Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Abelyenlik

Merve Yılmaz

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Haziran 2016

Abelian Structure of the Crossed Module Category

Merve Yılmaz

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Science

June 2016

Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Abelyenlik

Merve Yılmaz

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof.Dr.Zekeriya ARVASİ

Haziran 2016

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Merve Yılmaz'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Abelyenlik**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof.Dr.Zekeriya ARVASİ

İkinci Danışman **:** Yard.Doç.Dr.Kamil ARI

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof.Dr.Zekeriya ARVASİ

Üye : Prof.Dr.Erdal ULUALAN

Üye : Doç.Dr.İlker AKÇA

Üye : Yrd.Doç.Dr.Ummahan EGE ARSLAN

Üye : Yrd.Doç.Dr.Alper ODABAŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof.Dr.Zekeriya Arvasi danışmanlığında hazırlamış olduğum “Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Abelyenlik” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 17/06/2016

Merve Yılmaz

ÖZET

Abelyen kategori kavramını daha iyi anlamamızı sağlayacak bazı temel kavramlara ve önermelere yer verilecektir. Daha sonra, tam kategori tanımı verilerek, R halkası üzerindeki modüller kategorisinin bir tam kategori olduğu gösterilecektir. İkinci bölümde toplamsal kategori kavramına yer verilip örnek olarak Rmod gösterilmiştir. Tam ve toplamsal bir kategorinin abelyen olduğunu göstermek için kullanacağımız bazı önermeler ispatlanmıştır. Abelyen kategori tanımı verilerek Rmod kategorisi ayrıntılı olarak incelenmiştir. Son olarak bir kategorinin abelyen olması için gerek ve yeter koşulun tam ve toplamsal olması gösterilmiştir. Son bölümde yarı-abelyen kategori tanımı ve değişmeli cebirler ve gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller kategorilerinin abelyenliği incelenecektir.

Anahtar Kelimeler : Abelyen Kategori, Tam Kategori, Yarı-abelyen Kategori, Toplamsal Kategori

SUMMARY

This master thesis consists of three chapters. In the first chapter, we recall some fundamental notions which are related to the notion of the abelian category. Later the definition of the Barr-exact category is given and exactness of the category of modules over a ring is shown. In the second chapter the notion of additive category takes place with the category of modules over a commutative ring as an example. In order to show an additive and exact category is abelian, some propositions and lemmas are introduced. In this chapter abelian category is defined and the motivating example RMod is deeply examined. Moreover the Tierney equation which states abelian category is exact and additive is proven. At the last chapter the definition of semi abelian categories and as an example the category of groups is given. The abelian structure of category of crossed modules over commutative algebras and over groups is examined.

Keywords: Abelian category, Barr-exact category, Semi-abelian category, Additive Category

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında bana danışmanlık ederek beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan değerli hocam, sayın,

Prof.Dr. Zekeriya ARVASİ'ye

her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım, sayın,

Yrd.Doç.Dr. Kamil ARI
ve
Yrd.Doç.Dr. Ummahan EGE ARSLAN'a

çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan öncelikle anneme ve değerli aileme

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Abelyen grupları model alan abelyen kategoriler homolojik cebirin uygulanabildiği en genel kategorilerdir. İlk abelyen kategori fikri Mac Lane (1963) tarafından ortaya atılmış olsa da yaklaşımı abelyen gruplar kategorisinden tamsayılara benzeyen bazı özel objelere sahip toplamsal kategoriler ile sınırlı kalır. Daha öncesinde benzer yaklaşım Buchbaum (1955) tarafından "Tam Kategori" tanımlanarak kullanılmıştır; ki bu sonlu toplam gerekliliği olmayan bir abelyen kategori tanımıdır. Ayrıca birden fazla değişkenli funktorlar üzerinde çalışabilmek için $A \oplus B$ direkt toplamların varlığı aksiyomunu ekleyerek abelyen kategori tanımını elde etmiş olur. Fakat *abelyen kategori* ismi ilk olarak Grothendieck (1957) tarafından kullanılır. Kendisi homolojik cebirin temellerinden sayılan ünlü Tohoku makalesinde abelyen grupların desteleri (sheaf) ile halkalar üzerindeki modüllerin benzer yapıya sahip olduğunu ve homolojik cebirlerinin aynı yoldan geliştirilebileceğini gözlemler ve aksiyomatik abelyen kategori tanımı verir.

Tam kategori kavramı Quillen (1972) tarafından toplamsal kategoriler için yapılmıştır. Barr (1971) ise sıfır obje gerekliliği olmayan ve normal epimorfizmleri düzenli epimorfizmlerle değiştirerek yeni bir tam kategori tanımı vermiştir. Barr'ın tamlık koşulu her denklik bağıntısının etkili olması evrensel cebirlerin bütün çeşitleri için sağlanır ve Tierney eşitliğini sağlayacak özelliktedir.

(Barr-tam + Toplamsal = Abelyen)

2. TAM KATEGORİ

2.1 Giriş

Bu bölümde öncelikle, abelyen kategori kavramını daha iyi anlamamızı sağlayacak bazı temel kavramlara ve önermelere yer verilecektir. Daha sonra, tam kategori tanımı verilerek, R halkası üzerindeki modüller kategorisinin bir tam kategori olduğu gösterilecektir. Son olarak yarı-abelyen kategori tanımı ve örnek olarak değişmeli cebirler üzerindeki çaprazlanmış modüller kategorisi verilecektir.

2.2 Temel Kavramlar

Bu kısımda Mac Lane'den (1998) faydalanılarak temel kategori bilgisi sağlayacak bazı tanımlara ve önermelere yer verilecektir.

Tanım 2.1. $\mathscr{C}$ ile göstereceğimiz kategori aşağıdaki verilen ve istenenleri sağlayan bir sistemdir.

Verilenler:

- Objeler sınıfı : $Ob(\mathscr{C})$ ile göstereceğimiz, elemanları $X,Y,A,B,...$ olan objeler sınıfı.
- Morfizmler kümesi :X,Y objeleri için

$$\mathscr{C}(X,Y) = Mor_{\mathscr{C}}(X,Y) = \{f|f : X \to Y\}$$

  şeklinde ifade edilen, elemanları morfizm (ok) olarak adlandırılan küme
- Kompozisyon işlemi; $Ob(\mathscr{C})$ de her X,Y,Z objeleri için

$$\begin{array}{rcl} \circ : \mathscr{C}(Y,Z) \times \mathscr{C}(X,Y) & \to & \mathscr{C}(X,Z) \\ (g,f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

İstenenler:

- Asosyatiflik: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ morfizmleri için

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

dir.

- Birimlilik: X,Y objeleri ve $f: X \to Y$ morfizmi için $1_X \in \mathscr{C}(X,X)$ ve

$$1_Y \circ f = f = f \circ 1_X$$

şeklindedir.

Örnek 1. Set ile gösterilen kümeler kategorisinde;

- Ob(Set) : Kümeler

- Mor(Set) $= \{f | f: X \to Y, X, Y \in Ob(Set)\}$

- Kompozisyon : $f, g \in Mor$(Set) fonksiyonları için $g \circ f$ bileşke işlemidir.

Benzer şekilde

- **Grp** Gruplar ve grup homomorfizmleri
- **Mod-R** R-modüller ve modül homomorfizmleri
- **Rng** Halkalar ve halka homomorfizmleri
- **R-Alg** R-cebirleri ve R-cebir homomorfizmleri
- **Vect** vektör uzayları ve lineer dönüşümler
- **Top** Topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonlar

diğer kategori örnekleridir.

$\mathscr{C} = (Ob(\mathscr{C}), Mor(\mathscr{C}), \circ)$ kategorisi verildiğinde * işlemi

$$f * g = g \circ f$$

şeklinde tanımlı olmak üzere $\mathscr{C}^{op} = (Ob(\mathscr{C}), Mor(\mathscr{C}), *)$ kategorisine $\mathscr{C}$ kategorisinin duali denir.

Dahası P, bir $\mathscr{C}$ kategorisinin morfizm ve objelerini içeren bir özellik ise onun duali olan P^{op} özelliği $\mathscr{C}^{op}$ kategorisinin özelliğine karşılık gelir; diğer bir deyişle, okları tersine çevirerek Pden elde edilen özelliktir.

Tanım 2.2. $\mathscr{C}$ ve $\mathscr{D}$ birer kategori olsun.

1. $\mathscr{C}$ kategorisindeki objeleri $\mathscr{D}$ kategorisindeki objelere, $\mathscr{C}$-morfizmleri $\mathscr{D}$-morfizmlere götüren ve bileşkeyi koruma; $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ ile birimi koruma; $F(1_A) = 1_F(A)$ özelliklerini sağlayan özel F fonksiyonuna *funktor* denir.

2. $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funktoru, eğer $F : Mor_{\mathscr{C}}(A,B) \to Mor_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$ örten ise *dolu (full)* funktor, birebir ise *sadık (faithful)* funktor adını alır.

3. $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funktoruna tam dizileri koruyorsa; yani $0 \to A \to B \to C \to 0$ tam dizi iken $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ tam dizi oluyorsa *tam (exact)* funktor denir.

Tanım 2.3. $\mathscr{C}$ bir kategori ve $I \in Ob(\mathscr{C})$ olsun. Her $A \in Ob(\mathscr{C})$ için $Mor_{\mathscr{C}}(I,A)$ kümesinin bir tek elemanı varsa I objesine *başlangıç (initial)* objesi denir.

Başlangıç objesinin dual kavramı; bir $T \in Ob(\mathscr{C})$ objesi ile her $A \in Ob(\mathscr{C})$ için $Mor_{\mathscr{C}}(A,T)$ kümesinin bir tek elemanı varsa T objesine *bitiş (terminal)* objesi denir. Eğer I hem başlangıç hem de bitiş objesi ise *sıfır (zero)* obje adını alır.

Tanım 2.4. Bir $\mathscr{C}$ kategorisinde verilen $f,g : A \rightrightarrows B$ paralel morfizmleri için aşağıdaki özellikleri sağlayan (E,e) ikilisine *eşitleyici (equalizer)* denir ve $Eq(f,g)$ ile gösterilir.

i) $f \circ e = g \circ e$

ii) Herhangi bir $e' : E' \to A$ morfizmi ile $f \circ e' = g \circ e'$ oluyorsa

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
E' \arrow[u, dotted, "k"] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan $e \circ k = e'$ özelliğinde bir tek $k : E' \to E$ morfizmi vardır.

Eşitleyicinin dual kavramı *eş-eşitleyici (coequalizer)*dir ve $Coeq(f,g)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5. $\mathscr{C}$ bir kategori ve $f : A \to B$ bir morfizm olsun. $u \circ f = v \circ f$ eşitliğini sağlayan her $u,v : B \to C$ morfizmleri için $u = v$ oluyorsa, f dönüşümüne *epimorfizm* denir. Eğer $f = Coeq(u,v)$ olacak şekilde $u,v : C \to A$ morfizmleri bulunabiliyorsa f morfizmine *düzenli* epimorfizm denir.

Tanım 2.6. $\mathscr{C}$ bir kategori ve $f : A \to B$ bir morfizm olsun. $f \circ u = f \circ v$ eşitliğini sağlayan her $u,v : C \to A$ morfizmleri için $u = v$ oluyorsa, f dönüşümüne *monomorfizm* denir.

Tanım 2.7. $\mathscr{C}$ bir kategori ve $A, B \in Ob(\mathscr{C})$ olsun. $A \times B$ bir obje ve p_1, p_2 projeksiyon morfizmleri olmak üzere, herhangi $\pi_1 : C \to A, \pi_2 : C \to B$ morfizmleri için

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan bir tek $(\pi_1, \pi_2) : C \to A \times B$ morfizmi varsa $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ üçlüsüne *çarpım (product)* denir.

Çarpım kavramının duali *eş-çarpım (coproduct)*dır.

Tanım 2.8. $\mathscr{C}$ kategorisinde

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı verilsin. Aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak tek bir $h : Q \to P$ morfizmi varsa yukarıdaki diyagrama geri çekme (pullback) denir.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\
 & P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\
 & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Geri çekme objesinin duali *ileri itme (push out)*nesnesidir.

Önerme 2.1. $\mathscr{C}$ kategorisinde şekildeki değişmeli diyagramda (2) nolu kare geri çekilim ise

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h''"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & D \arrow[d, "h"'] \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

(1) nolu karenin geri çekilim olması için gerek ve yeter koşul dış karenin geri çekilim olmasıdır.

İspat. İlk olarak (1) nolu karenin geri çekilim olduğunu kabul edelim. Dış karenin geri çekilim olduğunu göstermek için şekildeki değişmeli diyagramı alalım.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[drrr, bend left, "p_1"] \arrow[drr, dotted, "i"] \arrow[dr, dotted, "j"] \arrow[ddr, bend right, "p_2"'] & & & \\
& F \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h''"'] & E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"'] & D \arrow[d, "h"] \\
& A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Burada $h \circ p_1 = f \circ (g \circ p_2)$ ve sağ kare geri çekilim olduğundan diyagramı değişmeli yapan bir tek $i : P \to E$ vardır. Benzer şekilde sol kare için $h' \circ i = g \circ p_2$ olduğundan diyagramı değişmeli yapan bir tek $j : P \to F$ vardır.

İkinci olarak dış karenin geri çekilim olduğunu kabul edelim. (1) nolu karenin geri çekilim olduğunu göstermek için

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\
& & E \arrow[d, "h'"'] \\
& A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramını şekildeki gibi genişletelim.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[drrr, bend left, "f' \circ q_1"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[dr, dotted, "q"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & & \\
& F \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h''"'] & E \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"'] & D \arrow[d, "h"] \\
& A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Dış kare geri çekilim olduğundan $f' \circ g' \circ q = f' \circ q_1$ ve $h'' \circ q = q_2$ yapan bir tek $q : Q \to F$ vardır. O halde sağ karenin de geri çekilim olması verilen değişmeli diyagram için q_1 morfizminin biricik olmasını gerektirir. Böylece $g' \circ q = q_1$ olduğundan q morfizmi sol kare için de evrenselliği sağlar. □

Önerme 2.2. Çarpımlara sahip bir $\mathscr{C}$ kategorisinde $f : A \to C$ ve $g : B \to C$ morfizmleri ve $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ çarpımı için verilen değişmeli diyagramda

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, "e"] & & A \arrow[dd, "f"] \\
& A \times B \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] & \\
B \arrow[rr, "g"'] & & C
\end{tikzcd}$$

dış karenin geri çekilim olması için gerek ve yeter koşul $(E, e) = Eq(f \circ \pi_1, g \circ \pi_2)$ olmasıdır.

İspat. $q_1 : Q \to A$ ve $q_2 : Q \to B$, $f \circ q_1 = g \circ q_2$ olacak şekilde iki morfizm alalım. Çarpım tanımından $\pi_1 \circ q = q_1$ ve $\pi_2 \circ q = q_2$ eşitliklerini sağlayan bir tek $q : Q \to A \times B$ morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd}
& Q \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] \arrow[d, dotted, "q"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

O halde $f \circ \pi_1 \circ q = g \circ \pi_2 \circ q$ olur. $(E, e) = Eq(f \circ \pi_1, g \circ \pi_2)$ olduğundan $e \circ p = q$ olacak şekilde bir tek $p : Q \to E$ vardır. Böylece

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dotted, "p"] \arrow[drrr, bend left, "q_1"] \arrow[dddr, bend right, "q_2"'] & & & \\
& E \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, "e"] & & A \arrow[dd, "f"] \\
& & A \times B \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] & \\
& B \arrow[rr, "g"'] & & C
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı geri çekilimdir. □

Tanım 2.9. $\mathscr{C}$ kategorisi tüm sonlu limitlere sahipse *sonlu bütün (finitely complete)* kategori denir. Diğer bir deyişle $\mathscr{C}$ kategorisi terminal objeye, tüm ikili çarpımlara ve eşitleyicilere sahipse sonlu bütündür.

