

Laplace Denkleminin Sonlu Farklar Yöntemiyle Sayısal Çözümleri
ve Fiziksel Uygulamaları

Tülay Uğur

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizik Anabilim Dalı

Ağustos 2016

Numerical Solution of Laplace Equation by Finite Differences Method
and Physical Applications

Tülay Uğur

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Physics

August 2016

Laplace Denkleminin Sonlu Farklar Yöntemiyle Sayısal Çözümleri
ve Fiziksel Uygulamaları

Tülay Uğur

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Fizik Anabilim Dalı
Katıhal Fiziği Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ömer Özbaş

Ağustos 2016

ONAY

Fizik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Tülay Uğur' un YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Laplace Denklemine Sonlu Farklar Yöntemiyle Sayısal Çözümleri ve Fiziksel Uygulamaları” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ömer Özbaş

İkinci Danışman : —

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ömer Özbaş

Üye : Doç. Dr. Huriye Senem Aydoğu

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa Akarsu

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Yrd. Doç. Dr. Ömer Özbaş danışmanlığında hazırlamış olduğum “Laplace Denkleminin Sonlu Farklar Yöntemiyle Sayısal Çözümleri ve Fiziksel Uygulamaları” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

25/08/2016

Tülay Uğur

ÖZET

Gelişen teknoloji, sayısal hesaplamaların günümüzdeki önemini arttırmıştır. Çoğu araştırma merkezlerinde deney öncesi veya deneyle paralel olan sayısal hesaplamalar yoğun olarak kullanılmaktadır.

Bir fiziksel problemin çözümü, genellikle bir diferansiyel denklemin çözümünü gerektirir. Bunun için önce matematiksel formülasyon ortaya konulur, ardından bu formülasyon bilinen sayısal yöntemlerden, probleme uygun olan biri ile çözülür.

Bu çalışmada, homojen bir malzeme için iki boyutta, kararlı durumda, ısı kaynağının bulunmadığı ısı geçiş problemi için ısı iletimi denkleminin indirgenen Laplace Denklemi' nin sonlu farklar yöntemi ile çözümleri araştırılmıştır. Bu çözümlerde, fizik ve mühendislikte yaygın olarak kullanılan, farklı sınır şartlarına sahip örnekler ele alınmıştır. Bu örneklerde, iç sıcaklık değerleri bulunmak istenen Dirichlet ve Neumann sınır şartlarına ve düzensiz sınırlara sahip levhalar, uygun aralıklarla bölünerek örgü ağı oluşturulmuştur. Ardından Laplace denkleminin sonlu fark ifadeleri oluşturulmuş ve bu ifadeler lineer denklem sistemine dönüştürülmüştür. Daha sonra örgü ağı noktalarının potansiyel değerleri, lineer denklem sistemlerinin çözümlerinde kullanılan yöntemlerden biri olan Gauss yok etme yöntemi ile hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Laplace Denklemi, sonlu farklar, Gauss yok etme yöntemi, iteratif yöntemler, Neumann problemi, Dirichlet problemi.

SUMMARY

Developing technology, has enhanced the importance of numerical calculations today. In most research centers, numerical calculations used intensely, pre-experiment or parallel to experiments.

The solution to a physical problem, usually requires the solution of a differential equation. Therefore the mathematical formulation is put out to, then this formulation solved with known numerical methods suitable for the problem.

In this study, numerical solutions of Laplace equation by finite differences method was considered that induced from heat transfer equation in two dimensional steady state heat transfer problem without heat generation. In these solutions, examples were discussed widely used in physics and engineering have different types of boundary conditions. In these examples, plates that internal temperature values desired, having Dirichlet and Neumann boundary conditions and irregular boundaries, by dividing appropriate intervals, mesh network was confirmed. Then, Laplace equation's finite differences expressions were constituted and these expressions were converted into a system of linear equations. Then, the potential values of points of mesh network, were calculated by Gauss elimination method that one of the method used to solve linear equation systems.

Keywords: Laplace Equation, finite differences, Gauss elimination method, iterative methods, Neumann problem, Dirichlet problem.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitim sürecim boyunca, tez konumun belirlenmesinden, araştırma aşamasına, tez yazımından savunma aşamasına dek, değerli bilgilerinden yararlandığım, bana her konuda yön veren, tüm olanakları sağlayan, mazeretlerimi anlayışla karşılayan ve desteğini esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ömer Özbaş' a bana ayırdığı değerli zamanı ve anlayışı için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	3
3. TEMEL KAVRAMLAR	6
3.1 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler	6
3.1.1 Başlangıç ve sınır şartları	7
3.1.2 Kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması	8
3.1.3 Kısmi diferansiyel denklemlerin fizikteki yaygın örnekleri	9
3.2 Laplace Denkleminin Analitik Çözümü	12
3.2.1 Kartezyen koordinatlarda kararlı durum sıcaklığının bulunması	12
4. MATERYAL VE YÖNTEM	16
4.1 Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümünde Sayısal Yöntemler	17
4.1.1 Lineer denklem sistemlerinin direk çözüm yöntemleri	17
4.1.1.1 <u>Gauss yok etme yöntemi</u>	17
4.1.1.2 <u>Gauss-Jordan yöntemi</u>	20
4.1.1.3 <u>LU ayrıştırma yöntemi</u>	22
4.1.2 Lineer denklem sistemlerinin iteratif (yinelemeli) çözüm yöntemleri	25
4.1.2.1 <u>Jacobi iterasyon yöntemi</u>	25
4.1.2.2 <u>Gauss-Seidel iterasyon yöntemi</u>	26
4.1.2.3 <u>Rölaksasyon yöntemi: SOR (Successive over relaxation)</u>	27
4.1.2.4 <u>İterasyon yöntemlerinde yakınsama</u>	28
4.2 Sonlu Fark Yaklaşımı	31

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

4.2.1 Türevlere sonlu fark yaklaşımı	31
4.2.1.1 <u>Merkezi sonlu fark türevleri</u>	32
4.2.1.2 <u>İleri ve geri sonlu fark türevleri</u>	34
4.2.1.3 <u>Hata mertebesinin arttırılması</u>	36
4.2.2 Çok değişkenli fonksiyonlar için sonlu fark türevleri	38
5. LAPLACE DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ	43
5.1 Laplace Denklemi İçin Sonlu Fark Formülleri	43
5.2 Dirichlet Problemi ve Liebmann Yöntemi	45
5.3 ADI Yöntemi	46
5.3.1 ADI yönteminde yakınsaklığın arttırılması	48
5.4 Neumann Problemi ve Düzensiz Sınırlar	49
5.4.1 Türevli sınır koşulları	49
5.4.2 Düzensiz sınırlar	51
5.5 Laplace Operatörünün Üç Boyutta Sonlu Farklar İle İfadesi	53
6. FİZİKSEL UYGULAMALAR	55
6.1 Dirichlet Sınır Koşuluna Sahip Bir Kare Levhada Sıcaklık Dağılımının Bulunması	55
6.2 Düzensiz Sınırlara Sahip Levhada Sıcaklık Dağılımının Bulunması	60
6.3 Karma Sınır Koşuluna Sahip Levhada Sıcaklık Dağılımının Bulunması	67
6.4 ADI Yöntemiyle Bir Kare Levhada Sıcaklık Dağılımının Bulunması	73
7. BULGULAR VE TARTIŞMA	81
8. SONUÇ VE ÖNERİLER	82
KAYNAKLAR DİZİNİ	83

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1 Sayısal analizde bilgisayar destekli matematiksel modelleme süreci	1
3.1 Kararlı durumda dikdörtgen levha için sınır değerleri	13
4.1 Yaklaşık ileri fark türevler için şematik gösterim	32
4.2 Sonlu fark türevlerinin şematik gösterimi	35
4.3 İki boyutlu sürekli D bölgesinin ağ (kesikli) yapısı	39
4.4 Bazı kısmi türevlerin sonlu fark denklemlerinde sayısal katsayıların eşel gösterimi	41
4.5 Genel iki boyutlu operatörler için sayısal katsayıların eşel gösterimi	42
5.1a Bir nokta etrafındaki sonlu fark gösterimi, $k = h$ durumunda gösterim	45
5.1b Bir nokta etrafındaki sonlu fark gösterimi, yönlerden yararlanılarak gösterim	45
5.2 Laplace denklemi için 5-nokta eşel gösterimi	45
5.3 h mesafeli örgü noktalarının oluşturduğu ağ içerisinde bir bölge ve $p_{ij} = (ih, jh)$ örgü noktaları	46
5.4a Neumann eşel gösterimleri, alt kenar için Laplace formülü sayısal katsayıları	50
5.4b Neumann eşel gösterimleri, üst kenar için Laplace formülü sayısal katsayıları	50
5.4c Neumann eşel gösterimleri, sol kenar için Laplace formülü sayısal katsayıları	50
5.4d Neumann eşel gösterimleri, sağ kenar için Laplace formülü sayısal katsayıları	50
5.5 Bir D bölgesinde, eğimli C sınırı yakınındaki O örgü noktası ve bu noktaya komşu A, B, P, Q noktaları	51
5.6 Örgü noktası O ve farklı uzaklıklardaki komşu noktaları	52
5.7 Üç boyutlu Laplace denklemi için elde edilen eşel modeli.....	54
6.1 Dirichlet sınır şartları verilmiş kare levha	55
6.2 Dirichlet sınır şartları verilmiş kare levhanın, bulunan sıcaklık dağılımına göre grafiksel modellemesi	59
6.3 Düzensiz sınırlara sahip ısıtılan levha	60
6.4 Isıtılan levhanın sol alt düzensiz sınır	61
6.5 Isıtılan levhada sol alt düzensiz sınırı için katsayı eşel modeli	62
6.6 Isıtılan levhada sağ üstteki düzensiz sınır	63
6.7 Isıtılan levha için sağ üstteki düzensiz sınırın katsayı eşel modeli	64
6.8 Düzensiz sınırlara sahip levhanın, bulunan sıcaklık dağılımına göre grafiksel modellemesi	66
6.9 Sınırları Neumann ve Dirichlet sınır koşuluyla verilen kare levha	67

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
6.10 Karma sınır şartlarına sahip levhanın, bulunan sıcaklık dağılımına göre grafiksel modellemesi	73
6.11 ADI yöntemi ile sıcaklık değerleri bulunan levhanın, sıcaklık dağılımına göre grafiksel modellemesi	80

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Cizelge</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 Kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması	9
4.1 $O(h^2)$ mertebesindeki merkezi sonlu fark yaklaşımlarının katsayıları	34
4.2a $O(h)$ mertebesindeki ileri sonlu fark yaklaşımları için katsayılar	36
4.2b $O(h)$ mertebesindeki geri sonlu fark yaklaşımları için katsayılar	36
4.3a $O(h^2)$ mertebesindeki ileri sonlu fark yaklaşımları için katsayılar	38
4.3b $O(h^2)$ mertebesindeki geri sonlu fark yaklaşımları için katsayılar	38

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$ A = \det A$	A matrisinin determinanı
A^{-1}	A matrisinin ters (inverse) matrisi
c	Özgül ısı
D	Diferansiyel denklemin sınırlı olduğu çözüm alanı
\hat{n}	D bölgesi sınırlarından, dışarıya yönelmiş birim normal vektör
$\vec{\nabla}$	Nabla (del) vektör diferansiyel operatörü
∇^2	Laplasyen operatörü
$\frac{\partial}{\partial x}$	x değişkenine göre birinci mertebeden kısmi türev operatörü
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$	x değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türev operatörü
u_x	u fonksiyonunun x değişkenine göre kısmi türevi
u_{xx}	u fonksiyonunun x değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türevi
u'	u fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
u''	u fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
u'''	u fonksiyonunun üçüncü mertebeden türevi
L	Lineer diferansiyel operatör
Δ	Diskriminant fonksiyonu
$\hat{e}_{x,y,z}$	Yönlü birim vektörler
ϑ	Dalga yayılma hızı
κ	Dalga sayısı
ρ	Yoğunluk
k	Isı iletim katsayısı
ω	Açısal frekans

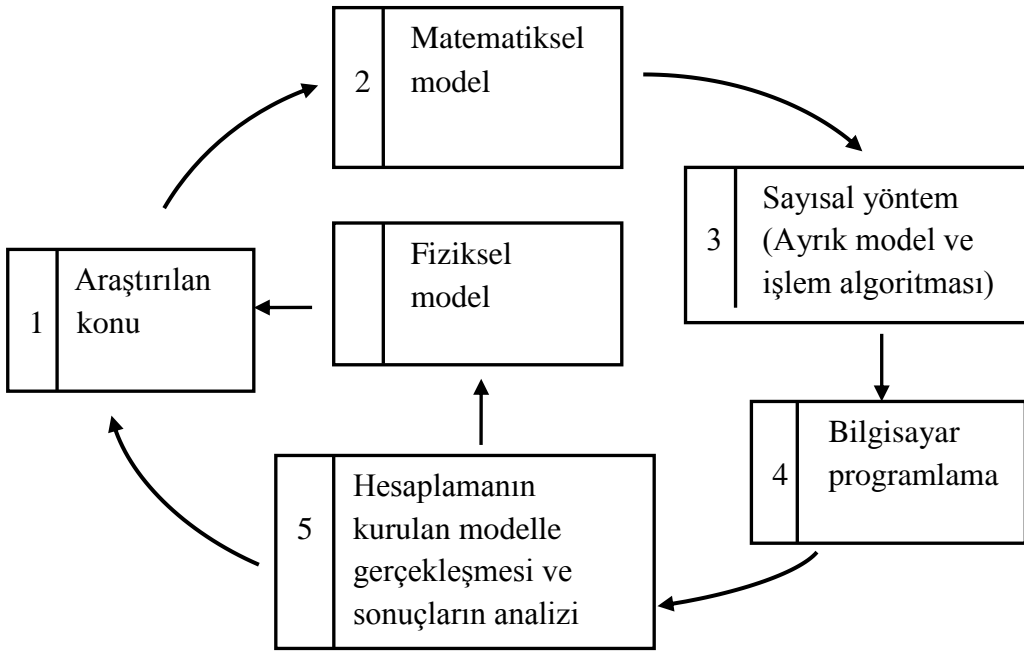
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\Delta x, \Delta y$	Her bir örgü noktası arasındaki yatay ve dikey uzaklık
p_{ij}	(i, j) . örgü noktası
$O(h)$	Kesme hatası
$O(h^n)$	n . mertebeden kesme hatası
u_{ij}	(i, j) . örgü noktasında, u fonksiyonunun değeri
$u^{(n)}$	u fonksiyonunun n . iterasyon değeri
T	Sıcaklık
t	Zaman
μ	Rölaksasyon katsayısı
ε	İki ardışık iterasyon değeri arasındaki fark
u_D	u fonksiyonunun Dirichlet sınır şartı
u_N	u fonksiyonunun Neumann sınır şartı

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
ADI	Alternating direction implicit
br.	Birim
M.Ö.	Milattan önce
$rank(A)$	A matrisinin rankı
SOR	Rölaksasyon yöntemi (Successive over relaxation)

1. GİRİŞ

Sayısal (nümerik) analiz, klasik matematiğin bir dalı olmakla birlikte, çeşitli bilim dallarında fiziksel modellerin analitik çözümünün zahmetli, uzun ya da uygulama açısından karmaşık olduğu durumlarda kolaylık sağlamaktadır. Sayısal analizin içeriğini, matematiksel olarak ifade edilebilen, matematik modeli kurulabilen, bilimsel ve teknolojik problemlerle ilgili, yaklaşık çözüm yöntemlerinin kurulması ve incelenmesi oluşturur. Karşılaşılan bir problemin çözüm sürecine ait şema Şekil 1.1' de verilmiştir (Amirali ve Duru, 2002).



Şekil 1.1. Sayısal analizde bilgisayar destekli matematiksel modelleme süreci (Amirali ve Duru' dan, 2002).

Belli bir fiziksel nesnenin veya sürecin (proses), incelenme aşamaları göz önüne alındığında, önce söz konusu süreçle ilgili kanunlar ve faktörler araştırılarak fiziksel bir yaklaşım yapılır. Daha sonra uygun matematik model kurulur. Fizikte uygun matematik modeller temelde, kısmi diferansiyel denklemler, integral ve integro-diferansiyel

denklemlerle ifade edilirler. Bu denklemler, bir anlamda fizik yasalarının (enerjinin korunumu, kütlenin korunumu, vb.) matematiksel ifadeleri olup, çoğunlukla lineer değildirler. Dolayısıyla bunların kesin çözümlerine ulaşılması ancak çok özel durumlar için söz konusu olabilir. Gerçek matematik modelin çözümüne başlamadan önce, problemin bazı matematiksel özelliklerinin (çözümünün varlığı, tekliği, kararlılığı vb.) araştırılması gerekmektedir. Daha sonraki adımlarda uygun bir sayısal algoritma seçilir ve bunun bilgisayarda gerçekleştirilmesi yapılır. Sayısal sonuçların alınmasından sonra, bunların çözümlenmesine geçilir. Başlangıçta sunulan model çok kaba olup, fiziksel deney sonuçlarıyla fazla uyum sağlayabilir. Böyle durumlarda matematik model üzerinde düzenlemeler yapılarak, model mükemmelleştirilir ve süreç baştan ele alınır. Gerekli hallerde sayısal yöntemde de düzenleme yapılabilir.

Günümüzde, ilgilenilen süreçlerin daha detaylı incelenmesi için daha karmaşık matematiksel modellere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tip modellerin gerçekleştirilmesi ise, sayısal analiz yöntemleri ve bunlara paralel olarak ortaya çıkan bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler sayesinde mümkün olmaktadır. Pratik olarak, her matematik problemin çözümünün, önceden istenen kesinlikte bulunması mümkündür. Ayrıca karmaşık fizik süreçleri ile doğada karşılaşılan başka süreçlerin matematik modelleri, araştırmacılar için etkili bir araç haline gelmiş ve bilgisayar programlama ile birlikte düşünüldüğünde, gelişen elektronik ve veri teknolojileriyle önemli bir konuma sahip olmuştur (Amirali ve Duru, 2002).

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Evrende karşılaşılan birçok probleme çözüm bulma arayışı, eski tarihlerden beri matematiksel çalışmaların kaynağı olmuştur. Kesin sonucuna ulaşılamamış veya sonucu uygulama için elverişli olmayan pek çok çözüm için, makul hesap basamağına sahip iyi birer yaklaşım sağlayan sayısal yöntemler kullanılabilmektedir.

Sayısal yöntemlerin birçoğu, uzun bir geçmişe sahiptir. Babillerin, yaklaşık 3700 yıl öncesinde kuadratik denklemlerin sayısal çözümlerinin nasıl bulunacağını ve karekök yaklaşımlarını bildiklerine dair kanıtlar bulunmaktadır. Ayrıca bileşik faiz içeren problemleri çözmek için lineer interpolasyon kullandıkları da bilinmektedir (Fausett, 2008).

Lineer denklem sistemlerini çözmek için kullanılan matris gösteriminin kullanıldığı Gauss yok etme yöntemine, Han Hanedanlığı'ndan (yaklaşık 2000 yıl önce) bir Çin el yazması kitapta (Nine Chapters) rastlanmıştır. Ünlü Alman matematikçi Carl Frederic Gauss' un (1777-1855), kendi adıyla anılan yöntemi hala kullanılmaktadır.

Song Hanedanlığı dönemi boyunca (960-1279) Çin matematiğinde, Nine Chapters' dan alınan ardışık yaklaşım metotları yaygınlaşmış ve yüksek dereceli denklemlerin çözümüne ulaşmak için kullanılmıştır. Ayrıca lineer denklem sistemlerinde kullanılan matris çözüm teknikleri de, yüksek dereceden denklemler için genişletilmiştir (Benzer bir yaklaşım üzerinde, Batı' da 19. yüzyılda çalışılmıştır).

Yunan matematiğinde, alan hesabında, alanı çok sayıda bölgeye ayırarak çözüm aranmakta ve bu yaklaşım hacim için de kullanılmaktaydı. Arşimet' in Aristoteles' e yazdığı (M.Ö. 250) ve 1906 yılında keşfedilmiş olan bir mektupta, bu sayısal yöntemlerden bahsedilmiştir. Nitekim Arşimet, eğrisel yüzeyli cisimlerin alanını, hacmini ve π sayısını hesaplamış, sayısal hesaplamalarda “en küçük” kavramını kullanmıştır.

Orta Doğu' daki bilim insanlarının, Yunan matematiğinden süregelen alışkanlıkları devam ettirmesi, hesaba dayalı pratik yöntemler üzerinde durulmasını sağlamıştır. Dokuz

yüz yıl önce yaşamış olan Ömer Hayyam, kübik denklemlerin sistematik olarak incelenmesini de içeren bir matematik tezi yazmıştır (Ömer Hayyam daha çok "Rubaiyat" isimli eseri ile tanınmıştır). Kübik denklemleri iteratif (yinelemeli) ve trigonometrik yöntemler ile çözen diğer bir Persli matematikçi Giyaseddin Cemşid Al-Kaşi (1380-1436), genel denklem çözümü için kullanılan ve günümüzde Horner Yöntemi olarak bilinen yöntemi kullanmaktaydı. William George Horner 1819' da bu yöntemi yayınladığında, yöntemin geçmişinden habersiz olduğu düşünülmektedir (Fausett, 2008).

Bir denklemin köklerini bulmak için yaygın olarak kullanılan, 1700' lerin başlarında yayınlanmış Newton (Newton-Raphson) Yöntemi, polinom köklerini bulmak için kullanılan iteratif yaklaşımın özel halidir. Thomas Simpson (sonlu integrallerin sayısal çözüm yaklaşımı olan Simpson Kuralı ile bilinmektedir), Newton yöntemini daha genel fonksiyonlar için derleyerek, sonuçlarını 1740' da yayınlamıştır.

