yeniden türetme oranını gösterir.

İkinci denklemde yer alan terimlerin sadece üçüncüsü ilk denklemde farklılık göstermektedir. $-(f+k)v$ ile verilen bu terim, bir sınırlama terimidir. Bu terim olmadığı zaman

B kimyasalının yoğunluğu bir sınırlama olmaksızın artacaktır. Uzun zaman diliminde bu artışın meydana getireceği yoğunlaşma mazur görülse bile bu artış doğal olarak sistemin dışına taşmayı netice verecektir. $-(f + k)v$ sınırlama terimi, B'nin mevcut yoğunluğu ve iki sabitin, f ve k , toplamı ile orantılıdır. f yukarıda olduğu gibi A kimyasalı için ortamın geçirgenliğini gösterirken, k da bu oran ile B için olan oran arasındaki farkı gösterir.

(1.101-1.102) sisteminin sayısal çözümleri için parametreler

$$\varepsilon_1 = 10^{-4}, \varepsilon_2 = 10^{-6}, f = 0,024, k = 0,06$$

şeklinde seçilmiştir. Bu seçimler ile birlikte sistemin başlangıç şartı

$$u(x, 0) = 1 - \frac{1}{2} \sin^{100}(\pi x), \quad (1.103)$$

$$v(x, 0) = \frac{1}{4} \sin^{100}(\pi x) \quad (1.104)$$

ve sınır şartları ise

$$u(x_0, t) = 1, \quad (1.105)$$

$$v(x_0, t) = 0, \quad (1.106)$$

$$u(x_N, t) = 1, \quad (1.107)$$

$$v(x_N, t) = 0 \quad (1.108)$$

şeklinde homojen olmayan Dirichlet sınır şartları olarak ele alınmıştır (Şahin, 2009).

Pearson (1993) yaptığı çalışmasında, bir boyutlu (1.101-1.102) sistemini dikkate almış ve bütün çözüm bölgesini kaplayıncaya kadar kendini tekrarlayan benek desenlerini gözlemlemiştir (Reynolds, vd., 1994). Reynolds ve arkadaşları, yaptıkları bu çalışmada, kendini tekrarlayan benek desenini şu şekilde tarif etmişlerdir: "Tek bir benek önce bölünür ve iki yeni benek oluşur daha sonra bunlar da bölünür ve yeni benekler ortaya çıkar. Bu bölünme işlemi bütün çözüm bölgesini kaplayana kadar devam eder." Doelman vd. (1997), Gray-Scott modeli için detaylı bir çalışma ortaya koyarak, durağan ve ilerleyen desenler için elde ettikleri teorik sonuçları yayımlamışlardır. Bunu takip eden çalışmada ise Doelman vd. (1998) bir boyutlu Gray-Scott modelini dikkate alarak tekil desenler için lineer kararlılık analizi üzerinde durmuşlardır. (1.101-1.102) sisteminin hareket eden grid üzerindeki sayısal çözümleri, Zegeling ve Kok (2004) tarafından verilmiştir. Yaptıkları çalışmalarında sayısal metot olarak sonlu farklar metodunu kullanan Zegeling ve Kok (2004), hem bir boyutlu hem de iki boyutlu Gray-Scott sisteminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Gray-Scott

modeli için bir çalışma Şahin (2009) doktora tezinde kuadratik, kübik, kuartik ve kuintik B-spline kolokeyşin metodu ile verilmiştir.

1.14. İkili Burgers Denklemi ve Test Problemleri

Bu kısımda

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_1 u \frac{\partial u}{\partial x} + k_2 (uv)_x = 0, \quad (1.109)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k_1 v \frac{\partial v}{\partial x} + k_3 (uv)_x = 0 \quad (1.110)$$

formundaki ikili Burgers denklemi tanıtılacaktır. (1.109-1.110) denklem sisteminin başlangıç şartları, $a \leq x \leq b$ olmak üzere

$$u(x, 0) = \phi_1(x), \quad (1.111)$$

$$v(x, 0) = \phi_2(x) \quad (1.112)$$

ve sınır şartları, $t > 0$ olmak üzere

$$u(a, t) = f_1(a, t), \quad (1.113)$$

$$u(b, t) = f_2(a, t), \quad (1.114)$$

$$v(a, t) = g_1(a, t), \quad (1.115)$$

$$v(b, t) = g_2(b, t) \quad (1.116)$$

şeklindedir. Burada $\phi_1(x), \phi_2(x), f_1(a, t), f_2(b, t), g_1(a, t), g_2(b, t)$ önceden tanımlı fonksiyonlar, k_1, k_2 ve k_3 reel sabitlerdir (Nee ve Duan, 1998).

İlk olarak Esipov (1995) tarafından ortaya atılan ikili Burgers denkleminin sayısal çözümlerinin bulunması için çeşitli metotlar önerilmiştir. Bunlar arasında bir yakınsak kuvvet serisi formunda Adomian ayrışım metodu (Kaya, 2001), tekrarlı operatör metodu (Lian ve Lou, 2006), Adomian-Páde tekniği (Denghan vd., 2007), Chebyshev spectral kolokeyşin metodu (Khater vd., 2008), homotopi perturbasyon metodu (Ghotbi vd., 2008), Adomian ayrıştırma metodu (Chen ve An, 2008), Fourier pseudospectral metodu (Rashid ve Ismail, 2009), varyasyonel iterasyon metodu (Soliman, 2009), diferensiyel dönüşüm metodu (Abazari ve Borhanifar, 2010), kübik B-spline kolokeyşin metodu (Mittal ve Arora, 2011), diferensiyel quadrature metodu (Mittal ve Jiwari, 2012), modifiye edilmiş kübik B-spline kolokeyşin metodu (Mittal ve Tripathi, 2014), yerel süreksiz Galerkin metodu (Rong-Pei vd., 2011), basit klasik radyal bazlar yardımı ile kolokeyşin metodu (Islam vd., 2012),

Bäcklund dönüşüm ve benzerlik uygulaması metodu (Inan vd., 2010), homotopi perturbasyon metodu (Ghoreishi vd., 2011; Desai ve Pradhan, 2012), genelleştirilmiş iki boyutlu diferensiyel dönüşüm metodu (Liu ve Hou, 2011), genelleştirilmiş diferensiyel quadrature metodu (Mokhtari, vd., 2011 b), homotopi perturbasyon ve Páde teknikleri (Yıldırım ve Kelleci, 2011), H^2 -karışık Galerkin metodu (Jia vd., 2012), kapalı sonlu farklar metodu (Srivastava vd., 2013), kuadratik B-spline Galerkin sonlu elemanlar metodu (Kutluay ve Uçar, 2013), kapalı logaritmik sonlu farklar metodu (Srivastava vd., 2014), birleştirilmiş sonlu farklar metodu (Kumar ve Pandit, 2014) sayılabilir. İkili Burgers denklem sisteminin tam çözümü için ise Adomian ayrışım metodu (Abdou ve Soliman 2005), genişletilmiş tanh-fonksiyon metodu (Soliman, 2006) kullanılmıştır. Abassy vd. (2007), Páde tekniği ile birleştirilmiş varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak, Sweilam ve Khader (2009) homotopi perturbasyon metodunu kullanarak, Aksoy (2012) ise genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokeyşim metodunu kullanarak (1.109-1.110) denklem sisteminin kapalı formda çözümlerini elde etmişlerdir. Liu (2010) uyumluluk metodu ile (1.109-1.110) denkleminin simetrisini elde etmiş, Jin-Ming ve Yao-Ming (2011) Hirota bilineer metodu ile (1.109-1.110) denklem sisteminin tamamen integrallenebilir olduğunu göstermiştir.

1.14.1. Problem 1

İlk test problemi için $k_2 = k_3 = 1$ ve $k_1 = -2$ seçimleriyle

$$u_t - u_{xx} - 2uu_x + (uv)_x = 0, \quad (1.117)$$

$$v_t - v_{xx} - 2vv_x + (uv)_x = 0 \quad (1.118)$$

ikili Burgers denkleminin başlangıç şartları,

$$u(x, 0) = \sin(x), \quad (1.119)$$

$$v(x, 0) = \sin(x) \quad (1.120)$$

sınır şartları,

$$u(a, t) = e^{-t} \sin(a), \quad (1.121)$$

$$u(b, t) = e^{-t} \sin(b), \quad (1.122)$$

$$v(a, t) = e^{-t} \sin(a), \quad (1.123)$$

$$v(b, t) = e^{-t} \sin(b) \quad (1.124)$$

iken tam çözümü

$$u(x, t) = v(x, t) = e^{-t} \sin(x) \quad (1.125)$$

olarak alınmıştır (Kaya, 2001).

1.14.2. Problem 2

İkinci test problemi için (1.109-1.110) ile verilen ikili Burgers denkleminin başlangıç şartları $k_1 = 2$ seçimi ile

$$u(x, 0) = a_0 - 2A \left(\frac{2k_2 - 1}{4k_2k_3 - 1} \right) \tanh(Ax), \quad (1.126)$$

$$v(x, 0) = a_0 \left(\frac{2k_3 - 1}{2k_2 - 1} \right) - 2A \left(\frac{2k_2 - 1}{4k_2k_3 - 1} \right) \tanh(Ax) \quad (1.127)$$

sınır şartları,

$$u(a, t) = a_0 - 2A \left(\frac{2k_2 - 1}{4k_2k_3 - 1} \right) \tanh[A(a - 2At)], \quad (1.128)$$

$$v(a, t) = a_0 \left(\frac{2k_3 - 1}{2k_2 - 1} \right) - 2A \left(\frac{2k_2 - 1}{4k_2k_3 - 1} \right) \tanh[A(a - 2At)], \quad (1.129)$$

$$u(b, t) = a_0 - 2A \left(\frac{2k_2 - 1}{4k_2k_3 - 1} \right) \tanh[A(b - 2At)], \quad (1.130)$$

$$v(b, t) = a_0 \left(\frac{2k_3 - 1}{2k_2 - 1} \right) - 2A \left(\frac{2k_2 - 1}{4k_2k_3 - 1} \right) \tanh[A(b - 2At)] \quad (1.131)$$

ve tam çözümü ise $a_0 = 0,05$ ve $A = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0(4k_2k_3 - 1)}{2k_2 - 1} \right)$ olmak üzere

$$u(x, t) = a_0 - 2A \left(\frac{2k_2 - 1}{4k_2k_3 - 1} \right) \tanh[A(x - 2At)], \quad (1.132)$$

$$v(x, t) = a_0 \left(\frac{2k_3 - 1}{2k_2 - 1} \right) - 2A \left(\frac{2k_2 - 1}{4k_2k_3 - 1} \right) \tanh[A(x - 2At)] \quad (1.133)$$

olarak alınmıştır (Soliman, 2006).

1.14.3. Problem 3

Üçüncü test problemi için (Mittal ve Arora, 2011) referansı ile verilen (1.109-1.110) probleminin başlangıç şartları $k_1 = 2$ için

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin(2\pi x), & 0 \leq x \leq 0,5 \\ 0, & 0,5 < x \leq 1 \end{cases},$$

$$v(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ -\sin(2\pi x), & 0,5 < x \leq 1 \end{cases}$$

iken sınır şartları da

$$u(a, t) = 0, \quad (1.134)$$

$$u(b, t) = 0, \quad (1.135)$$

$$v(a, t) = 0, \quad (1.136)$$

$$v(b, t) = 0 \quad (1.137)$$

şeklindeki Homojen Dirichlet sınır şartı olarak alınmıştır.

1.15. Boussinesq Denklem Sistemi ve Test Problemleri

Boussinesq denklem sistemi,

$$v_t + u_x + (vu)_x + s_1 u_{xxx} - s_2 v_{xxt} = 0, \quad (1.138)$$

$$u_t + v_x + uu_x + s_3 v_{xxx} - s_4 u_{xxt} = 0 \quad (1.139)$$

formundadır (Bona vd., 1997, Bona, vd., 2002). Burada s_1, s_2, s_3, s_4 reel sabitleri, x ve t alt indisleri ise sırası ile konum ve zamana göre türevi göstermektedir.

Boussinesq denklem sistemi

$$u_t + v_x + uu_x - \frac{1}{3} u_{xxt} = 0, \quad (1.140)$$

$$v_t + u_x + (vu)_x = 0 \quad (1.141)$$

formundaki KB denklem sisteminden türetilmiştir (Bona, vd., 2002; Irk, 2007). KB sistemi, Boussinesq (1871) tarafından yüzey dalgalarının yayılımı için bir model olarak verilmiştir (Amick, 1984; Schonbek, 1981; Whitham, 1974). Boussinesq denklem sistemi, bir su tünelineki yüzey su dalgalarını modellemektedir (Bona ve Chen, 1998; Chen, 1998 a, 1998 b; Pelloni ve Dougalis, 2001). Pelloni ve Dougalis (2001), spectral metot ile; Al-Khaled ve Nusier (2008), Adomian ayrıştırma metodu ile; Mohyud-Din vd. (2010), Adomian ayrışım ve homotopi perturbasyon metotları ile Boussinesq denklem sisteminin sayısal çözümleri üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokeyşin metodu kullanılarak, Boussinesq denklem sisteminin sayısal çözümleri, Aksoy'un (2012) tezinde araştırılmıştır.

Chen (1998 b), (1.138-1.139) denklem sistemindeki terimleri:

- h , durgun suyun yüksekliği,
- g , yerçekimi ivmesi,

- x, h ile ölçeklendirilmiş kanal boyunun uzunluğu,
- $t, (h/g)^{1/2}$ ile ölçülen geçen zaman,
- $v(x, t)$, ilk durağan duruma göre h ile ölçülen su yüzeyinin boyutsuz sapması,
- $u(x, t)$, $0 \leq \theta \leq 1$ olmak üzere, kanalın dibinden yukarı doğru θh yüksekliğinde \sqrt{gh} ile ölçülen boyutsuz yatay hız, olarak açıklamıştır. λ ve μ reel sabitler olmak üzere denklemde bulunan s_1, s_2, s_3, s_4 reel sabitleri

$$s_1 = \frac{1}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) \lambda, \quad s_2 = \frac{1}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right) (1 - \lambda),$$

$$s_3 = \frac{1}{2} (1 - \theta^2) \mu, \quad s_4 = \frac{1}{2} (1 - \theta^2) (1 - \mu),$$
(1.142)

şartlarını sağlarlar. θ değerinin aksine, eşitliklerdeki λ ve μ reel sabitlerinin herhangi bir fiziksel anlamı yoktur.

(1.138-1.139) denklem sisteminden, s_1, s_2, s_3, s_4 reel parametrelerinin özel değerleri için farklı isimlerde denklem sistemleri türetilebilir (Chen, 1998 a).

Teorem: (1.138-1.139) denklemleri ile verilen sistemdeki s_1, s_2, s_3, s_4 reel sabitleri

- (i) $s_1 - s_2 + 2s_4 \neq 0, \kappa = \frac{-s_2 + s_3 + 2s_4}{s_1 - s_2 + 2s_4} > 0$ ve $(\kappa - 1/2) [(s_2 - s_1)\kappa - s_2] > 0$
- (ii) $s_1 = s_2 = s_3 > 0, s_4 = 0$
- (iii) $s_1 = s_2 = s_3 < 0, s_4 = 0$
- (iv) $s_1 - s_2 + s_4 = 0, s_1 = s_3, s_4 > 0$
- (v) $s_1 - s_2 + s_4 = 0, s_1 = s_3, s_4 < 0.$

şartlarından birini sağladığında sistem solitary dalga çözümüne sahiptir. Solitary dalga çözümü ise

- (i) durumunda $v_0 = \frac{3(1 - 2\kappa)}{2\kappa}$
- (ii) durumunda $0 < v_0 < \infty$
- (iii) durumunda $-3 \leq v_0 < 0$
- (iv) durumunda $v_0 > -3$ ve $\frac{3}{v_0 + 3} \notin \left[1, \frac{s_2}{s_4} \right]$
- (v) durumunda $v_0 > -3$ ve $\frac{3}{v_0 + 3} \in \left[1, \frac{s_2}{s_4} \right]$

ve

$$C_s = \frac{3 + 2v_0}{\pm \sqrt{3(3 + v_0)}}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2v_0}{3(s_1 - s_2) + 2s_2(v_0 + 3)}}$$

olmak üzere herhangi bir x_0 için

$$v(x, t) = v_0 \sec h^2(\lambda(x + x_0 - C_s t)), \quad (1.143)$$

$$u(x, t) = \pm \sqrt{\frac{3}{v_0 + 3}} v_0 \sec h^2(\lambda(x + x_0 - C_s t)) \quad (1.144)$$

formundadır (Chen, 1998 a; Chen, 1998 b). (1.143-1.144) ile verilen $v(x, t)$ ve $u(x, t)$ solitary dalga çözümlerinde v_0 ve $\pm \sqrt{\frac{3}{v_0 + 3}} v_0$ solitary dalgalarının genliklerine, C_s ise solitary dalganın hızına karşılık gelmektedir.

Chen (1998 b), yukarıdaki teoremi verdikten sonra, Boussinesq denklem sisteminin solitary ve ilerleyen dalga çözümleri üzerine ayrıntılı olarak çalışmıştır. Chen çalışmalarında, teoremi sağlayan Boussinesq denklem sisteminin özel formları için solitary dalga çözümünü, $x \rightarrow \pm\infty$ iken $v(x, t) = u(x, t) = 0$ olacak şekilde $(v(x, t), u(x, t))$ formunda araştırmıştır. Teoremi sağlamayan Boussinesq denklem sisteminin özel formları için ise, ilerleyen dalga çözümlerini $x \rightarrow \pm\infty$ iken $v(x, t) = 0$ ve $u(x, t) = 0$ olacak şekilde araştırmıştır. Pelloni ve Dougalis (2001), ilerleyen ve solitary dalgalar arasındaki ayrımı, $x \rightarrow \pm\infty$ iken $v(x, t)$ ve $u(x, t)$ çözümlerinin gittiği değere göre yapmıştır. Eğer sonuç sıfırda dalgalar, solitary dalgaları ve sonuç sıfırdan farklı ise, ilerleyen dalga olarak tanımlanmıştır (Pelloni ve Dougalis, 2001).

Sayısal çözümleri araştırılacak olan Regularized Boussinesq (RB) ve Klasik Boussinesq (KB) sistemlerinin solitary veya ilerleyen dalga çözümlerinden hangilerine sahip olduklarını sıra ile inceleyelim.

1.15.1. Regularized Boussinesq (RB) sistemi ve test problemleri

$\theta^2 = \frac{2}{3}$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$ olarak seçilir ise, (1.142) eşitliklerindeki katsayılar

$$s_1 = 0, \quad s_2 = \frac{1}{6}, \quad s_3 = 0 \quad \text{ve} \quad s_4 = \frac{1}{6} \quad (1.145)$$

olarak elde edilir. Bu katsayıların (1.138-1.139) denklemlerinde yerlerine yazılması sonucunda

$$\begin{aligned} u_t + v_x + uv_x - \frac{1}{6}u_{xxt} &= 0, \\ v_t + u_x + (vu)_x - \frac{1}{6}v_{xxt} &= 0. \end{aligned}$$

RB denklem sistemine ulaşılır (Bona ve Chen, 1998).

i) İlerleyen dalga çözümü

(1.145) ile verilen katsayılar için teoremdaki hiç bir durumun sağlanmadığı görülür. Dolayısıyla teoreme göre, RB sisteminin bir solitary dalga çözümü yoktur. Bu durumda da Chen (1998 a), RB sisteminin ilerleyen dalga çözümünü; g , x_0 ve c_s reel sabitler olmak üzere

$$v(x, t) = -1, \quad (1.146)$$

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{g}{6}\right) c_s + \frac{c_s g}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{g}}{2} (x + x_s - c_s t) \right) \quad (1.147)$$

formunda verilmiştir (Chen, 1998a).

(1.146-1.147) eşitliklerinde

$$x_s = 0, \quad g = 6, \quad c_s = \frac{1}{3}$$

seçimleri yapılırsa, RB sisteminin

$$v(x, t) = -1, \quad (1.148)$$

$$u(x, t) = \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \left(x - \frac{t}{3} \right) \right) \quad (1.149)$$

ilerleyen dalga çözümü elde edilir. (1.148-1.149) eşitliklerinde $t = 0$ alındığında, RB sisteminin başlangıç şartları

$$v(x, 0) = -1, \quad (1.150)$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2} x \right) \quad (1.151)$$

olarak bulunur.

ii) İki ilerleyen dalganın çarpışması

RB sistemi için, (1.146-1.147) ilerleyen dalga çözümünün kullanılması ile x_1 , x_2 , g_1 , g_2 , c_1 ve c_2 reel sabitler olmak üzere,

$$v(x, 0) = -1, \quad (1.152)$$

$$u(x, 0) = \left(1 - \frac{g_1}{6}\right) c_1 + 2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{g_1}}{2} (x + x_a) \right) + \left(1 - \frac{g_2}{6}\right) c_2 + 2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{g_2}}{2} (x + x_b) \right) \quad (1.153)$$

başlangıç şartı elde edilir. (1.152-1.153) eşitliklerinde

$$\begin{aligned} x_a &= 0, & c_1 &= 1, & g_1 &= 6, \\ x_b &= -10, & c_2 &= \frac{1}{3}, & g_2 &= 6 \end{aligned}$$

seçimleri yapılırsa, RB sisteminin iki ilerleyen dalga çözümü

$$v(x, 0) = -1, \quad (1.154)$$

$$u(x, 0) = 3\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}(x-10)\right) \quad (1.155)$$

olarak bulunur. (1.155) eşitliği; genlikleri 3, 1, hızları 1, 1/3 olan ve tepe noktaları $x = 0$, $x = 10$ konumlarına karşılık gelen iki ilerleyen dalganın hareketini modellemektedir.

1.15.2. Klasik Boussinesq (KB) sistemi ve test problemleri

(1.142) eşitliklerinde $\theta^2 = 1/3$, $\mu = 0$ ve keyfi λ seçimleri ile

$$s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0, s_4 = \frac{1}{3} \quad (1.156)$$

olarak elde edilir. Bu katsayılar (1.138-1.139) denklemlerinde yerlerine yazılırsa

$$u_t + v_x + uu_x - \frac{1}{3}u_{xxt} = 0, \quad (1.157)$$

$$v_t + u_x + (vu)_x = 0 \quad (1.158)$$

denklem sistemi elde edilir (Boussinesq, 1871).

i) İlerleyen dalga çözümü

(1.156) ile verilen katsayılar kullanıldığında yine teoremdeki hiçbir durumun gerçekleşmediği görülür. Dolayısıyla teoreme göre; KB sisteminin bir solitary dalga çözümü yoktur. Bununla beraber (1.157-1.158) eşitlikleri ile verilen KB sisteminin; g , x_s ve c_s reel sabitler olmak üzere

$$v(x, t) = -1, \quad (1.159)$$

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{g}{3}\right)c_s + cg\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{g}}{2}(x + x_s - c_s t)\right) \quad (1.160)$$

şeklinde bir ilerleyen dalga çözümü vardır (Chen, 1998a). (1.159-1.160) eşitliklerinde

$$x_s = 0, g = 3 \text{ ve } c_s = \frac{1}{3}$$

seçimleri yapıldığında, KB sisteminin ilerleyen dalga çözümü

$$v(x, t) = -1, \quad (1.161)$$

$$u(x, t) = \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{t}{3} \right) \right) \quad (1.162)$$

olarak bulunur ve (1.161-1.162) eşitliklerinde $t = 0$ alınır

$$v(x, 0) = -1, \quad (1.163)$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \quad (1.164)$$

başlangıç şartları elde edilir.

ii) İki ilerleyen dalganın çarpışması

(1.159-1.160) ilerleyen dalga çözümünün kullanılması ile x_1, x_2, g_1, g_2, c_1 ve c_2 reel sabitler olmak üzere, iki ilerleyen dalganın çarpışması test problemi

$$v(x, 0) = -1, \quad (1.165)$$

$$u(x, 0) = \left(1 - \frac{g_1}{3} \right) c_1 + c_1 g_1 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{g_1}}{2} (x + x_a) \right) + \left(1 - \frac{g_2}{3} \right) c_2 + c_2 g_2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{g_2}}{2} (x + x_b) \right) \quad (1.166)$$

formundaki başlangıç şartı elde edilir. (1.165-1.166) eşitliklerinde

$$\begin{aligned} x_a &= 0, & c_1 &= 1, & g_1 &= 3, \\ x_b &= -10, & c_2 &= \frac{1}{2}, & g_2 &= 2 \end{aligned}$$

seçimleri yapılırsa, KB sisteminin iki ilerleyen dalga çözümü

$$v(x, 0) = -1, \quad (1.167)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{6} + 3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (x - 10) \right) \quad (1.168)$$

olur. (1.168) eşitliği; genlikleri 3, 1, hızları 1, 1/2 olan ve tepe noktaları $x = 0, x = 10$ konumlarına karşılık gelen iki ilerleyen dalganın hareketini modellemektedir.

Bu çalışmada RB ve KB sistemlerinin sayısal çözümleri araştırılırken

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.169)$$

$$u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.170)$$

$$v(a, t) = v(b, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.171)$$

$$v_x(a, t) = v_x(b, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.172)$$

ile verilen homojen Robin sınır şartları ve $f_1(x)$, $f_2(x)$ sonradan belirlenmek üzere

$$v(x, 0) = f_1(x), \quad (1.173)$$

$$u(x, 0) = f_2(x) \quad (1.174)$$

başlangıç şartları kullanılacaktır.

2. NLS DENKLEMİNİN ÜSTEL KÜBİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN ÇÖZÜMLERİNİN ÜRETİLMESİ

Bu bölümde NLS denkleminin sayısal çözümlerini veren üstel kübik B-spline kolokeyşin algoritması tanımlanmıştır. NLS denklemi reel ve sanal kısımlara ayrılarak ikili denklem sistemi elde edilmiştir. Bilinmeyen fonksiyonun zaman ayrıştırması Crank-Nicolson metodu ile yapılmıştır. Zaman ayrılmış denklemdeki lineer olmayan terimler lineerleştirildikten sonra üstel kübik B-spline kolokeyşin yöntemi ile tamamen zaman-konum ayrılmış cebirsel denklem elde edilmiştir. Elde edilen cebirsel denklemler 6 bantlı köşegensel matris sistemidir. Elde edilen denklem sisteminde de bilinmeyen sayısı ile denklem sayıları, sınır şartları kullanılarak eşitlenip çözülebilir hale getirildikten sonra $(2N+2) \times (2N+2)$ boyutlu matris sistemiyle ifade edilebilen denklem sistemi Thomas algoritması ile çözülmüştür. Serbest p parametresi önceden tanımlanan bir aralık üzerinde en iyi çözümü verecek şekilde belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürdeki bazı mevcut sonuçlar ile kıyaslanmıştır. Algoritma beş test problemi üzerinde denenmiş ve çözümler için L_∞ hata normları ile C_1 ve C_2 korunum sabitleri hesaplanmıştır.

