Yüksek Mertebeden Leibniz Çaprazlanmış Modüller

Ömer ÜÇEŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Ocak 2016

Higher Dimensional Leibniz Crossed Modules

Ömer ÜÇEŞ

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

January 2016

Yüksek Mertebeden Leibniz Çaprazlanmış Modüller

Ömer ÜÇEŞ

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Enver Önder USLU

Ocak 2016

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Ömer ÜÇEŞ' in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Yüksek Mertebeden Leibniz Çaprazlanmış Modüller**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliğiyle kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Enver Önder USLU

İkinci Danışman : –

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet Faruk ASLAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali AYTEKİN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Üye : Doç. Dr. Enver Önder USLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Enver Önder USLU danışmanlığında hazırlamış olduğum "Yüksek Mertebeden Leibniz Çaprazlanmış Modüller" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

Ocak 2016

Ömer ÜÇEŞ

ÖZET

Tezde yüksek mertebeden (kategorik anlamda) Leibniz cebirler ve aralarındaki funktoriyel ilişkiler incelenmiştir. Leibniz cebirleri ve Leibniz çaprazlanmış mödüller için izoklinizm tanımı yapılmış ayrıca Leibniz cebirler üzerinde 2-çaprazlanmış modül ve çaprazlanmış kareler tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Leibniz cebiri, çaprazlanmış modül, 2-çaprazlanmış modül, çaprazlanmış kare, izoklinizm.

SUMMARY

In this thesis, we investigate the functorial relations between the categories of higher dimensional (in categorical viewpoint) Leibniz algebras. We introduce the Leibniz algebra and Leibniz crossed module version of izoklinizm. Additionally, we introduce the notion of 2-crossed modules and crossed square of Leibniz algebras.

Keywords: Leibniz algebras, crossed modules, 2-crossed modules, crossed square, izoklinizm.

TEŞEKKÜR

Tezin her aşamasında katkıları olan danışmanım **Doç. Dr. Enver Önder USLU**'ya ve Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü çalışanlarına teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Lie cebirlerinin değişmeli olmayan (non-commutative) versiyonu olarak tanımlanan Leibniz cebirleri J.L. Loday tarafından [31] de inşaa edilmiştir. Genel olarak skew symmetry özelliğini sağlamayan Lie cebirleri olarak düşünebileceğimiz Leibniz cebirleri Leibniz özdeşliğini sağlayan, yani,

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] - [[X,Z],Y]$$

şartını sağlayan bir $[,]$ çarpımının üzerinde tanımlı olduğu vektör uzaylarıdır. Eğer Leibniz cebiri skew symmetry, yani $[X,X] = 0$ şartını sağlıyorsa, Leibniz şartı Jakobi özdeşliği ile aynı anlama gelir. Bu genelleme Lie cebirlerini baz alan tüm matematiksel ve fiziksel yapılarda da genelleme yapılmasına ve daha genel modellemelerin yapılabilmesine imkan tanımıştır [18, 21]. Ayrıca, Leibniz cebirlerinin Nambu Mekaniği ve uygulamadaki formu olan Leibniz n-cebirleri [17] de tanımlanmıştır.

Leibniz cebirlerinin tanımlanmasından sonra, Leibniz kategorisindeki grup objeler tanımlanmıştır. Bu yapılar cat^1-Leibniz cebirler ve Leibniz cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller olarak iki denk başlık altında incelenmiştir. Burada önemli olan nokta, Leibniz çaprazlanmış modüller ile Leibniz cebirlerin kohomoloji grupları arasındaki ilişkidir [18]. (Burada kohomoloji grubu, bir Leibniz cebirinin 3. mertebeden abelyen katsayılı kohomoloji grubudur). Benzer çalışma cat^1-Leibniz n-cebirler yardımıyla Leibniz n-cebirler için [21] de yapılmıştır. Bu doğrultuda tezde de Leibniz cebirleri üzerinde 2-çaprazlanmış modüller tanımlanmıştır.

Anlatılan kavramlara ek olarak tezde Leibniz cebirleri ve Leibniz çaprazlanmış modüller için izoklinizm kavramı tanımlanmış ve Leibniz cebirler üzerinde 2-çaprazlanmış modüller ile çaprazlanmış kareler inşaa edilmiştir. Böylelikle, Leibniz cebirler kategorisinde izomorfizmden daha zayıf dolayısıyla daha genel bir denklik bağıntısı tanımlanmış diğer taraftan 4-tipten Leibniz cebirleri için farklı modeller oluşturulmuştur.

1.1 Tezin Yapısı

Birinci bölümde Leibniz cebir kavramının kısa tanıtımı yapılıp tezin kalan kısmında kullanılacak bazı özelliklere yer verilecektir. Ayrıca, Leibniz cebirler üzerinde izoklinizm kavramı tanımlanacak, bazı örnekler ve ilgili özellikler incelenecektir.

İkinci bölümde, 2-boyutlu Leibniz cebiri (kategorisel bakış açısıyla) olarak adlandıracağımız cat^1-Leibniz cebir, Leibniz çaprazlanmış modüller ve Moore kompleksi nin boyu 1 olan simplisel Leibniz cebirler ve aralarındaki funktoriyel ilişkilere yer verilecektir. Aynı zamanda Leibniz çaprazlanmış modüller kategorisinin üçlenebilir olduğu gösterilecek ve Leibniz çaprazlanmış modüller için izoklinizm tanımı yapılacaktır.

Üçüncü bölümde, bir önceki bölümde tanımlanan yapıların bir boyut üstü incelenecek ve Leibniz cebirleri için çaprazlanmış kare ve 2-çaprazlanmış modül inşaa edilecektir. Daha sonra, Leibniz çaprazlanmış kare, Leibniz 2-çaprazlanmış modül, cat^2-Leibniz cebiri ve Moore kompleksi'nin boyu 2 olan simplisel Leibniz cebirler ve aralarındaki funktoriyel ilişki incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Giriş

$\mathbb{K}$ bir sabit cisim olsun. Tezin tamamında tüm cebir ve vektör uzayları $\mathbb{K}$ üzerinde tanımlıdır. Leibniz cebirleri ile ilgili detaylı bilgiye [25, 31, 32] dan ulaşılabilir.

2.2 Leibniz Cebirleri

Bu kısımda verilen tanım ve özellikler yukarıda belirtilen kaynaklardan alınmıştır.

Tanım 2.1 $\mathfrak{g}$ bir $\mathbb{K}-$vektör uzayı ve $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ bir lineer dönüşüm olsun. Her $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$ için

$$[X,[Y,Z] = [[X,Y],Z] - [[X,Z],Y]$$

şartı sağlanıyorsa $\mathfrak{g}$ ye bu çarpımla birlikte $\mathbb{K}$ üzerinde bir Leibniz cebiri denir.

Tanımlanan bu kavram literatürde sağ Leibniz cebiri olarak bilinir. Tezde bu kavramı kısaca Leibniz cebiri olarak adlandıracağız.

Tanım 2.2 $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{g}'$ Leibniz cebirleri olmak üzere, her $X,Y \in \mathfrak{g}$ için

$$f[X,Y] = [f(X), f(Y)]$$

şartını sağlayan $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ $\mathbb{K}$ lineer dönüşümüne $\mathfrak{g}$ den $\mathfrak{g}'$ ye bir Leibniz cebir homomorfizması denir.

Örnek 2.1 Her Lie cebiri bir Leibniz cebiridir. Gerçekten $\mathfrak{g}$ bir Lie cebiri olsun. $\mathfrak{g}$, Jakobi özdeşliği olarak bilinen

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

$X,Y,Z \in \mathfrak{g}$ şartını sağladığından ve aynı zamanda $\mathfrak{g}$, skew-simetri şartını sağladığından

$$[Z,[X,Y]] = -[[X,Y],Z]$$

ve

$$[Y,[Z,X]] = -[[Z,X],Y] = [[X,Y],Z]$$

olur böylece $\mathfrak{g}$, bir Leibniz cebiridir.

Bu örnekten de anlaşılacağı üzere, Leibniz cebirleri, Lie cebirlerinin genellemesidir. Ayrıca, Lie cebirleri kategorisi, Leibniz cebirleri kategorisinin bir tam alt kategorisidir.

Örnek 2.2 A bir asosyetif $\mathbb{K}$-cebiri ve $D : A \to A$ ise her $a,b \in A$ için

$$D(a(Db)) = DaDb = D(D(a)b)$$

şartını sağlayan bir $\mathbb{K}$-cebir dönüşümü olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rccc} [,]: & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (X,Y) & \longmapsto & [X,Y] = XD(Y) - (DY)X \end{array}$$

çarpımı ile birlikte A bir Leibniz cebiridir. Gerçekten, her $X,Y,Z \in A$ için

$$\begin{aligned} [X,[Y,Z]] &= [X, YD(Z) - D(Z)Y] \\ &= XD(YD(Z) - D(Z)Y) - D(YD(Z) - D(Z)Y)X \\ &= XD(Y)D(Z) - XD(Z)DY - D(Y)D(Z)X + D(Z)D(Y)X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X,[Y,Z]] &= [X, D(YZ) - D(Y)X, Z] \\ &= (XD(Y) - D(Y)X)D(Z) - D(Z)(XD(Y) - D(Y)X) \\ &= XD(Y)D(Z) - D(Y)XD(Z) - D(Z)XD(Y) + D(Z)D(Y)X \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} -[[X,Z],Y] &= -[XD(Z) - D(Z)X, Y] \\ &= (XD(Z) - D(Z)X)DY + DY(XD(Z) - D(Z)X) \\ &= -XD(Z)DY + D(Z)XDY + DYXD(Z) - DYD(Z)X \end{aligned}$$

olduğundan

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] - [[X,Z],Y]$$

olup, Leibniz özdeşliği sağlanmış olur.

Dikkat edileceği üzere $D = id_A$ olduğunda bu çarpım ile birlikte A bir Lie cebiri olur. Diğer taraftan bir D cebir dönüşümü idempotent ise, yani $D^2 = D$ şartını sağlıyorsa veya her $a, b \in A$ için $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ ve $D^2 a = 0$ şartlarını sağlıyorsa belirtilen çarpım ile A bir Leibniz cebiri olur.

Tanım 2.3 $\mathfrak{g}$ bir Leibniz cebir ve $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ nin bir alt cebiri (çarpım işlemi altında kapalı olan bir alt vektör uzayı) olsun. Her $X \in \mathfrak{g}$ ve $Y \in \mathfrak{h}$ için $[X,Y], [Y,X] \in \mathfrak{h}$ oluyorsa $\mathfrak{h}$ ye $\mathfrak{g}$ nin bir (çift taraflı) ideali denir ve $\mathfrak{h} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4 $\mathfrak{g}$ bir Leibniz cebiri olsun, her $X, Y \in \mathfrak{g}$ için $[X,Y] = 0$ oluyorsa (yani aşikar çarpıma sahipse) $\mathfrak{g}$ ye bir abelyan Leibniz cebiri denir. Bu bağlamda her $\mathbb{K}$-vektör uzayı aşikar çarpım ile birlikte bir Leibniz cebiridir.

M bir $\mathbb{K}$-vektör uzayı olsun ve n-boyutlu $M \otimes_K M \otimes_K ...M \otimes_K$ tensör çarpımını $T_n M$ ile gösterelim. $T_0 M = \mathbb{K}$ olsun. $n \geq 0$ için $T_n M$ lerin ayrık birleşimi olan $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\otimes}} T_n M$ yapısı, $m_1, .., m_p, m'_1, .., m'_q \in M$ için $(m_1 \otimes, .., m_p) \cdot (m'_1 \otimes, .., m'_q) = (m_1 \otimes, .., m_p m'_1 \otimes, .., m'_q)$ çarpımı ile birlikte bir asosyetif $\mathbb{K}$ -cebir yapısı oluşturur ve genelde TM ile gösterilir. Benzer şekilde herhangi M vektör uzayı üzerinde bir Leibniz cebir yapısı oluşturulabilir. Şöyle ki;

Tanım 2.5 M bir vektör uzayı olsun. $\overline{T}(M) = M \oplus M^{\otimes 2} \oplus ... \oplus M^{\otimes n} \oplus ...$ tensör uzayı üzerinde indüksiyonla tanımlanan

$$\begin{aligned} [X, Y \otimes M] &= [X,Y] \otimes M - [X \otimes M, Y], \\ [X, Y \otimes M] &= [X,Y] \otimes M - [X \otimes M, Y], \end{aligned}$$

$X, Y \in T(M), M \in M$, çarpımıyla bir Leibniz cebiridir.

