# Çaprazlanmış Modüllerin Bileşik Çarpımı

Serdar Hürmetli

**DOKTORA TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Şubat 2016

Bimultiplication of Crossed Modules

Serdar Hürmetli

**DOCTORAL DISSERTATION**

Department of Mathematics

February 2016

Çaprazlanmış Modüllerin Bileşik Çarpımı

Serdar Hürmetli

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr.Ummahan EGE ARSLAN

Şubat 2016

## ONAY

Matematik Anabilim Dalı doktora öğrencisi Serdar Hürmetli'nin DOKTORA TEZİ olarak hazırladığı "Çaprazlanmış Modüllerin Bileşik Çarpımı" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek "oy birliğiyle" kabul edilmiştir.

**Danışman** : Yrd. Doç. Dr. Ummahan EGE ARSLAN

**İkinci Danışman** : –

**Doktora Tez Savunma Jürisi:**

**Üye :** Yrd. Doç. Dr. Ummahan EGE ARSLAN

**Üye :** Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

**Üye :** Prof. Dr. Erdal ULUALAN

**Üye :** Doç. Dr. İ.İlker AKÇA

**Üye :** Yrd. Doç. Dr. Özgün GÜRMEN ALANSAL

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ............................ tarih ve ......................... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN

Enstitü Müdürü

## ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Yrd. Doç. Dr. Ummahan EGE ARSLAN danışmanlığında hazırlamış olduğum "Cebiroidler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerin Bileşik Çarpımı" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaparak kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

05.02.2016

Serdar Hürmetli

# ÖZET

Herhangi bir cebir birim dönüşüm yardımıyla bir çaprazlanmış modül olarak düşünülebileceğinden birçok cebirsel kavram ve yapı çaprazlanmış modüller için genelleştirilebilir. Tezin oluşturulmasında bu düşünce temel alınmıştır. Birinci bölümde, çalışılan konu ve tezin amacı hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, literatür araştırması sonuçlarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise tezde çalışılan temel kavramlar olan asosyatif cebir etkileri, asosyatif cebirin bileşik çarpımı, çaprazlanmış modül, çaprazlanmış modül morfizmi, alt çaprazlanmış modül, çaprazlanmış modülün ideali ve bölüm çaprazlanmış modül kavramları tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde asosyatif cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin bileşik çarpımı tanımlanmıştır. Beşinci bölümde asosyatif cebirlerdeki etki kavramı göz önüne alınarak bir çaprazlanmış modülün diğeri üzerine etkisini tanımlamada önemli yer tutan aktör çaprazlanmış modül kavramı tanımlanmıştır. Altıncı bölümde ise cebir teorisinde yer alan (sıfırlayıcı) annihilatör kavramı çaprazlanmış modüller için genelleştirilmiştir. Yedinci bölümde etki kavramı yardımıyla çaprazlanmış modüllerin yarı direkt çarpımı tanımlanmıştır. Sekizinci bölümde aktör çaprazlanmış modülü içeren çaprazlanmış kare oluşturulmuş ve çaprazlanmış kare için bazı önemli sonuçlara yer verilmiştir. Dokuzuncu bölümde asosyatif cebirlerin çaprazlanmış modülleri için aktör kule ve tam çaprazlanmış modül kavramları tanımlanmıştır. Onuncu ve son bölümde ise elde edilen sonuçlar yorumlanarak "sonuç ve öneriler" başlığı altında sunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Bileşik çarpım cebiri, aktör çaprazlanmış modül, çaprazlanmış kare

## SUMMARY

As any algebra can be considered as a crossed module with the identity map, many algebra theoretic concepts and structures can be generalised to crossed modules. This thesis based on this consideration. In the first chapter, it is mentioned the subject and purpose of the thesis. In the second chapter, the results of literature research are given. In the third chapter, it is recalled the concepts of action of associative algebras, bimultiplication of associative algebras, crossed modules, morphisms of crossed modules, subcrossed modules, crossed ideals and factor crossed modules related with the thesis. In the fourth chapter, the structure of bimultiplication of crossed modules of associative algebras is defined. In the fifth, iı is introduced the actor of crossed module with regard to associative algera actions. In the sixth chapter, the concept of annihilator is generalised to the crossed modules. In the seventh chapter, using the concept of action semi direct product of the crossed modules is defined. In the eighth chapter, crossed square including the actor crossed module is obtained and some important results for the crossed square are stated. In the nineth chapter, for the crossed modules of the associative algebras, the notion of actor tower and complete crossed module are defined. In the last chapter, the results obtained and suggestion are given.

**Keywords:** Bimultiplication Algebra, Actor Crossed Module, Crossed Square

# TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yöneten ve hazırlanması sırasında, ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam, sayın

Yrd. Doç. Dr. Ummahan EGE ARSLAN'a

Her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini esirgemeyen değerli hocam, sayın

Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ'ye

ve çalışmamın her aşamasında desteğini gördüğüm aileme ve arkadaşlarıma sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

# İÇİNDEKİLER (devam)

# SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\unlhd$ | İdeal |
| $\rtimes$ | Yarı direkt çarpım |

| **Kısaltmalar** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\mathcal{A}(C,G,\delta)$ | $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün aktör çaprazlanmış modülü |
| $Ann(C,G,\delta)$ | $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün annihilatörü |
| $Ann(G)$ | $G$ grubunun annihilatörü |
| $Bim(G)$ | $G$ grubunun bileşik çarpanlarının kümesi |
| $Bim(C,G,\delta)$ | $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün bileşik çarpanlarının kümesi |
| $CMod(k)$ | Çaprazlanmış modüller kategorisi |
| Çek $\phi$ | $\phi$ dönüşümünün çekirdeği |
| Gör $\phi$ | $\phi$ dönüşümünün görüntüsü |

# 1. GİRİŞ VE AMAÇ

Bu çalışmamızda asosyatif cebirlerin çaprazlanmış modülleri için bileşik çarpım cebiri, aktör çaprazlanmış modül, çaprazlanmış modülün annihilatörü, aktör kule, tam çaprazlanmış modül, çaprazlanmış modüllerin yarı direkt çarpımları ve aktör çaprazlanmış modüllü çaprazlanmış kare kavramlarını tanımlayacağız.

Öncelikle, asosyatif cebirler üzerinde çaprazlanmış modül tanımını hatırlatalım (Ellis, 1984).

**k** birimli değişmeli bir halka olmak üzere $G$, bir asosyatif **k**-cebir olsun.

$$\delta : C \longrightarrow G$$

bir $G$-cebir morfizmi olmak üzere

$$\begin{array}{rl} G\times C & \longrightarrow C \\ (g,c) & \longmapsto g\cdot c \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rl} C\times G & \longrightarrow C \\ (c,g) & \longmapsto c\cdot g \end{array}$$

şeklinde verilen sol ve sağ etkiler ile birlikte, her $c,c' \in C$ ve $g \in G$ için

$$\begin{array}{lrcl} \text{ÇM1)} & \delta(g\cdot c) & = & g\delta(c) \\ & \delta(c\cdot g) & = & \delta(c)g \\ \text{ÇM2)} & \delta c\cdot c' & = & cc' \\ & c\cdot\delta c' & = & cc' \end{array}$$

şartları sağlanıyor ise $G$ üzerinde $C$ cebirine bir çaprazlanmış (crossed) modül denir ve $(C,G,\delta)$ ile gösterilir.

Bazı standart çaprazlanmış modül örneklerine yer verelim.

**i)** $I$, $G$ cebirinin ideali olmak üzere $i : I \longrightarrow G$ içine dönüşümü bir çaprazlanmış $G$-modül yapısı oluşturur. Tersine, $\delta : C \longrightarrow G$ çaprazlanmış $G$-modül ise $I = \delta(C)$ görüntüsü, $G$ cebirinin idealidir.

**ii)** Herhangi bir $M$, $G$-modülü sıfır çarpımla birlikte bir $G$-cebir olarak düşünülebilir ve böylece $0 : M \longrightarrow G$ sıfır morfizmi bir çaprazlanmış $G$-modül yapısı oluşturur. Tersine, $\delta : C \longrightarrow G$ çaprazlanmış $G$-modül ise Çek$\delta$, bir $G/\delta(C)$-modül olur.

Böylece çaprazlanmış modüller, idealler ve cebir üzerinde modüllerin bir genellemesini sağlar. Dahası $Id : G \longrightarrow G$ birim dönüşümüyle herhangi bir $G$ cebirini bir çaprazlanmış modül olarak düşünebiliriz. Dolayısıyla, cebirsel kavram ve sonuçların çaprazlanmış modüllere genellemesini araştırmak ilginçtir.

Bir cebirsel yapının kendine dönüşümüyle oluşturulan kümelerin sahip olduğu cebirsel yapılar farklıdır. Bir grubun otomorfizmalarının kümesi bir grup oluştururken bir asosyatif cebir için otomorfizmalar kümesi cebir oluşturmaz. Cebir yapısı ancak bileşik çarpım kümesi ile elde edilir.

Bu çalışmada başlangıç noktamız bileşik çarpım cebirlerinin genelleştirilmesi olacaktır. Bunun için öncelikle asosyatif cebirler için bileşik çarpım cebiri kavramına yer verelim (Lavendhomme ve Lucas, 1996).

$G$ bir asosyatif $\mathbf{k}$-cebir ve $\gamma, \sigma : G \to G$, $\mathbf{k}$-lineer dönüşümler olsun. Her $g, g' \in G$ için,

$$\begin{array}{ll} i) & \gamma(gg') = \gamma(g)g' \\ ii) & \sigma(gg') = g\sigma(g') \\ iii) & g\gamma(g') = \sigma(g)g' \end{array}$$

şartları sağlanıyorsa $(\gamma, \sigma)$ ikilisine $G$ cebirinin **bileşik çarpanları** (bimultiplier) denir ve bütün bileşik çarpanların kümesi $Bim(G)$ ile gösterilir.

$(\gamma, \sigma), (\gamma', \sigma') \in Bim(G)$, $k \in \mathbf{k}$ için,

$$\begin{array}{l} (\gamma, \sigma) + (\gamma', \sigma') = (\gamma + \gamma', \sigma + \sigma') \\ (\gamma, \sigma) \circ (\gamma', \sigma') = ((\gamma \circ \gamma'), (\sigma' \circ \sigma)) \\ (k(\gamma, \sigma)) = ((k\gamma), (k\sigma)) \end{array}$$

işlemleri altında $Bim(G)$ bir cebir yapısı oluşturur. Bu durumda $\phi : G \longrightarrow Bim(G)$ dönüşümü $\phi(g) = (\gamma_g, \sigma_g)$, $\gamma_g(x) = gx$, $\sigma_g(x) = xg$ şeklinde tanımlı bir cebir morfizmi olup bu dönüşümün görüntüsüne iç (inner) çarpım cebri denir ve $I(G)$ ile gösterilir.

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

cebirlerin bir genişlemesi ise değişmeli

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I(N) \arrow[r] & Bim(N) \arrow[r] & Q(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramı mevcuttur.

$G$ bir assosyatif **k**-cebir, $Ann(G) = 0$ veya $G^2 = G$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rcll} \phi : & G & \longrightarrow & Bim(G) \\ & g & \longmapsto & \phi(g) = (\gamma(g), \sigma(g)) \end{array}$$

homomorfizması

$$\begin{array}{ccc} Bim(G) \times G & \longrightarrow & G \\ ((\gamma,\sigma), g) & \longmapsto & \gamma(g) \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} G \times Bim(G) & \longrightarrow & G \\ (g, (\gamma,\sigma)) & \longmapsto & \sigma(g) \end{array}$$

şeklinde tanımlı etkiler ile birlikte bir çaprazlanmış modüldür. Bu çalışmada bir asosyatif cebirin diğeri üzerine etkisinin bileşik çarpım kavramıyla ilişkisi asosyatif cebirlerin çaprazlanmış modülleri için genelleştirilecektir.

Bunun için $\mathcal{A}(C,G,\delta)$ ile gösterilecek olan $U(G,C) \stackrel{\Delta}{\longrightarrow} Bim(C,G,\delta)$ şeklinde $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün aktör çaprazlanmış modülü tanımlanacaktır.

Burada $U(G,C)$ her $g_1, g_2 \in G$ için

$$\begin{array}{rcl} d_1(g_1 g_2) & = & d_1(g_1) \cdot g_2 \\ d_2(g_1 g_2) & = & g_1 \cdot d_2(g_2) \\ g_1 \cdot d_1(g_2) & = & d_2(g_1) \cdot g_2 \end{array}$$

şartlarını sağlayan $d_1, d_2 : G \to C$ **k**-lineer dönüşümlerinden oluşan tüm $(d_1, d_2)$ ikililerinin kümesidir.

$Bim(C,G,\delta)$ ise $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülü için

$$(\gamma,\sigma) \in Bim(C), (\gamma',\sigma') \in Bim(G)$$

olmak üzere $\gamma'\delta = \delta\gamma$, $\sigma'\delta = \delta$ eşitliklerini ve her $g \in G$, $c \in C$ için,

$$\begin{aligned}
\gamma(g \cdot c) &= \gamma'(g) \cdot c \\
\gamma(c \cdot g) &= \gamma(c) \cdot g \\
\sigma(g \cdot c) &= g \cdot \sigma(c) \\
\sigma(c \cdot g) &= c \cdot \sigma'(g) \\
g \cdot \gamma(c) &= \sigma'(g) \cdot c \\
\sigma(c) \cdot g &= c \cdot \gamma'(g)
\end{aligned}$$

şartlarını sağlayan $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))$ ikililerinin oluşturduğu kümedir.

Bu kavram ile $(C,G,\delta) \longrightarrow \mathcal{A}(C,G,\delta)$ şeklinde çaprazlanmış modül morfizmi elde edilerek, $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün kendisi üzerine etkisi verilir.

Boyacı'nın (2012) doktora tezinde yarı abelyen olan ön çaprazlanmış modüller kategorisinde, Boyacı vd. (2015) çalışmasında ise çaprazlanmış modüller kategorisindeki split genişleme sınıflandırıcısı objesi olarak yer alan yapının aktör kavramıyla çakıştığı gözlenmektedir.

Grup teoride, bir gruptan otomorfizmalar grubuna tanımlı bir dönüşümün çekirdeğinin, grubun merkezini verdiği iyi bilinir. Asosyatif cebirde ise, bileşik çarpım cebirinin tanımından dolayı

$$\begin{array}{rccl}
\phi: & G & \longrightarrow & Bim(G) \\
 & g & \longmapsto & \phi(g) = (\gamma_g, \sigma_g)
\end{array}$$

dönüşümünün çekirdeği olarak,

$$Ann_G(G) = \{g \in G \mid \gamma_g(g') = gg' = 0, \sigma_g(g') = g'g = 0\,, g' \in G\}$$

şeklinde annihilatör kavramı karşımıza çıkar. Bu durumda,

$$(C,G,\delta) \longrightarrow \mathcal{A}(C,G,\delta)$$

çaprazlanmış modül morfizminin çekirdeği de $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün annihilatörünü verir. Böylece annihilatör kavramının bir genelleştirmesi yapılmış olur. Trivial annihilatöre sahip çaprazlanmış modülün annihilatörü de trivialdir. Ayrıca, $(C,G,\delta)$ trivial annihilatöre sahipse, $\mathcal{A}(C,G,\delta)$ aktörüne gömülür. Böylece herbir terim, trivial annihilatöre sahip ve sırasıyla diğerinin içine gömülmek üzere,

$$(C,G,\delta), \mathcal{A}(C,G,\delta), \mathcal{A}(\mathcal{A}(C,G,\delta)), \ldots$$

şeklinde $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün bir aktör kulesi kurulur.

$$(C,G,\delta) \longrightarrow \mathcal{A}(C,G,\delta)$$

dönüşümü bir izomorfizm ise $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülüne tam çaprazlanmış modül denir. Aktör kule tam çaprazlanmış modüle ulaştığında sonlanır.

Aktör kavramı ile bir çaprazlanmış modülün kendisinden farklı bir çaprazlanmış modül üzerine etkisini tanımlamak mümkündür. Bu genelleştirilmiş durum çaprazlanmış modüllerin yarıdirekt çarpımları, çaprazlanmış kare, vs. ile ilgili çalışmalarda önemli yer tutar.

$(M,P,\partial)$ çaprazlanmış modülünün $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülü üzerine etkisi $(\varepsilon,\rho):(M,P,\partial) \longrightarrow \mathcal{A}(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modül morfizmi ile verilir. Buradan $(M,P,\partial)$ ve $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modüllerinin $(\varepsilon,\rho)$ dönüşümüne bağlı

$$(M,P,\partial) \rtimes (C,G,\delta) = (C \rtimes M, G \rtimes P, \pi)$$

yarı direkt çarpımları verilir.

Çaprazlanmış modüller, 2 boyutlu cebirler olarak düşünülebileceğinden, bu görüşe dayanılarak 2 boyutlu çaprazlanmış modüller olarak tanım 8.1 de verilen çaprazlanmış kare yapısından söz edilebilir.

$G \longrightarrow Bim(G)$ homomorfizmi bir çaprazlanmış modül olduğundan asosyatif cebirlerin bir $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülü ve onun aktörü olan $\mathcal{A}(C,G,\delta) = (U(G,C), Bim(C,G,\delta), \Delta)$ ile

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\delta"'] & U(G,C) \arrow[d, "\Delta"] \\
G \arrow[r, "\alpha"'] & Bim(C,G,\delta)
\end{tikzcd}$$

şeklinde çaprazlanmış kare elde edilir. Ayrıca

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\lambda"'] & N \arrow[d, "\nu"] \\ M \arrow[r, "\mu"'] & P \end{tikzcd}$$

bir çaprazlanmış kare olmak üzere $(M,P,\mu)$ çaprazlanmış modülünün, $(L,N,\lambda^{'})$ çaprazlanmış modülü üzerine etkisinden söz edilebilir.

# 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Çaprazlanmış modül yapısı gruplar üzerinde ilk olarak Whitehead tarafından homotopi 2-tiplerin cebirsel bir modellemesi olarak (1949) da tanımlanmıştır. Brown (1981, 1982 a, 1982 b, 1984), Brown ve Higgins (1981,1982) ve Brown ve Huebschmann (1981) bu kavramla ilgili gruplar üzerinde yapılan çalışmalardan bazılarıdır. Temel cebirsel yapılardan biri olarak incelenen çaprazlanmış modüllerin, homotopi teori, homoloji ve kohomoloji, cebirsel $K$-teori, devirli (cyclic) homoloji, kombinatör grup teori ve diferensiyel geometri dahil olmak üzere matematiğin birçok alanında önemli rolü vardır. Asosyatif cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak Dedecker ve Lue (1966) tarafından tanımlanmıştır. Çaprazlanmış modül tanımının değişmeli cebir versiyonu Porter (1987) tarafından literatüre katılmıştır. Fakat daha öncesinde Lichtenbaum ve Schlessinger (1967) ve Gerstenhaber' e(1966) ait çalışmalarda farklı bir adlandırmayla çaprazlanmış modül tanımıyla karşılaşılmaktadır. Bununla birlikte, Arvasi ve Porter' ın (1996, 1997, 1998) çalışmalarında değişmeli cebirler için çaprazlanmış modüllerle ilgili birçok önemli sonuç elde edilmiştir.

Norrie (1987) de bir grubun otomorfizm grubunun, gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller ile teorik benzerliğini araştırmıştır. Aktör çaprazlanmış modül adını verdiği bu yapı ile etki, merkez gibi kavramları ilişkilendirmiştir. Benzer problem Lie cebir içeriğinde Casas ve Ladra (1998) tarafından, değişmeli cebirler için ise Arvasi ve Ege (2003) tarafından çalışılmıştır. Bu tez çalışmasında ilk adım olarak belirlenen asosyatif cebirler için aktör çaprazlanmış modül kavramının tanımlanması probleminin eş zamanlı olarak Boyacı vd. (2015), tarafından da çalışıldığı fark edilmiştir. Çalışmaların ortak noktası bu kavramla sınırlı kalmıştır. Boyacı vd. (2015) ve Boyacı (2012) çalışmalarında aktör çaprazlanmış modül kavramını sırasıyla asosyatif cebirler için ön çaprazlanmış modüllerin ve çaprazlanmış modüllerin split genişleme sınıflandırıcısı ile ilgili olarak kullanmıştır.

Bunun dışında Casas vd. (2007, 2010) ve Boyacı vd. (2015) çalışmalarında interest kategoriler, modified kategoriler gibi farklı içeriklerde etki kavramına karşılık gelen aktör çaprazlanmış modül yapısına yer vermişlerdir.

2-boyutlu çaprazlanmış modül olarak düşünülebileceğinden bahsettiğimiz çaprazlanmış kare kavramı ilk olarak gruplar için Guin-Walery vd. (1981) tarafından cebirsel $K$-teorideki problemlere uygulanmak üzere tanımlanmıştır. Asosyatif cebirler için benzer tanım Ellis (1988) tarafından verilmiştir. Homoloji teoride çaprazlanmış karenin bazı uygulamaları Lue (1979), Brown ve Loday (1987a, 1987b) çalışmalarında bulunabilir.

# 3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışması için temel oluşturmak amacıyla asosyatif cebirlerin bileşik çarpımı, cebir etkisi, çaprazlanmış modül, çaprazlanmış ideal, bölüm çaprazlanmış modülü kavramları ile bunlar arasındaki ilişkilere yer verilmiştir.

## 3.1 Asosyatif Cebir Etkileri

Grup teoride bir grubun diğeri üzerine etkisinin otomorfizm grubuyla belirlendiği iyi bilinir. Cebir teoride ise bir değişmeli cebirin diğeri üzerine etkisi çarpım cebiri ile verilir. Asosyatif cebir için ise bileşik çarpım cebiri kavramı karşımıza çıkar. Bileşik çarpım cebri kavramı, Mac Lane (1958) tarafından tanımlanmıştır. Lavendhomme ve Lucas (1996) ise çalışmalarında bu kavram ile çaprazlanmış modül yapısı arasındaki ilişkiden söz etmişlerdir.

**Tanım 3.1** **k** birimli değişmeli halka, $M$ ve $P$ asosyatif **k**-cebir olmak üzere $M$ üzerinde $P$ cebirinin sırasıyla **sol** ve **sağ cebir etkileri** aşağıdaki aksiyomları sağlayan

$$\begin{array}{ccc} P\times M & \longrightarrow & M \\ (p,m) & \longmapsto & p\cdot m \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} M\times P & \longrightarrow & M \\ (m,p) & \longmapsto & m\cdot p \end{array}$$

dönüşümleridir. Her $k\in \mathbf{k}$, $m,\ m^{'}\in M$, $p,p^{'}\in P$ için

**i)** $k(p\cdot m)=(kp)\cdot m=p\cdot (km)$
$k(m\cdot p)=(km)\cdot p=m\cdot (kp)$

**ii)** $(p+p^{'})\cdot m=p\cdot m+p^{'}\cdot m$
$m\cdot (p+p^{'})=m\cdot p+m\cdot p^{'}$

**iii)** $p\cdot (m+m^{'})=p\cdot m+p\cdot m^{'}$
$(m+m^{'})\cdot p=m\cdot p+m^{'}\cdot p$

**iv)** $(p\cdot m)m^{'}=p\cdot (mm^{'})$
$m(m^{'}\cdot p)=(mm^{'})\cdot p$

**v)** $(pp^{'})\cdot m=p\cdot (p^{'}\cdot m)$
$m\cdot (pp^{'})=(m\cdot p)\cdot p'$

**vi)** $p\cdot (m\cdot p')=(p\cdot m)\cdot p'$

**vii)** $m\cdot (p\cdot m^{'})=(m\cdot p)\cdot m^{'}$

## 3.2 Asosyatif Cebirlerin Bileşik Çarpımı

**Tanım 3.2** $G$ bir **k**-cebir ve $\gamma,\ \sigma : G \to G$, **k**-lineer dönüşümler olsun. Her $g,\ g^{'} \in G$ için,

$$\begin{array}{ll} i) & \gamma(gg^{'}) = \gamma(g)g^{'} \\ ii) & \sigma(gg^{'}) = g\sigma(g^{'}) \\ iii) & g\gamma(g^{'}) = \sigma(g)g^{'} \end{array}$$

şartları sağlanıyorsa $(\gamma, \sigma)$ ikilisine $G$ cebirinin **bileşik çarpanları** (bimultiplier) denir ve bütün bileşik çarpanların kümesi $Bim(G)$ ile gösterilir.

**Önerme 3.3** $(\gamma, \sigma), (\gamma', \sigma') \in Bim(G)$, $k \in \mathbf{k}$ için,

$$\begin{array}{l} (\gamma,\sigma) + (\gamma',\sigma') = (\gamma+\gamma', \sigma+\sigma') \\ (\gamma,\sigma) \circ (\gamma',\sigma') = (\gamma \circ \gamma', \sigma' \circ \sigma) \\ k(\gamma,\sigma) = (k\gamma, k\sigma) \end{array}$$

işlemleri altında $Bim(G)$ kümesi çarpım cebiri olarak adlandırılan bir cebir yapısı oluşturur.

$M^2 = M$ veya $Ann(M) = 0$, $M$ ve $P$ asosyatif **k**-cebir olmak üzere $P$ cebirinin $M$ üzerine etkisi $P \to Bim(M)$ cebir homomorfizması yardımıyla da verilebilir.

$$\begin{array}{llll} \phi : & P & \to & Bim(M) \\ & p & \mapsto & \phi_p = (\gamma_p, \sigma_p) : \begin{array}{lll} M & \to & M \\ m & \mapsto & \phi_p(m) = (\gamma_p(m), \sigma_p(m)) = (p \cdot m, m \cdot p) \end{array} \end{array}$$

dönüşümleri ve her $k \in \mathbf{k}$, $m,\ m^{'} \in M$, $p, p^{'} \in P$ için

**i)** $\phi$ bir **k**-cebir homomorfizmi olduğundan $k\phi(p) = \phi(kp)$ olup

$$\begin{array}{rcl} k\phi(p) & = & k(\gamma_p, \sigma_p) \\ & = & (k\gamma_p, k\sigma_p) \end{array} \qquad \phi(kp) \ = \ (\gamma_{kp}, \sigma_{kp})$$

olduğundan $k\gamma_p(m) = k(p \cdot m)$ ve $\gamma_{kp}(m) = (kp) \cdot m$ eşitliğinden

$$k(p \cdot m) = (kp) \cdot m$$

elde edilir ve benzer şekilde $k\sigma_p(m) = k(m \cdot p)$ ve $\sigma_{kp}(m) = m \cdot (kp)$ eşitliğinden

$$k(m \cdot p) = m \cdot (kp) \text{ olur.}$$

Ayrıca $k\phi_p(m) = \phi_p(km)$ olduğundan

$$\begin{aligned} k\phi_p(m) &= k(\gamma_p(m), \sigma_p(m)) \\ &= (k\gamma_p(m), k\sigma_p(m)) \end{aligned} \qquad \phi_p(km) = (\gamma_p(km), \sigma_p(km))$$

olup $k\gamma_p(m) = k(p \cdot m)$ ve $\gamma_p(km) = p \cdot (km)$ elde edilir. Yani

$$k(p \cdot m) = p \cdot (km)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $k\sigma_p(m) = k(m \cdot p)$ ve $\sigma_p(km) = (km) \cdot p$ olur. Yani

$$k(m \cdot p) = (km) \cdot p$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$k(p \cdot m) = (kp) \cdot m = p \cdot (km)$$

$$k(m \cdot p) = (km) \cdot p = m \cdot (kp)$$

bulunur.