2.1. NLS Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Üstel Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda, birinci bölümde tanımlanan üstel kübik B-spline kolokeyşin metodunun, NLS denklem sisteminin sayısal çözümü için çözüm adımları verilecektir. Denklem sistemindeki r ve s yerine problemin tanım aralığının bölünme noktalarındaki üstel kübik B-spline yaklaşımları r_m ve s_m zamana bağlı δ_m ve ϕ_m parametreleri cinsinden yazılırsa

$$r_m = r(x_m, t) = \frac{s - ph}{2(phc - s)} \delta_{m-1} + \delta_m + \frac{s - ph}{2(phc - s)} \delta_{m+1}, \quad (2.1)$$

$$r'_m = r'(x_m, t) = \frac{p(1 - c)}{2(phc - s)} \delta_{m-1} + \frac{p(c - 1)}{2(phc - s)} \delta_{m+1}, \quad (2.2)$$

$$r''_m = r''(x_m, t) = \frac{p^2 s}{2(phc - s)} \delta_{m-1} - \frac{p^2 s}{phc - s} \delta_m + \frac{p^2 s}{2(phc - s)} \delta_{m+1}, \quad (2.3)$$

$$s_m = s(x_m, t) = \frac{s - ph}{2(phc - s)} \phi_{m-1} + \phi_m + \frac{s - ph}{2(phc - s)} \phi_{m+1}, \quad (2.4)$$

$$s'_m = s'(x_m, t) = \frac{p(1 - c)}{2(phc - s)} \phi_{m-1} + \frac{p(c - 1)}{2(phc - s)} \phi_{m+1}, \quad (2.5)$$

$$s''_m = s''(x_m, t) = \frac{p^2 s}{2(phc - s)} \phi_{m-1} - \frac{p^2 s}{phc - s} \phi_m + \frac{p^2 s}{2(phc - s)} \phi_{m+1}. \quad (2.6)$$

elde edilir. Δt zaman adım uzunluğu olmak üzere (1.9), (1.10), (1.11) ve (1.12) ile verilen Crank-Nicolson yaklaşımları (1.52) ile verilen NLS denklem sistemine uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{s^{n+1} - s^n}{\Delta t} - \frac{r_{xx}^{n+1} + r_{xx}^n}{2} - q \frac{(r^3)^{n+1} + (r^3)^n}{2} - q \frac{(s^2 r)^{n+1} + (s^2 r)^n}{2} &= 0, \\ \frac{r^{n+1} - r^n}{\Delta t} + \frac{s_{xx}^{n+1} + s_{xx}^n}{2} + q \frac{(r^2 s)^{n+1} + (r^2 s)^n}{2} + q \frac{(s^3)^{n+1} + (s^3)^n}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

sistemi elde edilir. Burada $r^{n+1} = r(x, t_n + \Delta t)$, $s^{n+1} = s(x, t_n + \Delta t)$, $(n + 1)$. zaman adımındaki çözümdür. Δt zaman adımı olmak üzere

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t, \quad t^n = n\Delta t$$

yazılabilir. Burada lineer olmayan $(r^3)^{n+1}$, $(s^2 r)^{n+1}$, $(r^2 s)^{n+1}$ ve $(s^3)^{n+1}$ terimlerine Taylor metodu yardımıyla lineerleştirme uygulanırsa

$$\begin{aligned} (r^3)^{n+1} &\simeq 3(r^n)^2 r^{n+1} - 2(r^n)^3, \\ (s^2 r)^{n+1} &\simeq 2r^n s^n s^{n+1} + (s^n)^2 r^{n+1} - 2(s^n)^2 r^n, \\ (r^2 s)^{n+1} &\simeq 2r^n s^n r^{n+1} + (r^n)^2 s^{n+1} - 2(r^n)^2 s^n, \\ (s^3)^{n+1} &\simeq 3(s^n)^2 s^{n+1} - 2(s^n)^3 \end{aligned}$$

ve (2.1-2.6) eşitlikleri (2.7) denklem sistemine uyarlanırsa

$$K_1 = \alpha_1 \delta_{m-1}^n + \delta_m^n + \alpha_1 \delta_{m+1}^n \quad L_1 = \alpha_1 \phi_{m-1}^n + \phi_m^n + \alpha_1 \phi_{m+1}^n$$

ve

$$\alpha_1 = \frac{s - ph}{2(phc - s)}, \quad \gamma_1 = \frac{p^2 s}{2(phc - s)}, \quad \gamma_2 = -\frac{p^2 s}{phc - s}$$

iken

$$\begin{aligned}
\nu_{m1} &= -q(3(K_1)^2 + (L_1)^2)\alpha_1 - \gamma_1, \\
\nu_{m2} &= \left(\frac{2}{\Delta t} - 2qK_1L_1 \right) \alpha_1, \\
\nu_{m3} &= -q(3(K_1)^2 + (L_1)^2) - \gamma_2, \\
\nu_{m4} &= \left(\frac{2}{\Delta t} - 2qK_1L_1 \right), \\
\nu_{m5} &= -q((K_1)^2 + (L_1)^2)\alpha_1 + \gamma_1, \\
\nu_{m6} &= \frac{2}{\Delta t}\alpha_1, \\
\nu_{m7} &= -q((K_1)^2 + (L_1)^2) + \gamma_2, \\
\nu_{m8} &= \frac{2}{\Delta t}, \\
\nu_{m9} &= \left(\frac{2}{\Delta t} + 2qK_1L_1 \right) \alpha_1, \\
\nu_{m10} &= q((K_1)^2 + 3(L_1)^2)\alpha_1 + \gamma_1, \\
\nu_{m11} &= \left(\frac{2}{\Delta t} + 2qK_1L_1 \right), \\
\nu_{m12} &= q((K_1)^2 + 3(L_1)^2) + \gamma_2,
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\nu_{m1}\delta_{m-1}^{n+1} + \nu_{m2}\phi_{m-1}^{n+1} + \nu_{m3}\delta_m^{n+1} + \nu_{m4}\phi_m^{n+1} + \nu_{m1}\delta_{m+1}^{n+1} + \nu_{m2}\phi_{m+1}^{n+1} \\
= &\nu_{m5}\delta_{m-1}^n + \nu_{m6}\phi_{m-1}^n + \nu_{m7}\delta_m^n + \nu_{m8}\phi_m^n + \nu_{m5}\delta_{m+1}^n + \nu_{m6}\phi_{m+1}^n
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
&\nu_{m9}\delta_{m-1}^{n+1} + \nu_{m10}\phi_{m-1}^{n+1} + \nu_{m11}\delta_m^{n+1} + \nu_{m12}\phi_m^{n+1} + \nu_{m9}\delta_{m+1}^{n+1} + \nu_{m10}\phi_{m+1}^{n+1} \\
= &\nu_{m6}\delta_{m-1}^n - \nu_{m5}\phi_{m-1}^n + \nu_{m8}\delta_m^n - \nu_{m7}\phi_m^n + \nu_{m6}\delta_{m+1}^n - \nu_{m5}\phi_{m+1}^n
\end{aligned} \tag{2.9}$$

denklemler sistemi elde edilir. Bu denklemler sistemine karşılık gelen matris gösterimi ise

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{B}_1 \mathbf{x}^n \tag{2.10}$$

ile ifade edilir. Burada

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix}
\nu_{m1} & \nu_{m2} & \nu_{m3} & \nu_{m4} & \nu_{m1} & \nu_{m2} & & & & \\
\nu_{m9} & \nu_{m10} & \nu_{m11} & \nu_{m12} & \nu_{m9} & \nu_{m10} & & & & \\
& & \nu_{m1} & \nu_{m2} & \nu_{m3} & \nu_{m4} & \nu_{m1} & \nu_{m2} & & \\
& & \nu_{m9} & \nu_{m10} & \nu_{m11} & \nu_{m12} & \nu_{m9} & \nu_{m10} & & \\
& & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & & \nu_{m1} & \nu_{m2} & \nu_{m3} & \nu_{m4} & \nu_{m1} & \nu_{m2} \\
& & & & \nu_{m9} & \nu_{m10} & \nu_{m11} & \nu_{m12} & \nu_{m9} & \nu_{m10}
\end{bmatrix}$$

2.2. Başlangıç Durumu

Denklem sisteminde iterasyona başlayabilmek için çözüm parametrelerinin başlangıç değerlerinin bilinmesine ihtiyaç vardır. Bu değerler problemin başlangıç şartından elde edilir. (2.1-2.6) denklemleri verilen başlangıç şartlarına göre düzenlenirse

$$r^0(x_m, 0) = \frac{s-ph}{2(phc-s)}\delta_{m-1}^0 + \delta_m^0 + \frac{s-ph}{2(phc-s)}\delta_{m+1}^0, \quad m = 0, 1, \dots, N$$

yazılır. Başlangıç şartı için oluşturulan bu sistem, $N + 1$ denklem ve $N + 3$ bilinmeyen içermektedir. Sınırlarda birinci türev bağıntısı

$$\frac{p(1-c)}{2(phc-s)}\delta_{m-1} + \frac{p(c-1)}{2(phc-s)}\delta_{m+1} = r'$$

kullanılarak $m = 0$ ve $m = N$ için δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 bilinmeyenleri

$$\delta_{-1}^0 = \delta_1^0 + \frac{2(phc-s)}{p(1-c)}r'_0, \quad \delta_{N+1}^0 = \delta_{N-1}^0 - \frac{2(phc-s)}{p(1-c)}r'_N$$

şeklinde ifade edilirse denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{s-ph}{phc-s} & & & & \\ \frac{s-ph}{2(phc-s)} & 1 & \frac{s-ph}{2(phc-s)} & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{s-ph}{2(phc-s)} & 1 & \frac{s-ph}{2(phc-s)} \\ & & & & \frac{s-ph}{phc-s} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^0 \\ \delta_1^0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^0 \\ \delta_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 - \frac{s-ph}{p(1-c)}r'_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{N-1} \\ r_N - \frac{s-ph}{p(c-1)}r'_N \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Benzer şekilde ϕ_m^0 başlangıç parametreleri için de

$$s^0(x_m, 0) = \frac{s-ph}{2(phc-s)}\phi_{m-1}^0 + \phi_m^0 + \frac{s-ph}{2(phc-s)}\phi_{m+1}^0, \quad m = 0, 1, \dots, N$$

yazılabilir. Buradan sınırlarda birinci türev bağıntısı

$$\frac{p(1-c)}{2(phc-s)}\phi_{m-1} + \frac{p(c-1)}{2(phc-s)}\phi_{m+1} = s'$$

kullanılarak $m = 0$ ve $m = N$ için ϕ_{-1}^0 ve ϕ_{N+1}^0 bilinmeyenleri

$$\phi_{-1}^0 = \phi_1^0 + \frac{2(phc-s)}{p(1-c)}s'_0, \quad \phi_{N+1}^0 = \phi_{N-1}^0 - \frac{2(phc-s)}{p(1-c)}s'_N$$

yardımı ile yok edilirse

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{s-ph}{phc-s} & & & & \\ \frac{s-ph}{2(phc-s)} & 1 & \frac{s-ph}{2(phc-s)} & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{s-ph}{2(phc-s)} & 1 & \frac{s-ph}{2(phc-s)} \\ & & & & \frac{s-ph}{phc-s} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0^0 \\ \phi_1^0 \\ \vdots \\ \phi_{N-1}^0 \\ \phi_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 - \frac{s-ph}{p(1-c)}s'_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{N-1} \\ s_N - \frac{s-ph}{p(c-1)}s'_N \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

denklem sistemine ulaşılır. Bu sistemler 3-bant matris sistemleri olduğundan çözümleri Thomas algoritması yardımı ile hesaplanabilir. Böylece elde edilen çözümlerin kullanılması ile de (2.10) sisteminde iterasyona başlanır.

2.3. Test Problemleri

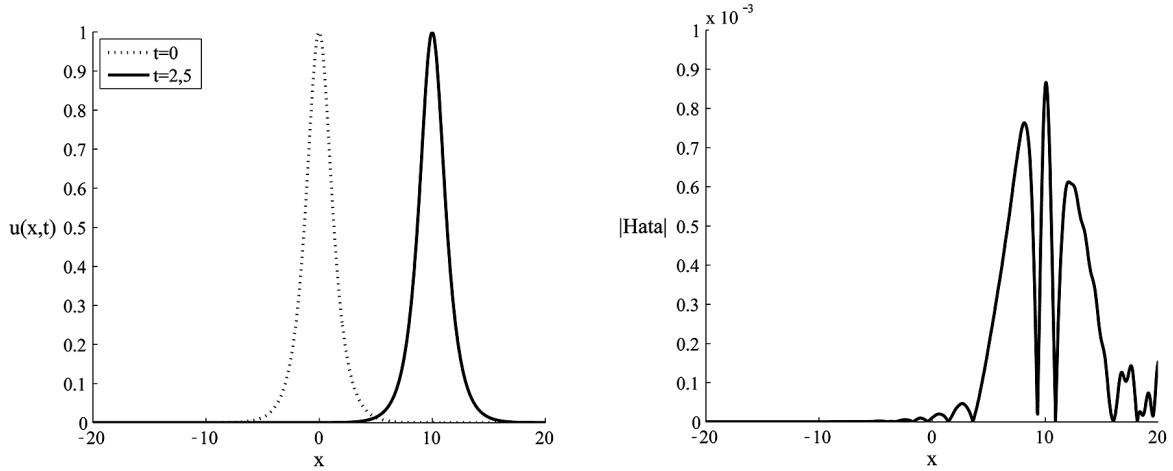
2.3.1. Soliton dalga çözümü

$q = 2$, $S = 4$, $\alpha = 1$ olduğunda $[-20, 20]$ aralığında (1.53)-(1.54) ile verilen korunum sabitleri $C_1 = 2$ ve $C_2 = 7,333333$ analitik olarak bulunabilir. Zaman artımı $\Delta t = 0,005$ ve konum artımı $h = 0,03$ iken yukarıdaki parametreler kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar Aksoy'un (2012) çalışmasındaki genişletilmiş kübik B-Spline Taylor kolokeyşin metodu ile karşılaştırılarak, Çizelge 2.1 de verilmiştir. C_1 ve C_2 korunum sabitleri için yamuklar kuralı ile değerler elde edilmiştir. Sayısal değerler $p = 1$ ve farklı p değerleri için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Sınır şartları olarak ise homojen Neumann sınır şartları kullanılmıştır.

Çizelge 2.1. $q = 2$, $S = 4$, $\alpha = 1$, $\Delta t = 0,005$, $h = 0,03$ için hata normları ve korunum sabitleri

Zaman	$p = 0,0000182$			$p = 1$		
	L_∞	C_1	C_2	L_∞	C_1	C_2
0,0	0,00000	2,0	7,3333297	0,00000	2,0	7,3319463
0,5	0,00025	2,0	7,3333439	0,00097	2,0	7,3319598
1,0	0,00051	2,0	7,3333586	0,00182	2,0	7,3319735
1,5	0,00072	2,0	7,3333730	0,00256	2,0	7,3319872
2,0	0,00083	2,0	7,3333870	0,00322	2,0	7,3320007
2,5	0,00086	2,0	7,3334006	0,00385	2,0	7,3320141
	$\lambda = -0,00152$ (Aksoy, 2012)			$\lambda = 0$ (Aksoy, 2012)		
Zaman	L_∞	C_1	C_2	L_∞	C_1	C_2
0,0	0,00000	2,0	7,3333340	0,00000	2,0	7,3333297
0,5	0,00024	2,0	7,3333340	0,00096	2,0	7,3333302
1,0	0,00048	2,0	7,3333368	0,00176	2,0	7,3333321
1,5	0,00067	2,0	7,3333340	0,00245	2,0	7,3333359
2,0	0,00081	2,0	7,3333349	0,00309	2,0	7,3333340
2,5	0,00092	2,0	7,3333364	0,00366	2,0	7,3333364

Şekil 2.1 a'da NLS denkleminin $\Delta t = 0,005$ ve $h = 0,03$ parametre seçimleri altında $p = 0,0000182$ için $t = 0$ ve $t = 2,5$ anındaki soliton dalga çözümü ve Şekil 2.1 b'de $p = 0,0000182$ için $t = 2,5$ anındaki maksimum hatanın grafiği resmedilmiştir. Grafik incelendiğinde en büyük hatanın $x = 10$ civarında olduğu görülmektedir. Ayrıca maksimum hatanın sınırlarda meydana gelmediği, dolayısıyla sınır şartı uygulanmasından kaynaklanan hatanın etkisinin az olduğu söylenebilir.



Şekil 2.1. $p = 0,0000182$ için $t = 0$ ve $t = 2,5$ anındaki soliton dalga çözümü ve maksimum hatanın grafiği

(Saka, 2012; Dağ, 1999; Gardner vd., 1993 ve Taha ve Ablowitz, 1984) referansları ile karşılaştırılma yapılabilmesi için parametreler $q = 2$, $S = 4$, $\alpha = 1$ olarak seçilmiş ve farklı Δt zaman adımı ve h konum adımı için elde edilen maksimum hata normları Çizelge 2.2'de sunulmuştur. Bu amaç için program $t = 1$ anına kadar çalıştırılmıştır. Çizelge incelendiğinde üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu, p nin sıfıra yakın olduğu yerlerde, $p = 1$ durumuna göre daha iyi sonuç vermiştir. Literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırıldığında p değeri değiştikçe elde edilen maksimum hatalar, literatürdeki bazı çalışmalardan daha küçük olsa da, (Saka, 2012) ile verilen kuintik B-spline kolokeyşin metodunda ve (Dağ, 1999) ile verilen B-spline Galerkin metodunda elde edilen sonuçlardan daha küçük değildir.

Çizelge 2.2. $q = 2$, $S = 4$, $\alpha = 1$, değişken Δt ve h için hata normları

Metot	h	Δt	L_∞	L_∞
			($p = 1$)	(değişken p)
Üstel Kübik B-spline	0,05	0,005	0,0057	0,0015104
				($p = 0,0000078348$)
	0,3125	0,02	0,1872	0,0064891
				($p = 0,0000001289$)
	0,3125	0,0026	0,1913	0,0053
				($p = 0,0000001289$)
	0,06	0,0165	0,0048	0,0015
				($p = 0,0000031976$)
	0,05	0,04	0,0168	0,0039
				($p = 0,0000020600$)
Kuintik B-spline (Saka, 2012)	0,05	0,005		0,0003
	0,3125	0,02		0,002
	0,3125	0,0026		0,006
B-spline Galerkin (Dağ, 1999)	0,05	0,005		0,0003
	0,3125	0,02		0,002
B-spline Kol. (Gardner vd., 1993)	0,05	0,005		0,008
	0,03	0,005		0,002
Kapalı (C-N)	0,05	0,005		0,00585
(Taha ve Ablowitz, 1984)				
Split step Fourier	0,3125	0,02		0,00466
(Taha ve Ablowitz, 1984)				
A-L local	0,06	0,0165		0,00580
(Taha ve Ablowitz, 1984)				
A-L global	0,05	0,04		0,00561
(Taha ve Ablowitz, 1984)				
Pseudospectral	0,3125	0,0026		0,00513
(Taha ve Ablowitz, 1984)				

İlk test problemi olan soliton dalga çözümünü için maksimum hata normları serbest parametre olan p nin bire eşit olduğu ve birden farklı olduğu değerler için ayrı ayrı hesaplanmış ve bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. $p = 0,0000182$ için elde edilen hata normlarının değerlerinde, $p = 1$ durumundakine göre küçülme olduğu, dolayısıyla üstel kübik B-spline kolokeyşin metodunun, p 'nin 0'a yakın değerleri için daha iyi sonuçlar elde ettiği görülmüştür. Ayrıca önerilen metotta $p = 1$ seçimiyle, genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokeyşin metodundaki serbest parametre olan $\lambda = 0$ durumuna karşılık gelen kübik B-spline kolokeyşin metodu ile benzer sonuçlar verdiği söylenebilir. Çizilen hata grafiklerine bakıldığında, oluşan maksimum hatanın o andaki oluşan dalganın tepe noktasına karşılık gelen konum değeri civarında oluştuğu, dolayısıyla sınır şartlarının seçiminden dolayı bir hatanın oluşmadığı görülmüştür. Sayısal çözümlerin grafiklerine bakıldığında, soliton dalgasının zaman içerisinde şeklinde bir bozulma olmadan ilerlediği, yani üstel kübik B-spline kolokeyşin metodunun, dalganın hareketini iyi modellediği görülmüştür. Korunum sabitlerinin sayısal değerleri incelendiğinde ise üstel kübik B-spline kolokeyşin metodunun, genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokeyşin metodu ile birbirine yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

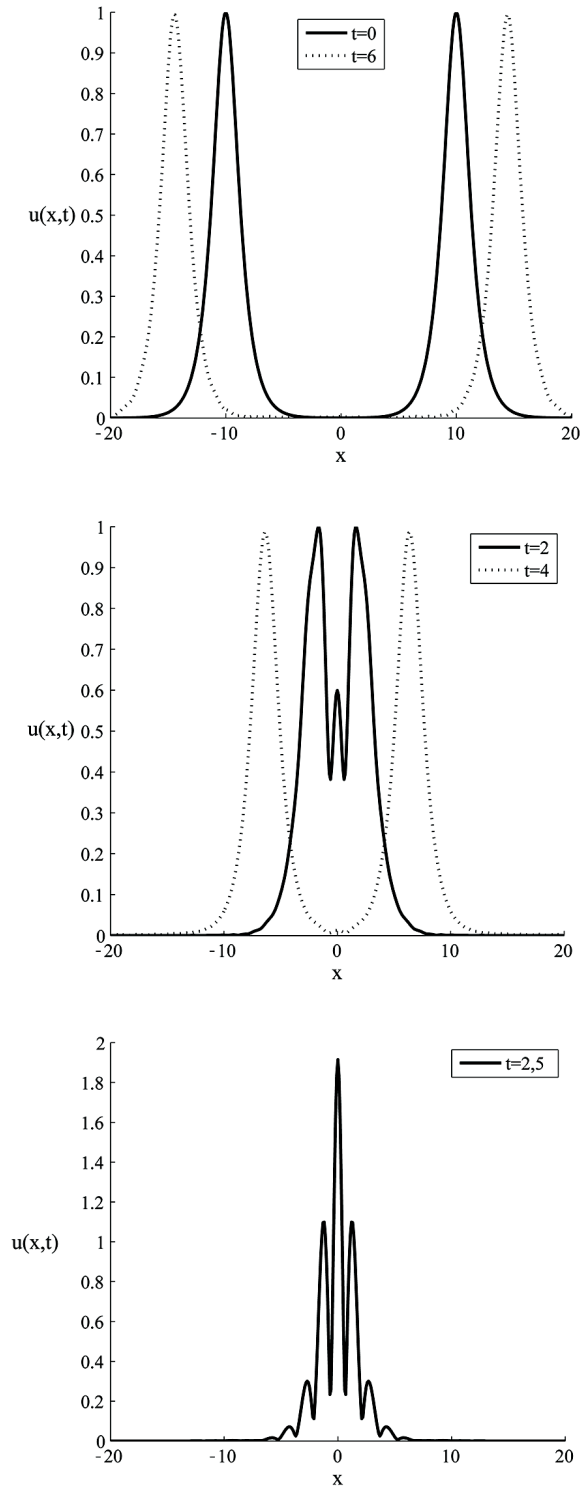
2.3.2. İki soliton dalgasının çarpışması

(1.59) başlangıç şartı ile verilen ve iki soliton dalgasının çarpışmasını modelleyen NLS denklemi, $[-20, 20]$ aralığında $q = 2$, $h = 0,1$, $\Delta t = 0,005$, $\alpha_1 = 1$, $S_1 = -4$, $x_a = 10$, $\alpha_2 = 1$, $S_2 = 4$, $x_b = -10$ parametreleri için çalıştırılmıştır. Bu seçimler altında (1.59) başlangıç şartı, büyüklükleri eşit ve aralarındaki uzaklık 20 birim olan iki soliton dalgası tanımlar. Dalgalardan birincisinin tepe noktası $x = -10$, ikincisinin tepe noktası $x = 10$ da konumlanmıştır. Her iki dalganın hızı da 4 birimdir. Sayısal korunum sabitleri bazı zamanlarda serbest parametre değeri olan p 'nin 1'e eşit olduğu durumda Çizelge 2.3'de verilmiştir. Çizelge 2.3 sadece $p = 1$ için hazırlanmış ve genişletilmiş kübik B-spline metodundaki λ parameteresinin 0'a eşit olduğu durum ile karşılaştırılmıştır. Aynı aralıkta parametreler ve $t = 0$ daki başlangıç şartı kullanılarak korunumlar analitik olarak $C_1 = 4$, $C_2 = 14,66666$ olarak bulunabilir. Sayısal korunum sabitleri analitik korunum sabitleri ile hemen hemen aynı olarak elde edilmiştir.

Çizelge 2.3. İki soliton dalgasının çarpışması

$p = 1$					
Zaman	C_1	C_2	Zaman	C_1	C_2
0,0	3,99999	14,66577	3,5	4,00003	14,66803
0,5	4,00000	14,66634	4,0	4,00004	14,66766
1,0	4,00000	14,66706	4,5	4,00005	14,66734
1,5	4,00001	14,66761	5,0	4,00005	14,66705
2,0	4,00001	14,66694	5,5	4,00006	14,66691
2,5	3,99992	14,61149	6,0	4,00007	14,66690
3,0	4,00003	14,66809			
$\lambda = 0, (\text{Aksoy, 2012})$					
Zaman	C_1	C_2	Zaman	C_1	C_2
0,0	4,00000	14,66669	3,5	4,00000	14,66667
0,5	4,00000	14,66667	4,0	4,00000	14,66667
1,0	4,00000	14,66665	4,5	4,00000	14,66666
1,5	4,00000	14,66667	5,0	4,00000	14,66666
2,0	4,00000	14,66665	5,5	4,00000	14,66664
2,5	4,00000	14,66180	6,0	4,00000	14,66669
3,0	4,00000	14,66667			

Şekil 2.2'de $q = 2$, $h = 0,1$, $\Delta t = 0,01$, $\alpha_1 = 1$, $S_1 = -4$, $x_a = 10$, $\alpha_2 = 1$, $S_2 = 4$, $x_b = -10$ parametre seçimleri altında dalgaların birbirine karşı hareketleri, çarpışmaları ve orijinal şekillerini koruyarak ayrılmaları gösterilmiştir. Grafiklerden, soldaki dalganın sağa doğru, sağdaki dalganın sola doğru ilerlemekte oldukları, $t = 2$ civarında başlayan çarpışmanın yaklaşık $t = 4$ zamanına kadar devam ettiği, çarpışmadan sonra dalgaların birbirlerine göre zıt yönlerde ve başlangıçtaki şekilleri bozulmadan ilerlemeye devam ettikleri görülmektedir.



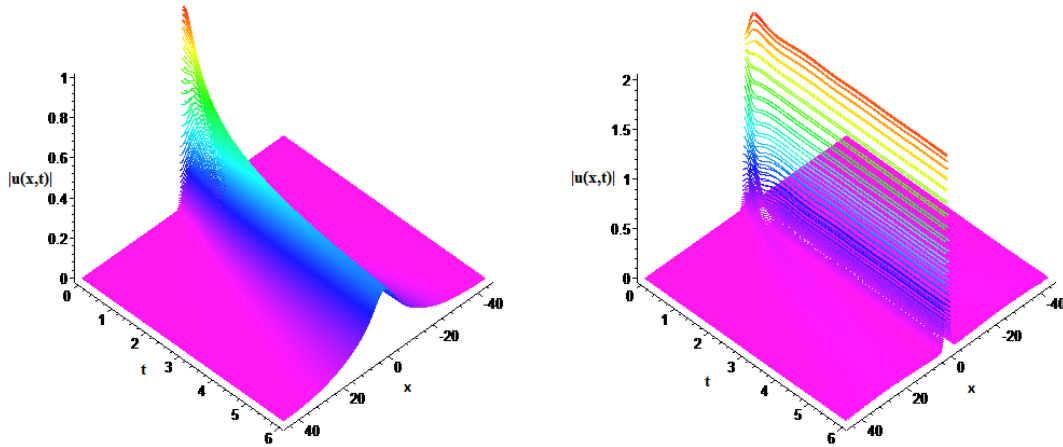
Şekil 2.2. $p = 1$ için iki soliton dalgasının çarpışması

İkinci test problemi olarak, iki soliton dalgasının çarpışması problemi ele alınmıştır. Çizilen grafikler incelendiğinde, dalgaların çarpışma öncesindeki şekillerini çarpışma sonrasında da korudukları görülmüştür. Zaten bu durum soliton dalgasının özelliklerinden bir tanesidir. Yani önerilen metodun bu test problemini de iyi bir şekilde modellediği

söylenbilir. Korunum sabitlerinin değerleri incelendiğinde ise, üstel kübik B-spline kolokey şın metodunun, genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokey şın metoduna yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

2.3.3. Sabit soliton dalgasının doğuşu

(1.61) başlangıç şartı ile verilen ve sabit soliton dalgasının doğuşunu modelleyen NLS denklemi için program, $-45 \leq x \leq 45$ bölgesi üzerinde $\Delta t = 0,005$, $N = 1334$ parametre seçimleri ile $A = 1 < \sqrt{\pi} = 1,7725$ ve $A = 1,78 > \sqrt{\pi}$ için çalıştırılmış ve üretilen soliton dalgaları Şekil 2.3'de resmedilmiştir. $A = 1$ olduğunda dalgaların zamanla sönmüldüğü, $A = 1,78$ seçildiğinde ise genliği 2 değerini alan soliton dalgasının, farklı zamanlarda çizilen grafikleri incelendiğinde şeklinde bir miktar bozulma olduğu, genliğinde ise $t = 0$ zamanı dışında gözle görülür bir bozulma olmadığı söylenbilir.



Şekil 2.3. $\alpha = 1$, $q = 2$, $N = 1334$, $p = 1$ iken sırasıyla $A = 1$ ve $A = 1,78$ için sabit soliton dalgasının doğuşu

$A = 1,78$ için analitik değerleri aşağıda verilen korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A^2 = 3,97100,$$

$$C_2 = \frac{1}{4} A^2 (2\sqrt{2} - qA^2) \sqrt{\pi} = -4,92562$$

olarak hesaplanabilir. Sayısal değerleri ise üstel kübik B-spline kolokeyşin metoduyla $p = 1$ için Çizelge 2.4'de verilmiştir.

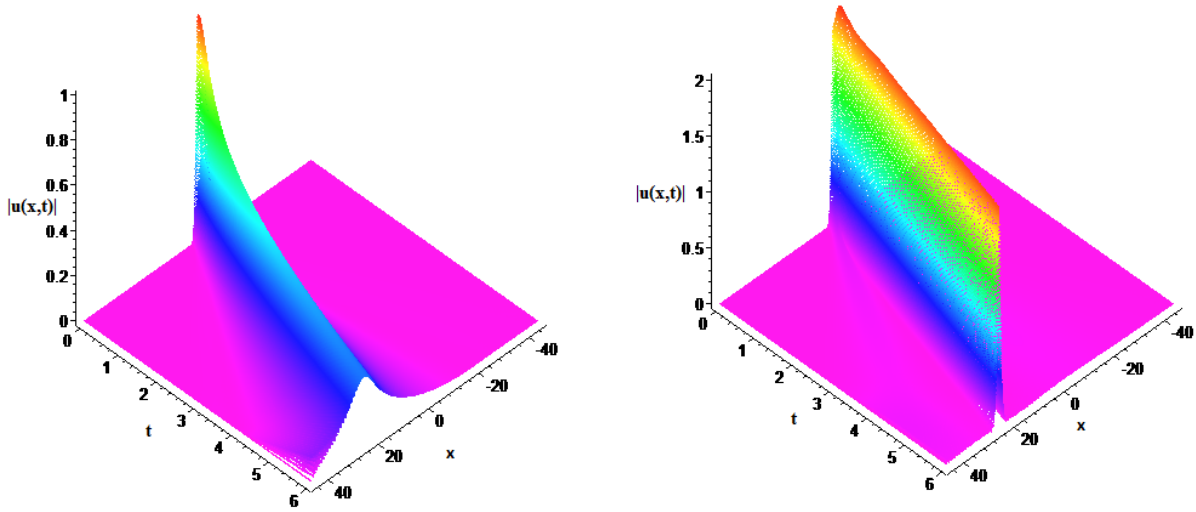
Çizelge 2.4. $N = 1334$, $\Delta t = 0,005$, $A = 1,78$ için sabit soliton dalgasının doğuşu

$p = 1$					
Zaman	C_1	C_2	Zaman	C_1	C_2
0,0	3,97100	-4,92563	4,0	3,97076	-4,93191
2,0	3,97091	-4,93275	6,0	3,97062	-4,93128
$\lambda = 0$, (Aksoy, 2012)					
Zaman	C_1	C_2	Zaman	C_1	C_2
0,0	3,97100	-4,92562	4,0	3,97094	-4,92596
2,0	3,97093	-4,92662	6,0	3,97093	-4,92672

Üçüncü test problemi olarak sabit soliton dalgasının doğuşu incelenmiştir. Sonuçlar 3 boyutlu grafikler çizilerek incelenmiştir. Buna göre $u(x, 0)$ başlangıç şartının $(-\infty, \infty)$ aralığındaki integralinin π sayısından büyük olduğu durumda soliton dalgası ürettiği aksi halde dalganın zaman içerisinde sönmüldüğü gözlemlenmiştir. Buna göre soliton dalgası oluştuğu durumda zaman ilerledikçe dalganın şeklini koruduğu ve korunum sabitlerinin sayısal değerlerinin ise, üstel kübik B-spline kolokeyşin ve genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokeyşin metotları için benzer sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

2.3.4. Hareketli soliton dalgasının doğuşu

Hareketli soliton dalgasının doğuşunu modelleyen NLS problemi, (1.62) başlangıç şartı altında, $-45 \leq x \leq 45$ bölgesi üzerinde, $\Delta t = 0,005$, $N = 1334$ parametreleri için ele alınmıştır. Buna göre $0 \leq t \leq 6$ zamanlarında çizilen grafikleri Şekil 2.4'de sırasıyla $A = 1$ ve $A = 1,78$ için verilmiştir. Grafikler incelendiğinde $A = 1$ olduğunda dalgalar sönmüldüğüne rağmen $A = 1,78$ olduğunda, solitonun zaman arttıkça dalganın sağa doğru ilerlediği, $t = 6$ zamanında dalganın tepe noktasının $x = 24$ civarında olduğu, maksimum değeri 1,95 olduğu ve şeklinin dikkate değer bir bozulma olmadığı görülmüştür.