Tanım 2.6 Yukarıda tanımlanan Leibniz cebirine M vektör uzayı üzerinde bir serbest $(free)$ Leibniz cebiri denir ve $F(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.7 $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ Leibniz cebirleri olsun. $\mathbb{K}$ -bilineer

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g}', & (x, x') & \longmapsto & [x, x'] \\ \mathfrak{g}' \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}', & (x', x) & \longmapsto & [x', x] \end{array}$$

dönüşümleri, her $X,Y \in \mathfrak{g}$, $X',Y' \in \mathfrak{g}'$ için

$$\begin{aligned}
[X,[Y,Y']] &= [[X,Y],Y'] + [Y,[X,Y']],\\
[X,[Y',Y]] &= [[X,Y'],Y] + [Y',[X,Y]],\\
[Y',[X,Y]] &= [[Y',X],Y] + [X,[Y',Y]],\\
[X,[X',Y']] &= [[X,X'],Y'] + [X',[X,Y']],\\
[X',[X,Y']] &= [[X',X],Y'] + [X,[X',Y']],\\
[X',[Y',X]] &= [[X',Y'],X] + [Y',[X',X]],
\end{aligned}$$

oluyorsa $\mathfrak{g}$ nin $\mathfrak{g}'$ üzerine etkisi vardır denir.

Tanım 2.8 $\mathfrak{g}$ bir Leibniz cebiri olsun. $\mathbb{K}$-lineer $d,D:\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dönüşümleri, her $X,Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\begin{aligned}
D[X,Y] &= [D(X),Y] - [D(Y),X],\\
d[X,Y] &= [d(X),Y] + [X,d(Y)],\\
[X,d(Y)] &= [X,D(Y)],
\end{aligned}$$

şartlarını sağlıyorsa $\varphi = (d,D)$ ikilisine $\mathfrak{g}$ nin bir biderivasyonu denir.

Tanım 2.9 $\mathfrak{g}$ bir Leibniz cebiri olsun. $\{x \in \mathfrak{g} \mid [x,g] = 0 = [g,x], g \in \mathfrak{g}\}$ idealine $\mathfrak{g}$ nin merkezi denir ve $Z(\mathfrak{g})$ ile gösterilir.

Önerme 2.10 Bir Leibniz cebirinin abelyan olması için gerek ve yeter şart merkezinin kendisine eşit olmasıdır.

İspat: $\mathfrak{g}$ bir abelyan Leibniz cebiri olsun. $x \in \mathfrak{g}$ seçelim. Her y $\in \mathfrak{g}$ için $\mathfrak{g}$ abelyan olduğundan $[x,y] = 0 = [y,x]$ tir. Dolasıyla $x \in Z(\mathfrak{g})$ dir. Böylece $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$ bulunur. Diğer taraftan $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$ olsun. Tanım gereğince her $x,y \in \mathfrak{g}$ için $[x,y] = 0$ olup $\mathfrak{g}$ abelyandır. □

Tanım 2.11 $\mathfrak{g}$ bir Leibniz cebiri ve $x,y \in \mathfrak{g}$ olsun. $[x,y]$ terimine bir komütatör denir. Bu tip elemanların ürettiği ideale $\mathfrak{g}$ nin komütatör ideali denir ve $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ ile gösterilir.

2.3 İzoklinik Leibniz cebirleri

Bu bölümde izomorfizmaya göre daha zayıf bir kavram olan izoklinizm yardımıyla Leibniz cebirlerinin bir sınıflandırılması verilecektir. İzoklinizm kavramı ilk olarak Hall tarafından [26, 27] de, Lie cebiri için, K. Moneyhun tarafından [35] de tanımlanmıştır. Ayrıca 2- boyutlu gruplar için [37] makalesinde genelleme verilmiştir.

$\mathfrak{g}$ bir Leibniz cebiri olsun

$$\begin{array}{rcl} c : \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}_1) \oplus \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}_1) & \longrightarrow & [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \\ (\overline{x},\overline{y}) & \longmapsto & [x,y] \end{array}$$

şeklinde tanımlanan c dönüşümü iyi tanımlıdır. c dönüşümüne komütatör dönüşümü denir.

Tanım 2.12 $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ iki Leibniz cebiri olsun.

$$\begin{tikzcd} \frac{\mathfrak{g}}{Z(\mathfrak{g})} \otimes \frac{\mathfrak{g}}{Z(\mathfrak{g})} \arrow[r] \arrow[d, "(\alpha{,}\alpha)"'] & {[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} \arrow[d, "\beta"] \\ \frac{\mathfrak{h}}{Z(\mathfrak{h})} \otimes \frac{\mathfrak{h}}{Z(\mathfrak{h})} \arrow[r] & {[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]} \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde , bir başka ifade ile her $\overline{x},\overline{y} \in \mathfrak{g}|Z(\mathfrak{g})$ için $\beta[x,y] = [\alpha(x),\alpha(y)]$ olacak şekilde , $\alpha : \dfrac{\mathfrak{g}}{Z(\mathfrak{g})} \to \dfrac{\mathfrak{h}}{Z(\mathfrak{h})}$ ve $\beta : [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \to [\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ izomorfizmaları varsa $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ ye izoklinik Leibniz cebirleri denir ve $\mathfrak{g} \sim \mathfrak{h}$ şeklinde gösterilir. (α,β) ikilisine $\mathfrak{g}$ den $\mathfrak{h}$ ye bir izoklinizm denir.

Örnek 2.3 Tüm abelyan Leibniz cebirleri izoklinikdir. Komütatör dönüşüm ve (α,β) izoklinizmlerini oluşturan α,β dönüşümleri sıfır dönüşümlerden oluşmaktadır.

Örnek 2.4 Her Leibniz cebiri kendisine izokliniktir. (α,β) izoklinizmi (id,id) şeklinde tanımlanmaktadır.

Örnek 2.5 Her Leibniz cebiri , $Z(L) \leq [L,L]$ şartını sağlayan bir Leibniz cebirine izokliniktir. Bu şartı sağlayan cebire stem Leibniz cebiri denir.

Örnek 2.6 İzomorf Leibniz cebirleri izokliniktir.

Dikkat edileceği üzere; (α,β) ikilisi $\mathfrak{g}_1$ den $\mathfrak{g}_2$ ye bir izoklinizm ise (α^{-1},β^{-1}) ikilisi $\mathfrak{g}_2$ den $\mathfrak{g}_1$ e bir izoklinizm dir. Ayrıca, $\mathfrak{g}_1 \sim \mathfrak{g}_2$ ve $\mathfrak{g}_2 \sim \mathfrak{g}_3$ ise $\mathfrak{g}_1$ den $\mathfrak{g}_2$ ye ve $\mathfrak{g}_2$den $\mathfrak{g}_3$ e sırasıyla (α,β) ve (α',β') gibi isoclismler vardır. Buradan hareketle $(\alpha'\circ\alpha,\beta'\circ\beta)$ ikilisi $\mathfrak{g}_1$ den $\mathfrak{g}_2$ ye bir isoclinsmdir. Yani izoklinik olma bağıntısı geçişme özelliğine sahiptir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.13 İzoklinik olma bir denklik bağıntısıdır.

3. İKİ BOYUTLU LEİBNİZ CEBİR KATEGORİSİ VE FUNKTORİYEL İLİŞKİLER

3.1 Giriş

Bu bölümde Leibniz çaprazlanmış modüller, simplisel Leibniz cebirler ve Cat^1-Leibniz cebirler ile aralarındaki funktoriyel ilişki detaylı biçimde incelenecektir. Bölümde verilen tanım ve özellikler [21] çalışmasında bulunabilir. Ayrıca yenilik olarak Leibniz çaprazlanmış modüller için izoklinizm kavramı tanımlanacaktır.

3.2 Leibniz Çaprazlanmış Modüller

Tanım 3.1 L_0 Leibniz cebirinin L_1 Leibniz cebiri üzerine etkisi var ve ∂: $L_1 \to L_0$ homomorfizması her $l_0 \in L_0$ ve l_1 , $l_1' \in L_1$ için
X1. $\partial[l_1, l_0] = [\partial(l_1), l_0]$, $\partial[l_0, l_1] = [l_0, \partial(l_1)]$
X2. $[l_1', \partial(l_1)] = [l_1', l_1] = [\partial(l_1'), l_1]$
şartlarını sağlıyorsa bu sisteme bir Leibniz çaprazlanmış modülü denir ve genelde $L : L_1 \xrightarrow{\partial} L_0$ şeklinde gösterilir. Özel olarak L sistemi sadece **X1**. şartını sağlıyorsa L ye bir Leibniz önçaprazlanmış modül denir.

Örnek 3.1 **a)** $\mathfrak{g}$ bir Leibniz cebiri ve $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ nin bir ideali olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{h} \\ (g,h) & \longmapsto & [g,h] \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{h} \\ (h,g) & \longmapsto & [h,g] \end{array}$$

dönüşümleri $\mathfrak{g}$ nin $\mathfrak{h}$ üzerinde bir etkisidir. Bu etki eşlenik etki olarak adlandırılır. Bu etki ile birlikte $inc. : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ içine homomorfizması bir Leibniz çaprazlanmış modül oluşturur. Gerçekten, her $g \in \mathfrak{g}$ ve $h, h' \in \mathfrak{h}$ için

X1.

$$\begin{aligned} inc.[g,h] &= [g,h] \\ &= [g,inc.(h)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} inc.[h,g] &= [h,g] \\ &= [inc.(h),g] \end{aligned}$$

dir.

X2.

$$\begin{aligned} [inc.(h),h'] &= [h,h'] \quad , \\ [h',inc.(h)] &= [h',h] \quad , \end{aligned}$$

dir.

Önerme 3.2 $L : L_1 \xrightarrow{\partial} L_0$ bir Leibniz çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $\partial(L_1) \trianglelefteq L_0$ dır.

İspat: $l_0 \in L_0$ ve $\partial(l_1) \in L_0$ olsun. Bu durumda $[l_0,\partial(l_1)] = \partial[l_0,l_1] \in \partial(L_1)$ ve $[\partial(l_1),l_0] = \partial[l_1,l_0] \in \partial(L_1)$ olduğundan $\partial(l_1) \trianglelefteq L_0$ dır. □

Dikkat edileceği üzere $\partial : L_1 \to L_0$ herhangi bir Leibniz homomorfizması olsaydı, genelde, $\partial(L_1)$, L_0 ın sadece bir alt cebiri olurdu.

Örnek 3.2 $\mathfrak{g}$ bir Leibniz cebir ve $Bider(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ nin biderivasyonlarının oluşturduğu Leibniz cebiri olsun.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}\times Bider(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (g,(d,D)) & \longmapsto & D(\mathfrak{g}) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} Bider(\mathfrak{g})\times\mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ ((d,D),g) & \longmapsto & d(g) \end{array}$$

şeklinde tanımlı dönüşümler $Bider(\mathfrak{g})$ nin $\mathfrak{g}$ üzerine bir etkisini teşkil eder. $g \in \mathfrak{g}$ için $d_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $x \longmapsto [g,x]$ ve $D_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $x \longmapsto [x,g]$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & Bider(\mathfrak{g}) \\ g & \longmapsto & (d_g,D_g) \end{array}$$

dönüşümü bir çaprazlanmış modüldür.

Örnek 3.3 L_1 bir L_0-modül olsun. Yani L_1 abelyan Leibniz cebiri ve L_0 ın L_1 üzerinde bir etkisi olsun. Bu durumda $\partial : L_1 \to L_0$ dönüşümü bir çaprazlanmış modül olur. Gerçekten her $l_0 \in L_0$ ve $l_1, l_1' \in L_1$ için, istenildiği üzere

X1.

$$\begin{aligned} \partial[l_0, l_1] &= 0 \\ &= [l_0, 0] \\ &= [l_0, \partial(l_1)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \partial[l_1, l_0] &= 0 \\ &= [0, l_0] \\ &= [\partial(l_1), l_0] \end{aligned}$$

dir.

X2.

$$\begin{aligned} [\partial(l_1), l_1'] &= [0, l_1'] \\ &= 0 \\ &= [l_1, l_1'] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [l_1', \partial(l_1)] &= [l_1', 0] \\ &= 0 \\ &= [l_1', l_1] \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.3 $\partial : L_1 \to L_0$ bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a) $\ker(\partial)$, L_1 in bir idealidir.

b) $\ker(\partial)$, $L_0 | \partial(L_1)$ modüldür.

c) $L_1 | [L_1, L_1]$ ve $\partial(L_1) | [\partial(L_1), \partial(L_1)]$ birer $L_0 | \partial(L_1)$ modüldür.

