Lineer Olmayan Denklemlerin İntegrallenebilirliği

Ömer Ünsal

DOKTORA TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Ocak 2016

Integrability of Nonlinear Equations

Ömer Ünsal

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics-Computer

January 2016

Lineer Olmayan Denklemlerin İntegrallenebilirliği

Ömer Ünsal

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Naci Özer

Ocak 2016

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Ömer Ünsal'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Lineer Olmayan Denklemlerin İntegrallenebilirliği" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Mehmet Naci Özer

İkinci Danışman **: -**

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Mehmet Naci Özer

Üye : Prof. Dr. Fatma Ayaz

Üye : Prof. Dr. Ahmet Bekir

Üye : Doç. Dr. Filiz Taşcan

Üye : Yrd. Doç. Dr. Özkan Güner

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Mehmet Naci Özer danışmanlığında hazırlamış olduğum “Lineer Olmayan Denklemlerin İntegrallenebilirliği” başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 04/01/2016

Ömer Ünsal

İmza

ÖZET

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi her zaman mümkün olmamakla beraber daha çok bu tip denklemlerin integrallenebilirliği üzerinde yoğunlaşılmıştır. İntegrallenebilirlik, yıllardır üzerine çalışılan, çeşitli problemlerle iç içe ve eş zamanlı çözüm gerektiren, birçok alanda uygulaması bulunan bir kavramdır. Literatürde, integrallenebilirlik üzerine yapılmış çok sayıda çalışma bulunmaktadır.

Bu tez çalışmasında, genel olarak lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin uygun dönüşümler altında bilineer formları elde edildikten sonra, integrallenebilirliğini gösteren kriterler ve dalga çözümleri araştırılmıştır. Bell polinomu yaklaşımı kullanılarak (2+1) boyutlu BKP denklemi için bilineer form, Bäcklund dönüşümü, soliton çözüm, Lax çifti ve korunum kanunları bulunurken, (2+1) boyutlu Burgers denklem sistemi için bilineer form, soliton çözüm, Bäcklund dönüşümü ve Lax çifti elde edilmiştir. Genelleştirilmiş bilineer türevler yardımıyla ifade edilen genelleştirilmiş bilineer denklemlerin N-dalga çözümleri trigonometrik ve hiperbolik tipten elde edilmiş, bu çözümler için gerek ve yeter şartları ihtiva eden teoremler verilmiştir. İlgili teoremlerin daha iyi anlaşılması için uygulamalar yapılmıştır. Literatürde yeni bir çözüm tipi olarak göze çarpan kompleksiton çözümler, Sawada Kotera ve dokuzuncu mertebeden KdV denklemleri için elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bilineer Form, Soliton Çözüm, Hirota Bilineer Metodu, Bäcklund Dönüşümü, Lax Çifti, Genelleştirilmiş Bilineer Türevler, N-dalga Çözüm, Kompleksiton Çözüm.

SUMMARY

It is not always possible to get solutions of nonlinear differential equations, integrability of this kind of equations is concentrated on commonly. Integrabilty is a notion that has been studied on for years, needs to be solved with some other problems simultaneously and employed in many areas. There have been many works done on integrability, in the literature.

In this dissertation, upon finding corresponding bilinear forms of nonlinear partial differential equations under appropriate transformations, integrability criteria and wave solutions have been investigated. Bilinear form, Bäcklund transformation, soliton solution, Lax pair and conservation laws of (2+1) dimensional BKP equation and Bilinear form, Bäcklund transformation, soliton solution, Lax pair of (2+1) dimensional coupled Burgers system have been obtained by using Bell polynomial approach. N-wave solutions to generalized bilinear equations which are expressed in terms of generalized bilinear derivatives have been obtained in terms of hyperbolic and trigonomeric, theorems that contain necessary and sufficient conditions for these solutions have been given. Some applications have been made so that related theorems can be understood well. Complexiton solutions, which has been introduced in the recent past, has been obtained for Sawada Kotera and ninth order KdV equations.

Keywords: Bilinear Form, Soliton Solution, Hirota Bilinear Method, Bäcklund Transformation, Lax Pair, Generalized Bilinear Derivatives, N-wave Solution, Complexiton Solution.

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmalarım süresince değerli görüşlerinden faydalandığım, ilgisini ve desteğini esirgemeyen hocalarım, Sayın,

Prof. Dr. M. Naci ÖZER, Doç. Dr. Filiz TAŞCAN ve Prof. Dr. Ahmet BEKİR'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yine doktora tez çalışmalarımın bir döneminde aldığım burs kapsamında A.B.D. nin Florida eyaleti, Tampa şehrindeki "University of South Florida" üniversitesinde bulunduğum süre içerisinde birlikte çalışma fırsatı bulduğum Prof. Dr. Wen-Xiu MA'ya değerli katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, her kararımda yanımda olan annem Neriman ÜNSAL'a en içten teşekkürlerimi ve hürmetlerimi sunarım.

Ayrıca doktora çalışmalarım boyunca beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Ömer ÜNSAL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar	**Açıklama**
ARS	Ablowitz-Ramani-Segur
BKP	B-Type Kadomtsev-Petviashvili
KdV	Korteweg de Vries
KP	Kadomtsev-Petviashvili

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Lineer olmayan diferensiyel denklemler ve bu denklemlerin oluşturduğu denklem sistemleri fizik, mühendislik, uygulamalı matematik, kimya, biyoloji gibi alanlarda pek çok problemin modellemesinde yaygın olarak kullanılır. Bu denklemlerin integrallenebilirliği 1960'lardan günümüze uygulamalı matematiğin temel konularından biri olmuştur. Dolayısıyla integrallenebilirlik konusu birçok kitap, makale, bildiri vb. bilimsel faaliyette önemli yer tutmuştur (Matveev ve Salle, 1980), (Li vd., 2010), (Ablowitz ve Clarkson, 1991), (Wazwaz, 2007), (Miura, 1978), (Zakharov, 1991), (Hietarinta, 2005). İntegrallenebilirlik kavramında ilk karşılaşılan soru "verilen bir model integrallenebilir midir yada integrallenebilen bir modele yakın mıdır? Analitik olarak derin bir inceleme yapılabilir mi?" şeklindedir. Bu inceleme sırasında, integrallenebilirliğin ne zaman ve nasıl bulunabileceği soruları ortaya çıkmaktadır. İntegrallenebilirliğin günümüze kadar üzerinde hemfikir olunan tek bir tanımı var olmadığından ve ilgili denklemin integrallenebilirliğini test edecek iyi tanımlı ölçütlerin mevcut olmamasından dolayı bu sorunun cevabı kesin ve tam olarak belli değildir.

İntagrallenebilirliğin, en temel, en çok bilinen ve kelime anlamına uygun tanımı: "ilgili denklemin gerekli sayıda integrasyon sabiti ile integrali alınabilir" şeklindedir. Bu tanım üzerine kompleks düzlemde integrallenebilirlik kavramı ortaya çıkmıştır. Çözümler için kullanılan "tam çözülebilirlik" ve "düzgün davranış" terimleri integrallenebilen sistemlere ilişkin kullanılan terimlerdir, fakat bu terimler integrallenebilirlik ile ilgili kesin bir tanımı meydana getirmezler. Bundan daha iyi bir yaklaşım, verilen integrallenebilir denklemlerin henüz tam anlamıyla açıklanmamış zengin cebirsel ve analitik yapılarını incelemek olabilir. Bu yapıların elemanlarının varlığı, teorik olarak integrallenebilirliğin tanımı olarak verilebilir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

İntegrallenebilen denklemler gizli simetrilere ve yerel simetri hiyerarşilerine sahiptirler. İntegrallenebilen denklemlerin bu özelliği, onların simetri yaklaşımı açısından tanımını verir. Simetri yaklaşımı, diferensiyel denklemlerin simetrilerini ve korunum kanunlarını bulmak için kullanışlı bir yöntem oluşturarak integrallenebilirlik için bir kriter teşkil eder.

İntegrallenebilir sistemler teorisinin merkezinde Lax çifti kavramı yer alır. Lax çifti, genellikle bir parametreye bağlı olan bir lineer matris diferensiyel operatörünün eş-spektrumlu(isospectral) deformasyonunu temsil eder. Lax çiftinin sağlaması gereken eşitlik $\dot{L} = [M, L]$ dir ve bu eşitlik verilen lineer olmayan sisteme denktir. Lax çiftinin bulunması verilen sistemin integrallenebilirliği için bir kriterdir. Bir başka deyişle, eğer Lax çifti bulunabilirse, verilen sistem integrallenebilirdir denir.