Tanım 2.10. $\mathscr{C}$ sıfır objeye sahip sonlu bütün bir kategori olsun. $\mathscr{C}$ kategorisinde verilen $f : A \to B$ morfizminin *çekirdeği (kernel)* kendisi ve $0_B : 0 \to B$ başlangıç morfizminin geri çekmesi şeklinde tanımlanır.

$$\begin{tikzcd} Ker[f] \arrow[r, "ker(f)"] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r, "0_B"] & B \end{tikzcd}$$

Çekirdek morfizminin dual kavramı *eş-çekirdek (cokernel)* ise f morfizminin kendisi ve $\tau_A : A \to 0$ bitiş morfizmi ile ileri itmesidir.

Tanım 2.11. $\mathscr{C}$ bir kategori ve $A \in Ob(\mathscr{C})$ olsun. Bir R objesine $(r_1, r_2) : R \to A \times A$ monomofizm olacak şekilde verilen $r_1, r_2 : R \to A$ dönüşümleri ile birlikte A üzerinde bağıntı denir ve (R, r_1, r_2) veya $R \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} A$ ile gösterilir.

$\mathscr{C}$ kategorisindeki her A objesi için;

$$R_A = \{(r_1 a, r_2 a) | a \in \mathscr{C}(A, R)\}$$

kümesine $\mathscr{C}(A, R)$ kümesi üzerindeki R ile üretilen *ilgili bağıntı* denir.
Bir (R, r_1, r_2) bağıntısı için

- Birim dönüşüm $(1_X, 1_X) : X \to X \times X, R$ üzerinden bileşenlerine ayrışıyorsa; yani $r_1 r = 1_X = r_2 r$ olacak şekilde $r : X \to R$ varsa R bağıntısı *yansıyan*dır.

- Bir dönüşüm $r : R \to R$ için $r_1 s = r_2$ ve $r_2 s = r_1$ koşulları sağlanıyorsa R *simetrik*tir.

- geri çekme diyagramı

$$\begin{tikzcd} R \times_X R \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & R \arrow[d, "r_1"] \\ R \arrow[r, "r_2"'] & X \end{tikzcd}$$

  göz önüne alındığında, $r_1 t = r_1 p_1, r_2 t = r_2 p_2$ olacak şekilde $t : R \times_X R \to R$ dönüşümü varsa R *geçişken*dir.

A objesi üzerinde tanımlı bir R bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişkenlik özelliklerini sağlıyorsa *denklik bağıntısı* adını alır.

Örnek 2. Set, Grp kategorilerindeki denklik bağıntısı küme teoretik denklik bağıntısına denktir.

Tanım 2.12. Bir $\mathscr{C}$ kategorisinde verilen $f : A \to B$ morfizminin kendisi ile geri çekmesine *çekirdek ikilisi* denir; yani f morfizminin eşitleyicisi

$$Eq(f) = \{(x,y) \in A \times A | f(x) = f(y)\}$$

ve $f$nin kendisiyle geri çekme diyagramından

$$\begin{tikzcd}
Eq(f) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

elde edilen p_1, p_2 morfizmleri ile A üzerinde tanımlanan denklik bağıntısı

$$p_1, p_2 : Eq(f) \rightrightarrows A$$

f morfizminin çekirdek ikilisidir.

Önerme 2.3. Herhangi bir $\mathscr{C}$ kategorisinde aşağıdaki özellikler denktir;

1. f monomorfizmdir
2. f morfizminin çekirdek ikilisi $\alpha = \beta$ olmak üzere (P, α, β) dir.
3. f morfizminin çekirdek ikilisi $(A, 1_A, 1_A)$ vardır.

İspat. Bir P objesi $\alpha, \beta : P \to A$ morfizmleri ile $f \circ \alpha = f \circ \beta$ özelliğini sağlıyorsa f monomorfizm olduğundan $\alpha = \beta$ elde ederiz. Buradan şekildeki diyagram geri çekilimdir;

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dotted, "\phi"] \arrow[drr, bend left, "1_A"] \arrow[ddr, bend right, "1_A"'] & & \\
& P \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

$\alpha \circ \phi = \beta \circ \phi = 1_A$ özelliğini sağlayan bir tek $\phi : A \to P$ vardır. Aynı zamanda $1_A \circ \alpha = \alpha$ olduğundan $A \simeq P$ izomorfiktir.

Şimdi $\alpha = \beta$ olmak üzere (P, α, β)nın f morfizminin çekirdek ikilisi olduğunu kabul edelim. O halde başka bir (Q, q_1, q_2) ikilisi için $f \circ q_1 = f \circ q_2$ oluyorsa geri çekilim tanımı gereği bir tek $q : Q \to P$ morfizmi $q_1 = \alpha \circ q = \beta \circ q = q_2$ özelliğini sağlar. Bu durumda $f \circ q_1 = f \circ q_2$ ise $q_1 = q_2$ elde ederiz. Böylece f monomorfizmdir. $\square$

Tanım 2.13. *A objesi üzerinde tanımlı bir R bağıntısı için (r_1, r_2) ikilisinin eş-eşitleyicisi $q = Coeq(r_1, r_2)$ varsa ve (r_1, r_2) morfizmleri q morfizminin çekirdek ikilisi ise (R, r_1, r_2) denklik bağıntısına* etkili (effective) bağıntı *denir*

Örnek 3. **Set** kategorisinde verilen bir denklik bağıntısı $R \subseteq A \times A$ ile

$$R \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{q} A/R$$

diyagramı elde edilir. Bu durumda q dönüşümü (r_1, r_2) ikilisinin eş-eşitleyicisi olur.
Diğer yandan $q(a) = q(a')$ ancak ve ancak $(a, a') \in R$ olduğunda sağlandığından (r_1, r_2) ikilisi q dönüşümünün çekirdek ikilisidir.

2.3 Tam Kategori

Tanım 2.14. *Sonlu bütün $\mathscr{C}$ kategorisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa* düzenli (Regular) *kategoridir.*

1. *Her çekirdek ikilisinin eş-eşitleyicisi vardır*

2. *Düzenli epimorfizmler geri çekme altında kararlıdır; yani*

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

geri çekme diyagramında f düzenli epimorfizm iken q morfizmi de düzenli epimorfizmdir.

Önerme 2.4. *Düzenli kategoride her morfizm bir monomorfizm ve bir düzenli epimorfizmin bileşkesi olarak yazılabilir.*

İspat. Bir $f \in \mathscr{C}(A, B)$ alalım. f morfizminin çekirdek ikilisi (u, v) ve bu çekirdek ikilisinin eş-eşitleyicisi $p = cok(u, v)$ olsun. Bu durumda $f \circ u = f \circ v$ olduğundan $f = i \circ p$ koşulunu sağlayan bir tek $i : I \to B$ vardır. Böylece i nin monomorfizm olduğunu göstermemiz yeterlidir. O halde (r, s) i mofizminin çekirdek ikilisi olsun. Bu durumda $i \circ p \circ u = i \circ p \circ v$ olduğundan

$r \circ q = p \circ u, s \circ q = p \circ v$ koşulunu sağlayan bir tek q epimorfizmi vardır.

$$
\begin{tikzcd}
A \times_B A \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[d, dotted, "q"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & B \\
I \times_B I \arrow[r, shift left, "r"] \arrow[r, shift right, "s"'] & I \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}
$$

diyagram değişmeli olduğundan $r \circ q = p \circ u = p \circ v = s \circ q$ bize $r = s$ eşitliğini verir. O halde çekirdek ikilisi (r,s) eşit morfizmler olduğundan Önerme 2.3 gereği i monomorfizmdir.

Elde ettiğimiz faktörizasyon, p' düzenli epimorfizm ve i' monomorfizm olmak üzere farklı bir faktörizasyon $f = A \xrightarrow{p'} I' \xrightarrow{i'} B$ için $\sigma \circ p = p'$ olacak şekilde bir $\sigma : I \to I'$ izomorfizmi bulunabiliyorsa izomorfizm farkıyla tektir. Bu durumda

$$i' \circ p' \circ u = f \circ u = f \circ v = i' \circ p' \circ v$$

ve i monomorfizm olduğundan

$$p' \circ u = p' \circ v$$

elde ederiz. Burada $p = Coeq(u,v)$ olduğu için $\sigma \circ p = p'$ olacak şekilde bir tek $\sigma : I \to I'$ morfizmi vardır. O halde

$$i' \circ \sigma \circ p = i' \circ p' = f = i \circ p$$

ve p epimorfizm olduğu için

$$i' \circ \sigma = i$$

olur.

$$
\begin{tikzcd}
A \times_B A \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"] \arrow[ddr, "p'"'] & & B \\
& & I \arrow[ur, "i"] \arrow[d, dotted, "\sigma"] & \\
& & I' \arrow[uur, "i'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ayrıca bazı $k, l : U \rightrightarrows A$ morfizmleri için $p' = Coeq(k,l)$ olsun. Bu durumda

$$i \circ p \circ k = i' \circ p' \circ k = i' \circ p' \circ l = i \circ p \circ l$$

ve i monomorfizm olduğundan

$$p \circ k = p \circ l$$

elde ederiz. Burada $p' = Coeq(k,l)$ olduğu için $\tau \circ p' = p$ olacak şekilde bir tek $\tau : I' \to I$ morfizmi bulunur. Böylece

$$i \circ \tau \circ \sigma \circ p = i \circ \tau \circ p' = i \circ p$$

eşitliğinden i monomorfizm ve p epimorfizm olduğu için

$$\tau \circ \sigma = id_E$$

ve benzer şekilde

$$\sigma \circ \tau = id_{E'}$$

elde ederiz. Sonuç olarak $f = i \circ p$ faktörizasyonu izomorfizm farkıyla tektir.

Tanım 2.15. Düzenli bir $\mathscr{C}$ kategorisinde her denklik bağıntısı etkili ise $\mathscr{C}$ye *tam (Barr-Exact)* kategori denir.

Örnek 4. R değişmeli halkası üzerinde tanımlı modüllerin kategorisi RMod tam kategoridir.

1) $f : M \to N$ bir R-lineer dönüşüm olsun. Öncelikle f modül homomorfizminin çekirdek ikilisinin varlığını gösterelim. Diğer deyişle p_1, p_2 izdüşüm dönüşümleri ve

$$\begin{tikzcd} M \times_N M \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & M \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

diagramının geri çekilim diagramı olduğunu gösterelim.

İlk olarak her $(m_1, m_2) \in M \times_N M$ için

$$f \circ p_1(m_1, m_2) = f(m_1) = f(m_2) = f \circ p_2(m_1, m_2)$$

olduğundan diagram değişmelidir. Şimdi başka bir M' R-modülü ve $h_1, h_2 : M' \to M$ R-lineer dönüşümleri için

$$fh_1 = fh_2$$

oluyorsa;

$$h(m') = (h_1(m'), h_2(m'))$$

şeklinde tanımlı $h : M' \to M \times_N M$ R-lineer dönüşümünün

$$p_1 h = h_1 \text{ ve } p_2 h = h_2$$

özelliğini sağlayan tek modül homomorfizmi oldğunu gösterelim. Öncelikle

$$p_1 \circ h(m') = p_1(h_1(m'),h_2(m')) = h_1(m')p_2 \circ h(m') = p_2(h_1(m'),h_2(m')) = h_2(m')$$

olup her $m' \in M'$ için

$$p_1h = h_1 \text{ ve } p_2h = h_2$$

elde edilir. Şimdi h',h ile aynı özelliklere sahip olsun. Yani $h' : M' \to M \times_N M$ ve $p_1h' = h_1, p_2h' = h_2$ olup her $m' \in M'$ için $h'(m') = (x,y)$ ise

$$p_1 \circ h'(m') = p_1(x,y) = x = h_1(m')p_2 \circ h'(m') = p_2(x,y) = y = h_2(m')$$

elde edilir. Bu durumda her $m' \in M'$ için

$$h'(m') = (x,y) = (h_1(m'),h_2(m')) = h(m')$$

olup

$$h = h'$$

bulunur. Yani h R-lineer dönüşümü bu özelliği sağlayan tek dönüşümdür. Böylece RMod kategorisinde her morfizmin çekirdek ikilisi var olup geri çekilim diagramı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "h_1"] \arrow[ddr, bend right, "h_2"'] & & \\
& M \times_N M \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & M \arrow[d, "f"] \\
& M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

Şimdi (p_1, p_2) çekirdek ikilisinin eş-eşitleyiciye sahip olduğunu görelim. M R-modülü için $x = (m_{,}m_2) \in M \times_N M$ olmak üzere

$$(p_1 - p_2)(x) = p_1(x) - p_2(x) = m_1 - m_2$$

elemanları ile üretilen

$$Im(p_1 - p_2) = \{m_1 - m_2 | (m_1, m_2) \in M \times_N M\}$$

alt modülünü alalım. Bu durumda $M/Im(p_1 - p_2)$ bölüm modülü ile

$$\begin{aligned} q : M &\longrightarrow M/Im(p_1 - p_2) \\ m &\longmapsto [m] \end{aligned}$$

kanonik dönüşümünün (p_1, p_2) ikilisinin eş-eşitleyicisi olduğunu gösterelim. Her $(m_1, m_2) \in M \times_N M$ için

$$\begin{aligned} q \circ p_1 = q \circ p_2 &\Leftrightarrow q \circ p_1(m_1, m_2) = q \circ p_2(m_1, m_2) \\ &\Leftrightarrow q(m_1) = q(m_2) \\ &\Leftrightarrow [m_1] = [m_1] \\ &\Leftrightarrow m_1 - m_2 \in Im(p_1 - p_2) \end{aligned}$$

olduğundan

$$M \times_N M \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} M \xrightarrow{\ q\ } M/Im(p_1 - p_2)$$

diagramı değişmelidir. Bir Q R-modülü ile $q' : M \to Q$ R-lineer dönüşümü için

$$q' \circ p_1 = q' \circ p_2$$

oluyor ise

$$u \circ q = q'$$

özelliğini sağlayan

$$\begin{aligned} u : M/Im(p_1 - p_2) &\longrightarrow Q \\ [m] &\longmapsto q'(m) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı u dönüşümü bir tektir. Burada her $[m_1], [m_2] \in M/Im(p_1 - p_2)$ için

$$[m_1] = [m_2] \Longrightarrow m_1 - m_2 \in Im(p_1 - p_2)$$

iken

$$\begin{aligned} u([m_1]) - u([m_2]) &= q'(m_1) - q'(m_2) \\ &= q' \circ p_1(m_1, m_2) - q' \circ p_2(m_1, m_2) \\ &= 0 (\because q' p_1 = q' p_2) \end{aligned}$$

olduğundan u iyi tanımlıdır. Ayrıca her $[m_1],[m_2] \in M/Im(p_1-p_2)$ ve $r \in R$ elemanları için

$$\begin{aligned} u([m_1]+[m_2]) &= u([m_1+m_2]) \\ &= q'(m_1+m_2) \\ &= q'(m_1)+q'(m_2) \\ &= u([m_1])+u([m_2]) \end{aligned}$$

ve

$$u(r[m_1]) = u([rm_1]) = q'(rm_1) = rq'(m_1) = ru([m_1])$$

olduğundan u R-modül homomorfizmidir.