İspat: a) $z \in \ker(\partial)$ ve $l_1 \in L_1$ olsun. Bu durumda, $\partial(z) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \partial[l_1, z] &= [\partial(l_1), \partial(z)] \\ &= [\partial(l_1), 0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \partial[z, l_1] &= [\partial(z), \partial(l_1)] \\ &= [0, \partial(l_1)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $[z,l_1],[l_1,z]\in \ker(\partial)$ yani $\ker(\partial)\trianglelefteq L_1$ dir.

b) $\partial(L_1)\trianglelefteq L_0$ olduğundan $L_0|\partial(L_1)$ bölüm cebiri üzerindeki braket işlemi, $l_1,l_1'\in L_1$ için

$$[l_1+\partial(L_1),l_1'+\partial(L_1)]=[l_1,l_1']+\partial(L_1)$$

şeklinde tanımlanır. Her $l_1\in L_1$ ve $z\in\ker(\partial)$ için

$$\begin{aligned}[\partial(l_1),z] &= [l_1,z]\\ &= [l_1,\partial(z)]\\ &= [l_1,0]\\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}[z,\partial(l_1)] &= [z,l_1]\\ &= [\partial(z),l_1]\\ &= [0,l_1]\\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan, L_0 ın L_1 üzerine etkisi yardımıyla elde edilen $\partial(L_1)$ in $\ker(\partial)$ üzerine etkisi aşikar etkidir. Böylece

$$\begin{array}{ccc}L_0|\partial(l_1)\times\ \ker(\partial) & \to & \ker(\partial)\\ (l_0+\partial(l_1),z) & \mapsto & [l_0,z]\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc}\ker(\partial)\times L_0|\partial(l_1) & \to & \ker(\partial)\\ (z,(l_0+\partial(l_1)) & \mapsto & [z,l_0]\end{array}$$

şeklinde tanımlanan etki iyi tanımlı olur. Bu etki sonucu olarak $\ker(\partial)$ bir $L_0|\partial(l_1)$ modül bulunur.

c) İkinci şıkkın ispatına benzer şekilde yapılır. $\square$

Örnek 3.4 L_0 bir Leibniz cebir ve $\psi:L_1\longrightarrow L_1'$ bir L_0-modül homomorfizması olsun. L_0 ın L_1' üzerine etkisiyle $L_1'\rtimes L_0$ semi-direkt çarpımı elde edilir ve bu yapının L_1 üzerine

$$\begin{array}{ccc}(L\rtimes L_0)\times L_1 & \to & L_1\\ ((l_1',l_0),l_1) & \mapsto & [l_0,l_1]\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc}L_1\rtimes(L_1'\rtimes L_0) & \to & L_1\\ (l_1,(l_1',l_0)) & \mapsto & [l_1,l_0]\end{array}$$

şeklinde tanımlı etkisi vardır. Bu etki ile birlikte

$$\begin{array}{ccc}\partial:L_1 & \to & L_1'\rtimes L_0\\ l_1 & \mapsto & (\psi(l_1),0)\end{array}$$

homomorfizması bir Leibniz çaprazlanmış modüldür.

3.2.1 Leibniz Çaprazlanmış Modüller Katagorisi

Tanım 3.4 $L : L_1 \xrightarrow{\partial} L_0$ ve $L' : L_1' \xrightarrow{\partial'} L_0'$ birer Leibniz çaprazlanmış modül olmak üzere $\beta\partial = \partial'\alpha$ ve her $l_0 \in L_0, l_1 \in L_1$ için $\alpha[l_0, l_1] = [\beta(l_0), \alpha(l_1)]$, $\alpha[l_1, l_0] = [\alpha(l_1), \beta(l_0)]$ şartını sağlayan $\alpha : \ L_1 \to L_1'$, $\beta : L_0 \to L_0'$ cebir homomorfizmalarından oluşan (α, β) ikilisine L den L' ne bir Leibniz çaprazlanmış modül homomorfizması denir ve $(\alpha, \beta) : L \to L'$ şeklinde gösterilir.

Objeleri Leibniz çaprazlanmış modüller ve morfizmleri Leibniz çaprazlanmış modül homomorfizmaları olan kategoriyi **XLnbz** ile gösterelim. Leibniz önçaprazlanmış modüllerin kategorisi de benzer şekilde oluşturulur ve **PXLnbz** ile gösterilir. **XLie** (Bu kategori ile ilgili detaylı bilgiye [15] den ulaşılabilir), Lie çaprazlanmış modüller kategorisi olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} inc. : \mathbf{XLie} & \longrightarrow & \mathbf{XLnbz} \\ (L : L_1 \xrightarrow{\partial} L_0) & \longmapsto & (L : L_1 \xrightarrow{\partial} L_0) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} Lie : \mathbf{XLnbz} & \longrightarrow & \mathbf{XLie} \\ (L_1 \xrightarrow{\partial} L_0) & \longmapsto & (\overline{L_1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \overline{L_0}) \end{array}$$

funktorları mevcuttur. Burada $\overline{L_1}$ ve $\overline{L_0}$, sırasıyla L_1 ve L_0 Leibniz cebirlerinin $[x, x] = 0$ bağıtısına bölünmesiyle, bir başka ifade ile Liesation funktoru altındaki görüntüsünün alınmasıyla elde edilen Lie cebirleridir. **XLbnz** kategorisi $\mathbf{Cat}^1 - \mathbf{Lbnz}$ kategorisine (bir sonraki kısımda anlatılacak) doğal denk olması sebebiyle bir modifiye interest kategorisi dolayısıyla bir semi-abelyan kategoridir.[10, 11, 12, 14, 9, 13]

Şimdi bir $\mathfrak{g}$ Leibniz cebirini sabitleyelim. L_1 herhangi bir Leibniz cebiri olmak üzere $L : L_1 \xrightarrow{\partial} \mathfrak{g}$ formundaki tüm çaprazlanmış modüllerin kategorisini $\mathbf{XLnbz}/\mathfrak{g}$ ile gösterelim. Kolayca görülebileceği üzere $\mathbf{XLnbz}/\mathfrak{g}$ kategorisi **XLnbz** kategorisinin bir tam alt kategorisidir (full subcategory). [36] da değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisi için geçerli tüm özellikler $\mathbf{XLnbz}/\mathfrak{g}$ kategorisi için de geçerlidir. [36] da cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller için yapılanların Leibniz çaprazlanmış modüller içinde geçerli olup olmadığı incelenecektir. İspatların bir kısmı tamamen benzer olduğu için verilmemiştir. Detaylar için [36] a bakılabilir.

Önerme 3.5 **XLbnz**$/\mathfrak{g}$ da her morfizm çiftinin bir eşitleyicisi vardır.

İspat: $\mu,\mu' : (\mathfrak{L},d) \longrightarrow (\mathfrak{L}',d')$, **XLbnz**$/\mathfrak{g}$ de morfizm olsun. $\mathfrak{K} = \{k \in \mathfrak{L} \,|\mu(k) = \mu'(k)\}$ olsun. $\lambda = d\,|_K$ olmak üzere. $(\mathfrak{K},\lambda)$ bir çaprazlanmış $\mathfrak{g}$-modüldür. Diğer taraftan $\gamma : (\mathfrak{K},\lambda) \longrightarrow (\mathfrak{L},d)$ içine dönüşümü bir çaprazlanmış $\mathfrak{g}$-modül morfizmi olup $(\mathfrak{K},\lambda),(\mathfrak{L},d)$ nin bir altobjesidir. $\mu\gamma' = \mu'\gamma'$ şartını sağlayan $\gamma' : (\mathfrak{K}',\lambda') \longrightarrow (\mathfrak{L}_1,d)$ çaprazlanmış modül morfizmi var olsun. Her $k' \in \mathfrak{K}'$ için $\mu(\gamma'(k')) = \mu'(\gamma'(k'))$ olup $\gamma'(k') \in \mathfrak{K}$ dır. $\xi : \mathfrak{K}' \longrightarrow \mathfrak{K}$, $\xi(k') := \gamma'(k')$ olsun.

$$\begin{tikzcd}
(K,\lambda) \arrow[r, "\gamma"] & (L_1,d) \arrow[r, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift right, "\mu'"'] & (L_1,d') \\
(K',\lambda') \arrow[u, dashed, "\xi"] \arrow[ur, "\gamma'"'] & &
\end{tikzcd}$$

ξ, diagram değişmeli olacak şekilde tektir. Buradan $(\mathfrak{K},\lambda)$, μ_1 ve μ'_0 morfizmlerinin eşitleyicisidir. $\square$

Teorem 3.6 **XLbnz**$/\mathfrak{g}$ kategorisi geriçekmelere(pullback) sahiptir.

İspat: $\mu_L : (\mathfrak{L},\partial_{\mathfrak{L}}) \longrightarrow (\mathfrak{M},\partial_{\mathfrak{M}})$ ve $\mu_K : (\mathfrak{K},\partial_{\mathfrak{K}}) \longrightarrow (\mathfrak{M},\partial_{\mathfrak{M}})$ iki morfizm olsun. $\mathfrak{X} := \{(k,l) : \partial_K(k) = \partial_L(l)\}$ olsun. $\mathfrak{X}$, bir altcebiridir. $\varphi : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{M}$, $\varphi(k,l) := \partial_{\mathfrak{L}}(l) = \partial_{\mathfrak{K}}(k)$ bir çaprazlanmış modüldür. $\pi_1 : (\mathfrak{X},\varphi) \longrightarrow (\mathfrak{K},\partial_{\mathfrak{K}})$ ve $\pi_2 : (\mathfrak{X},\varphi) \longrightarrow (\mathfrak{L},\partial_{\mathfrak{L}})$ morfizmleri evrensellik özelliğini sağlar. Gerçekten, $\pi'_1 : (\mathfrak{X}',\varphi') \longrightarrow (\mathfrak{K},\partial_{\mathfrak{K}})$ ve $\pi'_2 : (\mathfrak{X}',\varphi') \longrightarrow (\mathfrak{L},\partial_{\mathfrak{L}})$ ç aprazlanmış modül morfizmleri $\mu_K\pi'_1 = \mu_L\pi'_2$ şartını sağladığında

$\psi(x') = (\pi'_1(x'), \pi'_2(x'))$ şeklinde tanımlı $\psi : (\mathfrak{X}', \varphi') \longrightarrow (\mathfrak{X}, \varphi)$ morfizm olup

$$\begin{tikzcd}
(X', \varphi') \arrow[dr, dotted, "\psi"] \arrow[drr, bend left, "\pi'_1"] \arrow[ddr, bend right, "\pi'_2"'] & & \\
& (X, \varphi) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & (K, \partial_K) \arrow[d, "\mu_K"] \\
& (L, \partial_L) \arrow[r, "\mu_L"'] & (M, \partial_M)
\end{tikzcd}$$

diagramını değişmelidir ve ψ biriciktir. □

$(\mathfrak{K}, \partial_{\mathfrak{K}})$ ve $(\mathfrak{L}, \partial_{\mathfrak{L}})$ iki çaprazlanmış $\mathfrak{g}$ -modül olsun.

$$\begin{tikzcd}
& (K, \partial_K) \arrow[d] \\
(L, \partial_L) \arrow[r] & (L_0, id_{L_0})
\end{tikzcd}$$

diyagramının geri çekmesi $(\mathfrak{X}, \varphi)$ çaprazlanmış $\mathfrak{g}$-modülü, bu iki objenin çarpımı olup buradan $\mathbf{XLbnz}/\mathfrak{g}$ kategorisi sonlu çarpımlara sahip olduğu sonucu elde edilir. Diğer taraftan, $\mathbb{I}$ sonlu bir kategori olmak üzere herhangi $F : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbf{XLbnz}/\mathfrak{g}$ funktoruna karşılık $\mathbf{XLbnz}/\mathfrak{g}$ kategorisi bir limite sahiptir. Sonuç olarak incelediğimiz bu kategori sonlu tamdır.

Önerme 3.7 $\mathbf{XLbnz}/\mathfrak{g}$ de her morfizm çiftinin bir koeşitleyicisi vardır.