**ii)** $\phi$ bir **k**-cebir homomorfizmi olduğundan $\phi(p + p') = \phi(p) + \phi(p')$ olup

$$\phi(p + p') = (\gamma_{p+p'}, \sigma_{p+p'}) \qquad \begin{aligned} \phi(p) + \phi(p') &= (\gamma_p, \sigma_p) + (\gamma_{p'}, \sigma_{p'}) \\ &= (\gamma_p + \gamma_{p'}, \sigma_p + \sigma_{p'}) \end{aligned}$$

olduğundan $\gamma_{p+p'}(m) = (p + p') \cdot m$ ve $\gamma_p(m) + \gamma_{p'}(m) = p \cdot m + p' \cdot m$ elde edilir. Yani

$$(p + p') \cdot m = p \cdot m + p' \cdot m$$

olur. Benzer şekilde $\sigma_{p+p'}(m) = m \cdot (p + p')$ ve $\sigma_p(m) + \sigma_{p'}(m) = m \cdot p + m \cdot p'$ olduğundan

$$m \cdot (p + p') = m \cdot p + m \cdot p'$$

elde edilir.

**iii)** $\phi_p$ bir **k**-cebir homomorfizmi olduğundan

$$\phi_p(m + m') = \phi_p(m) + \phi_p(m')$$

elde edilir.

$$\phi_p(m + m') = (\gamma_p(m + m'), \sigma_p(m + m'))$$

$$\begin{aligned}\phi_p(m)+\phi_p(m') &= (\gamma_p(m),\sigma_p(m))+(\gamma_p(m'),\sigma_p(m'))\\ &= (\gamma_p(m)+\gamma_p(m'),\sigma_p(m)+\sigma_p(m'))\end{aligned}$$

olup $\gamma_p(m+m') = p\cdot(m+m')$ ve $\gamma_p(m)+\gamma_p(m') = p\cdot m+p\cdot m'$ elde edilir. Yani

$$p\cdot(m+m') = p\cdot m+p\cdot m'$$

elde edilir. Benzer şekilde $\sigma_p(m+m') = (m+m')\cdot p$ ve $\gamma_p(m'),\sigma_p(m') = m\cdot p+m'\cdot p$ olur. Buradan

$$(m+m')\cdot p = p\cdot m+p\cdot m'$$

elde edilir.

**iv)** $(\gamma_p,\sigma_p)\in Bim(M)$ olduğundan

$$\begin{array}{rcl}\gamma_p(mm') &=& (\gamma_p(m))m'\\ p\cdot(mm') &=& (p\cdot m)m'\end{array}\quad ve\quad \begin{array}{rcl}\sigma_p(mm') &=& m(\sigma_p(m'))\\ (mm')\cdot p &=& m(m'\cdot p)\end{array}$$

elde edilir.

**v)** $\phi$ bir **k**-cebir homomorfizmi olduğundan

$$\phi(pp') = \phi(p)\circ\phi(p')$$

olur ve

$$\phi(pp') = (\gamma_{pp'},\sigma_{pp'})\qquad \begin{aligned}\phi(p)\circ\phi(p') &= (\gamma_p,\sigma_p)\circ(\gamma_{p'},\sigma_{p'})\\ &= (\gamma_p\circ\gamma_{p'},\sigma_{p'}\circ\sigma_p)\end{aligned}$$

olduğundan $\gamma_{pp'}(m) = (pp')\cdot m$ ve $(\gamma_p\circ\gamma_{p'})(m) = \gamma_p(p'\cdot m) = p\cdot(p'\cdot m)$ elde edilir. Yani,

$$(pp')\cdot m = p\cdot(p'\cdot m)$$

olur. Benzer şekilde $\sigma_{pp'}(m) = m\cdot(pp')$ ve $(\sigma_{p'}\circ\sigma_p)(m) = \sigma'_p(m\cdot p) = (m\cdot p)\cdot p'$ olur. Buradan da

$$m\cdot(pp') = (m\cdot p)\cdot p'$$

elde edilir.

**vi)** $p\cdot(m\cdot p') = (p\cdot m)\cdot p'$ olduğunu göstermek için

$$\gamma_p(\sigma_{p'}(m)) = \sigma_{p'}(\gamma_p(m))$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$M^2 = M$ olduğundan her $m \in M$ için $m = m_1 m_2$ yazabiliriz. Yani

$$\begin{aligned}\gamma_p(\sigma_{p'}(m_1m_2)) &= \gamma_p((m_1m_2)\cdot p') \\ &= \gamma_p(m_1(m_2\cdot p')) \\ &= p\cdot(m_1(m_2\cdot p')) \\ &= (p\cdot m_1)(m_2\cdot p')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{p'}(\gamma_p(m_1m_2)) &= \sigma_{p'}(p\cdot(m_1m_2)) \\ &= \sigma_{p'}((p\cdot m_1)m_2) \\ &= ((p\cdot m_1)m_2)\cdot p' \\ &= (p\cdot m_1)(m_2\cdot p')\end{aligned}$$

elde edilir.

**vii)** $(\gamma_p, \sigma_p) \in Bim(M)$ olduğundan

$$\begin{aligned}m\gamma_p(m') &= \sigma_p(m)m' \\ m(p\cdot m') &= (m\cdot p)m'\end{aligned}$$

olur.

**Tanım 3.4** Her $g, g^{'} \in G$ için,

$$\begin{array}{rccl}\phi: & G & \longrightarrow & Bim(G) \\ & g & \longmapsto & \phi(g) = (\gamma_g, \sigma_g)\end{array}$$

olmak üzere, $\gamma_g(g') = gg^{'}$şeklinde tanımlı

$$\gamma_g : G \longrightarrow G$$

ve $\sigma_g(g') = g^{'}g$ şeklinde tanımlı

$$\sigma_g : G \longrightarrow G$$

dönüşümlerinden oluşan $(\gamma_g, \sigma_g)$ ikilisine G cebirinin **iç (inner) çarpanları** denir ve bütün iç çarpanların kümesi $I(G)$ ile gösterilir.

**Önerme 3.5**

$$\begin{array}{rccl}\phi: & G & \longrightarrow & Bim(G) \\ & g & \longmapsto & \phi(g) = (\gamma_g, \sigma_g)\end{array}$$

dönüşümü çekirdeği

$$\mathrm{Ann}_G(G) = \{g \in G \mid \gamma_g(g') = gg' = 0,\ \sigma_g(g') = g'g = 0,\ g' \in G\}$$

şeklinde $G$ cebirinin sıfırlayıcısına karşılık gelen bir cebir homomorfizmasıdır.

**İspat:** Her $g, g^{'}, g'' \in G$ için,

$$\begin{aligned}
\gamma_{(gg')}(g'') &= (gg')g'' \\
&= g(g'g'') \\
&= \gamma_g(g'g'') \\
&= \gamma_g(\gamma_{g'}(g'')) \\
&= (\gamma_g\gamma_{g'})(g'') \\
&= (\gamma_g \circ \gamma_{g'})(g'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{(gg')}(g'') &= g''(gg') \\
&= (g''g)g' \\
&= \sigma_{g'}(g''g) \\
&= \sigma_{g'}(\sigma_g(g'')) \\
&= (\sigma_{g'}\sigma_g)(g'') \\
&= (\sigma_g \circ \sigma_{g'})(g'')
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\phi(gg') = (\gamma_{gg'}, \sigma_{gg'}) = (\gamma_g\gamma_{g'}, \sigma_{g'}\sigma_g) = (\gamma_g, \sigma_g) \circ (\gamma_{g'}, \sigma_{g'}) = \phi(g) \circ \phi(g')$$

olduğundan $\phi$ bir cebir homomorfizmidir. Ayrıca, $g' \in G$

$$\begin{aligned}
g \in \text{Çek } \phi &\iff \gamma_g = 0, \sigma_g = 0 \\
&\iff \gamma_g(g') = \mathbf{0}(g'),\ \sigma_g(g') = \mathbf{0}(g') \\
&\iff gg' = 0,\ g'g = 0 \\
&\iff g \in\ \mathrm{Ann}_G(G)
\end{aligned}$$

olduğundan Çek $\phi = \mathrm{Ann}_G(G)$ olur. □

**Yardımcı Teorem 3.6** $\phi : G \longrightarrow Bim(G)$ cebir homomorfizminin görüntüsü $I(G)$, $Bim(G)$ cebirinin idealidir.

**İspat:** Her $g,g' \in G, (\gamma',\sigma') \in Bim(G)$, $(\gamma(g),\sigma(g)) \in I(G)$için,

$$\begin{aligned}\gamma'\gamma_g(g') &= \gamma'(gg') \\ &= \gamma'(g)(g') \\ &= \gamma_{\gamma'(g)}(g')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma'\sigma_g(g') &= \sigma_g \circ \sigma'(g') \\ &= \sigma'(g')g \\ &= g'\gamma'(g) \\ &= \sigma_{\gamma'(g)}(g')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\gamma_g)\gamma'(g') &= g\gamma'(g') \\ &= \sigma'(g)g' \\ &= \gamma'(g)(g') \\ &= \gamma_{\sigma'(g)}(g')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_g\sigma'(g') &= \sigma' \circ \sigma_g(g') \\ &= \sigma'(g'g) \\ &= (g')\sigma'(g) \\ &= \sigma_{\sigma'(g)}(g')\end{aligned}$$

olduğundan $I(G)$, $Bim(G)$ cebirinin idealidir. □

**Tanım 3.7** $I(G)$, $Bim(G)$ cebirinin ideali olmak üzere,

$$O(G) = Bim(G)/I(G)$$

bölüm cebirine $G$ cebirinin **dış (outer) çarpımı** denir ve $O(G)$ ile gösterilir.

## 3.3 Çaprazlanmış Modül

**Tanım 3.8** $G$ birimli bir **k**-cebir olsun.

$$\delta : C \longrightarrow G$$

bir $G$-cebir morfizmi ve

$$\begin{array}{rl} G\times C & \longrightarrow C \\ (g,c) & \longmapsto g\cdot c \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rl} C\times G & \longrightarrow C \\ (c,g) & \longmapsto c\cdot g \end{array}$$

$G$ cebirinin $C$ üzerine etkisi ile birlikte, her $c,c'\in C$ ve $g\in G$ için

$$\begin{array}{ll} \text{ÇM}\mathbf{1}) & \delta(g\cdot c)=g\delta(c) \\ & \delta(c\cdot g)=\delta(c)g \\ \text{ÇM}\mathbf{2}) & \delta c\cdot c'=cc' \\ & c\cdot\delta c'=cc' \end{array}$$

şartları sağlanıyor ise $G$ üzerinde $C$ cebirine bir **çaprazlanmış (crossed) modül** denir ve $(C,G,\delta)$ ile gösterilir.

Şimdi iki çaprazlanmış modül yapısı arasındaki morfizm kavramını tanımlayalım.

**Tanım 3.9** $(C,G,\delta)$ ve $(C',G',\delta')$ iki çaprazlanmış modül olsun.

$$\begin{aligned} \theta(g\cdot c) &= \psi(g)\cdot\theta(c) \\ \theta(c\cdot g) &= \theta(c)\cdot\psi(g) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\delta"'] & C' \arrow[d, "\delta'"] \\ G \arrow[r, "\psi"'] & G' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani

$$\delta'\theta(c)=\psi\delta(c)$$

olacak şekilde $\theta:C\to C'$, $\psi:G\to G'$ **k**-cebir morfizmleri varsa

$$(\theta,\psi):(C,G,\delta)\longrightarrow(C',G',\delta')$$

morfizmine **çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm** denir.

Ayrıca $\theta,\psi$ izomorfizma ise

$$(\theta,\psi):(C,G,\delta)\longrightarrow(C',G',\delta')$$

morfizmine izomorfizm denir. Bu durumda

$$(\theta,\psi)^{-1}=(\theta^{-1},\psi^{-1}):(C',G',\delta')\longrightarrow(C,G,\delta)$$

bir çaprazlanmış modül morfizmidir ve

$(\theta,\psi)^{-1}(\theta,\psi)=(Id,Id)=(\theta,\psi)(\theta,\psi)^{-1}$ olur. Böylece, çaprazlanmış modüllerin bir kategorisi oluşturulur ve bu kategori $CMod(k)$ ile gösterilir.

**Tanım 3.10** $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülü için Coker $\delta=(G/\delta(C))=0$ ise $(C,G,\delta)$ çaprazlanmı modülüne **basit bağlantılı çaprazlanmış modül** denir.

## 3.4 Alt Çaprazlanmış Modül

**Tanım 3.11** Bir $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün **alt çaprazlanmış modülü**, aşağıdaki şartları sağlayan bir $(C',G',\delta')$ çaprazlanmış modülüdür.

**i)** $C',C$ cebirinin bir alt cebiri ve$G',G$ cebirinin bir alt cebiridir.

**ii)** $G$ cebirinin $C$ üzerine etkileri yardımıyla $G'$ cebirinin $C'$ cebiri üzerine etkileri tanımlanır.

**iii)** $(C',G',\delta')$ bir çaprazlanmış $G'$-modüldür.

**iv)** Çaprazlanmış modül morfizmlerinin aşağıdaki diyagramı değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, tail, "u"] \arrow[d, "\delta'"'] & C \arrow[d, "\delta"] \\ G' \arrow[r, tail, "\nu"'] & G \end{tikzcd}$$

Burada $u$ ve $\nu$ içine dönüşümlerdir.

### 3.5 Çaprazlanmış Modülün İdeali

**Tanım 3.12** $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün $(C',G',\delta')$ alt çaprazlanmış modülü,

**i)** $G',G$ cebirinin bir idealidir, yani $G' \trianglelefteq G$ ($g' \in G', g \in G$ için $gg' \in G'$ ve $g'g \in G'$)

**ii)** Her $g \in G$ ve $c' \in C'$ için, $g \cdot c' \in C'$,

**iii)**Her $g' \in G'$ ve $c \in C$ için, $g' \cdot c \in C'$,

şartlarını sağlıyorsa $(C',G',\delta')$ alt çaprazlanmış modülüne, $(C,G,\delta)$ **çaprazlanmış modülünün ideali** denir ve $(C',G',\delta') \trianglelefteq (C,G,\delta)$ şeklinde gösterilir.

### 3.6 Bölüm Çaprazlanmış Modül

**Tanım 3.13** $(C',G',\mu')$, $(C,G,\mu)$ çaprazlanmış modülünün bir ideali olsun. Bu durumda $G$, $C/C'$ üzerine etki eder. $G'$ nün $C/C'$ üzerine etkileri ise

$$\begin{aligned} G' \times C/C' &\longrightarrow C/C' \\ (g',(c+C')) &\longmapsto g' \cdot (c+C') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C/C' \times G' &\longrightarrow C/C' \\ ((c+C'),g') &\longmapsto (c+C') \cdot g' \end{aligned}$$

olmak üzere

$$g' \cdot (c+C') = g'.c + C'$$

ve $g' \cdot c \in C'$ olduğundan sıfırdır.

$$(c+C') \cdot g' = c.g' + C'$$

Dolayısıyla, $G/G'$ bölüm halkası $C/C'$ üzerine

$$\begin{aligned} G/G' \times C/C' &\longrightarrow C/C' \\ ((g+G'),(c+C')) &\longmapsto g.c + C' \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} C/C' \times G/G' & \longrightarrow C/C' \\ ((c+C'),(g+G')) & \longmapsto c.g+C' \end{array}$$

şeklinde etki eder ve buradan $\mu$,

$$\begin{array}{rrl} \bar{\mu}: & C/C' & \longrightarrow G/G' \\ & (c+C') & \longmapsto \mu(c)+G' \end{array}$$

dönüşümüne indirgenir.

Böylece bu dönüşüme ve etki fonksiyonuna göre,

$$(C/C', G/G', \bar{\mu}) = \frac{(C,G,\mu)}{(C',G',\mu')}$$

cebir üzerinde bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur ve buna **bölüm çaprazlanmış modül** denir.

Lavendhomme ve Lucas'ın (1996) çalışmalarında yer alan aşağıdaki önermeye detaylı ispatıyla birlikte yer verelim.

**Önerme 3.14** $G$, $\mathrm{Ann}(G) = 0$ veya $G^2 = G$ şartlarını sağlayan bir **k**- cebir olsun. Bu durumda $(G, Bim(G), \phi)$ bir çaprazlanmış modül oluşturur.

**İspat:** $g, g' \in G$ ve $(\gamma', \sigma') \in Bim(G)$ için,

$$\begin{array}{rcl} \gamma'_g : G & \longrightarrow & G \\ g' & \longmapsto & \gamma'_g(g') = gg' \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rcl} \sigma'_g : G & \longrightarrow & G \\ g' & \longmapsto & \sigma'_g(g') = g'g \end{array}$$

olmak üzere,

$$\begin{array}{rrl} \phi: & G \longrightarrow & Bim(G) \\ & g \longmapsto & \phi(g) = (\gamma'_g, \sigma'_g) \end{array}$$

bir homomorfizma olup

$$\begin{array}{rcl} Bim(G) \times G & \longrightarrow & G \\ ((\gamma',\sigma'),g) & \longmapsto & \gamma'(g) \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rcl} G \times Bim(G) & \longrightarrow & G \\ (g,(\gamma',\sigma')) & \longmapsto & \sigma'(g) \end{array}$$

şeklinde tanımlı etkileri ile birlikte çaprazlanmış modül aksiyomlarının sağlandığını görelim.

$$\textbf{ÇM1)}\quad \begin{aligned} \phi((\gamma',\sigma')\cdot g) &= (\gamma,\sigma)(\gamma'(g)) \\ &= (\gamma'_{\gamma'(g)},\sigma'_{\gamma'(g)}) \\ &\overset{(*)}{=} (\gamma'\gamma'(g),\sigma'(g)\sigma') \\ &= (\gamma',\sigma')(\gamma'(g),\sigma'(g)) \\ &= (\gamma',\sigma')(\phi(g)) \end{aligned}$$

$$(*)\qquad \begin{aligned} \left(\gamma'_{\gamma'(g)}\right)(g') &= \gamma'(g)g' \\ &= \gamma'(gg') \\ &= \gamma'(\gamma'_g(g')) \\ &= (\gamma'\gamma'(g))\,(g') \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \left(\sigma'_{\gamma'(g)}\right)(g') &= g'\gamma'(g) \\ &= \sigma'(g')g \\ &= \sigma'_g(\sigma'(g')) \\ &= (\sigma'(g)\sigma')\,(g') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(g\cdot(\gamma',\sigma')) &= (\gamma,\sigma)(\sigma'(g)) \\ &= (\gamma'_{\sigma'(g)},\sigma'_{\sigma'(g)}) \\ &\overset{(*)}{=} (\gamma'(g)\gamma',\sigma'\sigma'(g)) \\ &= (\gamma'(g),\sigma'(g))(\gamma',\sigma') \\ &= (\phi(g))(\gamma',\sigma') \end{aligned}$$

$$(*)\qquad \begin{aligned} \left(\gamma'_{\sigma'(g)}\right)(g') &= \sigma'(g)g' \\ &= g\gamma'(g') \\ &= \gamma'_g(\gamma'(g')) \\ &= (\gamma'(g)\gamma')\,(g') \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \left(\sigma'_{\sigma'(g)}\right)(g') &= g'\sigma'(g) \\ &= \sigma'(g'g) \\ &= \sigma'(\sigma'_g(g')) \\ &= (\sigma'\sigma'(g))\,(g') \end{aligned}$$

$$\textbf{ÇM2)}\quad \begin{aligned} (\phi(g))\cdot g' &= (\gamma'_g,\sigma'_g)\cdot g' \\ &= \gamma'_g(g') \\ &= gg' \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g\cdot(\phi(g')) &= g\cdot(\gamma'_{g'},\sigma'_{g'}) \\ &= \sigma'_{g'}(g) \\ &= gg\prime \end{aligned}$$

olduğundan $(G,Bim(G),\phi)$ bir çaprazlanmış modül oluşturur. $\square$

# 4. BİR ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLÜN BİLEŞİK ÇARPANLARI

Bu bölümde bölüm 5 için gerekli kavramlar oluşturulacaktır. Öncelikle asosyatif cebirler için bileşik çarpım kavramının asosyatif cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller için genelleştirilmesine yer verilecektir.

## 4.1 Çaprazlanmış Modüllerin Bileşik Çarpımı (Bim(C,G,δ))

**Tanım 4.1** $(C,G,\delta)$ bir çaprazlanmış modül olsun.

**i)**$(\gamma,\sigma)\in Bim(C)$, $(\gamma',\sigma')\in Bim(G)$

**ii)**

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "{\gamma,\sigma}"'] & G \arrow[d, "{\gamma',\sigma'}"] \\ C \arrow[r, "\delta"'] & G \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani, $\gamma'\delta=\delta\gamma$, $\sigma'\delta=\delta\sigma$ ve

**iii)** Her $g\in G$ ve $c\in C$ için,

$$\begin{aligned}
\gamma(g\cdot c)&=\gamma'(g)\cdot c\\
\gamma(c\cdot g)&=\gamma(c)\cdot g\\
\sigma(g\cdot c)&=g\cdot\sigma(c)\\
\sigma(c\cdot g)&=c\cdot\sigma'(g)\\
g\cdot\gamma(c)&=\sigma'(g)\cdot c\\
\sigma(c)\cdot g&=c\cdot\gamma'(g)
\end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa, $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))$ ikilisine **çaprazlanmış modülün bileşik çarpanı** denir ve bu özellikteki elemanların oluşturduğu küme $Bim(C,G,\delta)$ ile gösterilir.

**Önerme 4.2** $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))$, $((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\in Bim(C,G,\delta)$ olmak üzere

$Bim(C,G,\delta)$ kümesi,

$$
\begin{array}{cl}
+) & ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))+((\bar{\gamma},\bar{\sigma}),(\bar{\gamma}',\bar{\sigma}'))=((\gamma+\bar{\gamma},\sigma+\bar{\sigma}),(\gamma'+\bar{\gamma}',\sigma'+\bar{\sigma}')) \\
\cdot) & k((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))=((k\gamma,k\sigma),(k\gamma',k\sigma')) \\
\circ) & ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\bar{\gamma},\bar{\sigma}),(\bar{\gamma}',\bar{\sigma}'))=((\gamma\circ\bar{\gamma},\bar{\sigma}\circ\sigma),(\gamma'\circ\bar{\gamma}',\bar{\sigma}'\circ\sigma'))
\end{array}
$$

işlemleriyle birlikte bir **k**-cebir yapısı oluşturur.