Şekil 2.4. $\alpha = 1$, $q = 2$, $N = 1334$, $p = 1$ iken sırasıyla $A = 1$ ve $A = 1,78$ için hareketli soliton dalgasının doğuşu

Korunum sabitlerinin sayısal değerleri Çizelge 2.5’de verilmiştir. Çizelgeye göre $p = 1$ iken (Aksoy, 2012) ile verilen genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokeyşim metodundaki değişken $\lambda = 0$ durumundaki C_1 ve C_2 korunum sabitleri kıyaslanmıştır. $A = 1,78$ olduğu durumda C_1 ve C_2 sabitlerinin tam değerleri

$$C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}A^2 = 3,97100,$$

$$C_2 = 5\sqrt{\frac{\pi}{2}}A^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{4}qA^4 = 10,95838$$

olacaktır.

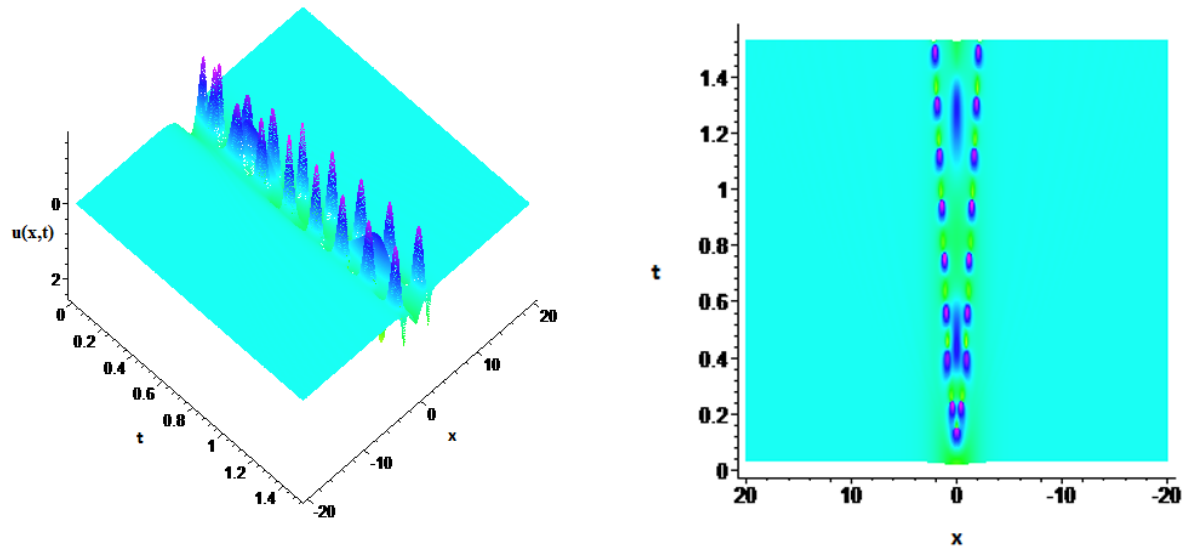
Çizelge 2.5. $N = 1334$, $\Delta t = 0,005$, $A = 1,78$ için hareketli soliton dalgasının doğuşu

$p = 1$					
Zaman	C_1	C_2	Zaman	C_1	C_2
0,0	3,97100	10,95788	4,0	3,97112	10,94298
2,0	3,97113	10,94128	6,0	3,97113	10,94343
$\lambda = 0$, (Aksoy, 2012)					
Zaman	C_1	C_2	Zaman	C_1	C_2
0,0	3,97100	10,95837	4,0	3,97087	10,95432
2,0	3,97086	10,95611	6,0	3,97087	10,95524

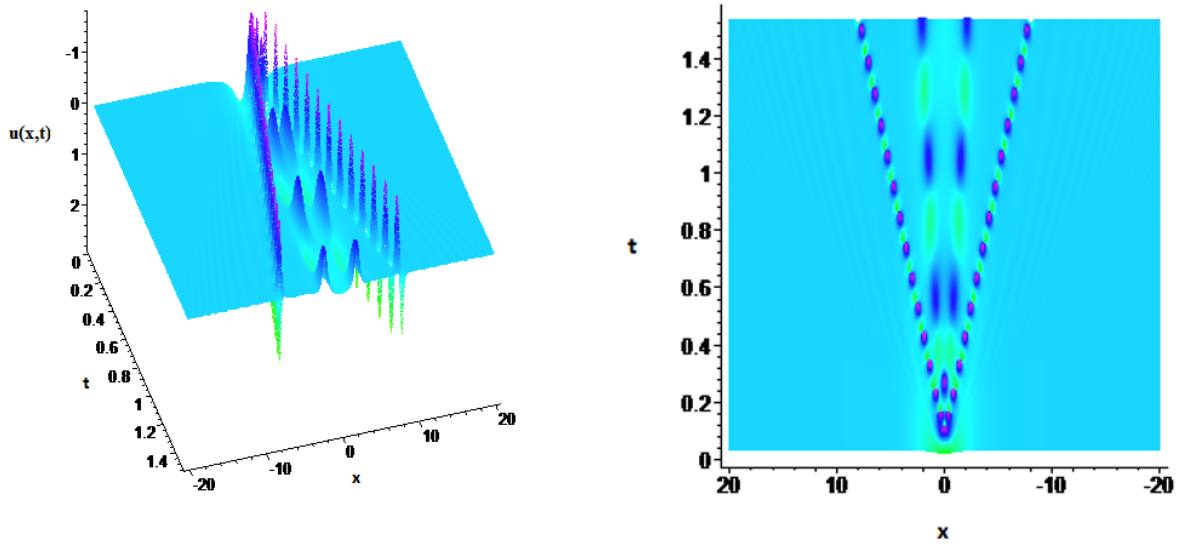
Dördüncü test problemi olarak alınan, hareketli soliton dalgasının doğuşu problemine ait olan grafikler incelendiğinde, A değerine bağlı olarak dalganın sönmüldüğü ya da şeklinin büyük oranda korunduğu tespit edilmiştir. Korunum sabitlerinin değerleri incelendiğinde ise, kıyaslanan genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokeyşin metoduna yakın sonuçlar verdiği ama daha iyi olmadığı gözlemlenmiştir.

2.3.5. Bağlı durumlu solitonlar

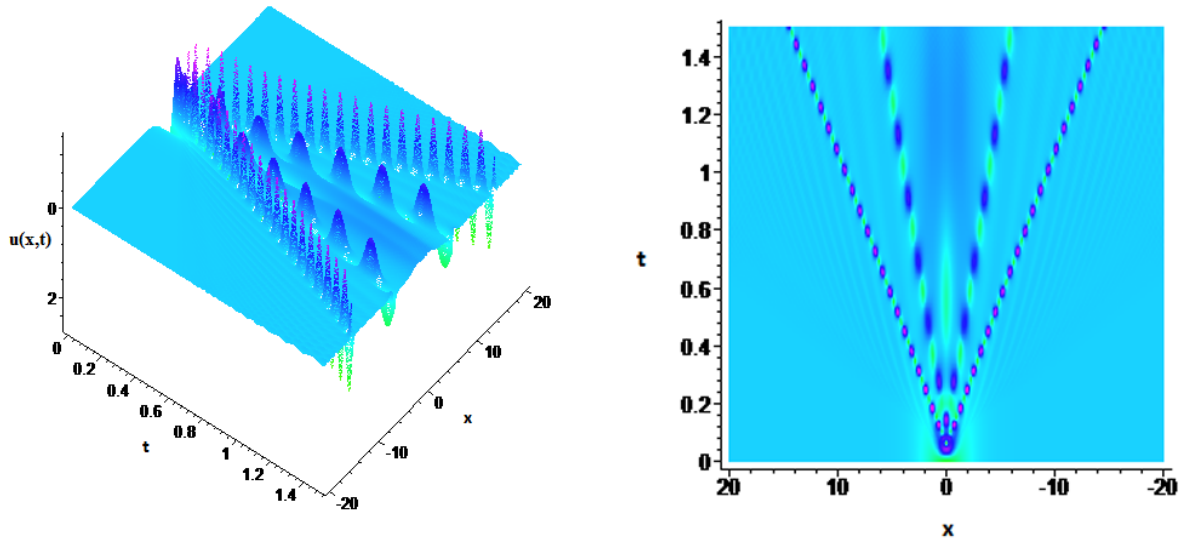
Son olarak bağlı durumlu solitonların farklı M değerlerine karşılık grafikleri ele alınmıştır. Bu problemde parametreler $h = 0,03$, $\Delta t = 0,005$, $N = 1334$ ve $q = 32, 50$, konum aralığı ise Şekil 2.5-2.7 için $-20 \leq x \leq 20$ olarak, Şekil 2.8 için ise $-30 \leq x \leq 30$ olarak seçilmiştir. $M = 4, 5, 6, 7$ olması durumunda oluşan grafikler sırası ile Şekil 2.5-2.8'de gösterilmiştir.



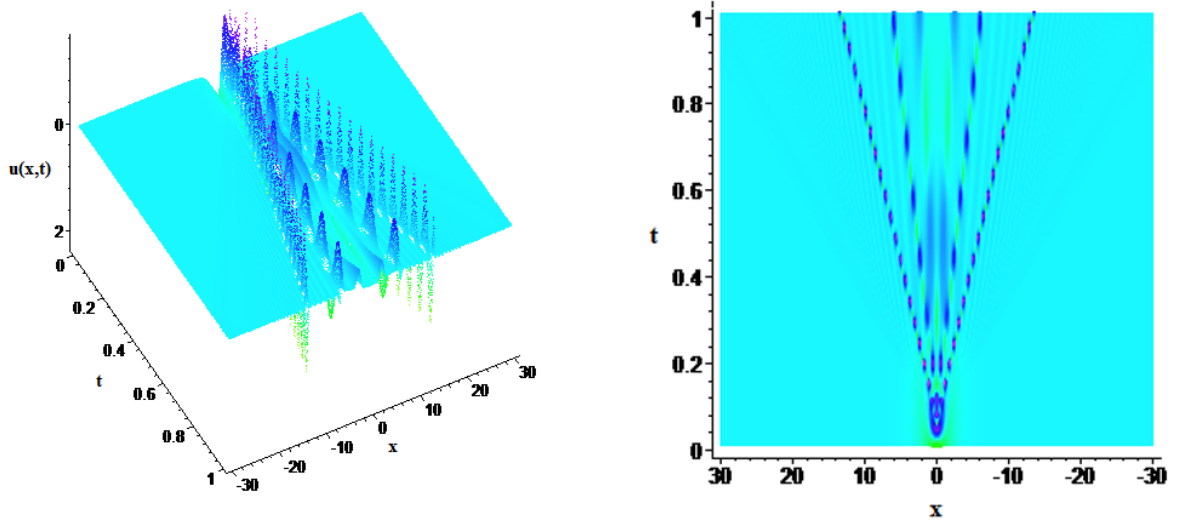
Şekil 2.5. $M = 4$, $q = 32$ için yoğunluk değişimi



Şekil 2.6. $M = 5$, $q = 50$ için yoğunluk değişimi



Şekil 2.7. $M = 6$, $q = 72$ için yoğunluk değişimi



Şekil 2.8. $M = 7$, $q = 98$ için yoğunluk değişimi

Son olarak NLS denklemi için bağlı durumlu solitonlar M 'nin farklı değerleri için resmedilmiştir. Şekil 2.5-2.8'e bakılacak olursa, soldaki grafik farklı M değerlerine karşılık gelen üç boyutlu halini, sağdaki grafik ise 2 boyutlu x - t düzlemi üzerindeki izdüşümünü göstermektedir. Grafikler incelendiğinde, solitonların M değerlerinin seçimine karşı hassas olduğu ve M değeri arttıkça şekildeki girinti ve çıkıntılarının daha da arttığı görülmüştür.

3. REAKSİYON-DİFÜZYON DENKLEM SİSTEMİNİN ÜSTEL KÜBİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN ÇÖZÜMLERİNİN ÜRETİLMESİ

Bu bölümde lineer ve lineer olmayan reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinin sayısal çözümleri, üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak elde edilmiştir. Zaman ayrışımı, Crank-Nicolson metodu ile konum ayrışımı ise üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu ile yapılmıştır. Lineer olmayan denklem sistemleri için, Taylor metodu yardımıyla lineerleştirme uygulandıktan sonra elde edilen cebirsel denklem sistemi, $2N + 2$ denklem $2N + 6$ bilinmeyenden oluşmaktadır. Denklemlerin çözülebilmesi için denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşit olması gerektiğinden, sınır şartları kullanılarak ve bazı bilinmeyenler yok edilerek sistemler çözülebilir hale getirilmiştir. Daha sonra da Thomas algoritması kullanılarak çözüme gidilmiştir. Analitik çözümü bilinen lineer problem için, üstel kübik B-spline kolokeyşin metodundaki serbest parametre olan p değeri, L_∞ hata normunu, minimum yapacak şekilde 0'a yakın yerlerde belirlenmiştir. Analitik çözümü bilinmeyen ve lineer olmayan problemlerden olan izotermal kimyasal sistem, Brusselator modeli, Schnakenberg modeli ve Gray-Scott modeli için ise bağıl hata hesaplanarak kontrol edilmiştir. Seçilen test problemlerinin karakterine göre ortaya çıkan konumsal desenler, reaksiyon-difüzyon denklem sisteminde yer alan bağımlı değişkenlere ait yoğunluk değişimlerinin konum ve zaman eksenini üzerindeki izdüşüm grafikleriyle oluşturulmuştur. 3-boyutlu grafikler ve bunların x-t düzlemi üzerindeki 2-boyutlu grafikler verilmiştir.

3.1. Reaksiyon-Difüzyon Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Üstel Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda, birinci bölümde verilen üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu, reaksiyon-difüzyon denklem sisteminin sayısal çözümünü araştırmak için uygulanacaktır. Denklem sistemindeki u ve v yerine u_m ve v_m üstel kübik B-spline yaklaşımları zamana bağlı δ_m ve ϕ_m parametreleri cinsinden yazılırsa

$$u_m = u(x_m, t) = \frac{s - ph}{2(phc - s)}\delta_{m-1} + \delta_m + \frac{s - ph}{2(phc - s)}\delta_{m+1}, \quad (3.1)$$

$$u'_m = u'(x_m, t) = \frac{p(1 - c)}{2(phc - s)}\delta_{m-1} + \frac{p(c - 1)}{2(phc - s)}\delta_{m+1}, \quad (3.2)$$

$$u''_m = u''(x_m, t) = \frac{p^2s}{2(phc - s)}\delta_{m-1} - \frac{p^2s}{phc - s}\delta_m + \frac{p^2s}{2(phc - s)}\delta_{m+1}, \quad (3.3)$$

$$v_m = v(x_m, t) = \frac{s - ph}{2(phc - s)}\phi_{m-1} + \phi_m + \frac{s - ph}{2(phc - s)}\phi_{m+1}, \quad (3.4)$$

$$v'_m = v'(x_m, t) = \frac{p(1 - c)}{2(phc - s)}\phi_{m-1} + \frac{p(c - 1)}{2(phc - s)}\phi_{m+1}, \quad (3.5)$$

$$v''_m = v''(x_m, t) = \frac{p^2s}{2(phc - s)}\phi_{m-1} - \frac{p^2s}{phc - s}\phi_m + \frac{p^2s}{2(phc - s)}\phi_{m+1} \quad (3.6)$$

eşitlikleri elde edilir. Δt zaman adım uzunluğu olmak üzere (1.13), (1.14), (1.16) ve (1.17) ile verilen Crank-Nicolson yaklaşımları (1.71-1.72) ile verilen reaksiyon-difüzyon denklem sistemine uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} &= a_1 \frac{u_{xx}^{n+1} + u_{xx}^n}{2} + b_1 \frac{u^{n+1} + u^n}{2} + c_1 \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \\ &+ d_1 \frac{(u^2v)^{n+1} + (u^2v)^n}{2} + e_1 \frac{(uv)^{n+1} + (uv)^n}{2} + m_1 \frac{(uv^2)^{n+1} + (uv^2)^n}{2} + \eta_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} &= a_2 \frac{v_{xx}^{n+1} + v_{xx}^n}{2} + b_2 \frac{u^{n+1} + u^n}{2} + c_2 \frac{v^{n+1} + v^n}{2} \\ &+ d_2 \frac{(u^2v)^{n+1} + (u^2v)^n}{2} + e_2 \frac{(uv)^{n+1} + (uv)^n}{2} + m_2 \frac{(uv^2)^{n+1} + (uv^2)^n}{2} + \eta_2 = 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Burada $u^{n+1} = u(x, t_n + \Delta t)$ ve $v^{n+1} = v(x, t_n + \Delta t)$, $(n + 1)$. zaman adımındaki çözümlerdir. Δt zaman adımı olmak üzere

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t, \quad t^n = n\Delta t$$

yazılabilir. Burada lineer olmayan $(u^2v)^{n+1}$, $(uv)^{n+1}$ ve $(uv^2)^{n+1}$ terimlerine Taylor metodu yardımıyla lineerleştirme uygulanırsa

$$\begin{aligned} (u^2v)^{n+1} &\simeq 2u^{n+1}u^n v^n + (u^n)^2 v^{n+1} - 2(u^n)^2 v^n, \\ (uv)^{n+1} &\simeq u^{n+1}v^n + u^n v^{n+1} - u^n v^n, \\ (uv^2)^{n+1} &\simeq 2v^{n+1}v^n u^n + (v^n)^2 u^{n+1} - 2(v^n)^2 u^n, \end{aligned}$$

bulunur. Lineerleştirme için bulunan eşitlikler ve (3.1-3.6) eşitlikleri (3.7) denklem sistemine uyarlanırsa

$$K_1 = \alpha_1 \delta_{m-1}^n + \delta_m^n + \alpha_1 \delta_{m+1}^n \quad L_1 = \alpha_1 \phi_{m-1}^n + \phi_m^n + \alpha_1 \phi_{m+1}^n$$

ve

$$\alpha_1 = \frac{s - ph}{2(phc - s)}, \quad \gamma_1 = \frac{p^2 s}{2(phc - s)}, \quad \gamma_2 = -\frac{p^2 s}{phc - s}$$

iken

$$\nu_{m1} = \left(\frac{2}{\Delta t} - b_1 - 2d_1 K_1 L_1 - e_1 L_1 - m_1 (L_1)^2 \right) \alpha_1 - a_1 \gamma_1,$$

$$\nu_{m2} = (-c_1 - d_1 (K_1)^2 - e_1 K_1 - 2m_1 K_1 L_1) \alpha_1,$$

$$\nu_{m3} = \left(\frac{2}{\Delta t} - b_1 - 2d_1 K_1 L_1 - e_1 L_1 - m_1 (L_1)^2 \right) - a_1 \gamma_2,$$

$$\nu_{m4} = (-c_1 - d_1 (K_1)^2 - e_1 K_1 - 2m_1 K_1 L_1),$$

$$\nu_{m5} = \left(\frac{2}{\Delta t} + b_1 - d_1 K_1 L_1 \right) \alpha_1 + a_1 \gamma_1,$$

$$\nu_{m6} = (c_1 - m_1 K_1 L_1) \alpha_1,$$

$$\nu_{m7} = \left(\frac{2}{\Delta t} + b_1 - d_1 K_1 L_1 \right) + a_1 \gamma_2,$$

$$\nu_{m8} = (c_1 - m_1 K_1 L_1),$$

$$\nu_{m9} = (-b_2 - 2d_2 K_1 L_1 - e_2 L_1 - m_2 (L_1)^2) \alpha_1,$$

$$\nu_{m10} = \left(\frac{2}{\Delta t} - c_2 - d_2 (K_1)^2 - e_2 K_1 - 2m_2 K_1 L_1 \right) \alpha_1 - a_2 \gamma_1,$$

$$\nu_{m11} = (-b_2 - 2d_2 K_1 L_1 - e_2 L_1 - m_2 (L_1)^2),$$

$$\nu_{m12} = \left(\frac{2}{\Delta t} - c_2 - d_2 (K_1)^2 - e_2 K_1 - 2m_2 K_1 L_1 \right) - a_1 \gamma_2,$$

$$\nu_{m13} = (b_2 - d_2 K_1 L_1) \alpha_1,$$

$$\nu_{m14} = \left(\frac{2}{\Delta t} + c_2 - m_2 K_1 L_1 \right) \alpha_1 + a_2 \gamma_1,$$

$$\nu_{m15} = (b_2 - d_2 K_1 L_1),$$

$$\nu_{m16} = \left(\frac{2}{\Delta t} + c_2 - m_2 K_1 L_1 \right) + a_1 \gamma_2,$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \nu_{m1} \delta_{m-1}^{n+1} + \nu_{m2} \phi_{m-1}^{n+1} + \nu_{m3} \delta_m^{n+1} + \nu_{m4} \phi_m^{n+1} + \nu_{m1} \delta_{m+1}^{n+1} + \nu_{m2} \phi_{m+1}^{n+1} \\ &= \nu_{m5} \delta_{m-1}^n + \nu_{m6} \phi_{m-1}^n + \nu_{m7} \delta_m^n + \nu_{m8} \phi_m^n + \nu_{m5} \delta_{m+1}^n + \nu_{m6} \phi_{m+1}^n + 2\eta_1, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \nu_{m9} \delta_{m-1}^{n+1} + \nu_{m10} \phi_{m-1}^{n+1} + \nu_{m11} \delta_m^{n+1} + \nu_{m12} \phi_m^{n+1} + \nu_{m9} \delta_{m+1}^{n+1} + \nu_{m10} \phi_{m+1}^{n+1} \\ &= \nu_{m13} \delta_{m-1}^n + \nu_{m14} \phi_{m-1}^n + \nu_{m15} \delta_m^n + \nu_{m16} \phi_m^n + \nu_{m13} \delta_{m+1}^n + \nu_{m14} \phi_{m+1}^n + 2\eta_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemine karşılık gelen matris gösterimi ise

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{B}_2 \mathbf{x}^n + 2\mathbf{C} \quad (3.10)$$

olduğunda

$$\begin{aligned} m &= 0 \Rightarrow \delta_{-1} = \delta_1, & \phi_{-1} &= \phi_1 \\ m &= N \Rightarrow \delta_{N+1} = \delta_{N-1}, & \phi_{N+1} &= \phi_{N-1} \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Sınır şartları kullanılarak δ_{-1} , δ_{N+1} , ϕ_{-1} ve ϕ_{N+1} parametreleri denklem sisteminden yok edilir. Böylece çözülebilen bir sistem elde edilir. Bunun yanında, probleme göre her iki sınır şartının ortak kullanımı da düşünülebilir. Sınır parametreleri yok edildikten sonra (3.10) denklem sisteminin çözümü Thomas algoritması yardımı ile elde edilebilir. Reaksiyon-difüzyon denkleminin üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (3.10) denklem sisteminin çözülebilmesi için,

$$(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0) \text{ ve } (\phi_{-1}^0, \phi_0^0, \dots, \phi_N^0, \phi_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörlerinin bulunması gereklidir.

3.2. Başlangıç Durumu

(3.10) denklem sisteminde iterasyona başlayabilmek için başlangıç parametreleri başlangıç koşullarından bulunmalıdır. (3.1-3.6) denklemleri verilen başlangıç şartlarına göre düzenlenirse

$$u^0(x_m, 0) = \frac{s - ph}{2(phc - s)} \delta_{m-1}^0 + \delta_m^0 + \frac{s - ph}{2(phc - s)} \delta_{m+1}^0, \quad m = 0, 1, \dots, N$$

yazılır. Başlangıç şartı için oluşturulan bu sistem, $N + 1$ denklem ve $N + 3$ bilinmeyen içermektedir. Sınırlarda birinci türev bağıntısı

$$\frac{p(1 - c)}{2(phc - s)} \delta_{m-1}^0 + \frac{p(c - 1)}{2(phc - s)} \delta_{m+1}^0 = u'(x_m, 0) = u'_m$$

kullanılarak $m = 0$ ve $m = N$ için δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 bilinmeyenleri

$$\delta_{-1}^0 = \delta_1^0 + \frac{2(phc - s)}{p(1 - c)} u'_0, \quad \delta_{N+1}^0 = \delta_{N-1}^0 - \frac{2(phc - s)}{p(1 - c)} u'_N$$

şeklinde ifade edilirse denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{s-ph}{phc-s} & & & & & & & & & \\ \frac{s-ph}{2(phc-s)} & 1 & \frac{s-ph}{2(phc-s)} & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & \frac{s-ph}{2(phc-s)} & 1 & \frac{s-ph}{2(phc-s)} & & \\ & & & & & & & \frac{s-ph}{phc-s} & 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^0 \\ \delta_1^0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^0 \\ \delta_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 - \frac{s-ph}{p(1-c)} u'_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N - \frac{s-ph}{p(c-1)} u'_N \end{bmatrix}$$

İlk olarak

$$a_s = 0, 1, b_s = 0, 01 \text{ ve } d_s = 1 \quad (3.11)$$

seçilerek difüzyon teriminin reaksiyon terimine göre daha baskın olduğu bir sistem ele alınmıştır. Bölünme nokta sayısı olan N ve adım uzunluğu olan Δt değıştikçe elde edilen sonuçlar $u(x, t)$ için Çizelge 3.1'de, $v(x, t)$ için Çizelge 3.2'de gösterilmiştir. Çizelge incelendiğinde $u(x, t)$ fonksiyonu için bulunan sayısal çözümlerin $v(x, t)$ fonksiyonuna göre bulunan sayısal çözümlere göre daha doğru sonuçlar verdiği, p 'nin 1'den farklı değerler aldığı durumlarda sonuçların daha doğru olduğu görölmektedir. $p = 1$ durumunda çözümler Şahin'in (2009), kübik B-spline kolokeyşın metodu kullanılarak elde ettiği sonuçlar ile nerdeyse aynı iken, p nin değışmesi durumunda sonuçlarda iyileşme söz konusu olmuştur. p 'nin en iyi durumu için $N = 512$ iken farklı Δt zamanları için elde edilen $u(x, t)$ sayısal çözümleri, CN-MG metodu (Chou vd., 2007) ile kıyaslandığında, önerilen metodun daha etkili olduğu söylenebilir.