İspat: $\mu, \mu' : (\mathfrak{L}, \partial) \longrightarrow (\mathfrak{L}', \partial')$ iki çaprazlanmış $\mathfrak{g}$ -modül morfizmi olsun. $\mathfrak{L}'$ içinde $\{\mu(l) - \mu'(l) \,|\, l \in \mathfrak{L}\}$ kümesi tarafından üretilen ideal $\mathfrak{I}$ olsun. $(\mathfrak{L}'/\mathfrak{I}, \overline{\partial'})$ bir çaprazlanmış $\mathfrak{g}$-modüldür. $\rho : (\mathfrak{L}', \partial') \longrightarrow (\mathfrak{L}'/I, \overline{\partial'})$ projeksiyon dönüşümü evrensellik özelliğine sahiptir. □

Önerme 3.8 $\mathbf{XLbnz}/\mathfrak{g}$ kategorisi eşçarpımlara sahiptir.

İspat: $\mathfrak{L} \xrightarrow{d} \mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{K} \xrightarrow{d'} \mathfrak{g}$ birer çaprazlanmış modül olsun. $\mathfrak{K}$ nın $\mathfrak{L}$ üzerine her $k \in \mathfrak{K}, l \in \mathfrak{L}$ için $[k,l] = [d'(k),l]$ şeklinde tanımlanan bir etkisi mevcuttur. Bu etki $*$ ile gösterilsin. Buradan hareketle $\mathfrak{K} \ltimes \mathfrak{L}$ semidirekt çarpımı tanımlanabilir. $\sigma : \mathfrak{K} \ltimes \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{g}$, $\sigma(k,l) := d'(k) + d(l)$ dönüşümü bu etki ile birilikte bie Leibniz önç aprazlanmış modüldür. $\mathfrak{I} = \langle \sigma(a) * b - [a,b] : \ a,b \in \mathfrak{K} \ltimes \mathfrak{L} \rangle$ ollsun. Bu durumda $\overline{\sigma} : (\mathfrak{K} \ltimes \mathfrak{L})/\mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{g}$ dönüşümü indirgeme işlemleri ile birlikte bir Leibniz çaprazlanmış mod ül olup $\mathfrak{L} \xrightarrow{d} \mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{K} \xrightarrow{d'} \mathfrak{g}$ nin bir ko çarpımıdır. $\square$

3.2.2 İzoklinik Leibniz Çaprazlanmış Modüller

Bu kısımda Leibniz çaprazlanmış modüller için izoklinizm kavramı tanımlanacak ve temel bazı özellikler verilecektir. Kavramın inşaası için gerekli olan Leibniz çaprazlanmış modüllerin merkezi ve kommütatörleri gibi tanımlar için [40] kaynaklarında detaylı bilgiye ulaşılabilir.

Notasyon. Bir $L : L_1 \xrightarrow{\partial} L_0$ Leibniz çaprazlanmış modülün merkezi $Z(L) : Z_1^L \to Z_0^L$ ve kommütatörünü ise $K(L) : K_1^L \to K_0^L$ ile gösterecek ve $L_1|Z_1^L$ ve $L_0|Z_0^L$ bölüm cebirlerini sırayla $\overline{L_1}$ ve $\overline{L_0}$ ile göstereceğiz. $\blacksquare$

$L : L_1 \xrightarrow{\partial} L_0$ bir Leibniz çaprazlanmış modül olsun

$$\begin{array}{rccc} c_1 : & \overline{L_1} \times \overline{L_0} & \to & K_1(L) \\ & (\overline{l_1}, \overline{l_0}) & \longmapsto & [l_1, l_0], \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} c_1^{opp} : & \overline{L_0} \times \overline{L_1} & \to & K_1(L) \\ & (\overline{l_0}, \overline{l_1}) & \longmapsto & [l_0, l_1] \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} c_0 : & \overline{L_0} \times \overline{L_0} & \to & K_0(L) \\ & (\overline{l_0}, \overline{l_0}) & \longmapsto & [l_0, l_0'] \end{array}$$

dönüşümlerini L nin kommütatör dönüşümleri diye adlandıralım. Dönüşümlerin iyi tanımlılığı kommütatör ve merkez tanımlarından direkt olarak elde edilir.

Tanım 3.9 $L : L_1 \xrightarrow{\partial} L_0$ ve $L' : L_1' \xrightarrow{\partial'} L_0'$ birer Leibniz çaprazlanmış modül olsun. Aşağıdaki diyagramlar değişmeli olacak biçimde

$$(\zeta_1, \zeta_0) : (\overline{L_1} \to \overline{L_0}) \to (\overline{L_1'} \to \overline{L_0'})$$

ve

$$(\xi_1, \xi_0) : (K_1^L \xrightarrow{\partial} K_0^L) \to (K_1^{L'} \to K_0^{L'})$$

izomorfizmaları varsa L ve L' ne izoklinik Leibniz çaprazlanmış modüller denir.

$$\begin{tikzcd}
\overline{L_1} \times \overline{L_0} \arrow[r, "c_1"] \arrow[d, "(\zeta_1,\zeta_0)"'] & K_1^L \arrow[d, "\zeta_1"] \\
\overline{L_1'} \to \overline{L_0'} \arrow[r, "d_1"'] & K_1^{L'}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{L_0} \times \overline{L_1} \arrow[r, "c_1^{opp}"] \arrow[d, "(\zeta_0,\zeta_1)"'] & K_1^L \arrow[d, "\zeta_1"] \\
\overline{L_0'} \to \overline{L_1'} \arrow[r, "d_1"'] & K_1^{L'}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{L_0} \times \overline{L_0} \arrow[r, "c_0"] \arrow[d, "(\zeta_0,\zeta_0)"'] & K_0^L \arrow[d, "\zeta_0"] \\
\overline{L_0'} \to \overline{L_0'} \arrow[r, "d_0"'] & K_1^{L'}
\end{tikzcd}$$

Burada (c_1, c_1^{opp}, c_0), (d_1, d_1^{opp}, d_0) sırayla L ve L' nün kommutatör dönüşümleridir.

Örnek 3.5 Tüm abelyan Leibniz çaprazlanmış modüller birbirine izokliniktir.

Örnek 3.6 $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ izoklinik Leibniz cebirleri ise $\mathfrak{g} \xrightarrow{id} \mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h} \xrightarrow{id} \mathfrak{h}$ Leibniz çaprazlanmış modülleri izokliniktir.

3.3 Simplisel Leibniz Cebirleri

Bu bölümde simplisel Leibniz cebirleri ile ilgili yapılar incelenecektir. Simplisel yapı ile ilgili detaylı bilgiye [24, 29, 34] de ulaşılabilir.

Tanım 3.10 $\mathbf{L} = \{L_0, L_1, ..., L_n, ...\}$ Leibniz cebirlerin bir kümesi olsun.

$$\begin{array}{llll} d_i := d_i^n : & L_n & \longrightarrow & L_{n-1} \ , \ 0 \leq i \leq n \quad (n \neq 0) \\ s_i := s_i^n : & L_n & \longrightarrow & L_{n+1} \ , \ 0 \leq i \leq n \end{array}$$

Leibniz cebir homomorfizmler olmak üzere $0 \leq i \leq n$ için

$$\begin{array}{lll} d_i d_j & = & d_{j-1} d_i, \qquad i < j \\ d_i s_j & = & \begin{cases} s_{j-1} d_i, & i < j \\ Id, & i = j \text{ veya } i = j+1 \\ s_j d_{i-1}, & i > j+1 \end{cases} \\ s_i s_j & = & s_{j+1} s_i, \qquad i \leq j \end{array}$$

özdeşlikleri sağlanıyorsa $\mathbf{L} = ((L_n)_{n\in\mathbb{N}}, d_i, s_j)$ sistemine bir simplisel Leibniz cebir denir. d_i ve s_j dönüşümlerine sırasıyla yüzey ve dejenere operatörleri denir. $\mathbf{L}$ simplisel Leibniz cebiri genelde

$$\cdots L_2 \ \underset{\underset{s_0, s_1}{\longleftarrow}}{\overset{\overset{d_0, d_1, d_2}{\longrightarrow}}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}} \ L_1 \ \underset{\underset{s_0}{\longleftarrow}}{\overset{\overset{d_0, d_1}{\longrightarrow}}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}} \ L_0$$

şeklinde gösterilebilir.

Örnek 3.7 $\mathfrak{g}$ bir simplisel Leibniz cebir olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n = \mathfrak{g}$ ve $d_i = s_j = id$ olmak üzere $((L_n)_{n\in\mathbb{N}}, d_i, s_j)$ bir simplisel Leibniz cebirdir ve sabit simplisel Leibniz cebiri diye adlandırılır.

$\mu : \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{L}'$ şeklindeki bir simplisel Leibniz cebir morfizmi, yüzey ve dejenere operatörleri ile uyumlu olan $f_n : L_n \longrightarrow L'_n$ şeklindeki Leibniz cebir homomorfizmlerinin bir ailesidir. Yani herbir i ve n için

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i \ \text{ ve } \ f_n s_i = s_i f_{n-1}$$

dir. Böylece simplisel Leibniz cebirlerinin kategorisini oluşturabiliriz. Bu kategoriyi **SimpLnbz** ile göstereceğiz.

3.3.1 Bir Simplisel Leibniz Cebirin Moore Kompleksi

L bir simplisel Leibniz cebir olsun.

$$\mathbf{NL}_n = \bigcap_{h=0}^{n-1} \ker d_k$$

olmak üzere

$$NL : \cdots \longrightarrow NL_n \xrightarrow{\partial_n} NL_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} NL_1 \xrightarrow{\partial_1} NL_0$$

kompleksine **L** simplisel cebirinin Moore kompleksi denir .

Tanım 3.11 $0 \leq i \leq k$ için L_i ler Leibniz cebirler olmak üzere

$$...0 \to 0 \to L_k \to L_{k-1} \to ... \to L_1 \to L_0$$

simplisel Leibniz cebirine k-parçalanmış simplisel Leibniz cebir denir. k-parçalanmış simplisel Leibniz cebirler kategorisini **Tr**$_k$**SimpLbnz** ile gösterelim. **SimpLbnz** kategorisinden **Tr**$_k$**SimpLnbz** kategorisine tr_k funktorunun st_k sol eki ve cost_k sağ eki vardır. Bu funktoriyel ilişki

$$\mathbf{Tr}_k\mathbf{Simp} \underset{\text{cos}t_k}{\longleftarrow} \mathbf{SimpLbnz} \underset{st_k}{\longrightarrow} \mathbf{Tr}_k\mathbf{Simp}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 3.12 **XLbnz** ve **Simp**$_{\leq 1}$**Lbnz** kategorileri doğal denktir.

İspat: **L**, Moore kompleksinin boyu 1 olan bir simplisel Leibniz cebiri olsun. R =kerd_0 olsun. L_0 ın R üzerinde $L_0 \times R \longrightarrow R$, $[l_0, r] = [s_0 l_0, r]$, $R \times L_0 \longrightarrow R$, $(r, l_0) \longmapsto [r, s_0 l_0]$ ş eklinde tanımlı bir etkisi vardır ve $\partial[l_0, r] = d_1[s_0 l_0, r] = [l_0, dr]$ ve $\partial[r, l_0] = d_1[r, s_0(l_0)] = [d_1(r), l_0]$ dır. Ayrıca istenildiği üzere, $NL_2 = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
[\partial r', r] &= [s_0 d_1(r'), r] \\
&= [s_0 d_1(r') - r' + r', r] \\
&= [s_0 d_1(r') - r', r] + [r', r] \\
&= [d_2 s_0 r' - d_2 s_1 r', d_2 s_1 r] + [r', r] \\
&= d_2[s_0 r' - s_1 r', s_1 r] + [r', r] \\
&= [r', r]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[r, \partial r'] &= [r, s_0 d_1(r')] \\
&= [r, s_0 d_1(r') - r' + r'] \\
&= [r, s_0 d_1(r') - r'] + [r, r'] \\
&= [d_2 s_1 r, d_2 s_0 r' - d_2 s_1 r'] + [r, r'] \\
&= d_2 [s_1 r, s_0 r' - s_1 r'] + [r, r'] \\
&= [r, r']
\end{aligned}$$

olduğundan bir Leibniz çaprazlanmış modüldür. Böylece

$$N_1 : \mathbf{Simp}_{\leq 1}\mathbf{Lbnz} \longrightarrow \mathbf{XLbnz}$$

funktorunu elde ederiz.