İntegrallenebilen sistemler için kullanılan bir başka yaklaşım ise Hamiltoniyen yapılardır. Verilen lineer olmayan sistemin, temeli oluşturan faz uzayında bulunan bir Hamiltoniyen yapısına göre Hamiltoniyen dinamik sistem olarak yazılması bu yaklaşımın temelini oluşturur. $2n$ boyutlu bir simplektik manifold üzerinde tanımlanan sonlu boyutlu Hamiltoniyen sistemlerde Liouville anlamında integrallenebilirlik; birbiriyle involüsyonda ve fonksiyonel bağımsız n tane ilk integral bulunması olarak verilir. İntegrallenebilirlik kavramı, bir anlamda hareket integrallerinin varlığı anlamına gelir. Tam integrallenebilirlik ise bu hareket integrallerinin belirli(yeterli) sayıda olmasını ifade eder. M serbestlik dereceli bir Hamiltoniyen sistemde $M - 1$ adet yukarıdaki özellikleri sağlayan hareket integrali varsa, tam integrallenenbilirdir denir.

Painlevé testi, lineer olmayan denklemlerin lineer problem aracılığıyla integrallenebilir olup olmayacağını inceler. Painlevé testine göre; çözümdeki tüm hareketli tekil noktalar kutup noktası ise denklem integrallenebilirdir. Burada hareketli kelimesi ile ifade edilmek istenen, tekilliğin başlangıç değerlerinin fonksiyonu şeklinde yer değiştirmesidir. Painlevé testi tekil nokta analizi olarak da bilinir. Bir diferensiyel denklemin integrallenebilirliği, o denklemin tekillik analizi ile yakından ilişkilidir. Bugüne kadar yapılan çalışmalarda integrallenebilir denklemlerin Painlevé özelliğini sağladığı gösterilmiştir.

Hirota'nın bilineer metodu, soliton ve çoklu soliton çözümlerinin bulunması için kullanılan gayet etkili ve kullanışlı bir metottur. Eğer verilen denklem, yeni bir bağımsız değişken ve Hirota türev operatörleri kullanılarak bilineer formda yazılabilirse, çoklu soliton çözümleri elde edilir. Kesin bir gösterge olmamakla birlikte verilen sistemin çoklu soliton çözümlerinin bulunması da integrallenebilirlik kriteri olarak kabul edilir. Bu metot, ilgili denklemin bilineer formunu bularak Bäcklund dönüşümünü bulmak için kolaylık sağlar. Hirota'nın metodunun çoklu soliton çözüm bulmaya yarayan diğer metotlara olan üstünlüğü, analitik olmasından ziyade cebirsel olmasıdır.

2.1 Lax Çiftleri

L, spektral operatör ve M ise özfonksiyonların ilgili zaman oluşumlarını ifade eden operatör olmak üzere;

$$L\phi = \lambda\phi \tag{1}$$

$$\phi_t = M\phi \tag{2}$$

lineer denklem çiftini ele alalım. (1) eşitliğinin zamana göre türevini alırsak, (2) eşitliğide kullanılarak

$$\begin{aligned}
L_t\phi + L\phi_t &= \underbrace{\lambda_t}_{0}\phi + \lambda\phi_t \\
L_t\phi + LM\phi &= \lambda M\phi \\
L_t\phi + LM\phi &= M\lambda\phi \\
L_t\phi + LM\phi &= ML\phi \\
L_t\phi + (LM - ML)\,\phi &= 0 \\
\left[L_t + (LM - ML)\right]\phi &= 0 \\
L_t &= [M, L] = ML - LM \qquad (3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki L ve M diferensiyel operatörlerine Lax çiftleri, (3) denkleminede Lax denklemi adı verilir.

Örneğin

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x \tag{4}$$

KdV denklemi için Lax çifti

$$L = \partial_x^2 + u,\ M = 4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x \tag{5}$$

ile verilir.

$$L_t v = \frac{\partial}{\partial t}(Lv) - L\frac{\partial v}{\partial t} \tag{6}$$

yazılabilir. İlgili terimler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L_t v &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\partial_x^2 + u\right)v\right) - \left(\partial_x^2 + u\right)\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}v \\ &\Longrightarrow \quad L_t = \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} [M,L]v &= (ML)\,v - (LM)\,v \\ &= M\,(Lv) - L\,(Mv) \\ &= \left(4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + uv\right) - \left(\partial_x^2 + u\right)\left(4\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial v}{\partial x} + 3u_x v\right) \\ &= 6u\frac{\partial u}{\partial x}v + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}v = \left(6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)v \end{aligned}$$

olduğundan

$$L_t = [M,L] \Longrightarrow u_t = u_{xxx} + 6uu_x$$

sağlanır (Taşcan, 2002).

2.2 Korunum Kanunları

T ve X , $u(x,t)$ değişkenine bağlı fonksiyonlar olmak üzere, $u_t = K[u]$ oluşum denklemi için korunum kanunu

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = T_t + X_x = 0 \tag{7}$$

şeklindedir. $T[u]$ ve $X(u)$ sırasıyla, u ve u fonksiyonunun x değişkenine göre türevlerini içeren korunumlu yoğunluk ve karşı gelen akıdır. T_t ve X_x ifadeleri sırasıyla, t ve x

değişkenlerine göre tam türevler olup

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{\partial T}{\partial u}u_t + \frac{\partial T}{\partial u_x}u_{tx} + \frac{\partial T}{\partial u_{xx}}u_{txx} + ..., \\ X_x &= \frac{\partial X}{\partial u}u_x + \frac{\partial X}{\partial u_x}u_{xx} + \frac{\partial X}{\partial u_{xx}}u_{xxx} + ... \end{aligned} \tag{8}$$

şeklinde tanımlanırlar. Eğer T, u değişkenine bağlı bir fonksiyon ise, yani herhangi bir T fonksiyonunun değeri yalnızca x değişkeninin küçük bir komşuluğundaki u fonksiyonuna bağlı ise T lokal yoğunlukludur. Benzer şekilde X fonksiyonu da lokal ise $T_t + X_x = 0$ ifadesine lokal korunum kanunu denir.

Özel olarak T açıkça x yada t değişkenlerine bağlı olmayıp u ve u nun x değişkenlerine göre türevlerine bağlı polinomsal bir ifade ise, T fonksiyonuna polinomsal korunumlu yoğunluk denir. X de aynı şartları sağlayan bir fonksiyon ise (7) ifadesi polinomsal korunum kanunudur.

(7) ifadesinin x değişkenine göre integrali alınırsa,

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial t} T dx + [X]_A^B = \frac{d}{dt}\int_A^B T dx + [X]_A^B = 0 \tag{9}$$

elde edilir.

$(B - A)$ nın periyodun tam katı olduğu veya $u(x,t)$ nin $x \to \mp\infty$ ve $(A,B) = (-\infty,\infty)$ iken sıfıra gittiği uygun periyodik sınır koşulları altında (9) denklemi

$$\frac{d}{dt}\int_A^B T dx = 0$$

olur. Buradan

$$\int_A^B T dx = c, \quad (c\ sabit) \tag{10}$$

hareket sabiti elde edilir. Örneğin (4) KdV denklemi için korunum kanunları

$$\begin{array}{ll} T_0 = u & X_0 = -3u^2 + u_{xx} \\ T_1 = \frac{1}{2}u^2 & X_1 = -2u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 \\ T_2 = u^3 - \frac{1}{2}u_x^2 & X_2 = u_x u_{xxx} - \frac{1}{2}u_{xx}^2 - 3u^2 u_{xx} + 6uu_x^2 - \frac{9}{2}u^4 \\ \vdots & \vdots \end{array} \tag{11}$$

olarak verilmiştir (Taşcan, 2002).

2.3 Bäcklund Dönüşümleri

Bäcklund dönüşümü kavramı, negatif eğrilik çalışmaları sırasında bulunmuş olup, integrallenebilen kısmi diferensiyel denklemlerin çoklu soliton çözümlerini bulmak için bir yol teşkil eder. Bäcklund dönüşümü çeşitli soliton problemlerinde önemli rol oynar ve Lax çifti, lineer olmayan üst üste bindirme kuralı, korunum kanunları gibi integrallenebilirlik kriterleri ile yakından ilgilidir. Bäcklund dönüşümü, bir kısmi diferensiyel denklemin bilinen bir çözümünden yeni bir çözüm elde etmeye yada farklı kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri arasında geçişi mümkün kılar. Bäcklund dönüşümü,

- Değişim(exchange) formülleri yardımıyla,
- Painleve açılımı yardımıyla,
- $\Gamma - Riccati$ denklemi yardımıyla,
- Dengeleme kuralı(balancing act) yardımıyla
- Bell polinomu yaklaşımıyla,

elde edilebilir. Literatürde değişim formülleri

$$\begin{aligned} \left[D_x^2\left(a\cdot a\right)\right]b^2-a^2\left[D_x^2\left(b\cdot b\right)\right] &= D_x\left[\left(D_xa\cdot b\right)\cdot ba+ab\cdot\left(D_xb\cdot a\right)\right] \\ &= 2D_x\left(D_xa\cdot b\right)\cdot ba \end{aligned}$$

$$\left[D_xD_t\left(a\cdot a\right)\right]b^2-a^2\left[D_xD_t\left(b\cdot b\right)\right]=2D_x\left(D_ta\cdot b\right)\cdot ba$$

$$\left[D_x^4\left(a\cdot a\right)\right]b^2-a^2\left[D_x^4\left(b\cdot b\right)\right]=2D_x\left[\left(D_x^3a\cdot b\right)\cdot ba+3\left(D_x^2a\cdot b\right)\cdot\left(D_xb\cdot a\right)\right]$$

şeklinde verilir.