Çizelge 3.1. $t = 1$ anında difüzyon baskın olduğu durumda $u(x, t)$ için elde edilen hata normları

N	Δt	$u(x, t)$ (Değişken p)	$(p = 1)$	(Şahin, 2009)	(Chou vd., 2007)
		$L_\infty \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$	CN-MG metodu
64	0,04	0,003267($p = 0,0000064798$)	1,79133	1,44132	
	0,02	0,000427($p = 0,0000086377$)	0,97267	0,62274	
	0,01	0,000651($p = 0,0000092493$)	0,76805	0,41813	
	0,005	0,000008($p = 0,0000902390$)	0,71689	0,36698	
128	0,04	0,000012($p = 0,0000873715$)	1,26630	1,17879	
	0,02	0,000005($p = 0,0000968465$)	0,44776	0,36027	
	0,01	0,000001($p = 0,0000945198$)	0,24316	0,15568	
	0,005	0,000001($p = 0,0000955016$)	0,19201	0,10453	
256	0,04	0,000003($p = 0,0000997823$)	1,13504	1,11316	
	0,02	0,000009($p = 0,0000698934$)	0,31653	0,29465	
	0,01	0,000018($p = 0,0000942371$)	0,11194	0,09006	
	0,005	0,000000($p = 0,0000952584$)	0,06079	0,03892	
512	0,04	0,000002($p = 0,0002951006$)	1,10222	1,09675	1,09
	0,02	0,000001($p = 0,0002947187$)	0,28372	0,27825	0,267
	0,01	0,000001($p = 0,0002817795$)	0,07913	0,07366	0,0627
	0,005	0,000001($p = 0,0003868050$)	0,02798	0,02252	0,0116

Çizelge 3.2. $t = 1$ anında difüzyon baskın olduğu durumda $v(x, t)$ için elde edilen hata normları

N	Δt	$v(x, t)$ (Değişken p)	$v(x, t)$ ($p = 1$)	(Şahin,2009) $L_\infty \times 10^6$
		$L_\infty \times 10^6$	$L_\infty \times 10^6$	$L_\infty \times 10^6$
64	0,04	0,6430($p = 0,0000064798$)	7,79566	6,14981
	0,02	0,1549($p = 0,0000086377$)	4,41695	2,77144
	0,01	0,0423($p = 0,0000092493$)	3,57241	1,92699
	0,005	0,0098($p = 0,0000902390$)	3,36129	1,71588
128	0,04	0,6277($p = 0,0000873715$)	5,32683	4,91535
	0,02	0,1569($p = 0,0000968465$)	1,94862	1,53722
	0,01	0,0392($p = 0,0000945198$)	1,10421	0,69283
	0,005	0,0098($p = 0,0000955016$)	0,01466	0,48174
256	0,04	0,6276($p = 0,0000997823$)	4,70960	4,60673
	0,02	0,1568($p = 0,0000698934$)	1,33152	1,22867
	0,01	0,0391($p = 0,0000942371$)	0,48714	0,38429
	0,005	0,0098($p = 0,0000952584$)	0,27605	0,17321
512	0,04	0,6276($p = 0,0002951006$)	4,55529	4,52957
	0,02	0,1569($p = 0,0002947187$)	1,17724	1,15153
	0,01	0,0391($p = 0,0002817795$)	0,33287	0,30716
	0,005	0,0098($p = 0,0003868050$)	0,12178	0,09607

İkinci olarak

$$a_s = 2, b_s = 1 \text{ ve } d_s = 0,001 \quad (3.12)$$

olarak seçilerek reaksiyon terimlerinin etkisi artırılmış ve $t = 1$ anında elde edilen sonuçlar $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ için sırası ile Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4'de gösterilmiştir. Çizelge incelendiğinde $u(x, t)$ fonksiyonu için bulunan sayısal çözümlerin $v(x, t)$ fonksiyonuna göre bulunan sayısal çözümlere daha doğru sonuçlar verdiği, p nin 1'den farklı değerler aldığı durumlarda sonuçların daha doğru olduğu görülmektedir. Ayrıca reaksiyon teriminin baskın olması durumunda, konum parçalanmasının $u(x, t)$ sayısal çözümleri üzerinde etkisinin yok denecek kadar az olduğu da görülebilir. Fakat Δt küçüldükçe, $v(x, t)$ sayısal çözümlerinde iyileşme sözkonusudur. Δt küçüldükçe Diğer yandan, reaksiyon terimlerinin denklem sistemi üzerinde baskın hale gelmesi $v(x, t)$ fonksiyonunun modellenmesinde hatayı arttıran bir faktör olarak ortaya çıkmaktadır. İkinci durumda da, birinci durumda olduğu gibi $N = 512$ iken farklı Δt zaman adımındaki $u(x, t)$ sayısal çözümleri için elde edilen maksimum hata normları, CN-MG metodu (Chou vd., 2007) ile elde edilen maksimum hata normlarından oldukça küçük olduğu söylenebilir.

Çizelge 3.3. $t = 1$ anında reaksiyon baskın olduğu durumda $u(x, t)$ için elde edilen hata normları

N	Δt	$u(x, t)$ (Değişken p)	$u(x, t)$ ($p = 1$)	(Şahin, 2009) $L_\infty \times 10^4$	(Chou vd., 2007) CN-MG metodu
64	0,04	0,27664($p = 0,0000010625$)	1,93699	1,93674	
	0,02	0,00000($p = 0,0000021909$)	0,48449	0,48424	
	0,01	0,00001($p = 0,0000042520$)	0,12149	0,12124	
	0,005	0,00000($p = 0,0000067910$)	0,03075	0,03050	
128	0,04	0,27657($p = 0,0000021250$)	1,93661	1,93655	
	0,02	0,00002($p = 0,0000033863$)	0,48412	0,48405	
	0,01	0,00000($p = 0,0000041191$)	0,12112	0,12105	
	0,005	0,00000($p = 0,0000045231$)	0,03037	0,03031	
256	0,04	0,27632($p = 0,0000042499$)	1,93652	1,93650	
	0,02	0,00002($p = 0,0000087637$)	0,48402	0,48401	
	0,01	0,00000($p = 0,0000156076$)	0,12102	0,12101	
	0,005	0,00000($p = 0,0000221949$)	0,03028	0,03026	
512	0,04	0,27632($p = 0,0000084998$)	1,93650	1,93649	1,94
	0,02	0,00000($p = 0,0000149085$)	0,48400	0,48399	0,484
	0,01	0,00000($p = 0,0000340166$)	0,12100	0,12099	0,121
	0,005	0,00000($p = 0,0000675303$)	0,03025	0,03025	0,0302

Çizelge 3.4. $t = 1$ anında reaksiyon baskın olduğu durumda $v(x, t)$ için elde edilen hata normları

N	Δt	$v(x, t)$ (Değişken p)	$v(x, t)$ ($p = 1$)	(Şahin, 2009) $L_\infty \times 10^5$
		$L_\infty \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
64	0,04	7,21784($p = 0,0000010625$)	4,91942	4,91757
	0,02	2,30940($p = 0,0000021909$)	1,23246	1,23062
	0,01	0,57739($p = 0,0000042520$)	0,31087	0,30903
	0,005	0,14431($p = 0,0000067910$)	0,08048	0,07864
128	0,04	7,21830($p = 0,0000021250$)	4,91665	4,91619
	0,02	2,30958($p = 0,0000033863$)	1,22969	1,22923
	0,01	0,57727($p = 0,0000041191$)	0,30811	0,30764
	0,005	0,14431($p = 0,0000045231$)	0,07772	0,07726
256	0,04	7,22015($p = 0,0000042499$)	4,91596	4,91584
	0,02	2,30959($p = 0,0000087637$)	1,22900	1,22889
	0,01	0,57732($p = 0,0000156076$)	0,30741	0,30730
	0,005	0,14432($p = 0,0000221949$)	0,07703	0,07691
512	0,04	7,22018($p = 0,0000084998$)	4,91578	4,91575
	0,02	2,30944($p = 0,0000149085$)	1,22883	1,22880
	0,01	0,57734($p = 0,0000340166$)	0,30724	0,30721
	0,005	0,14432($p = 0,0000675303$)	0,07685	0,07682

Son olarak

$$a_s = 100, b_s = 1 \text{ ve } d_s = 0,001 \quad (3.13)$$

seçilerek reaksiyon terimlerinin daha da baskın hale getirilmesi durumunda program $t = 1$ anına kadar çalıştırılmış ve sayısal metodun ürettiği sonuçlar Çizelge 3.5 ve Çizelge 3.6'da verilmiştir. Çizelge 3.5 incelendiğinde, reaksiyonun güçlenmesiyle birlikte, $u(x, t)$ fonksiyonu için oraya çıkan hata normlarında belirgin bir azalma görülürken $v(x, t)$ fonksiyonu için hata normlarında belirgin bir artış gözlenmektedir. $p = 1$ durumunda çözümler (Şahin, 2009) ile verilen referanstaki hata normlarıyla benzerlik gösterirken, p nin değişmesi durumunda hata normlarında özellikle Δt küçüldükçe bir azalma söz konusudur. Burada serbest parametre olan p değeri $u(x, t)$ fonksiyonu için maksimum hata normunu minimize edecek şekilde taratılmıştır. Bu şekilde belirlenen p değeri için, $v(x, t)$ fonksiyonunun maksimum hatasını tespit edilmiştir. Dolayısıyla $u(x, t)$ fonksiyonu için iyileşme olurken $v(x, t)$ fonksiyonu için iyileşme olmamıştır. Bu yüzden $p = 1$ için, p 'nin taratılmasıyla elde edilen maksimum hata normu daha iyi gelmiştir. $p = 1$ olduğu durumda elde edilen maksimum hata normları ile, hem kübik B-spline kolokeyşin metodu (Şahin, 2009) ile hem de CN-MG metodu (Chou vd., 2007) ile elde edilen maksimum hata normları birbirine yakındır.

Çizelge 3.5. $t = 1$ anında reaksiyon baskın olduğu durumda $u(x, t)$ için elde edilen hata normları

N	Δt	$u(x, t)$ (Değişken p)	$u(x, t)$ ($p = 1$)	(Şahin, 2009)
		$L_\infty \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
64	0,04	0,0010536559($p = 0,0000018374$)	4,9194	4,3920
	0,02	0,0002580715($p = 0,0000024011$)	1,2325	1,0991
	0,01	0,0000165424($p = 0,0000066278$)	0,3109	0,2760
	0,005	0,0000021525($p = 0,0000073910$)	0,0805	0,0702
128	0,04	0,0000474913($p = 0,0000036749$)	4,9166	4,3738
	0,02	0,0000345646($p = 0,0000059217$)	1,2297	1,0936
	0,01	0,0000063593($p = 0,0000149232$)	0,3081	0,2737
	0,005	0,0000006355($p = 0,0000275057$)	0,0777	0,0687
256	0,04	0,0000692381($p = 0,0000046301$)	4,9160	4,3651
	0,02	0,0000406607($p = 0,0000123480$)	1,2290	1,0912
	0,01	0,0000137360($p = 0,0000076885$)	0,3074	0,2729
	0,005	0,00000093412($p = 0,0000145609$)	0,0770	0,0683
512	0,04	0,0001067108($p = 0,0000092602$)	4,9158	4,3607
	0,02	0,00000065678($p = 0,0000206924$)	1,2288	1,0901
	0,01	0,00000004428($p = 0,0000815088$)	0,3072	0,2725
	0,005	0,00000004428($p = 0,0000815088$)	0,0769	0,0681

Çizelge 3.6. $t = 1$ anında reaksiyon baskın olduğu durumda $v(x, t)$ için elde edilen hata normları

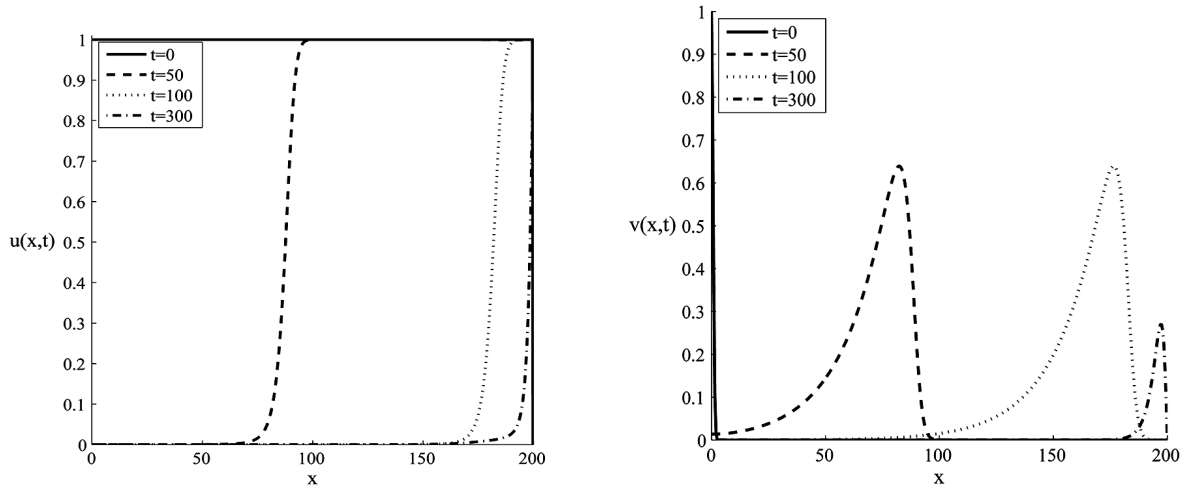
N	Δt	$v(x, t)$ (Değişken p)	$v(x, t)$ ($p = 1$)	(Şahin, 2009) $L_\infty \times 10^3$	(Chou vd., 2007) CN-MG metodu
64	0,04	0,0010432362($p = 0,0000018374$)	4,87022	4,86839	
	0,02	0,0002554908($p = 0,0000024011$)	1,22014	1,21831	
	0,01	0,0000163770($p = 0,0000066278$)	0,30776	0,30594	
	0,005	0,0000021310($p = 0,0000073910$)	0,07968	0,07785	
128	0,04	0,0000468995($p = 0,0000036749$)	4,86748	4,86702	
	0,02	0,0000342190($p = 0,0000059217$)	1,21740	1,21694	
	0,01	0,0000062957($p = 0,0000149232$)	0,30502	0,30457	
	0,005	0,0000006292($p = 0,0000275057$)	0,07694	0,07648	
256	0,04	0,0000686626($p = 0,0000046301$)	4,86680	4,86668	
	0,02	0,0000402541($p = 0,0000123480$)	1,21671	1,21660	
	0,01	0,0000135986($p = 0,0000076885$)	0,30434	0,30423	
	0,005	0,0009247806($p = 0,0000145609$)	0,07626	0,07614	
512	0,04	0,0001057606($p = 0,0000092602$)	4,86663	4,86660	4,87
	0,02	0,0006502113($p = 0,0000206924$)	1,21654	1,21651	1,22
	0,01	0,0000438419($p = 0,0000815088$)	0,30417	0,30414	0,304
	0,005	0,0000438419($p = 0,0000815088$)	0,70760	0,07606	0,0760

Lineer problemin çizelgeleri incelendiğinde, genel olarak p 'nin sifıra yakın değerleri için elde edilen hata normlarının, $p = 1$ durumundakine göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Dolayısıyla önerilen metodun etkili bir metot olduğu gözlemlenmiştir.

3.3.2. İzotermal kimyasal sistem

Bu kısımda (1.81-1.82) ile verilen izotermal kimyasal sisteminin sayısal çözümleri çalışılmıştır. Hesaplamalarda ilerleyen dalga çözümlerinin asimtotik hızları için üç farklı durum dikkate alındı. (Twizell, vd., 1994; Lopez ve Ramos, 1996; Şahin, 2009) referanslarına benzer olarak (1.81-1.82) $\Delta t = 0,1$ zaman adımı ve $N = 400$ bölünme noktası kullanılarak $x \in [0, 200]$ çözüm bölgesi üzerinde $t = 300$ anına kadar hesaplama yapıldı. (1.81-1.82) sistemi $k < 1$ için ilerleyen dalga çözümlerine sahiptir. (Merkin vd., 1989).

Şekil 3.1’de $p = 1$ ve $k = 0,1$ için yani asimtotik yayılma hızının $2(1 - k)^{\frac{1}{2}} = 1,897$ değeri için $t = 0, 50, 100, 300$ zamanlarında oluşan ilerleyen dalga çözümleri gösterilmiştir. Şekil 3.1’den görüldüğü gibi $k = 0,1$ için dalgalar çözüm bölgesi üzerinde asimtotik yayılma hızına ulaşmakta ve sağ sınırdaki sıkışma göstermektedir (Twizel vd., 1994, Şahin, 2009).



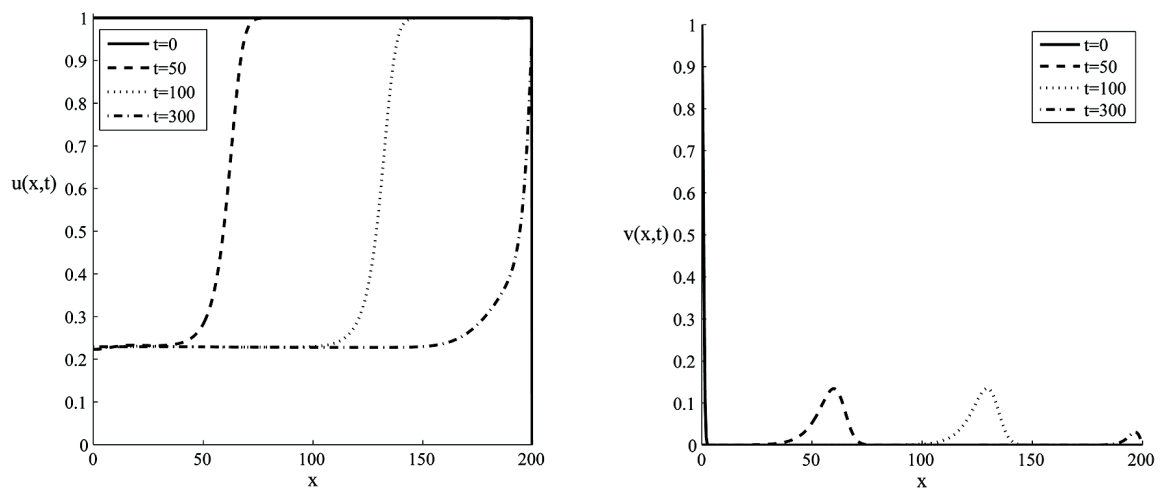
Şekil 3.1. $N = 400$, $k = 0,1$, $p = 1$ için ilerleyen dalga çözümleri

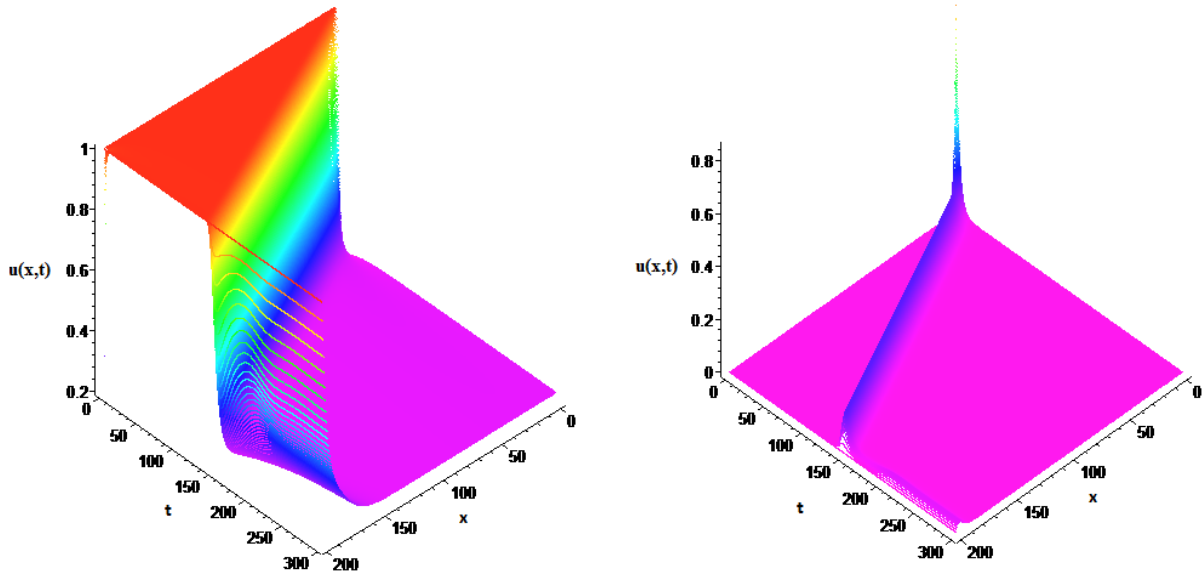
Çizelge 3.7’de $k = 0,1$ durumunda oluşan bağıl hata değerleri farklı adım uzunlukları ve $p = 1$ için verilmiştir. Çizelgeye göre hata normlarının (Şahin, 2009) ile verilen referanstaki kübik B-spline kolokeyşin metodu ile nerdeyse aynı olduğu söylenebilir.

Çizelge 3.7. $p = 1$, $k = 0, 1$, $t = 300$ için hesaplanan bağıl hata değerleri

t	Hata $\times 10^3$			
	$u(x, t)$	$u(x, t)$ (Şahin, 2009)	$v(x, t)$	$v(x, t)$ (Şahin, 2009)
50	4, 85843	4, 91747	15, 6470	15, 6374
100	12, 6826	13, 9958	15, 6310	15, 6281
150	0, 10928	0, 09931	0, 52435	0, 45479
200	0, 02285	0, 02235	0, 00788	0, 00754
250	0, 01327	0, 01311	0, 00228	0, 00223
300	0, 00965	0, 00957	0, 00109	0, 00107

$k = 0, 5$ için dalga hareketinin asimtotik hızı 1,414 tür. k 'nın bu seçimiyle birlikte dalgalardaki sıklaşma hareketinin bir önceki duruma göre daha geç ortaya çıktığı Şekil 3.2'den görülmektedir. $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarının, konum ve zaman ikilisine göre yoğunluk değişimlerinin grafikleri Şekil 3.3 ile verilmiştir. Şekil 3.3 incelendiğinde, $v(x, t)$ 'nin yoğunluğunun başlangıç aşamasında ani bir azalmaya uğradığı ancak daha sonra uzun süre genliğini değiştirmeden ilerleyen dalga hareketi sergilediği görülmektedir. Bu hareket esnasında genlik değeri yaklaşık 0,135 olarak gözlemlenmiştir.

Şekil 3.2. $N = 400$, $k = 0, 5$, $p = 1$ için ilerleyen dalga çözümleri



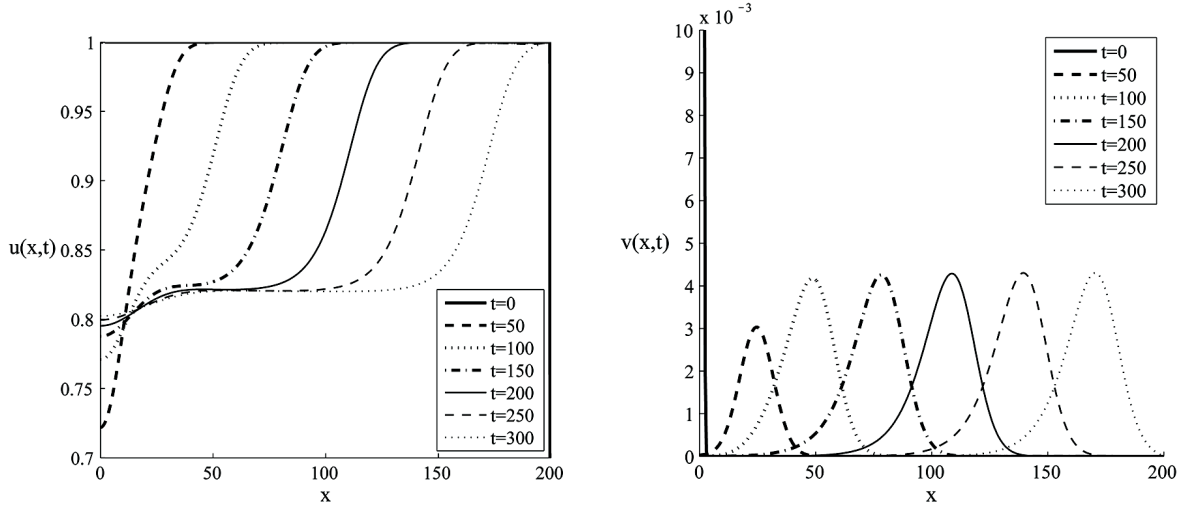
Şekil 3.3. $N = 400$, $k = 0,5$, $p = 1$ için konum ve zamana göre yoğunluk değişimi hareketleri

Çizelge 3.8 de $k = 0,5$ durumunda oluşan bağıl hata değerleri $p = 1$ için verilmiştir. $k = 0,5$ durumunda üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu ile kübik B-spline kolokeyşin metodu hemen hemen aynı sonuçları vermektedir.

Çizelge 3.8. $p = 1$, $k = 0,5$, $t = 300$ için hesaplanan bağıl hata değerleri

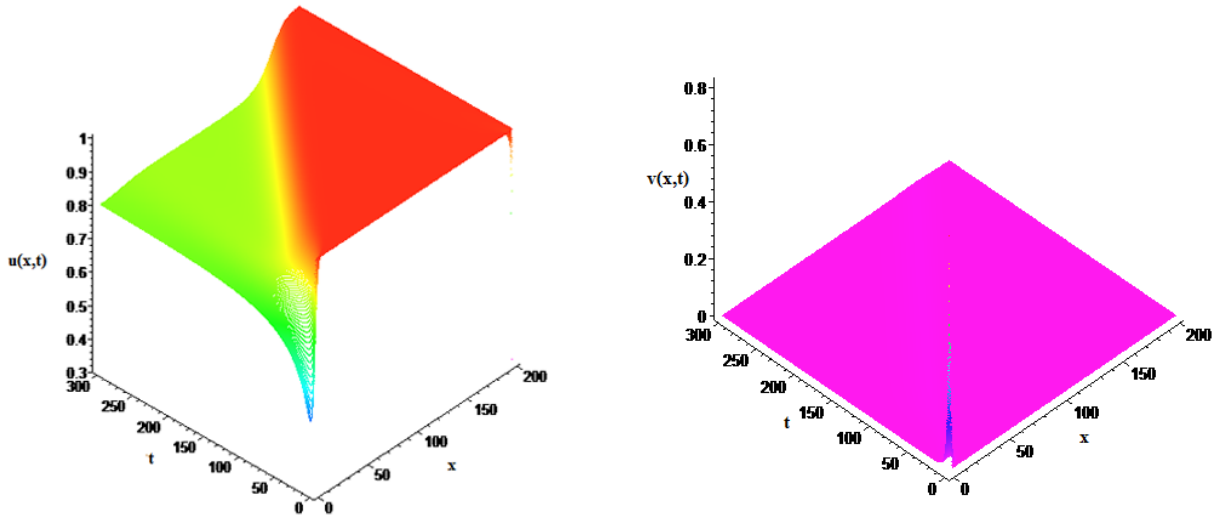
	Hata $\times 10^3$			
t	$u(x,t)$	$u(x,t)$ (Şahin, 2009)	$v(x,t)$	$v(x,t)$ (Şahin, 2009)
50	1,98336	2,01453	16,3273	16,5127
100	2,75354	2,82266	16,3685	16,5506
150	1,70884	0,68232	14,6678	16,2852
200	0,16469	0,16243	2,81401	2,49443
250	0,05321	0,05149	0,01444	0,04910
300	0,03499	0,03421	0,01445	0,01383

Şekil 3.4'de $p = 1$ ve $k = 0,9$ için oluşan ilerleyen dalga çözümleri grafiklerle gösterilmiştir. Şekil 3.4'den görüldüğü gibi dalgalar çözüm bölgesi üzerinde asimptotik hıza ulaşamamakta ve sabit hıza yakın bir hızla ilerlemektedir.



Şekil 3.4. $N = 400$, $k = 0, 9$, $p = 1$ için ilerleyen dalga çözümleri

$u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarının, konum ve zaman ikilisine göre yoğunluk değişimlerinin grafikleri Şekil 3.5’de 3 boyutlu olarak verilmiştir.



Şekil 3.5. $N = 400$, $k = 0, 9$, $p = 1$ için konum ve zamana göre yoğunluk değişimi hareketleri

Çizelge 3.9’da $k = 0, 9$ durumunda oluşan bağıl hata değerleri serbest parametrenin $p = 1$ olduğu durumdaki sonucu verilmiştir. Çizelgeden görüldüğü gibi bağıl hata değerleri

(Şahin, 2009) ile verilen kübik B-spline kolokeyşin metodu ile elde edilen bağıl hatalar ile neredeyse aynıdır.

Çizelge 3.9. $p = 1$, $k = 0, 9$, $t = 300$ için hesaplanan bağıl hata değerleri

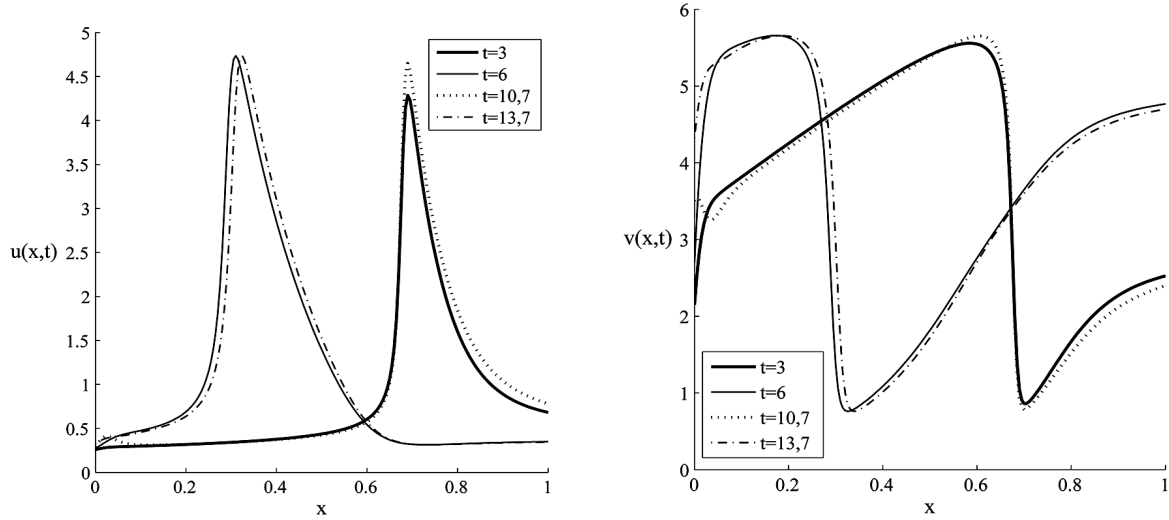
t	Hata $\times 10^3$			
	$u(x, t)$	$u(x, t)$ (Şahin, 2009)	$v(x, t)$	$v(x, t)$ (Şahin, 2009)
50	0,08986	0,09290	4,11288	4,18179
100	0,12108	0,12406	3,74987	3,87044
150	0,01270	0,13006	3,89565	3,99310
200	0,13245	0,13562	3,91036	4,00789
250	0,13763	0,14105	3,91734	4,01634
300	0,14263	0,14654	3,91607	4,00442

3.3.3. Brusselator modeli

(1.89-1.90) ile verilen Brusselator modeli için bu kısımda (Zegeling ve Kok, 2004; Şahin, 2009) referansında yer alan test örneği dikkate alınmıştır. Sayısal hesaplamalarda (1.91-1.92) başlangıç şartı seçilerek (1.93-1.96) sınır şartları altında sistemin sayısal çözümleri araştırılmıştır. (1.89-1.90) sisteminde yer alan denklem katsayıları

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}, \quad A = 1, \quad B = 3, 4$$

olarak alınarak ve $x \in [0, 1]$ bölgesi üzerinde $t \in [0, 15]$ zaman aralığındaki sayısal çözümler elde edilmiştir. Konum ayrıştırması için $N = 200$ bölünme noktası ve zaman ayrıştırması için de $\Delta t = 0,01$ zaman adımı kullanılmıştır. Bu seçimler altında elde edilen çözümler Şekil 3.6 ile verilmiştir. Buradaki dalga hareketi incelendiğinde hem $u(x, t)$ hem de $v(x, t)$ 'nin bu şartlar altında periyodik dalga hareketi ortaya koydukları görülmektedir. Periyodik hareket için yoğunluk değerleri Çizelge 3.10 ile verilmiştir. Şekil 3.6 incelendiğinde, bu hareketin yaklaşık periyodu 7,7 olarak gözlemlenmektedir.