Tersine $\partial : R_1 \longrightarrow R_0$ Leibniz çaprazlanmış modül olsun. R_0 ın R_1 üzerine etkisi yardımıyla

$$L_1 := R_1 \rtimes R_0$$

yarıdirekt çarpımını elde ederiz. Diğer bir deyişle L_1 bir Leibniz cebirdir. Her $l_0, l_0' \in L_0$ ve $l_1, l_1' \in L_1$ için toplam, çarpım ve skaler ile çarpma işlemleri

$$\begin{aligned}
(l_0, l_1) + (l_0', l_1') &= (l_0 + l_0', l_1 + l_1') \\
[(l_0, l_1), (l_0', l_1')] &= ([l_0, l_0'], [l_1, l_1'] + [l_0, l_1'] - [l_1, l_0'])
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
d_0 :\ & L_0 \rtimes L_1 \longrightarrow L_0 \\
& (l_0, l_1) \longmapsto l_0 \\[1em]
d_1 :\ & L_0 \rtimes L_1 \longrightarrow L_0 \\
& (l_0, l_1) \longmapsto (\partial r) + l_0 \\[1em]
s_0 :\ & L_0 \longrightarrow L_0 \rtimes L_1 \\
& l_0 \longmapsto (l_0, 0)
\end{aligned}$$

Leibniz cebir homomorfizmlerdir. Ayrıca her $l \in L$ için

$$\begin{aligned}
d_0 s_0(l) &= d_0(l, 0) \\
&= l
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
d_1 s_0(l) &= d_1(l, 0) \\
&= \partial(0) + l \\
&= l
\end{aligned}$$

dır. Diğer bir deyişle $d_0 s_0 = d_1 s_0 = Id$ olur. Bu durumda simplisel özdeşlikler sağlanır. Sonuç olarak

$$L_1 \rtimes L_0 \begin{array}{c}\rightarrow\\ \rightarrow\\ \leftarrow\end{array} L_0$$

bir 1-parçalanmış simplisel Leibniz cebirdir. Böylece

$$M : \mathbf{XLbnz} \longrightarrow \mathbf{Tr_1SimpLbnz}$$

funktoru elde edilir. st_k funktorunu kullanarak 1-parçalanmış simplisel Leibniz cebirler kategorisinden Moore kompleksinin boyu 1 olan simplisel Leibniz cebirler kategorisine ulaşılır. Böylece M ve st_1 in bileşkesi olarak

$$s_1 : \mathbf{XLbnz} \longrightarrow \mathbf{Simp}_{\leq 1}\mathbf{Lbnz}$$

tanımlanır. Sonuç olarak Leibniz çaprazlanmış modüller kategorisi ile Moore kompleksinin boyu 1 olan simplisel Leibniz cebirler kategorisi doğal denktir. □

3.4 Cat^n-Leibniz Cebirleri

Cat^n-gruplar kavramı ilk olarak homotopi n-tipler için cebirsel model olarak [30] de tanımlanmıştır. Daha sonra Ellis $\mathbb{K}$-cebir kategorisinde cat^1-cebir kavramını tanımlamıştır [23]. cat^1-Leibniz cebirler yapısı [21] da Leibniz cebirleri için tanımlanmıştır. Bu bölümde Cat^1 Leibniz çaprazlanmış modüller kategorisi oluşturularak, bu kategorinin Leibniz çaprazlanmış modüller kategorisiyle denk olduğu gösterilecektir. Yani [21] da verilen sonuçlar $n = 2$ için detaylı biçimde incelenecektir.

Tanım 3.13 $\mathfrak{g}$ bir Leibniz cebiri, $s,t : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ Leibniz cebir homomorfizmaları olsun. Bu durumda

i). $st = t$ ve $ts = s$
ii). $[\ker s, \ker t] = 0 = [\ker t, \ker s]$

şartları sağlanıyorsa $(\mathfrak{g}, s, t)$ üçlüsüne *cat*^{1} -Leibniz cebir denir. Morfizmler s ve t homomorfizmaları ile uyumlu Leibniz cebir homomorfizmleri olmak üzere *cat*^{1}-Leibniz cebirler kategorisini oluşturabiliriz ve bu kategoriyi $\mathbf{Cat}^1(\mathbf{Lbnz})$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.14 **Cat^{1}Lbnz** ve **XLbnz** kategorileri doğal denktir.

İspat: (L,s,t) bir cat^1-Leibniz cebir, $M = \ker s$, $N = Ims$ ve $\partial = t|_M$ olsun. N nin M üzerine etkisini eşlenik etki olarak tanımlayalım.

X1). $n \in N$ ve $m \in M$ için

$$\begin{aligned} [m,\partial(n)] &= [\partial m, \partial n] \\ &= [(\partial n) + n - n, \partial m] \\ &= [(\partial n) - n, \partial m] + [n, \partial m], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\partial(n), m] &= [\partial n, \partial m] \\ &= [\partial m, \partial(n) + n - n] \\ &= [\partial m, n] + [\partial m, \partial n - n] \end{aligned}$$

olur. $n \in \mathrm{Im}s$ olduğundan $s(n') = n$ olacak ş ekilde $n' \in \mathcal{L}$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \partial[n,m] &= [(\partial n) - n, \partial m] + [n, \partial m] \\ &= [(\partial n) - s(n'), \partial m] + [n, \partial m] \\ &= [tn - ts(n'), tm] + [n, \partial m] \\ &= t[n - s(n'), m] + [n, \partial m] \\ &= t[n - n, m] + [n, \partial m] \\ &= t[0, m] + [n, \partial m] \\ &= [n, \partial m] \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\partial[m,n] = [\partial m, n]$ dir.

X2). $m, m' \in M$ için

$$\begin{aligned} [m', \partial m] &= [m - m + \partial m, m'] \\ &= [-m + \partial m, m'] + [m, m'] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [\partial m, m'] &= [m', m - m + \partial m] \\ &= [m' - m + \partial m] + [m', m] \end{aligned}$$

olur. $\partial m \in \mathrm{Im}s$ olduğundan $s(a) = \partial(m)$ olacak şekilde vardır.

$$\begin{aligned} t(\partial m - m) &= t(sa - m) \\ &= tsa - tm \\ &= sa - tm \\ &= tm - tm \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $(\partial l, l) \in \ker t$ dir. $m' \in \ \ker s$ ve $[\ker t, \ker s] = 0$ olduğundan $[\partial m - m, m'] = 0$ dır. Benzer şekilde $[m', \partial m - m] = 0$ dır. O halde

$$[\partial m, n'] = [m, m'] = [m', \partial m]$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\partial : M \longrightarrow N$ bir Leibniz çaprazlanmış modüldür.

Tersine, $\partial : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ bir Leibniz çaprazlanmış modül olsun. $\mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{h}$ nin Leibniz cebir olduğunu biliyoruz. s ve t dönüşümlerini;

$$\begin{array}{rccc} s: & \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{g} \\ & (r,l) & \longmapsto & (0,l) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} t: & \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{g} \\ & (r,l) & \longmapsto & (0,\partial r + l) \end{array}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $(r,l), (r_1,l_1), (r_2,l_2) \in \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{g}$ için

$$\begin{array}{rcl} s[(r_1,l_1),(r_2,l_2)] & = & s([r_1,r_2],[l_1,l_2]) \\ & = & (0,[l_1,l_2]) \\ & = & ([0,0],[l_1,l_2]) \\ & = & [(0,l_1),(0,l_2)] \\ & = & [s(r_1,l_1),s(r_2,l_2)] \end{array}$$

olduğundan s, Leibniz cebir homomorfizmidir. Benzer şekilde t de bir Leibniz cebir homomorfizmidir. Diğer taraftan

$$\begin{array}{rcl} s(t(r,l)) & = & s(0,\partial r + l) \\ & = & (0,\partial r + l) \\ & = & t(r,l) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} t(s(r,l)) & = & t(0,l) \\ & = & (0,l) \\ & = & s(r,l) \end{array}$$

olup $st = t$ ve $ts = s$ elde edilir. s ve t nin tanımından

$$\ker s = \{(r,0) | r \in \mathfrak{g}\} \text{ ve } \ker t = \{(r,-\partial r) | r \in \mathfrak{h}\}$$

olup

$$\begin{array}{rcl} [(r,0),(r',-\partial(r'))] & = & ([r,r'] -^{-\partial r'} r +^{0} r', [0,-\partial r']) \\ & = & ([r,r'] +^{\partial r'} r + 0, 0) \\ & = & ([r,r'] + [r',r], 0) \\ & = & (0,0) \end{array}$$

olur. Benzer şekilde $[(r', -\partial(r'), (r,0)] = (0,0)$ bulunur. Buradan $[\ker s, \ker t] = 0 = [\ker t, \ker s]$ elde edilir. Sonuç olarak cat^1-Leibniz cebirler kategorisi ile Leibniz çaprazlanmış modülleri kategorisinin doğal denkliği gö sterilmiş olur. □

3.5 Üçlenebilirlik(Tripleability) Özelliği

Bu kısımda Leibniz çaprazlanmış modüller kategorisinin üçlenebilir olduğu gösterilecektir. Öncelikli olarak üçlenebilir kategorilerle ilgili bazı temel tanım ve sonuçlar verilecektir. Bu tanımlamalarla ilgili detaylı bilgilere [1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 28, 33] kaynaklarından ulaşılabilir. Literatürde var olan ve yukarıdaki kaynaklarda mevcut olan tanım ve teoremler [41] da sunulduğu biçimde sunulmuştur. Burada Lie önçaprazlanmış modüller yerine Leibniz önçaprazlanmış modüller incelenecektir.

M bir küme $\mu : M \times M \longrightarrow M, \eta : \{1\} \longrightarrow M$ iki fonksiyon olsun. Burada$\{1\}$,M nin tek elemanlı bir altkümesini temsil etmektedir. $d : \{1\} \times M \longrightarrow M, d(1,m) = m$, $l : M \times 1 \longrightarrow M, (m,1) = m$ olmak üzere;

$$\begin{tikzcd}
M \times M \times M \arrow[r, "id\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times id"'] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\
M \times M \arrow[r, "\mu"'] & M
\end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \times M \arrow[r, "\eta\times id"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \times M \arrow[d, "\mu"] & M \times \{1\} \arrow[l, "id\times\eta"'] \arrow[d, "\ell"] \\
M \arrow[r, equal] & M \arrow[r, equal] & M
\end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli ise $\langle M, \eta, \mu \rangle$ sistemine bir monoid denir ve 1 elemanına monoidin birim elemanı denir.

Tanım 3.15 X bir kategori, $T : X \longrightarrow X$ bir funktor ve $\eta : I_X \longrightarrow T$ ve $\mu : T^2 \longrightarrow T$ birer doğal transformasyon olsun. $T^2 = T \circ T$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} TT \arrow[r, "\mu"] & T & TT \arrow[l, "\mu"'] \\ & T \arrow[ul, "T\eta"] \arrow[u, equal] \arrow[ur, "\eta T"'] & \end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd} TTT \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & TT \arrow[d, "\mu"] \\ TT \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli ise $\mathrm{T} = \langle T, \eta, \mu \rangle$ sistemine X içinde bir monoid denir.

[33] de belirtildiği üzere monad tanımı, kümeler üzerinde monoid tanımının bir genellemesidir. Bir M monoidini oluşturan kümenin yerine $T = X \longrightarrow X$ funktoru, çarpımın yerine $\mu = TT \longrightarrow T$ transformasyonu ve birim eleman yerine $\eta : I_X \longrightarrow T$ transformasyonu yer almaktadır. Yani X içinde bir monad, X üzerinde tanımlı funktorların oluşturduğu bir monoiddir. Burada $\{1\}$ kümesinin yerini birim funktor almaktadır. Literatürde monoid; dual standard construction, monoid ve triad şeklinde de adlandırılmaktadır. Yaygın olarak monad ve triple şeklinde kullanılmaktadır.

$\langle T, \eta, \mu \rangle$ monadında η ve μ sırasıyla birim(unit) ve çarpım(multiplication) olarak bilinir. Verilen diyagramların değişmeliliği, sol ve sağ birimlilik ve bileşke özelliklerinin varlığını göstermektedir.