Taylor denklemi, birçok sayısal tekniğin temelini oluşturmaktadır. Taylor polinomları Brook Taylor tarafından 1715 yılında yayınlanan bir makalede sunulmuş ve 1797' de Joseph Louis Lagrange tarafından artık terim kavramının kullanılmasıyla, önemi ve kullanılabilirliği artmıştır.

Adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için çok kullanılan bir yöntem olan Runge-Kutte yöntemi ise, Alman matematikçi Carl Runge (1856-1927) ve Martin Wilhelm Kutta (1867-1944) tarafından geliştirilmiştir. C. Runge aynı zamanda Zeeman etkisi üzerindeki çalışması ile; M.W. Kutta ise aerodinamikte taşıyıcı kanat profili teorisindeki katkıları ile bilinmektedir.

Günümüzde kullanılan hesap makineleri, Blaise Pascal' ın basit tasarımlı toplama makinesini (1642) ve Gottfried Wilhelm Leibniz' in çarpma makinesini (1671) temel almıştır. Diğer yandan bilgisayarların kökeni çoğunlukla Charles Babbage' nin 1830' larda geliştirdiği analitik makinesine dayanmaktadır. Kişisel bilgisayarların (PC veya Mac) bütün olarak gelişimi ise esasen 1980' lerden itibaren olmuştur.

Yukarıda bahsedilen klasik sayısal yöntemler, bilgisayar yazılımları için önemini sürdürmesine rağmen, modern hesabın tercih edilen yöntemleri genellikle son buluşlar ve

gelişmelerdir. Brent yöntemi (1973) ve Ridders yöntemi (1979) gibi, tek fonksiyonun kökünü bulmada kullanılan yazılım paketleri bulunmaktadır. Zorlamalı lineer optimizasyon problemleri için simpleks yöntemi (1948) standart bir yöntemdir. Genel lineer olmayan en küçük kareler ve eğri uydurma için Levenberg-Marquardt algoritması (1963) ise iki klasik yaklaşımı birleştirerek uygun değerler için sağlamayı başarmıştır (Fausett, 2008).

Özdeğer ve özvektör bulmada kullanılan yazılım paketlerinin dayandığı temel, James Wilkinson ve Christian Reinsch tarafından yayınlanmıştır (1971). Fonksiyon interpolasyonu için Carl deBoor' un kübik eğriler üzerindeki çalışması (1978) standart bir yöntem haline gelmiştir. Rasyonel fonksiyon interpolasyonu için ise Bulirsch-Stoer algoritması (1980) önem arz etmektedir. Ayrık Fourier dönüşümü hesabında hızlandırılmış metotların varlığı, G.C. Danielson ve C. Lanczos 1940' lı yılların başlarında benzer metotlar geliştirdikleri halde, James W. Cooley ve John Tukey tarafından 1960' larda bilinir hale gelmiştir. Esasen Gauss' un 1805' te yaptığı çalışmaların en önemlilerinden olduğu ve birçok kişinin bağımsız olarak geliştirdiği pek çok yöntem, ayrık Fourier dönüşümü için önem arz etmektedir. Ayrıca son yıllarda, türev, integral, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için sayısal yöntemlerde sayısız gelişmeler olmuştur (Fausett, 2008; Trefethen, 2008).

Sayısal analizin temellerinin yaklaşıklık teorisine dayandığı söylenebilmektedir. Bu alanda, Isaac Newton, Joseph Fourier ve Gauss gibi bilim insanları, klasik interpolasyon problemleri üzerinde, P. L. Chebyshev ve S. N. Bernstein gibi isimler polinomsal ve rasyonel minimum-maksimum problemleri üzerinde çalışmışlardır (Trefethen, 2008).

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklem, bilinmeyen fonksiyonun bir ya da birden fazla türevini içeren denklemdir. Değişken türü ve sayısına göre “adi -türevli- diferansiyel denklemler” ve “kısmi -türevli- diferansiyel denklemler” olarak iki gruba ayrılırlar. Bir adi diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyon, tek bir bağımsız değişkenin fonksiyonudur ve bu değişkene göre bir ya da daha yüksek mertebeden türevler içerebilir. Kısmi diferansiyel denklemde ise en az bir bilinmeyen fonksiyon, birden fazla bağımsız değişkene bağlı olup, bu değişkenlere göre bir ya da daha yüksek mertebeden türevler içerebilmektedir (Dernek, 2005; Koca, 2003).

Bir kısmi diferansiyel denklemin mertebesi, adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi, denklemde görülen en yüksek dereceli türevin mertebesine eşittir. Kısmi türevler, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ veya $u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$ şeklinde yazılabildiği gibi bazen, sırasıyla p, q, r, s, t harfleriyle de gösterilebilir. En genel halde, birinci mertebeden x ve y gibi iki bağımsız değişkenli kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \quad p = u_x, \quad q = u_y \quad (3.1)$$

En genel halde ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem ise aşağıdaki gibidir (Kythe and Puri, 1997).

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0, \quad r = u_{xx}, \quad s = u_{xy}, \quad t = u_{yy} \quad (3.2)$$

Bir kısmi diferansiyel denklemde, bilinmeyen fonksiyon u ve onun tüm kısmi türevleri cebirsel olarak lineer biçimdeyse yani birinci dereceden ise diferansiyel denklem lineerdir. Örneğin,

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f \quad (3.3)$$

denklemini, $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ katsayılarının ve f fonksiyonunun x ve y ' nin fonksiyonları ve $u(x, y)$ ' nin bilinmeyen fonksiyon olduğu, bir ikinci dereceden, lineer kısmi diferansiyel denklemdir.

L bir operatör olmak üzere, eğer $L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv$ şartı sağlanıyorsa, L bir lineer diferansiyel operatördür. Burada α ile β skaler ve u ile v ilgili mertebeden, sürekli kısmi türevli herhangi birer fonksiyondur.

Bir kısmi diferansiyel denklem $Lu = 0$ ise “homojen”; L herhangi bir diferansiyel operatör ve $g \neq 0$ bağımsız değişkenlerin verilen bir fonksiyonu olmak üzere $Lu = g$ iken “homojen olmayan” bir denklemdir.

$$(x + 2y)u_x + x^2u_y = \cos(x^2 + y^2) \quad (3.4)$$

Denklem 3.4, homojen olmayan birinci mertebeden lineer bir denklem iken, Denklem 3.5, homojendir.

$$(x + 2y)u_x + x^2u_y = 0 \quad (3.5)$$

Bir kısmi diferansiyel denklem, bağımlı değişkenin en yüksek dereceden türevlerinin hepsinde lineer özellik gösteriyorsa, “yarı (quasi) lineer” denklemdir. Yarı lineer ikinci mertebeden bir denklemin en genel hali

$$A(x, y, u, p, q)u_{xx} + B(x, y, u, p, q)u_{xy} + C(x, y, u, p, q)u_{yy} + f(x, y, u, p, q) = 0 \quad (3.6)$$

olarak yazılabilir (Kythe and Puri, 1997).

3.1.1. Başlangıç ve sınır şartları

Kısmi diferansiyel denklemler, genellikle çok sayıda çözüme sahip olduklarından, bazı yardımcı koşullar sayesinde, tek bir çözüme indirgenebilirler. Bunlar, “başlangıç ve sınır şartları” olarak adlandırılırlar.

Tüm fiziksel problemlerde, kısmi diferansiyel denklemin geçerli olduğu bir D bölgesi bulunur. Bu bölge, iki noktayı birleştiren bir çizgi, kapalı bir eğri ya da bir kap ile sınırlandırılabilceği gibi, sınırların bulunmadığı tüm uzay da olabilmektedir (Strauss, 1992).

Matematik bakımından ise bir sınır değer problemi, verilen kısmi diferansiyel denklemi ve özel sınır şartlarını gerçekleyen bir fonksiyon bulmaktan oluşur. Fizik açısından problem zamana bağlı olmayıp konuma bağlıdır ve uzay koordinatları içerir. Başlangıç değer problemlerinin hiperbolik denklemlere eşlik etmesi gibi, sınır değer problemleri de eliptik denklemlere eşlik eder ve çözülmesi genellikle daha güçtür. Başlangıç değer problemleri için lokal çözüm aranır ve küçük bir zaman aralığı yeterli olabilmektedir, sınır değer problemleri ise geniş bir bölgede ele alınır (Tuncer, 1992).

D bölgesinin sınırlarındaki sınır koşulları, aşağıdaki türlerde olabilir.

- i. u fonksiyonunun, kendisinin tanımlı olduğu “Dirichlet sınır şartı”,
- ii. u fonksiyonunun, normal türevinin $\partial u / \partial n$ tanımlı olduğu “Neumann sınır şartı”,
- iii. Dirichlet ve Neumann koşullarının bir arada bulunduğu “Karma (Mixed Type) sınır şartı”dır (Strauss, 1992).

3.1.2. Kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması

İkinci dereceden, iki değişkenli bir lineer kısmi diferansiyel denklem göz önüne alınsın.

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (3.7)$$

şeklindeki bir denklemde katsayılar, bağımsız değişkenler olan x ve y ' nin fonksiyonlarıdır.

Burada

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

olarak yazılabilir.

Denklem 3.7' deki katsayılar kullanılarak $\Delta = B^2 - 4AC$ şeklinde diskriminant ifadesi tanımlanır. Bu ifadenin işaretine göre, kısmi diferansiyel denklemler sınıflara ayrılır (Çizelge 3.1).

Çizelge 3.1. Kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması (Everstine'den, 2010).

$\Delta = B^2 - 4AC$	Denklem türü	Fiziksel tanımı	Tipik Fiziksel Örneği
< 0	Eliptik	Kararlı durum olayları, sınır değer problemleri.	Laplace, Poisson, Helmholtz denklemleri
$= 0$	Parabolik	Difüzyon denklemleri.	Isı denklemi.
> 0	Hiperbolik	Titreşimli sistemler ve dalga denklemi.	Dalga denklemi.

Eliptik, parabolik ve hiperbolik isimleri, denklemlerin çözümlerinden elde edilen integral eğrilerinin, yani karakteristik eğrilerin, analitik geometrideki konik kesitler ile benzerliklerinden ileri gelmektedir (Everstine, G.C., 2010).

3.1.3. Kısmi diferansiyel denklemlerin fizikteki yaygın örnekleri

i. Laplace denklemi (Potansiyel Denklemi)

$$\nabla^2 u = 0 \quad (3.9)$$

şeklinde ifade edilen denklem Laplace Denklemi olarak bilinir. Kartezyen koordinatlarda “del” veya “nabla” operatörü,

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanır. ∇^2 operatörü ise, “Laplasyen” operatörü olarak bilinir ve

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.11)$$

şeklindedir. Böylece, bir u fonksiyonu için Laplace denklemi (x, y, z) kartezyen koordinatlarında,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.12)$$

şeklinde, (r, θ, z) silindirik koordinatlarında,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.13)$$

şeklinde ve (r, θ, \varnothing) küresel koordinatlarında,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varnothing^2} = 0 \quad (3.14)$$

şeklinde ifade edilen bir eliptik kısmi diferansiyel denklemdir.

Sıkıştırılmayan akış problemlerinde, gravitasyonel potansiyel problemlerinde, elektrostatikte, magnetostatikte, bir kaynak ya da kuyu bulunmayan kararlı-durum ısı probleminde ve elastisitede dikine burulma problemlerinde diferansiyel denklem Laplace denklemi halini alır. Laplace denklemini sağlayan fonksiyonlar ise, harmonik fonksiyonlar olarak nitelendirilir (Everstine, G.C., 2010).

ii. Poisson denklemi

$$\nabla^2 u + g = 0 \quad (3.15)$$

şeklinde olup eliptik türdeki bu denklem, dağılmış kaynakların bulunduğu kararlı-durum ısı iletimi problemleri, elastisitede dikine burulma problemleri gibi potansiyel problemlerinin çözümünde kullanılır (Everstine, G.C., 2010).

iii. Dalga denklemi

$$\nabla^2 u = \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.16)$$

şeklindeki dalga denklemi zamana bağlı bir fonksiyon olup, ϑ değeri dalga yayılma hızıdır. Bu değer, probleme göre diğer özellikler cinsinden ifade edilerek dalga titreşimlerinin niteliği belirlenir. Dalga denklemleri hiperbolik türde denklemlerdir (Everstine, G.C., 2010).

iv. Helmholtz denklemi (İndirgenmiş dalga denklemi)

$$\nabla^2 u + \kappa^2 u = 0 \quad (3.17)$$

şeklindeki Helmholtz denklemi, dalga denkleminin kararlı-durum (zaman-harmonik) biçimi olup fonksiyonlar zamanla sinüzoidal olarak değişecek şekilde kısıtlanmıştır. Helmholtz denklemini bulmak için

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z) \cos \omega t \quad (3.18)$$

ifadesi, Denk. 3.18' de yerine yazılır ve

$$\nabla^2 u_0 \cos \omega t = -\frac{\omega^2}{g^2} u_0 \cos \omega t \quad (3.19)$$

ifadesi bulunur. Dalga sayısı $\kappa = \omega/c$ şeklinde tanımlanırsa, bu eşitlik

$$\nabla^2 u_0 + \kappa^2 u_0 = 0 \quad (3.20)$$

haline gelir. Burada bilinmeyen yalnızca konum değişkenlerine bağlı olduğu göz önüne alınır, alt simgenin gereksiz olduğu görülür ve Helmholtz denkleminde (Denklem 3.17) ulaşılır (Everstine, G.C., 2010).

v. Isı denkleminin

$$\vec{\nabla}(k\vec{\nabla}u) + q = \rho c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.21)$$

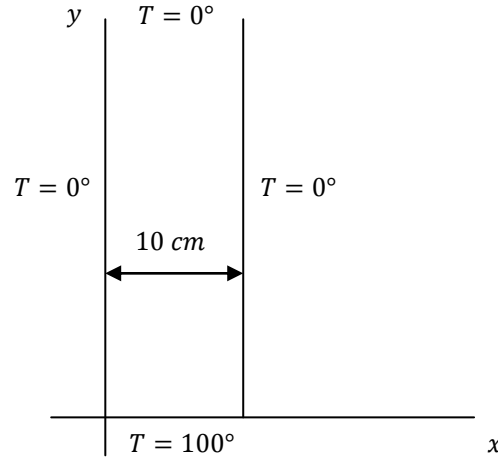
şeklinde ve parabolik türden olup, zamanla değişim özelliklerini ifade eder. u ifadesi sıcaklık fonksiyonu, k ısı iletim katsayısı, q birim zaman ve birim hacimde, ısı enerjisindeki değişim, ρ materyalin yoğunluğu ve c materyalin özgül ısı değeridir (Everstine, G.C., 2010).

3.2. Laplace Denkleminin Analitik Çözümü

3.2.1. Kartezyen koordinatlarda kararlı durum sıcaklığının bulunması

İki uzun kenarı ve üst kenarı 0°C ve taban kenarı 100°C sabit sıcaklıkta bulunan, yarı sonsuz bir dikdörtgen metal levhayı göz önüne alalım (Şekil 3.1). Levha genişliği 10 cm verilmiş olsun. Levha içindeki kararlı durum sıcaklık dağılım fonksiyonu bulunmak istenirse, verilen sıcaklık değerleri yerine potansiyel değerleri yazılarak, matematiksel olarak $0 < x < 10$, $y > 0$ bölgesinde, elektrostatik potansiyel problemi oluşur (Boas, 1983).

Problemin basitleştirilmesi açısından, öncelikle levha uzunluğunun genişlik ile kıyaslandığında çok büyük olduğu kabul edilmeli yani y eksenini boyunca sonsuza uzandığı düşünülmelidir (yarı-sonsuz levha). Eğer uç noktaya çok yakın sıcaklıklarla ilgilenilmiyorsa, bu uygun bir varsayım olacaktır (Boas, 1983).



Şekil 3.1. Kararlı durumda dikdörtgen levha için sınır değerleri (Boas' dan, 1983).

Isı kaynağının bulunmadığı levhanın iç kısmında, T sıcaklığı, Laplace denklemini sağlar.

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3.22)$$

Levha sınırları dikdörtgen olduğundan, ∇^2 terimini kartezyen koordinatlarda alınarak ve levha da iki boyutlu kabul edilerek, çözüm için aşağıdaki gibi bir ayırma yöntemi izlenir.

$$T(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.23)$$

Burada, X fonksiyonu yalnızca x değişkenine, Y fonksiyonu ise yalnızca y değişkenine bağlıdır. Çözülme istenen denklem, tam olarak bu halde olmasa da, biçimce benzer olduğundan, çözüm şekline yararlanılabilir. Denklem 3.23, Denklem 3.22' de yerine yazılırsa,

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \quad (3.24)$$

bulunur. Denklem 3.24, XY ile bölünürse,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (3.25)$$

ifadesi elde edilir.

Denklem 3.25' in ilk terimi yalnızca x' in, ikinci terimi de yalnızca y' nin fonksiyonudur ki sol taraf y' nin değişiminden, sağ taraf da x' in değişiminden etkilenmeyecektir. Sağ ve sol taraflar birbirine eşit olması gerektiğinden, x ve y değerleri için aynı sabit değerlere ($-k^2$) eşit olmalıdırlar. Denklem 3.25,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = sbt = -k^2, \quad k \geq 0 \quad (3.26)$$

veya $X'' = -k^2 X$ ve $Y'' = k^2 Y$ şeklinde yazılabilir. Burada k^2 , ayırma katsayısı olarak adlandırılır. Denklem 3.24 böylece iki adi diferansiyel denkleme ayrılmış olur. Denklem 3.26' nın çözümleri ise

$$X = \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} \quad Y = \begin{cases} e^{ky} \\ e^{-ky} \end{cases} \quad (3.27)$$

olarak verilir. Denklem 3.23 için çözümler

$$T = XY = \begin{cases} e^{ky} \sin kx \\ e^{-ky} \sin kx \\ e^{ky} \cos kx \\ e^{-ky} \cos kx \end{cases} \quad (3.28)$$

olarak elde edilir. Verilen sınır şartları sağlanacak biçimde, uygun seçilmiş bir k katsayısı ile Denklem 3.28' deki çözümlerin bir kombinasyonu alınarak çözüme gidilir (Boas, 1983).

Temel olarak, ilgilenilen tüm kısmi diferansiyel denklemler için değişkenlerine ayırma yönteminde, önce bağımsız değişkenli fonksiyonların bir çarpımı durumundaki çözüm göz önüne alınır ve kısmi diferansiyel denklem birkaç adi diferansiyel denkleme ayrılarak çözülür. Çözümler üstel, trigonometrik, kuvvet serisi, Bessel fonksiyonları,

Legendre polinomları vb. şeklinde olabilir. Bu esas çözümlerin, ayırma katsayılarının herhangi bir değeri ile herhangi bir lineer kombinasyonu, diferansiyel denklemin çözümüdür. Buradaki en önemli adım, hem uygun ayırma katsayılarını hem de verilen başlangıç ve sınır şartlarını kullanarak, uygun bir lineer kombinasyonu oluşturmaktır (Boas, 1983).

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Genel olarak n bilinmeyene sahip, n tane denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi,

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots & \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde olup, matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

ve vektör gösterimi

$$Ax = b \tag{4.3}$$

gibi yazılabilir. Burada A , katsayılar matrisi; x , bilinmeyenler sütun matrisi ve b , sabit terimler veya sağ taraf sütun matrisi olarak adlandırılır. b sütun matrisinin tüm elemanları sıfır ise sisteme homojen denklem sistemi denir. Homojen bir denklem sisteminde, A matrisinin determinanı $\det A \neq 0$ ise sıfır çözüm veya aşikar çözüm vardır. Yani tüm bilinmeyenler sıfırdır. Eğer $\det A = 0$ ise sonsuz çözüm vardır. Sonsuz çözüm, bilinmeyenlerden birinin veya birkaçının bilinen kabul edilerek yapılan çözümlerdir. Hangi bilinmeyenin bilinen kabul edileceği konusunda da bir kural olmadığından, ortaya sonsuz çözüm çıkmaktadır. Denklem 4.1' in en az bir elemanı dahi sıfırdan farklı ise bu sistem, homojen olmayan bir denklem sistemidir. Homojen olmayan bir denklem sisteminde, $\det A \neq 0$ ise çözüm mevcuttur ve bilinmeyenler bulunur. Eğer $\det A = 0$ ise sonsuz çözüm vardır.

4.1. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümünde Sayısal Yöntemler

Başlangıç değer ve sınır değer problemlerinde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde, optimizasyon ve eğri uyarlamada, istatistik analizde, sonlu elemanlar yöntemi ile problem çözümü gibi bir çok uygulamada, lineer denklem sistemlerinin çözümü için sayısal yöntemlere başvurulmaktadır.

Küçük denklem sistemlerinin elle çözümünde, herhangi bir zorlukla karşılaşılmazken, denklem ve bilinmeyen sayısı arttığında, harcanan zaman, işlem ve hata miktarı artacaktır. Çözüm için uygun bir sayısal yöntem kullanılacak olursa, daha az işlemle daha kısa sürede ve az hatayla başarılı sonuçlara ulaşılabilir.

Sayısal çözüm yöntemleri, direk yöntemler ve iteratif (yinelemeli) yöntemler şeklinde sınıflandırılabilir. Burada, direk çözüm yöntemleri olarak, Gauss yok etme yöntemi, Gauss-Jordan yöntemi, LU ayrıştırma yöntemi ve iteratif çözüm yöntemleri olarak, Jacobi iterasyon yöntemi, Gauss-Seidel iterasyon yöntemi, Rölaksasyon yöntemi (SOR) verilmiştir.