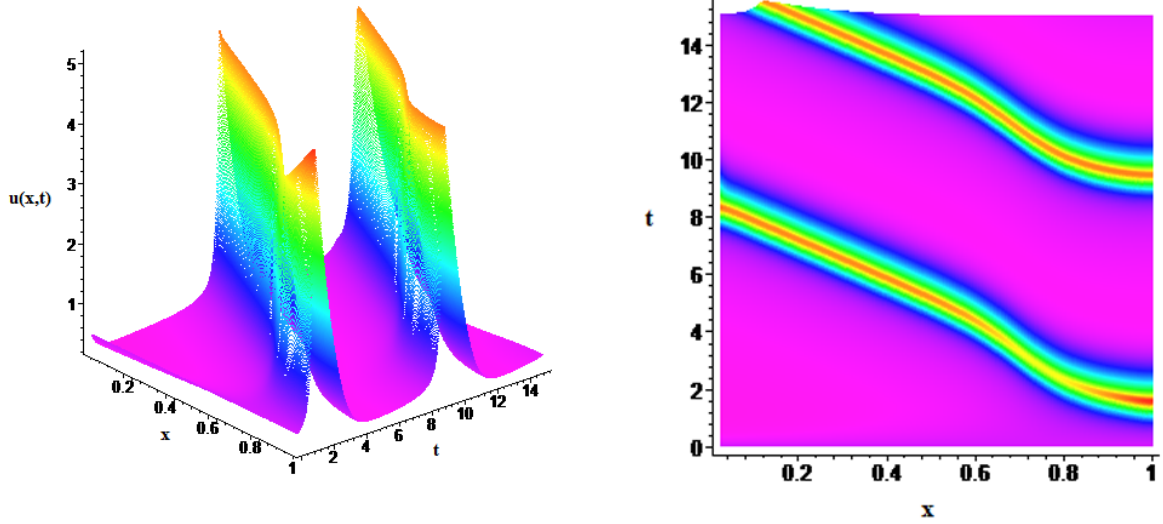


Şekil 3.6. $N = 200$, $\Delta t = 0,01$, $p = 1$ değerleri için $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarının periyodik dalga hareketleri

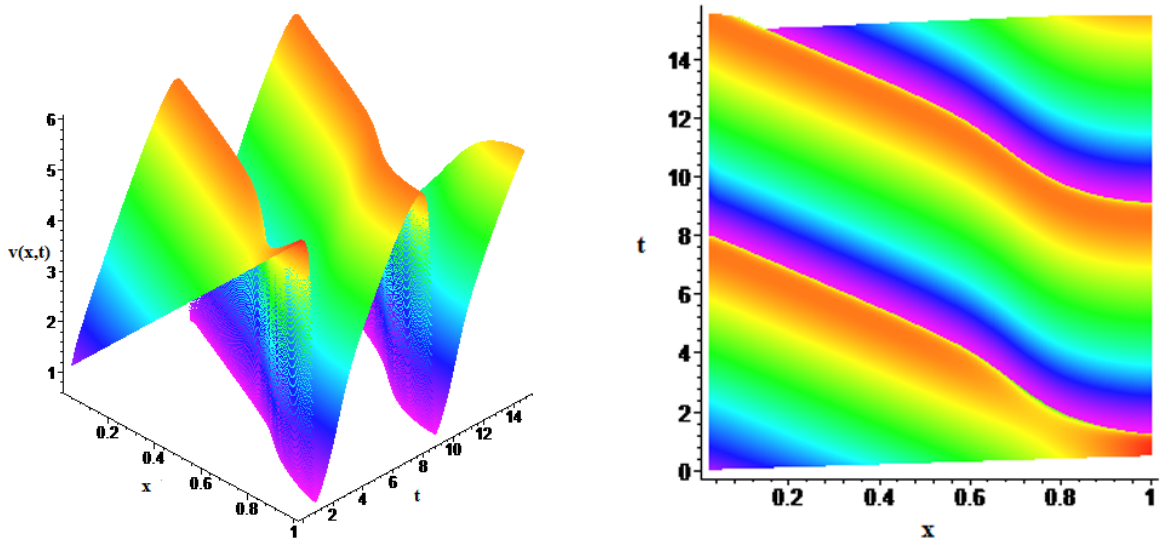
Çizelge 3.10. Periyodik hareket için yoğunluk değerleri

Yoğunluk	t	$x = 0,0$	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,6$	$x = 0,8$	$x = 1,0$
$u(x, t)$	3	0,258836	0,317752	0,377326	0,604999	1,600109	0,681692
	10,7	0,294583	0,319376	0,371401	0,575716	1,840028	0,779480
	6	0,271619	0,689332	2,849975	0,541667	0,324210	0,349588
	13,7	0,329597	0,637313	3,100321	0,571856	0,320928	0,344920
Yoğunluk	t	$x = 0,0$	$x = 0,2$	$x = 0,4$	$x = 0,6$	$x = 0,8$	$x = 1,0$
$v(x, t)$	3	2,146937	4,251208	5,067053	5,547135	1,669874	2,525291
	10,7	3,510009	4,188208	5,017658	5,649088	1,521649	2,398071
	6	2,695112	5,630512	1,087516	2,758365	4,314077	4,766596
	13,7	4,321706	5,650026	1,012844	2,706329	4,230775	4,700269

Sergilenen bu periyodik hareket, fonksiyonların yoğunluk değişimlerini gösteren Şekil 3.7 ve Şekil 3.8'de görülmektedir. Her iki şekilde de, yoğunluk değişimleri için $N = 200$ bölünme noktası kullanılmış ve desenlerin görülmesi için $x - t$ düzlemi üzerinde izdüşüm alınmıştır.



Şekil 3.7. Brusselator modelinde konum ve zamana göre $u(x, t)$ 'nin yoğunluk değişimi hareketleri



Şekil 3.8. Brusselator modelinde konum ve zamana göre $v(x, t)$ 'nin yoğunluk değişimi hareketleri

3.3.4. Schnakenberg modeli

(1.97-1.98) ile verilen Schnakenberg modeli için sistemin parametreleri

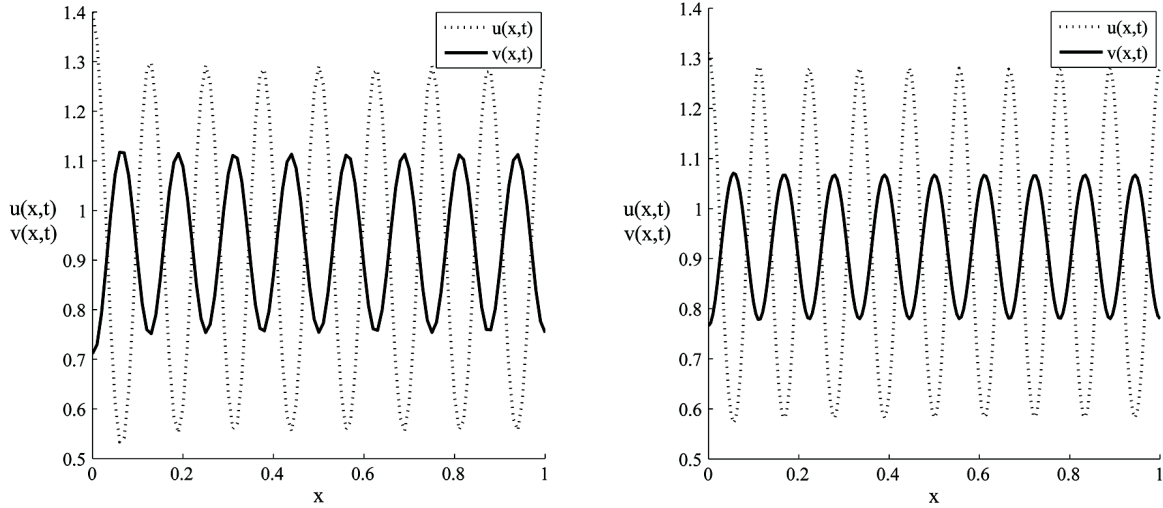
$$a_s = 0,126779, \quad b_s = 0,792366, \quad d_s = 10 \text{ ve } \gamma = 10^4$$

olarak seçilmiştir. Schnakenberg modelinin çözümleri için, Şahin, (2009) referansında yer alan test örneği çalışılmıştır. Sayısal hesaplamalarda (1.99-1.100) başlangıç şartı seçilerek homojen Neumann sınır şartları altında sistemin çözümleri araştırıldı. Sayısal çözümlerden elde edilen bağıl hatalar $N = 200$ ve $t = 2,5$ için Çizelge 3.11 ile verilmiştir. Çizelge 3.11'den de anlaşıldığı üzere, üstel kübik B-spline kolokeyşim metodu ile elde edilen bağıl hatalar, (Şahin, 2009) ile verilen referanstaki kübik B-spline kolokeyşim metoduna göre çok daha iyidir. Özellikle $\Delta t = 1,20 \times 10^{-4}$ ve $\Delta t = 1,25 \times 10^{-4}$ olarak seçildiğinde, önerilen metodun, kübik B-spline kolokeyşim metodunun tersine hala iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir. Ayrıca Δt 'deki küçük değişikliklerin, bağıl hatalarda çok fazla değişime sebep olmadığı görülmüştür.

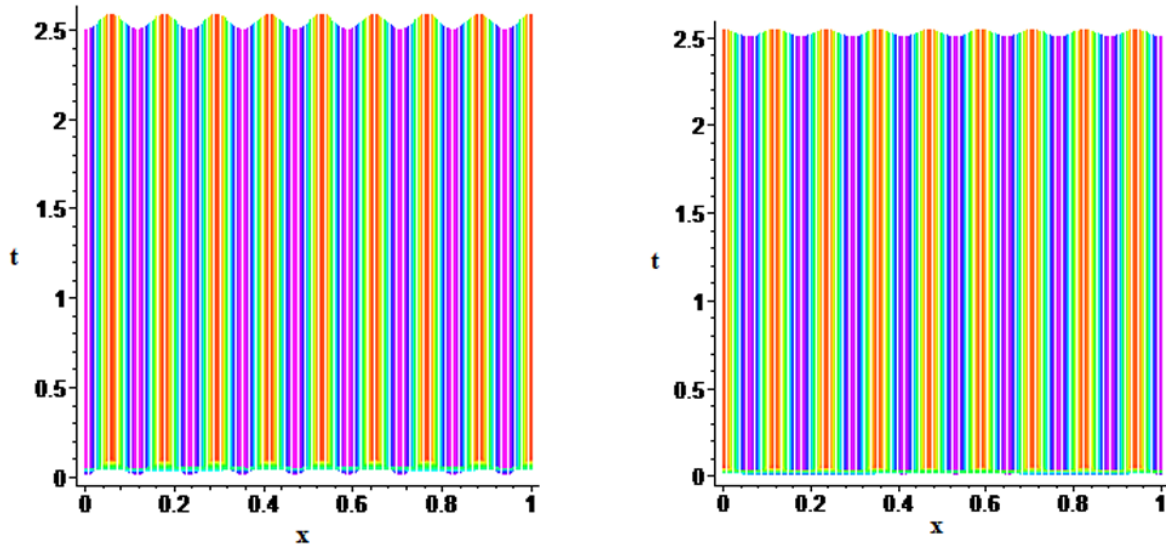
Çizelge 3.11. $N = 200$ ve $t = 2,5$ için farklı Δt zaman adımlarındaki periyodik hareket için yoğunluk değerleri

Δt	$u(x, t)$	$u(x, t)$ (Şahin, 2009)	$v(x, t)$	$v(x, t)$ (Şahin, 2009)
5×10^{-6}	$2,284 \times 10^{-14}$	0	$2,881 \times 10^{-14}$	$2,347 \times 10^{-17}$
5×10^{-5}	$1,337 \times 10^{-13}$	$9,487 \times 10^{-17}$	$3,267 \times 10^{-13}$	$1,967 \times 10^{-16}$
1×10^{-4}	$4,265 \times 10^{-13}$	$2,383 \times 10^{-16}$	$5,455 \times 10^{-13}$	$6,016 \times 10^{-16}$
$1,10 \times 10^{-4}$	$2,465 \times 10^{-13}$	$2,639 \times 10^{-16}$	$6,453 \times 10^{-13}$	$6,599 \times 10^{-16}$
$1,20 \times 10^{-4}$	$4,843 \times 10^{-13}$	0,019850	$9,885 \times 10^{-13}$	0,019666
$1,25 \times 10^{-4}$	$4,806 \times 10^{-13}$	0,220017	$6,865 \times 10^{-13}$	0,220339

Çözümlerin ürettiği salınım hareketleri Şekil 3.9'da gözlemlenebilir. $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ için sırası ile $N = 100$ ve $N = 200$ alınarak elde edilen çözümler birlikte sunuldu. Şekil 3.9 incelendiğinde (Şahin, 2009) referansı ile verilen kübik B-spline kolokeyşim metoduna benzer olarak burada da $N = 100$ için çözümlerin $[0, 1]$ aralığında 8 salınım yaptıkları görülmektedir. Oysa $N = 200$ için salınım sayısı 9 olmaktadır. Şekil 3.10'da ise $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$, $N = 200$ olduğunda $t = 2,5$ anındaki konum ve zamana göre $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ 'nin yoğunluk değişimi hareketleri resmedilmiştir.



Şekil 3.9. Sırasıyla $N = 100$ ve $N = 200$ için $t = 2, 5$ anındaki salınım hareketleri



Şekil 3.10. Schnakenberg modelinde konum ve zamana göre sırasıyla $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ 'nin yoğunluk değişimi hareketleri

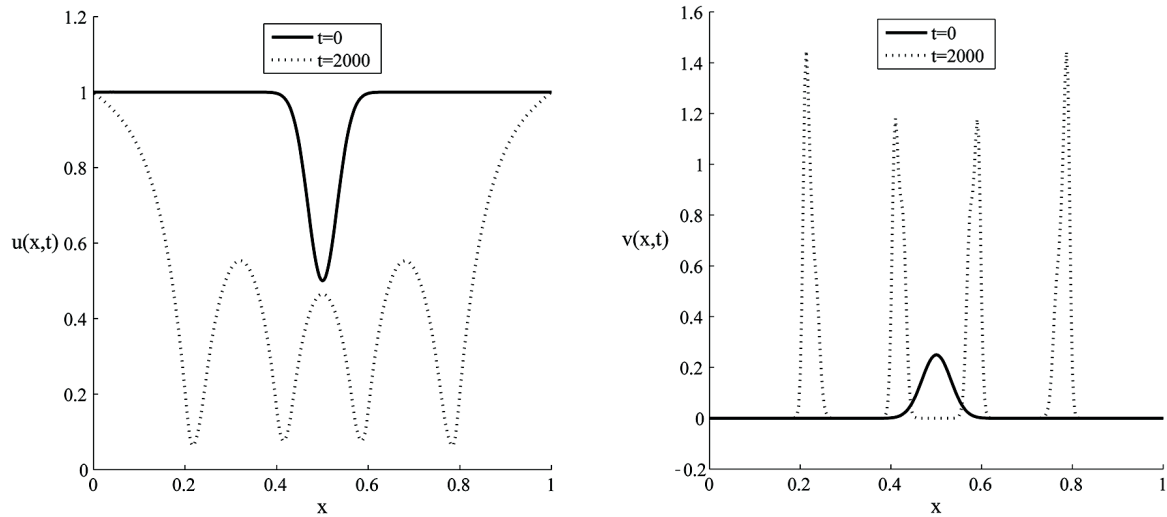
3.3.5. Gray-Scott modeli

Bu kısımda (1.101-1.102) sisteminin sayısal çözümleri için parametreler

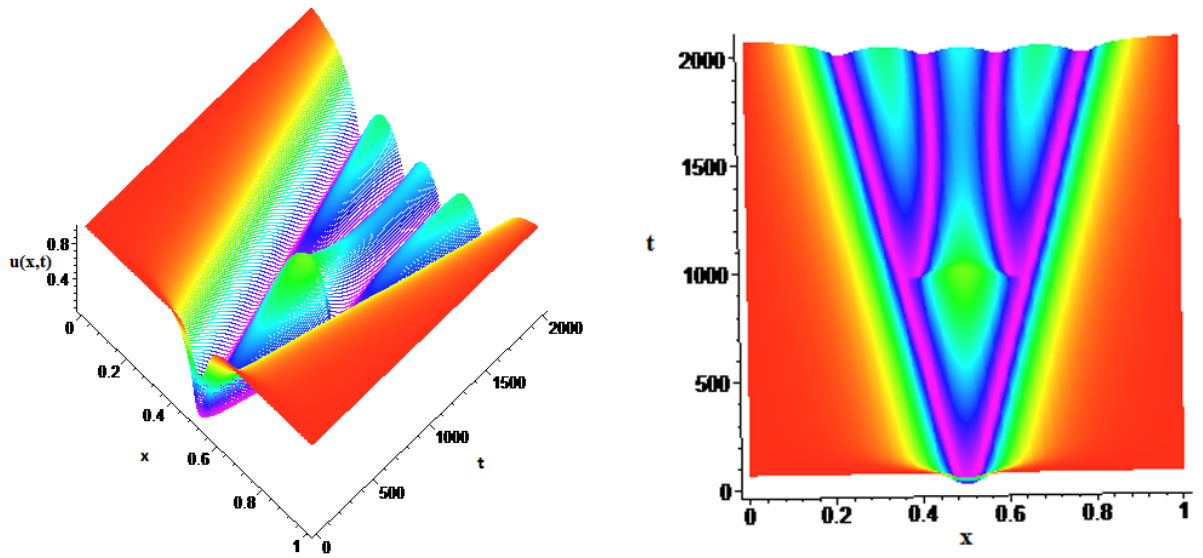
$$\varepsilon_1 = 10^{-4}, \varepsilon_2 = 10^{-6}, f = 0,024, k = 0,06$$

şeklinde seçilerek, Gray-Scott modeli üzerinde kendini tekrarlayan benek desenleri ile test edilmiştir. $[0, 1]$ bölgesi üzerinde çözümler araştırılırken (Şahin, 2009) çalışmasına benzer

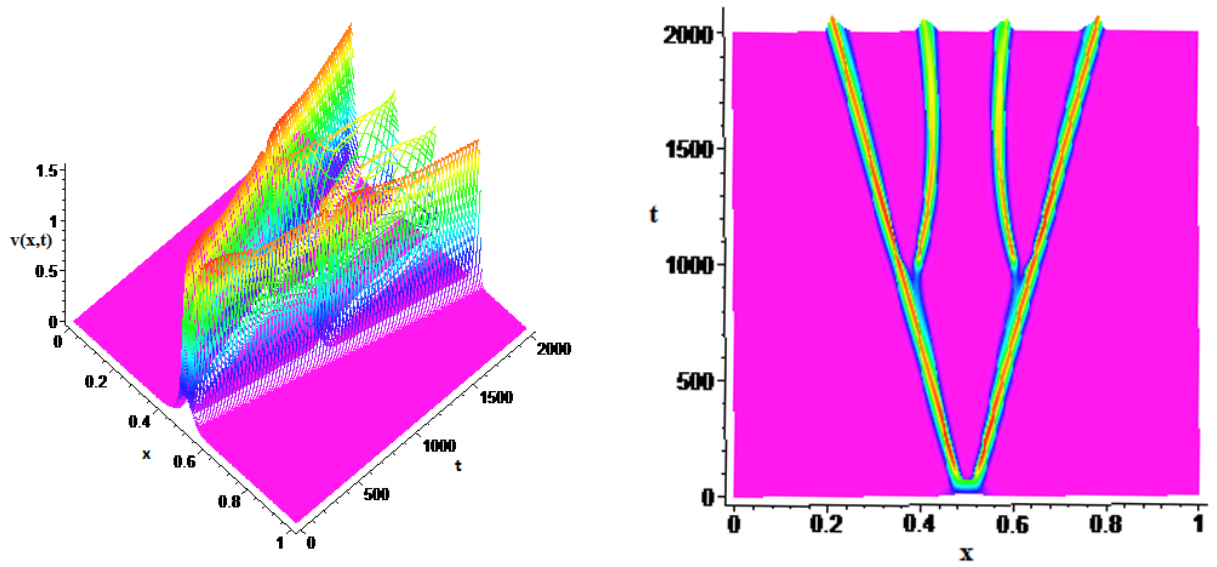
olarak konum ayrıştırması yapılırken $N = 300$ bölünme nokta sayısı, zaman ayrıştırması yapılırken de $\Delta t = 0,1$ zaman adımı kullanılmıştır. Sayısal hesaplamalar için program (1.105-1.108) Dirichlet sınır şartları altında $t = 2000$ anına kadar çalıştırılmış ve böylece kendini tekrarlayan benek desenleri elde edilmiştir. $t = 0$ ve $t = 2000$ anındaki çözüm profilleri Şekil 3.11 ile verilmiştir. Seçilen bu şartlar altında, $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarının başlangıç profillerinin önce ikiye bölündüğü daha sonra da her bir dalganın yine ikiye bölünerek dört dalga oluşturdukları görülmektedir. $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ 'nin yoğunluk değişimini ve zaman içerisinde oluşturdukları konumsal desenlerini daha iyi görebilmek için de Şekil 3.12 ve Şekil 3.13 çizilmiştir. İzdüşüm grafiklerine bakıldığında iki fonksiyonun da benzer desenleri oluşturdukları görülmektedir.



Şekil 3.11. Gray-Scott modeli için $t = 0$ ve $t = 2000$ anındaki çözüm profilleri



Şekil 3.12. Gray-Scott modelinde konum ve zamana göre $u(x, t)$ 'nin yoğunluk değişimi



Şekil 3.13. Gray-Scott modelinde konum ve zamana göre $v(x, t)$ 'nin yoğunluk değişimi

4. İKİLİ BURGERS DENKLEMİNİN ÜSTEL KÜBİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN ÇÖZÜMLERİNİN ÜRETİLMESİ

Bu bölümde ikili Burgers denkleminin sayısal çözümleri üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak araştırılmış, bulunan çözümlerin doğruluğu, üç test problemi için L_∞ hata normları hesaplanarak kontrol edilmiş ve diğer çalışmalarla kıyaslanmıştır. Ayrıca metodun, konuma göre noktasal yakınsaklık oranı incelenmiştir.

4.1. İkili Burgers Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Üstel Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda, birinci bölümde verilen üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu, ikili Burgers denkleminin sayısal çözümünü araştırmak için uygulanacaktır. Denklem sistemindeki $u_m, v_m, u'_m, v'_m, u''_m, v''_m$, yerine (3.1-3.6) ile verilen üstel kübik B-spline yaklaşımları sırası ile zamana bağlı δ_m ve ϕ_m parametreleri cinsinden yazılır ve Δt zaman adım uzunluğu olmak üzere (1.13), (1.16), (1.18) ve (1.19), ile verilen Crank-Nicolson yaklaşımları, (1.109-1.110) ile verilen ikili Burgers denkleminin uygulanırsa

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \frac{u_{xx}^{n+1} + u_{xx}^n}{2} + k_1 \frac{(uu_x)^{n+1} + (uu_x)^n}{2} + k_2 \frac{(uv)_x^{n+1} + (uv)_x^n}{2} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} - \frac{v_{xx}^{n+1} + v_{xx}^n}{2} + k_1 \frac{(vv_x)^{n+1} + (vv_x)^n}{2} + k_3 \frac{(uv)_x^{n+1} + (uv)_x^n}{2} = 0$$

sistemi elde edilir. Burada lineer olmayan $(uu_x)^{n+1}$, $(uv)_x^{n+1}$ ve $(vv_x)^{n+1}$ terimlerine Taylor metodu yardımıyla lineerleştirme uygulanırsa

$$\begin{aligned} (uu_x)^{n+1} &\simeq u^{n+1}u_x^n + u^n u_x^{n+1} - u^n u_x^n, \\ (uv)_x^{n+1} &= (u_x v)^{n+1} + (uv_x)^{n+1} \\ &\simeq u_x^{n+1}v^n + u_x^n v^{n+1} - u_x^n v^n + u^{n+1}v_x^n + u^n v_x^{n+1} - u^n v_x^n, \\ (vv_x)^{n+1} &\simeq v^{n+1}v_x^n + v^n v_x^{n+1} - v^n v_x^n \end{aligned}$$

ve (3.1-3.6) eşitlikleri (4.1) denklem sistemine yazılırsa

$$\begin{aligned} K_1 &= \alpha_1 \delta_{m-1}^n + \delta_m^n + \alpha_1 \delta_{m+1}^n & L_1 &= \alpha_1 \phi_{m-1}^n + \phi_m^n + \alpha_1 \phi_{m+1}^n \\ K_2 &= \beta_1 \delta_{m-1}^n - \beta_1 \delta_{m+1}^n & L_2 &= \beta_1 \phi_{m-1}^n - \beta_1 \phi_{m+1}^n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{s - ph}{2(phc - s)}, & \beta_1 &= \frac{p(1 - c)}{2(phc - s)}, \\ \gamma_1 &= \frac{p^2 s}{2(phc - s)}, & \gamma_2 &= -\frac{p^2 s}{phc - s} \end{aligned}$$

iken

$$\nu_{m1} = \left(\frac{2}{\Delta t} + k_1 K_2 + k_2 L_2 \right) \alpha_1 + (k_1 K_1 + k_2 L_1) \beta_1 - \gamma_1,$$

$$\nu_{m2} = (k_1 K_2) \alpha_1 + (k_2 K_1) \beta_1,$$

$$\nu_{m3} = \left(\frac{2}{\Delta t} + k_1 K_2 + k_2 L_2 \right) - \gamma_2,$$

$$\nu_{m4} = (k_1 K_2),$$

$$\nu_{m5} = \left(\frac{2}{\Delta t} + k_1 K_2 + k_2 L_2 \right) \alpha_1 - (k_1 K_1 + k_2 L_1) \beta_1 - \gamma_1,$$

$$\nu_{m6} = (k_1 K_2) \alpha_1 - (k_2 K_1) \beta_1,$$

$$\nu_{m7} = \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 + \gamma_1,$$

$$\nu_{m8} = \frac{2}{\Delta t} + \gamma_2,$$

$$\nu_{m9} = (k_3 L_2) \alpha_1 + (k_3 L_1) \beta_1,$$

$$\nu_{m10} = \left(\frac{2}{\Delta t} + k_1 L_2 + k_3 K_2 \right) \alpha_1 + (k_1 L_1 + k_3 K_1) \beta_1 - \gamma_1,$$

$$\nu_{m11} = (k_3 L_2),$$

$$\nu_{m12} = \left(\frac{2}{\Delta t} + k_1 L_2 + k_3 K_2 \right) - \gamma_2,$$

$$\nu_{m13} = (k_3 L_2) \alpha_1 - (k_3 L_1) \beta_1,$$

$$\nu_{m14} = \left(\frac{2}{\Delta t} + k_1 L_2 + k_3 K_2 \right) \alpha_1 - (k_1 L_1 + k_3 K_1) \beta_1 - \gamma_1,$$

olmak üzere

$$\nu_{m1} \delta_{m-1}^{n+1} + \nu_{m2} \phi_{m-1}^{n+1} + \nu_{m3} \delta_m^{n+1} + \nu_{m4} \phi_m^{n+1} + \nu_{m5} \delta_{m+1}^{n+1} + \nu_{m6} \phi_{m+1}^{n+1} = \nu_{m7} \delta_{m-1}^n + \nu_{m8} \delta_m^n + \nu_{m7} \delta_{m+1}^n \quad (4.2)$$

ve

$$\nu_{m9} \delta_{m-1}^{n+1} + \nu_{m10} \phi_{m-1}^{n+1} + \nu_{m11} \delta_m^{n+1} + \nu_{m12} \phi_m^{n+1} + \nu_{m13} \delta_{m+1}^{n+1} + \nu_{m14} \phi_{m+1}^{n+1} = \nu_{m7} \phi_{m-1}^n + \nu_{m8} \phi_m^n + \nu_{m7} \phi_{m+1}^n \quad (4.3)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemine karşılık gelen matris gösterimi

4.2. Başlangıç Durumu

İkili Burgers denklem sisteminin üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (4.4) denklem sisteminin çözülebilmesi için,

$$(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0) \text{ ve } (\phi_{-1}^0, \phi_0^0, \dots, \phi_N^0, \phi_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörlerinin bulunması gereklidir. Bilinmeyenler vektörlerinin bulunması işlemi, üçüncü bölümde üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu ile reaksiyon-difüzyon denklem sisteminin sayısal çözümü araştırılırken verilmişti. Üçüncü bölümde yapılan işlemlere göre tek fark, reaksiyon-difüzyon denklem sisteminin başlangıç ve sınır şartları yerine ikili Burgers denkleminin başlangıç ve sınır şartlarının kullanılmasıdır.