$\langle T, \eta, \mu \rangle$ bir monad ve $A \in Ob(X)$ olsun. $h : T(A) \longrightarrow A$ morfizmi

$$\begin{array}{ccc} TTA & \xrightarrow{T_h} & TA \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_A} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ TA & \xrightarrow{h} & A \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & TA \\ & \searrow^{id} & \downarrow{\scriptstyle h} \\ & & A \end{array}$$

diyagramlarını değişmeli yapıyorsa $\langle A, h \rangle$ ikilisine $\langle T, \eta, \mu \rangle$ monadı üzerinde bir T-cebir denir. h morfizmine cebirin yapı dönüşümü(structure map) denir.

(A, h) ve (A', h') iki T-cebir olmak üzere $f : A \longrightarrow A'$ morfizmi yapı dönüşümleri ile uyumlu ise f ye (A, h) ve (A', h') T-cebirleri arasında bir morfizm denir. T cebirlerin kategorisi X^T ile gösterilir. [33] den hatırlanacağı üzere, X ve Y iki kategori ve $F : X \longrightarrow Y, U : Y \longrightarrow X$ iki funktor olmak üzere her $A \in Ob(X)$ ve $B \in Ob(Y)$ için

$$Hom_X(A, U(B)) \cong Hom_Y(F(A), B)$$

izomorfizmi (kümeler için) mevcut ise (F, U) ikilisine eş ikili (adjoint pair) denir.

Şimdi [5, 6] çalışmalarında verilen, eş ikililerin üçlenebilir (tripleable) olmasının tanımı verilecektir. Fakat tezde bu orjinal tanım yerine buna denk olan [7] de verilen tanımlama kullanılacaktır.

Tanım 3.16 Eğer $\Phi : Y \longrightarrow X^T$ kategoriler arasında bir denklik ise (F, U) eş ikilisine üçlenebilir (tripleable) denir.

Teorem 3.17 *Set*, kümeler kategorisi olmak üzere $U : D \longrightarrow \mathbf{Set}$ funktorunun tripleable olabilmesi için gerek ve yeter şart U nun bir sol eşini (left adjoint) var olması ve aşağıdaki üç şartın sağlanmasıdır:

(i) D nin kernel çiftleri ve coequalizerleri vardır.

(ii) $p : Y \longrightarrow Z$ nin coequalizer olması için gerek ve yeter şart $U_p : U(Y) \longrightarrow U(Z)$ nin coequalizer olmasıdır.

(iii) $X \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} Y$ nin D için kernel pair olması için gerek ve yeter şart $U(X) \underset{U_t}{\overset{U_s}{\rightrightarrows}} U(Y)$ nin *Set* içinde kernel pair olmasıdır.

Şimdi bu kriter $U : \mathbf{PXLbnz} \longrightarrow \mathbf{Set}, (L : L_1 \xrightarrow{d} L_0) \longmapsto L_1 \times L_0$ şeklinde tanımlanan U funktoru için uygulanacaktır.

Önerme 3.18 $U : \mathbf{PXLbnz} \longrightarrow \mathbf{Set}$ funktorunun sol eşi (left adjointi) vardır.

İspat: $L : L_1 \xrightarrow{d} L_0$ bir Leibniz önçaprazlanmış modül olsun. $L_1 * L_0, L_1 \times L_0$ ü zerindeki serbest Leibniz cebiri,

$$\overline{L_1} = Ker(L_1 * L_0 \xrightarrow{(0,id)} L_0) \quad , \quad (d, Id) : L_1 * L_0 \longrightarrow L_0$$

olmak üzere $U_1(L_1, L_0, d) = d$ şeklinde tanımlanan $U_1 : \mathbf{PXLbnz} \longrightarrow \mathbf{Lbnz} \downarrow \mathbf{Lbnz}$ funktorunun $F_1(L_1 \xrightarrow{d} L_0) = (\overline{L_1}, L_0, (d, Id) \mid_{\overline{L_1}})$ şeklinde tanımlanan $F_1 : \mathbf{Lbnz} \downarrow \mathbf{Lnbz} \longrightarrow \mathbf{PX}(\mathbf{Lnbz})$ sol eş funktoru vardır. Yine $U_2(L_1 \xrightarrow{d} L_0) \longrightarrow L_1 \times L_0$ şeklinde tanımlanan $U_2 : \mathbf{Lnbz} \downarrow \mathbf{Lnbz} \longrightarrow \mathbf{Lbnz}$ funktorunun $F_2(L_1) = (L_1 \xrightarrow{i_1} L_1 * L_1)$ şeklinde tanımlanan $F_2 : \mathbf{Lbnz} \longrightarrow \mathbf{Lbnz} \downarrow \mathbf{Lbnz}$ sol eş funktoru vardır. Yine $U_3 : \mathbf{Lbnz} \longrightarrow \mathbf{Set}$ funktorunun bilinen $F_3 : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Lbnz}$ sol eş funktoru diğer bir deyişle kümeyi, bu küme üzerinde tanımlı serbest Lie cebirine götüren funktor vardır.

Böylelikle

$$\mathbf{PXLbnz} \underset{F_1}{\overset{U_1}{\rightleftarrows}} \mathbf{Lbnz} \downarrow \mathbf{Lbnz} \underset{F_2}{\overset{U_2}{\rightleftarrows}} \mathbf{Lbnz} \underset{F_3}{\overset{U_3}{\rightleftarrows}} Set$$

değişmeli diyagramı elde edilir. Bu funktorların bileşkesi yardımıyla

$$\mathcal{U} = U_3 \circ U_2 \circ U_1 : \mathbf{PXLbnz} \longrightarrow Set$$

funktorunun

$$F = F_3 \circ F_2 \circ F_1 : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{PXLbnz}$$

funktorunun sağ eş funktoru olduğu sonucu elde edilir. Yani bir $L: L_1 \xrightarrow{d} L_0$ önçaprazlanmış modülünün U altındaki görüntüsü $L_1 \times L_0$ olup $L_1 \times L_0$ ın F altındaki görüntüsü; $K = \mathfrak{L}(L_1 \times L_0), \overline{K} = Ker(K*(K*K) \overset{(0,id)}{\longrightarrow} K*K), (i_1, id): K*(K*K) \longrightarrow K*K$ ve $K*K$ nın $\overline{K}$ ne etkisi eş gösterim (adjoint representation) yardımıyla tanımlanmak üzere $(\overline{K}, K*K, \langle i_1, id\rangle \mid_{\overline{K}})$ önçaprazlanmış modülüdür. Burada Peiffer ideale bölümle çaprazlanmış modül elde edilir ve U : **XLbnz** $\longrightarrow$ **Set** funktorunun sol eşi (left adjointi) nin olduğu sonucuda elde edilir.. □

Teorem 3.19 $\mathcal{U}$: **PXLbnz** $\longrightarrow$ *Set* funktoru tripleable funktordur.

İspat: Teorem **3.18** deki şartların sağlandığı gösterilmelidir. İstenen sonuçlar [16, 23] çalışmalarında yapılan hesaplamalara benzer hesaplamalarla kolayca elde edilir. Yine benzer şekilde $\mathcal{U}$: **XLbnz** $\longrightarrow$ *Set* funktoru da tripleable funktordur. □

Sonuç 3.20 **PXLbnz** kategorisi bir üçlenebilir kategoridir.

Burada yapılan işlemler **Liesation** : **Lbnz** $\to$ **Lie** ve **Liesation** : **PXLbnz** $\to$ **PXLie** funktorları ve [16] deki sonuçlar derlenerek de elde edilebilir.(Modifiye) interest kategorileri [14, 19, 38, 39] de tanımlanmış ve değişik özellikleri atyrıntılı biçimde incelenmiştir. **PXLbnz** için elde edilen sonuçların tamamı **XLbnz** içinde elde edilebilir. Tek ekstra yapılması gereken elde edilen önçaprazlanmış modüllerin Peiffer ideallerine bölmektir.

Ω ve $\mathbb{E}$ sırasıyla, gruptaki işlemler kümesini ve grup kurallarını içine alacak şekildeki özdeşlikler kümesini temsil etmek üzere, $\mathbb{C}$ sistemi, Ω ve $\mathbb{E}$ ile birlikte grupların bir kategorisi olsun ve bu kategori için aşağıdaki şartlar sağlansın. Ω_i, Ω daki i-li işlemlerin kümesi olsun ve C, $\mathbb{C}$ nin bir objesi olmak üzere $x, y, z \in C$ olsun. Buna göre:

(a) $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$;

(b) toplamsal grup işlemleri olan $0, -, +$ işlemleri, sırasıyla Ω_0, Ω_1 ve Ω_2 nin elemanlarıdır.
Ayrıca, $\Omega_2' = \Omega_2 \setminus \{+\}$, $\Omega_1' = \Omega_1 \setminus \{-\}$ olmak üzere, $* \in \Omega_2$ iken Ω_2', $x *^{\circ} y = y * x$ şeklinde tanımlanan $*^{\circ}$ işlemini içerir ve $\Omega_0 = \{0\}$ olarak kabul edilir;

(c) her bir $* \in \Omega_2'$ için, $\mathbb{E}$, $x*(y+z) = x*y+x*z$ özdeşliğini içerir;

(d) her bir $\omega \in \Omega_1'$ ve $* \in \Omega_2'$ için, $\mathbb{E}$, $\omega(x+y) = \omega(x)+\omega(y)$ ve $\omega(x)*\omega(y) = \omega(x*y)$ özdeşliklerini içerir.

C, $\mathbb{C}$ nin bir objesi ve $x_1,x_2,x_3 \in C$ olsun. Buna göre:

Aksiyom 1: Her $* \in \Omega_2'$ için, $x_1+(x_2*x_3) = (x_2*x_3)+x_1$ dir.

Aksiyom 2: Her $(*,\overline{*}) \in \Omega_2' \times \Omega_2'$ sıralı ikilisi için,

$$(x_1*x_2)\overline{*}x_3 = W(x_1(x_2x_3), x_1(x_3x_2), (x_2x_3)x_1,$$
$$(x_3x_2)x_1, x_2(x_1x_3), x_2(x_3x_1), (x_1x_3)x_2, (x_3x_1)x_2)$$

şeklinde tanımlanan bir W kelimesi vardır. Yani, $(x_1*x_2)\overline{*}x_3$ elemanı, $(x_1(x_2x_3),\ldots)$ elemanlarının ürettiği alt cebirin elemanıdır.

Tanım 3.21 Aksiyom 1 ve Aksiyom 2 şartlarıyla birlikte, $\mathbb{C}$ kategorisine modifiye interest kategorisi denir.

Tanımlanan bu kategorinin interest kategorisinden farkı; $\omega(x)*\omega(y) = \omega(x*y)$ şartının interest kategorisinde $\omega(x)*y = \omega(x*y)$ şeklinde olmasıdır. Bu bağlamda gruplar kategorisi bir interest kategorisi olup modifiye interest kategorisi değildir.

Bölüm3'ten hatırlanacağı üzere **XLbnz** ve **Cat**^{1}**-Lbnz** denk olup, **Cat**^{1}$-$**Lbnz** modifiye interest kategosi olduğundan **XLbnz** de bir modifiye interest kategosidir.

4. ÜÇ BOYUTLU LEİBNİZ CEBİRLER, 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER, ÇAPRAZLANMIŞ KARELER

4.1 Giriş

Her ne kadar birinci bölüm ve ikinci bölümde sırayla Leibniz cebirler ile Leibniz çaprazlanmış modüller için izoklinizm kavramı ve Leibniz çaprazlanmış modüllerin triple özelliği gibi yeni kavram ve ilgili bazı yapıların inşaası verilmiş olsa da, tezin asıl amacı bu bölümde verilecek olan Leibniz çaprazlanmış kare kavramı, Leibniz 2-çaprazlanmış modüller ve Moore kompleksinin boyu 2 olan simplisel Leibniz cebirleri arasındaki funktoriel ilişkilerdir. Leibniz 2-çaprazlanmış modül ve Leibniz çaprazlanmış kare kavramları literatürde henüz mevcut olmayıp ilk defa burada tanımlanacaktır.

4.2 Leibniz Cebirler Kategorisinde 2-Çaprazlanmış Modüller ve Çaprazlanmış Kareler

Bu kısımda öncelikli olarak Leibniz Cebirler Kategorisinde 2-Çaprazlanmış Modül kavramını tanımlayacağız.