**İspat:** $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')),((\bar{\gamma},\bar{\sigma}),(\bar{\gamma}',\bar{\sigma}'))\in Bim(C,G,\delta)$ ve $k\in\mathbf{k}$ için

$$
\begin{array}{rcl}
\textbf{i)}\ k\left[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))+((\bar{\gamma},\bar{\sigma}),(\bar{\gamma}',\bar{\sigma}'))\right] & = & k\left[((\gamma,\sigma)+(\bar{\gamma},\bar{\sigma})),((\gamma',\sigma')+(\bar{\gamma}',\bar{\sigma}'))\right] \\
& = & k\left[(\gamma+\bar{\gamma},\sigma+\bar{\sigma}),(\gamma'+\bar{\gamma}',\sigma'+\bar{\sigma}')\right] \\
& = & \left[k(\gamma+\bar{\gamma},\sigma+\bar{\sigma}),k(\gamma'+\bar{\gamma}',\sigma'+\bar{\sigma}')\right] \\
& = & \left[(k(\gamma+\bar{\gamma}),k(\sigma+\bar{\sigma})),(k(\gamma'+\bar{\gamma}'),k(\sigma'+\bar{\sigma}'))\right] \\
& = & \left[(k\gamma+k\bar{\gamma},k\sigma+k\bar{\sigma}),(k\gamma'+k\bar{\gamma}',k\sigma'+k\bar{\sigma}')\right] \\
& = & \left[((k\gamma,k\sigma)+(k\bar{\gamma},k\bar{\sigma})),((k\gamma',k\sigma')+(k\bar{\gamma}',k\bar{\sigma}')\right]) \\
& = & \left[(k(\gamma,\sigma)+k(\bar{\gamma},\bar{\sigma})),(k(\gamma',\sigma')+k(\bar{\gamma}',\bar{\sigma}'))\right] \\
& = & \left[(k(\gamma,\sigma),k(\gamma',\sigma'))+(k(\bar{\gamma},\bar{\sigma}),k(\bar{\gamma}',\bar{\sigma}'))\right] \\
& = & k((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))+k((\bar{\gamma},\bar{\sigma}),(\bar{\gamma}',\bar{\sigma}'))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\textbf{ii)}\ (k_1+k_2)\left[(\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')\right] & = & \left[(k_1+k_2)(\gamma,\sigma),(k_1+k_2)(\gamma',\sigma')\right] \\
& = & \left[(k_1(\gamma,\sigma)+k_2(\gamma,\sigma)),(k_1(\gamma',\sigma')+k_2(\gamma',\sigma'))\right] \\
& = & \left[((k_1\gamma,k_1\sigma)+(k_2\gamma,k_2\sigma)),((k_1\gamma',k_1\sigma')+(k_2\gamma',k_2\sigma'))\right] \\
& = & \left[(k_1\gamma,k_1\sigma),(k_1\gamma',k_1\sigma')\right]+\left[(k_2\gamma,k_2\sigma),(k_2\gamma',k_2\sigma')\right] \\
& = & \left[k_1(\gamma,\sigma),k_1(\gamma',\sigma')\right]+\left[k_2(\gamma,\sigma),k_2(\gamma',\sigma')\right] \\
& = & k_1\left[(\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')\right]+k_2\left[(\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\textbf{iii)}\ (k_1k_2)\left[(\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')\right] & = & \left[(k_1k_2)(\gamma,\sigma),(k_1k_2)(\gamma',\sigma')\right] \\
& = & \left[k_1(k_2(\gamma,\sigma)),k_1(k_2(\gamma',\sigma'))\right] \\
& = & \left[k_1(k_2\gamma,k_2\sigma),k_1(k_2\gamma',k_2\sigma')\right] \\
& = & k_1\left[(k_2\gamma,k_2\sigma),(k_2\gamma',k_2\sigma')\right] \\
& = & k_1\left[k_2(\gamma,\sigma),k_2(\gamma',\sigma')\right] \\
& = & k_1\left[k_2((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\right]
\end{array}
$$

**iv)** 
$$\begin{aligned}
k\left[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\right] &= k\left[((\gamma,\sigma)\circ(\overline{\gamma},\overline{\sigma})),((\gamma',\sigma')\circ(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\right] \\
&= k\left[(\gamma\circ\overline{\gamma},\overline{\sigma}\circ\sigma),(\gamma'\circ\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'\circ\sigma')\right] \\
&= \left[k(\gamma\circ\overline{\gamma},\overline{\sigma}\circ\sigma),k(\gamma'\circ\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'\circ\sigma')\right] \\
&= \left[k(\gamma\circ\overline{\gamma}),k(\overline{\sigma}\circ\sigma)\right],\left[k(\gamma'\circ\overline{\gamma}'),k(\overline{\sigma}'\circ\sigma')\right] \\
&= \left[k(\gamma)\circ\overline{\gamma},\overline{\sigma}\circ k(\sigma)\right],\left[k(\gamma')\circ\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'\circ k(\sigma')\right] \\
&= \left[((k\gamma,k\sigma)\circ(\overline{\gamma},\overline{\sigma})),((k\gamma',k\sigma')\circ(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\right] \\
&= \left[((k\gamma,k\sigma),(k\gamma',k\sigma'))\circ((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\right] \\
&= (k(\gamma,\sigma),k(\gamma',\sigma'))\circ((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}')) \\
&= k((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k\left[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\right] &= k\left[((\gamma,\sigma)\circ(\overline{\gamma},\overline{\sigma})),((\gamma',\sigma')\circ(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\right] \\
&= k\left[(\gamma\circ\overline{\gamma},\overline{\sigma}\circ\sigma),(\gamma'\circ\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'\circ\sigma')\right] \\
&= \left[k(\gamma\circ\overline{\gamma}),k(\overline{\sigma}\circ\sigma)\right],\left[k(\gamma'\circ\overline{\gamma}'),k(\overline{\sigma}'\circ\sigma')\right] \\
&= \left[\gamma\circ k(\overline{\gamma}),k(\overline{\sigma})\circ\sigma\right],\left[\gamma'\circ k(\overline{\gamma}'),k(\overline{\sigma}')\circ\sigma'\right] \\
&= \left[((\gamma,\sigma)\circ(k\overline{\gamma},k\overline{\sigma})),((\gamma',\sigma')\circ(k\overline{\gamma}',k\overline{\sigma}'))\right] \\
&= \left[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((k\overline{\gamma},k\overline{\sigma}),(k\overline{\gamma}',k\overline{\sigma}'))\right] \\
&= ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ(k(\overline{\gamma},\overline{\sigma}),k(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}')) \\
&= ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ k((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))
\end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}
k\left[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\right] &= k((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}')) \\
&= ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ k((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $Bim(C,G,\delta)$bir **k**-cebir yapısı oluşturur. □

## 4.2 U(G,C)

Whitehead (1948) gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller için tanımlanmış olan derivasyon yarı grubunun terslenebilir elemanlarının kümesiyle Whitehead grubunu oluşturmuştur. Norrie (1987) bu grup yardımıyla gruplar için aktör çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır. Biz ise Arvasi ve Ege'nin (2003) çalışmalarında değişmeli cebirlerin aktör çaprazlanmış modülünü oluşturmada benzer rolü üstlenen ve $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülü için $U(G,C)$ ile gösterilen cebir yapısını aynı notasyonu kullanarak asosyatif cebir içeriğine uyarlayacağız.

**Tanım 4.3** $(C,G,\delta)$, bir çaprazlanmış modül, $d_1,d_2 : G \to C$, **k**-lineer dönüşümleri, her $g_1,g_2 \in G$ için

$$\begin{array}{rcl} d_1(g_1g_2) & = & d_1(g_1)\cdot g_2 \\ d_2(g_1g_2) & = & g_1\cdot d_2(g_2) \\ g_1\cdot d_1(g_2) & = & d_2(g_1)\cdot g_2 \end{array}$$

şartlarını sağlamak üzere $(d_1,d_2)$ ikililerinin kümesi $U(G,C)$ ile gösterilir.

Bu küme üzerinde aşağıdaki işlemler tanımlıdır.

$$\begin{array}{ll} +) & ((d_1,d_2)+(t_1,t_2)) = (d_1+t_1,d_2+t_2) \\ \cdot) & k(d_1,d_2) = (kd_1,kd_2) \\ \circ) & ((d_1,d_2)\circ(t_1,t_2)) = (d_1\delta t_1, t_2\delta d_2) \end{array}$$

**Önerme 4.4** $(\gamma_d,\sigma_d) : C \to C$, $(\gamma'_d,\sigma'_d) : G \to G$ olmak üzere, herbir $(d_1,d_2) \in U(G,C)$ dönüşümleri ile tanımlı $\gamma_d = d_1\delta$, $\sigma_d = d_2\delta$, $\gamma'_d = \delta d_1$, $\sigma'_d = \delta d_2$ dönüşümleri için $(\gamma_d,\sigma_d) \in Bim(C)$, $(\gamma'_d,\sigma'_d) \in Bim(G)$ olur.

**İspat:** $c,c' \in C$ ve $g,g' \in G$ için,

$$\begin{array}{rcl} \gamma_d(cc') & = & d_1(\delta(cc')) \\ & = & d_1(\delta(c)\delta(c')) \\ & = & d_1(\delta(c))\cdot\delta(c') \\ & = & \gamma_d(c)\cdot\delta(c') \\ & = & \gamma_d(c)\cdot c' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sigma_d(cc') & = & d_2(\delta(cc')) \\ & = & d_2(\delta(c)\delta(c')) \\ & = & \delta(c)\cdot d_2(\delta(c')) \\ & = & \delta(c)\cdot\sigma_d(c') \\ & = & c\cdot\sigma_d(c') \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} c\gamma_d(c') & = & cd_1(\delta(c')) \\ & = & \delta(c)\cdot d_1(\delta(c')) \\ & = & d_2(\delta(c))\cdot\delta(c') \\ & = & d_2(\delta(c))c' \\ & = & \sigma_d(c)c' \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\gamma'_d(gg') &= \delta(d_1(gg')) \\
&= \delta(d_1(g)\cdot g') \\
&= \delta(d_1(g))\cdot g' \\
&= \gamma'_d(g)g'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma'_d(gg') &= \delta(d_2(gg')) \\
&= \delta(g\cdot d_2(g')) \\
&= g\cdot\delta(d_2(g')) \\
&= g\sigma'_d(g')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g\gamma'_d(g') &= g\delta(d_1(g')) \\
&= \delta(g\cdot d_1(g')) \\
&= \delta(d_2(g)\cdot g') \\
&= \delta(d_2(g))g' \\
&= \sigma'_d(g)g'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_d(g\cdot c) &= d_1(\delta(g\cdot c)) \\
&= d_1(g\delta(c)) \\
&= d_1(g)\cdot\delta(c) \\
&= d_1(g)c \\
&= \delta(d_1(g))\cdot c \\
&= \gamma'_d(g)\cdot c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_d(c\cdot g) &= d_1(\delta(c\cdot g)) \\
&= d_1(\delta(c)g) \\
&= d_1(\delta(c))\cdot g \\
&= \gamma_d(c)\cdot g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_d(g\cdot c) &= d_2(\delta(g\cdot c)) \\
&= d_2(g\delta(c)) \\
&= g\cdot d_2(\delta(c)) \\
&= g\cdot\sigma_d(c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_d(c\cdot g) &= d_2(\delta(c\cdot g)) \\
&= d_2(\delta(c)g) \\
&= \delta(c)\cdot d_2(g) \\
&= cd_2(g) \\
&= c\cdot\delta(d_2(g)) \\
&= c\cdot\sigma'_d(g)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g \cdot \gamma_d(c) &= g \cdot d_1(\delta(c)) \\
&= d_2(g) \cdot \delta(c) \\
&= d_2(g)c \\
&= \delta(d_2(g)) \cdot c \\
&= \sigma'_d(g) \cdot c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(c) \cdot g &= d_2(\delta(c)) \cdot g \\
&= \delta(c) \cdot d_1(g) \\
&= c d_1(g) \\
&= c \cdot \delta(d_1(g)) \\
&= c \cdot \gamma'(g)
\end{aligned}
$$

olup $(\gamma_d, \sigma_d) \in Bim(C)$ ve $(\gamma'_d, \sigma'_d) \in Bim(G)$ elde edilir.$\square$

**Önerme 4.5** $(\gamma_d, \sigma_d)$, $(\gamma'_d, \sigma'_d)$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlar.

**i)** $\gamma_d d_1 = d_1 \delta d_1 = d_1 \gamma'_d$ ve $\sigma_d d_2 = d_2 \delta d_2 = d_2 \sigma'_d$

$\gamma_d d_2 = d_1 \delta d_2 = d_1 \sigma'_d$ ve $\sigma_d d_1 = d_2 \delta d_1 = d_2 \gamma'_d$

**ii)**

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, shift left=2, "\delta"] \arrow[d, "{\gamma_d,\sigma_d}"'] & G \arrow[l, "d_1"'] \arrow[l, shift left=2, "d_2"] \arrow[d, "{\gamma'_d,\sigma'_d}"] \\
C \arrow[r, shift left=2, "\delta"] & G \arrow[l, "d_1"'] \arrow[l, shift left=2, "d_2"]
\end{tikzcd}
$$

diyagramı değişmelidir, yani,

$\delta \gamma_d = \delta(d_1 \delta) = (\delta d_1)\delta = \gamma'_d \delta$

$\delta \sigma_d = \delta(d_2 \delta) = (\delta d_2)\delta = \sigma'_d \delta$

**iii)** $((\gamma_d, \sigma_d), (\gamma'_d, \sigma'_d)) \in Bim(C, G, \delta)$

**Önerme 4.6** $U(G,C)$ kümesi

$$\begin{array}{ll} +) & ((d_1,d_2)+(t_1,t_2)) = (d_1+t_1,d_2+t_2) \\ \cdot) & k(d_1,d_2) = (kd_1,kd_2) \\ \circ) & ((d_1,d_2)\circ(t_1,t_2)) = (d_1\delta t_1, t_2\delta d_2) \end{array}$$

işlemleriyle birlikte bir **k**-cebir yapısı oluşturur.

**İspat:** $(d_1,d_2),\ (t_1,t_2) \in U(G,C)$ için,

**a)** $$\begin{aligned} d_1\delta t_1(g_1g_2) &= d_1\delta(t_1(g_1g_2)) \\ &= d_1\delta(t_1(g_1)\cdot g_2) \\ &= d_1(\delta(t_1(g_1))\cdot g_2 \\ &= d_1\delta t_1(g_1)\cdot g_2 \end{aligned}$$

**b)** $$\begin{aligned} t_2\delta d_2(g_1g_2) &= t_2\delta(d_2(g_1g_2)) \\ &= t_2\delta(g_1\cdot d_2(g_2) \\ &= t_2(g_1\cdot\delta(d_2(g_2)) \\ &= g_1\cdot t_2\delta d_2(g_2) \end{aligned}$$

**c)** $$\begin{aligned} g_1\cdot d_1\delta t_1(g_2) &= g_1\cdot d_1(\delta t_1(g_2)) \\ &= d_2(g)\cdot\delta(t_1(g_2)) \\ &= \delta(d_2(g))\cdot t_1(g_2) \\ &= t_2\delta(d_2(g_1)))\cdot g_2 \end{aligned}$$

olduğundan $U(G,C)$ kümesi $\circ$ işlemine göre kapalıdır.

$$\begin{array}{rcl} k\times U(G,C) & \rightarrow & U(G,C) \\ (k,(d_1,d_2)) & \mapsto & (kd_1,kd_2) \end{array}$$

olmak üzere,

**i)** $$\begin{aligned} k[((d_1,d_2)+(t_1,t_2))(g)] &= k[(d_1+t_1,d_2+t_2)(g)] \\ &= k[((d_1+t_1)(g),(d_2+t_2)(g)] \\ &= [k(d_1+t_1)(g),k(d_2+t_2)(g)] \\ &= [(kd_1+kt_1)(g),(kd_2+kt_2)(g)] \\ &= ((kd_1,kd_2)(r))+((kt_1,kt_2)(g)) \\ &= [k(d_1,d_2)+k(t_1,t_2)](g) \end{aligned}$$

$$\textbf{ii)}\ (k_1+k_2)(d_1,d_2)(g) \begin{array}[t]{cl} = & [(k_1+k_2)d_1(g),(k_1+k_2)d_2(g)] \\ = & [k_1d_1(g)+k_2d_1(g),k_1d_2(g)+k_2d_2(g)] \\ = & (k_1d_1(g),k_1d_2(g))+(k_2d_1(g)+k_2d_2(g)) \\ = & k_1(d_1,d_2)(g)+k_2(d_1,d_2)(g) \end{array}$$

$$\textbf{iii)}\ (k_1k_2)(d_1,d_2)(g) \begin{array}[t]{cl} = & k_1(k_2d_1(g),k_2d_2(g)) \\ = & (k_1k_2d_1(g),k_1k_2d_2(g)) \\ = & k_1(k_2(d_1,d_2))(g) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \textbf{iv)}\ k\left((d_1,d_2)\circ(t_1,t_2)\right)(g) & = & \left(k(d_1\circ t_1),k(t_2\circ d_2)\right)(g) \\ & = & \left((kd_1)\circ t_1,t_2\circ(kd_2)\right)(g) \\ & = & \left((kd_1,kd_2)\circ(t_1,t_2)\right)(g) \\ & = & \left(k(d_1,d_2)\circ(t_1,t_2)\right)(g) \\ k\left((d_1,d_2)\circ(t_1,t_2)\right)(g) & = & \left(k(d_1\circ t_1),k(t_2\circ d_2)\right)(g) \\ & = & \left(d_1\circ(kt_1),(kt_2)\circ d_2\right)(g) \\ & = & \left((d_1,d_2)\circ(kt_1,kt_2)\right)(g) \\ & = & \left((d_1,d_2)\circ k(t_1,t_2)\right)(g) \end{array}$$

eşitlikleri sağlanır. □

**Önerme 4.7**

$$\begin{array}{rrcl} \Gamma: & U(G,C) & \longrightarrow & Bim(C) \\ & (d_1,d_2) & \longmapsto & (\gamma_d,\sigma_d)=(d_1\delta,d_2\delta) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \Phi: & U(G,C) & \longrightarrow & Bim(G) \\ & (d_1,d_2) & \longmapsto & (\gamma'_d,\sigma'_d)=(\delta d_1,\delta d_2) \end{array}$$

dönüşümleri cebir homomorfizmleridir.

**Yardımcı Teorem 4.8** $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\in Bim(C,G,\delta)$ olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} Bim(C,G,\delta)\times U(G,C) & \longrightarrow & U(G,C) \\ (((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')),(t_1,t_2)) & \longmapsto & (\gamma t_1,t_2\sigma') \\ U(G,C)\times Bim(C,G,\delta) & \longrightarrow & U(G,C) \\ ((t_1,t_2),((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))) & \longmapsto & (t_1\gamma',\sigma t_2) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümer $Bim(C,G,\delta)$ bileşik çarpım cebirinin $U(G,C)$ kümesi üzerine sırasıyla sol ve sağ etkileridir.

**İspat:** $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\in Bim(C,G,\delta)$, $(t_1,t_2)\in U(G,C)$ için $(\gamma t_1, t_2\sigma')$ ve $(t_1\gamma',\sigma t_2)$ ikililerinin $U(G,C)$ kümesine ait olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(\gamma t_1)(gg') &= \gamma(t_1(gg'))\\ &= \gamma(t_1(g)\cdot g')\\ &= \gamma(t_1(g))\cdot g'\\ &= ((\gamma t_1)(g))\cdot g')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(t_2\sigma')(gg') &= t_2(\sigma'(gg'))\\ &= t_2(g\sigma'(g'))\\ &= g\cdot t_2(\sigma'(g'))\\ &= g\cdot((t_2\sigma')(g'))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g\cdot((\gamma t_1)(g')) &= g\cdot(\gamma(t_1(g')))\\ &= \sigma'(g)\cdot t_1(g')\\ &= t_2(\sigma'(g))\cdot g'\\ &= ((t_2\sigma')(g))\cdot g'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(t_1\gamma')(gg') &= t_1(\gamma'(gg'))\\ &= t_1(\gamma'(g)g')\\ &= (t_1(\gamma'(g)))\cdot g'\\ &= ((t_1\gamma')(g))\cdot g'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sigma t_2)(gg') &= \sigma(t_2(gg'))\\ &= \sigma(g\cdot t_2(g'))\\ &= g\cdot\sigma(t_2(g'))\\ &= g\cdot((\sigma t_2)(g'))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g\cdot((t_1\gamma')(g')) &= g\cdot(t_1(\gamma'(g')))\\ &= t_2(g)\cdot(\gamma'(g')\\ &= \sigma(t_2(g))\cdot g'\\ &= ((\sigma t_2)(g))\cdot g'\end{aligned}$$

Etki aksiyomlarının sağlandığı aşağıdaki eşitliklerden görülür.

**i)** $$\begin{aligned}k[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(t_1,t_2)] &= k(\gamma t_1, t_2\sigma')\\ &= ((k\gamma)t_1, t_2(k\sigma'))\\ &= ((k\gamma,k\sigma),(k\gamma',k\sigma'))\cdot(t_1,t_2)\\ &= [k((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))]\cdot(t_1,t_2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k\left[(t_1,t_2)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\right] &= k(t_1\gamma',\sigma t_2)\\
&= (t_1(k\gamma'),(k\sigma)t_2)\\
&= (t_1,t_2)\cdot((k\gamma,k\sigma),(k\gamma',k\sigma'))\\
&= (t_1,t_2)\cdot[k((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))]
\end{aligned}
$$

**ii)**
$$
\begin{aligned}
((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot((t_1,t_2)+(u_1,u_2)) &= ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(t_1+u_1,t_2+u_2)\\
&= (\gamma(t_1+u_1),(t_2+u_2)\sigma')\\
&= (\gamma t_1+\gamma u_1,t_2\sigma'+u_2\sigma')\\
&= (\gamma t_1,t_2\sigma')+(\gamma u_1,u_2\sigma')\\
&= ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(t_1,t_2)+((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(u_1,u_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
((t_1,t_2)+(u_1,u_2))\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) &= (t_1+u_1,t_2+u_2)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\\
&= ((t_1+u_1)\gamma',\sigma(t_2+u_2))\\
&= (t_1\gamma'+u_1\gamma',\sigma t_2+\sigma u_2)\\
&= (t_1\gamma',\sigma t_2)+(u_1\gamma',\sigma u_2)\\
&= (t_1,t_2)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))+(u_1,u_2)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))
\end{aligned}
$$

**iii)**
$$
\begin{aligned}
&\left[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))+((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\right]\cdot(t_1,t_2)\\
&\quad=\left[((\gamma,\sigma)+(\overline{\gamma},\overline{\sigma})),((\gamma',\sigma')+(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\right]\cdot(t_1,t_2)\\
&\quad=\left[(\gamma+\overline{\gamma},\sigma+\overline{\sigma}),(\gamma'+\overline{\gamma}',\sigma'+\overline{\sigma}')\right]\cdot(t_1,t_2)\\
&\quad=((\gamma+\overline{\gamma})t_1,t_2(\sigma'+\overline{\sigma}'))\\
&\quad=(\gamma t_1+\overline{\gamma}t_1,t_2\sigma'+t_2\overline{\sigma}')\\
&\quad=(\gamma t_1,t_2\sigma')+(\overline{\gamma}t_1,t_2\overline{\sigma}')\\
&\quad=[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(t_1,t_2)]+\left[((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\cdot(t_1,t_2)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(t_1,t_2)\cdot\left[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))+((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\right]\\
&\quad=(t_1,t_2)\cdot\left[((\gamma,\sigma)+(\overline{\gamma},\overline{\sigma})),((\gamma',\sigma')+(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\right]\\
&\quad=(t_1,t_2)\cdot\left[(\gamma+\overline{\gamma},\sigma+\overline{\sigma}),(\gamma'+\overline{\gamma},\sigma'+\overline{\sigma}')\right]\\
&\quad=(t_1(\gamma'+\overline{\gamma}'),(\sigma+\overline{\sigma})t_2)\\
&\quad=(t_1\gamma'+t_1\overline{\gamma}',\sigma t_2+\overline{\sigma}t_2)\\
&\quad=(t_1\gamma',\sigma t_2)+(t_1\overline{\gamma}',\overline{\sigma}t_2)\\
&\quad=[(t_1,t_2)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))]+\left[t_1,t_2)\cdot(((\overline{\gamma},\overline{\sigma}),(\overline{\gamma}',\overline{\sigma}'))\right]
\end{aligned}
$$

**iv)**
$$
\begin{aligned}
((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot((t_1,t_2)\circ(u_1,u_2)) &= ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(t_1\delta u_1,u_2\delta t_2)\\
&= (\gamma t_1\delta u_1,u_2\delta t_2\sigma')\\
&= (\gamma t_1,t_2\sigma')\circ(u_1,u_2)\\
&= [((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(t_1,t_2)]\circ(u_1,u_2)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}((t_1,t_2)\circ(u_1,u_2))\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) &= (t_1\delta u_1,u_2\delta t_2)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\\ &= (t_1\delta u_1\gamma',\sigma u_2\delta t_2)\\ &= (t_1,t_2)\circ(u_1\gamma',\sigma u_2)\\ &= (t_1,t_2)\circ[(u_1,u_2)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))]\end{aligned}$$

**v)** $$\begin{aligned}\left[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\bar\gamma,\bar\sigma),(\bar\gamma',\bar\sigma'))\right]\cdot(t_1,t_2) &= \left[((\gamma,\sigma)\circ(\bar\gamma,\bar\sigma)),((\gamma',\sigma')\circ(\bar\gamma',\bar\sigma'))\right]\cdot(t_1,t_2)\\ &= \left[(\gamma\circ\bar\gamma,\bar\sigma\circ\sigma),(\gamma'\circ\bar\gamma',\bar\sigma'\circ\sigma')\right]\cdot(t_1,t_2)\\ &= ((\gamma\circ\bar\gamma)t_1,t_2(\bar\sigma'\circ\sigma'))\\ &= (\gamma(\bar\gamma t_1),(t_2\bar\sigma')\sigma')\\ &= ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(\bar\gamma t_1,t_2\bar\sigma')\\ &= ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot\left[((\bar\gamma,\bar\sigma),(\bar\gamma',\bar\sigma'))\cdot(t_1,t_2)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(t_1,t_2)\cdot\left[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\bar\gamma,\bar\sigma),(\bar\gamma',\bar\sigma'))\right] &= (t_1,t_2)\cdot\left[((\gamma,\sigma)\circ(\bar\gamma,\bar\sigma)),((\gamma',\sigma')\circ(\bar\gamma',\bar\sigma'))\right]\\ &= (t_1,t_2)\cdot\left[(\gamma\circ\bar\gamma,\bar\sigma\circ\sigma),(\gamma'\circ\bar\gamma',\bar\sigma'\circ\sigma')\right]\\ &= (t_1(\gamma'\circ\bar\gamma'),(\bar\sigma\circ\sigma)t_2)\\ &= ((t_1\gamma')\bar\gamma',\bar\sigma(\sigma t_2))\\ &= (t_1\gamma',\sigma t_2)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\\ &= [(t_1,t_2)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))]\cdot((\bar\gamma,\bar\sigma),(\bar\gamma',\bar\sigma')) \qquad \square\end{aligned}$$

# 5. ASOSYATİF CEBİRLER İÇİN AKTÖR ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Bir cebirsel yapının diğeri üzerine etkisi gruplar için otomorfizm grubu yardımıyla belirlenirken değişmeli cebirler için çarpım cebiri, asosyatif cebirler için ise bileşik çarpım cebiri ile verildiğinden daha önce söz edilmişti. Bu bölümde asosyatif cebirler için bir çaprazlanmış modülün diğeri üzerine etkisi çaprazlanmış modüllerin bileşik çarpımı ve U(G,C) cebiri ile oluşturulacak ve aktör çaprazlanmış modül olarak adlandırılacak olan yapıyla verilecektir.