4.3. Test Problemleri

4.3.1. Problem 1

Bu test problemi için tüm hesaplamalar $-\pi \leq x \leq \pi$ aralığında yapıldı. Çizelge 4.1'de sayısal çözümlerin $\Delta t = 0,001$ iken $N = 200$ ve $N = 400$ için farklı p parametrelerinde aldığı değerler verilmiştir. Görüldüğü gibi genel olarak adım uzunluğu azaldıkça hata normlarının değerleri de azalmaktadır. Bunun yanında $N = 200$ iken $p = 0,0000356451$ ve $N = 400$ iken $p = 0,0001268190$ seçilmesi halinde, $p = 1$ durumuna göre hata normlarının değerlerinde büyük miktarda azalma görülmektedir. Elde edilen sonuçlar genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokeyşin metodu ile benzerlik göstermektedir. Diğer yandan $N = 200$ ve $\Delta t = 0,01$ iken $p = 0,0000316666$ seçildiğinde Kutluay ve Uçar'ın (2013) Galerkin metodu ile elde ettiği maksimum hata normundan daha küçük değerler gözlemlenmiştir. Aynı durum $N = 100$ ve $\Delta t = 0,001$ seçildiğinde de geçerlidir. Buna göre üstel kübik B-spline kolokeyşin metodunda hata normlarının hesabında p 'nin taratılmasıyla, Galerkin metoduna göre daha doğru sonuçlar verdiği söylenebilir. Burada $u(x, t) = v(x, t)$ olduğu için ikisi de aynı çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. $t = 0, 1$ zamanında, farklı N ve Δt için sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

	$N = 200$ $\Delta t = 0,001$	$N = 400$ $\Delta t = 0,001$	$N = 200$ $\Delta t = 0,01$	$N = 100$ $\Delta t = 0,001$
$p = 1$	$0,01489 \times 10^{-5}$	$0,00372 \times 10^{-5}$	$1,56385 \times 10^{-5}$	$5,95454 \times 10^{-5}$
Değişken p	$5,09608 \times 10^{-5}$	$8,40299 \times 10^{-5}$	$3,16666 \times 10^{-5}$	$1,03787 \times 10^{-5}$
	$8,0875 \times 10^{-11}$	$4,7839 \times 10^{-11}$	$2,3670 \times 10^{-11}$	$3,3570 \times 10^{-11}$
$\lambda = 0$	$0,74326 \times 10^{-5}$	$0,18534 \times 10^{-5}$		
(Aksoy, 2012)				
Değişken λ	$-1,640 \times 10^{-4}$	$-4,087 \times 10^{-5}$		
(Aksoy, 2012)	$0,00079 \times 10^{-5}$	$0,00006 \times 10^{-5}$		
(Kutluay ve Uçar, 2013)			$0,08634 \times 10^{-5}$	$0,39846 \times 10^{-5}$

Çizelge 4.2'de farklı zaman adımları için $t = 1$ zamanındaki hata normlarının değerleri verilmiştir. Çizelge 4.2'den de görüldüğü gibi $p = 0,0001680387$ ve $p = 0,00021092$ olarak alındığında $p = 1$ durumuna göre hata normlarının değerlerinde büyük azalmalar meydana gelmektedir. Çizelge 4.3'de farklı zamanlardaki sayısal çözümleri $\Delta t = 0,01$, $N = 50$ parametre seçimleri altında diğer çalışmalarla kıyaslanmıştır. Çizelgeye bakıldığında p parametresinin değiştirildiği durumda, diğer sonuçlardan daha etkili olduğu söylenebilir. Ayrıca $\Delta t = 0,01$ ve $\Delta t = 0,0001$ seçildiği durumda, farklı adım uzunlukları için maksimum hatayı minimum yapacak şekilde p değeri taratılmış ve buna göre belirlenen p değeri için yakınsaklık oranları Çizelge 4.4 ile gösterilmiştir. Yakınsaklık oranlarının daima 2 civarında olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.2. $N = 400$, $t = 1$ seçildiğinde farklı zaman adımı uzunlukları için sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

	$p = 1$	Değişken p
$\Delta t = 0,01$	$1,8194 \times 10^{-5}$	$0,00132 \times 10^{-5}$
		$(p = 1,680387 \times 10^{-4})$
$\Delta t = 0,001$	$1,5159 \times 10^{-5}$	$0,00017 \times 10^{-5}$
		$(p = 2,1092) \times 10^{-4}$
	$\lambda = 0$, (Aksoy, 2012)	Değişken λ , (Aksoy, 2012)
$\Delta t = 0,01$	$1,08691 \times 10^{-5}$	$0,00131 \times 10^{-5}$
		$(\lambda = -5,896 \times 10^{-5})$
$\Delta t = 0,001$	$1,10393 \times 10^{-5}$	$0,00036 \times 10^{-5}$
		$(\lambda = -5,992 \times 10^{-5})$

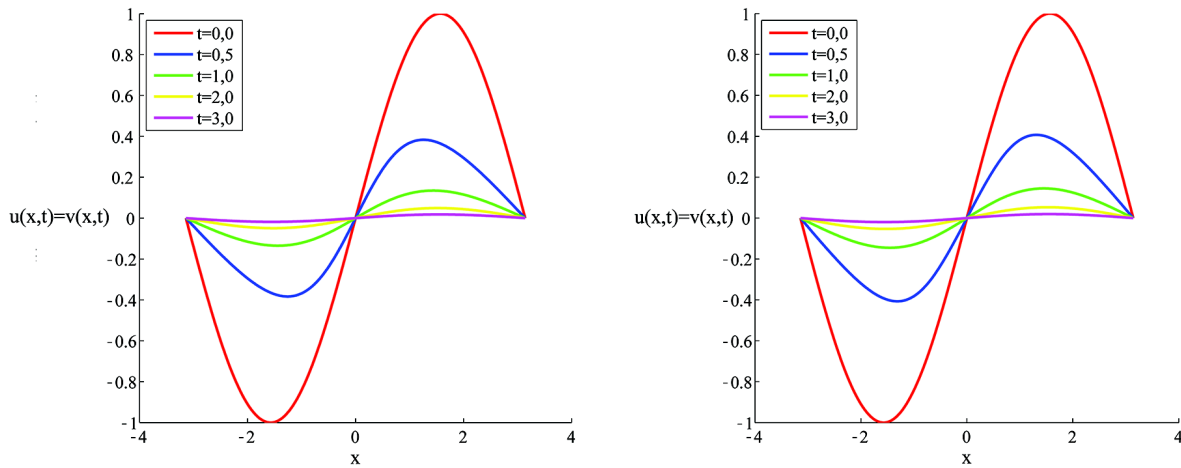
Çizelge 4.3. $\Delta t = 0,01$, $N = 50$, $u(x, t) = v(x, t)$ seçildiğinde farklı zamanlardaki sayısal çözümlerin karşılaştırılması.

	$t = 0,5$	$t = 1,0$	$t = 2,0$	$t = 3,0$
$p = 1$	$7,9881 \times 10^{-4}$	$9,6837 \times 10^{-4}$	$7,1154 \times 10^{-4}$	$3,9213 \times 10^{-4}$
$p = 0,00000314$	$6,3483 \times 10^{-6}$	$7,7011 \times 10^{-6}$	$5,6661 \times 10^{-6}$	$3,1266 \times 10^{-6}$
(Mittal ve Jiwari 2012)	$1,5168 \times 10^{-4}$	$1,8397 \times 10^{-4}$	$1,3525 \times 10^{-4}$	$7,4601 \times 10^{-4}$
(Kutluay ve Uçar, 2013)	$2,2662 \times 10^{-5}$	$1,4617 \times 10^{-5}$	$0,73805 \times 10^{-5}$	$0,4027 \times 10^{-5}$
(Mittal ve Tripathi 2014)	$1,1030 \times 10^{-4}$	$1,3368 \times 10^{-4}$	$9,8182 \times 10^{-5}$	$1,0298 \times 10^{-5}$

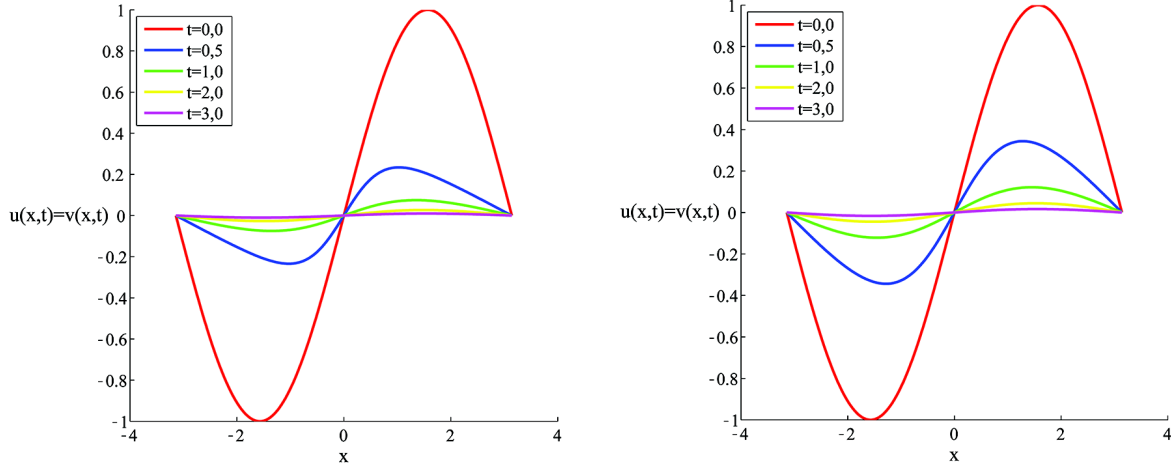
Çizelge 4.4. $\Delta t = 0,01$ ve $\Delta t = 0,0001$ seçildiği durumda noktasal yakınsaklık oranları

$\Delta t = 0,01$	$p = 1$	mertebe	$\Delta t = 0,0001$	$p = 1$	mertebe
$N = 50$	$3,9213 \times 10^{-4}$		$N = 50$	$3,9213 \times 10^{-4}$	
$N = 100$	$9,9430 \times 10^{-5}$	1,9773	$N = 100$	$9,9430 \times 10^{-5}$	1,9909
$N = 150$	$4,4895 \times 10^{-5}$	1,9649	$N = 150$	$4,4895 \times 10^{-5}$	2,0032
$N = 200$	$2,5808 \times 10^{-5}$	1,9192	$N = 200$	$2,5808 \times 10^{-5}$	1,9931
$N = 250$	$1,6965 \times 10^{-5}$	1,8734	$N = 250$	$1,6965 \times 10^{-5}$	1,9929

Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de çeşitli farklı t zamanlarındaki sayısal çözümler k_1, k_2, k_3 parametrelerinin farklı kombinasyonları için gösterilmiştir. Grafikten de görüldüğü gibi üstel kübik kolokeyşin metodu problemin fiziksel karakteristiğini korumaktadır. Grafikler (Mittal ve Arora, 2011) referanslı çalışma ile uyumludur. Problemin başlangıç ve sınır şartları simetrik olduğundan $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ için elde edilen sayısal çözümler aynıdır. Şekil 4.1 de sabit $k_1 = -2, k_2 = 1$ parametreleri için $k_3 = -8$ ve $k_3 = -4$ seçildiği, Şekil 4.2 de ise sabit $k_2 = 1, k_3 = 1$ parametreleri için $k_1 = -8$ ve $k_2 = -4$ seçildiği durumdaki grafikler gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Sabit $k_1 = -2, k_2 = 1$ parametreleri için sırasıyla $k_3 = -8$ ve $k_3 = -4$ iken farklı zamanlardaki sayısal çözümler



Şekil 4.2. Sabit $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ parametreleri için sırasıyla $k_1 = -8$ ve $k_1 = -4$ iken farklı zamanlardaki sayısal çözümler

4.3.2. Problem 2

Çizelge 4.5'de $u(x, t)$ için sayısal çözümlerin ve Çizelge 4.6'da ise $v(x, t)$ için sayısal çözümlerin $N = 10$ ve $N = 100$, $p = 1$ için aldığı değerler verilmiştir. Serbest parametreye olan p değeri değiştikçe hata normlarında belirgin bir azalma gözlemlenmemiştir. Bu yüzden Çizelge 4.6'da p 'nin sadece bire eşit olduğu durumdaki hata normları verilmiştir. Ayrıca adım uzunluğu azaldıkça hata normlarının değerlerinde değişiklik olmamaktadır.

Çizelge 4.5 $\Delta t = 0,001$, $k_2 = 1$ ve $k_3 = 0,3$, $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere, $t = 1$ zamanında farklı adım uzunluklarındaki $u(x, t)$ fonksiyonu için maksimum hatalar

	$p = 1$	(Aksoy, 2012) $\lambda = 0$	(Aksoy, 2012) değişken λ
$N = 10$	$3,7323 \times 10^{-6}$	$3,73505 \times 10^{-5}$	$0,00077 \times 10^{-5} (\lambda = 6 \times 10^{-5})$
$N = 100$	$3,7350 \times 10^{-6}$	$3,73503 \times 10^{-5}$	$0,00078 \times 10^{-5} (\lambda = -4,087 \times 10^{-5})$

Çizelge 4.6 $\Delta t = 0,001$, $k_2 = 1$ ve $k_3 = 0,3$, $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere, $t = 1$ zamanında farklı adım uzunluklarındaki $v(x, t)$ fonksiyonu için maksimum hatalar

	$p = 1$	(Aksoy, 2012) $\lambda = 0$	(Aksoy, 2012) değişken λ
$N = 10$	$1,2569 \times 10^{-6}$	$1,29030 \times 10^{-5}$	$0,00079 \times 10^{-5} (\lambda = -6 \times 10^{-5})$
$N = 100$	$1,2871 \times 10^{-6}$	$1,29038 \times 10^{-5}$	$0,00079 \times 10^{-5} (\lambda = -4,087 \times 10^{-4})$

Çizelge 4.7’de $u(x, t)$ için sayısal çözümlerin ve Çizelge 4.8’de $v(x, t)$ için sayısal çözümlerin $N = 21$ nokta sayısı ve $p = 1$ seçimleri için aldığı değerler verilmiştir. Mittal ve Jiwari, (2012) ve Mittal ve Tripathi (2014) çalışmaları ile kıyaslandığında, hata normunun daha küçük olduğu gözlemlenmektedir.

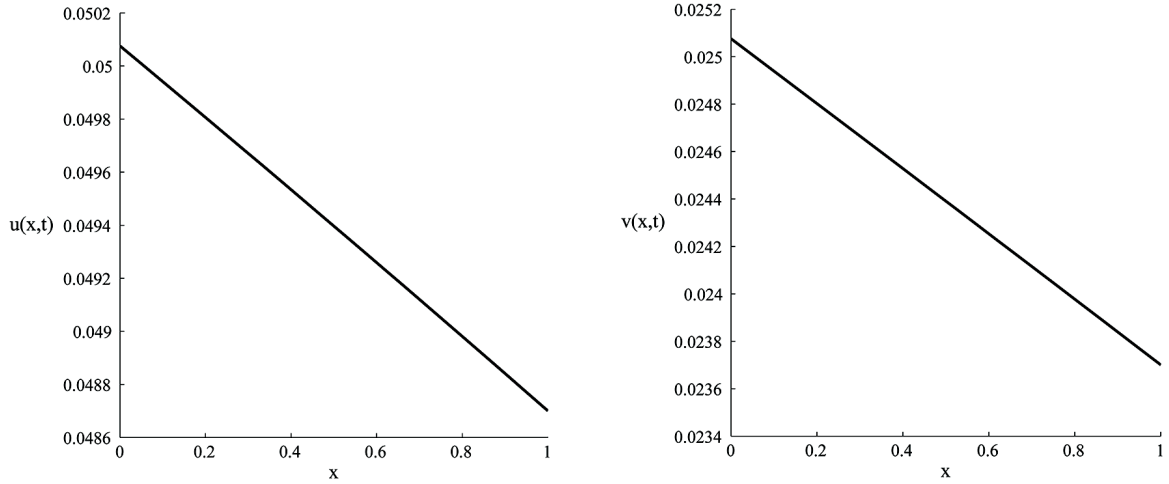
Çizelge 4.7. $N = 21$, $\Delta t = 0,01$, $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere, farklı t zamanındaki $u(x, t)$ fonksiyonu için maksimum hatalar

t	k_2	k_3	$p = 1$	(Mittal ve Jiwari, 2012)	(Mittal ve Tripathi, 2014)
0,5	0,1	0,3	$8,8160 \times 10^{-6}$	$4,173 \times 10^{-5}$	$4,1892 \times 10^{-5}$
	0,3	0,03	$9,2556 \times 10^{-6}$	$4,585 \times 10^{-5}$	$4,5848 \times 10^{-5}$
1,0	0,1	0,3	$8,8878 \times 10^{-6}$	$8,275 \times 10^{-5}$	$8,2696 \times 10^{-5}$
	0,3	0,03	$9,3324 \times 10^{-6}$	$9,167 \times 10^{-5}$	$9,1473 \times 10^{-5}$
3,0	0,1	0,3	$8,9174 \times 10^{-6}$	$2,408 \times 10^{-4}$	$2,4012 \times 10^{-4}$
	0,3	0,03	$9,3691 \times 10^{-6}$	$2,747 \times 10^{-4}$	$2,7042 \times 10^{-4}$

Çizelge 4.8. $N = 21$, $\Delta t = 0,01$, $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere, farklı t zamanındaki $v(x, t)$ fonksiyonu için maksimum hatalar

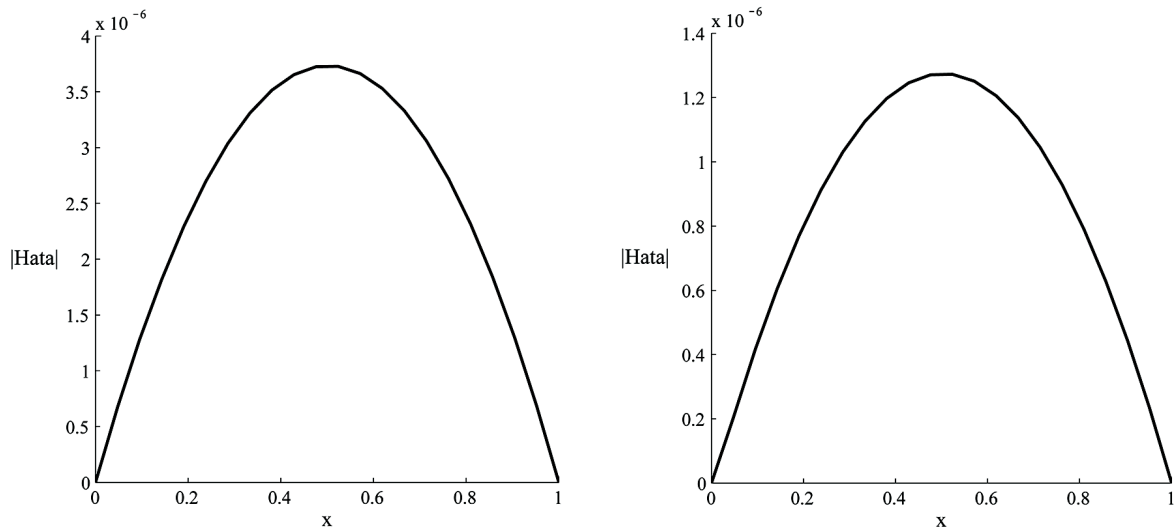
t	k_2	k_3	$p = 1$	(Mittal ve Jawari, 2012)	(Mittal ve Tripathi, 2014)
0,5	0,1	0,3	$2,8380 \times 10^{-6}$	$5,418 \times 10^{-5}$	$9,0947 \times 10^{-6}$
	0,3	0,03	$1,1179 \times 10^{-5}$	$2,826 \times 10^{-5}$	$2,4821 \times 10^{-5}$
1,0	0,1	0,3	$2,8686 \times 10^{-6}$	$1,074 \times 10^{-4}$	$1,6962 \times 10^{-5}$
	0,3	0,03	$1,1269 \times 10^{-5}$	$5,673 \times 10^{-5}$	$4,9653 \times 10^{-5}$
3,0	0,1	0,3	$2,9081 \times 10^{-6}$	$3,119 \times 10^{-4}$	$4,5054 \times 10^{-5}$
	0,3	0,03	$1,1301 \times 10^{-5}$	$1,663 \times 10^{-4}$	$1,4983 \times 10^{-5}$

Şekil 4.3 $N = 21$, $\Delta t = 0,001$, $t = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $k_2 = 0,1$ ve $k_3 = 0,3$, $a_0 = 0,05$, için $t = 1$ zamanındaki çözümlerin grafiğini göstermektedir.



Şekil 4.3. $N = 21$, $\Delta t = 0,001$, $a_0 = 0,05$, $0 \leq x \leq 1$, $k_2 = 0,1$ ve $k_3 = 0,3$ için $t = 1$ zamanındaki sayısal çözümler

Şekil 4.4 $N = 21$, $\Delta t = 0,001$, $a_0 = 0,05$, $0 \leq x \leq 1$, $k_2 = 1$ ve $k_3 = 0,3$, $p = 1$ olduğunda sırası ile $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ için $t = 1$ zamanındaki tam çözüm ile sayısal çözüm arasındaki hata grafiğini göstermektedir. Görüldüğü gibi hata, konum aralığının ortalarında maksimum değerini almaktadır. Bundan dolayı sınır şartlarının seçiminin hata üzerinde çok büyük bir etkisinin olmadığı söylenebilir.



Şekil 4.4. $N = 21$, $\Delta t = 0,001$, $a_0 = 0,05$, $0 \leq x \leq 1$, $k_2 = 1$ ve $k_3 = 0,3$ iken $t = 1$ zamanındaki $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonu için maksimum hatalar

4.3.3. Problem 3

Bu kısımda analitik çözümleri bilinmeyen problem ele alınacaktır. Problemin tanım aralığı olan $0 \leq x \leq 1$ aralığı $N = 50$ parçaya bölünmüş ve program $\Delta t = 0,001$ zaman adımı ve $k_1 = 2, k_2 = k_3 = 10$ parametreleri için $t = 0,4$ anına kadar çalıştırılmıştır. Çizelge 4.9 ve Çizelge 4.10'da sırası ile $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarının x pozisyonunda iken aldığı maksimum değerler gösterilmiştir. Bulunan maksimum değerler, kübik B-spline kolokeyşin metodu (Mittal ve Arora, 2011) ve modifiye edilmiş kübik B-spline kolokeyşin metodu (Mittal ve Tripathi, 2014) ile verilen çalışmalardaki sonuçlar ile birbirine çok yakındır.

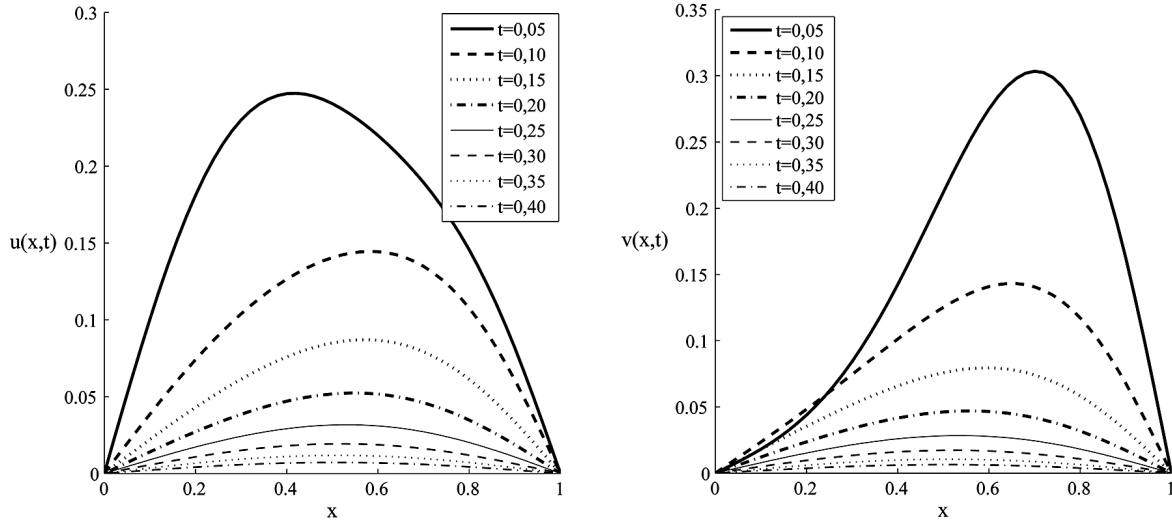
Çizelge 4.9. $k_2 = k_3 = 10$ için farklı zamanlardaki maksimum $u(x, t)$ değerleri

t	$p = 1$	(Mittal ve Arora, 2011)	(Mittal ve Tripathi, 2014)	Nokta
0,1	0,14450	0,14456	0,14449	0,58
0,2	0,05235	0,05237	0,05235	0,54
0,3	0,01932	0,01932	0,01931	0,52
0,4	0,00718	0,00718	0,00718	0,50

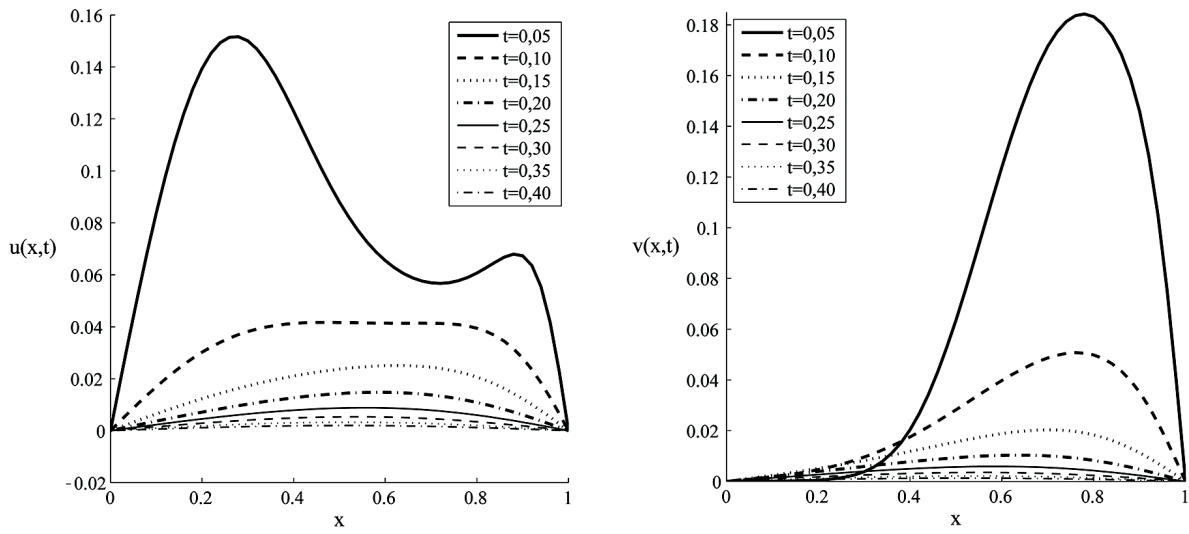
Çizelge 4.10. $k_2 = k_3 = 10$ için farklı zamanlardaki maksimum $v(x, t)$ değerleri

t	$p = 1$	(Mittal ve Arora, 2011)	(Mittal ve Tripathi, 2014)	Nokta
0,1	0,14315	0,14306	0,14314	0,66
0,2	0,04700	0,04697	0,04700	0,56
0,3	0,01726	0,01725	0,01726	0,52
0,4	0,00641	0,00641	0,00641	0,50

Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da sırası ile $[0, 1]$ aralığı üzerinde $t = 0,05, 0,1, 0,15, 0,2, 0,25, 0,3, 0,35, 0,4$ anındaki $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ çözümleri (Mittal ve Arora, 2011) ve (Kutluay ve Uçar, 2013) referansları ile uyumlu olması açısından $\Delta t = 0,001, N = 50$, değişken k_1, k_2, k_3 parametreleri için gösterilmiştir. Şekil 4.5'de $k_1 = 2, k_2 = k_3 = 10$ parametreleri kullanılırken Şekil 4.6'da $k_1 = 2, k_2 = k_3 = 100$ parametreleri kullanılmıştır. Şekillerin (Mittal ve Arora, 2011) ve (Kutluay ve Uçar, 2013) adlı çalışmalarla uyumlu olduğu gözlemlenebilir.



Şekil 4.5. $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 10$ parametreleri için sırasıyla $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ çözümleri



Şekil 4.6. $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 100$ parametreleri için sırasıyla $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ çözümleri

5. BOUSSINESQ DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÜSTEL KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN ÇÖZÜMLERİNİN ÜRETİLMESİ

Bu bölümde Boussinesq denklem sistemlerinin sayısal çözümleri üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu ile araştırılmış, bulunan çözümlerin doğruluğu, L_∞ hata normları hesaplanarak kontrol edilmiştir. (1.138-1.139) ile verilen Boussinesq denklem sistemi üçüncü mertebeden kısmi türevler içermektedir. Ancak üstel kübik B-spline kolokeyşin metodunun uygulanabilmesi için kısmi diferensiyel denklem sistemi konuma göre en fazla ikinci mertebeden olmalıdır. (1.138-1.139) ile verilen Boussinesq denklem sisteminde $s_1 = s_3 = 0$ seçimi altında s_2 ve s_4 katsayılarına bağlı olarak sistem RB ya da KB sistemine dönecektir. Bu sebeple bu sistemde $s_1 = s_3 = 0$ alınarak denklem sisteminin konuma göre ikinci mertebeden olduğu özel durum için çözüm algoritması uygulanacaktır. Bu durumda çözüm algoritması uygulandıktan sonra elde edilen denklem sistemi $(2N + 2) \times (2N + 6)$ boyutlu bir denklem sistemidir. Bu sistem ise köşegen 7-bant matris sistemleri için verilen Thomas algoritması 6-bant sisteme uyarlanarak çözülebilir.