Her $m \in M$ için

$$u \circ q(m) = u([m]) = q'(m)$$

olup

$$u \circ q = q'$$

elde edilir. Ayrıca u' ve u dönüşümlerinin aynı özellikte iki dönüşüm olduğunu kabul edelim. Yani

$$u' : M/Im(p_1-p_2) \to Q$$

ve

$$u' \circ q = q'$$

olsun. Bu durumda her $m \in M$ için

$$q'(m) = u' \circ q(m) = u'([m])$$

ve her $[m] \in M/Im(p_1-p_2)$ için

$$u'([m]) = q'(m) = u([m])$$

olduğundan $u' = u$ olup u bir tektir.

Sonuç olarak $q,(p_1,p_2)$ çekirdek ikilisinin eş-eşitleyicisi olup aşağıdaki diagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} M\times_N M \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & M \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & M/Im(p_1-p_2) \arrow[d, dotted, "\exists! u"] \\ & & I \end{tikzcd}$$

2)RMod kategorisinde düzenli epimorfizmler, yani örten homomorfizmler geri çekilim altında kararlıdır. Diğer deyişle f örten R-modül homomorfizminin herhangi bir g R-modül homomorfizmi ile

$$A\times_B C = \{(a,c)|f(a)=g(c)\}$$

geri çekilim objesi olmak üzere

$$\begin{tikzcd} A\times_B C \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

diagramında verilen f' dönüşümü de örten R-modül homomorfizmidir. Çünkü her $c\in C$ için en az bir $a\in A$ vardır ki $g(c)=f(a)$ olur. Bu durumda $(a,c)\in A\times_B C$ olup $f'(a,c)=c$ eşitliği gereği f' dönüşümünün örten olduğu görülür.

3) (R,p_1,p_2) R-modüller kategorisinde bir M R-modülü üzerinde tanımlı denklik bağıntısı olsun. Bu durumda M/R bölüm modülü ile

$$\begin{aligned} q: M &\longrightarrow M/R \\ m &\longmapsto [m] \end{aligned}$$

kanonik dönüşümünü alalım. Böylece $p_1,p_2: R\rightrightarrows M$ izdüşüm dönüşümleri her $(a,b)\in R$ için $p_1(a,b)=a$ ve $p_2(a,b)=b$ tanımlı olup

$$q\circ p_1(a,b)=q(a)=[a]=[b]=q(b)=q\circ p_2(a,b)$$

bulunur ve

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & M \arrow[r, "q"] & M/R \end{tikzcd}$$

değişmeli diagramı elde edilir. Böylece $q,(p_1,p_2)$ ikilisinin eş-eşitleyicisidir.

Şimdi (p_1,p_2) ikilisinin q dönüşümünün çekirdek ikilisi olduğunu gösterelim. Bir M'

R-modülü ile $f,g : M' \rightrightarrows R$
$$q \circ f = q \circ g$$
özelliğini sağlayan R-modül homomorfizmleri alalım. Herhangi bir $m' \in M'$ için
$$[f(m')] = q(f(m')) = q(g(m')) = [g(m')]$$
eşitliğinden $(f(m'), g(m') \in R$ olur. O halde
$$h(m') = (f(m'), g(m'))$$
şeklinde tanımlı
$$h : M' \to R$$
R-modül homomorfizmi
$$p_1 \circ h(m') = p_1(f(m'), g(m')) = f(m')$$
$$p_2 \circ h(m') = p_2(f(m'), g(m')) = g(m')$$
özelliklerini sağladığından
$$p_1 h = f \text{ ve } p_2 h = g$$
elde edilir. Ayrıca bir
$$\begin{aligned} h' : M' &\longrightarrow R \\ m' &\longmapsto (r_1, r_2) \end{aligned}$$
R-modül homomorfizmi için
$$p_1 h' = f \text{ ve } p_2 h' = g$$
özellikleri sağlanıyorsa
$$f(m') = p_1 \circ h'(m') = p_1(r_1, r_2) = r_1$$
$$g(m') = p_2 \circ h'(m') = p_2(r_1, r_2) = r_2$$
eşitlikleri bulunur. Böylece
$$h'(m') = (r_1, r_2) = (f(m'), g(m')) = h(m')$$
elde edilir. Yani $h = h'$ olup h bir tektir.

Sonuç olarak

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[dr, dotted, "\exists! h"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& R \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & M \arrow[d, "q"] \\
& M \arrow[r, "q"'] & M/R
\end{tikzcd}$$

diagramı q dönüşümünün kendisi ile geri çekme diagramı olup (p_1, p_2) ikilisi q dönüşümünün çekirdek ikilisidir. O halde RMod kategorisinde her denklik bağıntısı etkilidir.

3. ABELYEN KATEGORİ

3.1 Giriş

Bu bölümde ilk olarak toplamsal kategori tanımı verilecek ve RMod kategorisinin toplamsal kategori örneği olduğu gösterilecektir. Sonrasında tam ve toplamsal bir kategorinin abelyen olduğunu göstermemize yardımcı olacak bazı önermelere yer verilecektir. İkinci kısımda abelyen kategori tanımı verilerek RMod kategorisinin abelyen oluşu ayrıntılı olarak incelenecektir. Son kısımda abelyen bir kategorinin tam ve toplamsal oluşu incelenerek Tierney eşitliği gösterilecektir. Abelyen kategori üzerine yazılmış Freyd'in (1964) kapsamlı çalışmasından faydalanılmıştır.

3.2 Toplamsal Kategori

Tanım 3.1. Bir $\mathscr{C}$ kategorisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa *toplamsal (Additive)* kategoridir.

1. $\mathscr{C}$nin bir sıfır objesi vardır
2. $\mathscr{C}$ sonlu limitlere sahiptir
3. Her morfizm kümesi $\mathscr{C}(A,B)$ toplamsal değişmeli gruptur
4. Bu morfizmlerin bileşkesi bilineerdir; yani $f, f' \in \mathscr{C}(A,B), g, g' \in \mathscr{C}(B,C)$ morfizmleri için

$$(f+f')\circ g = (f+g)\circ(f'+g)$$
$$f\circ(g+g') = (f\circ g)+(f\circ g') \text{ eşitlikleri sağlanır.}$$

Sadece 3 ve 4 koşullarını sağlayan kategoriye *ön-toplamsal* kategori denir.

Önerme 3.1. Ön-toplamsal bir kategoride verilen iki obje A, B için aşağıdaki koşullar denktir.

1. A ve B objelerinin çarpımı (P, p_A, p_B) vardır.
2. A ve B objelerinin eş-çarpımı (P, s_A, s_B) vardır.
3. Bir P objesi ile

$$p_A\circ s_A = 1_A, p_B\circ s_B = 1_B, p_A\circ s_B = 0, p_B\circ s_A = 0,$$

$$s_A \circ p_A + s_B \circ p_B = 1_P$$

olacak şekilde

$$p_A : P \to A, \quad p_B : P \to B, \quad s_A : A \to P, \quad s_B : B \to P$$

morfizmleri vardır.

İspat. Duallik gereği (1) ve (3) koşullarının eşitliğini göstermek yeterlidir. (P, p_A, p_B) , A ve B objelerinin çarpımı olsun. O halde $p_A \circ s_A = 1_A, p_B \circ s_A = 0$ özelliklerini sağlayan bir tek $s_A : A \to P$ vardır. Benzer şekilde $p_A \circ s_B = 0, p_B \circ s_B = 1_B$ özelliklerini sağlayan bir tek $s_B : B \to P$ morfizmi vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} p_A \circ (s_A \circ p_A + s_B \circ p_B) &= p_A \circ (s_A \circ p_A) + p_A \circ (s_B \circ p_B) \\ &= (p_A \circ s_A) \circ p_A + (p_A \circ s_B) \circ p_B \\ &= (1_A \circ p_A) + (0 \circ p_B) \\ &= p_A + 0 = p_A \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} p_B \circ (s_A \circ p_A + s_B \circ p_B) &= p_B \circ (s_A \circ p_A) + p_B \circ (s_B \circ p_B) \\ &= (p_B \circ s_A) \circ p_A + (p_B \circ s_B) \circ p_B \\ &= (0 \circ p_A) + (1_B \circ p_B) \\ &= 0 + p_B = p_B \end{aligned}$$

eşitliklerinden $s_A \circ p_A + s_B \circ p_B = 1_P$ elde ederiz.

Şimdi (3) koşulunda verilen P objesinin p_A, p_B morfizmleri ile A ve B objelerinin çarpımı olduğunu gösterelim. Bir C objesi ve $f : C \to A, g : C \to B$ morfizmleri alalım ve $h : C \to P$ morfizmini $h = s_A \circ f + s_B \circ g$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} p_A \circ h &= p_A \circ s_A \circ f + p_A \circ s_B \circ g \\ &= f + 0 = f \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} p_B \circ h &= p_B \circ s_A \circ f + p_B \circ s_B \circ g \\ &= 0 \circ g = g \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[dr, "f"] & \\
B \arrow[r, shift left, "s_B"] & P \arrow[l, shift left, "p_B"] \arrow[r, shift right, "p_A"'] & A \arrow[l, shift right, "s_A"']
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olur.

Başka bir $h' : C \to P$ morfizmi $p_A \circ h' = f$ ve $p_B \circ h' = g$ özelliklerini sağlıyorsa

$$\begin{aligned}
h' &= 1_P \circ h' = (s_A \circ p_A + s_B \circ p_B) \circ h' \\
&= s_A \circ p_A \circ h' + s_B \circ p_B \circ h' \\
&= s_A \circ f + s_B \circ g \\
&= h
\end{aligned}$$

olduğundan h bu özellikteki tek morfizmdir. Böylece (P, p_A, p_B), A ve B objelerinin çarpımıdır. □

Tanım 3.2. Öntoplamsal bir kategoride A ve B objeleri için Önerme 3.1de tanımlanan (P, p_A, p_B, s_A, s_B) beşlisine *biproduct* denir ve $A \oplus B$ ile gösterilir.

Önerme 3.2. Ön-toplamsal bir kategoride verilen iki morfizm $f, g : A \rightrightarrows B$ için

$$Eq(f,g) = Ker(f-g) = Ker(g-f)$$

olur.

İspat. $Ker(f,g) = Ker(g,f)$ olduğundan, ilk eşitliği göstermemiz yeterlidir. Ön-toplamsal kategoride morfizmlerin farkından söz edebildiğimiz için bir $x : X \to A$ morfizmi alındığında $f \circ x = g \circ x$ ile $(f-g)(x) = 0$ ifadeleri eşittir. □

Örnek 5. R birimli halka üzerinde tanımlı R-modüllerin kategorisi RMod toplamsaldır.

1. M, N R-modüller olmak üzere $Hom_{RMod}(M,N)$ kümesi üzerindeki

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

şeklinde tanımlı toplama işlemi ile değişmeli gruptur. Çünkü

$$\begin{aligned}(f+g)(x+y) &= f(x+y)+g(x+y)\\ &= f(x)+f(y)+g(x)+g(y) \quad (\because f,g \sim \ \textit{R-modül homomorfizmi})\\ &= f(x)+g(x)+f(y)+g(y) \quad (\because M \sim \ \textit{toplamsal abelyen grup})\\ &= (f+g)(x)+(f+g)(y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(f+g)(r\cdot x) &= f(r\cdot x)+g(r\cdot x)\\ &= r\cdot f(x)+r\cdot g(x)\\ &= r\cdot(f(x)+g(x)) \quad (\because N \sim \ \textit{R-modül})\\ &= r\cdot(f+g)(x)\end{aligned}$$

olduğundan $(f+g)$ R-modül homomorfizmidir.

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x)+h(x)\\ &= (f(x)+g(x))+h(x)\\ &= f(x)+(g(x)+h(x))\\ &= f(x)+(g+h)(x)\\ &= (f+(g+h))(x)\end{aligned}$$

olduğundan birleşmelidir. Ayrıca $0(x)=0_N$ sıfır morfizmi birim ve her $f\in Hom_{RMod}(M,N)$ için $(-f)(x)=-f(x)$ şekilinde tanımlı $-f$ homomorfizmi f homomorfizminin toplamsal tersidir. Böylece $Hom_{RMod}(M,N)$ toplamsal gruptur. Dahası

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$$

olduğundan değişmelidir.

2. Morfizmlerin kompozisyonu $\circ : Hom(N_1,N_2)\times Hom(N_2,N_3)\to Hom(N_1,N_3)$ bilineerdir.

Çünkü; $(f+g) \in Hom(N_1,N_2)$, $h \in Hom(N_2,N_3)$ için

$$\begin{aligned}(h\circ(f+g))(x) &= h\circ(f(x)+g(x))\\ &= h(f(x))+h(g(x))\\ &= (h\circ f+h\circ g)(x)\end{aligned}$$

ve $f \in Hom(N_1,N_2)$, $(g+h) \in Hom(N_2,N_3)$ için

$$\begin{aligned}((g+h)\circ f)(x) &= (g+h)(f(x))\\ &= g(f(x))+h(f(x))\\ &= (g\circ f)(x)+(h\circ f)(x)\end{aligned}$$

dir. Böylece RMod öntoplamsaldır.

3. Aşikar modül 0, RMod kategorisinin sıfır objesidir. Çünkü her M R-modülü için sabit sıfır homomorfizmi $M \to 0$ vardır. Bu yüzden 0 bitiş objesidir. Ayrıca $0 \to M$ homomorfizmi 0 elemanını M R-modülünün birim elemanına götürür. Bu yüzden de 0 başlangıç objesidir.

4. RMod kategorisi çarpım ve eş-çarpıma sahiptir. $\{M_k\}_{k\in I}$ ailesi bir I kümesi ile indenkslenmiş bir R-modül ailesi olsun. $\prod_{k\in I} M_k$ objesi

$$p_k : \prod_{k\in I} M_k \to M_k$$

projeksiyon homomorfizmleri ile $\{M_k\}_{k\in I}$ ailesinin direkt çarpımıdır ve evrensellik özelliğini sağlar. Yani her M R-modülü ile

$$g_k : M \to M_k$$

R-modül homomorfizmleri için öyle bir tek

$$g : M \to \prod_{k\in I} M_k$$

R-modül homomorfizmi vardır ki her $k \in I$ için

$$p_k \circ g = g_k$$

olur.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, dotted, "\exists! g"'] \arrow[dr, "g_k"] & \\ \prod_{k\in I} M_k \arrow[r, "p_k"'] & M_k \end{tikzcd}$$

Böylece R-modüllerin direkt çarpımı tanımı gereği kategorisel çarpımdır.

Benzer şekilde $\{M_k\}_{k\in I}$ ailesi bir I kümesi ile indenkslenmiş bir R-modül ailesi olsun. $a_k \in M_k$ olmak üzere sonlu sayıda $k \in I$ dışında $a_k = 0$ olacak şekilde verilen $\bigoplus_{k\in I} M_k$ objesi

$$i_k : M_k \to \bigoplus_{k\in I} M_k$$

içine dönüşümleri ile $\{M_k\}_{k\in I}$ ailesinin direkt çarpımıdır ve evrensellik özelliğini sağlar. Yani her M R-modülü ile

$$f_k : M_k \to M$$

R-modül homomorfizmleri için öyle bir tek

$$f : \bigoplus_{k\in I} M_k \to M$$

R-modül homomorfizmi vardır ki her $k \in I$ için $f \circ i_k = f_k$ olur.

$$\begin{tikzcd} M & \\ \bigoplus_{k\in I} M_k \arrow[u, dotted, "\exists! f"] & M_k \arrow[l, "i_k"] \arrow[ul, "f_k"'] \end{tikzcd}$$

Böylece R-modüllerin direkt toplamı tanımı gereği kategorisel eş-çarpımdır.