4.1.1. Lineer denklem sistemlerinin direk çözüm yöntemleri

4.1.1.1. Gauss yok etme yöntemi

Bu yöntem, denklem sisteminin çözümünün mevcut ve tek olduğu durumlar için kullanılan bir yöntemdir. Gauss yok etme yönteminde ilk olarak katsayılar matrisi bir üst üçgen (ya da üst üçgen) matrise dönüştürülür. Böylece elde edilen ve eski sisteme denk olan denklem sistemi, geriye doğru yerine koyma yöntemiyle çözülür. Yani bu yöntem ileri doğru yok etme ve geriye doğru yerleştirme olmak üzere iki ayrı bölümden oluşur. İleri doğru yok etme ile katsayılar matrisinde, ana köşegen altında kalan terimlerin sıfır olması amaçlandığı için, izlenen yol aşağıdaki gibidir (Türker ve Can, 1997).

Denklem 4.1' de, ikinci denklemin ilk terimini yok etmek için, ilk denklemin $-a_{21}/a_{11}$ katı, ikinci denkleme ilave edilir. Benzer şekilde üçüncü denklemin ilk terimini

yok etmek için, birinci denklemin $-a_{31}/a_{11}$ katı, üçüncü denklemden çıkarılır. Bu şekilde devam edilerek, Denklem 4.1' e denk olan

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\
\vdots & \\
a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \cdots + a'_{nn}x_n &= b'_n
\end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklinde bir denklemler sistemi elde edilir. Burada,

$$a'_{i,j} = a_{ij} - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) a_{1j} \quad (i, j = 2, 3, \dots, n) \tag{4.5}$$

şeklinde gösterilebilir.

Denklem 4.4' deki üçüncü denklemin ilk terimini yok etmek için, ikinci denklemin $-a'_{32}/a'_{22}$ katı üçüncü denkleme ilave edilir. Benzer işlem dördüncü, beşinci ve sonraki denklemler için de uygulanarak,

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
a''_{43}x_3 + \cdots + a''_{4n}x_n &= b''_4 \\
\vdots & \\
a''_{n3}x_3 + \cdots + a''_{nn}x_n &= b''_n
\end{aligned} \tag{4.6}$$

sistemi elde edilir, yine bu sistem de Denklem 4.1' e denktir. Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde devam edilerek, Denklem 4.1 ile özdeş olan Denklem 4.7 elde edilir (Türker ve Can, 1997).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2,n-1} & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n-2)} & a_{n-1,n}^{(n-2)} & b_{n-1}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

şekline getirilir ve daha sonra değerler yerleştirilerek çözüm bulunur (Türker ve Can, 1997).

4.1.1.2. Gauss-Jordan yöntemi

Bu yöntemde, Gauss yok etme yöntemindeki gibi, ileri doğru yok etme yapılarak katsayılar matrisi üst üçgen haline getirilir. Ancak daha sonra katsayılar matrisi, kökleri doğrudan verecek olan, birim matris formuna indirgenir.

Denklem 4.1' e, ileri doğru yok etme uygulanarak, Denklem 4.7 elde edilmiş olsun.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2,n-1} & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n-2)} & a_{n-1,n}^{(n-2)} & b_{n-1}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

halini alan katsayılar matrisinde, son satır $a_{nn}^{(n-1)}$ ile bölünerek,

$$[0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ \bar{b}_n] \quad (4.14)$$

bulunur. Burada

$$\bar{b}_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)} \quad (4.15)$$

şeklindedir. Daha sonra $(n - 1)$ satırına, n . satırın $-a_{n-1,n}^{(n-2)}$ katı, ... , ikinci satıra n . satırın $-a'_{2n}$ katı ve birinci satıra da n . satırın $-a_{1n}$ katı ilave edilerek,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 & \bar{b}_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2,n-1} & 0 & \bar{b}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n-2)} & 0 & \bar{b}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}_n \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

matrisi elde edilir. Denklem 4.16 matrisinde

$$\bar{b}_i = b_i^{(i-1)} - a_{in}^{(i-1)} \bar{b}_n \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.17)$$

şeklindedir. Bu kez $(n - 1)$. satır $a_{n-1,n-1}^{(n-2)}$ ile bölünerek,

$$[0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ \bar{b}'_{n-1}] \quad (4.18)$$

elde edilir. Yine $(n - 1)$. sütunda, $(n - 1)$. satırınki hariç, diğer tüm elemanlar benzer yolla sıfır yapılarak,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bar{b}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bar{b}_n \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

matrisi oluşturulur. Kalan satır ve sütun elemanları için de benzer işlemler tekrarlanarak,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bar{b}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bar{b}_n \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

şeklindeki birim matrise indirgenmiş olur. Böylece elde edilen denklem sisteminden yararlanılarak,

$$x_i = \bar{b}_i^{(n-i)} \quad (4.21)$$

formülüne ulaşılır ve buradan bilinmeyenler hesaplanır (Türker ve Can, 1997).

4.1.1.3. LU ayrıştırma yöntemi

n bilinmeyenli bir $Ax = b$ denklem sistemini ele alalım. Katsayılar matrisi A , $(n \times n)$ boyutlu bir matristir ve bu yöntem, A katsayılar matrisinin, L bir alt üçgen matris ve U da bir üst üçgen matris olmak üzere,

$$A = LU \quad (4.22)$$

şeklinde iki ayrı matrisin çarpımı şeklinde yazılabilmesi esasına dayanmaktadır. Eğer L ve U matrisleri elde edilebilirse, denklem takımı

$$LUX = b \quad (4.23)$$

olarak yazılır. Bu denklem yeniden düzenlenerek,

$$L(Ux) = Ly = b \quad (4.24)$$

sonucu elde edilecektir. Burada, $Ux = y$ alınmıştır. Böylece işlem, eşitliğin sol tarafında $Ux = y$ tanımının yapılmasıyla devam edecek, daha sonra sol tarafta alt üçgen matrisin

olması nedeniyle, geriye doğru yerine koyma işlemi yapılarak çözüm elde edilecektir (Tapramaz, 2002).

L ve U matrislerinin elde edilebilmesi için, öncelikle Denklem 4.22 açık olarak yazılır. L ve U matrislerinin keyfi olması göz önüne alınarak, U matrisinin köşegen elemanları 1 alınır ($u_{ii} = 1, (i = 1, 2, \dots, n)$) (Tapramaz, 2002).

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Denklem 4.25' de sol taraftaki çarpım işlemi yapılırsa

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} & \cdots & l_{11}u_{1n} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} & \cdots & l_{21}u_{1n} + l_{22}u_{2n} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} & \cdots & l_{31}u_{1n} + l_{32}u_{2n} + l_{33}u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n1}u_{12} + l_{n2} & l_{n1}u_{13} + l_{n2}u_{23} + l_{n3} & \cdots & l_{n1}u_{1n} + l_{n2}u_{2n} + \cdots + l_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

elde edilir ve bu matris katsayılar matrisine eşitlenerek,

$$\begin{array}{ll}
l_{11} = a_{11} & \rightarrow l_{11} = a_{11} \\
l_{11}u_{12} = a_{12} & \rightarrow u_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \\
l_{11}u_{13} = a_{13} & \rightarrow u_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} \\
\vdots & \vdots \\
l_{21} = a_{21} & \rightarrow l_{21} = a_{21} \\
l_{21}u_{12} + l_{22} = a_{22} & \rightarrow l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\
l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = a_{23} & \rightarrow u_{23} = \frac{1}{l_{22}}(a_{23} - l_{21}u_{13}) \\
\vdots & \vdots \\
l_{31} = a_{31} & \rightarrow l_{31} = a_{31} \\
l_{31}u_{12} + l_{32} = a_{32} & \rightarrow l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} \\
l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = a_{33} & \rightarrow l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \\
\vdots & \vdots
\end{array} \tag{4.27}$$

matris elemanları birer birer elde edilebilir. Denklem 4.27' deki u_{ii} değerleri 1 olduğundan yazılmamıştır. İşlemlere devam edildiğinde, üst ve alt üçgen matris elemanlarının, belirli bir işlem sıralamasıyla bulunabileceği görülecektir. Önce L matrisi $Ly = b'$ de yerine yazılır ve buradan y' ye ulaşılır. Ardından $Ux = y$ eşitliğinden, x bilinmeyenler matrisi bulunur. Formüle etmek gerekirse, i satır ve j sütun indisi olmak üzere, $(n \times n)$ boyutundaki bir A matrisi için, $u_{ii} = 1$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ ve

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}, \quad (i = 1, 2, \dots, j) \tag{4.28}$$

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \right), \quad (i = j + 1, j + 2, \dots, n) \tag{4.29}$$

şeklinindedir. Katsayılar matrisi bant tipinde olan ve adi diferansiyel denklemler ile kısmi diferansiyel denklemlerin, sayısal çözümlerinde karşılaşılan denklem sistemlerinin çözümünde bu yöntem kullanılır (Atkinson 1988; Tapramaz, 2002).

Direk çözüm yöntemleri; yuvarlama hatalarına göre kararlıdır. Diğer yöntemlerin çoğunda, işlem sayısı fazla ve kararlılık azdır. Bu tür çözüm yöntemlerinde, genel olarak

- * $Ax = b$ şeklindeki bir denklem sisteminin çözümünde, A^{-1} i hesaplamak gerekmez.
- * Denklem sistemlerinin çözümü için, Gauss-Jordan yöntemi, diğerlerine göre daha yavaş yakınsar.
- * Bir denklem sisteminin çözümüne, $A = LU$ şeklindeki çarpanlara ayırma işlemi ile başlanması, nispeten en iyi yöntemdir.

4.1.2. Lineer denklem sistemlerinin iteratif (yinelemeli) çözüm yöntemleri

İteratif yöntemlerde, göz önüne alınan denklem sisteminin çözümüne, tahmini başlangıç değerleri ile başlanır ve belirli bir algoritma tekrarlanarak, gerçek çözüme en az hata ile yaklaşılmaya çalışılır. Tahmini başlangıç değerlerinden başlanarak, gerçek çözüm değerlerine yaklaşılabileceği gibi, bu değerlerden uzaklaşarak, çözüme ulaşamayabilir. O halde bu durumların ilkinde yakınsama, ikincisinde ise ıraksama söz konusu demektir (Karagöz,2001). Çözüme kademeli olarak yaklaşıldığından, bu yöntemlere, iteratif yöntemler denir. Dolaylı yöntemler olarak da adlandırılan bu yöntemler, algoritmaların kolayca programlanabilmesi, yuvarlama hatalarının en az olması ve iterasyon sayısı arttıkça hata birikimi olmaması açısından kullanışlıdır (Hoffman, 2001).

4.1.2.1. Jacobi iterasyon yöntemi

Bu yöntemde, belli bir noktadan iterasyona başlanır, bilinmeyenlerin her biri için bir başlangıç değeri atanır ve göreceli hata belli bir değerden küçük oluncaya kadar işleme devam edilir. Denklem 4.1, bilinmeyenler çekilerek,

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n) + \frac{b_1}{a_{11}} \\
 x_2 &= -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n) + \frac{b_2}{a_{22}} \\
 &\dots \\
 x_n &= -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_{n-1}) + \frac{b_n}{a_{nn}}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

biçiminde yazılabilir. Denklem 4.30' da iterasyona, uygun bir başlangıç değeriyle başlanır ve k iterasyon sayısını göstermek üzere,

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [a_{ij}x_j^{(k)} - b_i]; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (4.31)$$

şeklinde uygun k değerine kadar devam edilir (Karagöz, 2001).

4.1.2.2. Gauss-Seidel iterasyon yöntemi

Jacobi yönteminde yapılan küçük bir değişiklik ile yakınsamanın hızlanması sağlanabilir. Herhangi bir basamakta elde edilen değerin, sonraki basamakta hemen kullanılmasıyla çözüme yaklaşım sağlanır. Bu yöntemde yeni değer, eski değer yerine kaydedildiğinden, Gauss-Jacobi iterasyonuna göre, kullanılan hafıza, yarı yarıya daha azdır. Verilen sistem,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \dots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} \end{aligned} \quad (4.32)$$

şeklinde yazılır ve başlangıçta, x değerleri için uygun bir tahmini değerle başlanır yazılır. Denklem 4.32' de, ilk denklemin sağ tarafında bu değerler yerine yazılarak, x_1 için, $x_1^{(1)}$ şeklinde bir yaklaşık çözüm elde edilir. Sonraki denklemde, bilinmeyenler için geçerli olan son değerler, yani $x_1^{(1)}$ değeri ve x_3, \dots, x_n başlangıç değerleri kullanılarak, $x_2^{(1)}$ yaklaşık çözümü bulunur. Benzer şekilde iterasyona, yakınsama şartı sağlanıncaya kadar devam edilir. Gauss-Seidel iterasyon bağıntısı,

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} - b_i \right]; \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.33)$$

şeklinde yazılabilir (Hoffman, 2001).

4.1.2.3. Rölaksasyon yöntemi: SOR (Successive Over-relaxation)

Çoğu iterasyon yöntemi, hatanın kademeli olarak azaldığı, düzenli bir formata sahiptir. Bu özellik, yakınsaklığı arttırmak için kullanılabilir. Bu yöntem, Gauss-Seidel iterasyon formülüne, aynı terimin eklenip çıkarılmasına dayanmaktadır. Aşağıda; $a_{ii}x_i^{(k)}$ terimi eklenip çıkarılmış ve gerekli sadeleştirmeler yapılarak Denklem 4.32 yeniden elde edilmiştir (Karagöz, 2001).

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) + a_{ii}x_i^{(k)} - a_{ii}x_i^{(k)} \quad (4.34)$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} - a_{ii}x_i^{(k)} \right) \quad (4.35)$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad (4.36)$$

Yukarıdaki son ifadenin ikinci terimi bir düzeltici terim (R) olsun ve x_i değerini iyileştirmek için kullanılsın. Bu durumda,

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + R \quad (4.37a)$$

ifadesi yazılabilir. Yakınsamanın hızlı olabilmesi için, denkleme, R düzeltici teriminin belli bir μ oranı ilave edilir. μ ; R ' ye bağlı ve her denklem için farklı değerler alan, hızlandırma parametresi ya da rölaksasyon katsayısıdır. Bu durumda rölaksasyon için genel ifade,

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\mu}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (4.37b)$$

şeklinde yazılır. Burada μ parametresi aldığı değerlere göre,

- $1 < \mu < 2$: Kuvvetli rölaksasyon (SOR-Successive over-relaxation)
 $\mu = 1$: Gauss-Seidel
 $0 < \mu < 1$: Zayıf rölaksasyon

şeklini alır. Rölaksasyon katsayısı için, optimum değeri hesaplamak oldukça zordur ve deneme yanılma ile yakınsama hızındaki değişimlere bakılarak, sadece yaklaşık olarak belirlenebilir (Karagöz, 2001).

4.1.2.4. İterasyon yöntemlerinde yakınsama

Bir lineer denklem sistemi,

$$Ax = b \quad (4.38)$$

olarak yazılabilir ve burada A matrisini,

$$A = A_1 + A_2 \quad (4.39)$$

şeklinde tanımlayalım. A_1 matrisi de tersinin (inverse matrisinin), kolay bulunabilmesi açısından köşegen matris olsun. Denklem sistemi,

$$Ax = (A_1 + A_2)x = b \quad (4.40)$$

şeklinde yazılarak, denklemin sol tarafı A_1^{-1} ile çarpılırsa,

$$x = -A_1^{-1}A_2x + A_1^{-1}b \quad (4.41)$$

ifadesi elde edilir. Burada, $A_1^{-1}A_2 = -G$ ve $A_1^{-1}b = h$ olarak tanımlanırsa, bu durumda ifade,

$$x = Gx + h \quad (4.42)$$

olur. Bu ifade, iterasyon bağıntılarını veren ifadedir ve k sayıda iterasyon için,

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + h \quad (4.43)$$

olarak yazılabilir.

İterasyon işleminin yakınsaklığının incelenmesi için, ardışık iki iterasyonun farkı alınır ve ε ile gösterilirse,

$$\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k-1)} \quad \text{ve} \quad \varepsilon^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} \quad (4.44)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\varepsilon^{(k+1)} = Gx^{(k)} + h - Gx^{(k-1)} - h = G(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = G\varepsilon^{(k)} \quad (4.45)$$

elde edilir. Elde edilen $\varepsilon^{(k+1)} = G\varepsilon^{(k)}$ ifadesi normlanırsa,

$$|\varepsilon^{(k+1)}| = \|G\| \cdot |\varepsilon^{(k)}| \quad (4.46)$$

bulunur. Norm ifadesi, bilindiği üzere bir skalerdir ve norm tanımından yararlanılarak son ifade,

$$\frac{|\varepsilon^{(k+1)}|}{|\varepsilon^{(k)}|} = \|G\| \quad (4.47)$$

şeklinde yazılabilir. İterasyon işlemi yakınsak ise $|\varepsilon^{(k+1)}| < |\varepsilon^{(k)}|$ olmalıdır. O halde, Denklem 4.47,

$$\|G\| < 1 \quad (4.48)$$

şartını sağlamalıdır. Buradaki $\|G\|$ ifadesi, aşağıda tanımlandığı üzere, matrisin satır ya da sütun normudur. Denklem 4.48, $A_1^{-1}A_2 = -G$ tanımından yararlanılarak,

$$\|G\| = \|A_1^{-1}A_2\| = \|A_1^{-1}\| \cdot \|A_2\| = \frac{\|A_2\|}{\|A_1\|} < 1 \quad (4.49)$$

şeklinde doğrulanabilir. Bu ifade bir satır veya sütun normudur. i ' inci satır için bu ifade, daha uygun olacağından, G yerine A matrisinin normu olarak gösterilirse, aşağıdaki gibi yazılır.

$$\|A\|_i = \frac{\|A_2\|_i}{\|A_1\|_i} < 1 \quad (4.50)$$

Satır normu tanımı göz önüne alınarak, bir matrisin i ' inci satır normu; bu satırın köşegen olmayan elemanlarının mutlak değerleri toplamının, köşegen elemanlarının mutlak değerleri toplamına oranı olarak tanımlanabilir. Sütun normu için de benzer tanımlama yapılabilir. İfade genelleştirilirse, $(n \times n)$ boyutlu bir A matrisinin, i ' inci satır normu,

$$\|A\|_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^M |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (4.51)$$

şeklinde tanımlanır. Denklem 4.51, bir denklem sisteminin iterasyon yöntemiyle çözülebilmesi için, matrisin köşegen elemanlarının mutlak değerinin, o satırdaki diğer elemanların mutlak değerleri toplamından büyük olması gerektiğini ifade eder. Bu durumun oluşabilmesi için, matris elemanları üzerinde, pivotlama işlemi denilen düzenlemeler yapılmalıdır (Tapramaz, 2002).

4.2. Sonlu Fark Yaklaşımı

Bu yöntem, verilen bir fonksiyonun, farklı veri noktalarındaki değerleri kullanılarak, işlemlere yaklaşık bir çözüm getirmeye dayanan sayısal bir yöntemdir. Çözüm alanı, ağ (mesh, grid) denilen, belirli aralıklara bölünür (kesikli yaklaşım). Bu ağın, ayırım noktaları ise ağ noktalarıdır ve bu noktalardaki değerler, çizelge veya grafik verileri halinde verilebilir ve ara noktalardaki değerlerin bulunması istenir (interpolasyon işlemi). Bunun için yaygın olarak, noktalardan geçen polinomlar kullanılır (Kiusalaas, 2006).

4.2.1. Türevlere sonlu fark yaklaşımı

Sonlu fark ifadelerinin oluşturulmasında, Taylor serisi açılımı, polinom uyarlama, integral yöntemi, sonlu hacim yaklaşımı gibi yöntemler kullanılabilir. Burada sonlu fark denklemleri, bir x_k noktası civarında, fonksiyonun, Taylor serisi açılımdan yararlanılarak elde edilecektir. Bulunan sonlu fark ifadeleri, ilgili denklemde yerine yazılarak, problem için bir sayısal denklem sistemi oluşturulur ve uygun bir yöntemle çözülür.

Bir $u(x)$ fonksiyonunun, x noktası civarında, Taylor serisi açılımı yapılarak, türev ifadelerine yaklaşım sağlanabilir (Kiusalaas, 2006). Şekil 4.1' de ileri fark türevleri şekilsel olarak gösterilmiştir.

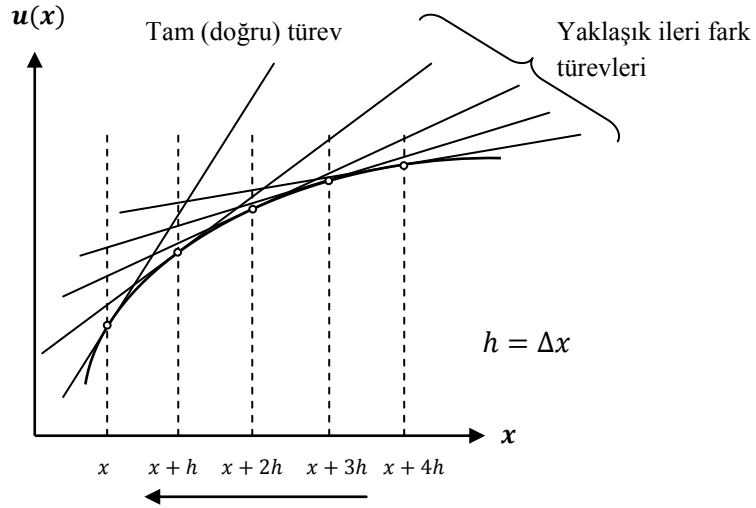
h değeri, iki yatay nokta arasındaki uzaklığı ifade ettiğinden, burada $h = \Delta x$ dir. İleri fark yaklaşımı

$$u(x + \Delta x) = u(x) + (\Delta x)u'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!}u''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!}u'''(x) + \frac{(\Delta x)^4}{4!}u^{(4)}(x) + \dots \quad (4.52a)$$

şeklinde ve geri fark yaklaşımı,

$$u(x - \Delta x) = u(x) - (\Delta x)u'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!}u''(x) - \frac{(\Delta x)^3}{3!}u'''(x) + \frac{(\Delta x)^4}{4!}u^{(4)}(x) - \dots \quad (4.52b)$$

şeklinde yazılır.