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{12}$$

KdV denklemi $u=2\left(\log f\right)_{xx}$ dönüşümü yardımıyla

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(f_{xt}f-f_xf_t+f_{xxxx}f-4f_{xxx}f_x+3f_{xx}^2\right)/f^2\right]=0 \tag{13}$$

denklemine dönüşür. (13) denklemide Hirota türevleri yardımıyla

$$(D_xD_t+D_x^4)f\cdot f=0$$

şeklinde ifade edilebilir. Devamında değişim formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned} P &\equiv \left[\left(D_xD_t + D_x^4\right) f' \cdot f'\right] f^2 - f'^2 \left[\left(D_xD_t + D_x^4\right) f \cdot f\right] \\ &= 2D_x \left(D_t f' \cdot f\right) \cdot f f' + 2D_x \left[\left(D_x^3 f' \cdot f\right) \cdot f f' + 3 \left(D_x^2 f' \cdot f\right) \cdot \left(D_x f \cdot f'\right)\right] \\ &= 2D_x \left[\left(D_t + D_x^3\right) f' \cdot f\right] \cdot f f' + 6D_x \left[\left(D_x^2 f' \cdot f\right) \cdot \left(D_x f \cdot f'\right)\right] \end{aligned}$$

yazılabilir. $P = 0$ olacak şekilde

$$\left(D_t + D_x^3\right) f' \cdot f = 0 \tag{14}$$

ve

$$D_x^2 f' \cdot f = k D_x f \cdot f' \tag{15}$$

alınırsa, (14)-(15) çifti (12) denklemi için Bäcklund dönüşümünü oluşturur (Hirota, 2004).

2.4 Ters Saçılım Dönüşümü

Ters saçılım dönüşümü metodu; Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından geliştirilmiştir. Bu metodun amacı yeterince hızlı bozulan başlangıç değerleriyle verilen (4) KdV denkleminin tam çözümünü bulmaktır. Yani; $f(x) : |x| \longrightarrow \infty$ iken yeterince hızlı bozulan bir fonksiyon olmak üzere,

$$x \in \mathbb{R},\ t \geq 0,\ u(x,0) = f(x) \tag{16}$$

başlangıç şartıyla verilen (4) KdV denklemini çözmektir.

$$u = w - \varepsilon w_x - \varepsilon^2 w^2 \tag{17}$$

ile verilen Gardner dönüşümü Riccati tipi diferensiyel denklem olup,

$$w = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\phi_x}{\phi} + \frac{1}{2\varepsilon^2}$$

dönüşümü yapılırsa, $\lambda = \frac{1}{4\varepsilon^2}$ olmak üzere

$$L\phi := \phi_{xx} + u(x,t)\phi = \lambda\phi \tag{18}$$

şeklinde lineerleştirilebilir. Bu denklem, kuantum teoride $u(x,t)$, potansiyel ve λ enerji olmak üzere, zaman bağımlı Schrödinger denklemi olarak bilinir.

(18) denkleminin özfonksiyonlarının zaman oluşumu,

$$\phi_t = P\phi = 4\phi_{xxx} + 6u\phi_x + 3u_x\phi \tag{19}$$

ile verilir. $\lambda_t = 0$ kabulü ile, (18) ve (19) denklemlerinden $\phi_{xxt} = \phi_{txx}$ değişimlilik şartının sağlanması için gerekli koşul, u nun (4) KdV denklemini sağlamasıdır. Benzer şekilde (4) KdV denklemi sağlanıyorsa, özdeğerler zamandan bağımsız olmalıdır.

Adi diferensiyel denklemlerin spektral teorisine göre, (4) denklemi için $\lambda_n = \kappa_n^2$, $n = 1, 2, ..., N$ sonlu ayrık özdeğerler vardır. Sınırlardaki çözülüme bakılırsa,

$$\begin{aligned} x &\rightarrow -\infty \text{ için } \phi_n(x) \sim e^{\kappa_n x} \\ x &\rightarrow \infty \text{ için } \phi_n(x) \sim b_n(t)e^{-\kappa_n x} \end{aligned} \tag{20}$$

bulunur.

$\lambda = -k^2$ sürekli spektrumu için karşı gelen sınır şartları ise,

$$\begin{aligned} x &\rightarrow -\infty \text{ için } \phi_n(x) \sim T(k,t)e^{-ikx} \\ x &\rightarrow \infty \text{ için } \phi_n(x) \sim e^{-ikx} + R(k,t)e^{ikx} \end{aligned} \tag{21}$$

dir. Buradaki $T(k,t)$ ve $R(k,t)$ fonksiyonları geçiş ve yansıma katsayılarıdır. Verilen $u(x)$ potansiyeli ile $\kappa_n, b_n, R(k,t), T(k,t)$ ifadeleri hesaplanabilir.

Genel olarak t zamanındaki saçılım verisi

$$S(\lambda,t) = \left\{(\kappa_n, b_n)_{n=1}^N,\ R(k,t), T(k,t),\ k\ reel\right\}$$

ile verilir.

$t = 0$ zamanında $S(\lambda, 0)$ saçılım verisi verildiğinde, herhangi bir t zamanındaki saçılım verisi oluşturulabilir. Buradaki problem, saçılım verisinden (4) KdV denkleminin istenen çözümü olan $u(x,t)$ potansiyelinin oluşturulmasıdır. Gel'fand ve Levitan, $S(\lambda,t)$ saçılım verisinin $u(x,t)$ potansiyelinin elde edilmesi için yeterli olduğunu göstermişlerdir.

KdV denkleminin çözümü ters saçılım metodu kullanılarak aşağıdaki gibi üç adımda bulunabilir:

(i) $u(x,0) = u_0(x)$ başlangıç koşullarından, $t = 0$ zamanında S_0 saçılım verisi oluşturulur.

(ii) $u(x,t)$ ye karşı gelen genel t zamanı için $S(\lambda,t)$ saçılım verisi hesaplanır.

(iii) $S(\lambda,t)$ saçılım verisinden $u(x,t)$ potansiyeli bulunur.

Burada ilk adım direkt spektral problem, üçüncü adım ise ters spektral problem olarak bilinir (Bekir, 2005).

2.5 Painlevé Analizi

Painlevé analizinin esas mantığı, serbest değişkeni içeren düzlemde, genel çözümün sahip olduğu tekillikleri (kutuplar, cebirsel ve logaritmik dallanma noktaları ve esas tekillikler) bulmak, cinslerini belirlemek ve çözümün hangi şartlar altında meramorfik olduğunu araştırmaktır. Verilen bir lineer olmayan dinamik sistem, Painlevé özelliğine sahip bir diferensiyel denklem sistemi ile ilişkilendiriliyorsa, bu dinamik sistemin integrallenebilir olması ve çözümünün hareketli bir tekil nokta civarında bir Laurent serisine açılması beklenir.

Literatürde, adi diferensiyel denklemler için Painlevé özelliğinin bilinen üç tanımı vardır:

(i) Diferensiyel denklemin çözümlerinin hareketli tekillikleri kutupsa, özelleştirilmiş Painlevé özelliğine sahiptir.

(ii) Diferensiyel denklemin çözümleri bütün hareketli tekilliklerin etrafında tek değerli ise, Painlevé özelliğine sahiptir.

(iii) Genel çözüm, bütün hareketli tekilliklerin etrafında tek değerli ise genelleştirilmiş Painlevé özelliğine sahiptir.

Kısmi diferensiyel denklemler için Ablowitz-Ramani-Segur(ARS) yöntemi formüle edilir. ARS yöntemi kullanışlı olmasından dolayı, verilen kısmi diferensiyel denklemin bütün indirgemelerinin bulunmasını gerektirir. Ancak bütün indirgemelerin bulunması zor olacağından, yeni bir yöntem ortaya atılmıştır. Bu bağlamda ARS yöntemi, bir " tekillik manifoldu" civarında açılım kavramı getiren Weiss vd. (1983) tarafından, adi diferensiyel denkleme indirgemeden kısmi diferensiyel denklemlerin doğrudan incelenmesine imkan verecek şekilde genişletilmiştir. Daha sonra, tekillik manifoldu belli bir kısmi diferensiyel denklemi sağladığında sonsuz serinin kesilebileceğini ve eldeki lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin sonlu seri şeklinde bir özel çözümünün bulunabileceğini göstermişlerdir. Bu işlem aynı zamanda, diferensiyel denklemin Bäcklund dönüşümünü bulmaya da imkan sağlamaktadır. Weiss vd. (1983), tekillik manifoldunun, bu denkleme ilişkin lineer spektral problemin dalga fonksiyonu ile olan ilintisini de kanıtlamışlardır. Bu, Painlevé açılımı ile ters saçınım dönüşümü arasındaki ilişkiyi de vermiştir.