5.1. RB ve KB Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü İçin Üstel Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

İlk olarak RB ve KB denklem sistemlerinin sayısal çözümleri, birinci bölümde verilen üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu uygulanarak bulunacaktır. (1.138-1.139) ile verilen Boussinesq denklem sisteminde $s_1 = s_3 = 0$ alındığında

$$\begin{aligned} v_t + u_x + (vu)_x - s_2 v_{xxt} &= 0, \\ u_t + v_x + uu_x - s_4 u_{xxt} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

formunda kısmi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde s_2 ve s_4 parametre değerlerine bağlı olarak RB ve KB denklem sistemleri elde edilir. (5.1) ile verilen Boussinesq denklem sistemindeki $u_m, v_m, u'_m, v'_m, u''_m, v''_m$, yerine (3.1-3.6) referansı ile verilen üstel kübik B-spline yaklaşımları sırası ile zamana bağlı δ_m ve ϕ_m parametreleri cinsinden yazılır ve Δt zaman adım uzunluğu olmak üzere (1.13), (1.15), (1.18), (1.19) ve (1.20) ile verilen Crank-Nicolson yaklaşımları (5.1) ile verilen Boussinesq denklem sistemine uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{v_x^{n+1} + v_x^n}{2} + \frac{(uu_x)^{n+1} + (uu_x)^n}{2} - s_4 \frac{u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^n}{\Delta t} &= 0, \\ \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} + \frac{u_x^{n+1} + u_x^n}{2} + \frac{(vu)_x^{n+1} + (vu)_x^n}{2} - s_2 \frac{v_{xx}^{n+1} - v_{xx}^n}{\Delta t} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

sistemi elde edilir. Burada lineer olmayan $(vu)_x^{n+1}$ ve $(uu_x)^{n+1}$ terimlerine Taylor metodu yardımıyla lineerleştirme uygulanırsa

$$\begin{aligned}(vu)_x^{n+1} &= (v_x u)^{n+1} + (v u_x)^{n+1} \\ &= v_x^{n+1} u^n + v_x^n u^{n+1} - v_x^n u^n + v^{n+1} u_x^n + v^n u_x^{n+1} - v^n u_x^n,\end{aligned}$$

$$(uu_x)^{n+1} = u^{n+1} u_x^n + u^n u_x^{n+1} - u^n u_x^n$$

ve (3.1-3.6) eşitlikleri (5.1) denklem sistemine uyarlanırsa

$$\begin{aligned}K_1 &= \alpha_1 \delta_{m-1}^n + \delta_m^n + \alpha_1 \delta_{m+1}^n & L_1 &= \alpha_1 \phi_{m-1}^n + \phi_m^n + \alpha_1 \phi_{m+1}^n, \\ K_2 &= \beta_1 \delta_{m-1}^n - \beta_1 \delta_{m+1}^n & L_2 &= \beta_1 \phi_{m-1}^n - \beta_1 \phi_{m+1}^n\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{s - ph}{2(phc - s)}, & \beta_1 &= \frac{p(1 - c)}{2(phc - s)}, \\ \gamma_1 &= \frac{p^2 s}{2(phc - s)}, & \gamma_2 &= -\frac{p^2 s}{phc - s}\end{aligned}$$

alındığında

$$\begin{aligned}\nu_{m1} &= \left(\frac{2}{\Delta t} + K_2\right) \alpha_1 + K_1 \beta_1 - \frac{2s_4}{\Delta t} \gamma_1, & \nu_{m7} &= \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 - \frac{2s_4}{\Delta t} \gamma_1, \\ \nu_{m2} &= \beta_1, & \nu_{m8} &= -\beta_1, \\ \nu_{m3} &= \left(\frac{2}{\Delta t} + K_2\right) - \frac{2s_4}{\Delta t} \gamma_2, & \nu_{m9} &= \frac{2}{\Delta t} - \frac{2s_4}{\Delta t} \gamma_2, \\ \nu_{m4} &= 0, & \nu_{m10} &= 0, \\ \nu_{m5} &= \left(\frac{2}{\Delta t} + K_2\right) \alpha_1 - K_1 \beta_1 - \frac{2s_4}{\Delta t} \gamma_1, & \nu_{m11} &= \beta_1, \\ \nu_{m6} &= -\beta_1, \\ \nu_{m12} &= L_2 \alpha_1 + (1 + L_1) \beta_1, & \nu_{m18} &= -\beta_1, \\ \nu_{m13} &= \left(\frac{2}{\Delta t} + K_2\right) \alpha_1 + K_1 \beta_1 - \frac{2s_2}{\Delta t} \gamma_1, & \nu_{m19} &= \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 - \frac{2s_2}{\Delta t} \gamma_1, \\ \nu_{m14} &= L_2, & \nu_{m20} &= 0, \\ \nu_{m15} &= \left(\frac{2}{\Delta t} + K_2\right) - \frac{2s_2}{\Delta t} \gamma_2, & \nu_{m21} &= \frac{2}{\Delta t} - \frac{2s_2}{\Delta t} \gamma_2, \\ \nu_{m16} &= L_2 \alpha_1 - (1 + L_1) \beta_1, & \nu_{m22} &= \beta_1, \\ \nu_{m17} &= \left(\frac{2}{\Delta t} + K_2\right) \alpha_1 - K_1 \beta_1 - \frac{2s_2}{\Delta t} \gamma_1,\end{aligned}$$

olmak üzere

denklem sayısının eşitlenmesine olanak sağlar. Yapılan sayısal çözümlerde sınır şartı olarak Dirichlet sınır şartları kullanıldığından, (3.1) ve (3.4) bağıntılarından

$$u(a, t) = 0, \quad v(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0, \quad v(b, t) = 0$$

için

$$\begin{aligned} m = 0 &\Rightarrow \delta_{-1} = -\frac{2phc - s}{s - ph}\delta_0 - \delta_1, & \phi_{-1} &= -\frac{2phc - s}{s - ph}\phi_0 - \phi_1 \\ m = N &\Rightarrow \delta_{N+1} = -\frac{2phc - s}{s - ph}\delta_N - \delta_{N-1}, & \phi_{N+1} &= -\frac{2phc - s}{s - ph}\phi_N - \phi_{N-1} \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. δ_{-1} , δ_{N+1} , ϕ_{-1} ve ϕ_{N+1} bilinmeyenlerinin yok edilmesinden sonra (5.5) denklem sistemi Thomas algoritması yardımı ile çözülebilir. (5.5) denklem sisteminin çözülebilmesi için,

$$(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0) \text{ ve } (\phi_{-1}^0, \phi_0^0, \dots, \phi_N^0, \phi_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörlerinin bulunmasına ihtiyaç vardır.

5.2. Başlangıç Durumu

RB ve KB denklem sisteminin üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu ile sayısal çözümü araştırılırken elde edilen (5.5) denklem sisteminin çözülebilmesi için,

$$(\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0) \text{ ve } (\phi_{-1}^0, \phi_0^0, \dots, \phi_N^0, \phi_{N+1}^0)$$

başlangıç vektörlerinin bulunması gereklidir. Bilinmeyenler vektörlerinin bulunması işlemi, üçüncü bölümde üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu ile reaksiyon-difüzyon denklem sisteminin sayısal çözümü araştırılırken verilmişti. Üçüncü bölümde yapılan işlemlere göre tek fark, reaksiyon-difüzyon denklem sisteminin başlangıç ve sınır şartları yerine RB veya KB denklem sisteminin başlangıç ve sınır şartlarının kullanılmasıdır.

5.3. RB Denklem Sistemi İçin Test Problemleri

5.3.1. İlerleyen dalga çözümü

Program, $-20 \leq x \leq 30$ konum aralığında, $N = 1000$ ve çeşitli Δt değerleri için $t = 5$ zamanına kadar çalıştırılmış, $v(x, t)$ ve $u(x, t)$ değerlerinin sayısal sonuçları bulunarak, Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2'de hata normları verilmiştir. Çizelge 5.1'den görüldüğü gibi p 'nin farklı değerleri için hata normlarının değerleri farklı zaman adımları için hemen hemen aynı

gelmektedir. Kıyaslama yapmak için genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokeyşim metodu ve üstel kübik B-spline kolokeyşim metodunun sonuçları aynı çizelgede verilmiştir. $u(x, t)$ fonksiyonlarının minimum hatası p 'nin 0'a yakın olduğu yerlerde gözlemlenmiştir. $v(x, t)$ fonksiyonu sabit olduğundan, $p = 1$ için ve farklı p değerleri için de hatanın neredeyse 0 gelmesi normal bir durumdur.

Çizelge 5.1. RB sisteminde $v(x, t)$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

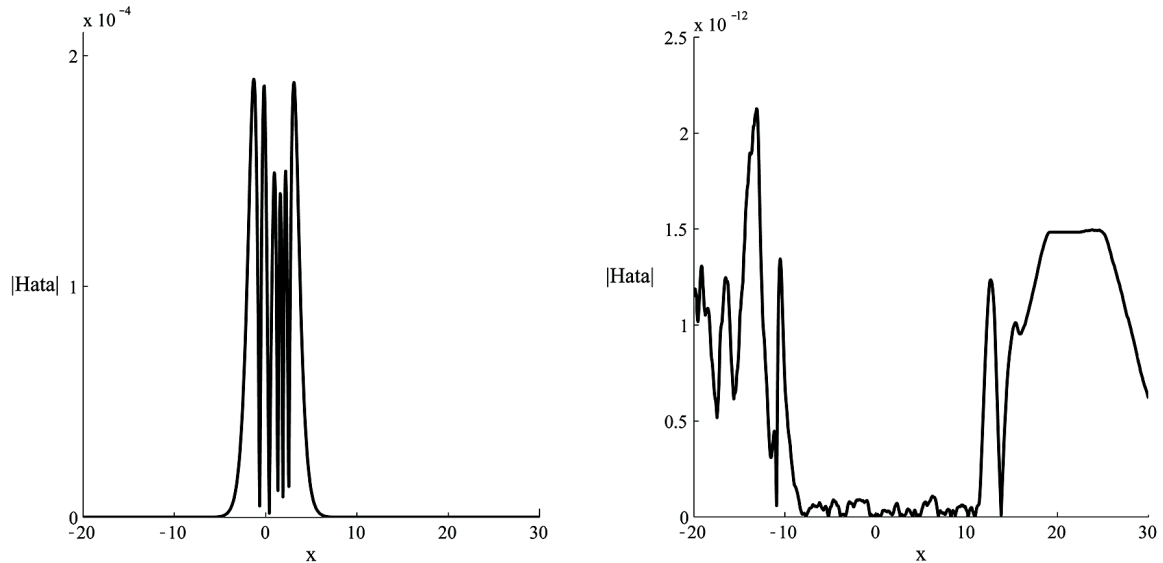
	$L_\infty \times 10^5$			
Δt	$\lambda = 0$	$p = 1$	Değişken λ , (Aksoy, 2012)	Değişken p
0,5	0,000000	$1,9318 \times 10^{-9}$	0,000000	$3,5749 \times 10^{-9}$
			($\lambda = -0,0642$)	($p = 0,0000018762$)
0,05	0,000000	$2,9976 \times 10^{-8}$	0,000000	$4,3454 \times 10^{-8}$
			($\lambda = -0,003627$)	($p = 0,0000060571$)
0,005	0,000002	$6,2819 \times 10^{-7}$	0,000003	$2,1267 \times 10^{-7}$
			($\lambda = -0,00297$)	($p = 0,0000058339$)

Çizelge 5.2 incelendiğinde ise p 'nin farklı değerler alması durumunda hata normlarının değerlerinde belirli azalmalar olduğu görülmektedir. Bu durumda üstel kübik B-spline kolokeyşim metodunun, genişletilmiş kübik B-spline Taylor kolokeyşim metoduna göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Fakat zaman adımı küçüldükçe hata normlarının değerlerinde çok ciddi bir değişiklik gözükmemektedir.

Çizelge 5.2. RB sisteminde $u(x, t)$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

	$L_\infty \times 10^3$			
Δt	$\lambda = 0$	$p = 1$	Değişken λ , (Aksoy, 2012)	Değişken p
0,5	23,364410	23,890978	4,839046	2,994220
			$(\lambda = -0,0642)$	$(p = 0,0000018762)$
0,05	1,435993	1,554225	0,439634	0,186862
			$(\lambda = -0,003627)$	$(p = 0,0000060571)$
0,005	1,231550	1,351017	0,369655	0,189722
			$(\lambda = -0,00297)$	$(p = 0,0000058339)$

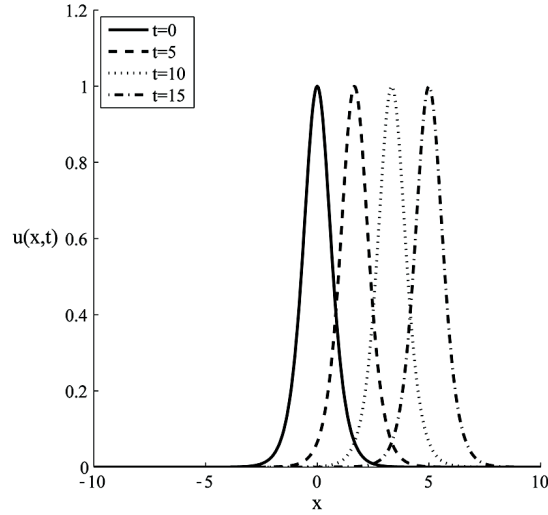
Şekil 5.1'de sırasıyla $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ için hata grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 5.1. $N = 1000$, $\Delta t = 0,005$, $p = 0,0000058339$ ve $-20 \leq x \leq 30$ aralığında sırasıyla $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ için $t = 5$ anındaki maksimum hata

Program, $N = 1000$, $\Delta t = 0,005$ ve $p = 0,0000058339$ seçimleriyle $-20 \leq x \leq 30$ konum aralığında $t = 15$ anına kadar çalıştırılarak, $t = 0, 5, 10, 15$ zamanlarındaki dalgaların durumu Şekil 5.2'de verilmiştir. Grafikten görüldüğü gibi, $t = 0$ anında tepe noktası $x = 0$ konumunda olacak şekilde harekete başlayan bir dalga, $t = 15$ zamanında

tepe noktası $x = 5$ civarında olacak şekilde bir bozulma olmadan x ekseninde soldan sağa doğru hareket etmektedir ve şeklinde bir bozulma olmamaktadır.

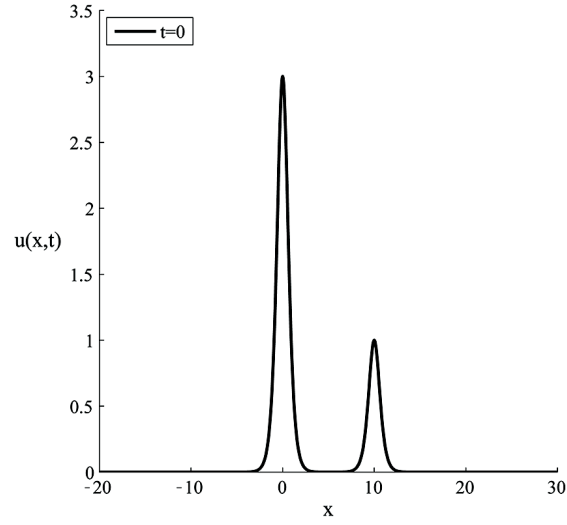


Şekil 5.2. $N = 1000$, $\Delta t = 0,005$ ve $p = 0,0000058339$, $-20 \leq x \leq 30$ için $t = 0, 5, 10, 15$ anlarındaki $u(x, t)$ sayısal çözümleri

RB denklem sisteminin ilk test problemi olan ilerleyen dalga çözümü için elde edilen sayısal çözümler, serbest parametre olan p 'nin bire eşit olduğu ve birden farklı olduğu değerler için ayrı ayrı hesaplanmış ve bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. p 'nin birden farklı değerleri için elde edilen hata normlarının, $p = 1$ durumundakine göre daha küçük değerler olduğu, dolayısıyla serbest parametre olan p değerinin değiştirilmesi durumunda üstel kübik B-spline kolokeyşin metodunun, $p = 1$ durumuna göre daha doğru sonuçlar verdiği görülmüştür. İlerleyen dalgaları gösteren grafiklere bakıldığında, dalganın zaman içerisinde şeklinde bir bozulma olmadan ilerlediği, yani üstel kübik B-spline kolokeyşin metodunun, dalganın hareketini iyi modellediği anlaşılmıştır.

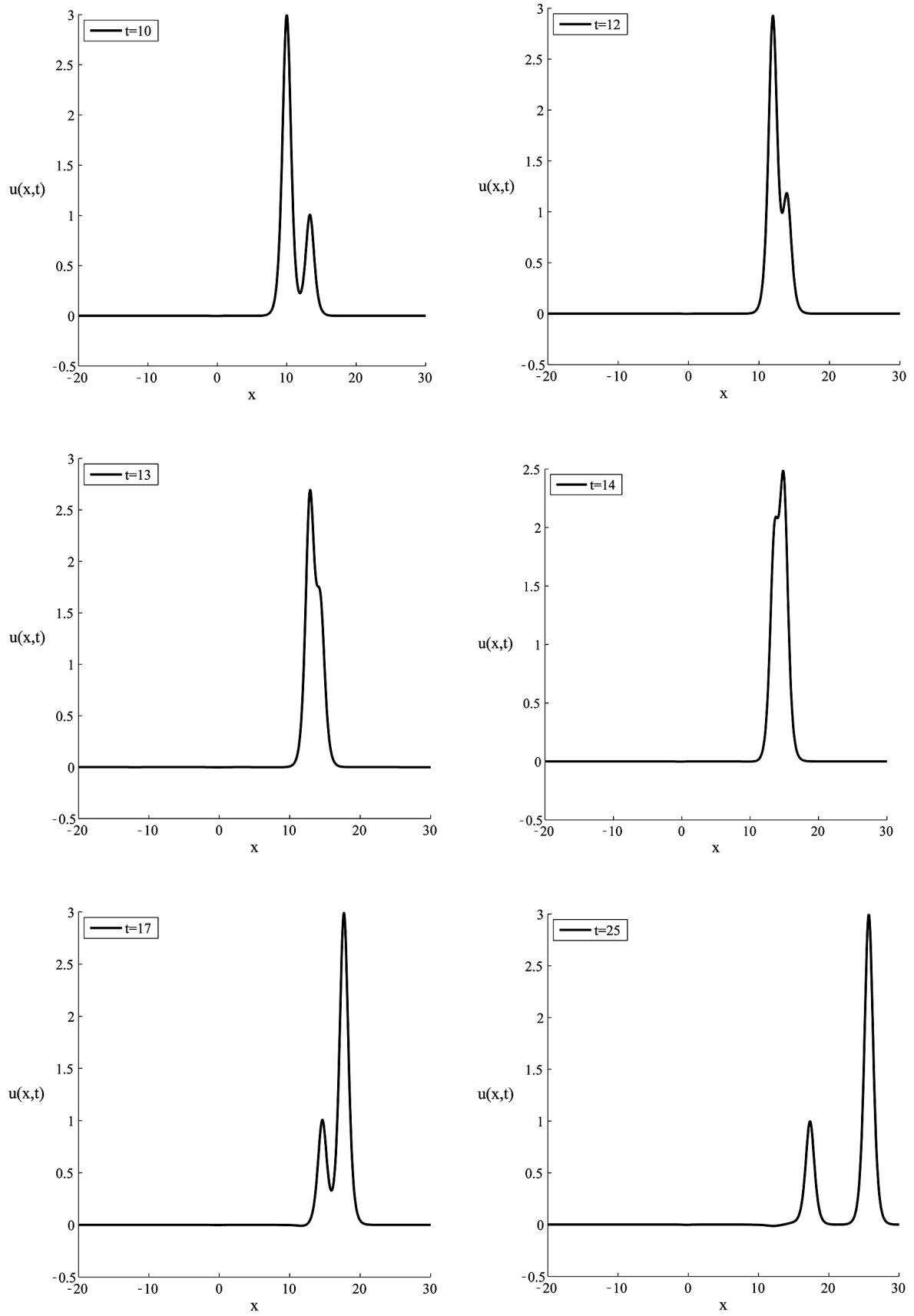
5.3.2. İki ilerleyen dalganın çarpışması

RB sisteminin (1.155) ile verilen başlangıç şartı Şekil 5.3'de çizilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, genlik değeri 3 olan büyük dalganın tepe noktası $x = 0$ konumuna ve genlik değeri 1 olan küçük dalganın tepe noktası ise $x = 10$ konumuna karşılık gelmektedir.



Şekil 5.3. $t = 0$ anında $u(x, t)$ için dalgaların durumu

Şekil 5.4, $N = 1000$, $\Delta t = 0,005$, $p = 1$ ve $-20 \leq x \leq 30$ değerleri için, $t = 10, 12, 13, 14, 17, 25$ zamanlarında dalgaların durumlarını göstermektedir. Şekil 5.4 incelendiğinde dalgaların şekillerinde ve genliklerinde çarpışma öncesi ve çarpışma sonrasında bir bozulma olmadığı görülmektedir.



Şekil 5.4 İlerleyen iki dalganın çarpışması

RB denklem sistemi için ikinci test problemi olarak, iki ilerleyen dalganın çarpışması problemi alınmıştır. Bu problem için çizilen grafikler incelendiğinde, dalgaların çarpışma öncesindeki şekillerini çarpışma sonrasında da büyük oranda korudukları görülmüştür. Buna göre metodun bu test problemini de iyi bir şekilde modellediği söylenebilir.

5.4. KB Denklem Sistemi İçin Test Problemleri

5.4.1. İlerleyen dalga çözümü

(1.159-1.160) ilerleyen dalga çözümü; genliği 1, hızı 1/3 olan, tepe noktası $x = 0$ noktasına karşılık gelen bir ilerleyen dalganın soldan sağa doğru hareketini modellemektedir. Program, $-20 \leq x \leq 30$ konum aralığında, $N = 1000$ ve çeşitli Δt değerleri için $t = 5$ zamanına kadar çalıştırılmış, $v(x, t)$ ve $u(x, t)$ değerlerinin sayısal sonuçları bulunarak, Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4'de hata normlarının değerleri verilmiştir. p parametresi 0'a yakın değerlerde ve $u(x, t)$ fonksiyonu için taratılarak maksimum hata normu belirlenmiştir. Buna bağlı olarak bulunan en iyi p değeri için $v(x, t)$ fonksiyonunun maksimum hata normu hesaplanmıştır. $p = 1$ için ve farklı p değerleri için de hatanın neredeyse 0 gelmesi, $v(x, t)$ fonksiyonunun sabit olmasından kaynaklanmıştır.

Çizelge 5.3. KB sisteminde $v(x, t)$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

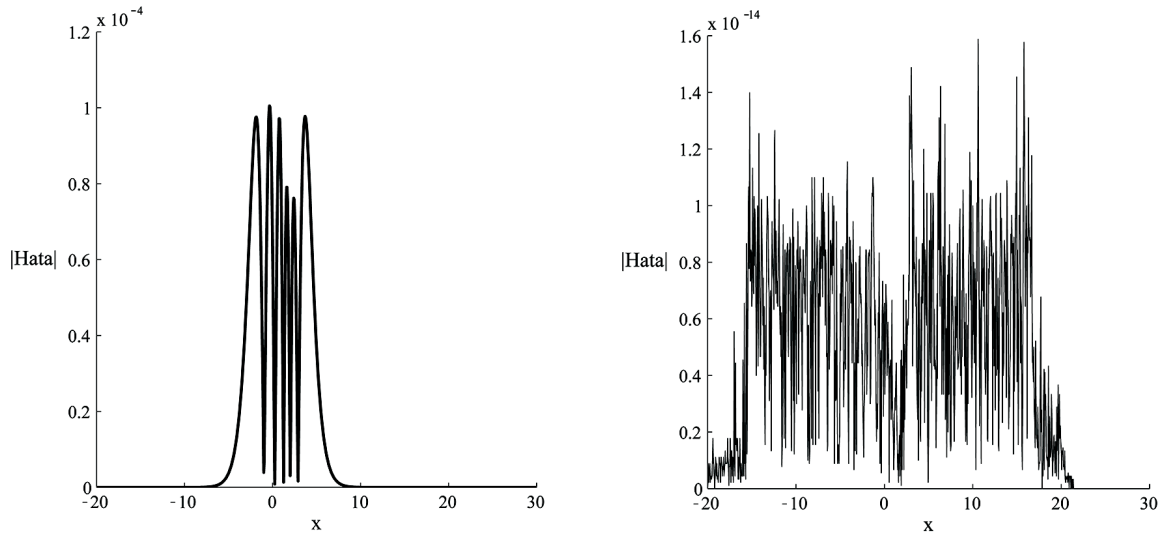
	$L_\infty \times 10^5$			
Δt	$\lambda = 0$	$p = 1$	Değişken λ , (Aksoy, 2012)	Değişken p
0,5	0,000000	$2,2204 \times 10^{-10}$	0,000000	$1,7764 \times 10^{-9}$
			$(\lambda = -0,0332)$	$(p = 0,0000027881)$
0,05	0,000000	$4,2188 \times 10^{-9}$	0,000000	$2,2204 \times 10^{-10}$
			$(\lambda = -0,00197)$	$(p = 0,0000080030)$
0,005	0,000006	$1,9762 \times 10^{-9}$	0,000000	$1,5876 \times 10^{-9}$
			$(\lambda = -0,0017)$	$(p = 0,0000086530)$

Çizelge 5.4 incelendiğinde ise Δt 'nin farklı değerler alması durumunda hata normlarının değerlerinde fazla değişme olmadığı görülmektedir. Üstel kübik B-spline kolokeyşin metodunun, genişletilmiş Taylor kolokeyşin metodu ile yakın sonuçlar verdiği söylenebilir.

Çizelge 5.4. KB sisteminde $u(x, t)$ için $N = 1000$ ve $-20 \leq x \leq 30$ olmak üzere $t = 5$ zamanındaki hata normlarının kıyaslanması

Δt	$L_\infty \times 10^3$			
	$\lambda = 0$	$p = 1$	Değişken λ , (Aksoy, 2012)	Değişken p
0,5	9,915176	8,574594	2,279022	0,1994697757
			$(\lambda = -0,0339)$	$(p = 0,0000027881)$
0,05	0,631048	0,715209	0,206695	0,0978381524
			$(\lambda = -0,00197)$	$(p = 0,0000080030)$
0,005	0,551502	0,643377	0,182177	0,1004747365
			$(\lambda = -0,0017)$	$(p = 0,0000086530)$

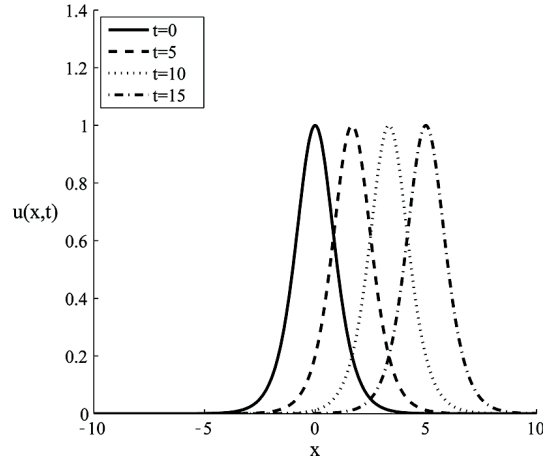
$u(x, t)$ ve $v(x, t)$ çözümleri için elde edilen hata grafikleri, Şekil 5.5'de sırasıyla gösterilmiştir.



Şekil 5.5. $N = 1000$, $\Delta t = 0,005$, $p = 0,0000086530$ ve $-20 \leq x \leq 30$ aralığında sırasıyla $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ için $t = 5$ anındaki maksimum hata

Şekil 5.6'da, program, $N = 1000$, $\Delta t = 0,005$ ve $p = 0,0000086530$ seçimleriyle, $-20 \leq x \leq 30$ konum aralığında, $t = 15$ anına kadar çalıştırılarak, $t = 0, 5, 10, 15$ zamanlarındaki dalgaların durumu verilmiştir. $v(x, t)$, -1 sabitine eşit olduğu için grafiği çizilmemiştir. Grafikte görüldüğü gibi, $t = 0$ anında tepe noktası $x = 0$ konumunda olacak

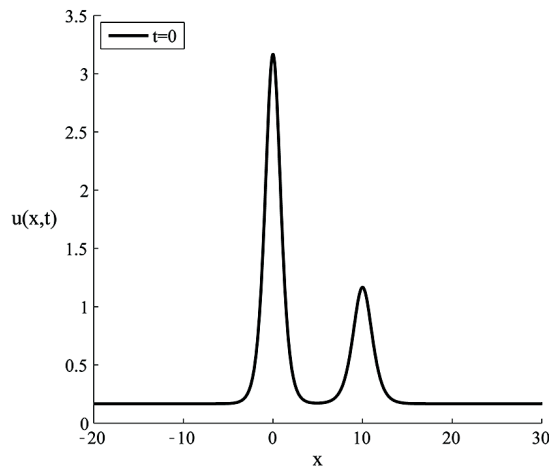
şekilde harekete başlayan bir dalga, $t = 15$ zamanında tepe noktası $x = 5$ civarında olacak şekilde bir bozulmaya uğramadan x ekseninde soldan sağa doğru hareket etmektedir.