## 5.1 Bir Çaprazlanmış Modulün Aktörü

**Teorem 5.1**

$$\begin{array}{rcl} \triangle : \ U(G,C) & \to & Bim(C,G,\delta) \\ (d_1,d_2) & \mapsto & ((\gamma_{d_1},\sigma_{d_2}),(\gamma'_{d_1},\sigma'_{d_2})) = ((d_1\delta, d_2\delta),(\delta d_1, \delta d_2)) \end{array}$$

dönüşümü **k**-cebir homomorfizmi olup,

$$\begin{array}{rcl} Bim(C,G,\delta)\times U(G,C) & \longrightarrow & U(G,C) \\ (((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')),(t_1,t_2)) & \longmapsto & (\gamma t_1, t_2\sigma') \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} U(G,C)\times Bim(C,G,\delta) & \longrightarrow & U(G,C) \\ ((t_1,t_2),((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))) & \longmapsto & (t_1\gamma', \sigma t_2) \end{array}$$

etkileri ile birlikte $(U(G,C), Bim(C,G,\delta), \triangle)$ üçlüsü bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

**İspat:** $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \in Bim(C,G,\delta),\ (t_1,t_2) \in U(G,C)$ için,

**ÇM1)**
$$\begin{array}{rcl} \triangle[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(t_1,t_2)] & = & \triangle(\gamma t_1, t_2\sigma') \\ & = & (\gamma t_1\delta, t_2\sigma'\delta),(\delta\gamma t_1, \delta t_2\sigma') \\ & = & (\gamma t_1\delta, t_2\delta\sigma),(\gamma'\delta t_1, \delta t_2\sigma') \\ & = & ((\gamma\circ\gamma_t, \sigma_t\circ\sigma),(\gamma'\circ\gamma'_t, \sigma'_t\circ\sigma')) \\ & = & [((\gamma,\sigma)\circ(\gamma_t,\sigma_t)),((\gamma',\sigma')\circ(\gamma'_t,\sigma'_t))] \\ & = & ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\gamma'_t,\sigma'_t),(\gamma_t,\sigma_t)) \\ & = & ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ\triangle(t_1,t_2) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\triangle[(t_1,t_2)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))] &= \triangle(t_1\gamma',\sigma t_2)\\
&= (t_1\gamma'\delta,\sigma t_2\delta),(\delta t_1\gamma',\delta\sigma t_2)\\
&= (t_1\delta\gamma,\sigma t_2\delta),(\delta t_1\gamma',\sigma'\delta t_2)\\
&= ((\gamma_t\circ\gamma,\sigma\circ\sigma_t),(\gamma'_t\circ\gamma',\sigma'\circ\sigma'_t))\\
&= [((\gamma_t,\sigma_t)\circ(\gamma,\sigma)),((\gamma'_t,\sigma'_t)\circ(\gamma',\sigma'))]\\
&= ((\gamma'_t,\sigma'_t),(\gamma_t,\sigma_t))\circ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\\
&= \triangle(t_1,t_2)\circ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))
\end{aligned}$$

**ÇM2)**
$$\begin{aligned}
\triangle(d_1,d_2)\cdot(t_1,t_2) &= ((\gamma_d,\sigma_d),(\gamma'_d,\sigma'_d))\cdot(t_1,t_2)\\
&= (\gamma_d t_1,t_2\sigma'_d)\\
&= (d_1\delta t_1,t_2\delta d_2)\\
&= (d_1,d_2)\circ(t_1,t_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d_1,d_2)\cdot\triangle(t_1,t_2) &= (d_1,d_2)\cdot((\gamma_t,\sigma_t),(\gamma'_t,\sigma'_t))\\
&= (d_1\gamma'_t,\sigma_t d_2)\\
&= (d_1\delta t_1,t_2\delta d_2)\\
&= (d_1,d_2)\circ(t_1,t_2)
\end{aligned}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.□

**Tanım 5.2** Yukarıdaki teoremde verilen $(U(G,C),Bim(C,G,\delta),\triangle)$ çaprazlanmış modülüne $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün **aktör çaprazlanmış** modülü denir ve $\mathcal{A}(C,G,\delta)$ ile gösterilir.

$(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün kendisi üzerine etkisi $(C,G,\delta)\to\mathcal{A}(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modül morfizmi ile verilir.

**Yardımcı Teorem 5.3** $(C,G,\delta)$ bir çaprazlanmış modül olmak üzere

$$\begin{array}{rccl}
\eta: & C & \to & U(G,C)\\
& c & \mapsto & (\eta_{1C},\eta_{2C})
\end{array}$$

dönüşümü bir cebir homomorfizmidir.

**İspat:** İlk olarak, her $c\in C$ ve $g\in G$ için,

$$\begin{array}{rccl}
\eta_{1C}: & G & \to & C\\
& g & \mapsto & \eta_{1C}(g)=c\cdot g
\end{array}
\quad \text{ve} \quad
\begin{array}{rccl}
\eta_{2C}: & G & \to & C\\
& g & \mapsto & \eta_{2C}(g)=g\cdot c
\end{array}$$

şeklinde tanımlı $(\eta_{1C},\eta_{2C})$ dönüşümünün bir bileşik çarpan olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\eta_{1C}(gg') &= c\cdot(gg')\\ &= (c\cdot g)\cdot g'\\ &= \eta_{1C}(g)\cdot g'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{2C}(gg') &= (gg')\cdot c\\ &= g\cdot(g'\cdot c)\\ &= g\cdot\eta_{2C}(g')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g\cdot\eta_{1C}(g') &= g\cdot(c\cdot g')\\ &= (g\cdot c)\cdot g'\\ &= \eta_{2C}(g)\cdot g'\end{aligned}$$

olduğundan $(\eta_{1C},\eta_{2C})\in U(G,C)$ olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\eta_1(cc')(g) &= \eta_{1CC'}(g)\\ &= (cc')\cdot g\\ &= (c\delta(c'))\cdot g\\ &= (\eta_{1C}\delta(c'))\cdot g\\ &= \eta_{1C}(\delta(c')g)\\ &= \eta_{1C}(\delta(c'\cdot g))\\ &= \eta_{1C}\delta(\eta_{1C'}(g))\\ &= (\eta_{1C}\circ\eta_{1C'})(g)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_2(cc')(g) &= \eta_{2CC'}(g)\\ &= g\cdot(cc')\\ &= g\cdot(\delta(c)c')\\ &= g\cdot(\eta_{2C'}\delta(c))\\ &= \eta_{2C'}(g\delta(c))\\ &= \eta_{2C'}(\delta(g\cdot c))\\ &= \eta_{2C'}\delta(\eta_{2C}(g))\\ &= (\eta_{2C}\circ\eta_{2C'})(g)\end{aligned}$$

olduğundan $(\eta_{1C},\eta_{2C})$ bir cebir homomorfizmidir. $\Box$

Yukarıda tanımlı $\eta$ dönüşümünün görüntüsü Gör$(\eta)$, $E(G,C)$ ile gösterilir.

**Yardımcı Teorem 5.4**

$$\begin{array}{rccc} \gamma_g: & C & \to & C \\ & c & \mapsto & g\cdot c \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \gamma'_g: & G & \to & G \\ & g' & \mapsto & gg' \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \sigma_g: & C & \to & C \\ & c & \mapsto & c\cdot g \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rccc} \sigma'_g: & G & \to & G \\ & g' & \mapsto & g'g \end{array}$$

olmak üzere,

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & G & \to & Bim(C,G,\delta) \\ & g & \mapsto & ((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) \end{array}$$

dönüşümü bir cebir homomorfizmidir.

**İspat:** $g_1, g_2, g' \in G$ ve $c \in C$ için,

$$\begin{array}{rcl} \gamma_{g_1g_2}(c) & = & (g_1g_2)\cdot c \\ & = & g_1\cdot(g_2\cdot c) \\ & = & g_1\cdot\gamma_{g_2}(c) \\ & = & \gamma_{g_1}(\gamma_{g_2}(c)) \\ & = & (\gamma_{g_1}\circ\gamma_{g_2})(c) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{g_1g_2}(c) & = & c\cdot(g_1g_2) \\ & = & (c\cdot g_1)\cdot g_2 \\ & = & \sigma_{g_1}(c)\cdot g_2 \\ & = & \sigma_{g_2}(\sigma_{g_1}(c)) \\ & = & (\sigma_{g_2}\circ\sigma_{g_1})(c) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \gamma'_{g_1g_2}(g') & = & (g_1g_2)g' \\ & = & g_1(g_2g') \\ & = & g_1(\gamma'_{g_2}(g') \\ & = & \gamma'_{g_1}(\gamma'_{g_2}(g')) \\ & = & (\gamma'_{g_1}\circ\gamma'_{g_2})(g') \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sigma'_{g_1g_2}(g') & = & g'(g_1g_2) \\ & = & (g'g_1)g_2 \\ & = & \sigma'_{g_1}(g')g_2 \\ & = & \sigma'_{g_2}(\sigma'_{g_1}(g')) \\ & = & (\sigma_{g_2}\circ\sigma_{g_1})(g') \end{array}$$

olduğundan $\alpha$ dönüşümü bir cebir homomorfizmidir. $\square$

$\alpha$ dönüşümünün görüntüsü Gör$(\alpha)$, $\overline{G}$ ile gösterilir.

**Yardımcı Teorem 5.5** $Bim(C,G,\delta)$ bileşik çarpım cebirinin $U(G,C)$ üzerine etkileri,

$$((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(\eta_{1C},\eta_{2C}) = (\eta_{1\gamma(c)},\eta_{2\gamma(c)})$$

$$(\eta_{1C},\eta_{2C})\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) = (\eta_{1\sigma(c)},\eta_{2\sigma(c)})$$

şeklinde $E(G,C)$ üzerinde etkilere indirgenir.

**İspat:**

$$\begin{aligned}
[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(\eta_{1C},\eta_{2C})](g) &= (\gamma\eta_{1C},\eta_{2C}\sigma')(g) \\
&= (\gamma\eta_{1C}(g),\eta_{2C}\sigma'(g)) \\
&= [\gamma(\eta_{1C}(g)),\eta_{2C}(\sigma'(g))] \\
&= (\gamma(c\cdot g),\sigma'(g)\cdot c) \\
&= (\gamma(c)\cdot g,\sigma'(g)\cdot c) \\
&= (\gamma(c)\cdot g,g\cdot\gamma(c)) \\
&= (\eta_{1\gamma(c)}(g),\eta_{2\gamma(c)}(g)) \\
&= (\eta_{1\gamma(c)},\eta_{2\gamma(c)})(g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(\eta_{1C},\eta_{2C})\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))](g) &= (\eta_{1C}\gamma',\sigma\eta_{2C})(g) \\
&= (\eta_{1C}\gamma'(g),\sigma\eta_{2C}(g)) \\
&= [(\eta_{1C}(\gamma'(g)),\sigma(\eta_{2C}(g))] \\
&= (c\cdot\gamma'(g),\sigma(g\cdot c)) \\
&= (c\cdot\gamma'(g),g\cdot\sigma(c)) \\
&= (\sigma(c)\cdot g,g\cdot\sigma(c)) \\
&= (\eta_{1\sigma(c)}(g),\eta_{2\sigma(c)}(g)) \\
&= (\eta_{1\sigma(c)},\eta_{2\sigma(c)})(g)
\end{aligned}$$

olur.$\square$

**Yardımcı Teorem 5.6** $E(G,C)$ ve $\overline{G}$ sırasıyla $U(G,C)$ ve $Bim(C,G,\delta)$ kümelerinin birer idealidir.

**İspat:** $(d_1,d_2)\in U(G,C)$, $(\eta_{1C},\eta_{2C})\in E(G,C)$ için,

$$\begin{aligned}
[(d_1,d_2)\circ(\eta_{1C},\eta_{2C})](g) &= (d_1\delta\eta_{1C}(g),\eta_{2C}\delta d_2(g)) \\
&= (d_1\delta(c\cdot g),\eta_{2C}\sigma'_d(g)) \\
&= (d_1(\delta(c)g),\sigma'_d(g)\cdot c) \\
&= ((d_1\delta(c))\cdot g, g\cdot\gamma_d(c)) \\
&= (\gamma_d(c)\cdot g, g\cdot\gamma_d(c)) \\
&= (\eta_{1\gamma_d(c)}(g),\eta_{2\gamma_d(c)}(g)) \\
&= (\eta_{1\gamma_d(c)},\eta_{2\gamma_d(c)})(g)
\end{aligned}$$

olduğundan $(\eta_{1\gamma_d(c)},\eta_{2\gamma_d(c)})\in E(G,C)$ olur ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
[(\eta_{1C},\eta_{2C})\circ(d_1,d_2)](g) &= (\eta_{1C}\delta d_1(g),d_2\delta\eta_{2C}(g)) \\
&= (\eta_{1C}\gamma'_d(g),d_2\delta(g\cdot c)) \\
&= (c\cdot\gamma'_d(g),d_2(g\delta(c))) \\
&= (c\cdot\gamma'_d(g),g\cdot d_2(\delta(c)) \\
&= (\sigma_d(c)\cdot g, g\cdot\sigma_d(c)) \\
&= (\eta_{1\sigma_d(c)}(g),\eta_{2\sigma_d(c)}(g)) \\
&= (\eta_{1\sigma_d(c)},\eta_{2\sigma_d(c)})(g)
\end{aligned}$$

eşitliğinden $(\eta_{1\sigma_d(c)},\eta_{2\sigma_d(c)})\in E(G,C)$ olduğu kolayca görülür. Böylece $E(G,C)$, $U(G,C)$ cebirinin bir idealidir.

Ayrıca, $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\in Bim(C,G,\delta)$, $((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))\in\overline{G}$ için,

$((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) = ((\gamma\circ\gamma_g,\sigma_g\circ\sigma),(\gamma'\circ\gamma'_g,\sigma'_g\circ\sigma'))$ olup bileşenler ayrı ayrı incelendiğinde,

$$\begin{aligned}
\gamma\circ\gamma_g(c) &= \gamma(g\cdot c) \\
&= d_1(\delta(g\cdot c)) \\
&= d_1(g\delta(c)) \\
&= d_1(g)\cdot\delta(c) \\
&= \delta(d_1(g))\cdot c \\
&= \gamma'(g)\cdot c \\
&= \gamma_{\gamma'(g)}(c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_g \circ \sigma(c) &= \sigma_g(d_2\delta(c)) \\
&= d_2(\delta(c)) \cdot g \\
&= \delta(c) \cdot d_1(g) \\
&= c \cdot \delta(d_1(g)) \\
&= c \cdot \gamma'(g) \\
&= \sigma_{\gamma'(g)}(c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma' \circ \gamma'_g(g') &= \gamma'(gg') \\
&= \gamma'(g)g' \\
&= \gamma'_{\gamma'(g)}(g')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma'_g \circ \sigma'(g') &= \sigma'_g(\delta d_2(g')) \\
&= \delta(d_2(g'))g \\
&= \delta(d_2(g') \cdot g) \\
&= \delta(g' \cdot d_1(g)) \\
&= g'\delta(d_1(g)) \\
&= g'\gamma'(g) \\
&= \sigma'_{\gamma'(g)}(g')
\end{aligned}$$

olup $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \circ ((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) = ((\gamma_{\gamma'(g)},\sigma_{\gamma'(g)}),(\gamma'_{\gamma'(g)},\sigma'_{\gamma'(g)})) \in \overline{G}$ dir.

Benzer şekilde

$((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) \circ ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) = ((\gamma_g \circ \gamma, \sigma \circ \sigma_g),(\gamma'_g \circ \gamma', \sigma' \circ \sigma'_g))$ olur ve

$$\begin{aligned}
\gamma_g \circ \gamma(c) &= \gamma_g(d_1\delta(c)) \\
&= g \cdot d_1(\delta(c)) \\
&= d_2(g) \cdot \delta(c) \\
&= \delta(d_2(g)) \cdot c \\
&= \sigma'(g) \cdot c \\
&= \gamma_{\sigma'(g)}(c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma \circ \sigma_g(c) &= \sigma(c \cdot g) \\
&= d_2(\delta(c \cdot g)) \\
&= d_2(\delta(c)g) \\
&= \delta(c) \cdot d_2(g) \\
&= c \cdot \delta(d_2(g)) \\
&= c \cdot \sigma'(g) \\
&= \sigma_{\sigma'(g)}(c)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\gamma'_g \circ \gamma'(g') &= \gamma'_g(\delta d_1(g')) \\
&= g\delta(d_1(g')) \\
&= \delta(g \cdot d_1(g')) \\
&= \delta(d_2(g) \cdot g') \\
&= \delta(d_2(g))g' \\
&= \sigma'(g)g' \\
&= \gamma'_{\sigma'(g)}(g')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma' \circ \sigma'_g(g') &= \sigma'(g'g) \\
&= g'\sigma'(g) \\
&= \sigma'_{\sigma'(g)}(g')
\end{aligned}
$$

yani $((\gamma_g, \sigma_g), (\gamma'_g, \sigma'_g)) \circ ((\gamma, \sigma), (\gamma', \sigma')) = ((\gamma_{\sigma'(g)}, \sigma_{\sigma'(g)}), (\gamma'_{\sigma'(g)}, \sigma'_{\sigma'(g)})) \in \overline{G}$ . Böylece $\overline{G}$ de $Bim(C, G, \delta)$ bileşik çaprazlanmış modülünün bir ideali olur.□

**Teorem 5.7** $(\eta, \alpha) : (C, G, \delta) \to \mathcal{A}(C, G, \delta)$ dönüşümü bir çaprazlanmış modül homomorfizmidir.

**İspat:**

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\delta"'] & U(G,C) \arrow[d, "\Delta"] \\
G \arrow[r, "\alpha"'] & Bim(C,G,\delta)
\end{tikzcd}
$$

diyagramının değişmeli olduğu aşağıdaki eşitliklerden kolayca görülür.

$$
\begin{aligned}
\textbf{i)}\ \triangle\eta(c) &= \triangle\eta_c(g) \\
&= \triangle(\eta_{1C}(g), \eta_{2C}(g)) \\
&= \left[(\gamma_{\eta_{1C}}(c'), \sigma_{\eta_{2C}}(c')), (\gamma'_{\eta_{1C}}(g), \sigma'_{\eta_{2C}}(g))\right] \\
&= [(\eta_{1C}\delta(c'), \eta_{2C}\delta(c')), (\delta\eta_{1C}(g), \delta\eta_{2C}(g))] \\
&= [(c \cdot \delta(c'), \delta(c') \cdot c), (\delta(c \cdot g), \delta(g \cdot c))] \\
&= [(\delta(c) \cdot c', c' \cdot \delta(c)), (\delta(c)g, g\delta(c))] \\
&= \left[(\gamma_{\delta(c)}, \sigma_{\delta(c)}), (\gamma'_{\delta(c)}, \sigma'_{\delta(c)})\right] \\
&= \alpha(\delta(c)) \\
&= \alpha\delta(c)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\textbf{ii)}\ (\alpha(g)\circ\eta(c))(g') &= \left[((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))\cdot(\eta_{1C},\eta_{2C})\right](g') \\
&= (\gamma_g\eta_{1C},\eta_{2C}\sigma'_g)(g') \\
&= \left[\gamma_g\eta_{1C}(g'),\eta_{2C}\sigma'_g(g')\right] \\
&= (\gamma_g(c\cdot g'),\eta_{2C}(g'g)) \\
&= (g\cdot(c\cdot g'),(g'g)\cdot c) \\
&= ((g\cdot c)\cdot g',g'\cdot(g\cdot c)) \\
&= (\eta_{1g\cdot c}(g'),\eta_{2g\cdot c}(g')) \\
&= \eta(g\cdot c)(g')
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\eta(c)\circ\alpha(g))(g') &= \left[(\eta_{1C},\eta_{2C})\cdot((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))\right](g') \\
&= (\eta_{1C}\gamma'_g,\sigma_g\eta_{2C})(g') \\
&= \left[\eta_{1C}\gamma'_g(g'),\sigma_g\eta_{2C}(g')\right] \\
&= (\eta_{1C}(g'g),\sigma_g(g'\cdot c)) \\
&= (\eta_{1C}(g')\cdot g,(g'\cdot c)\cdot g) \\
&= ((c\cdot g)\cdot g',(g'\cdot c)\cdot g) \\
&= ((c\cdot g)\cdot g',g'\cdot(c\cdot g)) \\
&= (\eta_{1c\cdot g}(g'),\eta_{2c\cdot g}(g')) \\
&= \eta(c\cdot g)(g')
\end{aligned}$$

olduğundan çaprazlanmış modül homomorfizmi şartları sağlanır.□

**Önerme 5.8**

$$\text{Gör}(\eta,\alpha)=\text{Gör}\left((\eta_{1C},\eta_{2C}),\left((\gamma_g,\sigma_g),\left(\gamma'_g,\sigma'_g\right)\right)\right)=\left(E(G,C),\overline{G},\triangle\right)$$

olup

$$(E(G,C),\overline{G},\triangle)\trianglelefteq(U(G,C),Bim(C,G,\delta),\triangle)$$

elde edilir.

**İspat: i)** $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\in Bim(C,G,\delta)$, $((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))\in\overline{G}$ için Yardımcı Teorem 5.6 gereğince,

$((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))=((\gamma_{\gamma'(g)}(c)\sigma_{\gamma(g)}(c)),(\gamma'_{\gamma'(g)}(g'),\sigma'_{\gamma'(g)}(g')))$ olup

$((\gamma_{\gamma'(g)},\sigma_{\gamma'(g)}),(\gamma'_{\gamma'(g)},\sigma'_{\gamma'(g)}))\in\overline{G}$ dir ve

$$((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) \circ ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) = ((\gamma_{\sigma'(g)}(c)\sigma_{\sigma'(g)}(c)),(\gamma'_{\sigma'(g)}(g'),\sigma'_{\sigma'(g)}(g')))$$
olup

$((\gamma_{\sigma'(g)},\sigma_{\sigma'(g)}),(\gamma'_{\sigma'(g)},\sigma'_{\sigma'(g)})) \in \overline{G}$ elde edilir.

**ii)** $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \in Bim(C,G,\delta)$, $(\eta_{1C},\eta_{2C}) \in E(G,C)$ için Yardımcı Teorem 5.6 gereğince

$[((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(\eta_{1C},\eta_{2C})](g) = (\eta_{1\gamma(c)},\eta_{2\gamma(c)})(g)$ elde edilir.

yani $(\eta_{1\gamma(c)},\eta_{2\gamma(c)}) \in E(G,C)$ ve

$[(\eta_{1C},\eta_{2C})\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))](g) = (\eta_{1\sigma(c)},\eta_{2\sigma(c)})(g)$ olup

$(\eta_{1\sigma(c)},\eta_{2\sigma(c)}) \in E(G,C)$ elde edilir.

**iii)** $((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) \in \overline{G}$, $(d_1,d_2) \in U(G,C)$ için,

$$\begin{aligned}
\left[((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))\cdot\ (d_1,d_2)\right](g') &= (\gamma_g d_1, d_2\sigma'_g)(g')\\
&= (\gamma_g d_1(g'), d_2\sigma'_g(g'))\\
&= (g\cdot d_1(g'), d_2(g'g))\\
&= (g\cdot d_1(g'), g'\cdot d_2(g))\\
&= (d_2(g)\cdot g', g'\cdot d_2(g))\\
&= (\eta_{1d_2(g)}(g'), \eta_{2d_2(g)}(g'))
\end{aligned}$$

eşitliğinden $(\eta_{1d_2(g)}),\eta_{2d_2(g)}) \in E(G,C)$

$$\begin{aligned}
\left[\ (d_1,d_2)\cdot((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))\right](g') &= (d_1\gamma'_g, \sigma_g d_2)(g')\\
&= (d_1(\gamma'_g(g')), \sigma_g(d_2(g')))\\
&= (d_1(gg'), d_2(g')\cdot g)\\
&= (d_1(g)\cdot g', g'\cdot d_1(g))\\
&= (\eta_{1d_1(g)}(g'), \eta_{2d_1(g)}(g'))
\end{aligned}$$

eşitliğinden $(\eta_{1d_1(g)},\eta_{2d_1(g)}) \in E(G,C)$ olduğundan çaprazlanmış modül ideali şartları sağlanır.$\square$

**Tanım 5.9** $(E(G,C),\overline{G},\triangle)$ çaprazlanmış modülüne **iç çaprazlanmış** modül denir ve $I(C,G,\delta)$ ile gösterilir.

**Tanım 5.10** $\mathcal{A}(C,G,\delta)/I(C,G,\delta)$ bölüm çaprazlanmış modülüne $(C,G,\delta)$ nın **dış aktörü** denir ve $O(C,G,\delta)$ ile gösterilir.

Çaprazlanmış modüllerin bir dizisi için,

$$0 \longrightarrow (C',G',\delta') \xrightarrow{(i,j)} (C,G,\delta) \xrightarrow{(\xi,\tau)} (C'',G'',\delta'') \longrightarrow 0$$

$(i,j)$ birebir, $(\xi,\tau)$ örten homomorfizm ve Gör$(i,j)=$Çek$(\xi,\tau)$ ise bu diziye çaprazlanmış modüllerin bir kısa tam dizisi denir. Bu durumda aşağıdaki değişmeli diyagramı veren bir

$$(\alpha,\eta):(C,G,\delta)\longrightarrow \mathcal{A}(C',G',\delta')$$

morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (C',G',\delta') \arrow[r] \arrow[d] & (C,G,\delta) \arrow[r] \arrow[d, "(\alpha,\eta)"'] & (C'',G'',\delta'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I(C',G',\delta') \arrow[r] & \mathcal{A}(C',G',\delta') \arrow[r] & O(C',G',\delta') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Burada her $g,g'\in G, c,c'\in C$ için,

$$\begin{array}{rccl} \eta: & C & \to & U(G',C') \\ & c & \mapsto & (\eta_{1C},\eta_{2C}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \eta_{1C}: & G' & \to & C' \\ & g' & \mapsto & \eta_{1C}(g')=c\cdot g' \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rccl} \eta_{2C}: & G' & \to & C' \\ & g' & \mapsto & \eta_{2C}(g')=g'\cdot c \end{array}$$

şeklinde tanımlı ve

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & G & \to & Bim(C',G',\delta') \\ & g & \mapsto & ((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \gamma_g: & C' & \to & C' \\ & c' & \mapsto & g\cdot c' \\ \sigma_g: & C' & \to & C' \\ & c' & \mapsto & c'\cdot g \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rccc} \gamma'_g: & G' & \to & G' \\ & g' & \mapsto & gg' \\ \sigma'_g: & G' & \to & G' \\ & g' & \mapsto & g'g \end{array}$$

şeklinde tanımlıdır.

## 5.2 Aktör Çaprazlanmış Modül Örnekleri

**Örnek 5.1** $I$, $G$ de ideal olmak üzere $i: I \to G$ içine dönüşümü

$$\begin{array}{ccc} G\times I & \longrightarrow & I \\ (g,i) & \longmapsto & g\cdot i = gi \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} I\times G & \longrightarrow & I \\ (i,g) & \longmapsto & i\cdot g = ig \end{array}$$

etkileri ile birlikte $(I,G,i)$ çaprazlanmış modülünü oluşturur.

$\chi = \{(\gamma,\sigma) \in Bim(G) \mid (\gamma,\sigma)\mid_I \in Bim(I)\}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \sum: & Bim(I,G,i) & \longrightarrow & \chi \\ & ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) & \longmapsto & (\gamma',\sigma') \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rccc} \Phi: & \chi & \longrightarrow & Bim(I,G,i) \\ & (\gamma,\sigma) & \longmapsto & ((\gamma,\sigma)\mid_I,(\gamma',\sigma')) \end{array}$$

homorfizmleri için,

$$\sum\Phi((\gamma,\sigma)) = \sum((\gamma,\sigma)\mid_I,(\gamma,\sigma)) = (\gamma,\sigma)$$

olup

$$\sum\Phi = Id_\chi$$

$$\Phi\sum((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) = \Phi((\gamma',\sigma')) = ((\gamma',\sigma')\mid_I,(\gamma',\sigma'))$$

olup

$$\Phi\sum = Id_{Bim(I,G,i)}$$

olur. Böylece

$$Bim(I,G,i) \cong \chi$$

olur.