Şekil 4.1. Yaklaşık ileri fark türevleri için şematik gösterim.

Denklem 4.53a ve Denklem 4.53b' nin toplamı ve farkı alınırsa sırasıyla $\Delta x = h$ olmak üzere,

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2 u''(x) + \frac{h^4}{12} u^{(4)}(x) + \dots \quad (4.53a)$$

$$u(x+h) - u(x-h) = 2hu'(x) + \frac{h^3}{3} u'''(x) + \dots \quad (4.53b)$$

bulunur. Görüldüğü gibi, toplam ifadesi yalnızca çift türevleri içerirken, fark ifadesi yalnızca tek türevleri içermektedir (Kiusalaas, 2006).

4.2.1.1. Merkezi sonlu fark türevleri

Denklem 4.53b, $u'(x)$ için çözümlerse,

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \frac{(h)^2}{6} u'''(x) - \dots \quad (4.54a)$$

bulunur. Burada sağ taraftaki ifadenin sadece ilk terimi alınıp kalanı ihmal edilirse,

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (4.54b)$$

şeklinde yazılan ifade, merkezi sonlu fark formülü adını alır. $O(h^2)$ terimi, h^2 mertebesindeki kesme hatasıdır. Denklem 4.53a, $u''(x)$ için çözümlerse,

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x) + \dots \quad (4.55a)$$

ya da,

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (4.55b)$$

bulunur. Diğer türevler için de merkezi fark yaklaşımları, aşağıdaki ifadelerden yararlanılarak, benzer yolla bulunabilir.

$$u(x+2h) = u(x) + 2hu'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}u^{(4)}(x) + \dots \quad (4.56a)$$

$$u(x-2h) = u(x) - 2hu'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}u^{(4)}(x) - \dots \quad (4.56b)$$

$$u(x+2h) + u(x-2h) = 2u(x) + 4h^2u''(x) + \frac{4h^4}{3}u^{(4)}(x) + \dots \quad (4.56c)$$

$$u(x+2h) - u(x-2h) = 4hu'(x) + \frac{8h^3}{3}u'''(x) + \dots \quad (4.56d)$$

Örneğin, Denklem 4.53b ve Denklem 4.56d' den $u'(x)$ ifadeleri çekilip, birbirine eşitlenerek $u'''(x)$ için,

$$u'''(x) = \frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + 2u(x-h) - u(x-2h)}{2h^3} + O(h^2) \quad (4.57)$$

ifadesi bulunur. Benzer yöntemle, Denklem 4.53a ve Denklem 4.56c denklemlerinden, $u''(x)$ çekilir ve birbirine eşitlenirse $u^{(4)}(x)$ için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$u^{(4)}(x) = \frac{u(x+2h) - 4u(x+h) + 6u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h)}{h^4} + O(h^2) \quad (4.58)$$

Merkezi sonlu fark denklemlerinin $O(h^2)$ mertebesindeki türev ifadeleri için denklem katsayıları Çizelge 4.1' de düzenlenmiştir.

Çizelge 4.1. $O(h^2)$ mertebesindeki merkezi sonlu fark yaklaşımlarının katsayıları (Kiusalaas' dan, 2006).

	$u(x-2h)$	$u(x-h)$	$u(x)$	$u(x+h)$	$u(x+2h)$
$2hu'(x)$		-1	0	1	
$h^2u''(x)$		1	-2	1	
$2h^3u'''(x)$	-1	2	0	-2	1
$h^4u^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

4.2.1.2. İleri ve geri sonlu fark türevleri

Merkezi sonlu fark formülü her zaman kullanışlı olmayabilir. Örneğin fonksiyon, n farklı x_1, x_2, \dots, x_n noktasında verilmiş olsun. Merkezi fark formülü, x' in her bir kenarındaki fonksiyon değerlerini kullandığından, x_1 ve x_n noktalarındaki türevleri hesaplamada başarısız olur. Bu nedenle fonksiyonun, x' in bir tarafına doğru eğimli olması beklenir. Bu ifadeler, ileri ve geri sonlu fark denklemleridir. Denklem 4.52a' dan yararlanılarak,

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{h}{2}u''(x) - \frac{h^2}{6}u'''(x) - \frac{h^3}{4!}u^{(4)}(x) - \dots \quad (4.59)$$

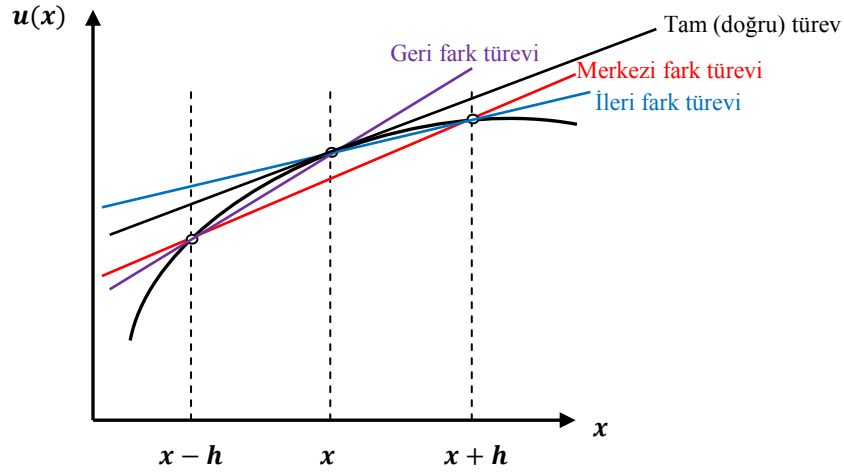
yazılabilir. Burada yine sağ taraftaki ilk terimden sonrası ihmal edilerek,

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h) \quad (4.60)$$

şeklinde ileri sonlu fark ifadesi elde edilir. Benzer şekilde Denklem 4.52b' den yararlanılarak,

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h) \quad (4.61)$$

şeklindeki geri sonlu fark yaklaşımına ulaşılır. Şekil 4.2' de fark türevleri, şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Sonlu fark türevlerinin şematik gösterimi.

Son elde edilen ifadelerdeki, $O(h)$ kesme hatası, merkezi fark denklemindeki $O(h^2)$ hatasından, merteye olarak küçük fakat hata oranı olarak büyüktür. Çoğu durumda merkezi sonlu fark yaklaşımları, hata oranı daha küçük olduğundan, tercih edilmelidir.

Daha yüksek mertebeden türevler için benzer yol izlenerek, örneğin ileri sonlu fark için, Denklem 4.52a' da, h mesafesi yerine $2h$ mesafesi alınarak elde edilen

$$u(x + 2h) = u(x) + 2hu'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}u^{(4)}(x) + \dots \quad (4.62)$$

ifadesinde, $u''(x)$ ifadesi çekilerek,

$$u''(x) = \frac{u(x + 2h) - 2u(x + h) + u(x)}{h^2} + O(h) \quad (4.63)$$

şeklinde ikinci türev yaklaşımı elde edilir. Üçüncü ve dördüncü türevler, benzer şekilde türetilbilir (Çizelge 4.2a, Çizelge 4.2b) (Kiusalaas, 2006).

Çizelge 4.2a $O(h)$ mertebesindeki ileri sonlu fark yaklaşımları için katsayılar (Kiusalaas' dan, 2006).

	$u(x)$	$u(x + h)$	$u(x + 2h)$	$u(x + 3h)$	$u(x + 4h)$
$hu'(x)$	-1	1			
$h^2u''(x)$	1	-2	1		
$h^3u'''(x)$	-1	3	-3	1	
$h^4u^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

Çizelge 4.2b. $O(h)$ mertebesindeki, geri sonlu fark yaklaşımları için katsayılar (Kiusalaas' dan, 2006).

	$u(x - 4h)$	$u(x - 3h)$	$u(x - 2h)$	$u(x - h)$	$u(x)$
$hu'(x)$				-1	1
$h^2u''(x)$			1	-2	1
$h^3u'''(x)$		-1	3	-3	1
$h^4u^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

4.2.1.3. Hata mertebesinin arttırılması

$u(x)$ fonksiyonunun, Taylor serisi açılımında, daha fazla terim bırakılarak hata mertebesini arttırmak mümkündür. Bölüm 4.2.1.2' de, $u'(x)$ türevi için elde edilen

Denklem 4.60, hata mertebesi $O(h^2)$ olacak şekilde yeniden bulunabilir. Bunun için, $u(x + h)$ ve $u(x + 2h)$ için bulunan ifadeler kullanılabilir.

$$u(x + h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) + \dots \quad (4.64)$$

$$u(x + 2h) = u(x) + 2hu'(x) + 2h^2u''(x) + \frac{4h^3}{3}u'''(x) + \frac{2h^4}{3}u^{(4)}(x) + \dots \quad (4.65)$$

Denklem 4.64' in dört katı alınarak, Denklem 4.65' dan çıkarılırsa, $u''(x)$ terimi yok edilmiş olur.

$$u(x + 2h) - 4u(x + h) = -3u(x) - 2hu'(x) + \frac{2h^2}{3}u'''(x) + \dots \quad (4.66)$$

Böylece $u'(x)$ için,

$$u'(x) = \frac{-u(x + 2h) + 4u(x + h) - 3u(x)}{2h} + \frac{h^2}{3}u'''(x) + \dots \quad (4.67)$$

veya

$$u'(x) = \frac{-u(x + 2h) + 4u(x + h) - 3u(x)}{2h} + O(h^2) \quad (4.68)$$

şeklinde u fonksiyonunun, birinci mertebeden türevi için, ikinci mertebeden hata terimli $O(h^2)$, ileri sonlu fark yaklaşımı elde edilir. Daha yüksek mertebeden türevler için olan sonlu fark yaklaşımları, ilave Taylor serileri içerir. Örneğin $u''(x)$ için $u(x + h)$, $u(x + 2h)$, $u(x + 3h)$; $u'''(x)$ için, $u(x + h)$, $u(x + 2h)$, $u(x + 3h)$, $u(x + 4h)$ Taylor seri açılımlarından yararlanır. Diğer türevler için de benzer şekilde devam eder. Çizelge 4.3a ve Çizelge 4.3b' de, hem ileri hem de geri sonlu fark için sonuçlar yazılmıştır (Kuisaalas, 2006).

Çizelge 4.3a. $O(h^2)$ mertebesindeki, ileri sonlu fark yaklaşımları için katsayılar
(Kiusalaas' dan, 2006).

	$u(x)$	$u(x+h)$	$u(x+2h)$	$u(x+3h)$	$u(x+4h)$	$u(x+5h)$
$2hu'(x)$	-3	4	-1			
$h^2u''(x)$	2	-5	4	-1		
$2h^3u'''(x)$	-5	18	-24	14	-3	
$h^4u^{(4)}(x)$	3	-14	26	-24	11	-2

Çizelge 4.3b. $O(h^2)$ mertebesindeki, geri sonlu fark yaklaşımları için katsayılar
(Kiusalaas' dan, 2006).

	$u(x-5h)$	$u(x-4h)$	$u(x-3h)$	$u(x-2h)$	$u(x-h)$	$u(x)$
$2hu'(x)$				1	-4	3
$h^2u''(x)$			-1	4	-5	2
$2h^3u'''(x)$		3	-14	24	-18	5
$h^4u^{(4)}(x)$	-2	11	-24	26	-14	3

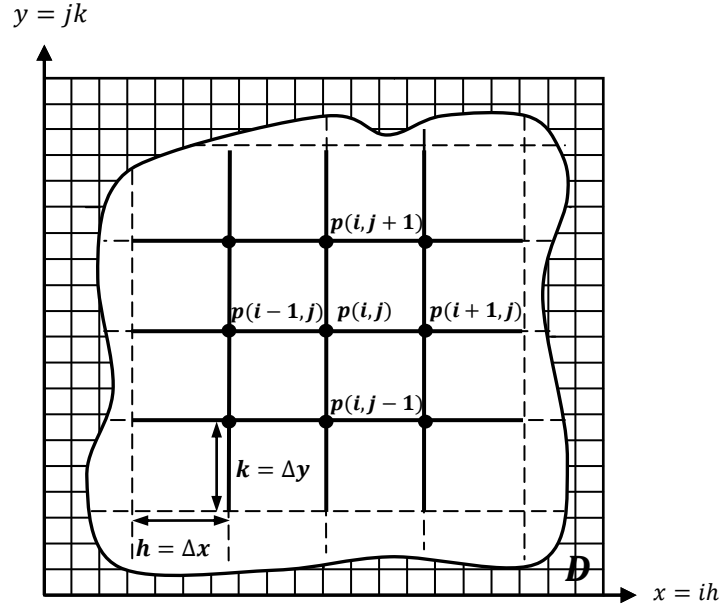
4.2.2. Çok değişkenli fonksiyonların sonlu fark türevleri

Bir D bölgesinde, iki boyutlu bir sınır değer problemi ele alalım. D bölgesi içinde, konumun, (i, j) indisleri ile tanımlandığı, aralıklar, $h = \Delta x$, $k = \Delta y$ ve ağ noktaları, p_{ij} şeklinde gösterilsin (Şekil 4.3). $u(x, y)$ çok değişkenli fonksiyonu için, $u_{ij} = u(ih, jk)$ olmak üzere, basit bir yaklaşımla, $\partial u / \partial x|_{ij}$ şeklindeki kısmi türevleri türetilebilir.

$u(x+h, y)$ için, (x, y) noktasında Taylor serisi açılımı yapılırsa,

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + O(h^4) \quad (4.69)$$

bulunur ve ileri türev için



Şekil 4.3. İki boyutlu sürekli D bölgesinin ağ (kesikli) yapısı.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + O(h) \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} \quad (4.71)$$

şeklinde ileri sonlu fark ifadesi bulunmuş olur. İkili alt simge gösterimiyle, Denklem 4.70,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{ij} = \frac{1}{h} (u_{i+1, j} - u_{ij}) + O(h) \quad (4.72)$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde, $u(x-h, y)$ için, (x, y) noktasında Taylor açılımı yapılarak,

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + O(h^4) \quad (4.73)$$

şeklinde geri sonlu fark ifadesi yazılır ve türev için,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{ij} = \frac{1}{h} (u_{ij} - u_{i-1,j}) + O(h) \quad (4.74)$$

elde edilir. Burada geri sonlu fark türevi, yine aynı hata mertebesine sahiptir. Daha yüksek hata mertebesi için, Denklem 4.69 ve 4.73'ün farkı alınarak, $O(h^2)$ mertebesinde merkezi sonlu fark türev ifadesi

$$u(x+h, y) - u(x-h, y) = 2h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^5) \quad (4.75)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2) \quad (4.76)$$

şeklinde elde edilir. Sonlu fark ifadelerinde katsayılar için kolay bir gösterim, Şekil 4.4' deki eşel gösterimidir.

İkinci kısmi türevler, Denklem 4.69 ve Denklem 4.73'ün Taylor seri açılımlarından bulunabilir. Bu iki denklemin birbirine eklenmesiyle,

$$\frac{1}{h^2} \{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)\} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2) \quad (4.77)$$

bulunur. İndis gösterimiyle x' e göre ikinci kısmi türev için merkezi sonlu fark,

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) \quad (4.78)$$

şeklinde yazılır.

$$\begin{array}{l}
 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{ij} = \frac{1}{2h} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \textcircled{-1} \text{---} \textcircled{0} \text{---} \textcircled{1} \\ i-1,j \quad i,j \quad i+1,j \end{array} \right\} +O(h^2) \\
 \\
 \left. \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{ij} = \frac{1}{2k} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ i,j+1 \\ \textcircled{0} \\ i,j \\ \textcircled{-1} \\ i,j-1 \end{array} \right\} +O(k^2) \\
 \\
 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{ij} = \frac{1}{h^2} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{-2} \text{---} \textcircled{1} \\ i-1,j \quad i,j \quad i+1,j \end{array} \right\} +O(h^2) \\
 \\
 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{ij} = \frac{1}{4h^2} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \textcircled{-1} \text{---} \textcircled{0} \text{---} \textcircled{1} \\ \textcircled{0} \text{---} \textcircled{0} \text{---} \textcircled{0} \\ \textcircled{1} \text{---} \textcircled{0} \text{---} \textcircled{-1} \\ h = k \end{array} \right\} +O(h^2)
 \end{array}$$

Şekil 4.4. Bazı kısmi türevlerin sonlu fark denklemlerinde, sayısal katsayıların eşel gösterimi (Ames' den, 1977).

Denklem 4.78, ikinci türev için merkezi fark formülüdür. Yine iki boyuttaki değişimler için eşel gösterimi Şekil 4.5' deki gibidir. Şekil 4.4 ve Şekil 4.5' deki eşel gösterimlerinde, daire içindeki katsayılar u değerlerinin çarpanlarıdır.

$$\nabla^2 u|_{ij} = \frac{1}{h^2} \left\{ \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} - \textcircled{-4} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \right\} + O(h^2)$$

$$\nabla^4 u|_{ij} = \frac{1}{h^4} \left\{ \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} - \textcircled{-8} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} - \textcircled{-8} \textcircled{20} \textcircled{-8} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} - \textcircled{-8} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \right\} + O(h^2)$$

$$\int udD = \frac{h^2}{9} \left\{ \begin{array}{c} \textcircled{1} - \textcircled{4} - \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{4} - \textcircled{16} \textcircled{4} \\ | \\ \textcircled{1} - \textcircled{4} - \textcircled{1} \end{array} \right\} + O(h^6)$$

Şekil 4.5. Genel iki boyutlu operatörler için sayısal katsayıların eşel gösterimi (Ames' den, 1977).

5. LAPLACE DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

5.1. Laplace Denklemi İçin Fark Formülleri

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (5.1)$$

şeklindeki Laplace denkleminde kısmi türevlerin, Taylor açılımından elde edilen ilgili fark ifadeleriyle yer değiştirmesi ile,

$$u(x + h, y) = u(x, y) + hu_x(x, y) + \frac{1}{2}h^2u_{xx}(x, y) + \frac{1}{6}h^3u_{xxx}(x, y) + \dots \quad (5.2a)$$

$$u(x - h, y) = u(x, y) - hu_x(x, y) + \frac{1}{2}h^2u_{xx}(x, y) - \frac{1}{6}h^3u_{xxx}(x, y) + \dots \quad (5.2b)$$

elde edilir. Denklem 5.2a' dan, Denklem 5.2b çıkarılır, h^3, h^4, \dots terimli ifadeler ihmal edilir ve u_x için çözüm yapılırsa,

$$u_x(x, y) \approx \frac{1}{2h} [u(x + h, y) - u(x - h, y)] \quad (5.3)$$

olur ve benzer şekilde,

$$u(x, y + k) = u(x, y) + ku_y(x, y) + \frac{1}{2}k^2u_{yy}(x, y) + \dots \quad (5.4a)$$

$$u(x, y - k) = u(x, y) - ku_y(x, y) + \frac{1}{2}k^2u_{yy}(x, y) + \dots \quad (5.4b)$$

yazılır. Denklemler birbirinden çıkarılır, k^3, k^4, \dots terimli ifadeler ihmal edilir ve u_y için çözüm yapılırsa

$$u_y(x, y) \approx \frac{1}{2k} [u(x, y + k) - u(x, y - k)] \quad (5.5)$$

bulunur. İkinci türevler için ise, Denklem 5.2a ve Denklem 5.2b birbirine eklenir, h^4, h^5, \dots terimleri ihmal edilirse, $u(x+h, y) + u(x-h, y) \approx 2u(x, y) + h^2 u_{xx}(x, y)$ elde edilir. u_{xx} için çözüm yapılırsa aşağıdaki ifade bulunur.

$$u_{xx}(x, y) \approx \frac{1}{h^2} [u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)] \quad (5.6a)$$

$$u_{yy}(x, y) \approx \frac{1}{k^2} [u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)] \quad (5.6b)$$

u_{xy} türevi ise,

$$u_{xy}(x, y) \approx \frac{1}{4hk} [u(x+h, y+k) - u(x-h, y+k) - u(x+h, y-k) + u(x-h, y-k)] \quad (5.6c)$$

şeklinde olur. Denklem 5.6a ve Denklem 5.6b, Laplace denkleminde (Denklem 5.1) yerine yazılırsa ve $k = h$ seçilirse,

$$u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = 0 \quad (5.7)$$

şeklinde ilgili fark ifadesi elde edilir. Burada h , örgü (mesh) genişliğidir. Denklem 5.7, (x, y) konumundaki u fonksiyonunun değeri ile dört komşu noktadaki u fonksiyonunu birbirine bağlar (Şekil 5.1a). (x, y) 'deki u değerinin, dört komşu noktasındaki u değerlerinin ortalamasına eşit olduğu yorumu yapılabilir. Bu özellik, harmonik fonksiyonların ortalama değer özelliği ile benzerdir. Burada Denklem 5.7, i, j satır ve sütun indisleriyle

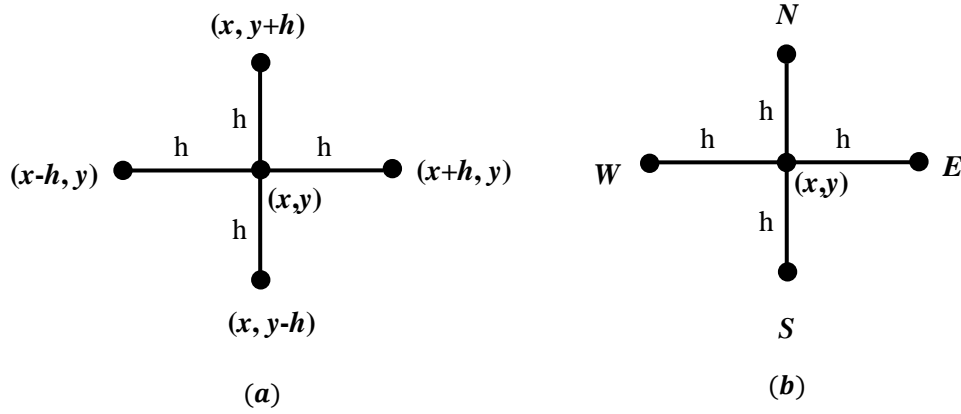
$$u_{i+1, j} + u_{i-1, j} + u_{i, j+1} + u_{i, j-1} - 4u_{ij} = 0 \quad (5.8)$$

şeklinde de yazılabilir.