Weiss'e göre, kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri karakteristik olmayan tekillik manifoldu $\phi(z_1, z_2, ..., z_n)$ için tek değerli ise, bu kısmi diferensiyel denklem Painlevé özelliğine sahiptir. Burada z_i ler bağımsız değişkenlerdir.

Eğer lineer olmayan bir kısmi diferensiyel denklemin bir çözümü $\phi(z_1, z_2, ..., z_n) = 0$ tekillik manifoldu ve hareketli tekillikte bir seriye açılırsa, bu kısmi diferensiyel denklemin Painlevé özelliği doğrulanmış olur.

$$H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, ...) = 0 \tag{22}$$

kısmi diferensiyel denkleminin bir çözümü $u = u(z_1, z_2, ..., z_n)$ ve

$$u = \phi^p \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \tag{23}$$

olsun. Burada ϕ ve $u_j = u_j(z_1, z_2, ..., z_n)$, $\phi(z_1, z_2, ..., z_n) = 0$ manifoldunun bir komşuluğunda $(z_1, z_2, ..., z_n)$ değişkeninin bir analitik fonksiyonudur. (23) çözümünü (22) kısmi diferensiyel denkleminde yerine yazarsak, p nin olası bütün değerlerini bulur ve u_j, $(j = 1, 1, 2, ...)$ için tekrarlanan bağıntıyı belirleriz. p negatif tamsayı iken, $\phi(z_1, z_2, ..., z_n) = 0$ sağlanırsa ve (23) ifadesi manifoldun genel açılımı ise, çözüm (23) ün tek değerli gösterimi olur. Eğer bu gösterim bütün hareketli tekillik manifoldları için geçerli ise, bu durumda kısmi diferensiyel denklemin Painlevé özelliği vardır (Bekir, 2005).

2.6 Dalga Çözümleri

Dalga çözümleri fizik, mühendislik, uygulamalı matematik gibi alanlarda kullanılan ksmi diferensiyel denklemlerin bir çözüm sınıfını oluştururken, kendi içinde de çeşitleri mevcuttur. Bunlardan en temeli soliter dalgadır. Soliter dalga kabaca tek dalga anlamına gelir. Soliton dalga ise sabit hız altında şeklini koruyarak hareketine devam eden bir soliter dalga çeşididir. Solitonların en büyük özelliği, diğer solitonlarla etkileşime girdiklerinde şekillerinde değişikliğe uğramadan hareketlerine devam etmeleridir. Bell formlu dalgalar, şekilleri Bell eğrisine benzediği için bu isimle anılırlar. Şok dalgaları ise menziline oranla daha fazla enerji yayılımı gösteren dalga türüdür ve şekilleri itibari ile ayırt edilebilir. Kink dalga türü ise şekil itibari ile şok dalgalarına benzemekle birlikte enerji yayılımı konusunda ayrışırlar.

İzleyen bölümde, Bell polinomu yaklaşımı kullanılarak bir lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem ve bir de sistemin bilineer formu, Bäcklund dönüşümü, soliton çözüm, Lax çifti araştırılmıştır. Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş türevler yardımıyla yazılan genelleştirilmiş bilineer denklemlere N-dalga çözümleri elde edilmiş ve bu çözümler için gerek ve yeter şartları ihtiva eden teoremler verilmiştir. Takip eden bölümde, literatürdeki Sawada Kotera ve dokuzuncu mertebeden KdV denklemi için kompleksiton çözümler elde edilmiştir. Son bölümde ise önceki bölümlerdeki çalışmalara ilişkin sonuçlar verilip, devam niteliğinde yapılabilecek çalışmalardan bahsedilmiştir.

3. BELL POLİNOMU YAKLAŞIMI

Birinci bölümde lineer olmayan diferensiyel denklemlerin integrallenebilirliğini incelemek için birçok yöntem olduğu belirtilmiştir. Bu yöntemlerden birkaçını aynı çalışma içinde inceleme imkanı sunan önemli bir yöntem Bell polinomu yaklaşımıdır. Bu yaklaşım kapsamında, verilen denklem için eğer mümkünse bilineer form, çoklu soliton çözüm, Bäcklund dönüşümü, Lax çifti, korunum kanunları elde edilmeye çalışılır. Bell polinomu yaklaşımı bilineerleştirilebilir denklemleri karakterize etmek için gayet kullanışlı bir araçtır. Lambert ve Springael (2008) ve Gilson vd. (1996) Bell polinomlarını kullanarak bilineer form, bilineer Bäcklund dönüşümü, Lax çifti, Darboux dönüşümü elde etmek için Bell polinomu yaklaşımını ilk olarak literatüre kazandırmışlardır. Ayrıca Lambert ve Springael (2001), Bell polinomu yaklaşımını lineer olmayan diferensiyel denklem sistemleri ve diferensiyel denklem sistemine dönüştürülebilen lineer olmayan diferensiyel denklemler için genelleştirmişlerdir. Daha sonra Fan (2011), bu metodu eş spektrumlu ve değişken katsayılı denklemlerin tam integrallenebilirliğini inceleyecek şekilde genelleştirmiş ve verilen lineer olmayan oluşum denklemlerinin sonsuz korunum kanunlarını elde etmeye yarayan bir metot ortaya koymuştur. Bu metot, yapılan bu öncül çalışmalardan sonra çeşitli yazarlar tarafından değişik denklemlere uygulanmıştır (Sun vd., 2014), (Qin vd., 2012), (Wang vd., 2012), (Wang vd., 2011), (Jiang vd., 2013), (Yi vd., 2011).

3.1 Bell Polinomları ve İkili Bell Polinomları

Bu kısımda, Bell polinomları için temel bilgiler verilecektir. Daha detaylı bilgi için (Bell, 1934), (Lambert vd., 1994, 2001a, 2001 b), (Lambert ve Springael, 1997), (Luo, 2011), (Jiang vd., 2010) çalışmalarına bakılabilir. C^{∞} da, $f = f(x_1, x_2, ..., x_l)$ çok değişkenli fonksiyonu verilsin. Çok boyutlu Bell polinomları

$$\begin{aligned} Y_{n_1 x_1,...,n_l x_l}(f) &= Y_{n_1,...,n_l}(f_{r_1 x_1,...,r_l x_l}) \\ &= e^{-f}\partial_{x_1}^{n_1}...\partial_{x_l}^{n_l} e^{f}, \end{aligned} \tag{24}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$f_{r_1x_1,...,r_lx_l} = \partial_{x_1}^{r_1}...\partial_{x_l}^{r_l} f,$$

$$r_1 = 0, ..., n_1 \ ; ...; \ r_l = 0, ..., n_l. \tag{25}$$

olarak verilir. $x_1, x_2, ...x_l$ bağımsız değişkenleri, $r_1, r_2, ...r_l$ ise sırasıyla bu değişkenlere karşılık gelen kısmi türevlerin mertebelerini göstermektedir. En basit hal olarak $f = f(x)$ alınırsa, tek boyutlu Bell polinomları

$$\begin{aligned} Y_1 &= f_x, Y_2 = f_{2x} + f_x^2, \\ Y_3 &= f_{3x} + 3f_x f_{2x} + f_x^3, \quad (26) \\ &\vdots \quad (27) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde, eğer fonksiyon $f = f(x,t)$ şeklinde iki bağımsız değişkene sahipse, buna karşılık gelen iki boyutlu Bell polinomları da

$$\begin{aligned} Y_{x,t} &= f_{x,t} + f_x f_t, \\ Y_{2x,t} &= f_{2x,t} + f_{2x} f_t + 2f_{x,t} f_x + f_x^2 f_t, \quad (28) \\ Y_{3x,t} &= f_{3x,t} + 3f_{2x,t} f_x + f_{3x} f_t + 3f_{x,t} f_{2x} + f_x^3 f_t, \quad (29) \\ &\vdots \quad (30) \end{aligned}$$

ile verilir. Diğer yandan çok değişkenli ikili Bell polinomları

$$\mathcal{Y}_{n_1x_1,...,n_lx_l}(v,w) = Y_{n_1,...,n_l}(f) \tag{31}$$

olmak üzere,

$$f_{r_1x_1,...,r_lx_l} = \begin{cases} v_{r_1x_1,...,r_lx_l}, \ r_1 + ... + r_l \text{ tek ise} \\ w_{r_1x_1,...,r_lx_l}, \ r_1 + ... + r_l \text{ çift ise} \end{cases} \tag{32}$$

olarak tanımlanır. En düşük mertebeden birkaç ikili Bell polinomları

$$\begin{aligned} &\mathcal{Y}_x(v) = v_x, \ \mathcal{Y}_{2x}(v,w) = w_{2x} + v_x^2, \\ &\mathcal{Y}_{x,t}(v,w) = w_{x,t} + v_x v_t, \\ &\mathcal{Y}_{3x}(v,w) = v_{3x} + 3v_x w_{2x} + v_x^3, \\ &\mathcal{Y}_{4x}(v,w) = w_{4x} + 3w_{2x}^2 + 4v_x v_{3x} + 6v_x^2 w_{2x} + v_x^4, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{33}$$

şeklinde verilebilir.