O halde

$$\mathcal{A}(I,G,i) = (U(G,I), \chi, \triangle)$$

elde edilir.

**Örnek 5.2** Örnek 5.1'de Özel olarak $I = 0$ ise

$$\mathcal{A}(0,G,i) = (U(G,0), Bim(G), \triangle) = (0, Bim(G), i)$$

ve $I = G$ ise

$$\mathcal{A}(G,G,Id) = (U(G,G), Bim(G), \triangle) = (Bim(G), Bim(G), Id)$$

olur.

# 6. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİNİN ANNİHİLATÖRLERİ

Bir gruptan otomorfizm grubuna tanımlanan grup homomorfizminin çekirdeği grubun merkezine karşılık gelirken bir asosyatif cebirden bileşik çarpım cebirine tanımlanan cebir homomorfizmasının çekirdeği cebirin (sıfırlayıcısını) annihilatörünü verir. Bu bölümde bu düşünce göz önüne alınarak annihilatör kavramı asosyatif cebirlerin çaprazlanmış modülleri için araştırılacaktır.

## 6.1 Asosyatif Cebirlerin Çaprazlanmış Modüllerinin Annihilatörleri

**Tanım 6.1** $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün **annihilatörü**,

$$(\eta,\alpha):(C,G,\delta)\to\mathcal{A}(C,G,\delta)$$

homomorfizminin çekirdeği olarak tanımlanır ve $Ann(C,G,\delta)$ ile gösterilir.

Diğer bir deyişle,

$$\begin{aligned}
\text{Çek}\eta &= \{c\in C \mid \eta_1(c)=0,\eta_2(c)\}\\
&= \{c\in C \mid c\cdot g=0, g\cdot c=0, g\in G\}\\
&= Ann_C(G)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Çek}\alpha &= \left\{g\in G \mid \alpha(g)=((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))=(0,0)\right\}\\
&= \{g\in G \mid \gamma_g(c)=g\cdot c=0, \sigma_g(c)=c\cdot g=0,\\
&\qquad \gamma'_g(g')=gg'=0, \sigma'_g(g')=g'g=0, c\in C, g'\in G\}\\
&= Ann_G(C)\cap Ann_G(G)
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$Ann(C,G,\delta)=\text{Çek}(\eta,\alpha)=(Ann_C(G),Ann_G(C)\cap Ann_G(G),\delta)$$

çaprazlanmış modülüdür. Ayrıca $Ann(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modül morfizminin çekirdeği olduğundan $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün bir idealidir.

## 6.2 Annihilatör Örnekleri

**Örnek 6.1** $I$, $G$ de ideal olmak üzere $(I,G,i)$ çaprazlanmış modülünü annihilatörü

$$\{i\in I \mid g\cdot i = gi = 0, i\cdot g = ig = 0, g\in G\} = I\cap Ann_G(G)$$

$$\{g\in G \mid g\cdot i = 0, i\cdot g = 0, i\in I\}\cap\left\{g\in G \mid g\cdot g' = 0, g'\cdot g = 0, g\in G\right\} = Ann_G(G)$$

olduğundan

$$(I\cap Ann_G(G), Ann_G(G), i)$$

çaprazlanmış modüldür.

Burada $g\cdot i = gi = 0, i\cdot g = ig = 0, g\cdot g' = gg' = 0, g'\cdot g = g'g = 0$ dır.

**Örnek 6.2** Özel olarak $(G,G,Id)$ ve $(0,G,i)$ çaprazlanmış modüllerin annihilatörleri

$$Ann(G,G,Id) = (G\cap Ann_G(G), Ann_G(G), Id) = (Ann_G(G), Ann_G(G), Id)$$

$$Ann(0,G,i) = (0\cap Ann_G(G), Ann_G(G), i) = (0, Ann_G(G), i)$$

şeklindedir.

**Örnek 6.3** $C$ bir $G$ modül olmak üzere $(C,G,0)$ çaprazlanmış modülünün annihilatörü

$$Ann(C,G,0) = (H^0(G,C), Ann_G(C)\cap Ann_G(G), 0)$$

şeklindedir.

**Örnek 6.4** $(G, Bim(G), \delta)$ çaprazlanmış modülünün annihilatörü,

$$\left\{g'\in G \mid \gamma_g\cdot g' = gg' = 0, g'\cdot\sigma_g = g'g = 0; (\gamma_g,\sigma_g)\in Bim(G)\right\} = Ann_G(G)$$

$$\left\{(\gamma_g,\sigma_g)\in Bim(G) \mid \gamma_g\cdot g' = \gamma(g)g' = gg' = 0, g'\cdot\sigma_g = \sigma_g(g') = 0;\ \text{her } g'\in G\right\} = (0,0)$$

$$\left\{(\gamma_g,\sigma_g)\in Bim(G) \mid \gamma_g\cdot\gamma_{g'} = 0, \sigma_g\cdot\sigma_{g'} = 0;\ \text{her } (\gamma_{g'},\sigma_{g'})\in Bim(G)\right\} = Ann_{Bim(G)}(Bim(G))$$

olduğundan

$$Ann(G, Bim(G), \delta) = (Ann_G G, (0,0)\cap Ann_{Bim(G)}(Bim(G)), \delta) = (Ann_G G, (0,0), \delta)$$

şeklindedir.

Burada $\gamma_g \cdot g' = \gamma(g)g' = gg' = 0,\ g' \cdot \sigma_g = \sigma_g(g') = 0$ ve

$\gamma_g \cdot \gamma_{g'} = \gamma_g \circ \gamma_{g'} = 0,\ \sigma_g \cdot \sigma_{g'} = \sigma_{g'} \circ \sigma_g = 0$ alınmıştır.

**Örnek 6.5** $\delta : C \to G$ örten dönüşümü ile $(C, G, \delta)$ çaprazlanmış modülünün annihilatörü,

$$\left\{c \in C \mid g \cdot c = \delta(c') \cdot c = c'c, c \cdot g = c \cdot \delta(c') = cc', c' \in C\right\} = Ann_C(C)$$

$$(\left\{g \in Bim(C) = G \mid g \cdot c = \delta(c') \cdot c = c'c = 0, c \cdot g = c \cdot \delta(c') = cc' = 0; c, c' \in C\right\} \cap$$

$$\left\{g \in Bim(C) = G \mid gg' = \delta(c')\delta(c'') = 0, g'g = \delta(c'')\delta(c') = 0; c', c'' \in C\right\}) = \delta(Ann_C(C))$$

olduğundan

$$Ann(C, G, \delta) = (Ann_c(C), \delta(Ann_C(C)), \delta)$$

olur.

Burada $gg' = \delta(c')\delta(c'') = \delta(c'c'') = 0, g'g = \delta(c'')\delta(c') = \delta(c''c') = 0$ alınmıştır.

# 7. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN YARI DİREKT ÇARPIMLARI

Aktör kavramının bir çaprazlanmış modülün kendisi üzerine etkisini tanımlamayla doğrudan ilgili olduğundan söz edilmişti. Daha genel olarak $(M,P,\partial)$ çaprazlanmış modülünün $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülü üzerine etkisi $(M,P,\partial)\to\mathcal{A}(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modül morfizmi ile verilir. Bu bölümde bu kavram yardımıyla çaprazlanmış modüllerin yarı direkt çarpımları oluşturulacaktır.

**Tanım 7.1** $(M,P,\partial)$ çaprazlanmış modülü $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülüne etki etsin.

Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varepsilon} & U(G,C) \\ {\scriptstyle\partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta} \\ P & \xrightarrow[\rho]{} & Bim(C,G,\delta) \end{array}$$

şeklinde bir $(\varepsilon,\rho)$ çaprazlanmış modül morfizmi vardır.

Burada

$$\begin{array}{rrcl} \varepsilon: & M & \longrightarrow & U(G,C) \\ & m & \longmapsto & \varepsilon(m)=(\varepsilon_1(m),\varepsilon_2(m)) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rrcl} \rho: & P & \longrightarrow & Bim(C,G,\delta) \\ & p & \longmapsto & \rho(p)=(\rho_1(p),\rho_2(p)) \end{array}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{rrcl} \rho_1: & P & \to & Bim(C) \\ & p & \mapsto & \rho_1(p)=(\gamma_{\rho_1}(p),\sigma_{\rho_1}(p)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \gamma_{\rho_1}(p): & C & \to & C \\ & c & \mapsto & p\cdot c \\ \sigma_{\rho_1}(p): & C & \to & C \\ & c & \mapsto & c\cdot p \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
\rho_2: & P & \to & Bim(G) \\
& p & \mapsto & \rho_2(p) = (\gamma_{\rho_2}(p), \sigma_{\rho_2}(p)) \\
& & & \begin{array}{rrcl} \gamma_{\rho_2}(p): & G & \to & G \\ & g & \mapsto & p \cdot g \\ \sigma_{\rho_2}(p): & G & \to & G \\ & g & \mapsto & g \cdot p \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
\varepsilon: & M & \to & U(G,C) \\
& m & \mapsto & (\varepsilon_1(m), \varepsilon_2(m)) \\
& & & \begin{array}{rrcl} \varepsilon_1(m): & G & \to & C \\ & g & \mapsto & \varepsilon_1(m)(g) \\ \varepsilon_2(m): & G & \to & C \\ & g & \mapsto & \varepsilon_2(m)(g) \end{array}
\end{array}$$

şeklinde tanımlıdır.

Kolaylık olması açısından kısaca

$\gamma_{\rho_1}(p) = \gamma_p, \sigma_{\rho_1}(p) = \sigma_p, \gamma'_{\rho_1}(p) = \gamma'_p$ ve $\sigma'_{\rho_1}(p) = \sigma'_p$ diyelim.

$M$, $\sigma_p \partial$ dönüşümü ile $C$ üzerine etki eder bu etki $C \rtimes M$ şeklinde yarıdirekt çarpım olarak ifade edilir.

$M$, $\gamma_p \partial$ dönüşümü ile $C$ üzerine etki eder bu etki $M \ltimes C$ şeklinde yarıdirekt çarpım olarak ifade edilir.

Benzer şeklide $P$, $\sigma'_p$ dönüşümü ile $G$ üzerine etki ettiğinden $G \rtimes P$ yarıdirekt çarpımı vardır. Ayrıca $P$, $\gamma'_p$ dönüşümü ile $G$ üzerine etki ettiğinden $G \ltimes P$ yarıdirekt çarpımı da vardır.

$$\begin{array}{rlcl}
\cdot: & (G \rtimes P) \times (C \rtimes M) & \to & (C \rtimes M) \\
& ((g,p),(c,m)) & \mapsto & (g,p) \cdot (c,m) = (p \cdot c + \varepsilon_{2m}(g) + g \cdot c, p \cdot m)
\end{array}$$

Burada $p \cdot c = \gamma_{\rho_1}(p)(c)$ olarak alınacaktır.

$$\begin{array}{rlcl}
\cdot: & (C \rtimes M) \times (G \rtimes P) & \to & (C \rtimes M) \\
& ((c,m),(g,p)) & \mapsto & (c,m) \cdot (g,p) = (c \cdot p + \varepsilon_{1m}(g) + c \cdot g, m \cdot p)
\end{array}$$

Burada ise $c \cdot p = \sigma_{\rho_1}(p)(c)$ olarak alınacaktır.

$$\begin{array}{rrcl} \pi: & C \rtimes M & \to & (G \rtimes P) \\ & (c,m) & \mapsto & (\delta(c), \partial(m)) \end{array}$$

dönüşümü bir cebir morfizmidir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \pi((c_1,m_1)\cdot(c_2,m_2)) &= \pi(m_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot m_2 + c_1c_2, m_1m_2) \\ &= (\delta(\gamma_{\rho_1}\partial(m_1)(c_2)) + (\delta(\sigma_{\rho_1}\partial(c_1)(m_2)) + \delta(c_1c_2), \partial(m_1m_2)) \\ &\overset{(*)}{=} (\gamma_{\rho_2}\partial(m_1)(\delta(c_2)) + \sigma_{\rho_2}\delta(c_1)(\partial(m_2)) + \delta(c_1c_2), \partial(m_1m_2)) \\ &= (\partial(m_1)\cdot\delta(c_2) + \delta(c_1)\cdot\partial(m_2) + \delta(c_1)\delta(c_2), \partial(m_1)\partial(m_2)) \\ &= (\delta(c_1), \partial(m_1)) \cdot (\delta(c_2), \partial(m_2)) \\ &= \pi(c_1,m_1)\cdot\pi(c_2,m_2) \end{aligned}$$

$(*)\rho_1\partial = (\gamma_{\rho_1}\partial, \sigma_{\rho_1}\partial),\ \rho_2\partial = (\gamma_{\rho_2}\partial, \sigma_{\rho_2}\partial)$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\rho_1\partial"'] & G \arrow[d, "\rho_2\partial"] \\ C \arrow[r, "\delta"'] & G \end{tikzcd}$$

Diyagramı yardımıyla

$$\begin{aligned} \delta(\rho_1(\partial(m_1)(c_2))) &= \delta\left[\gamma_{\rho_1}(\partial(m_1)(c_2)), \sigma_{\rho_1}(\partial(m_1)(c_2))\right] \\ &= \left[\delta(\gamma_{\rho_1}(\partial(m_1)(c_2))), \delta(\sigma_{\rho_1}(\partial(m_1)(c_2)))\right] \\ &= (\gamma_{\rho_2}\partial(m_1)(\delta(c_2)), \sigma_{\rho_2}\delta(c_1)(\partial(m_2)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıda verilen etkilerle birlikte $((C \rtimes M), (G \rtimes P), \pi)$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

**ÇM1)** $$\begin{aligned} \pi((g,p)\cdot(c,m)) &= \pi(p\cdot c + \varepsilon_{2m}(g) + g\cdot c, p\cdot m) \\ &= (\delta(p\cdot c) + \delta(\varepsilon_{2m}(g)) + \delta(g\cdot c), \partial(p\cdot m)) \\ &\overset{(*)}{=} (p\cdot\delta(c) + g\cdot\partial(m) + g\delta(c), p\partial(m)) \\ &= (g,p)\cdot(\delta(c),\partial(m)) \\ &= (g,p)\cdot\pi(c,m) \text{ olduğu görülür.} \end{aligned}$$

$(*)\delta(p\cdot c)=\delta(\gamma_{\rho_1}(p)(c))=\gamma_{\rho_2}(p)(\delta(c))=p\cdot\delta(c)$ ve

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\partial"'] & U(G,C) \arrow[d, "\Delta_2"] \\ P \arrow[r, "\rho_2"'] & Bim(G) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olduğundan,

$$\begin{array}{rcl} (\delta\varepsilon_1(m)(g),\delta\varepsilon_2(m)(g)) & = & (\delta\varepsilon_1(m),\delta\varepsilon_2(m))(g) \\ & = & \triangle_2((\varepsilon_1,\varepsilon_2)(m))(g) \\ & = & \triangle_2\varepsilon(m)(g) \\ & = & \rho_2(\partial(m))(g) \\ & = & (\gamma_{\rho_2}\partial(m)(g),\sigma_{\rho_2}\partial(m)(g)) \\ & = & (\partial(m)(g),(g)\partial(m)) \text{ elde edilir.} \end{array}$$

Yani $\delta\varepsilon_1(m)(g)=\partial(m)(g)$ ve $\delta\varepsilon_2(m)(g)=(g)\partial(m)$ eşitlikleri sağlanır.

$$\begin{array}{rcl} \pi((c,m)\cdot(g,p)) & = & \pi(c\cdot p+\varepsilon_{1m}(g)+c\cdot g,m\cdot p) \\ & = & (\delta(c\cdot p)+\delta(\varepsilon_{1m}(g))+\delta(c\cdot g),\partial(m\cdot p)) \\ & \overset{(*)}{=} & (\delta(c)\cdot p+\partial(m)\cdot g+\delta(c)g,\partial(m)p) \\ & = & (\delta(c),\partial(m))\cdot(g,p) \\ & = & \pi(c,m)\cdot(g,p) \text{ elde edilir.} \end{array}$$

$(*)\delta(c\cdot p)=\delta(\sigma_{\rho_1}(p)(c))=\sigma_{\rho_2}(p)(\delta(c))=\delta(c)\cdot p$ eşitliği sağlanır.

**ÇM2)** $$\begin{array}{rcl} \pi(c_1,m_1)\cdot(c_2,m_2) & = & (\delta(c_1),\partial(m_1))\cdot(c_2,m_2) \\ & = & (\partial(m_1)\cdot c_2,+\varepsilon_2(m_2)\delta(c_1)+\delta(c_1)\cdot c_2,\partial(m_1)\cdot m_2) \\ & = & (\gamma_{\rho_1}\partial(m_1)(c_2)+\varepsilon_2(m_2)\delta(c_1)+c_1c_2,m_1m_2) \\ & \overset{(*)}{=} & (m_1\cdot c_2+c_1\cdot m_2+c_1c_2,m_1m_2) \\ & = & ((c_1,m_1)\cdot(c_2,m_2)) \text{ olur.} \end{array}$$

$(*)m_1\cdot c_2=\gamma_{\rho_1}\partial(m_1)(c_2)$ ve

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\partial"'] & U(G,C) \arrow[d, "\Delta_1"] \\ P \arrow[r, "\rho_1"'] & Bim(C) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olduğundan,

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1(m_2)\delta(c_1),\varepsilon_2(m_2)\delta(c_1)) &= (\varepsilon_1(m_2),\varepsilon_2(m_2))\delta(c_1)\\ &= \triangle_1(\varepsilon(m_2)(c_1)\\ &= \rho_1(\partial(m_2))(c_1)\\ &= (\gamma_{\rho_1}\partial(m_2),\sigma_{\rho_1}\partial(m_2))(c_1)\\ &= (\gamma_{\rho_1}\partial(m_2)(c_1),\sigma_{\rho_1}\partial(m_2)(c_1))\\ &= (m_2\cdot c_1, c_1\cdot m_2) \text{ elde edilir.}\end{aligned}$$

Yani, $\varepsilon_1(m_2)\delta(c_1) = m_2\cdot c_1$ ve $\varepsilon_2(m_2)\delta(c_1) = c_1\cdot m_2$ olur.

$$\begin{aligned}(c_1,m_1)\cdot\pi(c_2,m_2) &= (c_1,m_1)\cdot(\delta(c_2),\partial(m_2))\\ &= (\partial(m_2)\cdot c_1, +\varepsilon_1(m_1)\delta(c_2)+c_1\cdot\delta(c_2), m_1\cdot\partial(m_2))\\ &= (\sigma_{\rho_1}\partial(m_2)(c_2)+\varepsilon_2(m_1)\delta(c_2)+c_1c_2, m_1m_2)\\ &\overset{(*)}{=} (c_1\cdot m_2+m_1\cdot c_2+c_1c_2, m_1m_2)\\ &= (m_1\cdot c_2+c_1\cdot m_2+c_1c_2, m_1m_2)\\ &= ((c_1,m_1)\cdot(c_2,m_2)) \text{ elde edilirir.}\end{aligned}$$

$(*) c_1\cdot m_2 = \sigma_{\rho_1}\partial(m_2)(c_1)$ eşitliği sağlanır.

Böylece çaprazlanmış modül aksiyomlarının sağlandığı görülür.

Bu çaprazlanmış modüle $(C,G,\delta)$ ve $(M,P,\partial)$ nın $(\varepsilon,\rho)$ ya bağlı yarıdirekt çarpımı denir ve $(C,G,\delta)\rtimes_{(\varepsilon,\rho)}(M,P,\partial)$ ile gösterilir.

# 8. AKTÖR ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLÜ ÇAPRAZLANMIŞ KARE

Çaprazlanmış modüller, 2 boyutlu cebirler olarak düşünülebileceğinden, bu görüşe dayanılarak 2 boyutlu çaprazlanmış modüller olarak aşağıda verilen çaprazlanmış kare yapısından söz edilebilir. Bu bölümde asosyatif cebirler için aktör çaprazlanmış modüllü çaprazlanmış kare oluşturulacaktır. Bunun için öncelikle Ellis (1984) tarafından verilen asosyatif cebirler için çaprazlanmış kare tanımını hatırlatalım.

## 8.1 Asosyatif Cebirlerin Çaprazlanmış Karesi

**Tanım 8.1** Asosyatif cebirlerin bir çaprazlanmış karesi, $P$ cebirinin $L,\ M$ ve $N$ üzerine etkileri ile birlikte aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir değişmeli diyagramdır.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & N \arrow[d, "\nu"] \\ M \arrow[r, "\mu"'] & P \end{tikzcd}$$

$h : M \times N \to L,\ h' : N \times M \to L$ fonksiyonları $m,\ m' \in M,\ p \in P,\ l \in L,\ k \in K$ için

**i)** $\lambda, \lambda', \mu, \nu$ ve $\nu\lambda$ dönüşümleri çaprazlanmış modüldür.

**ii)** $\lambda, \lambda'$ dönüşümleri $P$ cebirinin etkilerini korur.

**iii)** $kh(m,n) = h(km,n) = h(m,kn)$

$kh'(n,m) = h'(kn,m) = h'(n,km)$

**iv)** $p \cdot h(m,n) = h(p \cdot m,n),\ h(m,n) \cdot p = h(m,n \cdot p),\ h(m \cdot p,n) = h(m,p \cdot n)$

$p \cdot h'(n,m) = h'(p \cdot n,m),\ h'(n,m) \cdot p = h'(n,m \cdot p),\ h'(n \cdot p,m) = h'(n,p \cdot m)$

**v)** $h(m+m',n) = h(m,n)+h(m',n)$

$h(m,n+n') = h(m,n)+h(m,n')$

$h'(n+n',m) = h'(n,m)+h'(n',m)$

$h'(n,m+m') = h'(n,m)+h'(n,m')$

**vi)** $\lambda h(m,n) = \mu m\cdot n,\ \lambda h'(n,m) = n\cdot \mu m$

$\lambda' h(m,n) = m\cdot \nu n,\ \lambda' h'(n,m) = \nu n\cdot m$

**vii)** $h(m,\lambda l) = \mu m\cdot l,\ h'(\lambda l,m) = l\cdot \mu m$

$h(\lambda' l,n) = l\cdot \nu n,\ h'(n,\lambda' l) = \nu n\cdot l$

**viii)** $n'\cdot h(m,n) = h'(n',m)\cdot n$

$m'\cdot h'(n,m) = h(m',n)\cdot m$

Aşağıda, cebir homomorfizması yapısını içeren çaprazlanmış kare kavramının çaprazlanmış ideal kavramıyla ilişkisine yer verilmiştir.

**Önerme 8.2** Çaprazlanmış modüllerin

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\lambda"'] & N \arrow[d, "\nu"] \\ M \arrow[r, "\alpha_2"'] & P \end{tikzcd}$$

karesi mevcut iken $\alpha(\lambda) : \alpha_1(L) \to \alpha_2(M)$, $\nu : N \to P$ çaprazlanmış modülünün bir çaprazlanmış idealidir.

**İspat:** Aşağıdaki kareyi göz önüne alalım.

$$\begin{tikzcd} \alpha_1(L)=L' \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\overline{\nu}"'] & N \arrow[d, "\nu"] \\ \alpha_2(M)=M' \arrow[r, "\eta"'] & P \end{tikzcd}$$

burada $\mu$ ve $\eta$ içine dönüşümlerdir. $\overline{\nu}: L' \to M'$ dönüşümü $N$ cebirinin $\alpha_1(L)$ alt cebirine kısıtlanmışı olarak tanımlanmıştır. Bu $\overline{\nu}$ kısıtlanmış homomorfizminin $\nu$ homomorfizminin bir çaprazlanmış ideali olduğunu göstereceğiz.

İlk olarak $(L', M', \overline{\nu})$ çaprazlanmış modülünün $(L, M, \nu)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü olduğunu göstereceğiz.

**i)** $L'$ cebirinin $N$ cebirinin bir alt cebiri olduğu açıktır. Benzer olarak $\alpha_2(M) = M'$ de $P$ cebirinin bir alt cebiridir.

**ii)** $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan her $l \in L$ ve $m \in M$ için

$\alpha_2(m) \cdot \alpha_1(l) = \alpha_1(l \cdot m)$ ve $\alpha_1(l) \cdot \alpha_2(m) = \alpha_1(m \cdot l)$ eşitlikleri sağlanır. Bu durumda $\alpha_2(m) \in M'$ cebirinin $\alpha_1(l) \in L'$ üzerine sol ve sağ cebir etkileri $\alpha_2(m) \cdot \alpha_1(l) = \alpha_1(l \cdot m) \in L'$ ve $\alpha_1(l) \cdot \alpha_2(m) = \alpha_1(m \cdot l) \in L'$ şeklinde verilebilir.

**iii)** $\overline{\nu}: L' \to M'$ dönüşümünün bir çaprazlanmış modül olduğunu göstereceğiz.

Her $\alpha_2(m) \in M'$ ve $\alpha_1(l), \alpha_1(l') \in L'$ için

$$\begin{aligned} \overline{\nu}(\alpha_2(m) \cdot \alpha_1(l)) &= \nu\alpha_1(m \cdot l) \\ &= \alpha_2\lambda(m \cdot l) \\ &= \alpha_2(m\lambda(l)) \\ &= \alpha_2(m)\alpha_2\lambda(l) \\ &= \alpha_2(m)\nu\alpha_1(l) \\ &= \alpha_2(m)\overline{\nu}(l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nu}(\alpha_1(l)\cdot\alpha_2(m)) &= \nu\alpha_1(l\cdot m)\\
&= \alpha_2\lambda(l\cdot m)\\
&= \alpha_2(\lambda(l)m)\\
&= \alpha_2\lambda(l)\alpha_2(m)\\
&= \nu\alpha_1(l)\alpha_2(m)\\
&= \overline{\nu}(l)\alpha_2(m)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{\nu}(\alpha_1(l))\cdot\alpha_1(l') &= \alpha_2(\lambda(l))\cdot\alpha_1(l')\\
&= \alpha_1(\lambda(l)\cdot(l'))\\
&= \alpha_1(l\cdot l')\\
&= \alpha_1(l)\cdot\alpha(l')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1(l)\cdot\overline{\nu}(\alpha_1(l')) &= \alpha_1(l)\cdot\alpha_2(\lambda(l'))\\
&= \alpha_1((l)\cdot\lambda(l'))\\
&= \alpha_1(l\cdot l')\\
&= \alpha_1(l)\cdot\alpha(l')
\end{aligned}$$

olur.