Denklem 5.7' deki komşu noktalar, kolaylık sağlamak için, E (East -Doğu-), N (North -Kuzey-), W (West -Batı-), S (South -Güney-) şeklinde de Denklem 5.9' daki gibi

gösterilebilir (Şekil 5.1b) (Kreyszig, 1993).

$$u(E) + u(N) + u(W) + u(S) - 4u(x, y) = 0 \quad (5.9)$$



Şekil 5.1. Bir nokta etrafındaki sonlu fark gösterimi a. $k = h$ durumunda gösterim
b. Yönlerden yararlanılarak gösterim (Kreyszig' den, 1993).

Laplace denkleminin sonlu fark ifadesinin 5-noktalı bir eşel modeli Şekil 5.2' de gösterilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} & \mathbf{1} & \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \\ & \mathbf{1} & \end{Bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Şekil 5.2 Laplace denklemi için 5-nokta eşel gösterimi (Kreyszig' den, 1993).

5.2. Dirichlet Problemi ve Liebmann Yöntemi

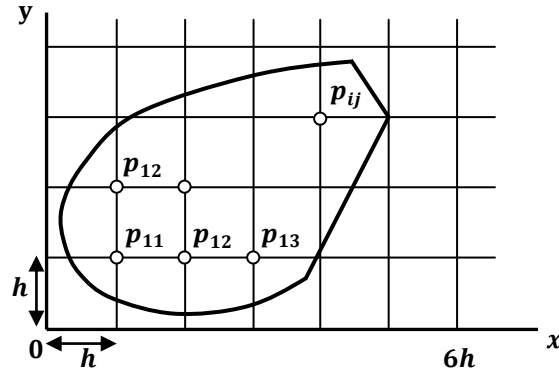
Dirichlet sınır koşulunda, verilen bir D bölgesi sınırında, fonksiyonun kendisi tanımlı olup, problemin aranan değerlerine, bu sınır şartlarından yararlanılarak ulaşılır.

Gauss-Seidel yöntemi, eliptik bir diferansiyel denkleme uygulandığında, Leibmann yöntemi olarak da adlandırılabilir. Bu yöntemde, yeni bir değer elde edilmez, herhangi bir çözüm bileşeninin yeniden yazılabildiği, bir veri saklama kolaylığı mevcuttur.

Şekil 5.3' de, seçilmiş bir D bölgesindeki kare ağ yapısı ve örgü noktaları gösterilmiştir. $p_{ij} = (ih, jh)$ ve $u_{ij} = u(ih, jh)$ olduğu göz önüne alınarak, herhangi bir örgü noktası p_{ij} için Laplace denkleminin sonlu fark ifadesi yine

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0 \quad (5.10)$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 5.3. h mesafeli örgü noktalarının oluşturduğu ağ içerisinde bir bölge ve $p_{ij} = (ih, jh)$ örgü noktaları (Kreyszig' den, 1993).

5.3. ADI Yöntemi

Kısmi diferansiyel deklemlerin sonlu fark yöntemi ile çözümünde, popüler bir yöntem, ADI (alternating direction implicit method) yöntemi olup, Peaceman ve Rachford tarafından geliştirilmiştir. Şekil 5.2' deki eşel modelinde görüldüğü gibi, bir satır veya sütunda yalnızca üç nokta varsa, bir üçlü bant (tridiagonal) matris elde edilebilir. Böylece Denklem 5.10, sol tarafın y -satırına (yalnızca j), sağ tarafın da x -sütununa (yalnızca i) ait olduğu biçimde

$$u_{i-1,j} - 4u_{ij} + u_{i+1,j} = -u_{i,j-1} - u_{i,j+1} \quad (5.11a)$$

gibi yazılabilir (Kreyszig, 1993). Denklem 5.10,

$$u_{i,j-1} - 4u_{ij} + u_{i,j+1} = -u_{i-1,j} - u_{i+1,j} \quad (5.11b)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada ise sol taraf i sütununa ve sağ taraf j satırına aittir. Bu düzenlemeden sonra, ADI yöntemi bir iterasyon süreciyle devam eder. Her örgü noktasında, keyfi bir başlangıç değeri $u_{ij}^{(0)}$ seçilir ve her adımda tüm ağ noktalarında yeni değerler hesaplanır. Bir adımda, Denklem 5.11a' dan elde edilen bir iterasyon formülü ve sonraki adımda Denklem 5.11b' den elde edilen iterasyon formülü kullanılır ve bu şekilde dönüşümlü olarak devam eder.

Örneğin $u_{ij}^{(m)}$ yaklaşımının hesaplandığı varsayalım. Bir sonraki yaklaşım olan $u_{ij}^{(m+1)}$ değerinin hesaplanması için, Denklem 5.11a' nın sağ tarafında, $u_{ij}^{(m)}$ ifadesi yerine yazılır ve sol taraftaki $u_{ij}^{(m+1)}$ için çözülür böylece kullanılan denklem

$$u_{i-1,j}^{(m+1)} - 4u_{ij}^{(m+1)} + u_{i+1,j}^{(m+1)} = -u_{i,j-1}^{(m)} - u_{i,j+1}^{(m)} \quad (5.12a)$$

şeklinde oluşur. Denklem 5.12a, sabit j değerleri (aynı satır) ve bu satırdaki tüm ara örgü noktaları için uygulanır. Bu ise N bilinmeyenli, N tane denklemden oluşan lineer bir denklem sistemi verir. Belirtmek gerekir ki, Denklem 5.12a, yalnızca bir önceki adımda hesaplanan yaklaşımları içermez aynı zamanda verilen sınır değerlerini de içerir. Bu denklem sistemi (j sabit) Gauss yok etme yöntemi ile çözülebilir. Ardından sonraki satıra geçilir ve N denklemlilik başka bir sistem elde edilir ve yine Gauss yok etme yöntemi ile çözülebilir ve tüm satırlar tamamlanıncaya kadar işlem böyle devam eder. Bir sonraki adımda yön değiştirilir, yani sonraki $u_{ij}^{(m+2)}$ yaklaşımları, sütun sütun, verilen sınır koşulları kullanılarak Denklem 5.11b' den elde edilen

$$u_{i,j-1}^{(m+2)} - 4u_{ij}^{(m+2)} + u_{i,j+1}^{(m+2)} = -u_{i-1,j}^{(m+1)} - u_{i+1,j}^{(m+1)} \quad (5.12b)$$

ifadesinde, sağ tarafta $u_{ij}^{(m+1)}$ değerleri yerine yazılarak bulunur. Her bir sabit i , yani her bir sütun için, M (sütun başına iç örgü noktası sayısı) bilinmeyenli, M tane denklemden

oluşan bir denklem sistemi vardır ve Gauss yok etme yöntemi ile çözülebilir. Ardından sonraki sütuna geçilir ve tüm sütunlar tamamlanıncaya kadar devam edilir (Kreyszig, 1993).

5.3.1. ADI yönteminde yakınsaklığın artırılması

ADI yönteminin yakınsaklığı, tanımlanan bir p parametresi yardımı ile artırılabilir. Bu parametrenin yardımı ile Denklem 5.10' un daha kesin sonuçlarına ulaşılabilmesi için,

$$u_{i-1,j} - (2 + p)u_{ij} + u_{i+1,j} = -u_{i,j-1} + (2 - p)u_{ij} - u_{i,j+1} \quad (5.13a)$$

$$u_{i,j-1} - (2 + p)u_{ij} + u_{i,j+1} = -u_{i-1,j} + (2 - p)u_{ij} - u_{i+1,j} \quad (5.13b)$$

şeklinde denkleme bir parametre eklenir ve bu ifade genelleştirilerek,

$$u_{i-1,j}^{(m+1)} - (2 + p)u_{ij}^{(m+1)} + u_{i+1,j}^{(m+1)} = -u_{i,j-1}^{(m)} + (2 - p)u_{ij}^{(m)} - u_{i,j+1}^{(m)} \quad (5.14a)$$

$$\begin{aligned} u_{i,j-1}^{(m+2)} - (2 + p)u_{ij}^{(m+2)} + u_{i,j+1}^{(m+2)} \\ = -u_{i-1,j}^{(m+1)} + (2 - p)u_{ij}^{(m+1)} - u_{i+1,j}^{(m+1)} \end{aligned} \quad (5.14b)$$

şeklindeki ADI iterasyon formülleri bulunur. $p = 2$ özel değeri için, Denklem 5.14a ve Denklem 5.14b sırasıyla, Denklem 5.12a ve Denklem 5.12b' yi vermektedir. Gerçekten de pozitif p ' ler için ADI yönteminin yakınsadığı gösterilebilir ve yakınsamanın maksimum değeri için, en uygun değer

$$p = 2 \sin \frac{\pi}{K} \quad (5.15)$$

ifadesinden bulunur. Burada K , $M + 1$ ve $N + 1$ ' den daha büyüktür. Daha da iyi sonuçlara ulaşmak için, p değeri adımdan adıma değiştirilir (Kreyszig, 1993).

5.4. Neumann Problemi ve Düzensiz Sınırlar

5.4.1. Türevli sınır koşulları

Neumann sınır şartında, bir sınırda, $u(x, y)$ fonksiyonunun, yönlü normal türevi tanımlıdır ve aranan değerlere bu başlangıç şartından hareketle ulaşılır. Burada, Neumann sınır şartı olarak, normal türevin sıfır olma şartı olan

$$\frac{\partial}{\partial N} u(x, y) = 0 \quad (5.16)$$

ifadesinden yararlanılır (Mathews, 1992).

x 'in, $x = x_i$ şeklinde sabit tutulduğu varsayılarak, $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ koşuluyla verilmiş, sağ kenarında $x = a$ olan dikdörtgen bir levhanın, bu kenarı boyunca Denklem 5.16' daki sınır koşulu olan

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_i, y_j) = u_x(x_i, y_j) = 0 \quad (5.17)$$

ifadesi kullanılır. (x_i, y_j) noktası için Laplace fark denkleminin

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0 \quad (5.18)$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. Buradaki $u_{i+1,j}$ değeri, D bölgesinin dışında olduğundan bilinmeyen bir değerdir. Yine de türevin sonlu fark ifadesi olan Denklem 5.19

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \approx u_x(x_i, y_j) = 0 \quad (5.19)$$

kullanılarak hata mertebesi $O(h^2)$ olan, $u_{i+1,j} \approx u_{i-1,j}$ yaklaşımı bulunur. Bu yaklaşım yardımıyla, Denklem 5.19, Denklem 5.18' de kullanılarak

$$2u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0 \quad (5.20)$$

bulunur. Bu sonuç; fonksiyon değeri $u_{i,j}$ ile üç komşu değer $u_{i-1,j}$, $u_{i,j+1}$, $u_{i,j-1}$ arasında bir bağlantı kurar (Mathews, 1992).

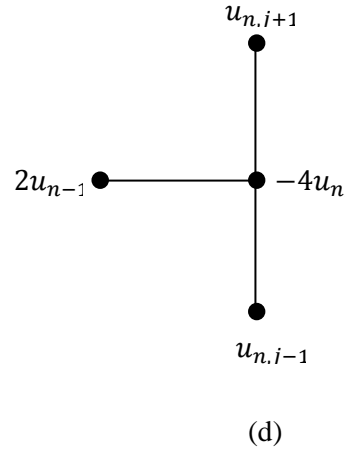
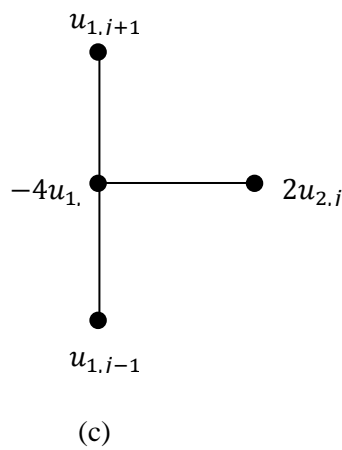
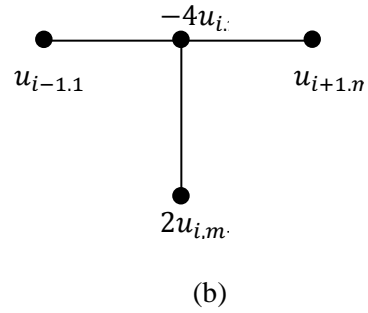
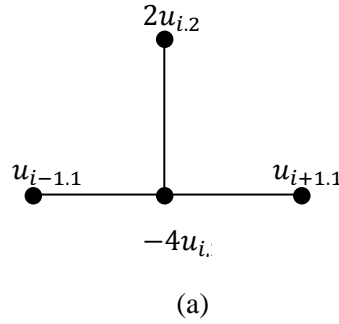
Dört kenar için Neumann sayısal ifadeleri aşağıda gösterilmiştir. Bu katsayılar için eşel modeli Şekil 5.4' de gösterilmiştir.

$$2u_{i,2} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1} - 4u_{i,1} = 0 \quad (\text{alt kenar}) \quad (5.21a)$$

$$2u_{i,m-1} + u_{i-1,m} + u_{i+1,m} - 4u_{i,m} = 0 \quad (\text{üst kenar}) \quad (5.21b)$$

$$2u_{2,j} + u_{1,j-1} + u_{1,j+1} - 4u_{1,j} = 0 \quad (\text{sol kenar}) \quad (5.21c)$$

$$2u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,1} = 0 \quad (\text{sağ kenar}) \quad (5.21d)$$



Şekil 5.4. Neumann eşel gösterimleri. a. alt kenar, b. üst kenar, c. sol kenar d. sağ kenar için, Laplace formülü sayısal katsayıları (Mathews' den, 1992).

5.4.2. Düzensiz Sınırlar

Şekil 5.5' deki gibi düzensiz sınırlara sahip bir bölge ele alalım. İç noktaların değerleri için çözüm aranırken, O örgü noktası civarında yazılacak sonlu fark ifadesi için kullanılacak komşu noktalar eşit uzaklıkta olmadığından, noktalar arası mesafenin oranından yararlanılarak yeni bir eşel oluşturulabilir. Burada, bu düzensiz komşular A ile P noktaları için, Taylor serisi açılımından,

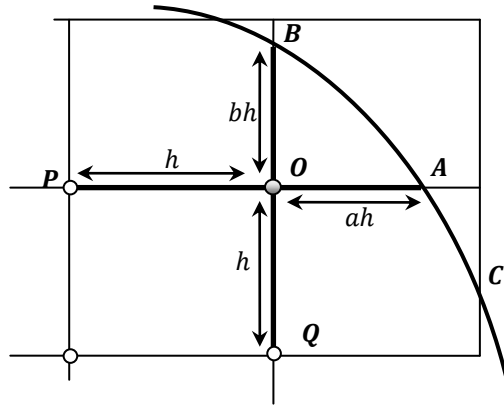
$$u_A = u_O + ah \frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2} (ah)^2 \frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \dots \quad (5.22a)$$

$$u_P = u_O - h \frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \dots \quad (5.22b)$$

yazılabilir. Denklem 5.22b' nin a katı alınıp, Denklem 5.22a' ya eklenerek oluşan ifade düzenlenirse,

$$u_A + au_P \approx (1 + a)u_O + \frac{1}{2} a(a + 1)h^2 \frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} \quad (5.23)$$

ifadesi elde edilir.



Şekil 5.5. Bir D bölgesinde, düzensiz C sınırı yakınındaki O örgü noktası ve bu noktaya komşu A, B, P, Q noktaları (Kreyszig' den, 1993).

Denklem 5.23' de, x' e göre ikinci kısmi türev çekilirse

$$\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} \approx \frac{2}{h^2} \left[\frac{1}{a(1+a)} u_A + \frac{1}{1+a} u_P - \frac{1}{a} u_O \right] \quad (5.24)$$

elde edilir. Benzer olarak, O , B , Q noktaları göz önüne alınarak,

$$\frac{\partial^2 u_O}{\partial y^2} \approx \frac{2}{h^2} \left[\frac{1}{b(1+b)} u_B + \frac{1}{1+b} u_Q - \frac{1}{b} u_O \right] \quad (5.25)$$

bulunur. Denklem 5.24 ve Denklem 5.25, Laplace denkleminde yerine konulursa ifade,

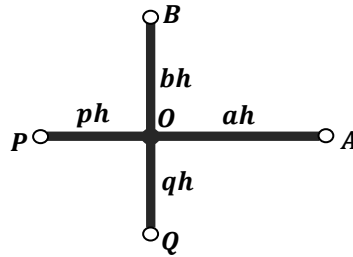
$$\nabla^2 u_O \approx \frac{2}{h^2} \left[\frac{u_A}{a(1+a)} + \frac{u_B}{b(1+b)} + \frac{u_P}{1+a} + \frac{u_Q}{1+b} - \frac{(a+b)u_O}{ab} \right] \quad (5.26)$$

şekline gelir.

Aynı şekilde, Şekil 5.6' daki gibi daha genel düzensiz bir iç nokta dağılımı için uzunluklar cinsinden

$$\nabla^2 u_O = \frac{2}{h^2} \left[\frac{u_A}{a(a+p)} + \frac{u_B}{b(b+q)} + \frac{u_P}{p(p+a)} + \frac{u_Q}{q(q+b)} - \frac{ap+bq}{abpq} u_O \right] \quad (5.27)$$

genel ifadesi kullanılabilir.



Şekil 5.6. Örgü noktası O ve farklı uzaklıklardaki komşu noktaları (Kreyszig' den, 1993).

5.5. Laplace Operatörünün Üç Boyutta Sonlu Farklar ile İfadesi

Laplace denkleminin sonlu fark ifadeleri ile çözümünde, üç boyutta çalışılırken, yine önce Laplace denkleminin ilgili koordinat düzenine göre esas denklemi yazılarak buradan sayısal biçime geçilir. Burada kartezyen koordinatlarda fark ifadesini bulmak oldukça kolay olacaktır. Noktaların ağ örgü noktalarındaki uzaysal konumlarını belirtmek için üçlü alt simge kullanılır ve her yönde örgü noktaları uzaklıkları eşit alınır (Gerald and Wheatley, 1994).

Önce Laplace denkleminin, üç boyutta sonlu farklarla ifadesini yazalım.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5.28)$$

Denklem 5.28' de kısmi türevlerin ilgili merkezi fark formülleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \nabla^2 u = & \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{h^2} \\ & + \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{h^2} \end{aligned} \quad (5.29)$$

bulunur. Denklem 5.29 düzenlenirse,

$$\nabla^2 u = \frac{u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k} + u_{i,j,k+1} + u_{i,j,k-1} - 6u_{i,j,k}}{h^2} \quad (5.30)$$

elde edilir. Denklem 5.30, üç boyutta Laplace denkleminin sonlu fark denklemdir. Bu denklemin katsayı eşeli Şekil 5.7' deki gibidir (Gerald and Wheatley, 1994).

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h^2} \left\{ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ & | & \\ 1 & -6 & 1 \\ & / & \\ & 1 & \\ & | & \\ & 1 & \end{array} \right\} u_{i,j,k}$$

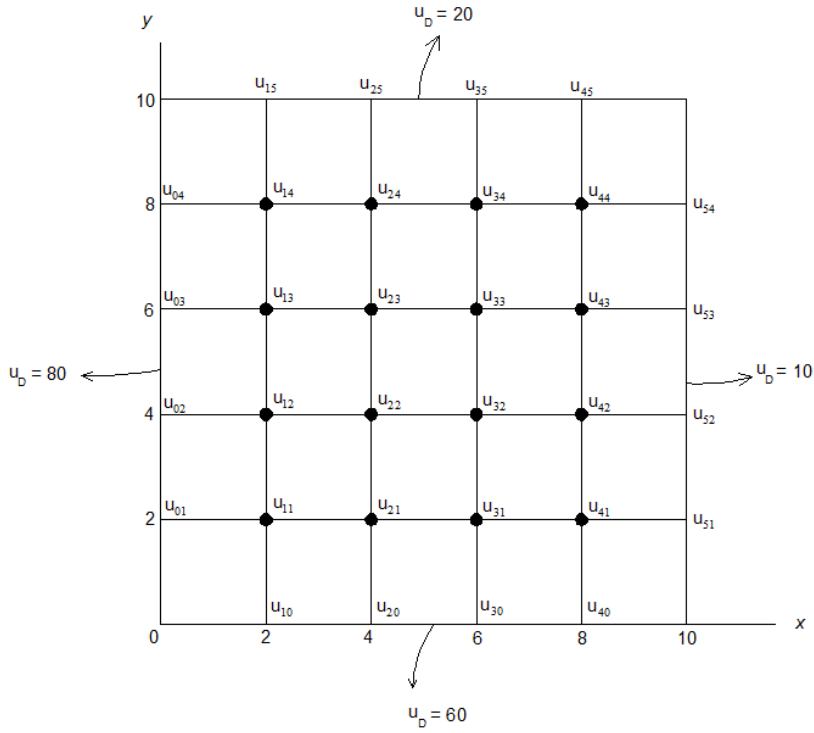
Şekil 5.7. Üç boyutlu Laplace denklemi için elde edilen eşel modeli (Gerald and Wheatley' den, 1994).

Üç boyutlu bir uygulama için kullanılan denklem sistemi daha büyüktür ve yakınsama şartının aranması zahmetli olabilir. Genel olarak iterasyon yöntemlerinin çoğunda uygulamalarda iki boyutta çalışmalar tercih edilir (Gerald and Wheatley, 1994).