Önerme 3.3. Ön-toplamsal $\mathscr{C}$ kategorisinde her yansıyan bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

İspat. $s_1, s_2 : S \rightrightarrows A$ yansıyan bağıntı olsun. O halde, $X \in Ob(\mathscr{C})$ için ilgili bağıntı

$$S_X = \{(s_1 \circ x, s_2 \circ x) | x \in \mathscr{C}(X,S)\}$$

diagonali $\Delta_A = (1_A, 1_A)$ içermelidir. $\mathscr{C}$ öntoplamsal olduğundan $\mathscr{C}(X,A)$ değişmeli gruptur. Açıkça $S_X \subseteq \mathscr{C}(X,A) \times \mathscr{C}(X,A)$ altgrup olduğundan, iddiamızı değişmeli gruplar kategorisinde ispatlayabiliriz. O halde $\mathscr{C}(X,A) = \mathbf{Ab}$ olduğunu varsayalım. Tüm $(a,a) \in S$ olduğundan yansıyandır. İkinci olarak $(a,b) \in S$ olsun. Yansıyanlığı kullanarak

$$(b,a) = (a,a) - (a,b) + (b,b) \in S$$

simetri kolayca gösterilir. Son olarak $(a,b),(b,c) \in S$ alırsak, yine yansıyanlıktan

$$(a,c) = (a,b) - (b,b) + (b,c) \in S$$

eşitliği geçişkenliği verir. $\square$

Önerme 3.4. Tam ve toplamsal bir kategoride her monomorfizmin eş-çekirdeği vardır ve bu monomorfizm kendi eş-çekirdeğinin çekirdeğidir.

İspat. $f : A \rightarrowtail B$ bir monomorfizm olsun. $\mathscr{C}$ toplamsal olduğundan biproduct üzerinden

$$r \equiv \begin{pmatrix} f & 1_B \\ 0 & 1_B \end{pmatrix} : A \oplus B \longrightarrow B \oplus B$$

morfizmini tanımlayabiliriz. Herhangi $a,a' : X \rightrightarrows A$ ve $b,b' : X \rightrightarrows B$ morfizmleri için bileşke işlemini

$$\begin{pmatrix} f & 1_B \\ 0 & 1_B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f \circ a) + b \\ b \end{pmatrix}$$

alırsak

$$\begin{pmatrix} f & 1_B \\ 0 & 1_B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 1_B \\ 0 & 1_B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

eşitliğinden $b = b'$ ve $(f \circ a) + b = (f \circ a') + b$ yani $(f \circ a) = (f \circ a')$ elde ederiz. Bu durumda f monomorfizm olduğundan $a = a'$ olur. Böylece r monomorfizmdir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} f & 1_B \\ 0 & 1_B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_B \\ 1_B \end{pmatrix} = \Delta_B$$

olduğundan diagonali $\Delta_B = (1_B, 1_B)$ içerir, yani yansıyandır. $\mathscr{C}$ toplamsal olduğundan Önerme 3.3 gereği r denklik bağıntısıdır. Ayrıca $\mathscr{C}$ kategorisi tam olduğundan r etkilidir. O halde r etkili denklik bağıntısının eş-eşitleyicisi olarak bir q alırsak

$$A \oplus B \underset{(0,1_B)}{\overset{(f,1_B)}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{q} Q$$

tam dizisini elde ederiz. O halde

$$q \circ f = q \circ (f, 1_B) \circ s_A = q \circ (0, 1_B) \circ s_A = q \circ 0 = 0$$

elde ederiz. Bu durumda verilen bir $x : B \to X$ morfizmi $x \circ f = 0$ koşulunu sağlıyorsa

$$x \circ (f, 1_B) = (x \circ f, x) = (0, x) = x \circ (0, 1_B)$$

eşitliğinden, q eş-eşitleyici olduğu için, $z \circ q$ koşulunu sağlayan bir tek $z : Q \to X$ vardır. Böylece $q = cokf$ olur.

Şimdi g morfizminin çekirdeğinin f olduğunu gösterelim. Verilen bir $y : Y \to B$ morfizmi $q \circ y = 0 = q \circ 0$ özelliğini sağlıyorsa, $(f, 1_B) \circ z = y$ ve $(0, 1_B) \circ z = 0$ olacak şekilde bir tek $z : Y \to A \oplus B$ morfizmi vardır. Bazı $u : Y \to A, v : Y \to B$ morfizmleri için z morfizmi $\binom{u}{v}$ formundadır. O halde

$$y = (f, 1_B) \circ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (f \circ u) + (1_B \circ v) = (f \circ u) + (1_B \circ 0) = (f \circ u)$$

olduğundan u morfizmi aradığımız $y = f \circ u$ faktörizasyonunu sağlar. Ayrıca f monomorfizm olduğundan u morfizmi bu özellikleri sağlayan tek dönüşümdür. Böylece $f = kerg$ olur. □

Önerme 3.5. Tam ve toplamsal bir kategoride her epimorfizm eş-çekirdektir.

İspat. $f : A \twoheadrightarrow B$ epimorfizm olsun. Kategori düzenli olduğundan Önerme 2.4 gereği f morfizmi i monomorfizm ve p düzenli epimorfizm olmak üzere $f = i \circ p$ şeklinde bileşenlerine ayrılabilir. Bu durumda f epimorfizm olduğundan i de epimorfizmdir. Böylece i izomorfizm ve f düzenli epimorfizm olur. O halde $f = Coeq(u, v)$ olacak şekilde $u, v : P \rightrightarrows A$ morfizmleri vardır. Sonuçta Önerme 3.2 gereği $f = cok(u - v)$ olur. □

3.3 Protomodular Kategori

Tanım 3.3. Bir $\mathscr{C}$ kategorisinde, f split epimorfizm olmak üzere verilen bir değişmeli diagram

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f"] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

için sol kare ve dış kare geri çekilim ise sağ kare de geri çekilim oluyorsa $\mathscr{C}$ kategorisine *(Bourn) protomodular* denir.

Önerme 3.6. Başlangıç ve bitiş objesine sahip ve bu objeler arasında bir tek $0 \to 1$ monomorfizmi bulunan (quasi-pointed) düzenli bir kategorinin protomodular olması için gerek ve yeter koşul kısa 5-lemmayı sağlamasıdır; yani verilen değişmeli diyagramda p, p' düzenli epimorfizm olmak üzere

$$\begin{tikzcd} Ker[p'] \arrow[r, "ker(p')"] \arrow[d, "u"'] & A' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "v"] & B' \arrow[d, "w"] \\ Ker[p] \arrow[r, "ker(p)"'] & A \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

u ve w izomorfizm ise v de izormofizmdir.

3.4 Abelyen Kategori

Tanım 3.4. Bir $\mathscr{C}$ kategorisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa *abelyen*dir.

i $\mathscr{C}$nin bir sıfır objesi var

ii $\mathscr{C}$ ikili çarpımlara ve eşçarpımlara sahiptir

iii Her morfizmin çekirdeği ve eşçekirdeği bulunur

iv Her monomorfizm bir çekirdek, her epimorfizm bir eşçekirdektir

Örnek 6. R değişmeli halka üzerindeki modüllerin kategorisi R-Mod abelyen kategoridir.

M ve N, R-modüller ve $\varphi : M \to N$ bir R-lineer dönüşüm olsun. φ homomorfizminin çekirdeğinin

$$Ker\varphi = \{m \in M | \varphi(m) = 0\}$$

$i : Ker\varphi \hookrightarrow M$ içine dönüşüm ile φ morfizminin kategorik çekirdeğini oluşturduğunu gösterelim. Açıkça $\varphi \circ i = 0$dır. Bir $k : K \to M$ için $\varphi \circ k = 0$ oluyorsa, açıkça her $x \in K$ için $k(x) \in M$ olur. O halde

$$k' : K \to Ker\varphi, k'(x) = k(x)$$

homomorfizmini tanımlayalım.

$$\begin{tikzcd} Ker\varphi \arrow[r, hook, "i"] & M \arrow[r, "\varphi"] & N \\ K \arrow[u, dotted, "k'"] \arrow[ur, "k"'] & & \end{tikzcd}$$

diyagramın değişmeli olduğu

$$i \circ k'(x) = i \circ k(x) = k(x)$$

eşitliğinden görülür. Diyagramı değişmeli yapan başka bir $k'' : K \to Ker\varphi$ morfizmi için

$$k(x) = i \circ k'(x) = i \circ k''(x) \Rightarrow i(k'(x) - k''(x)) = 0 \Rightarrow k'(x) = k''(x)$$

olduğundan k' bir tektir. Böylece $Ker\varphi$ objesi i homomorfizmi ile kategorik çekirdektir.

Benzer şekilde $N/im\varphi$ bölüm modülü kanonik morfizm

$$\pi : N \twoheadrightarrow N/im\varphi, \pi(n) = n + im\varphi$$

ile kategorik eş-çekirdektir. Burada $\pi \circ \varphi = 0$ olduğu açıktır. Bir $q : N \to Q$ homomorfizmi $q \circ \varphi = 0$ özelliğini sağlıyorsa

$$q' : N/im\varphi \to Q, q'(n + im\varphi) = q(n)$$

homomorfizmini tanımlayalım. Her $n, n' \in N$ için

$$n + im\varphi = n' + im\varphi$$

olduğundan $n - n' \in im\varphi$ elde ederiz. O halde en az bir $m \in M$ için $\varphi(m) = n - n'$ olur.

Bu durumda

$$\begin{array}{rrcl} & q(n-n') & = & q\varphi(m) \\ \Rightarrow & q(n) - q(n') & = & 0 \\ \Rightarrow & q(n) & = & q(n') \\ \Rightarrow & q'(n + im\varphi) & = & q'(n' + im\varphi) \end{array}$$

olduğundan q' iyi tanımlıdır. Tanım gereği

$$q' \circ \pi(n) = q'(n' + im\varphi) = q(n)$$

eşitliği ile diyagram değişmelidir.

RMod kategorisinde bir dönüşümün monomorfizm olması için gerek ve yeter koşul birebir homomomorfizm olmasıdır. Çünkü bir $f : M \to N$ monomorfizmi için $i : Kerf \hookrightarrow M$ içine dönüşümü ile $0 : Kerf \hookrightarrow M$ sıfır dönüşümünü alırsak

$$f \circ i = 0 = f \circ 0$$

olduğundan $i = 0$ elde ederiz. Burada

$$Kerf = im(i) = im(0) = \{0_M\}$$

eşitliği f'nin birebir olduğunu gösterir.

Tersine f birebir homomorfizm olsun. Ayrıca $g \neq h$ olmak üzere $g, h : K \to M$ homomorfizmleri alalım. O halde bazı $x \in K$ için $g(x) \neq h(x)$ olur ve f birebir olduğundan

$$f(g(x)) \neq f(h(x))$$

yani

$$f \circ g \neq f \circ h$$

elde ederiz. Böylece f monomorfizmdir.

Benzer şekilde $f : M \to N$ R-lineer dönüşümünün epimorfizm olması için gerek ve yeter koşul örten homomomorfizm olmasıdır. Eğer $f : M \to N$ epimorfizm ise $\pi : N \twoheadrightarrow \frac{N}{imf}$ projeksiyon dönüşümü ile $0 : N \to \frac{N}{imf}$ sıfır dönüşümü için

$$\pi \circ f = 0 = 0 \circ f$$

olduğundan $\pi = 0$ elde ederiz. Buradan

$$\frac{N}{imf} = im\pi = im0 = \{0_{\frac{N}{imf}}\}$$

eşitliği gereği $N = imf$ olur. Böylece f örtendir.

Tersine $g \neq h$ olmak üzere $g, h : N \to Q$ homomorfizmleri alalım. O halde bazı $n \in N$ için $g(n) \neq h(n)$ olur. f örten homomorfizm ise en az bir $m \in M$ için $f(m) = n$dir. Sonuçta

$$g(f(x)) \neq h(f(x))$$

olduğundan

$$g \circ f \neq h \circ f$$

elde ederiz. Böylece f epimorfizmdir.

R-Mod kategorisinde $\varphi : M \to N$ monomorfizm olsun. Ayrıca φ dönüşümünün eş-çekirdeği

$$\pi : N \twoheadrightarrow N/im\varphi$$

projeksiyon morfizmini alalım. Burada φ birebir olduğundan

$$M \cong Im\varphi = Ker\pi$$

elde ederiz. O halde

$$\phi : Ker\pi \to M, \phi(x) = \varphi^{-1}(x)$$

izomorfizmini tanımlayalım.

Başka bir M' modülü için bir $\alpha : M' \to N$ homomorfizmi $\pi \circ \alpha = 0$ özelliğini sağlıyor ise çekirdeğin evrenselliği uyarınca $i \circ \beta = \alpha$ olacak şekilde bir tek

$$\beta : M' \to Ker\pi$$

homomorfizmi vardır. Bu durumda

$$\phi \circ \beta : M' \to M$$

homomorfizmi için

$$\varphi \circ (\phi \circ \beta) = (\varphi \circ \phi) \circ \beta = i \circ \beta = \alpha$$

olduğundan aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar.

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, dotted, "\beta"] \arrow[d, dotted, "\phi\circ\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & Ker\pi \arrow[d, "i"] \arrow[dl, "\phi"'] & \\
M \arrow[r, "\varphi"'] & N \arrow[r, "\pi"'] & \frac{N}{imf}
\end{tikzcd}$$

Ayrıca $\phi \circ \beta$ bu özellikteki tek homomorfizmdir; çünkü

$$\gamma : M' \to M, \varphi \circ \gamma = \alpha$$

olacak şekilde başka bir homomorfizm ise

$$i \circ (\phi^{-1} \circ \gamma) = (i \circ \phi^{-1}) \circ \gamma = \varphi \circ \gamma = \alpha$$

olup βnın bir tek oluşu sebebiyle $\beta = \phi^{-1} \circ \gamma$ yani

$$\gamma = \phi \circ \beta$$

elde ederiz.

Böylece $\varphi : M \to N$ monomorfizmi kendi eş-çekirdeği $\pi : N \twoheadrightarrow N/im\varphi$ morfizminin çekirdeğidir.

Benzer şekilde $\varphi : M \to N$ epimorfizm ise bu morfizmin çekirdeği $i : Ker\varphi \to M$ içine dönüşüm ve i morfizminin eş-çekirdeği $\pi : M \to M/Ker\varphi$ projeksiyon morfizmini alalım. Burada φ örten olduğundan

$$M/Ker\varphi \cong Im\varphi = N$$

elde ederiz. O halde

$$\phi : N \to M/Ker\varphi, \phi(n) = [\varphi^{-1}(n)]$$

izomorfizmini tanımlayabiliriz.

Şimdi başka bir N' modülü $\psi : M \to N'$ morfizmi ile $\psi \circ i = 0$ özelliğini sağlıyor ise eşçekirdeğin evrensselliği gereği

$$\beta \circ \pi = \psi$$

olacak şekilde bir tek

$$\beta : M/Ker\varphi \to N'$$

morfizmi vardır. Bu durumda $\beta \circ \phi : N \to N'$ homomorfizmi

$$(\beta \circ \phi) \circ \varphi = \beta \circ (\phi \circ \varphi) = \beta \circ \pi = \psi$$

eşitliğini sağladığından aşağıdaki diyagramı değişmeli yapar.

$$\begin{tikzcd}
Ker\varphi \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\psi" near start] & N \arrow[dl, "\phi"' near start] \arrow[d, dotted, "\beta\circ\phi"] \\
& M/Ker\varphi \arrow[r, dotted, "\beta"'] & N'
\end{tikzcd}$$

Ayrıca $\beta \circ \phi$ bu özellikteki tek homomorfizmdir. Eğer başka bir $\gamma : N \to N'$ homomorfizmi için $\gamma \circ \varphi = \psi$ oluyorsa

$$(\gamma \circ \phi^{-1}) \circ \pi = \gamma \circ (\phi^{-1} \circ \pi) = \gamma \circ \varphi = \psi$$

eşitliğinden β'nın bir tek oluşu gereği $\beta = (\gamma \circ \phi^{-1})$ yani $\gamma = \beta \circ \phi$ elde ederiz.