**iv)**

$$\begin{tikzcd}
L' \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\overline{\nu}"'] & N \arrow[d, "\nu"] \\
M' \arrow[r, "\eta"'] & P
\end{tikzcd}$$

karesi değişmelidir çünkü $\mu$ ve $\eta$ içine dönüşümlerdir ve $\overline{\nu}$ de $\nu$ homomorfizminin kısıtlanmışıdır. Bu yüzden $(L', M', \overline{\nu})$ çaprazlanmış modülünün $(L, M, \nu)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülüdür. Şimdi ideal olması için gereken diğer şartları gösterelim.

**i)** $\alpha_1 : L \to N,\ \alpha_2 : M \to P$ çaprazlanmış modülleriyle kare tanımlandığından $\alpha_1(L) = L'$ ve $\alpha_2(M) = M'$ sırasıyla $N$ ve $P$ cebirinin idealleridir. Bu nedenle $L'N \subseteq L'$ ve $NL' \subseteq L'$ ayrıca $M'P \subseteq M'$ ve $PM' \subseteq M'$ elde edilir.

**ii)** $N \cdot M' \subseteq L'$ ve $M' \cdot N \subseteq L'$ olduğunu göstermeliyiz. Bunu kanıtlamak için $h, h'$ dönüşümlerini kullanacağız.

Her $\alpha_2(m) \in M'$ ve $n \in N$ için $h(n,m), h'(m,n) \in L$ olup

$n \cdot \alpha_2(m) = \alpha_1(h(n,m))$

$\alpha_2(m) \cdot n = \alpha_1(h'(m,n))$ olur. Buradan $n \cdot \alpha_2(m)$, $\alpha_2(m) \cdot n \in \alpha_1(L) = L'$ olur. Böylece $N \cdot M' \subseteq L'$ ve $M' \cdot N \subseteq L'$ elde edilir.

**iii)** $P \cdot L' \subseteq L'$ ve $L' \cdot P \subseteq L'$ olduğunu göstermeliyiz.

Her $p \in P$ ve $\alpha_1(l) \in L'$ için etkileri $p \cdot \alpha_1(l) = \alpha_1(m \cdot l) \in L'$, $\alpha_1(l) \cdot p = \alpha_1(l \cdot m) \in L'$ şeklinde tanımlayabiliriz. Böylece $L'$, $P$ cebirinin etkilerine göre kapalıdır ve ispat tamamlanır. $\square$

**Önerme 8.3** $(N,P,\nu)$ çaprazlanmış modülünün $(L',M',\bar{\nu})$ çaprazlanmış modül ideali ve

$$\begin{array}{rccl} h: & N \times M' & \to & L' \\ & (n,m') & \mapsto & h(n,m') = n \cdot m' \\ h': & M' \times N & \to & L' \\ & (m',n) & \mapsto & h(m',n) = m' \cdot n \end{array}$$

dönüşümleriyle bir çaprazlanmış kare oluşturulur.

$$\begin{tikzcd} L' \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, "\bar{\nu}"'] & N \arrow[d, "\nu"] \\ M' \arrow[r, tail, "\eta"'] & P \end{tikzcd}$$

**İspat: i) - viii)** şartlarının sağlandığı basit olarak gösterilebilir. Burada sadece **iv)** ve **viii)** eşitliklerinin ispatına yer verilecektir.

**iv)** $p \in P, m' \in M', n \in N$ için

$p \cdot h(n,m') = p \cdot (n \cdot m') = (p \cdot n) \cdot m' = h(p \cdot n, m')$

$h(n,m') \cdot p = (n \cdot m') \cdot p = n \cdot (m' \cdot p) = h(n, m' \cdot p)$

$h(n\cdot p,m')=(n\cdot p)\cdot m'=n\cdot(p\cdot m')=h(n,p\cdot m')$

$p\cdot h'(m',n)=p\cdot(m'\cdot n)=(p\cdot m')\cdot n=h'(p\cdot m',n)$

$h'(m',n)\cdot p=(m'\cdot n)\cdot p=(m'\cdot n)\cdot p=h'(m',n\cdot p)$

$h'(m'\cdot p,n)=(m'\cdot p)\cdot n=m'\cdot(p\cdot n)=h'(m',p\cdot n)$

**viii)** $t'\in M', b\in N$ için

$t'\cdot h(n,m')=t'\cdot(n\cdot m')=(t'\cdot n)\cdot m'=h'(t',n)\cdot m'$

$n\cdot h'(m',b)=n\cdot(m'\cdot b)=(n\cdot m')\cdot b=h(n,m')\cdot b$ □

Yukarıdaki iki önerme değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleri için Odabaş ve Ulualan'ın (2016) çalışmalarında yer almaktadır.

Ayrıca çaprazlanmış kare teorsinde çaprazlanmış modül teorisine benzer aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "\mu'"'] & P \end{tikzcd}$$

çaprazlanmış karesi mevcut ise,

**(1)** Gör$(\lambda',\mu')=\big(K,Q,\mu_|\big)$, $(M,P,\mu)$ çaprazlanmış modülünün bir idealidir.

**(2)** **(i)**

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\lambda"'] & K \arrow[d, "\mu_|"] \\ N \arrow[r, "\mu'"'] & Q \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mu_|"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ Q \arrow[r, "i"'] & P \end{tikzcd}$$

birer çaprazlanmış karedir.

**(ii)** $\left(J,R,\lambda_|\right)$ =Çek$(\lambda',\mu') \subseteq Ann\,(L,N,\lambda)$ olmak üzere

$$(0,0,0) \to \left(J,R,\lambda_|\right) \to (L,N,\lambda) \to \left(K,Q,\mu_|\right) \to (0,0,0)$$

çaprazlanmış modüllerin bir dizisi mevcuttur.

**(iii)** Son sonucun tersi de doğrudur, yani,çaprazlanmış modüllerin

$$(0,0,0) \to \text{Çek}\left(\lambda',\mu'\right) \to (L,N,\lambda) \stackrel{(\lambda',\mu')}{\longrightarrow} (M,P,\mu) \to (0,0,0)$$

özelliğinde bir dizisi mevcut ise

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "\mu'"'] & P \end{tikzcd}$$

bir çaprazlanmış karedir.

**(iv)** $\left(K,Q,\mu_|\right)$ çaprazlanmış modülünün $Ann\,(L,N,\lambda)$ üzerine etkisi trivialdir. Bu yüzden $Ann\,(L,N,\lambda)$ ve $\left(J,R,\lambda_|\right)$; $(I,T,\overline{\mu})$ modül yapısına sahiptir. Burada $(I,T,\overline{\mu}) = \frac{(M,P,\mu)}{\text{Gör}(\lambda',\mu')}$ alınmıştır.

**Önerme 8.4**

$$\begin{tikzcd} M\cap N \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & N \arrow[d, "\nu"] \\ M \arrow[r, "\mu"'] & P \end{tikzcd}$$

bir çaprazlanmış kare olsun ve $N$ cebirinin $M$ üzerine etkisi $P$ ile tanımlansın

$\triangle : M\cap N \to M \rtimes N$ dönüşümü $\triangle(m) = (-m,m)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda Gör$\triangle$, $M \rtimes N$ cebirinin bir idealidir ve $\mu,\nu$ dönüşümleri

$$\partial(m,n) = \mu(m)+\nu(n)$$

olacak şekildeki
$$\frac{M \rtimes N}{\text{Gör}\triangle} \xrightarrow{\partial} P$$
çaprazlanmış modülünü oluşturur.

**İspat:**

$$\begin{array}{cccccccc} \partial : \frac{M\rtimes N}{\text{Gör}\triangle} & \longrightarrow & P & \qquad & \triangle : M\cap N & \longrightarrow & M\rtimes N \\ ((m,n)+I) & \mapsto & \mu(m)+\nu(n) & & m & \mapsto & \triangle(m)=(-m,m) \end{array}$$

dönüşümlerini alalım.

Verilen kare diyagramı değişmeli olduğundan

$x\in M\cap N$ için $\nu\lambda(x)=\mu\lambda'(x)$ olup $\lambda$ ve $\lambda'$ içine dönüşümler olduğundan $\nu(x)=\mu(x)$ elde edilir.

$\text{Gör}\triangle=\{(-m,m)\mid m\in M\cap N\}$ olduğundan,

her $((m,n)+\text{Gör}\triangle),((m',n')+\text{Gör}\triangle)\in\frac{M\rtimes N}{\text{Gör}\triangle}$ için

$$\begin{array}{rcl} ((m,n)+\text{Gör}\triangle)=((m',n')+\text{Gör}\triangle) & \Longrightarrow & (m,n)-(m',n')\in\text{Gör}\triangle \\ & \Longrightarrow & (m-m',n-n')\in\text{Gör}\triangle \\ & \Longrightarrow & -(m-m')=(n-n') \\ & \Longrightarrow & \mu(-(m-m'))=\nu(n-n') \\ & \Longrightarrow & -(\mu(m-m'))=\nu(n-n') \\ & \Longrightarrow & -(\mu(m)-\mu(m'))=\nu(n)-\nu(n') \\ & \Longrightarrow & -\mu(m)+\mu(m')=\nu(n)-\nu(n') \\ & \Longrightarrow & \mu(m')+\nu(n')=\nu(n)+\mu(m) \\ & \Longrightarrow & \partial((m',n')+\text{Gör}\triangle)=\partial((m,n)+\text{Gör}\triangle) \end{array}$$

olur yani $\partial$ iyi tanımlıdır.

$\partial$ dönüşümünün cebir homomorfizması olduğu kolayca gösterilebilir.

Her $p\in P$, $((m,n)+\text{Gör}\triangle),((m',n')+\text{Gör}\triangle)\in\frac{M\rtimes N}{\text{Gör}\triangle}$ için

$$\begin{array}{rcl} \textbf{ÇM1)}\quad \partial(p\cdot((m,n)+G\ddot{o}r\triangle)) & = & \partial((p\cdot m,p\cdot n)+G\ddot{o}r\triangle) \\ & = & \mu(p\cdot m)+\nu(p\cdot n) \\ & = & p\cdot\mu(m)+p\cdot\nu(n) \\ & = & p\cdot(\mu(m)+\nu(n)) \\ & = & p\cdot\partial((m,n)+G\ddot{o}r\triangle) \end{array}$$

Benzer şekilde $\partial(((m,n)+G\ddot{o}r\triangle)\cdot p)=\partial((m,n)+G\ddot{o}r\triangle)\cdot p$ olduğu gösterilebilir.

**ÇM2)**

$$\begin{array}{rcl} \partial((m,n)+G\ddot{o}r\triangle)\cdot((m',n')+G\ddot{o}r\triangle) & = & (\mu(m)+\nu(n))\cdot((m',n')+G\ddot{o}r\triangle) \\ & = & ((\mu(m)+\nu(n))\cdot m',(\mu(m)+\nu(n))\cdot n')+G\ddot{o}r\triangle) \\ & = & ((\mu(m)\cdot m'+\nu(n)\cdot m',\mu(m)\cdot n'+\nu(n)\cdot n')+G\ddot{o}r\triangle) \\ & = & ((mm'+\nu(n)\cdot m',\mu(m)\cdot n'+nn')+G\ddot{o}r\triangle) \\ & = & ((mm'+n\cdot m',m\cdot n'+nn')+G\ddot{o}r\triangle) \\ & = & ((mm'+n\cdot m'+m\cdot n',nn')+G\ddot{o}r\triangle) \\ & = & ((m,n)+G\ddot{o}r\triangle)((m',n')+G\ddot{o}r\triangle) \end{array}$$

Benzer şekilde

$$((m,n)+G\ddot{o}r\triangle)\cdot\partial((m',n')+G\ddot{o}r\triangle)=((m,n)+G\ddot{o}r\triangle)((m',n')+G\ddot{o}r\triangle)$$

elde edilir. Böylece $\partial$ dönüşümü bir çaprazlanmış modül olur. □

## 8.2 Aktör Çaprazlanmış Kare

**Önerme 8.5**

$$\begin{array}{rrcl} h: & U(G,C)\times G & \to & C \\ & ((d_1,d_2),g) & \mapsto & h((d_1,d_2),g)=d_1(g) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} h': & G\times U(G,C) & \to & C \\ & (g,(d_1,d_2)) & \mapsto & h'(g,(d_1,d_2))=d_2(g) \end{array}$$

olmak üzere $Bim(C,G,\delta)$ cebirinin $G$ ve $C$ üzerine bilinen iz düşüm etkileri ile $(C,G,\delta)$

çaprazlanmış modülü ve $\mathcal{A}(C,G,\delta)$ aktörü aşağıdaki çaprazlanmış kareyi oluşturur.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\eta"'] & G \arrow[d, "\alpha"] \\
U(G,C) \arrow[r, "\Delta"'] & Bim(C,G,\delta)
\end{tikzcd}$$

**İspat:** Öncelikle ispatımızda kullanacağımız dönüşüm ve etkileri hatırlayalım.

$$\begin{array}{rccl}
\alpha: & G & \to & Bim(C,G,\delta) \\
 & g & \mapsto & ((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccl}
\gamma_g: & C & \to & C \\
 & c & \mapsto & g\cdot c \\
\sigma_g: & C & \to & C \\
 & c & \mapsto & c\cdot g
\end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rccl}
\gamma'_g: & G & \to & G \\
 & g' & \mapsto & gg' \\
\sigma'_g: & G & \to & G \\
 & g' & \mapsto & g'g
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccl}
\eta: & C & \to & U(G,C) \\
 & c & \mapsto & (\eta_{1C},\eta_{2C})
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccl}
\eta_{1C}: & G & \to & C \\
 & g & \mapsto & \eta_{1C}(g)=c\cdot g
\end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rccl}
\eta_{2C}: & G & \to & C \\
 & g & \mapsto & \eta_{2C}(g)=g\cdot c
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccl}
\triangle: & U(G,C) & \to & Bim(C,G,\delta) \\
 & (d_1,d_2) & \mapsto & ((\gamma_d,\sigma_d),(\gamma'_d,\sigma'_d))=((d_1\delta,d_2\delta),(\delta d_1,\delta d_2))
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
Bim(C,G,\delta)\times C & \to & C \\
(((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')),c) & \mapsto & ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot c=\gamma(c) \\
C\times Bim(C,G,\delta) & \to & C \\
(c,((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))) & \mapsto & c\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))=\sigma(c)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
Bim(C,G,\delta)\times G & \to & G \\
(((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')),g) & \mapsto & ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot g=\gamma'(g) \\
G\times Bim(C,G,\delta) & \to & G \\
(g,((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))) & \mapsto & g\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))=\sigma'(g)
\end{array}$$

**i)** $\triangle$ çaprazlanmış modül olup istenen şartları sağladığı daha önce gösterilmiştir.

$\alpha$ dönüşümünün çaprazlanmış modül aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

$((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \in Bim(C,G,\delta)$, $g \in G$ için

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{ÇM1)} & \alpha(((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot g) & = & \alpha(\gamma'_g) \\ & & = & ((\gamma_{\gamma'_g},\sigma_{\gamma'_g}),(\gamma'_{\gamma'_g},\sigma'_{\gamma'_g})) \\ & & = & ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) \\ & & = & ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ\alpha(g) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \alpha(g\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))) & = & \alpha(\sigma'_g) \\ & = & ((\gamma_{\sigma'_g},\sigma_{\sigma'_g}),(\gamma'_{\sigma'_g},\sigma'_{\sigma'_g})) \\ & = & ((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))\circ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \\ & = & \alpha(g)\circ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{ÇM2)} & \alpha(g)\cdot g' & = & ((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))\cdot g' \\ & & = & \gamma'_g(g') = gg' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g\cdot\alpha(g') & = & g\cdot((\gamma_{g'},\sigma_{g'}),(\gamma'_{g'},\sigma'_{g'})) \\ & = & \sigma_{g'}(g) = gg' \end{array}$$

olduğundan $\alpha$ bir çaprazlanmış modüldür.

Ayrıca $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \in Bim(C,G,\delta)$, $c \in C$ için $\alpha\delta = \triangle\eta = \chi$ olsun.

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{ÇM1)} & \chi(((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot c) & = & \chi(\gamma_c) \\ & & = & \alpha\delta(\gamma_c) \\ & & = & ((\gamma_{\delta\gamma_c},\sigma_{\delta\gamma_c}),(\gamma'_{\delta\gamma_c},\sigma'_{\delta\gamma_c})) \\ & & = & ((\gamma_{\gamma'\delta_c},\sigma_{\gamma'\delta_c}),(\gamma'_{\gamma'\delta_c},\sigma'_{\gamma'\delta_c})) \\ & & = & ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\gamma_{\delta_c},\sigma_{\delta_c}),(\gamma'_{\delta_c},\sigma'_{\delta_c})) \\ & & = & ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ\alpha\delta(c) \\ & & = & ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ\chi(c) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\chi(c\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))) &= \chi(\sigma_c)\\
&= \alpha\delta(\sigma_c)\\
&= ((\gamma_{\delta\sigma_c},\sigma_{\delta\sigma_c}),(\gamma'_{\delta\sigma_c},\sigma'_{\delta\sigma_c}))\\
&= ((\gamma_{\sigma'\delta_c},\sigma_{\sigma'\delta_c}),(\gamma'_{\sigma'\delta_c},\sigma'_{\sigma'\delta_c}))\\
&= ((\gamma_{\delta_c},\sigma_{\delta_c}),(\gamma'_{\delta_c},\sigma'_{\delta_c}))\circ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\\
&= \alpha\delta(c)\circ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\\
&= \chi(c)\circ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))
\end{aligned}$$

**ÇM2)** $$\begin{aligned}
\chi(c)\cdot c' &= \alpha\delta(c)\cdot c'\\
&= ((\gamma_{\delta_c},\sigma_{\delta_c}),(\gamma'_{\delta_c},\sigma'_{\delta_c}))\cdot c'\\
&= \gamma_{\delta_c}(c')\\
&= \delta(c)\cdot c'\\
&= cc'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c\cdot\chi(c') &= c\cdot\alpha\delta(c')\\
&= c\cdot((\gamma_{\delta_{c'}},\sigma_{\delta_{c'}}),(\gamma'_{\delta_{c'}},\sigma'_{\delta_{c'}}))\\
&= \sigma_{\delta_{c'}}(c)\\
&= c\cdot\delta(c')\\
&= cc'
\end{aligned}$$

olup $\chi=\alpha\delta=\triangle\eta$ bir çaprazlanmış modüldür.

**ii)** $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\in Bim(C,G,\delta)$, $c\in C$ için

$$\begin{aligned}
\alpha(((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot c) &= \delta(\gamma_c)\\
&= \gamma'\delta(c)\\
&= ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ\delta(c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(c\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))) &= \delta(\sigma_c)\\
&= \sigma'\delta(c)\\
&= \delta(c)\circ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\eta(((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot c) &= \eta(\gamma_c)\\
&= (\eta_{1\gamma_c},\eta_{2\gamma_c})\\
&= ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(\eta_{1C},\eta_{2C})\\
&= ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot\eta(c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta(c\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))) &= \eta(\sigma_c)\\
&= (\eta_{1\sigma_c},\eta_{2\sigma_c})\\
&= (\eta_{1C},\eta_{2C})\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\\
&= \eta(c)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))
\end{aligned}$$

olduğundan $\delta$ ve $\eta$, $Bim(C,G,\delta)$ etkisini korur.

**iii)** $k\in\mathbf{k},(d_1,d_2)\in U(G,C)$, $g\in G$ için,

$$\begin{aligned}
kh((d_1,d_2),g) &= k(d_1(g))\\
&= kd_1(g)\\
&= d_1(kg)\\
&= h((d_1,d_2)(kg))\\
kh((d_1,d_2),g) &= k(d_1(g))\\
&= (k(d_1))g\\
&= h(k(d_1,d_2),g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
kh'(g,(d_1,d_2)) &= k(d_2(g))\\
&= kd_2(g)\\
&= d_2(kg)\\
&= h'((kg),(d_1,d_2))\\
kh'(g,(d_1,d_2)) &= k(d_2(g))\\
&= (k(d_2))g\\
&= h'(g,k(d_1,d_2))
\end{aligned}$$

**iv)**$((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'),c)\in Bim(C,G,\delta)$, $g\in G$ için

$$\begin{aligned}
((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(h((d_1,d_2),g)) &= ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot d_1(g)\\
&= \gamma_{d_1(g)}\\
&= \gamma d_1(g)\\
&= h((\gamma d_1,d_2\sigma'),g)\\
&= h((((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(d_1,d_2)),g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h((d_1,d_2),g))\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) &= d_1(g)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\\
&= \sigma_{d_1(g)}\\
&= \sigma d_1(g)\\
&= d_1\sigma'_g\\
&= h((d_1,d_2),\sigma'_g)\\
&= h((d_1,d_2),g\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(d_1,d_2),g)) &= h((\gamma d_1, d_2\sigma'),g)) \\
&= \gamma_{d_1(g)} \\
&= \gamma d_1(g) \\
&= d_1\gamma'(g) \\
&= h((d_1\gamma',\sigma d_2),g) \\
&= h(((d_1,d_2)\cdot((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)),g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(h'(g,(d_1,d_2))) &= ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot d_2(g) \\
&= \gamma_{d_2(g)} \\
&= \gamma d_2(g) \\
&= d_2\gamma'(g) \\
&= h'(\gamma'_g,(d_1,d_2)) \\
&= h'(((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot g,(d_1,d_2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h'((d_1,d_2),g))\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) &= d_2(g)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \\
&= \sigma_{d_2(g)} \\
&= \sigma d_2(g) \\
&= d_2\sigma'_g \\
&= h'(g,(\gamma d_1, d_2\sigma')) \\
&= h'(g,(d_1,d_2)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h'((d_1,d_2)\cdot((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)),g)) &= h'(g,(d_1\gamma',\sigma d_2)) \\
&= \sigma_{d_2(g)} \\
&= \sigma d_2(g) \\
&= d_2\sigma'(g) \\
&= h'(g,(\gamma d_1, d_2\sigma')) \\
&= h'(g,(d_1,d_2)\cdot((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)))
\end{aligned}$$

**v)**
$$\begin{aligned}
h((d_1,d_2)+(t_1,t_2),g) &= h((d_1+t_1,d_2+t_2),g) \\
&= (d_1+t_1)g \\
&= d_1(g)+t_1(g) \\
&= h((d_1,d_2),g)+h((t_1,t_2),g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h((d_1,d_2),g_1+g_2) &= d_1(g_1+g_2) \\
&= d_1(g_1)+d_1(g_2) \\
&= h((d_1,d_2),g_1)+h((d_1,d_2)),g_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h'(g_1+g_2,(d_1,d_2)) &= d_2(g_1+g_2) \\
&= d_2(g_1)+d_2(g_2) \\
&= h'(g_1,(d_1,d_2))+h'(g_2,(d_1,d_2)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(g,(d_1,d_2)+(t_1,t_2)) &= h'(g,(d_1+t_1,d_2+t_2)) \\ &= (d_2+t_2)g \\ &= d_2(g)+t_2(g) \\ &= h'(g,(d_1,d_2))+h'(g,(t_1,t_2)) \end{aligned}$$

**vi)** $$\begin{aligned} \delta h((d_1,d_2),g) &= \delta(d_1(g)) \\ &= \delta d_1(g) \\ &= ((d_1\delta,d_2\delta),(\delta d_1,\delta d_2))\cdot g \\ &= ((\gamma_d,\sigma_d),(\gamma'_d,\sigma'_d))\cdot g \\ &= (\triangle(d_1,d_2))\cdot g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta h'(g,(d_1,d_2)) &= \delta(d_2(g)) \\ &= \delta d_2(g) \\ &= g\cdot((d_1\delta,d_2\delta),(\delta d_1,\delta d_2)) \\ &= g\cdot((\gamma_d,\sigma_d),(\gamma'_d,\sigma'_d)) \\ &= g\cdot(\triangle(d_1,d_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta h((d_1,d_2),g) &= \eta(d_1(g)) \\ &= (\eta_{1d_1(g)},\eta_{2d_1(g)}) \\ &\overset{(*)}{=} ((d_1\gamma'_g,\sigma_g d_2) \\ &= (d_1,d_2)\cdot((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) \\ &= (d_1,d_2)\cdot\alpha(g) \end{aligned}$$

$$(*)\quad \begin{aligned} \eta_{1d_1(g)}(g') &= d_1(g)\cdot g' \\ &= d_1(gg') \\ &= d_1\gamma'_g(g') \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} \eta_{2d_1(g)}(g') &= g'\cdot d_1(g) \\ &= d_2(gg') \\ &= \sigma_g d_2(g') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta h'((d_1,d_2),g) &= \eta(d_2(g)) \\ &= (\eta_{1d_2(g)},\eta_{2d_2(g)}) \\ &\overset{(*)}{=} ((\gamma_g d_1,d_2\sigma'_g) \\ &= ((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))\cdot(d_1,d_2) \\ &= \alpha(g)\cdot(d_1,d_2) \end{aligned}$$

$$(*)\quad \begin{aligned} \eta_{1d_2(g)}(g') &= d_2(g)\cdot g' \\ &= g\cdot d_1(g') \\ &= \gamma_g d_1(g') \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} \eta_{2d_2(g)}(g') &= g'\cdot d_2(g) \\ &= d_2(gg') \\ &= d_2\sigma'_g(g') \end{aligned}$$

**vii)**
$$\begin{aligned} h((d_1,d_2),\delta(c)) &= d_1(\delta(c)) \\ &= d_1\delta(c) \\ &= ((d_1\delta,d_2\delta),(\delta d_1,\delta d_2))\cdot c \\ &= ((\gamma_d,\sigma_d),(\gamma'_d,\sigma'_d))\cdot c \\ &= (\triangle(d_1,d_2))\cdot c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(\delta(c),(d_1,d_2)) &= d_2(\delta(c)) \\ &= d_2\delta(c) \\ &= c\cdot((d_1\delta,d_2\delta),(\delta d_1,\delta d_2)) \\ &= c\cdot((\gamma_d,\sigma_d),(\gamma'_d,\sigma'_d)) \\ &= c\cdot(\triangle(d_1,d_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\eta(c),g) &= h((\eta_{1C},\eta_{2C}),g) \\ &= \eta_{1C}(g) \\ &= c\cdot g \\ &= \sigma_g(c) \\ &= c\cdot((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) \\ &= c\cdot\alpha(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(g,\eta(c)) &= h'(g,(\eta_{1C},\eta_{2C})) \\ &= \eta_{2C}(g) \\ &= g\cdot c \\ &= \gamma_g(c) \\ &= ((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))\cdot c \\ &= \alpha(g)\cdot c \end{aligned}$$

**viii)**
$$\begin{aligned} g'\cdot h((d_1,d_2),g) &= g'\cdot d_1(g) \\ &= d_2(g')\cdot g \\ &= h'(g',(d_1,d_2))\cdot g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (t_1,t_2)\cdot h'(g,(d_1,d_2)) &= \triangle(t_1,t_2)\cdot d_2(g) \\ &= t_1\delta d_2(g) \\ &\overset{(*)}{=} d_2\delta t_1(g) \\ &= t_1(g)\cdot\triangle(d_1,d_2) \\ &= h((t_1,t_2),g)\cdot(d_1,d_2) \end{aligned}$$

$(*)$ $G^2=G$ olduğundan her $g\in G$ için $g=g_1g_2$ yazılabilir.

$$\begin{aligned} t_1\delta d_2(g_1g_2) &= t_1\delta(g_1\cdot d_2(g_2)) \\ &= \gamma_t(g_1\cdot d_2(g_2)) \\ &= \gamma_t'(g_1)\cdot d_2(g_2) \\ &= \delta t_1(g_1)\cdot d_2(g_2) \\ &= d_2((\delta t_1(g_1))g_2) \\ &= d_2(\delta(t_1(g_1)g_2)) \\ &= d_2(\delta(t_1(g_1)\cdot g_2)) \\ &= d_2(\delta(t_1(g_1g_2))) \\ &= d_2\delta t_1(g_1g_2) \end{aligned}$$

elde edilir.□

**Önerme 8.6**

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\lambda"'] & N \arrow[d, "\nu"] \\ M \arrow[r, "\mu"'] & P \end{tikzcd}$$

diyagramı $h: M\times N \longrightarrow L$, $h': N\times M \longrightarrow L$ fonksiyonları ile birlikte bir çaprazlanmış kare ise $(M,P,\mu)$, $(L,N,\lambda^{'})$ üzerine etki eder.