6. FİZİKSEL UYGULAMALAR

6.1. Dirichlet Sınır Koşuluna Sahip Bir Kare Levhada Sıcaklık Dağılımının Bulunması

Şekil 6.1’ de, sınırlarındaki sıcaklık değerleri °C olarak verilen kare levhanın, iç örgü (mesh) noktalarındaki sıcaklık değerleri bulunacaktır. Levhanın bir kenarı 10 br. ve $\Delta x = \Delta y = h = 2$ br.’ dir.



Şekil 6.1. Dirichlet sınır şartları verilmiş kare levha.

Şekilde sıcaklık değerlerine bakıldığında Dirichlet sınır koşullarının olduğu görülmektedir. Laplace denkleminin, sonlu farklarla elde edilmiş iki değişkenli türev ifadesi olan Denklem 5.8

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0 \quad (5.8)$$

şeklinde elde edilmişti. Şimdi bu ifade kullanılarak tüm noktadaki ısı değerleri kolayca hesaplanabilir. u_{11} için ifade,

$$u_{21} + u_{01} + u_{12} + u_{10} - 4u_{11} = 0 \quad (6.1)$$

şeklini alır. u değerlerinin yerine konulmasıyla;

$$u_{21} + 80 + u_{12} + 60 - 4u_{11} = 0 \quad (6.2)$$

$$u_{21} + u_{12} - 4u_{11} = -140 \quad (6.3)$$

bulunur. u_{21} için,

$$u_{31} + u_{11} + u_{22} + u_{20} - 4u_{21} = 0 \quad (6.4)$$

ifadesinde u değerlerinin yerine konulmasıyla;

$$u_{31} + u_{11} + u_{22} + 60 - 4u_{21} = 0 \quad (6.5)$$

$$u_{31} + u_{11} + u_{22} - 4u_{21} = -60 \quad (6.6)$$

bulunur. Benzer şekilde, u_{31} için,

$$u_{41} + u_{21} + u_{32} + u_{30} - 4u_{31} = 0 \quad (6.7)$$

$$u_{41} + u_{21} + u_{32} - 4u_{31} = -60 \quad (6.8)$$

u_{41} için,

$$u_{51} + u_{31} + u_{42} + u_{40} - 4u_{41} = 0 \quad (6.9)$$

$$u_{31} + u_{42} - 4u_{41} = -70 \quad (6.10)$$

bulunur. u_{12} için,

$$u_{22} + u_{02} + u_{13} + u_{11} - 4u_{12} = 0 \quad (6.11)$$

$$u_{22} + u_{13} + u_{11} - 4u_{12} = -80 \quad (6.12)$$

u_{22} için,

$$u_{32} + u_{12} + u_{23} + u_{21} - 4u_{22} = 0 \quad (6.13)$$

u_{32} için,

$$u_{42} + u_{22} + u_{33} + u_{31} - 4u_{32} = 0 \quad (6.14)$$

u_{42} için,

$$u_{32} + u_{43} + u_{41} - 4u_{42} = -10 \quad (6.15)$$

u_{13} için,

$$u_{23} + u_{03} + u_{14} + u_{12} - 4u_{13} = 0 \quad (6.16)$$

ve

$$u_{23} + u_{14} + u_{12} - 4u_{13} = -80 \quad (6.17)$$

u_{23} için,

$$u_{33} + u_{13} + u_{24} + u_{22} - 4u_{23} = 0 \quad (6.18)$$

u_{33} için,

$$u_{43} + u_{23} + u_{34} + u_{32} - 4u_{33} = 0 \quad (6.19)$$

u_{43} için,

$$u_{33} + u_{44} + u_{42} - 4u_{43} = -10 \quad (6.20)$$

u_{14} için,

$$u_{24} + u_{04} + u_{15} + u_{13} - 4u_{14} = 0 \quad (6.21)$$

ve

$$u_{24} + u_{13} - 4u_{14} = -100 \quad (6.22)$$

u_{24} için,

$$u_{34} + u_{14} + u_{25} + u_{23} - 4u_{24} = 0 \quad (6.23)$$

$$u_{34} + u_{14} + u_{23} - 4u_{24} = -20 \quad (6.24)$$

u_{34} için,

$$u_{44} + u_{24} + u_{35} + u_{33} - 4u_{34} = 0 \quad (6.25)$$

$$u_{44} + u_{24} + u_{33} - 4u_{34} = -20 \quad (6.26)$$

u_{44} için,

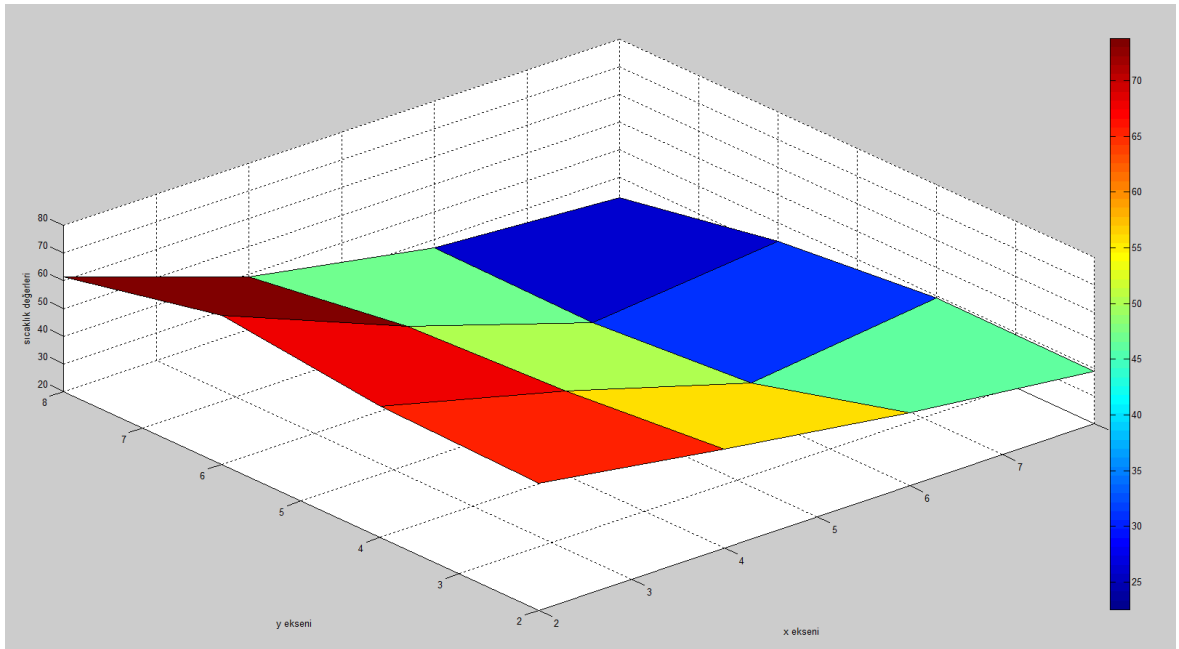
$$u_{54} + u_{34} + u_{45} + u_{43} - 4u_{44} = 0 \quad (6.27)$$

$$u_{34} + u_{43} - 4u_{44} = -30 \quad (6.28)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler, matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir. Bu denklem takımı istenilen bir yöntemle çözülebilir.

$$\begin{bmatrix}
 -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_{11} \\
 u_{21} \\
 u_{31} \\
 u_{41} \\
 u_{12} \\
 u_{22} \\
 u_{32} \\
 u_{42} \\
 u_{13} \\
 u_{23} \\
 u_{33} \\
 u_{43} \\
 u_{14} \\
 u_{24} \\
 u_{34} \\
 u_{44}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -140 \\
 -60 \\
 -60 \\
 -70 \\
 -80 \\
 0 \\
 0 \\
 -10 \\
 -80 \\
 0 \\
 0 \\
 -10 \\
 -100 \\
 -20 \\
 -20 \\
 -30
 \end{bmatrix}
 \quad (6.29)$$

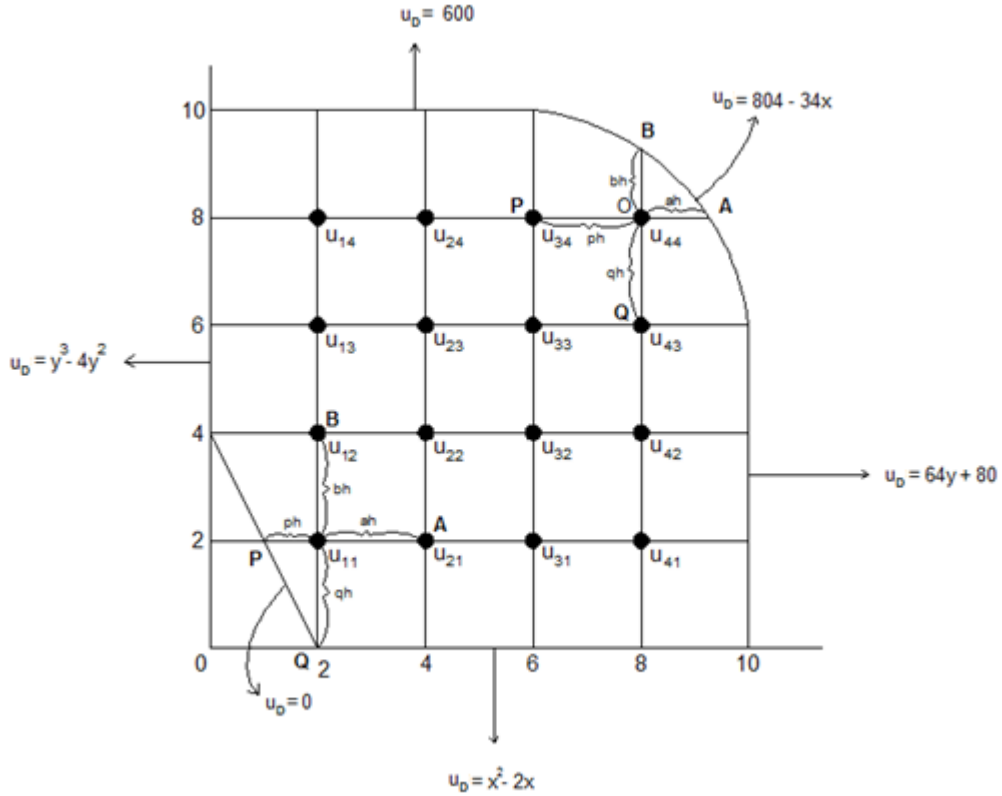
Burada, Denklem 6.29' Gauss yok etme yöntemi ile çözülmüş ve iç nokta değerleri $u_{11}= 65,7557$; $u_{21}= 55,5690$; $u_{31}= 46,2662$; $u_{41}= 38,8082$; $u_{12}= 67,4539$; $u_{22}= 50,2540$; $u_{32}= 30,6876$; $u_{42}= 38,9666$; $u_{13}= 73,8060$; $u_{23}= 47,3056$; $u_{33}= 26,2300$; $u_{43}= 33,2523$; $u_{14}= 61,4977$; $u_{24}= 38,9325$; $u_{34}= 26,9268$; $u_{44}= 22,5448$ olarak elde edilmiştir. Şekil 6.2' de bulunan değerlerin sıcaklık dağılımı grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 6.2. Dirichlet sınır şartları verilmiş kare levhanın, bulunan sıcaklık dağılımına göre grafiksel modellemesi.

6.2 Düzensiz Sınırlara Sahip Levhada Sıcaklık Dağılımının Bulunması

Şekil 6.3' de, düzensiz sınırlara sahip levha için, iç örgü noktalarındaki sıcaklık değerlerini bulalım. Dairesel sınır için merkezden geçen ve denklemi $x^2 + y^2 = 144$ olan çember yayı kullanılmıştır. Diğer düzensiz sınır ise bir doğru ile kesilmiştir. Şekilde bazı sınırlar polinom olarak, bazıları da doğrudan sıcaklık değeri olarak Dirichlet sınır şartı şeklindedir ($\Delta x = \Delta y = h = 2$ br.). Şekil 6.3' de görüldüğü üzere, iç örgü noktalarından sadece u_{11} ve u_{44} düzensiz sınırlara sahip iken, diğerleri düzenli sınırlara sahiptir.



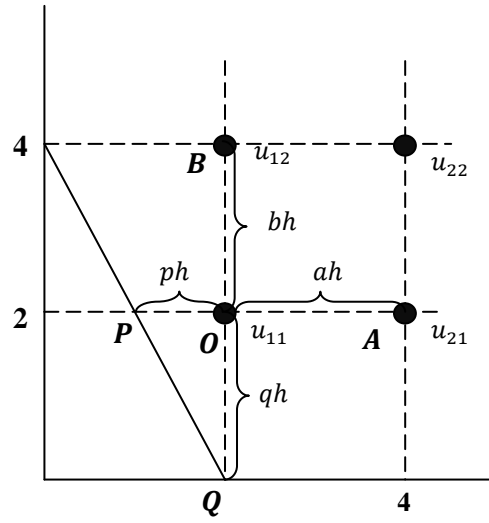
Şekil 6.3. Düzensiz sınırlara sahip ısıtılan levha.

Bölüm 5.4.2' den hatırlanacağı üzere düzensiz sınırlar için elde edilen türev ifadesi

$$\nabla^2 u_O = \frac{2}{h^2} \left[\frac{u_A}{a(a+p)} + \frac{u_B}{b(b+q)} + \frac{u_P}{p(p+a)} + \frac{u_Q}{q(q+b)} - \frac{ap+bq}{abpq} u_O \right] = 0 \quad (6.30)$$

şeklindeydi. Şimdi bu ifadeyi kullanarak, düzensiz sınırlar civarındaki örgü noktaları için katsayı eşellerini bulalım.

$u_{21}, u_{31}, u_{41}, u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{42}, u_{13}, u_{23}, u_{33}, u_{43}, u_{14}, u_{24}, u_{34}$ noktaları için kullanılacak eşel modeli Şekil 5.2' deki gibi olacaktır. Fakat u_{11} ve u_{44} için yeni eşelin hesaplanması gerekmektedir. u_{11} için Şekil 6.4' den yararlanılarak katsayı eşeli bulunabilir.



Şekil 6.4. Isıtılan levhanın sol altındaki düzensiz sınır.

Burada u_{11} için, önce ah, bh, ph, qh mesafelerinin bilindiğinden emin olunup, sırasıyla a, b, p, q değerleri bulunur (Denklem 6.30). Burada $h = 2$ br. olarak alınmıştır.

$$ah = 2 ; a = 1$$

$$bh = 2 ; b = 1$$

$$ph = 1 ; p = \frac{1}{2}$$

$$qh = 2 ; q = 1$$

(6.31)

Burada ah, bh, qh mesafelerinin 2 br., ph mesafesinin ise 1 br. uzunluğunda olduğu açıktır. Buradan elde edilen a, b, p ve q değerleri, düzensiz sınırlar için yazılan Denklem 6.30' dan bulunur. u_A değerinin katsayısı için;

$$1/a(a + p) = 1/(3/2) = 2/3 \quad (6.32)$$

u_B değerinin katsayısı için;

$$1/b(b + q) = 1/2 \quad (6.33)$$

u_p değerinin katsayısı için;

$$1/p(p + a) = 1/(3/4) = 4/3 \quad (6.34)$$

u_Q değerinin katsayısı için;

$$1/q(q + b) = 1/2 \quad (6.35)$$

u_o değerinin katsayısı için;

$$-\frac{ap + bq}{abpq} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2}} = 3 \quad (6.36)$$

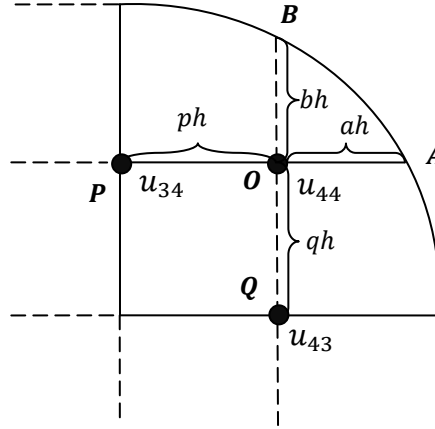
değerleri bulunur ve bu değerler Denklem 6.30' da yerine yazılarak u_{11} katsayı eşeli Şekil 6.5' deki gibi elde edilir.

$$\frac{2u_A}{3} + \frac{u_B}{2} + \frac{4u_P}{3} + \frac{u_Q}{2} - 3u_o = 0 \quad (6.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & \mathbf{1/2} & \\ \mathbf{4/3} & \mathbf{-3} & \mathbf{2/3} \\ & \mathbf{1/2} & \end{array} \right\}$$

Şekil 6.5. Isıtılan levhanın sol alt düzensiz sınırı için katsayı eşel modeli.

u_{44} için; Şekil 6.6' den görüldüğü gibi, denklemi $x^2 + y^2 = 144$ olan çember yayından yararlanılarak, ah ve bh mesafeleri bulunur.



Şekil 6.6. Isıtılan levhada sağ üstteki düzensiz sınır.

ah , bh uzunlukları için çember yayının verilen denkleminde,

$$x^2 + y^2 = 144 \quad (6.38)$$

$$x = 8 \text{ için } y = 8,9443 \quad (6.39a)$$

$$y = 8 \text{ için } x = 8,9443 \quad (6.39b)$$

şeklinde bulunur. $h = 2$ değerinin bilinmesiyle, a ve b değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$ah = 8,9443 - 8 = 0,9443 ; a = 0,4722 \quad (6.40a)$$

$$bh = 8,9443 - 8 = 0,9443 ; b = 0,4722 \quad (6.40b)$$

ph , ve qh bilinen değerlerinden ise,

$$ph = 2 ; p = 1 \quad (6.41)$$

$$qh = 2 ; q = 1 \quad (6.42)$$

bulunur. Bu değerler Denklem 6.30' da yerine konularak,

$$\left[\frac{u_A}{0,6952} + \frac{u_B}{0,6952} + \frac{u_P}{1,4722} + \frac{u_Q}{1,4722} - 4,2355u_0 \right] = 0 \quad (6.43)$$

elde edilir. Böylece u_{44} için katsayı eşeli Şekil 6.7' deki gibi elde edilir.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & 1,4384 & \\ 0,6793 & -4,2355 & 1,4384 \\ & 0,6793 & \end{array} \right\}$$

Şekil 6.7. Isıtılan levha için sağ üst düzensiz sınırın katsayı eşel modeli.

Şekil 6.3' den yararlanılarak sınırlarda verilen denklemlerden sınır sıcaklık değerleri hesaplanmıştır. Bunlar $u_{10} = 0$, $u_{20} = 8$, $u_{30} = 24$, $u_{40} = 48$, $u_{50} = 80$, $u_{02} = 0$, $u_{03} = 72$, $u_{04} = 256$, $u_{05} = 600$, $u_{15} = 600$, $u_{25} = 600$, $u_{35} = 600$, $u_B = 532$, $u_A = 499,8948$, $u_{51} = 208$, $u_{52} = 336$, $u_{53} = 464$, $u_P = 0$ şeklinde bulunur.

Denklem sistemini oluşturmadan önce, oluşturulan katsayı eşellerinden, düzensiz sınır bölgesindeki noktaların denklemleri u_{11} için Şekil 6.5.' den

$$(2/3)u_{21} + (1/2)u_{12} + (4/3)u_P + (1/2)u_{10} - 3u_{11} = 0 \quad (6.44)$$

$$0,6667u_{21} + 0,5u_{12} - 3u_{11} = 0 \quad (6.45)$$

ve u_{44} için Şekil 6.7 den,

$$1,4389u_A + 1,4389u_B + 0,6793u_{34} + 0,6793u_{43} - 4,2355u_{44} = 0 \quad (6.46)$$

olur ve Denklem 6.46' da hesaplanan u_A ve u_B değerleri yerine yazılarak

$$1,4384 \times 499,8948 + 1,4384 \times 532 + 0,6793 \times u_{34} + 0,6793 \times u_{43} - 4,2355 \times u_{44} = 0 \quad (6.47)$$

bulunur. Son durumda Denklem 6.45' den başlayarak tüm noktalar için denklemler yazılır ve Denklem 6.48 'deki sistem elde edilir.