Şekil 5.6. $N = 1000$, $\Delta t = 0,005$ ve $p = 0,0000086530$, $-20 \leq x \leq 30$ için $t = 0, 5, 10, 15$ anlarındaki $u(x, t)$ sayısal çözümleri

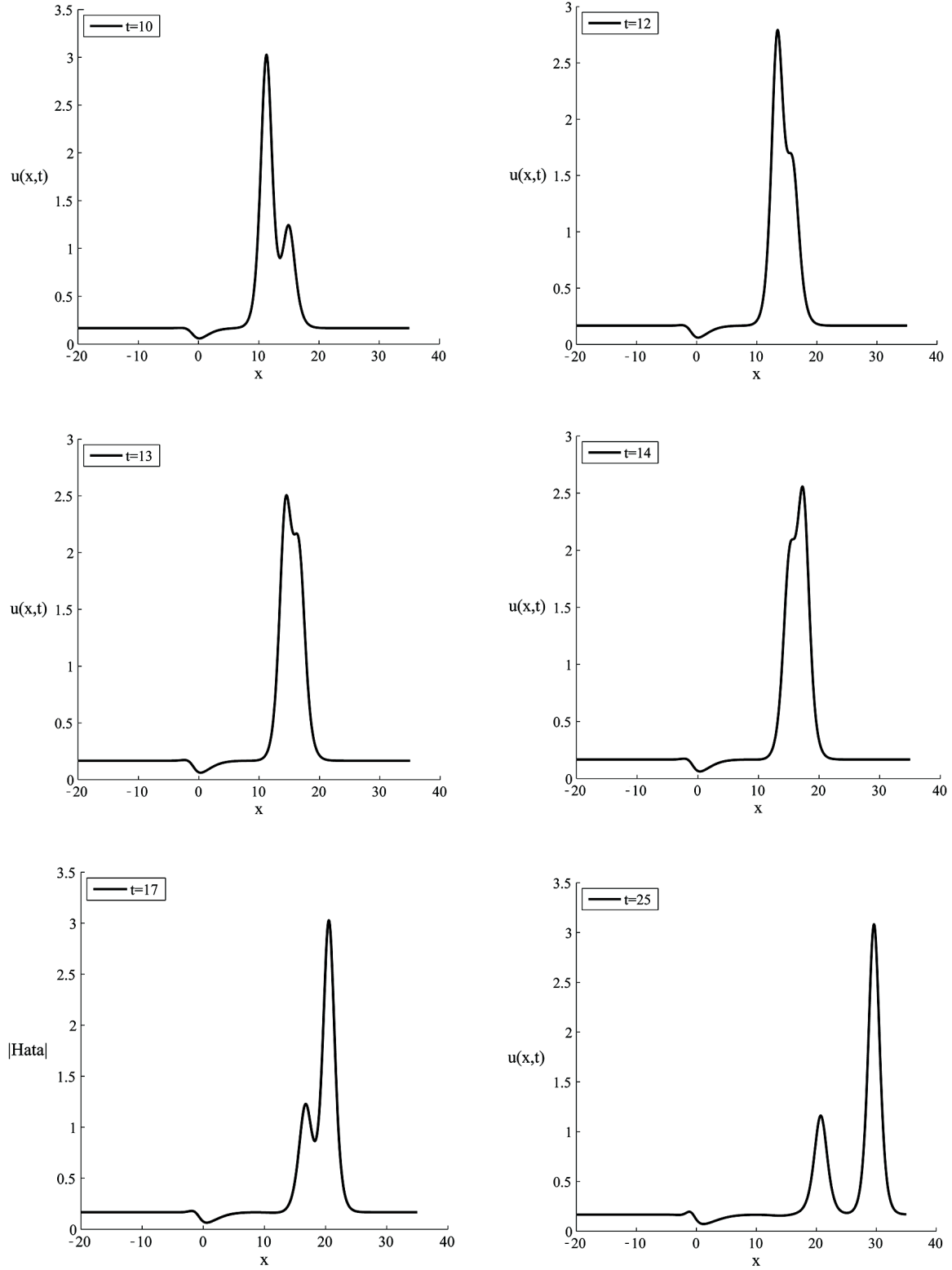
5.4.2. İki ilerleyen dalganın çarpışması

(1.168) ile verilen başlangıç şartı Şekil 5.7'de çizilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, genlik değeri 3 olan büyük dalganın tepe noktası $x = 0$ konumuna ve genlik değeri 1 olan küçük dalganın tepe noktası ise $x = 10$ konumuna karşılık gelmektedir.



Şekil 5.7. $t = 0$ anında $u(x, t)$ için dalgaların durumu

Şekil 5.8, $N = 1000$, $\Delta t = 0,005$ ve $p = 1$ ve $-20 \leq x \leq 30$ değerleri için, $t = 10$, $t = 12$, $t = 13$, $t = 14$, $t = 17$, $t = 25$ zamanlarında dalgaların durumlarını göstermektedir. Şekil 5.8 incelendiğinde dalgaların şekillerinde ve genliklerinde çarpışma öncesi ve çarpışma sonrasında ciddi bir bozulma olmadığı görülmektedir ve aynı yönde harekete başlayan iki dalgadan, hızlı olanın öndeki olan yavaş dalgaya yetişmesi ile çarpışma başlamış ve bir süre sonra hızlı dalganın öne geçmesi ile de çarpışma sona ermiştir.



Şekil 5.8. İlerleyen iki dalganın çarpışması

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, NLS denkleminin, reaksiyon-difüzyon denklem sisteminin, ikili Burgers denkleminin ve RB-KB denklem sistemlerinin sayısal çözümleri için üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu önerilmiş, önerilen yaklaşımın etkinliğini test etmek için çeşitli alanlarda karşılaşılan model problemler ele alınmıştır. Böylece üstel kübik B-spline kolokeyşin metodunun farklı alandaki model problemlerin sayısal çözümünde başarılı olup olmadığı belirlenmiştir. Böylece önerilen metodun çeşitli problemlerin çözümünde kullanılabilir olduğu ve etkinliği sayısal olarak gösterilmiştir.

Ayrıca sonlu elemanlar metodunun uygulandığı literatürdeki çalışmalar dikkate alınmış ve sayısal çözümlerin elde edilmesinde kullanılan kolokeyşin metodunda taban fonksiyonları olarak üstel kübik B-spline fonksiyonunun uygulandığı çalışmaların sayısının ne yazık ki çok az olduğu görülmüştür. Bu sebeple çalışmada literatürdeki boşluğu doldurmak için üstel kübik B-spline kolokeyşin metodu ele alınmıştır. Bu metot ile bulunan çözümlerin doğruluğu hata normları kullanılarak gösterilmiş ve literatürde yer alan farklı metotlar kullanılarak elde edilen sayısal çözümlere göre daha iyi sonuçlar verdiği kanıtlanmıştır.

Literatürdeki B-spline fonksiyonları kullanılarak yapılan kolokeyşin metotlarından farklı olarak önerilen üstel kübik B-spline yaklaşımında p ile gösterilen serbest parametre vardır. Bu serbest parametrenin değişik değerler aldığı durumlarda, sayısal çözümlerde ve buna bağlı olarak hata normlarında da değişiklikler olmaktadır. Buradaki amaç en küçük hata normunu veren p değerini bulmaktır. Sonuç olarak en başarılı performansa sahip olan p serbest parametresi için elde edilen sayısal çözümler ile buna bağlı hata normları çizelgeler halinde ve elde edilen grafikler görsel olarak sunulmuştur. p serbest parametresinin 1 olduğu durumdaki sonuçlar, kübik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak elde edilen sonuçlarla neredeyse aynıdır. Elde edilen tüm sonuçlar incelendiğinde, genel olarak p nin birden farklı değerleri için elde edilen hata normlarının, $p = 1$ durumundakine göre daha küçük değerler aldığı, dolayısıyla üstel kübik B-spline kolokeyşin metodunun, kübik B-spline kolokeyşin metoduna göre daha doğru sonuçlar verdiği görülmüştür. Uygulanması açısından bakıldığında üstel kübik B-spline kolokeyşin metodunun, kübik B-spline kolokeyşin metoduna göre işlem maliyetinin daha fazla olduğu söylenebilir. Fakat doğru sonuçlar vermesi ve problemleri modellemedeki başarısı açısından bakıldığında, benzer tipteki kısmi diferensiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri araştırılırken kullanılması tavsiye edilir.

Üstel kübik B-spline fonksiyonlar, ikinci mertebeden türevleri sürekli olacak şekilde en küçük mertebeli B-spline fonksiyonlardan biri olduğundan, önerilen sayısal metot maliyeti oldukça düşük bir metottur. Bu bağlamda, $N + 1$ bölünme noktasının kullanıldığı üstel kübik B-spline kolokeyşin metodunun uygulanması ile katsayılar matrisi, her satırında sıfırdan farklı 6 eleman bulunduran $(2N + 2) \times (2N + 6)$ boyutlu blok bant matrisler olan matris sistemi elde edildiğinden Thomas algoritması kullanılarak hesaplama maliyeti açısından çoğu sayısal metoda göre bir avantaj olarak ifade edilebilir.

Sonuç olarak bu tezde araştırmacılara, bazı kısmi diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin elde edilmesinde kolaylıkla uygulayabilecekleri ve doğruluğu yüksek bir metot önerilmiştir. Önerilen metot, diğer kısmi diferensiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümlerinin de elde edilmesinde kullanılabilir. Önerilen metodun uygulanması ile elde edilen sonuçlar iyi olduğundan, kısmi diferensiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri üzerinde çalışan araştırmacıların da kullanabileceği bir B-spline kolokeyşin algoritması literatüre kazandırılmıştır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abassy, T.A., El-Tawil, M.A., El-Zoheiry, H., 2007, Exact solutions of some nonlinear partial differential equations using the variational iteration method linked with Laplace transforms and the Padé technique, *Computers and Mathematics with Applications*, 54, 940-954.
- Abazari, R., Borhanifar, A., 2010, Numerical study of the solution of the Burgers and coupled Burgers equations by a differential transformation method, *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 2711-2722.
- Abazari, R., 2011, Numerical simulation of coupled nonlinear Schrödinger equation by RDTM and comparison with DTM, *Journal of Applied Science*, 11(20), 3454-3463.
- Abdou, M.A., Soliman, A.A., 2005, Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 181, 245-251.
- Aksoy, M., 2012, Bazı kısmi türevli diferensiyel denklemlerin Taylor kolokeyşın-genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar ile sayısal çözümleri, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 120 s. (Yayımlanmamış)
- Al-Khaled, K., Nusier, A.S., 2008, Numerical investigation for solitary solutions of the Boussinesq equation, *Applied Mathematics E-Notes*, 8, 159-170.
- Ames, W.F., 1992, Numerical methods for partial differential equations, *Computer Science and Scientific Computing*, Thir edition, 450 p.
- Amick, C.J., 1984, Regularity and uniqueness of solutions to the Boussinesq system of equations, *Journal of Differential Equations* 54, 231-247.
- Aminikhah, H., Jamalian, A., 2013, An Efficient Method for Solving the Brusselator System, *Walailak Journal of Science and Technology*, 10(5), 449-465.
- Anonim, 2014, <http://www.fizikbilimi.gen.tr/dalgalar/>.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Argyris, J., Haase, M., 1987, An engineer's guide to soliton phenomena: Application of the finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61, 71–122.
- Aronson, D.G., Weinberger, H.F., 1975, Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation, *Partial Differential Equations and Related Topics*, 446, 5–49.
- Barari, T., Barari, A., Momeni, M., Vahdatirad, M.J., 2010, Numerical analysis of coupled system of nonlinear diffusion-reaction problem, *International Journal of Applied Mathematics and Computation*, 2(24), 55-62.
- Barrass, I., Crampin, E.J., Maini, P.K., 2006, Mode transitions in a model reaction diffusion system driven by domain growth and noise, *Bulletin of Mathematical Biology*, 68, 981-995.
- Bona, J.L., Saut, J.-C., Toland, J.F., 1997, Boussinesq equations for small-amplitude long wavelength water waves (preprint).
- Bona, J.L., Chen, M., 1998, A Boussinesq system for two way propagation of nonlinear dispersive waves, *Physica D*, 116, 191-224.
- Bona, J.L., Chen, M., Saut, J.-C., 2002, Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media I: derivation and linear theory, *Journal of Nonlinear Science*, 12, 283-318.
- Boor, C., 1978, *A practical guide to splines*, Springer, 341 p.
- Boussinesq, J.V., 1871, Theorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation; se propageant dans un canal rectangulaire, *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences*, 72, 755-759.
- Calogero, F., Eckhaus, W., 1987, Nonlinear evolution equations, rescalings, model PDEs and their integrability: I, *Inverse Problems* 3, 229-262.
- Chaohao, G., 1995, *Soliton theory and its applications*, Springer, 403 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Chen, M., 1998, Exact travelling-wave solutions to bidirectional wave equations, *International Journal of Theoretical Physics*, 37(5), 1547-1567.
- Chen, M., 1998, Exact solutions of various Boussinesq systems, *Applied Mathematics Letters* 11(5), 45-49.
- Chen, Y., An, H., 2008, Numerical solutions of coupled Burgers' equations with time and space-fractional derivatives, *Applied Mathematics and Computation*, 200, 87-95.
- Chou, C.S., Zhang, Y.T., Zhao, R., Nie, Q., 2007, Numerical methods for stiff reaction-diffusion systems, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, 7(3), 515-525.
- Crank J., Nicolson P., 1947, A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 43, 50-64.
- Dağ, I., 1994, Studies of B-spline finite elements, PhD thesis, University of Wales, Bangor, U.K. (Unpublished).
- Dağ, I., 1999, A quadratic B-spline finite element method for solving nonlinear Schrödinger equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 174, 247-258.
- Davies, A.J., 1980, *The finite element method: A first approach*, Clarendon Press, Oxford.
- Delfour, M., Fortin, M., Payr, G., 1981, Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger equation, *Journal of Computational Physics*, 44(2), 277-288.
- Denghan, M., Hamidi, A., Shakourifar, M., 2007, The solution coupled Burgers' equations using Adomian-Pade technique, *Applied Mathematics and Computation*, 189, 1034-1047.
- Denghan, M., Taleei, A., 2010, Numerical solution of nonlinear Schrödinger equation by using time-space Pseudo-Spectral method, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26, 979-992.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Dereli, Y., Irk, D., Dag, I., 2009, Soliton solutions for NLS equation using radial basis functions, *Chaos, Solitons and Fractals*, 42,1227–1233.
- Desai, K.R., Pradhan, V.H., 2012, Solution of Burgers equation and coupled Burges equation by Homotopy perturbation method, *International journal of Engineering Rersearch and applications*, 2(3), 2033-2040.
- De Wit, A., 1999, Spatial patterns and spatiotemporal dynamics in chemical systems, *Advances in Chemical Physics*, 109, 435-513.
- De Wit, A., Borckmans, P., Dewel, G., 1997, Twist grain boundaries in three dimensional lamellar Turing structures, *Proceedings of National Academy of Sciences of the United States of the America*, 94, 12765-12768.
- Doelman, A., Kaper, T.J., Zegeling, P.A., 1997, Pattern formation in the one-dimensional Gray-Scott model, *Nonlinearity*, 10, 523-563.
- Doelman, A., Gardner, R.A., Kaper, T.J., 1998, Stability analysis of singular patterns in 1D Gray-Scott model: a matched asymptotics approach, *Physica D*, 122, 1-36.
- Drazin, P.G., Johnson R.S., 1989, *Cambridge texts in Applied Mathematics*, 240 p.
- Erneux, T., Reiss, E., 1983, Brusselator isolas, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 43, 1240-1246.
- Esipov, S.E., 1995, Coupled Burgers' equations: a model of polydispersive sedimentation, *Physical Review Letters*, 52, 3711-3718.
- Fordy, A.P., 1990, *Soliton theory: a survey of results*, Manchester University Pr, 300 p.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Zaki, S.I., Sharawi, Z.El., 1993, B-Spline Finite Element Studies of the Nonlinear Schrödinger Equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 108, 303
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Ali. A.H.A., 1991, Simulations of solitons using quadratic spline finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92, 231–243.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M., 1967, Method for solving the Korteweg-deVries equation, *Physical Review Letters*, 19, 1095-1097.
- Ghoreishi, M., Ismail, A.I.B.Md., Rashid, A., 2011, The Coupled viscous Burgers equations with fractional-time derivative by the Homotopy perturbation method, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 13(6), 1054-1066.
- Ghotbi, A.R., Avaei, A., Barari, A., Mohammadzade, M.A., 2008, Assessment of He's Homotopy perturbation method in Burgers' and coupled Burgers' equations, *L. Applied. Sci.*, 8(2), 322-327.
- Gray, P., Scott, S.K., 1984, Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: oscillations and instabilities in the system $A+2B\rightarrow 3B$, $B\rightarrow C$, *Chemical Engineering. Science*, 39, 1087-1097.
- Hasimoto, H., Ono, H., 1972, Nonlinear modulation of gravity waves, *Journal of Physical Society of Japan* 33, 805–811.
- Herbst, B.M., Morris J.LI, Mitchell, A.R., 1985, Numerical experience with the nonlinear Schrödinger equation, *Journal of Computational Physics*, 60, 282–305.
- Hunter, J.K., 1996, *Nonlinear evolution equations*, University of California, Davis.
- Höllig, K., 2003, *Finite element methods with B-splines*, Society for Industrial & Applied Mathematics, 145 p.
- Inan, I.E., Kaya, D., Ugurlu, Y., 2010, Auto-Bäcklund transformation and similarity reductions for coupled Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 216, 2507-2511.
- Infeld, E., Rowlands, G., 1990, *Nonlinear waves, Solitons and Chaos*, Cambridge University Press.
- Irk, D., 2007, Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 148 s. (Yayımlanmamış).

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Islam, S., Sarler, B., Vertnik, R., Kosec, G., 2012, Radial basis function collocation method for the numerical solution of the two-dimensional transient nonlinear coupled Burgers' equations, *Applied Mathematical Modelling*, 36, 1148-1160.
- Ismail, M.S., 2007, Numerical solution of coupled nonlinear Schrödinger equation by Galerkin method, *Mathematics and Computer in Simulation*, 78, 532-547.
- Jain, M.K., 1984, *Numerical solutions of differential equations*, Wiley, New Delhi.
- Jia, X., Li, H., Fang, Z., An, H., 2012, H^2 -Galerkin mixed method for the coupled Burgers equation, *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*, 6, 163-166.
- Jin-Ming, Z., Yao-Ming, Z., 2011, The Hirota bilinear method for the coupled Burgers equation and the high-order Boussinesq Burgers equation, *Chinese Physics B*, 20(1), 010205-1-7.
- Karakoç, S.B.G., 2011, Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denklemlerinin sayısal çözümleri, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 248 s. (Yayımlanmamış).
- Karpman, V.I., Krushkal, E.M., 1969, Modulated waves in non-linear dispersive media, *Soviet Physics JEPT*, 28, 277-281.
- Kaya, D., 2001, An explicit solution of coupled viscous Burgers' equation by the decomposition method, *International Journals Of Mathematics and Mathematics Sciences*, 27(11), 675-680.
- Khater, A.H., Tamsah R.S., Hassan M.M., 2008, A Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers'-typ equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 222(2), 333-350.
- Kolokolnikov, T., Erneux, T., Wei, J., 2006, Mesa-type patterns in the one-dimensional Brusselator and their stability, *Physica D*, 214, 63-77.
- Kumar, M., Pandit, S., 2014, A composite numerical scheme for the numerical simulation of coupled Burgers' equation, *Computer Physics Communications*, 185, 809-817.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Kutluay, S., Uçar, Y., 2013, Numerical solutions of the coupled Burgers' equation by the Galerkin quadratic B-spline finite element method, *Mathematical Methods in the Applied Science*, 36(17), 2403-2415.
- Korkmaz, A., Dag, I., 2008, A differential quadrature algorithm for simulations of the nonlinear Schrödinger equation, *Computers Mathematic with Applications*, 56, 2222–2234.
- Korteweg, D.J, De Vries, G., 1895, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, *Philosophical Magazine* 39, 422-443.
- Lamb, G.L., 1980, *Elements of soliton theory*, John Wiley and Sons, 304 p.
- Lapidus, L., Pinder, G.F., 1982, *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, John Wiley and Sons, 677 p.
- Lian, Z., Lou, S.Y., 2006, Symmetry study of the coupled Burgers' system, *Chaos, Solitons and Fractals*, 27, 51-55.
- Liu, J., Hou, G., 2011, Numerical solutions of the space-and time-fractional coupled Burgers' equations by generalized differential transform method, *Applied Mathematics and Computation*, 217, 7001-7008.
- Liu, J., Sun, Z., 2007, Finite difference method for reaction-diffusion equation with nonlocal boundary conditions, *Numerical Mathematics, A Journal of Chinese Universities*, 16, 97-111.
- Liu. N., 2010, Similarity reduction and explicit solutions for the variable-coefficient coupled Burgers' equations, *Applied Mathematics and Computation*, 217, 4178-4185.
- Logan, D.L., 2007, *A first course in the finite element method*, Fourth Edition, Thomson.
- Lopez, C.M.G., Ramos, J.I., 1996, Linearized θ -methods Part II: Reaction-diffusion equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137, 357-378.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Löhner, R, Morgan, K., Zienkiewich, O.C., 1984, The solution of the non-linear hyperbolic equation systems by finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 4, 1043–1063.
- Madzvamuse, A., 2006, Time-stepping schemes for moving grid finite elements applied to reaction-diffusion systems on fixed and growing domains, *Journal of Computational Physics*, 214, 239-263.
- Madzvamuse, A., Wathen, A.J., Maini, P.K., 2003, A moving grid finite element method applied to a biological pattern generator, *Journal of Computational Physics*, 190, 478-500.
- Meral, G, Tezer-Sezgin, M., 2009, Differential quadrature solution of nonlinear reaction–diffusion equation with relaxation type time integration. *International Journal of Computer Mathematics*, 86(3), 451–63.
- Meral, G., Tezer-Sezgin, M., 2011, The differential quadrature solution of nonlinear reaction–diffusion and wave equations using several time-integration schemes, *Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 27(4), 485-497.
- Merkin, J.H., Needham, D.J., Scott, S.K., 1989, The development of travelling waves in a simple isothermal chemical system I. Quadratic autocatalysis with linear decay, *Proceedings of the Royal Society of London A*, 424, 187-209.
- McCartin, B.J., 1991, Theory of exponential splines, *Journal of Approximation Theory*, 66, 1-23.
- Miles, J.W., 1981, An envelope soliton problem, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 41, 227–230.
- Mittal, R.C., Arora, G., 2011, Numerical solution of the coupled viscous Burgers’ equation, *Communications in. Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16, 1304-1313.
- Mittal, R.C., Jiwari, R., 2012, A differential quadrature method for numerical solutions of Burgers’ type equations, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid*, 22(7), 880-895.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Mittal, R.C., Tripathi, A., 2014, A collocation method for numerical solutions of coupled Burgers' equations, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 15, 457–471.
- Mohyud-Din, S.T., Inc, M., Cavlak, E., 2010, On numerical solutions of two-dimensional Boussinesq equations by using Adomian decomposition and He's homotopy perturbation method, *Applications and Applied Mathematics*, 1, 1-11.
- Mokhtari, R., Toodar, A.S., Chegini, N.G., 2011, Numerical simulation of coupled non-linear Schrödinger equations using the generalized differential quadrature method, *Chinese Physics Letters*, 28(2), 020202.
- Mokhtari, R., Toodar, A.S., Chegini, N.G., 2011, Application of the generalized differential quadrature method in solving Burgers' equations, *Communications in Theoretical Physics*, 56, 1009-1015.
- Murray, J.D., 2003, *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Third Edition, Springer, New York.
- Nee, J., Duan, J., 1998, Limit set of trajectories of the coupled viscous Burgers' equations, *Applied Mathematics Letters*, 11(1), 57-61.
- Nicolis, G., Prigogine, I., 1977, *Self-organization in nonequilibrium systems*, Wiley, New York.
- Pearson, J.E., 1993, Complex pattern in a simple system, *Science*, 261, 189-192.
- Pelloni, B., Dougalis, V.A., 2001, Numerical modelling of two-way propagation of non-linear dispersive waves, *Mathematics and Computers in Simulation* 55, 595-606.
- Pena, B., Perez-Garcia, C., 2001, Stability of Turing patterns in the Brusselator model, *Physical Review E*, 64(5).
- Prigogine, I., Lefever, R., 1968, Symmetry breaking instabilities in dissipative systems., *The Journal of Chemical Physics*, 48, 1695-1700.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Rashid, A., Ismail, A.I.B.Md., 2009, A Fourier Pseudospectral method for solving coupled viscous Burgers' equations, *Computational Methods in Applied Mathematics*, 9(4), 412-420.
- Reddy, J.N., 1993, *An introduction to the finite element method*, Mcgraw-Hill Book Company, Singapore.
- Reynolds, W.N., Pearson, J.E., Dawson, S.P., 1994, Dynamics of self-replicating patterns in reaction diffusion systems, *Physical Review Letters*, 72, 2797-2800.
- Robinson, M.P., Fairweather. G., 1994, Orthogonal spline collocation methods for Schrödinger-type equation in one space variable, *Numerische Mathematik*, 68(3), 355–376.
- Rong-Pei, Z., Xi-Jun, Y., Guo-Zhong, Z., 2011, Local discontinuous Galerkin method for solving Burgers' and coupled Burgers' equations, *Chinese Physics B*, 20(11), 110205.
- Russel, J.S., 1844, Report on waves, Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement. of Science (John Murray, London) pp 311–390.
- Ruuth, S.J., 1995, Implicit-explicit methods for reaction-diffusion problems in pattern formation, *Journal of Mathematical Biology*, 34, 148-176.
- Saka, B., 2012, A Quintic B-Spline Finite-Element Method for Solving the Nonlinear Schrödinger Equation, *Physics of Wave Phenomena*, 20(2), 107–117.
- Schnakenberg, J., 1979, Simple chemical reaction systems with limit cycle behavior, *Journal of Theoretical, Biology*, 81, 389-400.
- Schonbek, M.E., 1981, Existence of solutions for the Boussinesq system of equations, *Journal of Differential Equations* 42, 325-352.
- Scott, A.C., Chu, F.Y.F, McLaughlin.D.W, 1973, The soliton: A new concept in applied science. *Procc.*, IEEE 61: 1443-1483.
- Sherratt, J.A., 1997, A comparison of two numerical methods for oscillatory reaction-diffusion equations systems, *Applied Mathematics. Letters*, 10(2), 1-5.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Shirvany Y., Hayati M., Moradian R., 2007, Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation by feedforward neural networks, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13, 2132-2145.
- Smith, G.D., 1978, *Numerical solution of partial differential equations, finite difference methods*, Oxford university press, 304 p.
- Soliman A.A., 2006, The modified tanh-function method for solving Burgers-type equations, *Physica A.*, 361, 394-404.
- Soliman A.A., 2009, On the solution of two-dimensional coupled Burgers' equations by variational iteration method, *Chaos, Solitons and Fractals*, 40(3), 1146-1155.
- Somathilake, L.W., 2009, Numerical solutions of reaction-diffusion systems with coupled diffusion terms, *Ruhuna Journal of Science*, 4, 1-12
- Srivastava, V.K., Awasthi, M.K., Tamsir, M., 2013, A fully implicit Finite-difference solution to one dimensional Coupled Nonlinear Burgers' equations, *International Journal of Mathematical, Computational, Physical and Quantum Engineering*, 7(4), 417-422.
- Srivastava, V.K., Tamsir, M., Awasthi, M.K., Sing, S., 2014, One-dimensional coupled Burgers' equation and its numerical solution by an implicit logarithmic finite-difference method, *Aip Advances*, 4, 037119
- Strauss, W.A., 1978, The non-linear Schrodinger equation, in *Contemporary Developments in continuum Mechanics*, edited by G. M. de la Penha and L. A. Medeiros, North-Holland, NewYork, 452 p.
- Sweilam, N.H., Khader, M.M., 2009, Exact solutions of some coupled partial diferential equations using the homotopy perturbation method, *Computers and Mathematics with Applications* 58, 2134-2141.
- Şahin, A., 2009, Reaksiyon-difüzyon denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar yöntemi ile nümerik çözümleri, *Doktora Tezi*, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 130 s. (Yayımlanmamış).

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Taşcan, F., 2002, İntegrallenebilirlik ve pertürbasyon teori, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 63 s. (Yayımlanmamış).
- Taha, T.R., Ablowitz, M.J., 1984, Analytical and Numerical Aspects of Certain Nonlinear Evolution Equations. II. Numerical, Nonlinear Schrödinger Equation, Journal of Computational Physics, 55, 203-230.
- Thomas, J.W., 1995, Numerical partial differential equations, Springer, 437 p.
- Tourigny, Y., Morris, J.LI., 1988, An investigation into the effect of product approximation in the numerical solution of the cubic nonlinear Schrödinger equation. Journal of Computational Physics, 76, 103–130.
- Twizell, E.H., Wang, Y., Price, W.G., Fakhr, F., 1994, Finite-Difference methods for solving the reaction-diffusion equations of a simple isothermal chemical system, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 10, 435-454.
- Twizell, E.H., Gumel, A.B., Cao, Q., 1999, A second order scheme for the "Brusselator" reaction-diffusion system, Journal of Mathematical Chemistry, 26, 297-316.
- Whitham, G.B., 1974, Linear and nonlinear waves, Wiley, New York, 636 p.
- Wu, S.L., Liu, S.Y., 2009, Asymptotic speed of spread and travelling fronts for a nonlocal reaction-diffusion model with distributed delay, Applied Mathematical Modelling, 33, 2757-2765.
- Yang, L., 2012, Asymptotic regularity and attractors of the reaction–diffusion equation with nonlinear boundary condition, Nonlinear Analysis: Real World Applications 13, 1069–1079.
- Yıldırım, A., Kelleci, A., 2011, An efficient numerical method for solving coupled Burgers' equation by combining homotopy perturbation and padé techniques, Numer. Meth. Part. Diff. Equ., 27(4), 982-995.
- Zabusky, N.J., Kruskal, M.D, 1965, Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and recurrence of initial states, Physical Review Letters 15, 240-243.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Zegeling, P.A., Kok, H.P., 2004, Adaptive moving mesh computations for reaction diffusion systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168, 519-528.

Zakharov, V.E., Shabat, A.B., 1972, Exact theory of two dimensional self focusing and one dimensional self waves in nonlinear media. *Soviet Physics JETP*, 34, 62-69.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Özlem Ersoy Hepson

Uyruğu: T.C.

Doğum Yeri, Tarihi: Eskişehir, 14.04.1988

Medeni Hali: Evli

İş Adresi:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik-Bilgisayar Bölümü
E-posta: ozersoy@ogu.edu.tr

Eğitim Bilgileri:

Doktora:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
(2012-2015)

Yüksek Lisans:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
(2009-2012)

Lisans:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
(2006-2009)

İş Deneyimi:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik-Bilgisayar Bölümü (Araştırma Görevlisi)
(2009-)