Datta ders notlarında değişmeli halkalar üzerinde tanımlı modüller kategorisini ayrıntılı olarak incelemiştir.

Önerme 3.7. Abelyen kategoride her iki altobjenin kesişimi vardır.

İspat. Bir A objesi alalım. $i : A_2 \to A$ ve $j : A_1 \to A$ A'nın iki altobjesi olsun. $p : A \to Cok[j]$ ve $h : Ker[p \circ i] \to A_2$ alırsak, şekildeki diyagrama göre

$$\begin{tikzcd}
Ker[p \circ i] \arrow[r, dotted, "k"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & A_1 \arrow[d, "j"'] & \\
A_2 \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, "p"'] & Cok[j]
\end{tikzcd}$$

$p \circ i \circ h = 0$ olduğundan $i \circ h = j \circ k$ koşulunu sağlayan bir tek $Ker[p \circ i] \to A_1$ vardır.

Şimdi (1)in geri çekme diyagramı olduğunu gösterelim. Eğer $\alpha : X \to A_1$ ve $\beta : X \to A_2$ dönüşümleri $j \circ \alpha = i \circ \beta$ eşitliğini sağlıyorsa, bu durumda $p \circ i \circ \beta = p \circ j \circ \alpha = 0$ olduğundan $h \circ \gamma = \beta$ eşitliğini sağlayan bir tek $\gamma : X \to Ker[p \circ i]$ dönüşümü bulunur. Ayrıca, $j \circ k \circ \gamma = i \circ h \circ \gamma = i \circ \beta = j \circ \alpha$ bize $k \circ \gamma = \alpha$ eşitliğini verir. Böylece (1) geri çekme diyagramıdır. $\square$

Önerme 3.8. Abelyen kategori sonlu bütün ve sonlu eş-bütündür.

İspat. Tanım gereği abelyen kategoride sıfır obje ve sonlu çarpımlar vardır. O halde sonlu bütün olması için eşitleyicilerin olduğunu göstermeliyiz. Önerme 3.7 gereği iki alt objenin kesişimi vardır. O halde verilen $f, g : A \rightrightarrows B$ dönüşümleri için $\binom{1_A}{f}$ ve $\binom{1_A}{g}$ monomorfizmlerinin kesişimi (P, u, v) olsun. Şekildeki diyagramı ele alalım;

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "y"] \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & & \\
& P \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[d, "\binom{1_A}{g}"] \\
& A \arrow[r, "\binom{1_A}{f}"'] & A \times B
\end{tikzcd}$$

Buradan projeksiyon morfizmi $p_A : A \times B \to A$ ile bileşke işlemi sonucu

$$u = 1_A \circ u = p_A \circ \begin{pmatrix} 1_A \\ f \end{pmatrix} \circ u = p_A \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_A \\ g \end{smallmatrix}\right) \circ v = 1_A \circ v = v$$

elde ederiz. Benzer şekilde projeksiyon morfizmi $p_B : A \times B \to B$ ile bileşke işlemi sonucu

$$f \circ u = p_B \circ \begin{pmatrix} 1_A \\ f \end{pmatrix} \circ u = p_B \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_A \\ g \end{smallmatrix}\right) \circ v = g \circ v$$

elde ederiz. Böylece $f \circ u = g \circ u$ olur. Eşitleyicinin evrenselliği için, bir $x : X \to A$ morfizmi $f \circ x = g \circ x$ eşitliğini sağlıyorsa açıkça $\begin{pmatrix} 1_A \\ f \end{pmatrix} \circ x = \left(\begin{smallmatrix} 1_A \\ g \end{smallmatrix}\right) \circ x$ eşitliğini de sağlar. O halde geri çekme diyagramındaki bir tek $y : X \to P$ morfizmi ile $u \circ y = x = v \circ y$ elde ederiz. Böylece $P = Eq(f, g)$ olur. Sonuç olarak abelyen kategori sonlu bütün, duallik gereği ise sonlu eşbütündür. □

Önerme 3.9. Abelyen kategoride her monomorfizm kendi eş-çekirdeğinin çekirdeği, her epimorfizm kendi çekirdeğinin eş-çekirdeğidir.

İspat. $f : X \to Y$ monomorfizm olsun. Abelyen kategoride her morfizmin çekirdeği ve eş-çekirdeği bulunduğundan, f morfizminin eş-çekirdeği $p : Y \to Cok[f]$ ve p morfizminin çekirdeği de $k : Ker[p] \to Y$ olsun.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted, shift left, "i"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "p"] & Z \\ Ker[p] \arrow[u, dotted, shift left, "j"] \arrow[ur, "k"'] & & Cok[f] \arrow[u, "z"'] \end{tikzcd}$$

X ve $Ker[p]$ objelerinin izomorfik olduğunu göstereceğiz. $p \circ f = 0$ olduğundan bir tek $i : X \to Ker[p]$ morfizmi vardır ve $k \circ i = f$ olur. Abelyen kategori tanımı gereği her monomorfizm bir morfizmin çekirdeğidir. Diyelim ki $f = Ker(g : Y \to Z)$. Bu durumda $g \circ f = 0$ olduğundan, bir tek $z : Cok[f] \to Z$ vardır ve $z \circ p = g$ olur. O halde $g \circ k = z \circ p \circ k = 0$ olduğundan bir tek $j : Ker[p] \to X$ morfizmi için $f \circ j = k$ sağlanır. Böylece $X \simeq Ker[p]$ olur. Duallik gereği her epimorfizm kendi çekirdeğinin eş-çekirdeğidir. □

Önerme 3.10. Abelyen kategoride bir dönüşümün monomorfizm olması için gerek ve yeter koşul çekirdeğinin 0 olmasıdır.

İspat. Öncelikle f monomorfizm olsun. Açıkça $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ kompozisyonu sıfır morfizmdir. Eğer $g : X \to A$ morfizmi için $f \circ g$ sıfır morfizmi ise $g = 0$ olur. Sıfır obje bir tek

olduğundan

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d] & A \arrow[r, "f"] & B \\ 0 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

faktörizasyonu biriciktir.

İkinci olarak $Ker f = 0$ olduğunu varsayalım. $f \circ u = f \circ v$ olacak şekilde verilen $u, v : X \rightrightarrows A$ morfizmleri için $(u - v) \circ f = 0$ olur. O halde $u - v, Ker f = 0$ üzerinden bir tek şekilde bileşenlerine ayrılır. Böylece $u - v = 0$ yani $u = v$ olduğundan f monomorfizmdir. $\square$

Önerme 3.11. Abelyen kategoride bir dönüşüm hem monomorfizm hem de epimorfizm ise izormorfizmdir.

İspat. $f : X \to Y$ dönüşümü monomorfizm ve epimorfizm olsun. Önerme 3.10un duali gereği f epimorfizm olduğundan eş-çekirdeği 0 morfizmidir. f monomorfizm olduğundan kendi eş-çekirdeğinin çekirdeğidir, yani $f = ker(Y \to 0)$. O halde $0 \circ 1_Y = 0$ olduğundan $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde bir tek $g : Y \to X$ vardır.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & 0 \\ Y \arrow[u, dotted, "g"] \arrow[ur, "1_Y"'] & & \end{tikzcd}$$

Ayrıca $f \circ g = 1_Y$ eşitliğini kullanarak $f \circ g \circ f = f$ elde ederiz. f monomorfizm olduğundan $g \circ f = 1_X$ olur. Böylece f ve g izomorfizmdir. $\square$

Önerme 3.12. Abelyen kategoride geri çekme diyagramı monomorfizmleri yansıtır.

İspat. Öncelikle bir geri çekme diyagramı alalım.

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Burada f' monomorfizm olduğunda $f$nin de monomorfizm olduğunu göstermeliyiz. Verilen geri çekme diyagramını genişletirsek

$$\begin{tikzcd} Ker[f'] \arrow[r] \arrow[d, "kerf'"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & 0 \arrow[d] \\ A \times_C B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

elde ettiğimiz diyagramda (1) ve (2) numaralı kareler geri çekme olduğundan dış kare de geri çekmedir. Böylece $Ker[f] \simeq Ker[f']$ olduğu görülür. Ayrıca f' monomorfizm olduğundan $kerf' = 0$ yani $Ker[f'] \simeq 0$. Dolayısıyla $Ker[f] \simeq Ker[f'] \simeq 0$ bize f dönüşümünün monomorfizm olduğunu gösterir. □

Teorem 3.1. Abelyen bir kategori protomodulerdir.

İspat. Abelyen kategori sonlu bütündür ve sıfır objeye sahiptir. Bu durumda Short five lemmanın sağlandığını göstermemiz yeterlidir. Şekildeki değişmeli diyagramı ele alalım.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, tail, "k'"'] & B' \arrow[r, "f'"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Buradan dış kare ve (3)nolu kare geri çekme olmak üzere

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & A \arrow[r] \arrow[d, "k'"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & 0 \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & B' \arrow[r, "f'"'] & C \end{tikzcd}$$

diyagramından (1) nolu kare de geri çekmedir. Önerme 3.12e göre geri çekme diyagramı monomorfizleri yansıttığından ϕ monomorfizmdir. Duallik gereği (2) nolu kare ileri itme ve ϕ epimorfizmdir. Abelyen kategorilerde bir dönüşüm monomorfizm ve epimorfizm ise izomorfizmdir. Böylece Short Five Lemma sağlanmış olur. □

Teorem 3.2. ***(Freyd-Mitchell Embedding)*** Her küçük abelyen kategori dolu, sadık ve tam bir funktor ile R-mod kategorisine gömülür.

3.5 Tierney Eşitliği

Bu kısımda abelyen bir kategorinin tam ve toplamsal oluşu incelenecektir. Konu ile ilgili ayrıntılı bilgiye Borceux (1994), Bourn ve Gran'ın (2003) çalışmalarından ulaşılabilir.

Teorem 3.3. $\mathscr{C}$ kategorisi tam ve toplamsal ise abelyendir.

İspat. Tam ve toplamsal bir kategori sıfır objeye ve sonlu çarpımlara sahiptir. Önerme 2.1 gereği eş-çarpımlara da sahiptir. Dolayısıyla sonlu bütün olması için eş-eşitleyicilerin bulunduğunu göstermek gereklidir. Bu da önerme 3.2in duali gereği eş-çekirdeklerin bulunmasına denktir.

O halde verilen bir $f : A \to B$ morfizmini i monomorfizm ve p epimorfizm olmak üzere $f = i \circ p$ şeklinde yazabiliriz. Önerme 3.4 gereği i monomorfizminin eş-çekirdeği vardır ve p epimorfizm olduğundan bu dönüşüm f morfizminin de eş-çekirdeğidir.

Ayrıca önerme 3.4 ve 3.5 sonucu her monomorfizm bir çekirdek ve her epimorfizm bir eş-çekirdektir. Böylece tam ve toplamsal bir kategori abelyendir. $\square$

Önerme 3.13. $\mathscr{C}$ bir abelyen kategori, $A \in Ob(\mathscr{C})$ ve diagonal morfizm $\Delta : A \to A \times A$ ile bu morfizmin eş-çekirdeği $q : A \times A \to Q$ olsun. O halde Q objesi A objesine izomorfiktir.

İspat. Bir $r : A \to Q$ morfizmini $q \circ \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix}$ kompozisyonu şeklinde tanımlayalım. Bu morfizmin izomorfizm olduğunu göstereceğiz. Aşağıdaki diyagramı referans alalım.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"'] & A \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix}"'] \arrow[dr, "r"] & V \arrow[l, "p_1 \circ v"'] \arrow[dl, "v"] \\
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, "1_A"] & A \times A \arrow[r, "q"] \arrow[dl, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & Q \arrow[d, "z"] \\
A & A \arrow[r, "t"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Öncelikle Δ monomorfizm olduğundan $\Delta = ker(cok\Delta) = kerq$ olur. Ayrıca $p_1 \circ \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} = 1_A$ oluşu bize $p_1$in epimorfizm ve $\begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix}$ nın monomorfizm olduğunu gösterir. Benzer şekilde p_2 epimorfizm ve $\begin{pmatrix} 0 \\ 1_A \end{pmatrix}$ monomorfizmdir.

Burada $p_2 \circ \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} = 0$dir ve $p_2 \circ v = 0$ olacak şekilde bir $v : V \to A \times A$ morfizmi varsa $\begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} \circ (p_1 \circ v) = v$ olduğu açıkça görülür. Ayrıca $\begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix}$ monomorfizm olduğundan $p_1 \circ v$ bir tektir. O halde $\begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} = kerp_2$ elde ederiz. Dahası p_2 epimorfizm olduğundan $p_2 = cok(kerp_2) = Cok \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix}$ olur.

İlk olarak $r$nin monomorfizm olduğunu gösterelim. Bir $x : X \to A$ morfizmi $r \circ x = 0$ özelliğini sağlıyor ise $q \circ \binom{1_A}{0} \circ X = r \circ x = 0$ olur ve $\Delta = kerq$ olduğundan $\binom{1_A}{0} \circ x = \Delta \circ y$ faktörizasyonunu elde ederiz. O halde $y = p_2 \circ \Delta \circ y = p_2 \circ \binom{1_A}{0} \circ x = 0 \circ x = 0$ olur. Bu durumda $\Delta \circ y = \binom{1_A}{0} \circ x = 0$ ve $\binom{1_A}{0}$ monomorfizm olduğundan $x = 0$dır. Sonuç olarak r monomorfizmdir.

İkinci olarak $r$nin epimorfizm olduğunu gösterelim. Bir $z : Q \to Y$ morfizmini $z \circ r = 0$ olacak şekilde seçersek $z \circ q \circ \binom{1_A}{0} = z \circ r = 0$ ve $p_2 = cok\binom{1_A}{0}$ olduğundan $z \circ q = t \circ p_2$ faktörizasyonunu elde ederiz. Bu durumda $t = t \circ p_2 \circ \Delta = z \circ q \circ \Delta = z \circ 0 = 0$ eşitliği $z \circ q = t \circ p_2 = 0$ ve p_2 epimorfizm olduğundan $z = 0$ olduğunu gösterir. Sonuçta r de bir epimorfizmdir.

□

Tanım 3.5. Bir abelyen kategoride $f, g : B \rightrightarrows A$ morfizmlerini alalım. Yukarıdaki gösterime göre aldığımız morfizmlerin

$$A \times A \xrightarrow{q} Q \xrightarrow{r^{-1}} A$$

kompozisyonunu $\sigma_A = r^{-1} \circ q$ ile gösterip ”A’daki çıkarma” olarak adlandıracağız. Ayrıca

$$B \xrightarrow{\binom{f}{g}} A \times A \xrightarrow{\sigma_A} A$$

kompozisyonunu $f - g$ ile gösterelim ve $f + g = f - (0 - g)$ eşitliğini tanımlayalım.

Önerme 3.14. Abelyen kategoride verilen bir $f : B \to A$ morfizmi için yukarıda yukarıdaki gösterime göre $f \circ \sigma_B = \sigma_A \circ (f \times f)$ olur.

İspat. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım.