Tanım 4.1 Leibniz cebirlerinden oluşan bir

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

kompleksini düşünelim. N nin L ve M, üzerine ayrıca M nin L üzerine Leibniz etkisi olsun. Peiffer lifting diye adlandıracağımız **k**-bilineer dönüşümleri,

$$\{\ ,\ \}_1 : M \times M \longrightarrow L \quad \{\ ,\ \}_2 : M \times M \longrightarrow L$$

her $n \in N$, $m, m_0, m_1 \in M$, $l, l_0, l_1 \in L$ için

1. ∂_2, N nin L üzerine etkisini korur ve $M \xrightarrow{\partial_1} N$ bir önçaprazlanmış modüldür.

2. $\partial_2 \{m_0, m_1\}_1 = (m_0)^{\partial_1(m_1)} - [m_0, m_1]$

3. $\partial_2 \{m_0, m_1\}_2 = {}^{\partial_1(m_0)}(m_1) - [m_0, m_1]$

4. $\{\partial_2(l_0), \partial_2(l_1)\}_i = -[l_0, l_1]$, $i = 1, 2$

5. $\{\partial_2(l), m\}_1 = l^{\partial_1(m)} - l^m$,
   $\{\partial_2(l), m\}_2 = -l^m$

6. $\{m, \partial_2(l)\}_1 = -\ {}^m l$,
   $\{m, \partial_2(l)\}_2 = {}^{\partial_1(m)}l - {}^m l$

7. $\{m_1, m_2\}_i^n = \{m_1^n, m_2\}_i - \{m_1, {}^n m_2\}_i$, $i = 1, 2$

8. ${}^n\{m_1, m_2\}_1 = \{{}^n m_1, m_2\}_1 - \{{}^n m_2, m_1\}_2$,
   ${}^n\{m_1, m_2\}_2 = \{{}^n m_1, m_2\}_2 - \{{}^n m_2, m_1\}_1$

9. $\{m_0, [m_1, m_2]\}_1 = \{[m_0, m_1], m_2\}_1 - \{[m_0, m_2], m_1\}_1 + \{m_0, m_1\}_1^{\partial_1(m_2)} - \{m_0, m_2\}_1^{\partial_1(m_1)}$

10. $\{[m_0, m_1], m_2\}_1 = \{m_0, [m_1, m_2]\}_1 + \{[m_0, m_2], m_1\}_1 - \{m_0, m_1\}_1^{\partial_1(m_2)} + \{m_0, m_2\}_1^{\partial_1(m_1)}$

11. $\{m_0, [m_1, m_2]\}_2 = \{[m_0, m_1], m_2\}_2 - \{[m_0, m_2], m_1\}_1 - \{m_0, m_2\}_2^{\partial_1(m_1)} - {}^{\partial_1(m_0)}\{m_1, m_2\}_2$

12. $\{[m_0, m_1], m_2\}_2 = \{m_0, [m_1, m_2]\}_2 + \{[m_0, m_2], m_1\}_1 + \{m_0, m_2\}_2^{\partial_1(m_1)} + {}^{\partial_1(m_0)}\{m_1, m_2\}_2$

şartları sağlanıyorsa bu liftinglerle beraber $L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$ kompleksine bir 2-çaprazlanmış modül denir ve $(L, M, N, \partial_2, \partial_1)$ şeklinde gösterilir. Böylece 2-çaprazlanmış modüllerin kategorisi oluşturulur ve bu kategori $\mathbf{X_2Mod}$ şeklinde gösterilir.

Önerme 4.2 **L**, Moore kompleksinin boyu 2 olan bir simplisel Leibniz cebiri ve $L = NL_2$, $M = NL_1$, $N = NL_0$ olsun. N nin M üzerine etkisini $[s_0(n), m]$, $[m, s_0(n)])$

şeklinde, M nin L üzerine etkisini $[s_1(m), l]$, . $[l, s_1(m)])$ şeklinde ve N nin L üzerine etkisini $[s_1 s_0(n), l]$, $[m, s_1 s_0(l)]$ ş eklinde tanımlayalım.$\{\ ,\ \}_1 : M \times M \longrightarrow L$, $\{\ ,\ \}_2 : M \times M \longrightarrow L$ liftinglerini sırasıyla $\{m_0, m_1\}_1 = [s_1(m_0), s_0(m_1) - s_1(m_1)]$, $\{m_0, m_1\}_2 = [s_0(m_0) - s_1(m_0), s_1(m_1)]$ şeklinde tanımlayalım. Bu tanımlamalarla $\mathcal{L}$ bir 2-çaprazlanmış modüldür.

İspat: Hyper crossed kompleks çiftleri kullanılarak her $m, m_0, m_1 \in M$, $l, l_0, l_1 \in L$ için

$$
\begin{aligned}
[l_0, s_0\partial_2(l_1)] = &\quad 0 &= [s_0\partial_2(l_0), l_1] \\
[l_0, s_1\partial_2(l_1) - l_1] = &\quad 0 &= [s_1\partial_2(l_0) - l_0, l_1] \\
[s_1 s_0\partial_1(m) - s_0(m), l] = &\quad 0 &= [l, s_1 s_0\partial_1(m) - s_0(m)] \\
[s_0(m) - s_1(m), s_1\partial_2(l) - l] = &\quad 0 &= [s_1\partial_2(l) - l, s_0(m) - s_1(m)] \\
[s_1(m), s_0\partial_2(l) - s_1\partial_2(l) + l] = &\quad 0 &= [s_0\partial_2(l) - s_1\partial_2(l) + l, s_1(m)] \\
[s_1\partial_2(l_0), s_0\partial_2(l_1) - s_1\partial_2(l_1)] + [l_0, l_1] = &\quad 0 &= [s_0\partial_2(l_0) - s_1\partial_2(l_0), s_1\partial_2(l_1)] + [l_0, l_1]
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir.Bu eşitliklerin grup ve cebir versiyonlarının detayları [20] da bulunabilir. $\square$

Bu önermenin bir genellemesi olarak şu sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3 $\mathcal{L}$, Moore kompleksinin boyu 2 olan bir simplisel Leibniz cebiri olsun. Bu durumda

$$NL_2/\partial_3(NL_3 \cap D_3) \xrightarrow{\bar{\partial}_2} NL_1 \xrightarrow{\partial_1} NL_0$$

kompleksi $\{\ ,\ \}_1 : NL_1 \times NL_1 \longrightarrow NL_2/\partial_3(NL_3 \cap D_3)$, $\{m_0, m_1\}_1 = \overline{[s_1(m_0), s_0(m_1) - s_1(m_1)]}$, $\{\ ,\ \}_2 : NL_1 \times NL_1 \longrightarrow NL_2/\partial_3(NL_3 \cap D_3)$, $\{m_0, m_1\}_2 = \overline{[s_0(m_0) - s_1(m_0), s_1(m_1)]}$ şeklinde tanımlanan Peiffer liftingleriyle bir 2-çaprazlanmış modüldür. Burada üst çizgiler kosetleri temsil etmektedir.

Sonuç 4.4 $\mathfrak{X}_2\mathfrak{Mod}$ ve $\mathfrak{Simp}_{\leq 2}$ kategorileri doğal denktir.

İspat: Önerme (1) in sonucu olarak $X_2 : \mathbf{Simp}_{\leq 2} \longrightarrow \mathbf{X_2Mod}$ funktoru vardır. Tersine,

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

2-çaprazlanmış modülü ve $\{\ ,\ \}_1 : M \times M \longrightarrow L,\ \{\ ,\ \}_2 : M \times M \longrightarrow L$, Peiffer liftinglerini düşünelim. ${}^{m}l = {}^{\partial_1(m)}l - \{m, \partial_2(l)\}_2$ ve $l^m = l^{\partial_1(m)} - \{\partial_2(l), m\}_1$ özdeşlikleri M nin L üzerine bir Leibniz etkisini tanımlar. Bu ve N nin M, üzerine etkisi ile birlikte $L \rtimes M$ ve $M \rtimes N$ semi-direkt çarpımları elde edilir. [23] de kullanılan metoda benzer bir metodla arzu edildiği gibi $S_2 : \mathbf{X_2Mod} \longrightarrow \mathbf{Simp}_{\leq 2}$, funktoru elde edilir. □

Tanım 4.5 Leibniz cebirlerinden ve homomorfizmalarından oluşan

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda'} & N \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ M & \xrightarrow[\delta']{} & P \end{array}$$

diagramını düşünelim. P nin M, N ve L üzerine, M nin δ' vasıtasıyla N ve L üzerine, N nin δ vasıtasıyla M ve L üzerine etkileri olsun. $\mathbb{K}$ -bilineer $h, h^{\circ} : M \times N \longrightarrow L$ dönüşü mleri her $l \in L$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $p \in P$ ve $k \in \mathbb{K}$ için.

1. $\lambda, \lambda', \delta, \delta', \delta'\lambda$ ile $\delta\lambda'$ Leibniz çaprazlanmış modüller
   λ ve λ' dönüşümleri P nin L ü zerine etkisini korur,

2. $\lambda h^{\circ}(x,y) = {}^{y}x$, $\lambda' h^{\circ}(x,y) = y^{x}$
   $\lambda h(x,y) = x^{y}$, $\lambda' h(x,y) = {}^{x}y$,

3. $h^{\circ}(\lambda(l), y) = {}^{y}l$, $h^{\circ}(x, \lambda'(l)) = l^{x}$
   $h(\lambda(l), y) = l^{y}$, $h(x, \lambda'(l)) = {}^{x}l$,

4. $h([m,m'], n) = (h(m,n))^{m'} + {}^{m}(h(m',n))$
   $h^{\circ}([m,m'], n) = (h^{\circ}(m,n))^{m'} - (h^{\circ}(m',n))^{m}$,

5. $h(m, [n,n']) = (h(m,n'))^{n} + (h(m,n))^{n'}$
   $h^{\circ}(m, [n,n']) = {}^{n}(h^{\circ}(m,n')) + (h^{\circ}(m,n))^{n'}$,

6. ${}^{p}(h^{\circ}(m,n)) = h^{\circ}(m, {}^{p}n) - h({}^{p}m, n)$
   ${}^{p}(h(m,n)) = h({}^{p}m, n) - h^{\circ}(m, {}^{p}n)$,

7. $(h^\circ(m,n))^p = h^\circ(m,n^p) - h({}^p m,n)$
   $(h(m,n))^p = h(m^p,n) - h(m,{}^p n),$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşümler ve etkilerle birlikte verilen diagrama Leibniz cebirler kategorisinde bir ç aprazlanmış kare denir. Çaprazlanmış karelerin kategorisini $\mathbf{Crs}^2$ ile göstereceğiz.

Örnek 4.1 *(i)* P bir Leibniz cebir ve M, N ise P nin iki ideali olsun. Budurumda

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\lambda"'] & N \arrow[d, "\delta"] \\ M \arrow[r, "\delta'"'] & P \end{tikzcd}$$

bir çaprazlanmış karedir. h-dönüşümleri $h : M \times N \longrightarrow L$, $h(m,n) = [m,n]$, $h^\circ : M \times N \longrightarrow L$, $h^\circ(m,n) = [n,m]$ tanımlı olup $L = M \cap N$ ve λ ,λ' ,δ ,δ' içine dönüşümlerdir.
(ii) $M \xrightarrow{\delta'} P$ ve $N \xrightarrow{\delta} P$ Leibniz çaprazlanmış modü l olsun. $M \otimes N$ non-abelyan tensör çarpımını düşünelim. Burada M ve N nin birbiri üzerine etkisi P vasıtasıyla tanımlanmaktadır. Detaylı bilgi için [25] ye bakınız. $h : M \times N \longrightarrow M \otimes N$, $h(m,n) = m \otimes n$, $h^\circ : M \times N \longrightarrow M \otimes N$, $h^\circ(m,n) = n \otimes m$ olsun. Her $m \otimes n,\ n \otimes m \in M \otimes N$ için $\lambda : M \otimes N \longrightarrow M$, $\lambda(m \otimes n) = m^n$, $\lambda(n \otimes m) = {}^n m$, $\lambda' : M \otimes N \longrightarrow N$, $\lambda'(m \otimes n) = {}^m n$, $\lambda'(n \otimes m) = m^n$ olsun. P nin $M \otimes N$ üzerine etkisi her $m \otimes n,\ n \otimes m \in M \otimes N,\ p \in P$için${}^p(m \otimes n) = ({}^p m \otimes {}^p n)$, ${}^p(n \otimes m) = ({}^p n \otimes {}^p m), (m \otimes n)^p = (m^p \otimes n^p)$, $(n \otimes m)^p = (n^p \otimes m^p)$ şeklinde tanımlansın. Bu tanımlamalarla

$$\begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\lambda"'] & N \arrow[d, "\delta"] \\ M \arrow[r, "\delta'"'] & P \end{tikzcd}$$

bir çapeazlanmış karedir.