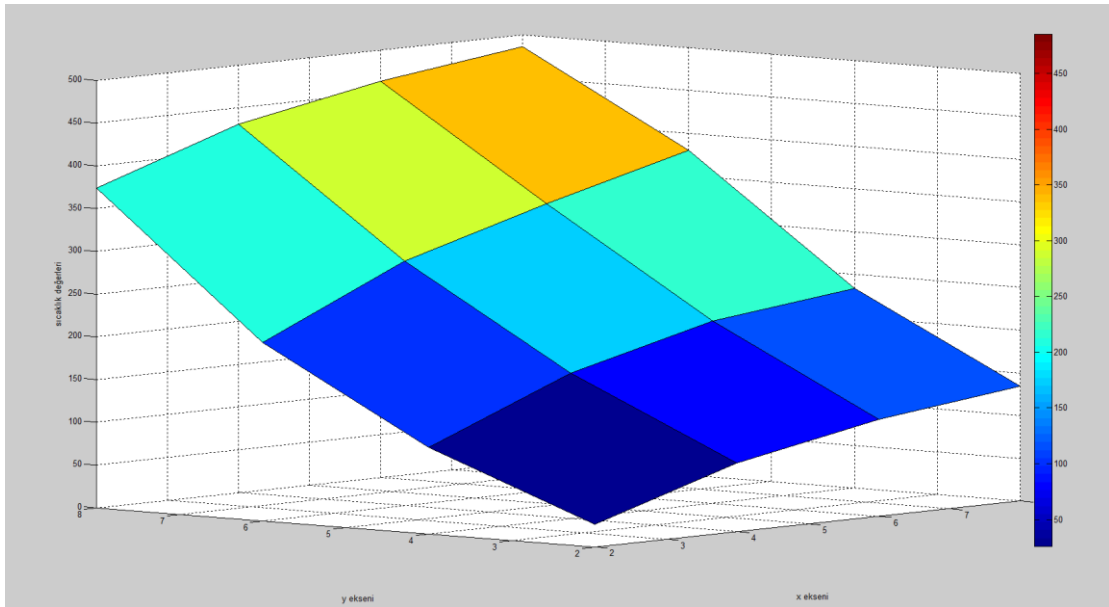
$$\begin{aligned} 0,6667u_{21} + 0,5u_{12} - 3u_{11} &= 0 \\ u_{11} - 4u_{21} + u_{31} + u_{22} &= -8 \\ u_{21} - 4u_{31} + u_{41} + u_{32} &= -24 \\ u_{31} - 4u_{41} + u_{42} &= -256 \\ u_{11} - 4u_{12} + u_{22} + u_{13} &= 0 \\ u_{21} + u_{12} - 4u_{22} + u_{32} + u_{23} &= 0 \\ u_{31} + u_{22} - 4u_{32} + u_{42} + u_{33} &= 0 \\ u_{41} + u_{32} - 4u_{42} + u_{43} &= -336 \\ u_{12} - 4u_{13} + u_{23} + u_{14} &= -72 \\ u_{22} + u_{13} - 4u_{23} + u_{33} + u_{24} &= 0 \\ u_{32} + u_{23} - 4u_{33} + u_{43} + u_{34} &= 0 \\ u_{42} + u_{33} - 4u_{43} + u_{44} &= -464 \\ u_{13} - 4u_{14} + u_{24} &= -856 \\ u_{23} + u_{14} - 4u_{24} + u_{34} &= -600 \\ u_{33} + u_{24} - 4u_{34} + u_{44} &= -600 \\ 0,6793u_{43} + 0,6793u_{34} - 4,2355u_{44} &= -1484,2775 \end{aligned} \quad (6.48)$$

Bu denklem sistemi bilinen bir yöntemle çözülür.

$$\begin{bmatrix}
 -3 & 0,6667 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6793 & 0 & 0 & 0,6793 & -4,2355
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_{11} \\
 u_{21} \\
 u_{31} \\
 u_{41} \\
 u_{12} \\
 u_{22} \\
 u_{32} \\
 u_{42} \\
 u_{13} \\
 u_{23} \\
 u_{33} \\
 u_{43} \\
 u_{14} \\
 u_{24} \\
 u_{34} \\
 u_{44}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 -8 \\
 -24 \\
 -256 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -336 \\
 -72 \\
 0 \\
 0 \\
 -464 \\
 -856 \\
 -600 \\
 -600 \\
 -1484,2775
 \end{bmatrix}$$

(6.49)

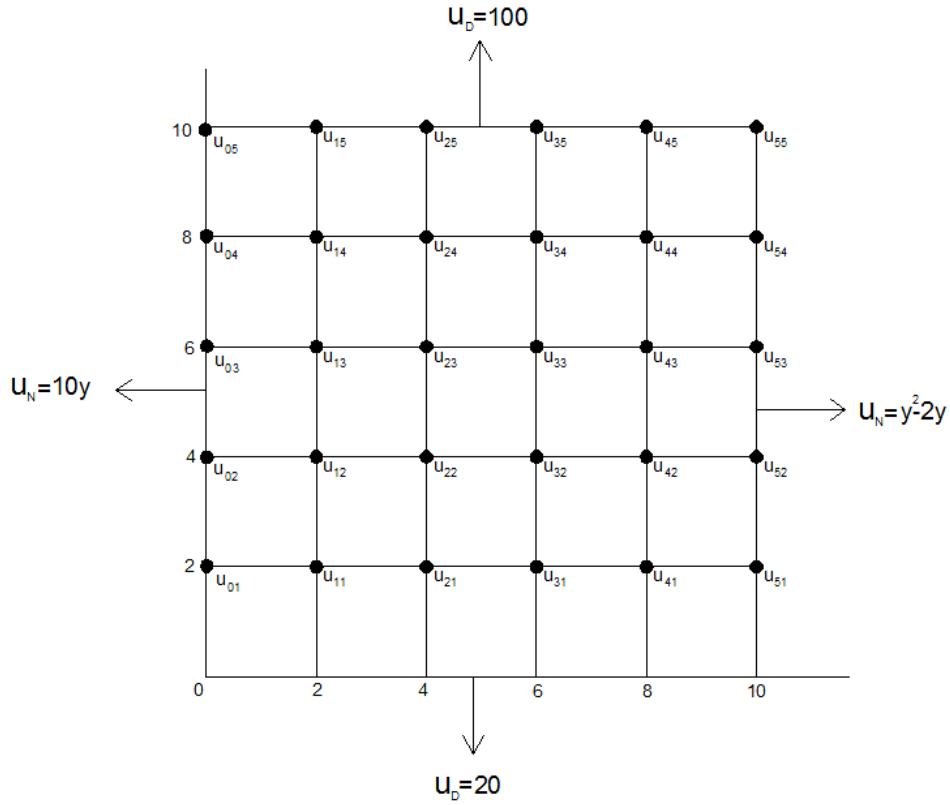
Gauss yok etme yöntemi ile yapılan çözüm sonucunda, $u_{11}= 18,3862$; $u_{21}= 19,8672$; $u_{31}=-70,1901$; $u_{41}= 100,1616$; $u_{12}= 83,8265$; $u_{22}= 123,2728$; $u_{32}= 136,7317$; $u_{42}=214,8367$; $u_{13}= 193,6469$; $u_{23}= 252,6657$; $u_{33}=279,0076$; $u_{43}= 286,4533$; $u_{14}= 366,0955$; $u_{24}= 414,7353$; $u_{34}= 440,1799$; $u_{44}= 466,9766$ değerleri elde edilir. Bulunan değerlere göre, grafiksel gösterim Şekil 6.8' de verilmiştir.



Şekil 6.8. Düzensiz sınırlara sahip levhanın, bulunan sıcaklık dağılımına göre grafiksel modellemesi.

6.3 Karma Sınır Koşuluna Sahip Levhada Sıcaklık Dağılımının Bulunması

Şekil 6.9’ da, sınırları Neumann ve Dirichlet koşullarıyla verilen levha için, iç noktadaki sıcaklık değerleri bulunmak istensin. Görüldüğü gibi, levhanın iki sınırında Dirichlet koşulu diğer iki sınırında ise Neumann sınır koşulu bulunmaktadır.



Şekil 6.9. Sınırları Neumann ve Dirichlet koşuluyla verilen kare levha.

Burada Neumann sınır koşulları için, türevli sınırlardan yararlanmak amacıyla, sınırlar dışındaki noktalardan faydalanılır ve türev ifadesinin sonlu fark tanımından hareketle, dış noktaların iç noktalar cinsinden değerleri bulunur. Böylece denklemdeki bilinmeyen sayısı azaltılmış olur. Buradan hareketle önce türevli sınır değerlerinden, gerekli eşitlikler elde edilir.

u_{01} için;

$$u_N = \frac{\partial u}{\partial N} = 10y \quad (6.50)$$

yazılır ve bu ifade, normal yönü x eksenine yönünde olduğundan,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 10y \quad (6.51)$$

şeklinde yazılır. u_{01} noktası için, $y = 2$ olduğundan;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 20 \quad (6.52)$$

yazılır ve türevin sonlu fark ifadesi hatırlanırsa,

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \quad (6.53)$$

bu ifade türev hesabı için kullanılır ve h değerinin 2 olması göz önüne alınarak

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial x} = \frac{u_{11} - u_{-11}}{2h} = 20 \quad (6.54)$$

olarak yazılır. Burada sınırın iç ve dış noktaları için sınıra göre simetrik olmaları kullanılarak

$$u_{-11} = u_{11} - 20 \quad (6.55)$$

şeklinde dış nokta, iç nokta cinsinden ifade edilir. Diğer noktalar için de benzer işlemler yapılır. u_{02} için $y = 4$ olduğundan;

$$\frac{\partial u_{02}}{\partial x} = \frac{u_{12} - u_{-12}}{4} = 40 \quad (6.56)$$

yazılarak,

$$u_{-12} = u_{12} - 160 \quad (6.57)$$

bulunur. u_{03} için $y = 6$ olduğundan;

$$\frac{\partial u_{03}}{\partial x} = \frac{u_{13} - u_{-13}}{4} = 60 \quad (6.58)$$

$$u_{-13} = u_{13} - 240 \quad (6.59)$$

bulunur. u_{04} için $y = 8$ olduğundan,

$$\frac{\partial u_{04}}{\partial x} = \frac{u_{14} - u_{-14}}{4} = 80 \quad (6.60)$$

$$u_{-14} = u_{14} - 320 \quad (6.61)$$

ve u_{05} için $y = 10$ olduğundan;

$$\frac{\partial u_{05}}{\partial x} = \frac{u_{15} - u_{-15}}{4} = 100 \quad (6.62)$$

$$u_{-15} = u_{15} - 400 \quad (6.63)$$

ifadeleri elde edilir. Sol sınırın türev hesaplamaları bu şekilde yapıldıktan sonra, sağ sınırdaki hesaplamalara geçilir. u_{51} için $y = 2$ olduğu göz önüne alınarak

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - 2y \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.65)$$

$$\frac{\partial u_{51}}{\partial x} = \frac{u_{61} - u_{41}}{2.2} = 0 \quad (6.66)$$

$$u_{61} = u_{41} \quad (6.67)$$

bulunur. Sınırdaki diğer noktalar için de benzer işlemler yapılır.

u_{52} noktası için,

$$u_{62} = u_{42} + 32 \quad (6.68)$$

u_{53} noktası için,

$$u_{63} = u_{43} + 96 \quad (6.69)$$

u_{54} noktası için,

$$u_{64} = u_{44} + 192 \quad (6.70)$$

u_{55} noktası için,

$$u_{65} = u_{45} + 320 \quad (6.71)$$

ifadeleri bulunur ve böylece sağ sınır için de dış örgü noktaları, iç noktalar cinsinden bulunmuş olur.

Üst ve alt sınır için verilen Dirichlet şartı ile buradaki noktalar,

$$u_{05} = u_{15} = u_{25} = u_{35} = u_{45} = u_{55} = 100 \quad (6.72)$$

$$u_{00} = u_{10} = u_{20} = u_{30} = u_{40} = u_{50} = 20 \quad (6.73)$$

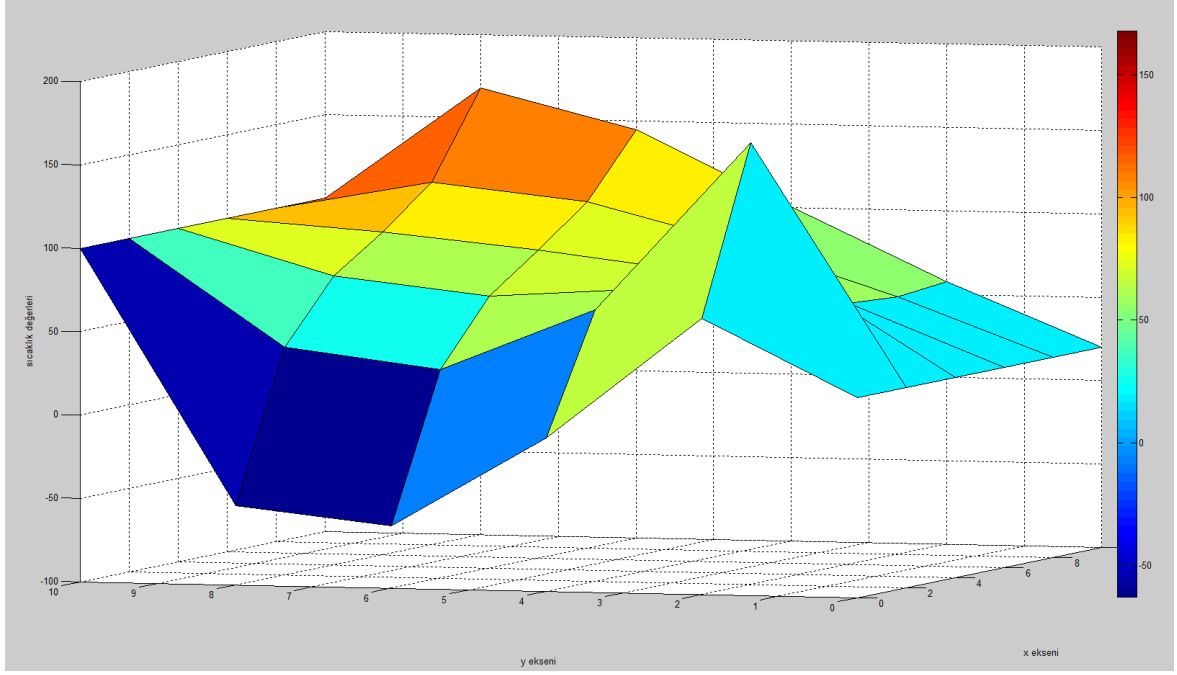
şeklinde yazılır. Şimdi hesaplanan noktaların herbiri için, Laplace denkleminin sonlu fark ifadesi yazılır. u_{01} ' den başlayarak, sırasıyla $u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41}, u_{51}, u_{02}, u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{42}, u_{52}, u_{03}, u_{13}, u_{23}, u_{33}, u_{43}, u_{53}, u_{04}, u_{14}, u_{24}, u_{34}, u_{44}$ ve u_{54} için denklemler,

$$\begin{aligned}
u_{11} + u_{02} + u_{-11} + u_{00} - 4u_{01} &= 0 \\
u_{21} + u_{12} + u_{01} + u_{10} - 4u_{11} &= 0 \\
u_{31} + u_{22} + u_{01} + u_{10} - 4u_{21} &= 0 \\
u_{41} + u_{32} + u_{21} + u_{30} - 4u_{31} &= 0 \\
u_{51} + u_{42} + u_{31} + u_{40} - 4u_{41} &= 0 \\
u_{61} + u_{52} + u_{41} + u_{50} - 4u_{51} &= 0 \\
u_{12} + u_{03} + u_{-12} + u_{01} - 4u_{02} &= 0 \\
u_{22} + u_{13} + u_{02} + u_{11} - 4u_{12} &= 0 \\
u_{32} + u_{23} + u_{12} + u_{21} - 4u_{22} &= 0 \\
u_{42} + u_{33} + u_{22} + u_{31} - 4u_{32} &= 0 \\
u_{52} + u_{43} + u_{32} + u_{41} - 4u_{42} &= 0 \\
u_{62} + u_{53} + u_{42} + u_{51} - 4u_{52} &= 0 \\
u_{13} + u_{04} + u_{-13} + u_{02} - 4u_{03} &= 0 \\
u_{23} + u_{14} + u_{03} + u_{12} - 4u_{13} &= 0 \\
u_{33} + u_{24} + u_{13} + u_{22} - 4u_{23} &= 0 \\
u_{43} + u_{34} + u_{23} + u_{32} - 4u_{33} &= 0 \\
u_{53} + u_{44} + u_{33} + u_{42} - 4u_{43} &= 0 \\
u_{63} + u_{54} + u_{43} + u_{52} - 4u_{53} &= 0 \\
u_{14} + u_{05} + u_{-14} + u_{03} - 4u_{04} &= 0 \\
u_{24} + u_{15} + u_{04} + u_{13} - 4u_{14} &= 0 \\
u_{34} + u_{25} + u_{14} + u_{23} - 4u_{24} &= 0 \\
u_{44} + u_{35} + u_{24} + u_{33} - 4u_{34} &= 0 \\
u_{54} + u_{45} + u_{34} + u_{43} - 4u_{44} &= 0 \\
u_{64} + u_{55} + u_{44} + u_{53} - 4u_{54} &= 0
\end{aligned} \tag{6.74}$$

denklem sistemi şeklinde yazılır. Bu denklemlerde, sınır dışındaki noktalar, yukarıda hesaplandığı gibi iç noktalar cinsinden yazılır ve bilinen diğer değerler yerine konulur, böylece bilinmeyen için, 24 denklem içeren denklem sistemine ulaşılır (Denklem 6.75).

$$\begin{aligned}
-4u_{01} + 2u_{11} + u_{02} &= 60 \\
u_{01} - 4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= -20 \\
u_{11} - 4u_{21} + u_{31} + u_{22} &= -20 \\
u_{21} - 4u_{31} + u_{41} + u_{32} &= -20 \\
u_{31} - 4u_{41} + u_{51} + u_{42} &= -20 \\
2u_{41} - 4u_{51} + u_{52} &= -20 \\
u_{01} - 4u_{02} + 2u_{12} + u_{03} &= 160 \\
u_{11} + u_{02} - 4u_{12} + u_{22} + u_{13} &= 0 \\
u_{21} + u_{12} - 4u_{22} + u_{32} + u_{23} &= 0 \\
u_{31} + u_{22} - 4u_{32} + u_{42} + u_{33} &= 0 \\
u_{41} + u_{32} - 4u_{42} + u_{52} + u_{43} &= 0 \\
u_{51} + 2u_{42} - 4u_{52} + u_{53} &= -32 \\
u_{02} - 4u_{03} + 2u_{13} + u_{04} &= 240 \\
u_{12} + u_{03} - 4u_{13} + u_{23} + u_{14} &= 0 \\
u_{22} + u_{13} - 4u_{23} + u_{33} + u_{24} &= 0 \\
u_{32} + u_{23} - 4u_{33} + u_{43} + u_{34} &= 0 \\
u_{42} + u_{33} - 4u_{43} + u_{53} + u_{44} &= 0 \\
u_{52} + 2u_{43} - 4u_{53} + u_{54} &= -96 \\
u_{03} - 4u_{04} + 2u_{14} &= 220 \\
u_{13} + u_{04} - 4u_{14} + u_{24} &= -100 \\
u_{23} + u_{14} - 4u_{24} + u_{34} &= -100 \\
u_{33} + u_{24} - 4u_{34} + u_{44} &= -100 \\
u_{43} + u_{34} - 4u_{44} + u_{54} &= -100 \\
u_{53} + 2u_{44} - 4u_{54} &= -292
\end{aligned} \tag{6.75}$$

Bu denklem sistemi Gauss yok etme yöntemi ile çözüldüğünde, $u_{01}= 65,3560$; $u_{11}= 164,7057$; $u_{21}= 77,5780$; $u_{31}= 56,4064$; $u_{41}= 54,4846$; $u_{51}= 57,4105$; $u_{02}= -7,9874$; $u_{12}= 62,6915$; $u_{22}= 69,1998$; $u_{32}= 73,5629$; $u_{42}= 84,1215$; $u_{52}= 100,6729$; $u_{03}= -62,6884$; $u_{13}= 24,8477$; $u_{23}= 62,9671$; $u_{33}= 84,5238$; $u_{43}= 107,7655$; $u_{53}= 145,0382$; $u_{04}= -52,4618$; $u_{14}= 36,4207$; $u_{24}= 73,2969$; $u_{34}= 93,7998$; $u_{44}= 117,3785$; $u_{54}= 167,9488$ değerleri bulunur. Bu değerlere göre grafiksel gösterim Şekil 6.10' da verilmiştir.



Şekil 6.10. Karma sınır şartlarına sahip levhanın, bulunan sıcaklık dağılımına göre grafiksel modellemesi.

6.4 ADI Yöntemiyle Bir Kare Levhada Sıcaklık Dağılımının Bulunması

Şekil 6.1 dikkate alınarak, örgü noktalarındaki sıcaklık değerleri şimdi de ADI yöntemi ile hesaplanacaktır.

Bölüm 5.3’ den hatırlanacağı gibi, ADI ile yaklaşık çözümlere ulaşmak için, önce örgü noktalarına yaklaşık başlangıç değerleri atanmakta ve buradan yola çıkılarak, üst iterasyon değerlerine yani gerçek çözüm değerlerine yaklaşılmakta idi. Burada, Denklem 5.12’ deki iterasyon formülleri hatırlanacak ve buradan hareketle yaklaşık çözümler bulunacaktır.

Başlangıç değerleri için makul bir sayısal değer olarak “50” kabul edelim. Bu durumda sıfıncı iterasyon değerleri,

$$\begin{aligned} u_{11}^{(0)} = u_{21}^{(0)} = u_{31}^{(0)} = u_{41}^{(0)} = u_{12}^{(0)} = u_{22}^{(0)} = u_{32}^{(0)} = u_{42}^{(0)} = u_{13}^{(0)} \\ = u_{23}^{(0)} = u_{33}^{(0)} = u_{43}^{(0)} = u_{14}^{(0)} = u_{24}^{(0)} = u_{34}^{(0)} = u_{44}^{(0)} = 50 \end{aligned} \quad (6.76)$$

olacaktır. Değerleri verilen sınır noktaları için, iterasyon sembolü yazılmayacaktır, bu değerler;

$$u_{15} = u_{25} = u_{35} = u_{45} = 20 \quad (6.77)$$

$$u_{10} = u_{20} = u_{30} = u_{40} = 60 \quad (6.78)$$

$$u_{01} = u_{02} = u_{03} = u_{04} = 80 \quad (6.79)$$

$$u_{51} = u_{52} = u_{53} = u_{54} = 10 \quad (6.80)$$

şeklindedir. Bu değerlerden başlanarak Denklem 5.12a' dan yararlanılarak iterasyon işlemine başlanır.

$$u_{i-1,j}^{(m+1)} - 4u_{ij}^{(m+1)} + u_{i+1,j}^{(m+1)} = -u_{i,j-1}^{(m)} - u_{i,j+1}^{(m)} \quad (5.12a)$$

Birinci satırdan başlanarak değerler yazılarak birinci satır için ilk iterasyon değerleri bulunur. $j = 1$ için,

$$u_{01} - 4u_{11}^{(1)} + u_{21}^{(1)} = -u_{10} - u_{12}^{(0)} \quad (6.81)$$

$$u_{11}^{(1)} - 4u_{11}^{(1)} + u_{31}^{(1)} = -u_{20} - u_{22}^{(0)} \quad (6.82)$$

$$u_{21}^{(1)} - 4u_{31}^{(1)} + u_{41}^{(1)} = -u_{30} - u_{32}^{(0)} \quad (6.83)$$

$$u_{31}^{(1)} - 4u_{41}^{(1)} + u_{51} = -u_{40} - u_{42}^{(0)} \quad (6.84)$$

denklemlerinde gerekli değerler yerine yazılarak birinci iterasyonlar çekilir ve aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\begin{aligned} 4u_{11}^{(1)} + u_{21}^{(1)} &= -190 \\ u_{11}^{(1)} - 4u_{21}^{(1)} + u_{31}^{(1)} &= -110 \\ u_{21}^{(1)} - 4u_{31}^{(1)} + u_{41}^{(1)} &= -110 \\ u_{31}^{(1)} - 4u_{41}^{(1)} &= -120 \end{aligned} \quad (6.85)$$

Denklem 6.85 çözüldüğünde, $u_{11}^{(1)} = 61,4833$, $u_{21}^{(1)} = 55,9330$, $u_{31}^{(1)} = 52,2488$, $u_{41}^{(1)} = 43,0622$ bulunur. Bu değerler, ilk satır için birinci iterasyon değerleridir.