**İspat:**

$$(M,P,\mu) \longrightarrow \mathcal{A}(L,N,\lambda^{'}) = (U(N,L), Bim(L,N,\lambda^{'}),\Delta)$$

çaprazlanmış modül morfizminin varlığını ispatlamamız gereklidir.

$$\begin{aligned} K: \quad M &\longrightarrow U(N,L) \\ m &\mapsto (H(m),H'(m)) \end{aligned}$$

fonksiyonunu

$$\begin{aligned} H(m): \quad N &\longrightarrow L \\ n &\mapsto H(m)(n) = h(m,n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'(m): \quad N &\longrightarrow L \\ n &\mapsto H'(m)(n) = h'(n,m) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım.

$P$ cebirinin $L$ üzerine etkisi $\alpha: P \longrightarrow Bim(L)$ ile $N$ cebirinin $L$ üzerine etkisi ise $\nu$ dönüşümü ile belirlendiğinden,

$$\begin{aligned} H(m)(nn') &= h(m,nn') \\ &= h(m,n\cdot\nu(n')) \\ &= h(m,n)\cdot\nu(n') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'(m)(nn') &= h'(n'n,m) \\ &= h'(\nu(n')\cdot n,m) \\ &= \nu(n')\cdot h'(n,m) \end{aligned}$$

eşitliklerinden $(H(m),H'(m)) \in U(N,L)$ olur.

$$\begin{aligned} H(mm')(n) &= h(m'm,n) \\ &= h(\mu(m')\cdot m,n) \\ &= \mu(m')\cdot h(m,n) \\ &= h(m',\lambda' h(m,n)) \\ &= H(m')(\lambda' h(m,n)) \\ &= H(m')\lambda' H(m')(n) \\ &= (H(m')\circ H(m))(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'(mm')(n) &= h'(n,mm') \\ &= h'(n,m\cdot\mu(m')) \\ &= h'(n,m)\cdot\mu(m') \\ &= h'(\lambda h'(n,m),m') \\ &= H'(m')(\lambda h'(n,m)) \\ &= H'(m')\lambda H'(m')(n) \\ &= (H'(m')\circ H'(m))(n) \end{aligned}$$

eşitliği sağlandığından $(H(m),H'(m))$ bir homomorfizmdir.

$P$ cebirinin, $L$ ve $N$ üzerine etkisi sırasıyla

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & P & \longrightarrow & Bim(L) \\ & p & \longmapsto & (\gamma_p,\sigma_p) \end{array} \qquad \text{ve} \qquad \begin{array}{rccl} \beta: & P & \longrightarrow & Bim(N) \\ & p & \longmapsto & (\gamma'_p,\sigma'_p) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \gamma_p: & L & \longrightarrow & L \\ & l & \longmapsto & p\cdot l \\ \sigma_p: & L & \longrightarrow & L \\ & l & \longmapsto & l\cdot p \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \gamma'_p: & N & \longrightarrow & N \\ & n & \longmapsto & p\cdot n \\ \sigma'_p: & N & \longrightarrow & N \\ & n & \longmapsto & n\cdot p \end{array}$$

homomorfizmleriyle verildiğinden

$$\begin{array}{rcl} \theta: & P\longrightarrow & Bim(L,N,\lambda') \\ & p\longmapsto & (\alpha_p,\beta_p) = ((\gamma_p,\sigma_p),(\gamma'_p,\sigma'_p)) \end{array}$$

fonksiyonu tanımlıdır.

i) $\alpha_p = (\gamma_p,\sigma_p) \in Bim(L)$ ve $\beta_p = (\gamma'_p,\sigma'_p) \in Bim(N)$ olur.

ii) $\beta_p\lambda'(l) = \lambda'(\alpha_p(l))$ yani $\gamma'_p\lambda'(l) = \lambda'(\gamma_p(l))$ ve $\sigma'_p\lambda'(l) = \lambda'(\sigma_p(l))$ eşitliği aşağıdaki diyagramdan görülür.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\alpha_p"'] & N \arrow[d, "\beta_p"] \\ L \arrow[r, "\lambda'"'] & N \end{tikzcd}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\gamma_p(n\cdot l) &= p\cdot(n\cdot l) \\
&= p\cdot(\nu(n)\cdot l) \\
&= (p\cdot\nu(n))\cdot l \\
&= \nu(p\cdot n)\cdot l \\
&= (p\cdot n)\cdot l \\
&= \gamma'_p(n)\cdot l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_p(n\cdot l) &= p\cdot(l\cdot n) \\
&= p\cdot(l\cdot\nu(n)) \\
&= (p\cdot l)\cdot\nu(n) \\
&= (p\cdot l)\cdot n \\
&= \gamma_p(l)\cdot n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_p(n\cdot l) &= (n\cdot l)\cdot p \\
&= (\nu(n)\cdot l)\cdot p \\
&= \nu(n)\cdot(l\cdot p) \\
&= n\cdot(l\cdot p) \\
&= n\cdot\sigma_p(l)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_p(n\cdot l) &= (l\cdot n)\cdot p \\
&= (l\cdot\nu(n))\cdot p \\
&= l\cdot(\nu(n)\cdot p) \\
&= l\cdot\nu(n\cdot p) \\
&= l\cdot(n\cdot p) \\
&= l\cdot\sigma'_p(n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n\cdot\gamma_p(l) &= n\cdot(p\cdot l) \\
&= \nu(n)\cdot(p\cdot l) \\
&= (\nu(n)\cdot p)\cdot l \\
&= \nu(n\cdot p)\cdot l \\
&= (n\cdot p)\cdot l \\
&= \sigma'_p(n)\cdot l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_p(l)\cdot n &= (l\cdot p)\cdot n\\ &= (l\cdot p)\cdot \nu(n)\\ &= l\cdot(p\cdot\nu(n))\\ &= l\cdot\nu(p\cdot n)\\ &= l\cdot(p\cdot n)\\ &= l\cdot\gamma'_p(n)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $((\gamma_p,\sigma_p),(\gamma'_p,\sigma'_p))\in Bim(L,N,\lambda^{'})$ olur.

$$\begin{aligned}\theta:\quad P &\longrightarrow \quad Bim(L,N,\lambda^{'})\\ p &\longmapsto \quad (\alpha_p,\beta_p)=((\gamma_p,\sigma_p),(\gamma'_p,\sigma'_p))\end{aligned}$$

fonksiyonunun homomorfizma olduğu açıktır.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\mu"'] & U(N,L) \arrow[d, "\Delta"] \\ P \arrow[r, "\theta"'] & Bim(L,N,\lambda') \end{tikzcd}$$

diyagramının değişmeli olması için

$$\begin{aligned}\theta\mu(m) &= ((\gamma_{\mu(m)},\sigma_{\mu(m)}),(\gamma'_{\mu(m)},\sigma'_{\mu(m)}))\\ \Delta K(m) &= \Delta(H(m),H'(m))=((H(m)\lambda^{'},H'(m)\lambda),(\lambda^{'}H(m),\lambda^{'}H'(m)))\end{aligned}$$

ifadelerinin eşitliği sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned}H(m)\lambda^{'}(l) &= h(m,\lambda^{'}(l))\\ &= \mu(m)\cdot l\\ &= \gamma_{\mu(m)}(l)\\ H'(m)\lambda^{'}(l) &= h'(\lambda^{'}(l),m)\\ &= l\cdot\mu(m)\\ &= \sigma_{\mu(m)}(l)\\ \lambda^{'}H(m)(n) &= \lambda^{'}h(m,n)\\ &= \mu(m)\cdot n\\ &= \gamma'_{\mu(m)}(n)\\ \lambda^{'}H'(m)(n) &= \lambda^{'}h'(n,m)\\ &= n\cdot\mu(m)\\ &= \sigma'_{\mu(m)}(n)\end{aligned}$$

Son olarak,

$$\begin{array}{rcl}
(\theta(p)\cdot K(m))(n) & = & \left[((\gamma_p,\sigma_p),(\gamma'_p,\sigma'_p))\cdot(H(m),H'(m))\right](n)\\
& = & (\gamma_p H(m),H'(m)\sigma'_p)(n)\\
& = & (\gamma_p H(m)(n),H'(m)\sigma'_p(n))\\
& = & (\gamma_p h(m,n),H'(m)(n\cdot p))\\
& = & (p\cdot h(m,n),h'(n\cdot p,m))\\
& = & (h(p\cdot m,n),h'(n,p\cdot m))\\
& = & (H(p\cdot m),p\cdot H'(p\cdot m))(n)\\
& = & K(p\cdot m)(n)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(K(m)\cdot\theta(p))(n) & = & \left[(H(m),H'(m))\cdot((\gamma_p,\sigma_p),(\gamma'_p,\sigma'_p))\right](n)\\
& = & (H(m)\gamma'_p,\sigma_p H'(m))(n)\\
& = & (H(m)\gamma'_p(n),\sigma_p H'(m)(n))\\
& = & (H(m)(p\cdot n),\sigma_p(h'(n,m))\\
& = & (h(m,p\cdot n),h'(n,m)\cdot p)\\
& = & (h(m\cdot p,n),h'(n,m\cdot p))\\
& = & (H(m\cdot p)(n),H'(m\cdot p)(n))\\
& = & K(m\cdot p)(n)
\end{array}$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla,

$$(K,\theta):(M,P,\mu)\longrightarrow\mathcal{A}(L,N,\lambda^{'})$$

dönüşümünün çaprazlanmış modül morfizmi olduğu görülür.

Böylece,

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "\lambda"'] & N \arrow[d, "\nu"] \\
M \arrow[r, "\mu"'] & P
\end{tikzcd}$$

çaprazlanmış karesi, $(L,N,\lambda^{'})\rtimes_{(K,\theta)}(M,P,\mu)$ çaprazlanmış modülünü oluşturur. $\square$

Ayrıca, $M$ ve $N$ cebirlerinin rolleri değiştirilerek $(L,N,\lambda^{'})\rtimes_{(K,\theta)}(N,P,\nu)$ yarı direkt çaprazlanmış modülü elde edilebilir.

**Tanım 8.7** $(M,P,\partial)$ çaprazlanmış modülünün sırasıyla $(C,G,\delta)$ ve $(C',G',\delta')$ çaprazlanmış modüllerine etkileri yani

$$(\varepsilon,\rho):(M,P,\partial)\to\mathcal{A}(C,G,\delta)$$

ve

$$(\varepsilon',\rho'):(M,P,\partial)\to\mathcal{A}(C',G',\delta')$$

homomorfizmaları mevcut olsun.

$(f,\phi):(C,G,\delta)\to(C',G',\delta')$ çaprazlanmış modül morfizmi aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(M,P,\partial)$ çaprazlanmış modülünün **etkisini korur** denir.

Her $m\in M,\ p\in P,\ c\in C,\ g\in G$ için

**i)** $f(p\cdot c)=p\cdot f(c)$ ve $f(c\cdot p)=f(c)\cdot p$

**ii)** $\phi(p\cdot g)=p\cdot\phi(g)$ ve $\phi(g\cdot p)=\phi(g)\cdot p$

**iii)** $f(\varepsilon_1(m)(g))=\varepsilon_1'(m)(\phi(g))$ ve $f(\varepsilon_2(m)(g))=\varepsilon_2'(m)(\phi(g))$

İlk şartın $f(m\cdot c)=m\cdot f(c)$ ve $f(c\cdot m)=f(c)\cdot m$ eşitliğini içerdiğini göstermek kolaydır.

Bu durumda

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\partial"'] & U(G,C) \arrow[d, "\Delta"] \\
P \arrow[r, "\rho"'] & Bim(C,G,\delta)
\end{tikzcd}$$

şeklinde bir $(\varepsilon,\rho)$ çaprazlanmış modül morfizmi vardır.

Burada

$$\begin{aligned}
\varepsilon:\ & M\longrightarrow U(G,C)\\
& m\longmapsto \varepsilon(m)=(\varepsilon_1(m),\varepsilon_2(m))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\rho:\ & P\longrightarrow Bim(C,G,\delta)\\
& p\longmapsto \rho(p)=(\rho_1(p),\rho_2(p))
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \rho_1: & P & \rightarrow & Bim(C) \\ & p & \mapsto & \rho_1(p) = (\gamma_{\rho_1}(p), \sigma_{\rho_1}(p)) \\ & & & \begin{array}{rccc} \gamma_{\rho_1}(p): & C & \rightarrow & C \\ & c & \mapsto & p\cdot c \\ \sigma_{\rho_1}(p): & C & \rightarrow & C \\ & c & \mapsto & c\cdot p \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \rho_2: & P & \rightarrow & Bim(G) \\ & p & \mapsto & \rho_2(p) = (\gamma_{\rho_2}(p), \sigma_{\rho_2}(p)) \\ & & & \begin{array}{rccc} \gamma_{\rho_2}(p): & G & \rightarrow & G \\ & g & \mapsto & p\cdot g \\ \sigma_{\rho_2}(p): & G & \rightarrow & G \\ & g & \mapsto & g\cdot p \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon: & M & \rightarrow & U(G,C) \\ & m & \mapsto & (\varepsilon_1(m), \varepsilon_2(m)) \\ & & & \begin{array}{rccc} \varepsilon_1(m): & G & \rightarrow & C \\ & g & \mapsto & \varepsilon_1(m)(g) \\ \varepsilon_2(m): & G & \rightarrow & C \\ & g & \mapsto & \varepsilon_2(m)(g) \end{array} \end{array}$$

şeklinde tanımlıdır.

Benzer olarak

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "\partial"'] & U(G',C') \arrow[d, "\Delta'"] \\ P \arrow[r, "\rho'"'] & Bim(C',G',\delta') \end{tikzcd}$$

şeklinde bir $(\varepsilon', \rho')$ çaprazlanmış modül morfizmi vardır.

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon': & M \longrightarrow & U(G,C) \\ & m \longmapsto & \varepsilon'(m) = (\varepsilon'_1(m), \varepsilon'_2(m)) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} \rho': & P \longrightarrow & Bim(C,G,\delta) \\ & p \longmapsto & \rho'(p) = (\rho'_1(p), \rho'_2(p)) \end{array}$$

olmak üzere

$$
\begin{array}{rrcl}
\rho_1' : & P & \rightarrow & Bim(C') \\
& p & \mapsto & \rho_1'(p) = (\gamma_{\rho_1'}(p), \sigma_{\rho_1'}(p)) \\
& & & \begin{array}{rrcl} \gamma_{\rho_1'}(p) : & C' & \rightarrow & C' \\ & c' & \mapsto & p \cdot c' \\ \sigma_{\rho_1'}(p) : & C' & \rightarrow & C' \\ & c' & \mapsto & c' \cdot p \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
\rho_2' : & P & \rightarrow & Bim(G') \\
& p & \mapsto & \rho_2'(p) = (\gamma_{\rho_2'}(p), \sigma_{\rho_2'}(p)) \\
& & & \begin{array}{rrcl} \gamma_{\rho_2'}(p) : & G' & \rightarrow & G' \\ & g' & \mapsto & p \cdot g' \\ \sigma_{\rho_2'}(p) : & G' & \rightarrow & G' \\ & g' & \mapsto & g' \cdot p \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
\varepsilon' : & M & \rightarrow & U(G', C') \\
& m & \mapsto & (\varepsilon_1'(m), \varepsilon_2'(m)) \\
& & & \begin{array}{rrcl} \varepsilon_1'(m) : & G' & \rightarrow & C' \\ & g' & \mapsto & \varepsilon_1'(m)(g') \\ \varepsilon_2'(m) : & G' & \rightarrow & C' \\ & g' & \mapsto & \varepsilon_2(m)(g') \end{array}
\end{array}
$$

şeklindedir.

Ayrıca aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f"'] & G \arrow[d, "\phi"] \\
C' \arrow[r, "\delta'"'] & G'
\end{tikzcd}
$$

Yani $\delta' f = \phi\delta$ olur.

**Önerme 8.8** Asosyatif cebirlerin bir karesi

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & N \arrow[d, "\nu"] \\
M \arrow[r, "\mu"'] & P
\end{tikzcd}
$$

$(K, \theta) : (M, P, \mu) \rightarrow \mathcal{A}(L, N, \lambda)$ etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış kare oluşturur ancak ve ancak $(\lambda', \nu) : (L, N, \lambda) \longrightarrow (M, P, \mu)$ dönüşümü $(M, P, \mu)$ çaprazlanmış modülünün etkisini koruyan çaprazlanmış modüllerin bir homomorfizmidir. Burada $(K, \theta)(\lambda', \nu)$ bileşkesi $(L, N, \lambda)$ çaprazlanmış modülünün kendisi üzerine kanonik etkidir.

**İspat:** Verilen karede $h : M \times N \longrightarrow L$, $h' : N \times M \longrightarrow L$ fonksiyonları tanımlı olsun. Bu durumda

$$(K,\theta) : (M,P,\mu) \longrightarrow \mathcal{A}(L,N,\lambda) = (U(N,L), Bim(L,N,\lambda), \Delta)$$

etkisi ve her $m \in M,\ n \in N$ için

$$H(m)(n) = h(m,n)$$

$$H'(m)(n) = h'(n,m)$$

fonksiyonları ve $\theta(p) = (\alpha(p), \beta(p)) = ((\gamma_p, \sigma_p), (\gamma'_p, \sigma'_p))$ dönüşümleri mevcuttur ve burada $\alpha$ ve $\beta$ sırasıyla $P$ cebirinin $L$ ve $M$ üzerine etkileridir.

$(M,P,\mu)$ çaprazlanmış modülünün kendisi üzerine etkisi

$$(\eta,\psi) : (M,P,\mu) \longrightarrow \mathcal{A}(M,P,\mu) = (U(P,M), Bim(M,P,\mu), \Delta)$$

dönüşümü ile tanımlansın.

$(\lambda', \nu)$ bir çaprazlanmış modül morfizmidir ve

$$\begin{aligned} \lambda'(H(m)(n)) &= \lambda' h(m,n) = m \cdot \nu(n) = \eta_{1m}(\nu(n)) \\ \lambda'(H'(m)(n)) &= \lambda' h'(n,m) = \nu(n) \cdot m = \eta_{2m}(\nu(n)) \end{aligned}$$

olduğundan $(M,P,\mu)$ çaprazlanmış modülünün etkisini korur. Dahası $(K,\theta)(\lambda',\nu)$, $(L,N,\lambda)$ üzerine kanonik etkidir. Çünkü,

$H\lambda'(l)(n) = h(\lambda'(l), n) = l \cdot \nu(n)$

$H'\lambda'(l)(n) = h'(n, \lambda'(l)) = \nu(n) \cdot l$

$\theta_1(\nu(n) \cdot l) = \alpha(\nu(n) \cdot l) = \gamma_n(l) = n \cdot l$

$\theta_1(l \cdot \nu(n)) = \alpha(l \cdot \nu(n)) = \sigma_n(l) = l \cdot n$

$\theta_2(\nu(n) \cdot n') = \beta(\nu(n) \cdot n') = \gamma'_n(n') = nn'$

$\theta_2(n \cdot \nu(n')) = \beta(n \cdot \nu(n')) = \sigma'_{n'}(n) = nn'$

Tersine $(\lambda', \nu) : (L, N, \lambda) \to (M, P, \mu)$ dönüşümü $(M, P, \mu)$ çaprazlanmış modülünün etkisini koruduğundan ve $(M, P, \mu)$ kendi üzerine kanonik etki oluşturduğundan aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

**a)** $\lambda'(m \cdot l) = m \cdot \lambda'(l) \qquad \lambda'(l \cdot m) = \lambda'(l) \cdot m$

**b)** $\nu(p \cdot n) = p \cdot \nu(n) \qquad \nu(n \cdot p) = \nu(n) \cdot p$

**c)** $\lambda'(p \cdot l) = p \cdot \lambda'(l) \qquad \lambda'(l \cdot p) = \lambda'(l) \cdot p$

**d)** $\lambda'(H(m)(n)) = m \cdot \nu(n) \qquad \lambda'(H'(m)(n)) = \nu(n) \cdot m$

Diğer yandan$(K, \theta)$ etkisi verildiğinde aşağıdaki etkiler mevcuttur.

$$\begin{array}{llll} \alpha: & P & \longrightarrow & Bim(L) \\ & p & \longmapsto & (\gamma_p, \sigma_p) \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \beta: & P & \longrightarrow & Bim(N) \\ & p & \longmapsto & (\gamma'_p, \sigma'_p) \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \rho: & P & \longrightarrow & Bim(M) \\ & p & \longmapsto & (\gamma''_p, \sigma''_p) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \gamma_p: & L & \longrightarrow & L \\ & l & \longmapsto & p \cdot l \\ \sigma_p: & L & \longrightarrow & L \\ & l & \longmapsto & l \cdot p \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \gamma'_p: & N & \longrightarrow & N \\ & n & \longmapsto & p \cdot n \\ \sigma'_p: & N & \longrightarrow & N \\ & n & \longmapsto & n \cdot p \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \gamma''_p: & M & \longrightarrow & M \\ & m & \longmapsto & p \cdot m \\ \sigma''_p: & M & \longrightarrow & M \\ & m & \longmapsto & n \cdot m \end{array}$$

Dahası $(K, \theta)\,(\lambda', \nu) : (L, N, \lambda) \longrightarrow (M, P, \mu) \longrightarrow \mathcal{A}(L, N, \lambda)$ dönüşümü $(L, N, \lambda)$ üzerine kanonik etki olduğundan aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

**i)** $H\lambda'(l)(n) = h(\lambda'(l), n) = l \cdot \nu(n)$

$H'\lambda'(l)(n) = h'(n, \lambda'(l)) = \nu(n) \cdot l$

**ii)** $\alpha(\nu(n) \cdot l) = \gamma_n(l) = n \cdot l \qquad \alpha(l \cdot \nu(n)) = \sigma_n(l) = l \cdot n$

$\beta(\nu(n) \cdot n') = \gamma'_n(n') = nn' \qquad \beta(n' \cdot \nu(n)) = \sigma'_n(n') = n'n$

Sonuç olarak $M$ cebirinin $L$ ve $N$ üzerine $\mu$ yardımıyla tanımlanan aşağıdaki etkilerini elde ederiz.

Her $m \in M,\ l \in L$ için

$m \cdot l = H(m)(\lambda(l)) = \gamma_{\mu(m)}(l) = \mu(m) \cdot l$

$l \cdot m = H'(m)(\lambda(l)) = \sigma_{\mu(m)}(l) = l \cdot \mu(m)$

Her $m \in M,\ n \in N$ için

$m \cdot n = \gamma'_{\mu(m)}(n) = \mu(m) \cdot n$

$n \cdot m = \sigma'_{\mu(m)}(n) = n \cdot \mu(m)$

Ayrıca $N$ cebirinin $L$ ve $M$ üzerine $\nu$ yardımıyla tanımlanan aşağıdaki etkileri mevcuttur.

her $n \in N,\ l \in L$ için

$n \cdot l = \gamma_{\nu(n)}(l) = \nu(n) \cdot l$

$l \cdot n = \sigma_{\nu(n)}(l) = l \cdot \nu(n)$

$N$ cebirinin $L$ üzerine $\nu$ yardımıyla tanımlanan etkisi $(L, N, \lambda)$ çaprazlanmış modülündeki $N$ cebirinin $L$ üzerine etkisine denk gelmektedir.

her $n \in N,\ m \in M$ için

$n \cdot m = \nu(n) \cdot m$

$m \cdot n = m \cdot \nu(n)$ olur.

Şimdi aşağıdaki şartları sağlayan $h : M \times N \longrightarrow L$, $h' : N \times M \longrightarrow L$

$$h(m,n) = H(m)(n)$$

$$h'(n,m) = H'(m)(n)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

**i)** $\nu : N \longrightarrow P$ bir çaprazlanmış modüldür.

$\nu(p \cdot n) = p \cdot \nu(n)$

$\nu(n \cdot p) = \nu(n) \cdot p$

$\nu(n) \cdot n' = \beta(\nu(n) \cdot n') = \gamma'_n(n') = nn'$

$n \cdot \nu(n') = \beta(n \cdot \nu(n')) = \sigma'_{n'}(n) = nn'$

$\mu : M \longrightarrow P$ hipotezden dolayı bir çaprazlanmış modüldür.

$\chi = \nu\lambda = \mu\lambda' : L \longrightarrow P$ bir çaprazlanmış modüldür.