İkili Bell polinomlarının özel bir hali P-polinomlarıdır ve $\mathcal{Y}_{n_1x_1,\ldots,n_lx_l}(v=0,w)=P_{n_1x_1,\ldots,n_lx_l}(w)$ eşitliği ile verilir. (33) yardımıyla

$$\begin{aligned} &P_{2x}(w)=w_{2x},\ P_{x,t}(w)=w_{x,t},\\ &P_{4x}(w)=w_{4x}+w_{2x}^2,\ P_{3x,y}(w)=w_{3x,y}+3w_{x,y}w_{2x},\\ &P_{6x}(w)=w_{6x}+15w_{2x}w_{4x}+15w_{2x}^3,\\ &\qquad\vdots \end{aligned} \tag{34}$$

eşitlikleri kolayca elde edilebilir.

$\mathcal{Y}$-polinomları ve $D_{x_1}^{n_1}\ldots D_{x_l}^{n_l}F.G$ Hirota bilineer formülü arasındaki ilişki

$$\mathcal{Y}_{n_1x_1,\ldots,n_lx_l}(v=\ln F/G,w=\ln FG)=(FG)^{-1}D_{x_1}^{n_1}\ldots D_{x_l}^{n_l}F.G, \tag{35}$$

eşitliği ile verilir. Burada $n_1+n_2+\ldots+n_l\geq 1$ dir ve $D_{x_1},\ldots,D_{x_l}$ türev operatörleri klasik Hirota bilineer türev operatörleridir ve

$$D_{x_1}^{n_1}\ldots D_{x_l}^{n_l}F.G=\left(\partial_{x_1}-\partial_{x_1'}\right)^{n_1}\ldots\left(\partial_{x_l}-\partial_{x_l'}\right)^{n_l}F(x_1,\ldots,x_l)\times G(x_1',\ldots,x_l')\,|_{x_1'=x_1,\ldots,x_l'=x_l} \tag{36}$$

ile tanımlanır. Bu formül lineer olmayan oluşum denklemlerinin, bilineer Bäcklund dönüşümünü elde etmek için kullanılır. Eğer lineer olmayan bir oluşum denklemi $\mathcal{Y}$-polinomlarının lineer toplamı şeklinde yazılabilirse, (36) eşitliği sayesinde verilen denklemin bilineer Bäcklund dönüşümü elde edilebilir.

Ayrıca $v=\ln\psi$ Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla, verilen denklemin ikili Bell polinomları ve Lax çifti arasında bir geçiş yapmak mümkündür. Bunu gerçekleştiren eşitlik

$$\mathcal{Y}_{n_1x_1,n_2x_2}(v=\ln\psi,w=v+Q)=\psi^{-1}\sum_{r=0}^{n_1}\sum_{s=0}^{n_2}\binom{n_1}{r}\binom{n_2}{s}\mathcal{Y}_{rx_1,sx_2}(0,Q)\,\partial_{x_1}^{n_1-r}\partial_{x_2}^{n_2-s}\psi \tag{37}$$

dir. Burada ψ ve Q, x_1 ve x_2 değişkenlerinin fonksiyonlarıdır.

(35) eşitliğinde özel olarak $F=G$ alınırsa Hirota türevleriyle P-polinomları arasındaki ilişkiyi veren

$$F^{-2}D_{x_1}^{n_1}\ldots D_{x_l}^{n_l}F.F=\mathcal{Y}_{n_1x_1,\ldots,n_lx_l}(0,w=2\ln F)=\begin{cases}0,\ n_1+\ldots+n_l\ \text{tek}\\ P_{n_1x_1,\ldots,n_lx_l}(w),\ n_1+\ldots+n_l\ \text{çift},\end{cases} \tag{38}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikten de anlaşılacağı gibi P-polinomları, $\mathcal{Y}$-polinomlarında v değişkenlerinin sıfır alınmasıyla geriye kalan terimlerden oluşan yeni polinomlardır. Bu formül, lineer olmayan oluşum denklemleri ile bunlara karşılık gelen bilineer denklemleri elde etmek için kullanılır. Yani, eğer lineer olmayan bir oluşum denklemi $\mathcal{Y}$-polinomlarının lineer toplamı şeklinde yazılabilirse, (38) eşitliği sayesinde verilen denkleme karşılık gelen bilineer denklem bulunabilir.

Bell polinomları teorisinde, kullanılan bir diğer kolaylık ise $\mathcal{Y}_{n_1x_1,\ldots,n_lx_l}(v,w)$ polinomlarının P-polinomları ve Y-polinomları cinsinden yazılabileceğidir. Bu ise aşağıdaki

$$\begin{aligned}(FG)^{-1}\,D_{x_1}^{n_1}...D_{x_l}^{n_l}F.G &= \mathcal{Y}_{n_1x_1,\ldots,n_lx_l}(v,w)\mid_{v=\ln F/G,w=\ln FG}\\ &= \mathcal{Y}_{n_1x_1,\ldots,n_lx_l}(v,v+q)\mid_{v=\ln F/G,q=2\ln G}\\ &= \sum_{n_1+\ldots+n_l=even}\sum_{r_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{r_l=0}^{n_l}\prod_{i=1}^{l}\binom{n_i}{l_i}P_{r_1x_1,\ldots,r_lx_l}(q)\\ &\quad\times Y_{(n_1-r_1)x_1,\ldots,(n_l-r_l)x_l}(v)\,.\end{aligned} \tag{39}$$

eşitliğiyle gerçekleştirilir. $v=\ln\psi$ Hopf-Cole dönüşümü altında $\psi=F/G$ olmak üzere çok boyutlu Bell polinomları $Y_{n_1x_1,\ldots,n_lx_l}(v)$

$$Y_{n_1x_1,\ldots,n_lx_l}(v)\mid_{v=\ln\psi}=\frac{\psi_{n_1x_1,\ldots,n_lx_l}}{\psi} \tag{40}$$

eşitliğiyle lineerleştirilebilir. (39) ve (40) beraber düşünüldüğünde $\mathcal{Y}_{n_1x_1,\ldots,n_lx_l}(v,w)$ polinomlarının da lineerleştirilebileceği görülebilir ve bu da verilen lineer olmayan oluşum denkleminin Lax çiftinin elde edilmesinde etkili bir yöntem oluşturur.

3.2 Bell Polinomu Yaklaşımı ve (2+1) Boyutlu BKP Denklemi

Bu kısımda daha önce Hirota (2004) tarafından incelenmiş (2+1) boyutlu

$$u_{xxxy}+3u_yu_{xx}-3u_{xx}+3u_xu_{xy}+2u_{yt}=0 \tag{41}$$

BKP denkleminin Bell polinomu yaklaşımı altında incelemesini yapacağız (Bekir, 2005, 2007).

İlk olarak bilineer temsili bulmak için x,y,t bağımsız değişkenlerini içeren q fonksiyonunu tanımlayalım. q fonksiyonu,

$$u=q_x+\phi(y) \tag{42}$$

özelliğini sağlayan bir fonksiyon ve ϕ, y değişkeninin bir fonksiyonudur. (42) eşitliğini (41) de yerine yazıp, x değişkenine göre integre edilirse ve integral sabitini sıfır kabul edersek,

$$E(q) = q_{xxxy} + 3q_{xy}q_{xx} + 3\phi'(y)q_{xx} - 3q_{xx} + 2q_{yt} = 0 \tag{43}$$

elde edilir. (43) eşitliği (34) yardımıyla

$$E(q) = 2P_{yt}(q) + P_{xxxy}(q) + (3\phi'(y) - 3)\, P_{xx}(q) = 0 \tag{44}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu eşitlik, (43) eşitliğinin P-polinomu formudur.

$$q = 2\ln F \iff u = q_x + \phi(y) = 2\left(\ln F\right)_x + \phi(y),$$

alınırsa, (38) yardımıyla (41) denkleminin bilineer temsili

$$\left(2D_yD_t + D_x^3D_y + (3\phi'(y) - 3)\, D_x^2\right) F.F = 0 \tag{45}$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu bilineer denklem, Hirota'nın bilineer metodu ile aşağıda anlatıldığı gibi çözülerek çoklu soliton çözümleri bulunabilir.

$F(x, y, t)$ fonksiyonu $f_i = f_i(x, y, t)$, $i = 1, 2, ...$ olmak üzere

$$F = 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + ... \tag{46}$$

formunda bir fonksiyon olsun.