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_B"'] & A \arrow[d, "\Delta_A"] & \\
 & B \times B \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "\sigma_B"'] & A \times A \arrow[d, "\sigma_A"] & \\
B \arrow[ur, "\binom{1_B}{0}"] \arrow[r, "1_B"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & B \arrow[r, dotted, "g"] & A & A \arrow[l, "1_A"'] \arrow[ul, "\binom{1_A}{0}"']
\end{tikzcd}$$

Öncelikle $\sigma_B = Cok\Delta_B$ olduğundan

$$\sigma_A \circ (f \times f) \circ \Delta_B = \sigma_A \circ \Delta_A \circ f = 0 \circ f = 0$$

bağıntısı gereği $g \circ \sigma_B = \sigma_A \circ (f \times f)$ olacak şekilde bir tek $g : B \to A$ morfizmi vardır. O halde $f = g$ olduğunu göstermeliyiz.

Bu durumda $r = q \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_A \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ morfizminin tanımından $\sigma_A \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_A \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = r^{-1} \circ q \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_A \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1_A$ ve benzer şekilde $\sigma_B \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_B \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1_B$ eşitliklerini elde ederiz. Diğer yandan

$$p_1 \circ (f \times f) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_B \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = f = p_1 \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_A \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \circ f$$

$$p_2 \circ (f \times f) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_B \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0 = p_2 \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_A \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \circ f$$

eşitlikleri gereği $(f \times f) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_B \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1_A \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \circ f$ olur. Böylece

$$g = g \circ \sigma_B \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_B \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \sigma_A \circ (f \times f) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_B \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \sigma_A \circ \left(\begin{smallmatrix} 1_A \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \circ f = f$$

olup $f \circ \sigma_B = \sigma_A \circ (f \times f)$ eşitliğini göstermiş oluruz. □

Teorem 3.4. Abelyen bir kategori toplamsaldır.

İspat. $\mathscr{C}$ abelyen kategori olsun. İlk olarak Önerme 3.14 i $B = A \times A$ ve $i = 1, 2$ için $f = p_i$ projeksiyon morfizmlerine uygulayalım. Aşağıdaki diyagramı göz önünde bulundurarak

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{smallmatrix}\right)"'] & (A \times A) \times (A \times A) \arrow[r, "p_i \times p_i"] \arrow[d, "\sigma_{A \times A}"'] & A \times A \arrow[d, "\sigma_A"] \\
& A \times A \arrow[r, "p_i"'] & A
\end{tikzcd}$$

verilen herhangi bir C objesi ve $a, b, c, d : C \to A$ morfizmleri için

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c \\ b - d \end{pmatrix}$$

eşitliğini elde ederiz.

Önerme 3.14 i bu defa $B = A \times A$ ve $f = \sigma_A$ ile uygulayalım. Yine herhangi bir C objesi ve $a,b,c,d : C \to A$ morfizmleri için

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}"'] & (A\times A)\times(A\times A) \arrow[r, "\sigma_A\times\sigma_A"] \arrow[d, "\sigma_{A\times A}"'] & A\times A \arrow[d, "\sigma_A"] \\ & A\times A \arrow[r, "\sigma_A"'] & A \end{tikzcd}$$

diyagramını göz önüne alarak ve bir önceki eşitlikle birlikte

$$(a-c)-(b-d) = (a-b)-(c-d) \tag{3.1}$$

eşitliğini elde ederiz.

Diğer yandan $\sigma_A \circ \binom{1_A}{0} = 1_A$ olduğundan verilen bir $a : C \to A$ morfizmi için

$$a-0 = a \tag{3.2}$$

olur. Benzer şekilde $\sigma_A \circ \Delta_A = 0$ olduğundan

$$a-a = 0 \tag{3.3}$$

elde ederiz.

Şimdi $Mor(\mathscr{C})$ kümesinin toplamsal abelyen grup yapısına sahip olduğunu göstermek için (3.1,2,3) eşitlikleri ve $f+g = f-(0-g)$ ilişkisini kullanacağız.

- Birim eleman *:*

$$0+d = 0-(0-d) = (d-d)-(0-d) = (d-0)-(d-d) = (d-0)-0 = d$$

- Ters eleman *:*

$$b+(0-b) = b-(0-(0-b)) = b-b = 0$$
$$(0-b)+b = (0-b)-(0-b) = 0$$

- Birleşme Özelliği *:*

  * $0-(c-d) = (0-0)-(c-d) = (0-c)-(0-d) = (0-c)+d$
  * $0-(c+d) = (0-(c-(0-d))) = (0-c)+(0-d) = (0-c)-d$
  * $(a-b)+c = (a-b)-(0-c) = (a-0)-(b-c) = a-(b-c)$

ilişkileri kullanılarak

$$(a+b)+c=(a-(0-b))+c=a-((0-b)-c)=a-(0-(b+c))=a+(b+c)$$

- Değişme Özelliği *:*

$$\begin{aligned} b+c &= b-(0-c) = (0-(0-b))-(0-c) = (0-0)-((0-b)-c) \\ &= (0-0)-((0-c)-b) = (0-(0-c))-(0-b) = c-(0-b) \\ &= c+b \end{aligned}$$

Bir $x : X \to C$ morfizmi ile

$$(a-b)\circ x = \sigma_A \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \circ x = \sigma_A \circ \begin{pmatrix} a\circ x \\ b\circ x \end{pmatrix} = a\circ x - b\circ x$$

olur. Diğer yandan bir $y : A \to Y$ morfizmi için Önerme 3.14i uygularsak

$$y\circ(a-b) = y\circ\sigma_A\circ\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sigma_Y\circ(y\times y)\circ\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sigma_Y\circ\begin{pmatrix} y\circ a \\ y\circ b \end{pmatrix} = y\circ a - y\circ b$$

eşitliklerini elde ederiz. Böylece $Mor(\mathscr{C})$ kümesinde kompozisyon işleminin bilineer olduğu görülür. □

Önerme 3.15. Abelyen kategoride verilen şekildeki değişmeli diyagramın geri çekilim olması için gerek ve yeter koşul $(f,-g) : A\oplus B \to C$ çekirdeğinin $(i,j) : P \to A\oplus B$ olmasıdır.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "i"] \arrow[dd, "j"'] \arrow[dr, "p"'] & & A \arrow[dd, "f"] \\ & A\oplus B \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \arrow[dr] & \\ B \arrow[rr, "g"'] & & C \end{tikzcd}$$

İspat. Önerme 2.2 gereği diyagramın geri çekilim olması için $(i,j) = Eq(f\circ\pi_1, g\circ\pi_2)$ olmalıdır. Abelyen kategori toplamsal olduğundan Önerme 3.2 sayesinde $(i,j) = Eq(f\circ\pi_1, g\circ\pi_2) = ker(f\circ\pi_1 - g\circ\pi_2) = ker(f,-g)$ elde ederiz. □

Önerme 3.16. Abelyen kategoride epimorfizmler geri çekme altında kararlıdır.

İspat. Şekildeki geri çekme diyagramında g epimorfizm ise f'nin de epimorfizm olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

f' morfizmini $f' = k \circ h$ olacak şekilde epi-mono bileşkesi olarak yazalım.Buradan geri çekme diyagramını genişletirsek;

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r, "l"] \arrow[d, "p"'] & R \arrow[d, "k"] \\
P \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Elde ettiğimiz diyagramda Önerme 2.11 gereği p de monomorfizm olur. Ayrıca Önerme2.1 uyarınca dış kare geri çekme diyagramıdır. Bu durumda $f \circ k \circ h = f \circ f' = g \circ g'$ olur ve geri çekme objesinin evrenselliği gereği $l \circ q = h$ ve $p \circ q = 1_P$ eşitliklerini sağlayan bir tek $q : P \to P'$ morfizmi bulunur. Dahası 1_P epimorfizm olduğundan p de epimorfizmdir. O halde p izomorfizmdir.

Önerme 3.15i uygularsak;

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & R \oplus Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, equal] \\
P \arrow[r] & X \oplus Y \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramını elde ederiz. Abelyen kategori protomoduler olduğundan $(k, 1_Y) : R \oplus Y \to X \oplus Y$ dönüşümü izomorfizmdir. Bu durumda k izomorfizm ve $f' = h \circ k$ epimorfizmdir. □

Teorem 3.5. Abelyen bir kategori düzenlidir.

İspat. Abelyen kategori sonlu bütün ve sonlu eş-bütün olduğundan (Önerme 3.8) her morfizmin çekirdek ikilisi ve her çekirdek ikilisinin eş-eşitleyicisi vardır. Abelyen kategoride her epimorfizm düzenli (Önerme 3.9) ve epimorfizmler geri çekilim altında kararlı (Önerme 3.16) olduğundan düzenli kategoridir. □

Teorem 3.6. Abelyen bir kategori tamdır.

İspat. Bir denklik bağıntısı $r_1, r_2 : R \rightrightarrows A$ alalım. Abelyen kategori sonlu bütün olduğundan iki paralel morfizmin eş-eşitleyicisi vardır. Diyelim ki $q = Coeq(r_1, r_2)$. O halde q morfizminin çekirdek ikilisinin (r_1, r_2) olduğunu göstermeliyiz.

Düzenli kategoriler arası bir tam funktor tanımı gereği tam dizileri ve bütün sonlu limitleri, dolayısı ile çekirdek ikililerini ve çekirdek ikililerinin eş-eşitleyicilerini korur. Ayrıca denklik bağıntısı tanımını tamamen sonlu limitler üzerine kurduğumuz için problemi Freyd-Mitchell Embedding teoremi uyarınca RMod kategorisine taşıyabiliriz.

Açıkça RMod kategorisinde (r_1, r_2) morfizmlerinin eş-eşitleyicisi $(r_1(x), r_2(x))$ ile üretilen bölüm modülüdür.

$$R \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{q} Q$$

q morfizminin kendisi ile geri çekilimi

$$A \times_Q A = \{(a,b) | q(a) = [a] = [b] = q(b)\} = R$$

olduğundan (r_1, r_2) morfizmleri q morfizminin çekirdek ikilisidir. Sonuç olarak abelyen kategori düzenli olup, her denklik bağıntısı etkili olduğundan tam kategoridir. □

4. YARI-ABELYEN KATEGORİ

4.1 Giriş

Bu bölümde değişmeli cebirler ve gruplar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modüller kategorilerinin bazı kategorik özellikleri verilerek yarı-abelyenlikleri incelenecektir.

k değişmeli halka, C ve R değişmeli **k**-cebirler olsun.

$$\begin{aligned} R \times C &\longrightarrow C \\ (r,c) &\longmapsto r \cdot c \end{aligned}$$

fonksiyonu ile her $k \in \mathbf{k}, c, c' \in C, r, r' \in R$ için,

- $k(r \cdot c) = (kr \cdot c) = (r \cdot kc)$
- $r \cdot (c + c') = r \cdot c + r \cdot c'$
- $(r + r') \cdot c = r \cdot c + r' \cdot c$
- $r \cdot (cc') = (r \cdot c)c' = c(r \cdot c')$
- $rr' \cdot c = r \cdot (r' \cdot c)$

şartlarını sağlıyor ise f ye R nin C üzerine değişmeli cebir etkisi denir.

4.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

Tanım 4.1. **k** değişmeli halka, R **k**-cebir ve C R-cebir olsun.

$$\begin{aligned} R \times C &\longrightarrow C \\ (r,c) &\longmapsto r \cdot c \end{aligned}$$

değişmeli cebir etkisi olmak üzere

$$\partial : C \to R$$

R-modül homomorfizmi ile her $c, c' \in C$ ve $r \in R$ için

CM1) $\partial(r \cdot c) = r \cdot \partial(c)$

CM2) $\partial(c) \cdot c' = cc'$

şartları sağlanıyorsa ∂ veya (C,R,∂) üçlüsüne R-çaprazlanmış modül denir.

Değişmeli cebirler üzerindeki çaprazlanmış modüller kategorisi XMod

- Objeler sınıfı: $\partial : C \to R, \partial' : C' \to R', \cdots$ çaprazlanmış modüller.
- Morfizmler kümesi:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\phi"'] & R \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R \times C \arrow[r, "(\phi,\theta)"] \arrow[d] & R' \times C' \arrow[d] \\ C \arrow[r, "\theta"'] & C' \end{tikzcd}$$

diagramları değişmeli olmak üzere

$$\begin{tikzcd} (r,c) \arrow[r] \arrow[d] & (\phi(r),\theta(c)) \arrow[d] \\ r \cdot c \arrow[r] & \theta(r \cdot c) = \phi(r) \cdot \theta(c) \end{tikzcd}$$

olup

$$\theta(r \cdot c) = \phi(r) \cdot \theta(c)$$

elde edilir.Böylece

$$(\theta, \phi) : (C,R,\partial) \to (C',R',\partial')$$

homomorfizm çiftine, çaprazlanmış modül morfizmi denir.

- Kompozisyon:(θ, ϕ) ve (θ', ϕ') çaprazlanmış modül morfizmleri olmak üzere

$$(\theta, \phi) \circ (C, \phi') = (\theta \circ \theta', \phi \circ \phi')$$

şeklindedir.

Özel olarak $R = R'$ ve ϕ birim dönüşüm ise

$$\theta(r \cdot c) = r \cdot \theta(c)$$

yani

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\partial"'] & & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

diagramı değişmeli olup

$$\partial'\theta = \partial$$

sağlandığında θ bir çaprazlanmış modül morfizmi olur. Bu durumda, sabit R-cebiri üzerinde çaprazlanmış R-modüllerin kategorisi elde edilir ve XMod/R ile gösterilir. R sabit olduğunda (C,R,∂) çaprazlanmış modülünü (C,∂) ile göstereceğiz.

XMod/R kategorisinde ilk obje

$$0 : 0 \to R$$

ve son obje

$$id_R : R \to R$$

çaprazlanmış modülleridir.

Verilen (A,α) ve (B,β) çaprazlanmış R-modüllerinin çarpım objesi

$$C = A \times_R B = \{(a,b) | \alpha(a) = \beta(b)\}$$

R-cebiri için

$$\begin{aligned} \partial_C : A \times_R B &\longrightarrow R \\ (a,b) &\longmapsto \partial_C(a,b) = \alpha(a) = \beta(b) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı

$$\begin{aligned} \partial_C(r \cdot (a,b)) &= \partial_C(r \cdot a, r \cdot b) \\ &= \alpha(r \cdot a) \\ &= r \cdot \alpha(a) \\ &= r \cdot \partial_C(a,b) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\partial_C(a,b)\cdot(a',b') &= \alpha(a)\cdot(a',b')\\ &= (\alpha(a)\cdot a',\alpha(a)\cdot b')\\ &= (\alpha(a)\cdot a',\beta(b)\cdot b')\\ &= (aa',bb')\\ &= (a,b)(a',b')\end{aligned}$$

koşullarını sağlayan $(A\times_R B,\partial_C)$ çaprazlanmış R-modülüdür.

Ayrıca $(f,id_R),(g,id_R):(A,\alpha)\rightrightarrows(B,\beta)$ çaprazlanmış modül morfizmlerinin eşitleyicisi

$$E=\{a\in A|f(a)=f(b)\}$$

R-cebiri için

$$\begin{aligned}\partial_E: E &\longrightarrow R\\ a &\longmapsto \partial_E(a)=\alpha(a)\end{aligned}$$

çaprazlanmış R-modülüdür. Böylece XMod/R kategorisi sonlu limitlere sahiptir.

Örnek 7. XMod/R, değişmeli cebirler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin kategorisi protomodular kategoridir.

Öncelikle sonlu bütün XMod/R kategorisinin düzenli olduğunu gösterelim.