$j = 2$ için,

$$u_{02} - 4u_{12}^{(1)} + u_{22}^{(1)} = -u_{11}^{(0)} - u_{13}^{(0)} \quad (6.86)$$

$$u_{12}^{(1)} - 4u_{22}^{(1)} + u_{32}^{(1)} = -u_{21}^{(0)} - u_{22}^{(0)} \quad (6.87)$$

$$u_{22}^{(1)} - 4u_{32}^{(1)} + u_{42}^{(1)} = -u_{31}^{(0)} - u_{33}^{(0)} \quad (6.88)$$

$$u_{32}^{(1)} - 4u_{42}^{(1)} + u_{52} = -u_{41}^{(0)} - u_{43}^{(0)} \quad (6.89)$$

ve

$$\begin{aligned} 4u_{12}^{(1)} + u_{22}^{(1)} &= -180 \\ u_{12}^{(1)} - 4u_{22}^{(1)} + u_{32}^{(1)} &= -100 \\ u_{22}^{(1)} - 4u_{32}^{(1)} + u_{42}^{(1)} &= -100 \\ u_{32}^{(1)} - 4u_{42}^{(1)} &= -110 \end{aligned} \quad (6.90)$$

bulunur. Bu denklem sistemi çözüldüğünde $u_{12}^{(1)} = 57,8469$, $u_{22}^{(1)} = 51,3876$, $u_{32}^{(1)} = 47,7034$, $u_{42}^{(1)} = 39,4258$ şeklinde ikinci satır için birinci iterasyon değerleri bulunur.

$j = 3$ için,

$$u_{03} - 4u_{13}^{(1)} + u_{23}^{(1)} = -u_{12}^{(0)} - u_{14}^{(0)} \quad (6.91)$$

$$u_{13}^{(1)} - 4u_{23}^{(1)} + u_{33}^{(1)} = -u_{22}^{(0)} - u_{24}^{(0)} \quad (6.92)$$

$$u_{23}^{(1)} - 4u_{33}^{(1)} + u_{43}^{(1)} = -u_{32}^{(0)} - u_{34}^{(0)} \quad (6.93)$$

$$u_{33}^{(1)} - 4u_{43}^{(1)} + u_{53} = -u_{42}^{(0)} - u_{44}^{(0)} \quad (6.94)$$

ve

$$\begin{aligned}
 4u_{13}^{(1)} + u_{23}^{(1)} &= -180 \\
 u_{13}^{(1)} - 4u_{23}^{(1)} + u_{33}^{(1)} &= -100 \\
 u_{23}^{(1)} - 4u_{33}^{(1)} + u_{43}^{(1)} &= -100 \\
 u_{33}^{(1)} - 4u_{43}^{(1)} &= -110
 \end{aligned} \tag{6.95}$$

bulunur. Denklem sisteminin çözülmesiyle; $u_{13}^{(1)} = 57,8468$, $u_{23}^{(1)} = 51,3876$, $u_{33}^{(1)} = 47,7034$, $u_{43}^{(1)} = 39,4258$ değerleri bulunur. Bu değerler, üçüncü satır için birinci iterasyon değerleridir.

$j = 4$ için,

$$u_{04} - 4u_{14}^{(1)} + u_{24}^{(1)} = -u_{13}^{(0)} - u_{15} \tag{6.96}$$

$$u_{14}^{(1)} - 4u_{24}^{(1)} + u_{34}^{(1)} = -u_{23}^{(0)} - u_{25} \tag{6.97}$$

$$u_{24}^{(1)} - 4u_{34}^{(1)} + u_{44}^{(1)} = -u_{33}^{(0)} - u_{35} \tag{6.98}$$

$$u_{34}^{(1)} - 4u_{44}^{(1)} + u_{54} = -u_{43}^{(0)} - u_{45} \tag{6.99}$$

ve

$$\begin{aligned}
 4u_{14}^{(1)} + u_{24}^{(1)} &= -150 \\
 u_{14}^{(1)} - 4u_{24}^{(1)} + u_{34}^{(1)} &= -70 \\
 u_{24}^{(1)} - 4u_{34}^{(1)} + u_{44}^{(1)} &= -70 \\
 u_{34}^{(1)} - 4u_{44}^{(1)} &= -80
 \end{aligned} \tag{6.100}$$

bulunur. Denklem 6.100 çözülürse, $u_{14}^{(1)} = 46,9378$, $u_{24}^{(1)} = 37,7512$, $u_{34}^{(1)} = 34,0670$, $u_{44}^{(1)} = 28,5168$ değerleri bulunur. Bu değerler, dördüncü satır için birinci iterasyon değerleridir.

Şimdi yön değiştirilerek, her bir sütun için iterasyon yapılır. Denklem 5.12b

$$u_{i,j-1}^{(m+2)} - 4u_{ij}^{(m+2)} + u_{i,j+1}^{(m+2)} = -u_{i-1,j}^{(m+1)} - u_{i+1,j}^{(m+1)} \quad (5.12b)$$

kullanılarak, sağ tarafa, yukarıda bulunan birinci iterasyon değerlerinin yazılmasıyla sol taraftaki yeni değerler $i = 1$ için,

$$u_{10} - 4u_{11}^{(2)} + u_{12}^{(2)} = -u_{01} - u_{21}^{(1)} \quad (6.101)$$

$$u_{11}^{(2)} - 4u_{12}^{(2)} + u_{13}^{(2)} = -u_{02} - u_{22}^{(1)} \quad (6.102)$$

$$u_{12}^{(2)} - 4u_{13}^{(2)} + u_{14}^{(2)} = -u_{03} - u_{23}^{(1)} \quad (6.103)$$

$$u_{13}^{(2)} - 4u_{14}^{(2)} + u_{15} = -u_{04} - u_{24}^{(1)} \quad (6.104)$$

ve ikinci iterasyon değerleri çekilir.

$$4u_{11}^{(2)} + u_{12}^{(2)} = -195,9330$$

$$u_{11}^{(2)} - 4u_{12}^{(2)} + u_{13}^{(2)} = -131,3876$$

$$u_{12}^{(2)} - 4u_{13}^{(2)} + u_{14}^{(2)} = -131,3876$$

$$u_{13}^{(2)} - 4u_{14}^{(2)} = -137,7512 \quad (6.105)$$

Denklem 6.105' in çözülmesiyle, $u_{11}^{(2)} = 64,8134$, $u_{12}^{(2)} = 64,2534$, $u_{13}^{(2)} = 61,2010$, $u_{14}^{(2)} = 49,5502$ şeklinde ilk sütun için ikinci iterasyon değerleri bulunmuş olur.

$i = 2$ için,

$$u_{20} - 4u_{21}^{(2)} + u_{22}^{(2)} = -u_{11}^{(1)} - u_{31}^{(1)} \quad (6.106)$$

$$u_{21}^{(2)} - 4u_{22}^{(2)} + u_{23}^{(2)} = -u_{12}^{(1)} - u_{32}^{(1)} \quad (6.107)$$

$$u_{22}^{(2)} - 4u_{23}^{(2)} + u_{24}^{(2)} = -u_{13}^{(1)} - u_{33}^{(1)} \quad (6.108)$$

$$u_{23}^{(2)} - 4u_{24}^{(2)} + u_{25} = -u_{14}^{(1)} - u_{34}^{(1)} \quad (6.109)$$

ve ilk iterasyon değerleri yerine konularak,

$$\begin{aligned}
 4u_{21}^{(2)} + u_{22}^{(2)} &= -173,7321 \\
 u_{21}^{(2)} - 4u_{22}^{(2)} + u_{23}^{(2)} &= -105,5502 \\
 u_{22}^{(2)} - 4u_{23}^{(2)} + u_{24}^{(2)} &= -105,5502 \\
 u_{23}^{(2)} - 4u_{24}^{(2)} &= -101,0048
 \end{aligned} \tag{6.110}$$

elde edilir ve Denklem 6.110' un çözülmesiyle $u_{21}^{(2)} = 56,3828$, $u_{22}^{(2)} = 52,5311$,
 $u_{23}^{(2)} = 48,7416$, $u_{24}^{(2)} = 37,4354$ şeklinde ikinci sütun için ikinci iterasyon değerleri bulunmuş olur.

$i = 3$ için,

$$u_{30} - 4u_{31}^{(2)} + u_{32}^{(2)} = -u_{21}^{(1)} - u_{41}^{(1)} \tag{6.111}$$

$$u_{31}^{(2)} - 4u_{32}^{(2)} + u_{33}^{(2)} = -u_{22}^{(1)} - u_{42}^{(1)} \tag{6.112}$$

$$u_{32}^{(2)} - 4u_{33}^{(2)} + u_{34}^{(2)} = -u_{23}^{(1)} - u_{43}^{(1)} \tag{6.113}$$

$$u_{33}^{(2)} - 4u_{34}^{(2)} + u_{35} = -u_{24}^{(1)} - u_{44}^{(1)} \tag{6.114}$$

ve ilk iterasyon değerleri yerine konularak,

$$\begin{aligned}
 4u_{31}^{(2)} + u_{32}^{(2)} &= -158,9952 \\
 u_{31}^{(2)} - 4u_{32}^{(2)} + u_{33}^{(2)} &= -90,8134 \\
 u_{32}^{(2)} - 4u_{33}^{(2)} + u_{34}^{(2)} &= -90,8134 \\
 u_{33}^{(2)} - 4u_{34}^{(2)} &= -86,2679
 \end{aligned} \tag{6.115}$$

elde edilir ve Denklem 6.115' in çözülmesi ile $u_{31}^{(2)} = 50,9282$, $u_{32}^{(2)} = 45,7129$,
 $u_{33}^{(2)} = 41,9235$, $u_{34}^{(2)} = 31,9809$ şeklinde üçüncü sütun için ikinci iterasyon değerleri bulunmuş olur.

$i = 4$ için,

$$u_{40} - 4u_{41}^{(2)} + u_{42}^{(2)} = -u_{31}^{(1)} - u_{51} \quad (6.116)$$

$$u_{41}^{(2)} - 4u_{42}^{(2)} + u_{43}^{(2)} = -u_{32}^{(1)} - u_{52} \quad (6.117)$$

$$u_{42}^{(2)} - 4u_{43}^{(2)} + u_{44}^{(2)} = -u_{33}^{(1)} - u_{53} \quad (6.118)$$

$$u_{43}^{(2)} - 4u_{44}^{(2)} + u_{45} = -u_{34}^{(1)} - u_{54} \quad (6.119)$$

ve ilk iterasyon değerleri yerine konularak,

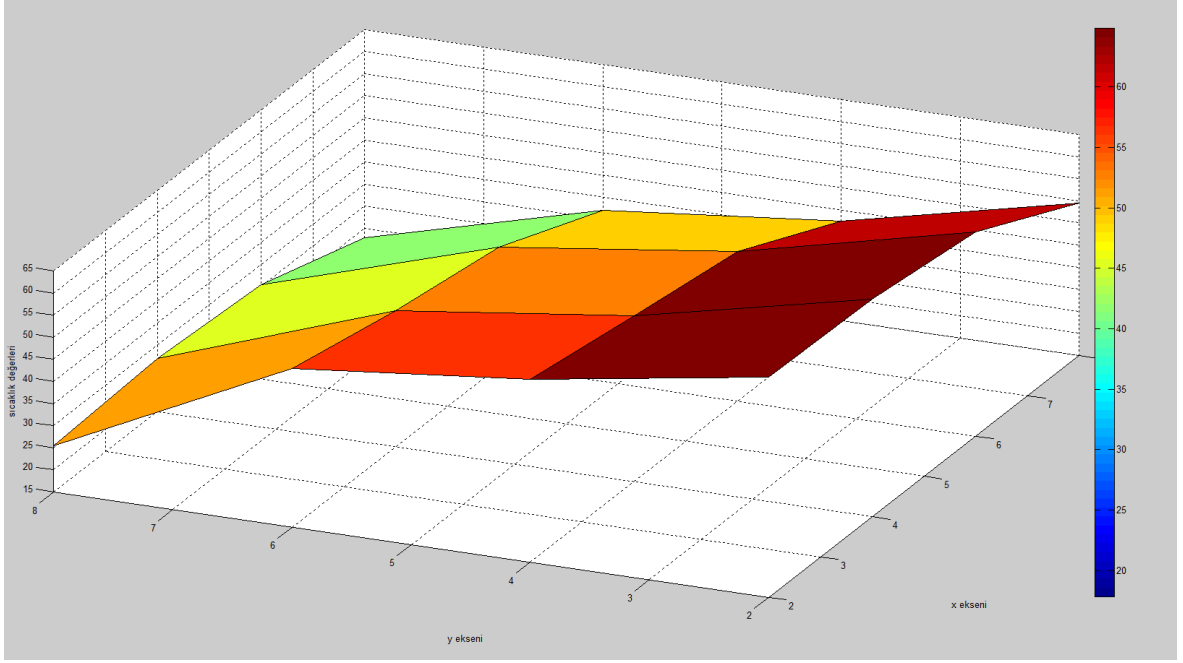
$$4u_{41}^{(2)} + u_{42}^{(2)} = 122,2488$$

$$u_{41}^{(2)} - 4u_{42}^{(2)} + u_{43}^{(2)} = -57,7034$$

$$u_{42}^{(2)} - 4u_{43}^{(2)} + u_{44}^{(2)} = -57,7034$$

$$u_{43}^{(2)} - 4u_{44}^{(2)} = -64,0670 \quad (6.120)$$

elde edilir ve Denklem 6.120' nin çözümü yapılarak $u_{41}^{(2)} = 25,4976$, $u_{42}^{(2)} = 26,9904$, $u_{43}^{(2)} = 25,4641$, $u_{44}^{(2)} = 17,8660$ şeklinde dördüncü sütun için ikinci iterasyon değerleri bulunur. Böylece, tekrar başa dönülerek elde edilen çözümler yerine yazılır ve yeni iterasyon değerlerine ulaşılır. Bulunan son iterasyon değerlerine göre, sıcaklık dağılımı grafiksel olarak Şekil 6.11' deki gibidir.



Şekil 6.11. ADI yöntemi ile sıcaklık değerleri bulunan levhanın sıcaklık dağılımına göre grafiksel modellemesi.

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Sonlu farklar yöntemi, diferansiyel denklemlerin çözümlerine yaklaşım sağlayan oldukça kullanışlı bir sayısal çözüm yöntemidir. Yöntemin söz konusu problemin kullanımı için uygun olup olmadığı ve kullanılan fark mesafesinin büyüklüğü, sonuçlardan beklenen kesinlik oranı, çözüme ulaşma zamanı, zorluk derecesi gibi faktörlere bağlıdır.

İki boyutta, sınır koşulları belirlenmiş kartezyen koordinatlardaki uygulamalar için, sonlu fark ifadelerine kolayca ulaşılabilir. Bu uygulamalarda Bölüm 5.1' deki gibi nokta sayısının kısmen az olduğu düşünülürse, Gauss yok etme yöntemi hızlıca sonuca ulaşılmasını sağlar. Nitekim daha hassas çözümlerin istendiği, çözüm alanının çok küçük aralıklara bölünerek ele alındığı problemlerde, iteratif çözüm yöntemleri tercih edilmeli ve yakınsaklığın arttığı tespit edildikten sonra, iterasyon sayısı artırılmalıdır.

Bölüm 6.1 deki Dirichlet sınır koşullarına sahip uygulama için, elde edilen lineer denklem sisteminin Gauss yok etme yöntemiyle çözümleri ile Bölüm 6.1' de aynı problemin ADI yöntemiyle çözümünde bulunan sonuçlar karşılaştırıldığında birbirinden oldukça farklı sonuçlara ulaşılmıştır. Bunun sebebi, ADI yönteminin ikinci iterasyonda sonlandırılmış olmasıdır. İşlem sayısının artırılmasıyla nispeten ilk uygulamaya daha yakın sonuçlar elde edilecektir. Ayrıca Bölüm 5.3.1' deki gibi yakınsaklığın artırılması için uygun parametreler kullanılarak sonuçlar kesinleştirilebilir. Kullanılan yöntem ve ulaşılan sonuçlar daha önce de belirtildiği gibi çözüm sonuçlarından beklenen kesinliğe göre değişmektedir.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Fiziksel durumların matematiksel modellenmesi olan mühendislik problemleri, çoğunlukla başlangıç ve sınır koşulları verilen diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemlerin çözümünde kullanılan analitik yöntemler uzun, karmaşık ya da uygulama açısından zahmetli olabilmekte, yapının karmaşık geometriye sahip olması, karmaşık başlangıç ve sınır koşulları nedeniyle istenen çözüme ulaşılamayabilmektedir. Böyle durumlarda sayısal yöntemlere başvurulması kaçınılmaz olmaktadır.

Sonlu farklar yöntemi, fizik ve mühendislik alanlarında çok kullanılan bir yöntem olmakla birlikte, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin bilgisayarda çözümünü mümkün kılan, çözümü zor problemlerin kolayca lineer denklem sistemlerine indirgenebildiği, oldukça kullanışlı bir sayısal yöntemdir. Ayrıca istenen kesinlikte çözümler, ağ modelinin daha küçük aralıklara bölünerek, nokta sayısının artırılması ve hata toleransının değiştirilmesi –hata mertebesinin artırılması- ile daha hassas şekilde elde edilebilmektedir.

Bu çalışmada, Laplace denkleminin sayısal çözümleri araştırılmıştır. Sıcaklık dağılımı bulunmak istenen levha sınırlarında Neumann ve Dirichlet sınır şartlarıyla verilmiş ve iç sıcaklık değerleri istenen sınır değer problemleri için sonlu fark ifadeleri elde edilerek, bulunan lineer denklem sistemlerinin çözümlerine ulaşılmıştır. Çözümler sonucunda, sınır değer sıcaklıkları bilindiği takdirde, düzensiz geometride ya da karmaşık sınır koşullarında iç sıcaklık değerlerine ulaşılması, bir lineer denklem sisteminin çözümü kadar kolay hale gelmektedir. Bu da, pek çok uygulamada sonlu farklar yönteminin kullanımını kaçınılmaz kılmaktadır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Ames, W.F., 1977, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 2nd edition, p.15-19.
- Amirali, G., Duru, H., 2002, Nümerik analiz, Pegem A Yayıncılık, Ankara, s.1-2.
- Atkinson, K.E., 1988, an Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition, p.508-512.
- Boas, M.L., 1983, Mathematical Methods in The Physical Sciences, John Wiley & Sons, Inc., USA, 2nd edition, p.543-545, 558-560, 567-569.
- Dernek, A.N., 2005, Kısmi Türevli Denklemler ve Çözümlü Problemler, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, s.9-10.
- Everstine, G.C., 2010, Numerical Solutions of Partial Differential Equations, Miktex, USA, p.11-15.
- Fausett, L.V., 2008, Applied Numerical Analysis Using MATLAB, Pearson Education, Inc., USA, 2nd edition, p.1-3.
- Gerald, C.F., Wheatley, P.O., 1994, Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley Pub. Co., Michigan University, 5th edition, p.575-576.
- Hoffman, J.D., 2001, Numerical Methods for Engineers and Scientists, Marcel Dekker, Inc., USA, 2nd editon, p.546-549.
- Karagöz, İ., 2001, Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları, Vipaş A.Ş., Bursa, s.56-61.
- Kiusalaas, J., 2006, Numerical Methods in Engineering with Matlab, Cambridge University Press, USA, p.182-186.
- Koca, K., 2003, Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara, 2. Baskı, s.28-29.
- Kreyszig, E., 1993, Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., USA, 7th edition, p.1055-1067.
- Kythe, P.K., Puri, P., Schaferkötter, M.R., 1997, Partial Differential Equations and Mathematica, CRC Press, Inc., USA, p.1-3.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Mathews, J.H., 1992, Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering, Prentice Hall International, Inc., New Jersey, USA, 2nd edition, p.524-525.
- Strauss, W.A., 1992, Partial Differential Equations an Introduction, John Wiley & Sons, Inc., USA, p.20-21.
- Tapramaz, R., 2002, Sayısal Çözümleme, Literatür Yayınları, İstanbul, s.89-91, 99-101.
- Trefethen, L.N., 2006, Numerical Analysis, Princeton Companion to Mathematics by Princeton University Press, Oxford, USA, p.605-606.
- Tuncer, T., 1992, Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi, Mimar Sinan Üniversitesi Yayın No.16, Fen Edebiyat Fakültesi Yayın No.3, İstanbul, s.396.
- Türker, E.S., Can, E., 1997, Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri, Değişim Yayınları, Adapazarı, 2. Baskı, s.429-439, 444.