(46) fonsiyonunu (45) denkleminde yerine yazarak ve elde edilen ifadeyi ϵ nun kuvvetlerine göre toplayarak, herbir katsayının sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen denklemlerin çözülmesi ile soliton çözümler elde edilir:

(i) Bir-soliton çözüm

$$\begin{aligned} &F = 1 + f_1,\; f_1 = e^{\xi_1},\; \xi_1 = \kappa_1 x + l_1 y + w_1 t + \xi_1^0 \\ &w_1 = (3 - 3\phi'(y))\,\tfrac{\kappa_1^2}{2l_1} - \tfrac{\kappa_1^3}{2},\; f_i = 0,\; i = 2, 3, ... \end{aligned} \tag{47}$$

olmak üzere gerekli işlemler yapıldığında bir-soliton çözüm

$$u = q_x + \phi(y) = 2\left[\ln\left(1 + e^{\kappa_1 x + l_1 y + \left((3-3\phi'(y))\frac{\kappa_1^2}{2l_1} - \frac{\kappa_1^3}{2}\right)t + \xi_1^0}\right)\right]_x + \phi(y) \tag{48}$$

şeklinde elde edilir. $\phi(y)$ fonksiyonunun seçimine bağlı olarak elde çözüm grafikleri Şekil 3.1-3.3 de gösterilmiştir.

(ii) İki-soliton çözüm

$$F = 1 + f_1 + f_2,\ f_1 = e^{\xi_1} + e^{\xi_2},\ f_2 = e^{\xi_1+\xi_2+A_{12}},$$

$$e^{A_{12}} = (\phi'(y)(-2\kappa_2^2 l_2 l_1 - 2\kappa_1^2 l_2 l_1 + l_1^2\kappa_2^2 + \kappa_1^2 l_2^2 + 2l_2 l_1\kappa_1\kappa_2) + (2\kappa_2^2 + 2\kappa_1^2 - 2\kappa_1\kappa_2)l_2 l_1$$

$$+(\kappa_1^2\kappa_2 l_2 - \kappa_2^2 - \kappa_1\kappa_2^2 l_2)l_1^2 + (\kappa_1\kappa_2^2 l_1 - \kappa_1^2\kappa_2 l_1 - \kappa_1^2)l_2^2)/((\kappa_1^2\kappa_2 l_1 + \kappa_1\kappa_2^2 l_1 - \kappa_1^2)l_2^2$$

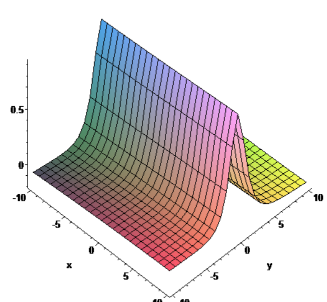
$$+(\kappa_1^2\kappa_2 l_2 + \kappa_1\kappa_2^2 l_2 - \kappa_2^2)l_1^2 + 2l_2 l_1\kappa_1\kappa_2 + (l_1^2\kappa_2^2 + \kappa_1^2 l_2^2 - 2l_2 l_1\kappa_1\kappa_2)\phi'(y))$$

$$\xi_i = \kappa_i x + l_i y + w_i t + \xi_i^0, w_i = (3 - 3\phi'(y))\,\tfrac{\kappa_i^2}{2l_i} - \tfrac{\kappa_i^3}{2},\ f_i = 0,\ i = 3, 4, ... \tag{49}$$

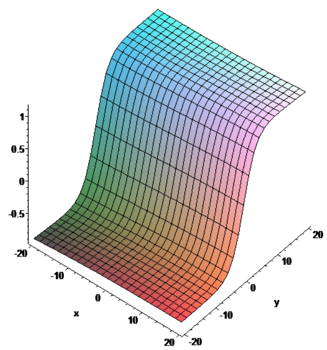
olmak üzere, karşılık gelen iki-soliton çözüm

$$u = q_x + \phi(y) = 2\left[\ln\left(1 + f_1 + f_2\right)\right]_x + \phi(y) \tag{50}$$

dir. Aşağıdaki şekiller yukarıda bulunan soliton çözümlere karşılık gelen grafiklerdir. $\phi(y)$ fonksiyonunun seçimine bağlı olarak grafikler çeşitli formlarda elde edilmiştir. Şekil 3.1-3.3, bir soliton çözümlere karşılık gelen Bell, Kink ve periyodik dalgaları göstermektedir ve sırasıyla $\phi(y)$ fonksiyonunun sech(y), tanh(y/4), sin(y) seçilmesiyle elde edilmiştir. Şekil 3.4-3.6, iki soliton çözümlere karşılık gelen grafiklerdir ve Bell, Kink, periyodik dalgaların etkileşimini göstermektedir.

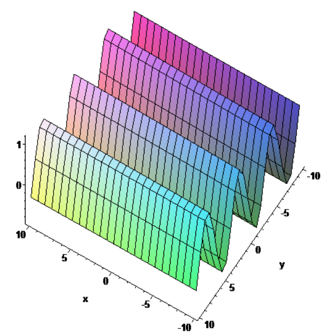


Şekil 3.1. Bell formlu soliter dalga
$t = 0, \kappa_1 = -0.1, l_1 = 0.2, \xi_1^0 = 0.4, \phi(y) = \sec h(y).$



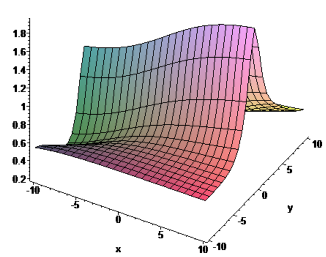
Şekil 3.2. Kink formlu soliter dalga

$t = 0, \kappa_1 = 0.1, l_1 = -0.1, \xi_1^0 = 0.2, \phi(y) = \tan h(y/4).$



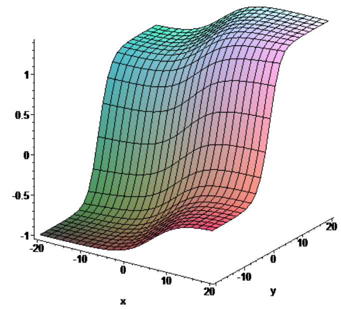
Şekil 3.3. Soliter periyodik dalga

$t = 0, \kappa_1 = 0.1, l_1 = 0.3, \xi_1^0 = 0.6, \phi(y) = \sin(y).$



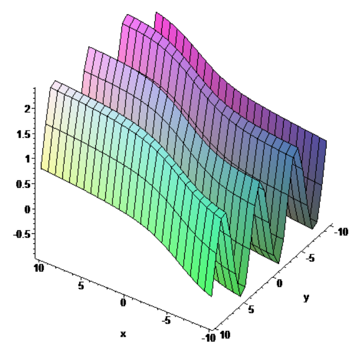
Şekil 3.4. İki Bell formlu dalganın etkileşimi

$t = 0, \kappa_1 = 0.3, \kappa_2 = 0.2, l_1 = -0.5, l_2 = 0.9, \xi_1^0 = 0.1, \xi_2^0 = 0.2, \phi(y) = \sec h(y).$



Şekil 3.5. İki Kink formlu dalganın etkileşimi

$t = 0, \kappa_1 = 0.3, \kappa_2 = -0.1, l_1 = 0.1, l_2 = 0.6, \xi_1^0 = 0.2, \xi_2^0 = 0.3, \phi(y) = \tan h(y/4).$



Şekil 3.6. İki soliter periyodik dalganın etkileşimi

$t = 0, \kappa_1 = 0.5, \kappa_2 = 0.2, l_1 = 0.3, l_2 = -0.1, \xi_1^0 = 0.1, \xi_2^0 = 0.2, \phi(y) = \sin(y).$

3.3 (2+1) Boyutlu BKP Denklemi İçin Bäcklund Dönüşümü ve Lax Çifti

Bu kısımda, (41) denkleminin bilineer Bäcklund dönüşümünü ve Lax çiftini elde edeceğiz. $\widetilde{q} = 2\ln F$ ve $q = 2\ln G$, (43) denkleminin iki farklı çözümü olsun. Böylelikle, bu iki çözümü kullanarak

$$E(\widetilde{q}) - E(q) = \left(\widetilde{q} - q\right)_{xxxy} + 3\widetilde{q}_{xy}\widetilde{q}_{xx} - 3q_{xy}q_{xx} + (3\phi'(y) - 3)\left(\widetilde{q} - q\right)_{xx} + 2\left(\widetilde{q} - q\right)_{yt} = 0 \tag{51}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik, verilen denklemin Bäcklund dönüşümünü bulmak için uygulanan metodun ilk basamağı olarak düşünülebilir. Bunun üzerine

$$\begin{aligned} v &= \left(\widetilde{q} - q\right)/2 = \ln\left(F/G\right) \\ w &= \left(\widetilde{q} + q\right)/2 = \ln\left(FG\right). \end{aligned} \tag{52}$$