1) XMod/R kategorisinde her morfizmin çekirdek ikilisi vardır. (A,α) ve (B,β) iki çaprazlanmış R-modül, $(f,id_R):(A,\alpha)\to(B,\beta)$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Buradan $A\times_B A=\{(a,a')|f(a)=f(a')\}$ B-cebiri ve $\partial: A\times_B A\to B$ homomorfizmini alırsak, her $(a,a')(a_1,a_1')\in A\times_B A$ ve $b\in B$ için

$$\partial(b\cdot(a,a'))=f(b\cdot a)=b\cdot f(a)=b\cdot\partial(a,a')$$
$$\partial(a,a')(a_1,a_1')=(f(a)\cdot a_1,f(a')\cdot a_1')=(a,a')(a_1,a_1')$$

eşitlikleri ile bir B-cebiri elde ederiz. Ayrıca $\alpha': A\times_B A\to R$ morfizmini, $\beta\partial=\beta f=\alpha$ olduğundan $\alpha'(a,a')=\alpha(a)=\alpha(a')$ şeklinde tanımlayalım.

Her $(a,a')(a_1,a_1')\in A\times_B A, r\in R$ için,

$$\alpha'(r\cdot(a,a'))=\alpha(r\cdot a)=r\cdot\alpha(a)=r\cdot\alpha'(a,a'),$$

$$\begin{aligned}\alpha'(a,a')\cdot(a_1,a_1') &= \alpha(a)\cdot(a_1,a_1')\\ &= (\alpha(a)\cdot a_1, \alpha(a)\cdot(a_1'))\\ &= (\alpha(a)\cdot a_1, \alpha(a')\cdot(a_1'))\\ &= (aa_1, a'a_1')\\ &= (a,a')(a_1,a_1')\end{aligned}$$

olduğundan $(A\times_B A, R, \alpha')$ çaprazlanmış modüldür. Şekildeki diyagram

$$\begin{tikzcd} A\times_B A \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[d, "\partial'"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ R \arrow[r, equal] & R \arrow[r, equal] & R \end{tikzcd}$$

p_1, p_2 projeksiyon morfizmleri ile değişmelidir.

Bir çaprazlanmış modül (C,δ) için $p_1', p_2' : (C,\delta)\to(A,\alpha)$ morfizmleri $fp_1' = fp_2'$ koşulunu sağlıyorsa

$$\begin{tikzcd} (C,\delta) \arrow[dr, dashed, "{(h,id_R)}"] \arrow[drr, bend left, "{(p_1',id_R)}"] \arrow[ddr, bend right, "{(p_2',id_R)}"'] & & \\ & (A\times_B A,\alpha') \arrow[r, "{(p_1,id_R)}"] \arrow[d, "{(p_2,id_R)}"] & (A,\alpha) \arrow[d, "{(f,id_R)}"] \\ & (A,\alpha) \arrow[r, "{(f,id_R)}"'] & (B,\beta) \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapan bir tek $h:(C,\delta)\to(A\times_B A,\alpha'), h=(p_1',p_2')$ olduğunu gösterelim. Her $c\in C$ için $p_1h(c)=p_1(p_1'(c),p_2'(c))=p_1(c)$ ve $p_2h(c)=p_2(p_1'(c),p_2'(c))=p_2(c)$ olduğundan diyagramı değişmeli yapan böyle bir h morfizmi bulunur. Şimdi h morfizminin bir tek olduğunu göstermek için $p_1h'=p_1'$ ve $p_2h'=p_2'$ olacak şekilde başka bir $h:(C,\delta)\to(A\times_B A,\alpha')$ morfizmi alalım. Her $c\in C$ için $h'(c)=(a,a')$ olmak üzere, $p_1'(c)=p_1h'(c)=p_1(a,a')=a$ ve $p_2'(c)=p_2h'(c)=p_2(a,a')=a'$ olduğundan $h'(c)=(a,a')=(p_1'(c),p_2'(c))=h(c)$ elde edilir. Böylece $h=h'$ olup h bir tektir.

Sonuç olarak diyagram geri çekilimdir. Böylece f morfizminin çekirdek ikilisi (p_1,p_2) olur.

Şimdi (p_1, p_2) çekirdek ikilisinin eş-eşitleyiciye sahip olduğunu gösterelim. A cebirinin bir ideali $I = \{a - a' | (a, a') \in A \times_B A\}$ olsun. Bölüm halkası $\overline{A} = A/I$,

$$\begin{aligned} R \times \overline{A} &\longrightarrow A \\ (r, [a]) &\longmapsto r \cdot [a] = [r \cdot a] \end{aligned}$$

etkisi ile R-cebirdir. Şimdi $\overline{\alpha} : \overline{A} \to R, \overline{\alpha}([a]) = \alpha(a)$ dönüşümünü tanımlayalım. Her $a, a' \in A$ için $[a] = [a'] \Rightarrow a - a' \in I \Rightarrow (a, a') \in A \times_B A$ ve $\alpha'(a, a') = \alpha(a) = \alpha(b)$ olduğundan $\overline{\alpha}$ iyi tanımlıdır.

Ayrıca her $[a], [a'] \in \overline{\alpha}, r \in R$ için,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(r \cdot [a]) &= \overline{\alpha}([r \cdot a]) \\ &= \alpha(r \cdot a) \\ &= r \cdot \alpha(a) \\ &= r \cdot \overline{\alpha}([a]) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}([a]) \cdot [a'] &= \alpha(a) \cdot [a'] \\ &= [\alpha(a) \cdot a'] \\ &= [aa'] \quad (\because \alpha \in \text{XMod/R}) \\ &= [a][a'] \end{aligned}$$

olduğundan $\overline{\alpha}$ dönüşümü bir çaprazlanmış R-modüldür. O halde $(q, 1_R) : (A, \alpha) \to (\overline{A}, \overline{\alpha})$ kanonik dönüşümünün (p_1, p_2) ikilisinin eşitleyicisi olduğunu gösterelim. Her $(a, a') \in A \times_B A$ için

$$qp_1(a, a') = q(a) = [a] = [a'] = q(a') = qp_2(a, a')$$

olduğundan $qp_1 = qp_2$ olup

$$\begin{tikzcd} A \times_B A \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[dr, "\alpha'"'] & A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\alpha"] & \overline{A} \arrow[dl, "\overline{\alpha}"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Başka bir $(q', 1_R) : (A, \alpha) \to (C, \gamma)$ dönüşümü $q'p_1 = q'p_2$ eşitliğini sağlıyor ise $\phi q = q'$ olacak şekilde bir tek

$$\phi : (\overline{A}, \overline{\alpha}) \to (C, \gamma), \phi([a]) = q'(a)$$

morfizmi olduğunu gösterelim.

Her $[a], [a'] \in \overline{A}$ için

$$\begin{aligned} [a] = [a'] \Rightarrow \phi([a]) &= q'(a) \\ &= q' p_1(a, a') \\ &= q' p_2(a, a') \\ &= q'(a') \\ &= \phi([a']) \end{aligned}$$

olduğundan ϕ iyi tanımlıdır. Ayrıca her $a \in A$ için $\phi q(a) = \phi([a]) = q'$ olduğundan $\phi q = q'$ elde edilir. Eğer $\phi' : (\overline{A}, \overline{\alpha}) \to (C, \gamma), \phi' q = q'$ eşitliğini sağlayan başka bir morfizm ise her $[a] \in \overline{A}$ için $\phi([a]) = q'(a) = \phi' q(a) = \phi'([a])$ olduğundan ϕ bir tektir.

$$\begin{tikzcd} (A \times_B A, \alpha') \arrow[r, shift left, "(p_1, id_R)"] \arrow[r, shift right, "(p_2, id_R)"'] & (A, \alpha) \arrow[r, "(q, id_R)"] \arrow[dr, "(q', id_R)"'] & (\overline{A}, \overline{\alpha}) \arrow[d, dotted, "(\phi, id_R)"] \\ & & (C, \gamma) \end{tikzcd}$$

Böylece q morfizmi (p_1, p_2) ikilisinin eş-eşitleyicisidir.

2) XMod/R kategorisinde her düzenli epimorfizmin geri çekilim altında kararlı olduğunu gösterelim. Bir $(f, id_R) : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ düzenli epimorfizminin herhangi bir $(g, id_R) : (C, \gamma) \to (B, \beta)$ morfizmi ile geri çekme diyagramı

$$\begin{tikzcd} (A \times_B C, \delta) \arrow[r, "(g', id_R)"] \arrow[d, "(f', id_R)"'] & (C, \gamma) \arrow[d, "(g, id_R)"] \\ (A, \alpha) \arrow[r, "(f, id_R)"'] & (B, \beta) \end{tikzcd}$$

şekildeki gibidir. Burada k-cebirlerin kategorisi abelyen olduğundan düzenli epimorfizmler geri çekilim altında kararlıdır. O halde f düzenli epimorfizm iken g' de düzenli epimorfizmdir. Dolayısıyla (g', id_R) çaprazlanmış modül morfizmi de düzenli epimorfizmdir. Sonuç olarak XMod/R kategorisi düzenlidir.

3) XMod/R kategorisinde denklik bağıntısının etkili olduğunu gösterelim.

$$(E,\partial) \underset{(v,id_R)}{\overset{(u,id_R)}{\rightrightarrows}} (A,\alpha)$$

denlik bağıntısı olsun. Elemanları

$$[a] = \{b \in A | (a,b) \in E\}$$

şeklindeki denklik sınıfları olan A/E R-cebiri

$$\begin{array}{rcl} \overline{\alpha} : A/E & \to & R \\ [a] & \to & \alpha(a) \end{array}$$

morfizmi ile bir çaprazlanmış R-modüldür.Çünkü;

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(r \cdot [a]) &= \overline{\alpha}([r \cdot a]) \\ &= \alpha(r \cdot a) \\ &= r \cdot \alpha(a) \quad (\because \alpha \in \text{XMod/R}) \\ &= r \cdot \overline{\alpha}([a]) \end{aligned}$$

olduğundan $\overline{\alpha}(r \cdot [a]) = r \cdot \overline{\alpha}([a])$ ve

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}([a]) \cdot [b] &= \alpha(a) \cdot [b] \\ &= [\alpha(a) \cdot b] \\ &= [ab] \quad (\because \alpha \in \text{XMod/R}) \\ &= [a][b] \end{aligned}$$

olduğundan $\overline{\alpha}([a]) \cdot [b] = [a][b]$ eşitlikleri ile çaprazlanmış modül olma koşullarını sağlar.

A kümesi üzerindeki ilgili bağıntı tanımı gereği $x \in E$ olmak üzere $E, (u(x), v(x))$ ikilileri ile üretilen denklik bağıntısı olduğundan, $(0, u(x) - v(x)) \in E$ olur ve bu durumda; $0 = p(0) = p(u(x)) - p(v(x))$ yani

$$pu = pv$$

elde edilir. Böylece p morfizmi (u,v) ikilisinin eş-eşitleyicisidir.

Böylece $(q,id_R):(A,\alpha)\to(A/E,\overline{\alpha})$ projeksiyon morfizmi ile

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[dr, "\partial"'] & A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\alpha"] & A/E \arrow[dl, "\overline{\alpha}"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı elde edilir.

Bir (E',∂') çaprazlanmış R-modülü $(u',id_R),(v',id_R):(E',\partial')\to(A,\alpha)$ morfizmleri ile her $x\in E'$ için $qu'(x)=qv'(x)$ özelliğini sağlıyorsa $[u'(x)]=[v'(x)]$ olduğundan $(u'(x),v'(x))\in E$ olur. O halde $u\phi=u'$ ve $v\phi=v'$ olacak şekilde bir tek $(\phi,id_R):(E',\partial')\to(E,\partial)$ çaprazlanmış R-modül morfizmi vardır.

Böylece şekildeki değişmeli diyagram

$$\begin{tikzcd} (E',\partial') \arrow[dr, dotted, "(\phi,id_R)"] \arrow[drr, bend left, "(u',id_R)"] \arrow[ddr, bend right, "(v',id_R)"'] & & \\ & (E,\partial) \arrow[r, "(u,id_R)"] \arrow[d, "(v,id_R)"] & (A,\alpha) \arrow[d, "(q,id_R)"] \\ & (A,\alpha) \arrow[r, "(q,id_R)"'] & (A/E,\overline{\alpha}) \end{tikzcd}$$

geri çekilim olup (u,v) morfizmleri (q,id_R) çaprazlanmış modül morfizminin çekirdek ikilisidir.

O halde çaprazlanmış R-modüller kategorisinde her denklik bağıntısı etkili bağıntıdır.

Sonuç olarak XMod/R kategorisi tam kategoridir.

4) $(f,id_R):(A,\alpha)\to(B,\beta)$ ve $(f',id_R):(A',\alpha)\to(B',\beta)$ düzenli epimorfizm olmak üzere

$$\begin{tikzcd} (Kerf',\alpha|_{Kerf'}) \arrow[r, "(kerf',id_R)"] \arrow[d, "(u,id_R)"'] & (A',\alpha') \arrow[r, "(f',id_R)"] \arrow[d, "(v,id_R)"] & (B',\beta') \arrow[d, "(w,id_R)"] \\ (Kerf,\alpha|_{Kerf}) \arrow[r, "(kerf,id_R)"'] & (A,\alpha) \arrow[r, "(f,id_R)"'] & (B,\beta) \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramını ele alalım. Eğer (u,id_R) ve (w,id_R) izomorfizm ise (v,id_R) dönüşümünün de izormofizm olduğunu gösterelim.

XMod/R kategorisinde verilen (f,id_R) morfizmine f örten homomorfizm ise örten, f

birebir homomorfizm ise birebir denir. Ladra (1994) çaprazlanmış modül epimorfizmlerini ayrıntılı olarak incelediği makalesinde, bir (f, id_R) çaprazlanmış modül morfizminin düzenli epimorfizm olması için gerek ve yeter koşulun örten olması olduğunu göstermiştir. Bu durumda aldığımız (f, id_R) ve (f', id_R) düzenli epimorfizmleri için f, f' örten homomorfizmlerdir.

Öncelikle u, w dönüşümlerinin birebir R-modül homomorfizmi olduğunu kabul edelim. Bazı $a' \in A'$ için $v(a') = 0$ olsun. O halde

$$w(f'(a')) = f(v(a')) = 0$$

olup w birebir olduğundan

$$f'(a') = 0 \Rightarrow a' \in Kerf'$$

elde ederiz. Bu durumda

$$v(a') = v(kerf'(a') = kerf(u(a')) = 0 \Rightarrow u(a') = 0$$

olur. Ayrıca u birebir olduğundan $a' = 0$ olup v birebirdir.

Şimdi u, w dönüşümlerinin örten R-modül homomorfizmi olduğunu kabul edelim. $a \in A$ olsun. w ve f' örten olduğundan $a' \in A'$ ve $b' \in B'$ için

$$f(a) = w(b') = w \circ f'(a') = f \circ v(a')$$

olur. O halde

$$f(a - v(a')) = 0 \Longrightarrow a - v(a') \in Kerf$$

elde ederiz. Bu durumda u örten olduğundan bazı $x \in Kerf'$ için $u(x) = a - v(a')$ olduğundan

$$a - v(a') = kerf(u(x)) = v(kerf'(x))$$

$$\Longrightarrow a = v(kerf'(x) + a') \in Imv$$

elde ederiz. Böylece v R-modül homomorfizminin örtenliği görülür.

Sonuç olarak v izomorfizm olduğundan (v, id_R) çaprazlanmış modül morfizmi de izomorfizmdir. Böylece Kısa 5-Lemma sağlanmış olur.