$\chi(p \cdot l) = \nu\lambda(p \cdot l) = \nu(p \cdot \lambda(l)) = p \cdot \nu(\lambda(l)) = p \cdot \chi(l)$

$\chi(l \cdot p) = \nu\lambda(l \cdot p) = \nu(\lambda(l) \cdot p) = \nu(\lambda(l)) \cdot p = \chi(l) \cdot p$

$\chi(l) \cdot l' = \nu\lambda(l) \cdot l' = \alpha\nu\lambda(l) \cdot l' = \lambda(l) \cdot l' = ll'$

$l \cdot \chi(l') = l \cdot \nu\lambda(l') = l \cdot \alpha\nu\lambda(l') = l \cdot \lambda(l') = ll'$

**ii)** $\lambda$ ve $\lambda'$, $P$ cebirinin etkilerini korur.

$\lambda(p \cdot l) = (\lambda\gamma(p))(l) = (\gamma'(p)\lambda)(l) = \gamma'(p)\lambda(l) = p \cdot \lambda(l)$

$\lambda(l \cdot p) = (\lambda\sigma(p))(l) = (\sigma'(p)\lambda)(l) = \sigma'(p)\lambda(l) = \lambda(l) \cdot p$

$\lambda'(p \cdot l) = p \cdot \lambda'(l)$ ve $\lambda'(l \cdot p) = \lambda'(l) \cdot p$ (**c** den dolayı)

**iii)** $kh(m,n) = kH(m)(n) = H(km)(n) = h(km,n)$

$kh(m,n) = kH(m)(n) = H(m)(kn) = h(m,kn)$

$$kh'(n,m) = kH'(m)(n) = H'(km)(n) = h'(n,km)$$

$$kh'(n,m) = kH'(m)(n) = H'(m)(kn) = h'(kn,m)$$

**iv)** $p \cdot h(m,n) = p \cdot H(m)(n) = H(p \cdot m)(n) = h(p \cdot m, n)$,

$$h(m,n) \cdot p = (H(m)(n)) \cdot p = H(m)(n \cdot p) = h(m, n \cdot p),$$

$$h(m \cdot p, n) = H(m \cdot p)(n) = H(m)(p \cdot n) = h(m, p \cdot n),$$

$$p \cdot h'(n,m) = p \cdot H'(m)(n) = H'(m)(p \cdot n) = h'(p \cdot n, m),$$

$$h'(n,m) \cdot p = (H'(m)(n)) \cdot p = H'(m \cdot p)(n) = h'(n, m \cdot p),$$

$$h'(n \cdot p, m) = H'(m)(n \cdot p) = H'(p \cdot m)(n) = h'(n, p \cdot m).$$

**v)**
$$\begin{aligned} h(m+m',n) &= H(m+m')(n) \\ &= (H(m)+H(m'))(n) \\ &= H(m)(n)+H(m')(n) \\ &= h(m,n)+h(m',n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(m,n+n') &= H(m)(n+n') \\ &= H(m)(n)+H(m)(n') \\ &= h(m,n)+h(m,n') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(n+n',m) &= H'(m)(n+n') \\ &= H'(m)(n)+H'(m)(n') \\ &= h'(n,m)+h'(n',m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(n,m+m') &= H'(m+m')(n) \\ &= (H'(m)+H'(m'))(n) \\ &= H'(m)(n)+H'(m')(n) \\ &= h'(n,m)+h'(n,m') \end{aligned}$$

**vi)** $\lambda h(m,n) = \lambda H(m)(n) = \gamma'_{\mu(m)}(n) = \mu(m) \cdot n$,

$$\lambda h'(n,m) = \lambda H'(m)(n) = \sigma'_{\mu(m)}(n) = n \cdot \mu(m)$$

$$\lambda' h(m,n) = \lambda' H(m)(n) = \sigma''_{\nu(n)}(n) = m \cdot \nu(n),$$

$$\lambda' h'(n,m) = \lambda' H'(m)(n) = \gamma''_{\nu(n)}(n) = \nu(n) \cdot m$$

**vii)** $h(m,\lambda(l)) = H(m)(\lambda(l)) = \gamma_{\mu(m)}(l) = \mu(m) \cdot l,$

$$h'(\lambda(l),m) = H'(m)(\lambda(l)) = \sigma_{\mu(m)}(l) = l \cdot \mu(m)$$

$$h(\lambda'(l),n) = H(m)(\lambda'(l)) = \sigma_{\nu(n)}(l) = l \cdot \nu(n),$$

$$h'(n,\lambda'(l)) = H'(m)(\lambda'(l)) = \gamma_{\nu(n)}(l) = \nu(n) \cdot l$$

**viii)** $n' \cdot h(m,n) = n' \cdot H(m)(n) = (H'(m)(n')) \cdot n = h'(n',m) \cdot n$

$$m' \cdot h'(n,m) = m' \cdot H'(m)(n) = (H(m')(n)) \cdot m = h(m',n) \cdot m \ \square$$

**Örnek 8.1** $(M,P,\mu)$ bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

$$(\eta,\gamma) : (M,P,\mu) \to \mathcal{A}(M,P,\mu)$$

çaprazlanmış modül morfizmi

$$(1,1) : \mathcal{A}(M,P,\mu) \to \mathcal{A}(M,P,\mu)$$

etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış karedir.

**Örnek 8.2** $G$ bir asosyatif cebir olmak üzere, her $g, g^{'} \in G$ için,

$$\begin{array}{rcl} \phi : & G \longrightarrow & Bim(G) \\ & g \longmapsto & \phi(g) = (\gamma_g, \sigma_g) \end{array}$$

olmak üzere, $\gamma_g(g') = gg^{'}$şeklinde tanımlı

$$\gamma_g : G \longrightarrow G$$

ve $\sigma_g(g') = g^{'}g$ şeklinde tanımlı

$$\sigma_g : G \longrightarrow G$$

dönüşümlerinden oluşan $(\gamma_g, \sigma_g)$ ikilisinin G cebirinin iç (inner) çarpanları olarak adlandırılıp ve bütün iç çarpanların kümesi $I(G)$ ile gösterildiğini daha önce belirtmiştik.

$\phi : G \longrightarrow Bim(G)$ cebir homomorfizminin görüntüsü $I(G)$, $Bim(G)$ cebirinin ideali olduğundan aşağıdaki diyagram asosyatif cebirlerin bir karesidir.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi"'] & I(G) \arrow[d, "i"] \\ I(G) \arrow[r, "i"'] & Bim(G) \end{tikzcd}$$

**Örnek 8.3** $(C, G, \delta)$ bir çaprazlanmış modül, $(\eta, \alpha) : (C, G, \delta) \to \mathcal{A}(C, G, \delta)$ dönüşümü bir çaprazlanmış modül homomorfizmi olmak üzere,

$$\text{Gör}(\eta, \alpha) = \text{Gör}\left((\eta_{1C}, \eta_{2C}), \left((\gamma_g, \sigma_g), \left(\gamma'_g, \sigma'_g\right)\right)\right) = \left(E(G,C), \overline{G}, \triangle\right)$$

olup

$$(E(G,C), \overline{G}, \triangle) \trianglelefteq (U(G,C), Bim(C,G,\delta), \triangle)$$

elde edilir. $(E(G,C), \overline{G}, \triangle)$ çaprazlanmış modülünü iç çaprazlanmış modül olarak adlandırıp $I(C, G, \delta)$ ile gösterildiği daha önce belirtilmiştik. $I(C, G, \delta)$, $\mathcal{A}(C, G, \delta)$ aktör çaprazlanmış modülünün bir ideali olduğundan aşağıdaki diyagram çaprazlanmış modüllerin bir karesidir.

$$\begin{tikzcd} (C,G,\delta) \arrow[r, "(\eta{,}\alpha)"] \arrow[d, "(\eta{,}\alpha)"'] & I(C,G,\delta) \arrow[d, "i"] \\ I(C,G,\delta) \arrow[r, "i"'] & \mathcal{A}(C,G,\delta) \end{tikzcd}$$

# 9. AKTÖR KULE VE TAM ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

$(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün annihilatörü sıfır (trivial) ise $(C,G,\delta)$, $\mathcal{A}(C,G,\delta)$ aktör çaprazlanmış modülü içine gömülür. Böylece, herbir terimi trivial annihilatöre sahip olan ve

$$(C,G,\delta) \subseteq \mathcal{A}(C,G,\delta) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{A}(C,G,\delta)) \subseteq \ldots$$

şeklinde herbiri diğerinin içine gömülen çaprazlanmış modüllerin bir dizisi elde edilir. Arvasi ve Ege (2003) çalışmalarında değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleri için bu dizi yardımıyla aktör kule ve tam çaprazlanmış modül yapılarını tanımlamıştır. Bu bölümde asosyatif cebirlerin çaprazlanmış modülleri için aktör kule kavramı inşaa edilip tam çaprazlanmış modül yapısı tanımlanacaktır.

## 9.1 Aktör Kule

**Önerme 9.1** $(C,G,\delta)$, trivial annihilatöre sahipse

$$\mathcal{A}(C,G,\delta) = (U(G,C), Bim(C,G,\delta), \triangle)$$

aktör çaprazlanmış modülü de trivial annihilatöre sahiptir.

**İspat:** $Ann(C,G,\delta) = (Ann_C(G), Ann_G(C) \cap Ann_G(G)) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $Ann_C(G) = 0$ ve $Ann_G(C) \cap Ann_G(G) = 0$ olur. $(d_1,d_2) \in Ann_{U(G,C)}(Bim(C,G,\delta))$ ise $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \in Bim(C,G,\delta)$ için annihilatör tanımından

$$((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \cdot (d_1,d_2) = (0,0)$$

$$(d_1,d_2) \cdot ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) = (0,0)$$

olur ve özel olarak $((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) \in \bar{G}$ için,

$$((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) \cdot (d_1,d_2) = (0,0)$$

$$(d_1,d_2) \cdot ((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) = (0,0)$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda her $g' \in G$ için,

$$\begin{aligned}
\left[((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))\cdot\ (d_1,d_2)\right](g') &= (\gamma_g d_1, d_2\sigma'_g)(g') \\
&= (\gamma_g d_1(g'), d_2\sigma'_g(g')) \\
&= (g\cdot d_1(g'), d_2(g'g)) \\
&= (g\cdot d_1(g'), g'\cdot d_2(g)) \\
&= (d_2(g)\cdot g', g'\cdot d_2(g))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[(d_1,d_2)\cdot((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))\right](g') &= (d_1\gamma'_g, \sigma_g d_2)(g') \\
&= (d_1(\gamma'_g(g')), \sigma_g(d_2(g'))) \\
&= (d_1(gg'), d_2(g')\cdot g) \\
&= (d_1(g)\cdot g', g'\cdot d_1(g))
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir ve böylece

$$d_1(g'), d_2(g') \in \{c\in C \mid g\cdot c = 0\} = Ann_C(G) = 0$$

olduğundan $(d_1,d_2)$ trivialdir. Dolayısıyla,

$$Ann_{U(G,C)}(Bim(C,G,\delta)) = (0,0)$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \in Ann_{Bim(C,G,\delta)}(U(G,C)) \cap Ann_{Bim(C,G,\delta)}(Bim(C,G,\delta))$$

elemanını alalım. Bu durumda, $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \in Ann_{Bim(C,G,\delta)}(U(G,C))$ olduğundan $(d_1,d_2)\in U(G,C)$ için,

$$((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(d_1,d_2) = (0,0)$$

$$(d_1,d_2)\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) = (0,0)$$

sağlanır ve özel olarak, $(\eta_{1C},\eta_{2C}) \in E(G,C)$ için

$$((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\cdot(\eta_{1C},\eta_{2C}) = (\eta_{1\gamma(c)},\eta_{2\gamma(c)}) = (0,0)$$

$$(\eta_{1C},\eta_{2C})\cdot((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) = (\eta_{1\sigma(c)},\eta_{2\sigma(c)}) = (0,0)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\eta_{1\gamma(c)}(g) &= 0(g) \\
\gamma(c)\cdot g &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{2\gamma(c)}(g) &= 0(g) \\ g\cdot\gamma(c) &= 0 \\ \eta_{1\sigma(c)}(g) &= 0(g) \\ \sigma(c)\cdot g &= 0 \\ \eta_{2\sigma(c)}(g) &= 0(g) \\ g\cdot\sigma(c) &= 0 \end{aligned}$$

ve $Ann_C(G) = 0$ olduğundan, her $c \in C$ için $\gamma(c) = 0$, $\sigma(c) = 0$ olup, $(\gamma,\sigma) = (0,0)$ elde edilir. Ayrıca, $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \in Ann_{Bim(C,G,\delta)}Bim(C,G,\delta)$ olduğundan, $((\bar{\gamma},\bar{\sigma}),(\bar{\gamma}',\bar{\sigma}')),((\bar{\gamma},\bar{\sigma}),(\bar{\gamma}',\bar{\sigma}')) \in Bim(C,G,\delta)$ için

$$((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\bar{\gamma},\bar{\sigma}),(\bar{\gamma}',\bar{\sigma}')) = ((0,0),(0,0))$$

$$((\bar{\gamma},\bar{\sigma}),(\bar{\gamma}',\bar{\sigma}'))\circ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) = ((0,0),(0,0))$$

sağlanır ve özel olarak, $((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) \in \bar{G}$ için,

$$((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma'))\circ((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g)) = ((\gamma\circ\gamma_g,\sigma_g\circ\sigma),(\gamma'\circ\gamma'_g,\sigma'_g\circ\sigma')) = ((0,0),(0,0))$$

olur ve buradan $\gamma\circ\gamma_g = 0, \sigma_g\circ\sigma = 0, \gamma'\circ\gamma'_g = 0$ ve $\sigma'_g\circ\sigma' = 0$ elde edilir.

$$(\gamma'\circ\gamma'_g)(g') = \gamma'(gg') = \gamma'(g)\cdot g' = 0$$

$$(\sigma'_g\circ\sigma')(g') = \sigma'_g(g')\cdot g = g'\cdot\gamma'(g) = 0$$

eşitliklerinden

$$\gamma'(g) \in Ann_G(G)$$

elde edilir.

$$((\gamma_g,\sigma_g),(\gamma'_g,\sigma'_g))\circ((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) = ((\gamma_g\circ\gamma,\sigma\circ\sigma_g),(\gamma'_g\circ\gamma',\sigma'\circ\sigma'_g)) = ((0,0),(0,0))$$

olur ve buradan $\gamma\circ\gamma_g = 0, \sigma_g\circ\sigma = 0, \gamma'\circ\gamma'_g = 0$ ve $\sigma'_g\circ\sigma' = 0$ elde edilir.

$$(\gamma'_g\circ\gamma')(g') = g\cdot\gamma'_g(g') = \sigma'(g)\cdot g' = 0$$

$$(\sigma'\circ\sigma'_g)(g') = \sigma'(g'g) = g'\cdot\sigma'(g) = 0$$

eşitliğinden

$$\sigma'(g) \in Ann_G(G)$$

elde edilir. Ayrıca, $((\gamma,\sigma),(\gamma',\sigma')) \in Bim(C,G,\delta)$ ise

$$\begin{aligned}
\gamma(g\cdot c) &= \gamma'(g)\cdot c\\
\sigma(g\cdot c) &= \sigma(g)\cdot c\\
g\cdot\gamma(c) &= \sigma'(g)\cdot c\\
\gamma(c\cdot g) &= g\cdot\gamma(c)\\
\sigma(c\cdot g) &= c\cdot\sigma'(g)\\
\sigma(c)\cdot g &= c\cdot\gamma'(g)
\end{aligned}$$

ve $(\gamma,\sigma)=(0,0)$ olduğundan $\gamma'(g)\cdot c=0, c\cdot\gamma'(g)=0$, ve

$$\gamma'(g)\in Ann_G(C)$$

$\sigma'(g)\cdot c=0, c\cdot\sigma'(g)=0$ olduğundan

$$\sigma'(g)\in Ann_G(C)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\gamma'(g),\sigma'(g)\in Ann_G(G)\cap Ann_G(C)=0$$

olduğundan $(\gamma'_g,\sigma'_g)=(0,0)$ bulunur. Böylece,

$$Ann_{Bim(C,G,\delta)}(U(G,C))\cap Ann_{Bim(C,G,\delta)}(Bim(C,G,\delta))=((0,0),(0,0))$$

elde edilir ve $\mathcal{A}(C,G,\delta)$ aktör çaprazlanmış modülünün annihilatörünün,

$$(Ann_{U(G,C)}(Bim(C,G,\delta)),Ann_{Bim(C,G,\delta)}(U(G,C))\cap Ann_{Bim(C,G,\delta)}(Bim(C,G,\delta)))$$
$$=((0,0),((0,0),(0,0)))$$

olduğu görülür.

Böylece, trivial annihilatöre sahip bir $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modül yardımıyla çaprazlanmış modüllerin bir dizisi oluşturulabilir. □

**Tanım 9.2** $(C,G,\delta)$, trivial annihilatöre sahip bir çaprazlanmış modül olmak üzere, herbir terim diğerinin içine gömülecek şekilde oluşturulan çaprazlanmış modüllerin

$$(C,G,\delta)\subseteq\mathcal{A}(C,G,\delta)\subseteq\mathcal{A}(\mathcal{A}(C,G,\delta))\subseteq\dots$$

dizisine $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün **aktör kulesi** denir.

## 9.2 Tam Çaprazlanmış Modül

**Tanım 9.3** $Ann((C,G,\delta)) = (0,0)$ ve $(C,G,\delta) \longrightarrow \mathcal{A}(C,G,\delta)$ örten homomorfizm ise $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülüne **tam çaprazlanmış modül** denir.

Bir aktör kule, bir tam çaprazlanmış modüle ulaştığında sonlanır.

$\mathcal{A}(C,G,\delta) = I(C,G,\delta)$ ise $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülü yarı-tam olarak tanımlanabilir. Dolayısıyla, trivial annihilatörlü bir yarı-tam çaprazlanmış modül tamdır.

## 9.3 Tam Çaprazlanmış Modül Örnekleri

1. $I, G$ cebirinin ideali olmak üzere $i : I \longrightarrow G$ çaprazlanmış modülünün tam olabilmesi için gerek ve yeter şart $Ann_G(G) = 0$ ve $Bim(G) = I(G)$ olması yani, $G$ cebirinin tam olmasıdır. Böylece, $G$ tam ise, $G$ cebirinin $I$ ideali için $(I,G,i)$ çaprazlanmış modülü tamdır. Dolayısıyla $I = 0$ veya $I = G$ alırsak, bir çaprazlanmış modül olarak kabul edeceğimiz bir tam cebir , bir tam çaprazlanmış modüldür.

2. $(C,G,\delta)$ basit bağlantılı çaprazlanmış modülünün tam olabilmesi için gerek ve yeter şart $C$ cebirinin tam ve $G$ cebirine izomorf olmasıdır.

# 10. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bir asosyatif cebirin diğeri üzerine etkisinin bileşik çarpım kavramıyla verildiği literatürde yer almaktadır. Bu tez çalışmasında bir asosyatif cebirin genelleştirilmesi olarak düşünülebilen çaprazlanmış modül kavramı için etki kavramının çaprazlanmış modüllerin bileşik çarpımı oluşturularak elde edilen aktör çaprazlanmış modül ile verildiği sonucuna varılmıştır.

Daha açık olarak asosyatif cebirler üzerinde $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün kendi üzerine etkisinin $(C,G,\delta) \longrightarrow \mathcal{A}(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modül homomorfizması yardımıyla verilebileceği görülmüştür. Bu dönüşümün çekirdeğinin $(C,G,\delta)$ çaprazlanmış modülünün sıfırlayıcısı kavramına karşılık geldiği saptanmış ve buradan aktör kule ve tam çaprazlanmış modül tanımlamalarının yapılması mümkün olmuştur.

Ayrıca bir çaprazlanmış modülün farklı bir çaprazlanmış modül üzerine etkisi verilerek etki kavramı ile çaprazlanmış kare arasındaki ilişki açıklanmıştır.

Bir cebir homomorfizması ideali ideale taşımayabilirken bu sonucun çaprazlanmış kare yardımıyla çaprazlanmış modül idealleri için sağlandığı görülmüştür.

Böylece bileşik çarpım kavramının asosyatif cebirler için çaprazlanmış modül içeriğine genellemesi sunulmuştur.

Bir küçük $R-$kategori,$R-$cebiroid ve özel olarak tek objeli bir $R-$cebiroid asosyatif bir $R-$cebir olduğundan cebiroidler için benzer problem çalışılarak etki kavramına karşılık gelen yapı araştırılarak bu çalışmanın bir genellemesi yapılabilir.

Ayrıca bileşik çarpım kavramıyla açıklanan etki kavramının yer aldığı teorilerde uygulama alanı bulunabilir.

**KAYNAKLAR DİZİNİ**

Arvasi, Z., Ege, U., 2003, Annihilators, Multipliers and Crossed Modules, Applied Categorical Structures, 11 , p. 487-506.

Arvasi, Z., Porter, T., 1996, Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras, Journal of Algebra, 181, p. 426-448.

Arvasi, Z., Porter, T., 1998, Freeness Conditions for 2-Crossed Modules of Commutative Algebras, Applied Categorical Structures, 6, p. 455-471.

Boyacı, 2012, İnterest .Kategorileri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, s. 26-33.

Boyacı, Y., Casas, J.M., Datuashvili, T., Uslu, E. Ã–., 2015, Actions in Modified categories of interest with application to crossed modules. Theory and applications of Categories, Vol. 30, No. 25, p. 882-908.

Brown, R., 1982, Higher Dimensional Group Teory, Low Dimensional Topology, London Math. Soc. Lecture Note Series, 48, p. 215-238.

Brown, R., 1984, Coproducts of Crossed P-modules, Applications to Second Homotopy Groups and to the Homology of Groups, Topology, 23, p. 337-345.

Brown, R., Higgins, P.J., 1982, The Algebra of Cubes, Low Dimensional Topology, London Math. Soc. Lecture Note Series, 48, p. 153-202.

Brown, R., Higgins, P.J., 1981, Colimit Theorems for Relative Homotopy Groups, J. Pure Appl. Algebra, 22, p. 249-370.

Brown, R., Huebschmann, J., 1981, Identities among Relations, J. Pure Appl. Algebra, 21, p. 233-260.

Brown, R., Loday, J.L., 1987, Van Kampen Theorems for Diagrams of Spaces, Topology, 26, p. 311-335.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

Brown, R., Loday, J.L., 1987, Homotopical Excision and Hurewicz Theorems for n-cubes of Spaces, Proc. London Math. Soc., (3) 54, p. 176-192.

Casas, J.M., Datuashvili, T., Ladra, M., 2007, Actors in categories of interest, arXiv:math/0702574v2.

Casas, J.M., Datuashvili, T., Ladra, M., 2010, Universal strict general actors and actors in categories of interest, Appl. Categ. Structures, 18(1), p. 85-114.

Casas, J.M., Ladra, M., 1995, The actor of a crossed module in Lie algebras, Communications in Algebra, 25(5), p. 1625-1644.

Dedecker, P., Lue, A.S.-T., 1966, A non-abelian two-dimensional cohomology for associative algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (6) , p. 1044-1050.

Ellis, G.J., 1988, Higher Dimensional Crossed Modules of Algebras, J. Pure Appl. Algebra, 52, p. 277-282.

Ellis, G.J., 1984, Crossed Modules and Their Higher Dimensional Analogues, University of Wales Ph. D. Thesis.

Gerstenhaber, M., 1966, On the Deformation of Rings and Algebras, Ann. Math. p. 84.

Guin-Walery, D, Loday, J.L, 1981, Obstructions Áléxcision en K-théorie Algébrique, Springer Lecture Notes in Mathematics, 854, p. 179-216.

Lavendhomme, R., Lucas, Th., 1996, On Modules and Crossed Modules, Journal of Algebra, 179, p. 936-963.

Lichtenbaum, S., Schlessinger, M., 1967, The Cotangent Complex of a Morphism, Trans. American Society, p. 128, 41-70.

Lue, A.S.-T., 1979, Semi-Complete Crossed Modules and Holomorphs of Groups, Bull.London Math.Society, 11, p. 8-16.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**


Mac Lane, S., 1958, Extensions and Obstructions for Rings, Illinois J. Math., 2, p. 316-345.

Norrie, K.J., 1987, Crossed Modules and Analogues of Group Teorems, Ph.D.Thesis, King's College.

Norrie, K.J., 1990, Actions and automorphisms of crossed modules, Bull. Soc. Math. France, 118(2), p. 129-146.

Odabaş, A., Ulualan, E., 2016, Crossed Modules of Algebras as Ideal Maps, arXiv:1602.02482v1

Porter, T., 1986, Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles, J. Algebra, 99, p. 458-465.

Porter, T., 1993, N-Types of simplicial Groups and Crossed N-Cubes, Topology, 32 (1), p. 5-24.

Shammu, N.M., 1992, Algebraic and Categorical Structure of Category of Crossed Modules of Algebras, Ph.D. Thesis, U.C.N.W.

Whitehead, J.H.C., 1949, Combinatorial Homotopy II, Bull. American Math. Society, 55, p. 453-456.

## ÖZGEÇMİŞ

Serdar Hürmetli 1981 yılında Eskişehir'de doğmuştur. Lise öğrenimini 1999 yılında Prof. Dr. Orhan Oğuz Lisesi süper lise bölümünde tamamlayıp 2000 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başlamıştır. Üniversite öğreniminin ikinci yılında Prof Dr. Zekeriya ARVASİ'den aldığı ve başarılı olduğu Soyut Cebir dersinden sonra akademik kariyeriyerini Cebir ve Sayılar Teorisi bilim dalında yapma kararı almıştır.

2004 yılında üniversiteden bölüm birincisi olarak mezun olup aynı yıl Eskişehir Osmangazi Üniversitesi'nde Cebir ve Sayılar Teorisi anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsünde ise tezsiz yüksek lisans öğremine başlayarak matematikçi ünvanına matematik öğretmeni ünvanını eklemiştir. 2008 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi'nde Cebir ve Sayılar Teorisi anabilim dalında doktora öğrenmine başlamış olup 2007-2009 yılları arasında Bozüyük Uğur Dersanesinde matematik öğretmenliği yapmıştır

Kendisi 2010'da Milli Eğitim Bakanlığına bağlı matematik öğretmeni olarak atanıp 2010-2012 yılları arasında Akyazı Ticaret Meslek Lisesi'nde çalışmış olup, 2012 den günümüze kadar da Sarıcakaya Çok Programlı Anadolu Lisesi'nde matematik öğretmenliği yapmaktadır.