şeklinde yeni iki değişken tanımlayalım. Bu yeni değişkenler yardımıyla (51) eşitliği

$$\partial_y\left[2\mathcal{Y}_t(v) + \mathcal{Y}_{xxx}(v,w)\right] + R(v,w) = 0 \tag{53}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$R(v,w) = -3v_x^2 - 3v_x w_{xxy} + 3w_{xy}v_{xx} + \left(3\phi'(y) - 3\right)v_{xx}. \tag{54}$$

artık terim olarak düşünülebilir. Amacımız bu atık terimi ya bazı $\mathcal{Y}$-polinomlarının y değişkenine göre türevi şeklinde şeklinde ifade etmek yada sıfıra götürmek. Bu amacımıza ulaşmak için izleyeceğimiz yoldaki diğer amacımız, (51) eşitliğinden bir çift elde etmek. Dolayısıyla bir kısıtlamaya ihtiyacımız var.

$$\mathcal{Y}_{xy}(v,w) + \phi'(y) - 1 = 0 \tag{55}$$

kısıtlamasını alalım. Gerekli işlemler yapıldığında

$$R(v,w) = 0$$

elde edilir. (53) ve (55) birlikte düşünüldüğünde, $\mathcal{Y}$-polinomlarının bir sistemi olan

$$\mathcal{Y}_{xy}(v,w) + \phi'(y) - 1 = 0 \tag{56}$$

$$2\mathcal{Y}_t(v) + \mathcal{Y}_{xxx}(v,w) = 0 \tag{57}$$

eşitlikleri verilir. (36), (56) ve (57) beraber ele alındığında bilineer Bäcklund dönüşümü

$$\begin{aligned} &\left(2D_t + D_x^3\right)F.G = 0 \\ &\left(D_x D_y + \phi'(y) - 1\right)F.G = 0 \end{aligned} \tag{58}$$

şeklinde elde edilir. $v = \ln\psi$ Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla ve (39)-(40) kullanılarak

$$\begin{aligned} &\mathcal{Y}_t(v) = \psi_t/\psi, \\ &\mathcal{Y}_{x,y}(v,w) = q_{xy} + \psi_{xy}/\psi, \\ &\mathcal{Y}_{3x}(v,w) = 3q_{2x}\psi_x/\psi + \psi_{3x}/\psi \end{aligned} \tag{59}$$

eşitlikleri üretilebilir. (59) eşitlikleri kullanılarak (56)-(57) sistemi Lax çifti formunda

$$\begin{aligned} L_1\psi &= 2\psi_t + \psi_{3x} + 3q_{2x}\psi_x = 0 \\ L_2\psi &= \psi_{xy} + \left(q_{xy} + \phi'(y) - 1\right)\psi = 0 \end{aligned} \tag{60}$$

şeklinde veya

$$L_1\psi = 2\psi_t + \psi_{3x} + 3u_x\psi_x = 0$$
$$L_2\psi = \psi_{xy} + (u_y - 1)\,\psi = 0 \tag{61}$$

veya bunlara denk olan

$$L_1 = 2\partial_t + \partial_x^3 + 3u_x\partial_x$$
$$L_2 = \partial_x\partial_y + u_y - 1 \tag{62}$$

şeklinde ifade edilebilir. Verilen Lax çiftinin

$$[L_1, L_2]\,\psi = 0$$

integrallenebilirlik şartını sağladığı kolayca gösterilebilir. İleri çalışmalarda eğer istenirse, (62) Lax çifti kullanılarak, (41) denkleminin Darboux ve ters saçınım dönüşümü elde dilebilir.

3.4 (2+1) Boyutlu BKP Denklemi İçin Korunum Kanunları

Bu kısımda, (41) denkleminin sonsuz korunum kanunlarını ikili Bell polinomları yardımıyla elde edeceğiz. Bunun için ilk olarak (53) eşitliğini $\mathcal{Y}$-polinomlarının lineer toplamının x ve y değişkenlerine göre türevlerine ayrıştırma işlemini gerçekleştirmeliyiz.

Yeni bir

$$\eta = \left(\widetilde{q}_y - q_y\right)/2 \tag{63}$$

potansiyel fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda

$$v_y = \eta,\;\; w_y = q_y + \eta. \tag{64}$$

eşitlikleri yazılabilir. (64) eşitlikleri (56) de yerine yazılırsa

$$\eta\partial_y^{-1}\eta_x + q_{xy} + \eta_x + \phi'(y) - 1 = 0 \tag{65}$$

elde edilir.

$$\eta = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} I_n\,(q, q_x, ...)\,\varepsilon^{-n} \tag{66}$$

eşitliğinin (65) de yerine yazılmasıyla

$$\left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} I_n\varepsilon^{-n}\right)\partial_y^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_{n,x}\varepsilon^{-n}\right) + q_{xy} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} I_{n,x}\varepsilon^{-n}\right) + \phi'(y) - 1 = 0 \tag{67}$$

elde edilir. Bu ifade ε değişkeninin kuvvetlerine göre düzenlenip, katsayılar sıfıra eşitlenirse korunumlu yoğunluklar

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\partial_x^{-1} u_{yy} \\
I_2 &= \partial_x^{-1} u_{yyy} \\
I_3 &= \partial_x^{-1}\left(-u_{yy}\partial_x^{-1}u_{yy} - u_y\partial_x^{-1}u_{yyy} - u_{yyyy}\right) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{68}$$

şeklinde elde edilir. Diğer yandan, (64) eşitlikleri (57) de yerine yazılırsa

$$2\partial_t(\eta) + \partial_y\left[\left(\partial_y^{-1}\eta_x^3\right) + 3\left(\partial_y^{-1}\eta_x\right)\partial_y^{-1}\left(q_{xxy}+\eta_{xx}\right)\right] + \partial_x(\eta_{xx}) = 0 \tag{69}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (66), (69) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\partial_t\left(2\varepsilon + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n\varepsilon^{-n}\right) + \partial_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_{n,xx}\varepsilon^{-n}\right) \\
&+\partial_y\left[\left(\partial_y^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} I_{n,x}\varepsilon^{-n}\right)^3 + 3\left(\partial_y^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} I_{n,x}\varepsilon^{-n}\right)\partial_y^{-1}\left(q_{xxy} + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,xx}\varepsilon^{-n}\right)\right] = 0
\end{aligned} \tag{70}$$

elde edilir. Yine ε değişkeninin katsayıları yardımıyla F_n ve G_n akışlarını

$$I_{n,t} + F_{n,y} + G_{n,x} = 0 \tag{71}$$

eşitliğiyle birlikte elde edebiliriz. Burada

$$\begin{aligned}
F_n &= \left(\partial_y^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} I_{n,x}\varepsilon^{-n}\right)^3 + 3\left(\partial_y^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} I_{n,x}\varepsilon^{-n}\right)\partial_y^{-1}\left(q_{xxy} + \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,xx}\varepsilon^{-n}\right) \\
G_n &= \sum_{n=1}^{\infty} I_{n,xx}\varepsilon^{-n}
\end{aligned} \tag{72}$$

dır. ε değişkeninin ilk birkaç kuvvetinin katsayısı

$$\partial_t(2I_1) + \partial_y\left[\left(3\partial_y^{-1}I_{1,x}\right)\left(\partial_y^{-1}q_{xxy}\right)\right] + \partial_x(I_{1,xx}) = 0$$

$$\partial_t(2I_2) + \partial_y\left[\left(3\partial_y^{-1}I_{1,x}\right)\left(\partial_y^{-1}I_{1,xx}\right) + 3\left(\partial_y^{-1}I_{2,x}\right)\left(\partial_y^{-1}q_{xxy}\right)\right] + \partial_x(I_{2,xx}) = 0$$

$$\partial_y\left[\left(\partial_y^{-1}I_{1,x}\right)^3+3\left(\partial_y^{-1}I_{1,x}\right)\left(\partial_y^{-1}I_{2,xx}\right)+3\left(\partial_y^{-1}I_{2,x}\right)\left(\partial_y^{-1}I_{1,xx}\right)+3\left(\partial_y^{-1}I_{3,x}\right)\left(\partial_y^{-1}q_{xxy}\right)\right]$$

$$+\partial_t\left(2I_3\right)+\partial_x\left(I_{3,xx}\right)=0$$

$$\vdots \qquad (73)$$

şeklindedir.