Konuyla ilgili örgülü çaprazlanmış modüller kategorisinin tamlığı üzerine Gülsün Akay'ın (2015) çalışmasından faydalanılmıştır.

4.3 Yarı-abelyen kategori

Tanım 4.2. Sıfır objeye ve sonlu limitlere sahip bir $\mathscr{C}$ kategorisi tam ve protomodular ise *yarı-abelyen*dir.

Örnek 8. Gruplar kategorisi **Grp** yarı-abelyendir.

Grp kategorisinde aşikar grup hem başlangıç hem bitiş objesidir. Direkt çarpım grubu ile projeksiyon homomorfizmleri **Grp** kategorisinin çarpım objesidir. Ayrıca verilen $f,h : G \rightrightarrows G'$ grup homomorfizmlerinin eşitleyicisi $Eq(f,h) = g \in G | f(g) = h(g) \leq G$ ile indirgenmiş dönüşümdür. Sonuç olarak **Grp** sonlu bütündür.

1) Her $f : G \to G'$ homomorfizminin çekirdek ikilisi

$$Eq(f) = \{(g_1,g_2) | f(g_1) = f(g_2)\} \leq G \times G$$

ile

$$p_1, p_2 : Eq(f) \to G$$

projeksiyon morfizmleridir. Dahası kanonik dönüşüm

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow G/Eq(f) \\ g &\longmapsto \overline{g} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{tikzcd} Eq(f) \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G' \\ & & G/Eq(f) \arrow[ur, dotted, "i"'] & \end{tikzcd}$$

diagramında

$$\exists! i : G/Eq(f) \to G' \text{ , } i(\overline{g}) = f(g)$$

şeklinde tanımlı olup (p_1, p_2) ikilisinin eş-eşitleyicisidir.

2) **Grp** kategorisinde düzenli epimorfizmler, yani örten homomorfizmler geri çekilim altında kararlıdır. Diğer deyişle $f : G \to G'$ örten homomorfizminin herhangi bir $h : G'' \to G'$ grup homomorfizmi ile

$$G \times_{G'} G'' = \{(g, g'') | f(g) = h(g'')\}$$

geri çekilim objesi olmak üzere

$$\begin{tikzcd} G\times_{G'} G'' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"'] & G \arrow[d, "f"] \\ G'' \arrow[r, "h"'] & G' \end{tikzcd}$$

diagramında verilen f' dönüşümü de örten R-modül homomorfizmidir. Çünkü her $g'' \in G''$ için en az bir $g \in G$ vardır ki $h(g'') = f(g)$ olur. Bu durumda $(g, g'') \in G \times_{G'} G''$ olup $f'(g, g'') = g''$ eşitliği gereği f' dönüşümünün örten olduğu görülür.

3) Bir $\Re$ denklik bağıntısı için

- $1\Re 1$
- $x\Re y \Rightarrow x^{-1}\Re y^{-1}$
- $x\Re y, u\Re v \Rightarrow xv\Re yv$

olduğundan bir grup üzerinde kategorik denklik bağıntısı kümeler kategorisinde grup yapısına sahip bir denklik bağıntısıdır. O halde kanonik dönüşüm $\pi : G \to G/\Re$ grup homomorfizmi için $Eq(\pi) = \Re$ dir.

4) $f : G \to H$ ve $f' : G' \to H'$ düzenli epimorfizm olmak üzere

$$\begin{tikzcd} Kerf' \arrow[r, "kerf'"] \arrow[d, "u"'] & G' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "v"] & H' \arrow[d, "w"] \\ Kerf \arrow[r, "kerf"'] & G \arrow[r, "f"'] & H \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramını ele alalım. Eğer u ve w izomorfizm ise v dönüşümünün de izormofizm olduğunu gösterelim.

Grp kategorisinde düzenli epimorfizmler örten homomorfizmler ile denktir. Bu durumda aldığımız f ve f' düzenli epimorfizmleri için f, f' örten homomorfizmlerdir.

Öncelikle u, w dönüşümlerinin birebir homomorfizm olduğunu kabul edelim. Bazı $g' \in G'$ için $v(g') = 0$ olsun. O halde

$$w(f'(g')) = f(v(g')) = 0$$

olup w birebir olduğundan
$$f'(g') = 0 \Rightarrow g' \in Kerf'$$
elde ederiz. Bu durumda
$$v(g') = v(kerf'(g') = kerf(u(g')) = 0 \Rightarrow u(g') = 0$$
olur. Ayrıca u birebir olduğundan $g' = 0$ olup v birebirdir.

Şimdi u,w dönüşümlerinin örten homomorfizm olduğunu kabul edelim. $g \in G$ olsun. w ve f' örten olduğundan $g' \in G'$ ve $h' \in H'$ için
$$f(g) = w(h') = w \circ f'(g') = f \circ v(g')$$
olur. O halde
$$f(g - v(g')) = 0 \Longrightarrow g - v(g') \in Kerf$$
elde ederiz. Bu durumda u örten olduğundan bazı $x \in Kerf'$ için $u(x) = g - v(g')$ olduğundan
$$g - v(g') = kerf(u(x)) = v(kerf'(x))$$
$$\Longrightarrow g = v(kerf'(x) + g') \in Imv$$
elde ederiz. Böylece v homomorfizminin örtenliği görülür. Böylece v izomorfizm olduğundan Kısa 5-Lemma sağlanmış olup, **Grp** kategorisi protomodulerdir.

Sonuç olarak **Grp** sıfır objeye sahip tam ve protomoduler kategori olduğundan yarı-abelyendir.

Yarı-abelyen kategori ile ilgili ayrıntılı bilgiye Janelidze, Marki ve Tholen'in (2002) makalesinden ulaşılabilir.

Tanım 4.3. C ve G grup,
$$\partial : C \to G$$
grup homomorfizmi olmak üzere

CM1)
$$\partial(g \cdot c) = g\partial(c)g^{-1}, \forall g \in G, c \in C$$

CM2)
$$\partial(c) \cdot c' = cc'c^{-1}, \forall t, s \in T$$
koşullarını sağlayan (C, G, ∂) üçlüsüne (gruplar üzerinde) çaprazlanmış modül denir.

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisi CM

- Objeler sınıfı: $(C,G,\partial),(C',G',\partial'),\cdots$ çaprazlanmış modüller.
- Morfizmler kümesi: (C,G,∂) ve (C',G',∂') çaprazlanmış modüller iken $\forall c\in C, g\in G$ için
$$\varphi(g\cdot c)=\psi(g)\cdot\varphi(c)$$
ve
$$\psi(\partial(c))=\partial'(\varphi(c))$$
olacak şekilde
$$\varphi: C\to C'$$
$$\psi: G\to G'$$
homomorfizmleri varsa
$$(\varphi,\psi):(C,G,\partial)\to(C',G',\partial')$$
çaprazlanmış modül morfizmidir.
- Kompozisyon:(φ,ψ) ve (φ',ψ') çaprazlanmış modül morfizmleri olmak üzere
$$(\varphi,\psi)\circ(\varphi',\psi')=(\varphi\circ\varphi',\psi\circ\psi')$$
şeklindedir.

Örnek 9. Gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller kategorisi yarı-abelyendir.

CM kategorisinde çekirdek ikilileri vardır. Verilen bir $(f,\phi):(C,G,\partial)\to(C',G',\partial')$ çaprazlanmış modül morfizminin çekirdek ikilisi $(C\times_{C'}C, G\times_{G'}G,\partial\times\partial)$ çaprazlanmış modülü ve grup etkisi
$$(g_1,g_2)\cdot(c_1,c_2)=(g_1\cdot c_1,g_2\cdot c_2)$$
şeklinde tanımlı olup
$$\pi_C^{1,2}: C\times_{C'}C\to C$$
$$\pi_G^{1,2}: G\times_{G'}G\to G$$
projeksiyon dönüşümleri olmak üzere
$$(C\times_{C'}C, G\times_{G'}G,\partial\times\partial)\underset{(\pi_C^2,\pi_G^2)}{\overset{(\pi_C^1,\pi_G^1)}{\rightrightarrows}}(C,G,\partial)$$

çaprazlanmış modül morfizmleridir.

(C,G,∂) çaprazlanmış modülü için $\Re \subset C\times C$ ve $\rho \subset G\times G$ denklik bağıntıları olmak üzere $(\Re,\rho,\partial\times\partial)$ bir kongrüans tanımlar.

$$(C'',G'',\partial'') \underset{(f',\phi')}{\overset{(f,\phi)}{\rightrightarrows}} (C,G,\partial)$$

çaprazlanmış modül morfizmleri ve $(\Re,\rho,\partial\times\partial)$ çaprazlanmış modülü

$$(C'',G'',\partial'') \to (C\times C, G\times G, \partial\times\partial)$$

morfizminin imajını içeren en küçük kongrüans olsun. Bölüm grupları $C/\Re$ ve G/ρ ile indirgenmiş homomorfizm

$$\begin{aligned} \overline{\partial} : C/\Re &\longrightarrow G/\rho \\ \overline{c} &\longmapsto \overline{\partial(c)} \end{aligned}$$

grup etkisi

$$\overline{g}\cdot\overline{c} = \overline{g\cdot c}$$

ile $(C/\Re, G/\rho, \overline{\partial})$ çaprazlanmış modül modülünü elde ederiz. Burada

$$pr_C : C \to C/\Re$$

$$pr_G : G \to G/\rho$$

kanonik dönüşümleri ile tanımlanan

$$(pr_C, pr_G) : (C,G,\partial) \to (C/\Re, G/\rho, \overline{\partial})$$

homomorfizmi $(f,\phi),(f',\phi')$ morfizmlerinin eş-eşitleyicisidir.

CM kategorisinde düzenli epimorfizmler örten grup homomorfizmleri ile denktir, yani (f,ϕ) çaprazlanmış modül morfizminin düzenli epimorfizm olması için gerek ve yeter koşul f ve ϕ grup homomorfizmlerinin örten olmasıdır. *CM* kategorisinde verilen bir geri çekme diagramı

$$\begin{array}{ccc} (C\times_{C'} C'', G\times_{G'} G'', \partial\times\partial'') & \xrightarrow{(\pi_1,p_1)} & (C,G,\partial) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (\pi_2,p_2)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f,\phi)} \\ (C'',G'',\partial'') & \xrightarrow[(g,\varphi)]{} & (C',G',\partial') \end{array}$$

şekildeki gibidir. Gruplar kategorisinde düzenli epimorfizmler geri çekme altında kararlı olduğundan (f,ϕ) düzenli ise (π_2, p_2) da düzenli olur.

(C,G,∂) çaprazlanmış modülü üzerinde tanımlı her $(\Re,\rho,\partial\times\partial)$ denklik bağıntısı için $\Re, C$ grubu üzerinde, ρ, G grubu üzerinde denklik bağıntısıdır. **Grp** kategorisinde her denklik bağıntısı etkili olduğundan bu özellik *CM* için de geçerlidir.

$(f,\phi):(C,G,\partial)\to(D,H,\delta)$ ve $(f',\phi'):(C',G',\partial')\to(D',H',\delta')$ düzenli epimorfizm olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
(Kerf', \partial'|_{Kerf'}) \arrow[r, "(kerf', ker\phi')"] \arrow[d, "(u,\gamma)"'] & (C',G',\partial') \arrow[r, "(f',\phi')"] \arrow[d, "(v,\varepsilon)"] & (D',H',\delta') \arrow[d, "(w,\tau)"] \\
(Kerf, \partial|_{Kerf}) \arrow[r, "(kerf, ker\phi)"'] & (C,G,\partial) \arrow[r, "(f,\phi)"'] & (D,H,\delta)
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramını ele alalım. Eğer (u,γ) ve (w,τ) izomorfizm ise daha önce de belirttiğimiz üzere u,w,γ,ε dönüşümlerinin de her biri grup izomorfizmidir. Diagram gruplar kategorisinde Kısa 5-Lemmanın sağlanması durumunda değişmelidir. **Grp** protomoduler olduğundan diagram değişmeli olup *CM* kategorisi de protomodulerdir.

CM kategorisinde (1,1,1) aşikar çaprazlanmış modül sıfır objedir. Sonuç olarak *CM* sıfır objeye sahip, tam ve protomoduler olduğundan yarı-abelyendir.

Çaprazlanmış modüller ile ayrıntılı bilgi Porter(2007) ve Brown(2011) kitaplarından edinilebilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezde sonuç olarak değişmeli cebirler ve gruplar üzerindeki çaprazlanmış modüller kategorileri için abelyenlik araştırılmış ve sıfır objenin bulunmasına bağlı olarak yarı-abelyen olup olmama durumları incelenmiştir. Burada yarı-abelyen olması ya da olmaması durumunda var olan kategorik özellikleri ile neler üretilebileceği merak konusudur.

Bilindiği üzere gruplar kategorisi için bir iç kategori olarak formüle edilen cat^1- grup kategorisi ile çaprazlanmış modül kategorisi eşit olduğundan diğer iç kategoriler için yarı-abelyenlik genelleştirmesi üzerine yapılacak bir inceleme güzel bir çalışma konusu olacaktır.

Diğer yandan yarı-abelyen ya da protomoduler kategoriler gibi abelyen olmayan kategoriler için homolojik cebir yapılarını araştırma adına yapılan çalışmaların izinde çaprazlanmış modüller kategorisinde 5-lemma, 9-lemma, snake lemma gibi bazı teoremlerin ve sonuçlarının incelenmesi de ilginç bir çalışma olacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Borceux, F. ”Handbook of Categorical Algebra” , Vol 1-2, Cambridge University Press, Cambridge, 1994

Bourn, D., Gran, M. ”Regular, Protomodular, and Abelian Categories”, Categorical Foundations. Ed. Maria Cristina Pedicchio and Walter Tholen. 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press, p. 165-212, 2003

Datta,R. ”The Category of Modules Over a Commutative Ring and Abelian Categories”,http://www.math.columbia.edu/~ums/pdf/Rankeya_R-mod_and_Abelian_Categories.pdf

Freyd,P. ”Abelian categories: an introduction to the theory of functors”, Harper’s series in modern mathematics, 1964

Janelidze, G., Marki, L., Tholen, W. ”Semi-abelian categories”, J. Pure Appl. Alg. 168, 2-3, p. 367-386, 2002

Gülsün Akay,H., Ege Arslan, U. ”On the Barr exactness property of BXMod/R”, 2015

Ladra, M., Lopez, M.P., Rodeja, Eduardo. ”Epimorphisms of crossed modules”, Journal of Pure and Applied Algebra, Jul 1994

Mac Lane, S. ”Homology”, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, p. 114, Academic Press Inc., 1963

Mac Lane, S. ”Categories for the Working Mathematician”, Springer, 1998.

Barr, M.,”Exact Categories and Categories of Sheaves”,Springer Lecture Notes in Math, 236,p.1-120,1971

Quillen, D. ”Higher algebraic K-theory I”, Lecture Notes in Mathematics,p.85–147, 1972.

Grothendieck, A. ”Sur quelques points d’algèbre homologique”, Tôhoku Math. J. (2) 9, p.119–221, 1957

Porter, T. ”Crossed Menagerie: an introduction to crossed gadgetry and cohomology in algebra and topology.”(Notes, in part, prepared for the XVI Encuentro Rioplatense de Algebra y Geometria Algebraica, in Buenos Aires, 12-15 December 2006, and for course MATH 5312, Spring-Summer term 2007, University of Ottawa)

Brown, R., Higgins P.J., Sivera R. ”Nonabelian Algebraic Topology”, EMS, 2011, 703 pp.

Buchsbaum, D.A. ”Exact Categories and Duality”, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 80, Issue 1, p.1-34, September 1955