Tanım 4.6 (L,s_i,t_i) birer cat^1-Leibniz cebiri ve $s_is_j = s_js_i$, $t_it_j = t_jt_i$, $s_it_j = t_js_i$, $i, j = 1,2$ ve $i \neq j$ ise (L,s_1,t_1,s_2,t_2) sistemine bir cat^2-Leibniz cebiri denir ve bu kategori $\mathfrak{Cat}^2$ şeklinde gösterilir.

Önerme 4.7 **Cat**^{2} ve **Crs**^{2} kategorileri doğal denktir.

İspat: (L,s_1,t_1,s_2,t_2) bir cat^2-Leibniz cebiri olsun.

$$\begin{tikzcd}
\ker s_1 \bigcap \ker s_2 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d] \\
M \arrow[r, "\delta'"] & P
\end{tikzcd}$$

diagramı indirgenmiş homomorfizmalar ve eşlenik etkiler ile birlikte bir çaprazlanmış karedir. Tersine,

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\lambda"'] & N \arrow[d, "\delta"] \\
M \arrow[r, "\delta'"'] & P
\end{tikzcd}$$

bir çaprazlanmış kare olsun. $L \xrightarrow{\lambda} M$ ve $N \xrightarrow{\delta} P$ çaprazlanmış modü lleri yardımıyla $(L \rtimes M, s_1, t_1)$ ve $(N \rtimes P, s_2, t_2)$ cat^1-Leibniz cebirleri elde edilir. $N \rtimes P$ nin $L \rtimes M$ ü zerine bir etkisini

$$\begin{array}{rccc}
\alpha: & (N \rtimes P) \times (L \rtimes M) & \longrightarrow & L \rtimes M \\
& ((n,p),(l,m)) & \longmapsto & ({}^{n}l + {}^{p}l + h^{\circ}(m,n),\ {}^{p}m)
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc}
\alpha^{\circ}: & (N \rtimes P) \times (L \rtimes M) & \longrightarrow & L \rtimes M \\
& ((n,p),(l,m)) & \longmapsto & (l^{n} + l^{p} + h(m,n), m^{p})
\end{array}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $(L \rtimes M) \rtimes (N \rtimes P)$ bir Leibniz cebiri ve sonuç olarak $((L \rtimes M) \rtimes (N \rtimes P), s_1, t_1, s_2, t_2)$ sistemi $(L \rtimes M, s_1, t_1)$ ve $(N \rtimes P, s_2, t_2)$ cat^1 -Leibniz cebirlerinden türetilen bir cat^2-Leibniz cebiridir . □

Önerme 4.8

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\lambda"'] & N \arrow[d, "\delta"] \\
M \arrow[r, "\delta'"'] & P
\end{tikzcd}
$$

bir çaprazlanmış kare olsun. Bu durumda

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \rtimes N \xrightarrow{\partial_1} P$$

kompleksi her $(m,n),(m',n') \in M \rtimes N$ için

$$\begin{array}{rcl} \{(m,n),(m',n')\}_1 & = & h^{\circ}(m',n) \\ \{(m,n),(m',n')\}_2 & = & h(m,n') \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $\{\ ,\ \}_1 : (M \rtimes N) \times (M \rtimes N) \longrightarrow L$, $\{\ ,\ \}_2 : (M \rtimes N) \times (M \rtimes N) \longrightarrow L$ Peiffer liftingleriyle bir 2-çaprazlanmış modüldür. Her $l \in L$, $(m'',n'') \in M \rtimes N$ için $\partial_2(l) = (-\lambda(l), \lambda'(l))$ ve $\partial_1(m'',n'') = \delta'(m'') + \delta(n'')$, olup $M \rtimes N$ nin L üzerine etkisi her $(m,n) \in M \rtimes N$ ve $l \in L$ için ${}^{(m,n)}l = {}^{n}l$, $l^{(m,n)} = l^{n}$ şeklinde tanımlanmaktadır.

İspat:

$$\begin{array}{rcl} \partial_2\{(m,n),(m',n')\}_1 & = & (-\lambda h^{\circ}(m',n), \lambda' h^{\circ}(m',n)) \\ & = & (-{}^{n}m', n^{m'}) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} (m,n)^{\partial_1(m',n')} - [(m,n),(m',n')] & = & (m,n)^{\delta'(m')+\delta(n')} - [(m,n),(m',n')] \\ & = & ([m,m'] + m^{n'}, n^{m'} + [n,n']) - \\ & & ([m,m'] +^{n} m' + m^{n'}, [n,n']) \\ & = & (-{}^{n}m', n^{m'}) \end{array}$$

olup 2. şart elde edilmiş olur. Diğer şartların doğruluğu aşikardır. □

Not 4.9 Önerme yardımıyla $\mathbf{Crs}^2$ den $\mathbf{X_2Mod}$ kategorisine tanımlana funktoru $(-)_2 : \mathbf{X_2Mod} \longrightarrow \mathbf{Crs}^2$ ile göstereceğiz. Aynı zamanda gruplar için tanımlanan $M(-,2)$:

$\mathbf{Simp}_{\leq 2} \longrightarrow \mathbf{Crs}^2$ funktoru vardır. Sonuç olarak bu bölümde elde edilen sonuçları aşağıdaki diagramla ifade edebiliriz.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Crs}^2 \arrow[dl, "(-)_2"'] & \\
\mathbf{X_2Mod} \arrow[rr, shift left, "S_2"] & & \mathbf{Simp}_{\leq 2} \arrow[ll, shift left, "X_2"] \arrow[ul, "M(-,2)"']
\end{tikzcd}$$

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Tezin asıl amacı Leibniz cebirler yerine izoklinizm tanımı yapılması ve yine Leibniz cebirler için 3-tipten cebirsel modellerin tanımlanmasıdır. Tezde bu amaca ulaşılmış, tanımlama ve yapıların doğrulukları farklı biçimlerde desteklenmiştir.

İsoklinizm tanımı kullanılarak Leibniz cebirlerin izoklinik genişlemeleri, schur çarpanları ve Hopf-type formülleri elde edilebilir ve ilişkilendirilebilir. Ayrıca Leibniz 2-çaprazlanmış modül kavramı yardımıyla herhangi Leibniz cebirinin 4. kohomoloji gruplarının sınıflandırılması yapılabilir. Yine bu bağlamda Leibniz 3-çaprazlanmış modül kavramı ve ilişkili kavramlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Adámek J., Herrlich H., Strecker, G. (1990) Abstract and concrete categories, (Series in Pure and Applied Mathematics), John Wiley and Sons. 24

[2] A.Aytekin, M.Atik, E.Ö. Uslu, Representability of actions in the category of (Pre)crossed modules of Leibniz Algebras (Submitted) 16

[3] Aslan A.F., (2010) Lie algebras of group algebras with GAP 24

[4] Barker M. (2003) Representations of Crossed Modules and Cat^1-Groups, Ph.D. Thesis, University of Wales, Bangor. 24

[5] Barr M., Beck. J. (1966) Acyclic models and triples, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra (La Jolla), Springer. 24, 26

[6] Barr M., Beck. J. (1969) Homology and standard constructions, en "Seminar on Triples and Categorical Homology Theory" (B. Eckmann, ed.). Lecture Notes in Mathematics, vol. 80. Springer, pp. 245-335. 26

[7] Barr M., Wells C. (1985) Toposes, triples and theories, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, New York. 24, 26

[8] Borceux F. (1994a) Handbook of categorical algebra 1, Cambridge University Press. 24

[9] Borceux, (1994b) Handbook of categorical algebra 2, Cambridge University Press. 13, 24

[10] Borceux F. (1994c) Handbook of categorical algebra 3, Cambridge University Press. 13, 24

[11] Borceux, F., Janelidze, G., Kelly, G. M. (2005a) On the representability of actions in a semi-abelyan category. Theory Appl. Categories 14:244-286. 13

[12] Borceux, F., Janelidze, G., Kelly, G. M. (2005b) Internal object actions. Comment. Math. Univ. Carolin. 46:235-255. 13

[13] Borceux, F., Janelidze, G., Kelly, G. M. (2005). On the representability of actions in a semi-abelyan category. *Theory Appl. Categories.* 14:244-286. 13

[14] Boyacı, Y., Casas, J. M., Datuashvili, T. and Uslu, E. Ö. Actions in modified categories of interest with application to crossed modules (submitted). 13, 28

[15] Casas. J.M. (1991) Invariantes de Módulos Cruzadosen Álgebras de Lie, Ph.D.Thesis, University of Santiago. 13

[16] Casas J.M., Inassaridze N., Ladra M. (2010a) Homological aspects of Lie algebra crossed modules, Manuscripta Math. 131, 385-401. 28

[17] J. M. Casas, J.-L. Loday and T. Pirashvili Leibniz n-algebras.Forum Math. 14 (2002), 189±207 1

[18] Casas, J. M. (1999). Crossed extensions of Leibniz algebras. *Communications in Algebra* 27(12): 6253-6272. 1

[19] Casas, J. M., Datuashvili, T., Ladra, M. (2010). Universal strict general actors and actors in categories of interest. *Appl. Categ. Structures* 18:85-114. 28

[20] Carrasco, P., Cegarra, A.M. (1991). Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types. *J.Pure Appl. Alg.* 75:195-235. 32

[21] Casas, J.M., Khmaladze, K., Ladra. M. (2008). Crossed modules for Leibniz n-algebras.*Forum Math.* 20: 841-858. 1, 9, 21

[22] Curtis E.B. Simplicial homotopy theory (1971). *Adv. Math.*, 6:107-209. 18

[23] Ellis, G.H. (1993). Homotopical aspects of Lie algebras.*J. Austral. Math. Soc. (Series A)* 54: 393-419. 21, 28, 33

[24] E.B.Curtis. Simplicial Homotopy Theory. *Adv. in Math.* **6** (1971), 107-209. 18

[25] Gnadbye, A.V. (1999). A non-abelyan tensor product of Leibniz algebras.*Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 49: 1149-1177. 3, 34

[26] Hall, P., The classification of prime power groups, 1940, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 182, 130-141. 7

[27] Hall, M., & Senior, J.K., The groups of order 2^n $(n \leq 6)$, 1964, Macmillan. 7

[28] Herrlich H., Strecker G. E. (1972) Category theory, Allyn and Bacon series in advanced mathematics. 24

[29] J.Duskin. Simplicial Methods and the Interpretation of Triple Cohomology. *Memoir A.M.S.* Vol. 3 **163** (1975). 18

[30] J.L.Loday. Spaces with Finitely Many Non-trivial Homotopy Groups. *J.P.A.A.* **24** (1982), 179-202. 21

[31] Loday, J.-L. (1993). Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. *Enseign. Math.* 39 (2):269-293. 1, 3

[32] Loday, J.-L., Pirashvilli, T. (1993). Universal envoloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology. *Math. Ann.* 296: 139-158. 3

[33] Mac Lane S. (1971) Categories for the working mathematician, Springer. 24, 25, 26

[34] May J.P. (1967). Simplicial objects in algebraic topology, *Van Nostrand, Math. Studies 11.* 18

[35] Moneyhun, K., Isoclinism in Lie algebras, 1994, Algebras Groups and Geometries, 11, 9-22. 7

[36] N.M.Shammu. Algebraic and Categorical Structure of Category of Crossed Modules of Algebras. *Ph.D. Thesis,* U.C.N.W. (1992). 13

[37] Odabas, A., Ilgaz, E., & Uslu, E.Ö., Isoclinism of Crossed Modules, 2016, Journal of Symbolic Computation, 74, 408-424. 7

[38] ORZECH, G. (1972). OBSTRUCTION THEORY IN ALGEBRAIC CATEGORIES I AND II. *J. Pure Appl. Algebra* 2:287-314 AND 315-340. 28

[39] ORZECH G. (1972) OBSTRUCTION THEORY IN ALGEBRAIC CATEGORIES I, J. PURE APPL. ALGEBRA 2, 287-314. 28

[40] A.AYTEKIN, M.ATIK, E.Ö. USLU, REPRESENTABILITY OF ACTIONS IN THE CATEGORY OF (PRE)CROSSED MODULES OF LEIBNIZ ALGEBRAS (SUBMITTED) 16

[41] ASLAN A.F., (2010) LIE ALGEBRAS OF GROUP ALGEBRAS WITH GAP 24