3.5 Bell Polinomu Yaklaşımı ve (2+1) Boyutlu Burgers Denklem Sistemi

Ming ve Ming (2011) in yaptıkları çalışmalarında, (1+1) boyutlu Burgers denklem sistemi Hirota bilineer metodu yardımı ile incelenmiş olup, çoklu kink çözümleri ve çoklu tekil singüler kink çözümleri bulunmuştur. Bu kısımda bizim inceleyeceğimiz denklem (2+1) boyutlu Burgers denklem sistemidir (Wang vd., 2014). (2+1) boyutlu Burgers denklem sistemi literatürde

$$\begin{aligned} u_t-2uu_x-v_{xx}&=0\\ v_{yt}-u_{xxy}-2uv_{xy}-2u_xv_y&=0\end{aligned} \qquad (74)$$

şeklinde verilir (Ünsal ve Taşcan, 2015). Bu denklem sistemi, hidrodinamikte ve akustikte dalga hareketlerini temsil eder. (74) denklem sisteminin Wang vd. (2014) tarafından sonsuz çoklukta genelleştirilmiş simetrisi elde edilmiştir. p ve q; x, y ve t değişkenlerinin fonksiyonu olmak üzere,

$$u=p_x\ ,\ v=q_x \qquad (75)$$

dönüşümü yapılıp elde edilen ifadenin x değişkenine göre integrali alınırsa, (74) sisteminin ilk denklemi

$$p_t-p_x^2-q_{xx}=0 \qquad (76)$$

halini alır. (75) dönüşümü ve (76), (74) sisteminin ikinci denkleminde kullanılır, x değişkenine göre integrali alınırsa,

$$q_{yt}+p_yp_t-p_y\left(p_x^2+q_{xx}\right)-p_{xxy}-2p_xq_{xy}=0 \qquad (77)$$

elde edilir. (76) ve (77) eşitlikleri yardımıyla (74) denklem sisteminin ikili Bell polinomu formu

$$\mathcal{Y}_t(p,q) - \mathcal{Y}_{xx}(p,q) = 0 \tag{78}$$

$$\mathcal{Y}_{yt}(p,q) - \mathcal{Y}_{xxy}(p,q) = 0 \tag{79}$$

şeklinde ifade edilebilir. $p = \ln(f/g)$, $q = \ln(fg)$ alınır ve (35) eşitliği kullanılırsa (74) denklem sisteminin bilineer formu

$$\begin{aligned} (D_t - D_x^2)\, f.g = 0 \\ (D_y D_t - D_x^2 D_y)\, f.g = 0 \end{aligned} \tag{80}$$

şeklinde elde edilir. Burada f ve g; x, y and t değişkenlerinin fonksiyonudur.

(80) denklem sisteminin, Hirota bilineer metot yardımıyla çoklu soliton çözümleri elde edilebilir.

f ve g

$$f = \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + ...$$

$$g = 1 + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + ... \tag{81}$$

formunda fonksiyonlar olmak üzere, (81) değerlerini (80) de yerine yazıp elde edilen ifade ϵ nun katsayılarına göre düzenlenirse,

$$\epsilon^1: \quad \left(D_t - D_x^2\right)(f_1.1) = 0 \tag{82}$$

$$\left(D_y D_t - D_x^2 D_y\right)(f_1.1) = 0 \tag{83}$$

$$\epsilon^2: \quad \left(D_t - D_x^2\right)(f_1.g_1 + f_2.1) = 0 \tag{84}$$

$$\left(D_y D_t - D_x^2 D_y\right)(f_1.g_1 + f_2.1) = 0 \tag{85}$$

$$\epsilon^3: \quad \left(D_t - D_x^2\right)(f_1.g_2 + f_2.g_1 + f_3.1) = 0 \tag{86}$$

$$\left(D_y D_t - D_x^2 D_y\right)(f_1.g_2 + f_2.g_1 + f_3.1) = 0 \tag{87}$$

$$\vdots$$

denklemlerini elde ederiz.

(i) 1-Soliton Çözüm

1-soliton çözüm bulmak için, f_1 ve g_1 fonksiyonlarını

$$f_1 = ae^{\xi},\ g_1 = be^{\xi},\ \xi = kx + my + wt,$$
$$f_i(x,y,t) = 0, g_i(x,y,t) = 0,\ i = 2,3,4,... \tag{88}$$

şeklinde seçelim. Burada a, b, k ve m sıfırdan farklı reel sabitlerdir. (82)-(87) eşitlikleri çözülerek $w = k^2$ elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak 1-soliton çözüm

$$u = \frac{k}{1 + be^{kx+my+k^2t}} \tag{89}$$

$$v = \frac{k\left(1 + 2be^{kx+my+k^2t}\right)}{1 + be^{kx+my+k^2t}} \tag{90}$$

şeklinde elde edilir.

(ii) İki-Soliton Çözüm

Benzer şekilde, f ve g fonksiyonları sırasıyla f_2 ve g_2 fonksiyonlarında kesilirse,

$$f_1 = a_1e^{\xi_1} + a_2e^{\xi_2},\ g_1 = b_1e^{\xi_1} + b_2e^{\xi_2},$$
$$f_2 = a_3e^{\xi_1+\xi_2},\ g_2 = b_3e^{\xi_1+\xi_2},\ \xi_i = k_ix + m_iy + w_it,\ i = 1,2 \tag{91}$$

seçimleriyle birlikte $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, k_1, k_2$ sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere, karşılık gelen 2-soliton çözüm

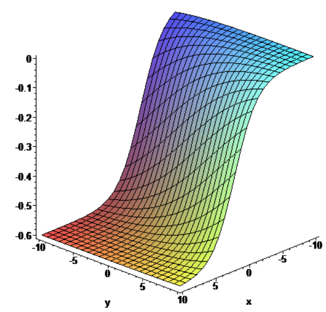
$$u = \left[\ln\left(\frac{a_1e^{\xi_1} + a_2e^{\xi_2} + a_3e^{\xi_1+\xi_2}}{1 + b_1e^{\xi_1} + b_2e^{\xi_2} + b_3e^{\xi_1+\xi_2}}\right)\right]_x \tag{92}$$

$$v = \left[\ln\left(\left(a_1e^{\xi_1} + a_2e^{\xi_2} + a_3e^{\xi_1+\xi_2}\right)\left(1 + b_1e^{\xi_1} + b_2e^{\xi_2} + b_3e^{\xi_1+\xi_2}\right)\right)\right]_x \tag{93}$$

şeklinde elde edilir. Burada

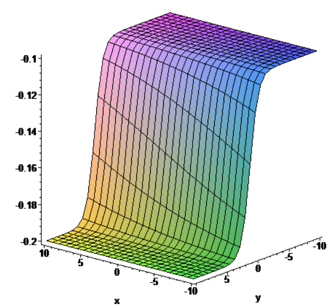
$$a_1 = \frac{m_1k_1a_3}{b_2(k_1 - k_2)(m_1 - m_2)}\ ,\ b_1 = \frac{m_2k_2a_3}{a_2(k_1 - k_2)(m_1 - m_2)}\ ,\ w_i = k_i^2 \tag{94}$$

dir. Yukarıda bulunan soliton çözümlere ilişkin grafikler aşağıda açıklamaları ile birlikte verilmiştir. Şekil 3.7-3.8 ve 3.9-3.12 sırasıyla (89)-(90) ve (92)-(93) e karşılık gelmektedir. Şekil 3.7 ve 3.8 şok dalga hareketlerini göstermektedir. Şekil 3.9 iki kink soliter dalganın kafa kafaya çarpışmasını temsil eder. Çarpışma elastik değildir zira dalgaların şekli çarpışmadan sonra değişmektedir. Şekil 3.11 iki Bell formlu dalganın etkileşimini gösterir. Dalgalar çarpışmadan sonra birleşip tek bir dalga şeklinde hareket ederler. Bu yüzden çarpışma elastik değildir. Şekil 3.10 ve 3.12 iki kink soliter dalganın etkileşimini göstermektedir. Dalgalar etkileşimden sonra şekillerini ve yönlerini korumaktadırlar, bu yüzden çarpışma elastiktir.



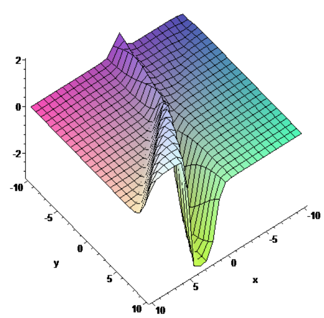
Şekil 3.7. Şok dalga

$u:\ t=0, k=\text{-}0.6, m=0.2, b=0.4$



Şekil 3.8. Şok dalga

$v:\ t=0, k=\text{-}0.1, m=1.5, b=0.1$

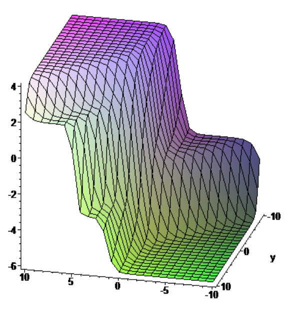


Şekil 3.9. İki kink soliter dalganın etkileşimi

$u:\ t=0, k_1=\text{-}3, k_2=2,$

$m_1=0.5, m_2=\text{-}2, a_2=\text{-}0.2, a_3=\text{-}0.2,$

$b_2=0.3, b_3=1$

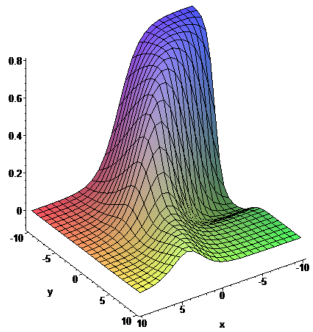


Şekil 3.10. İki kink soliter dalganın etkileşimi

$v:\ t=0, k_1=\text{-}3, k_2=2,$

$m_1=0.5, m_2=\text{-}2, a_2=\text{-}0.2, a_3=\text{-}0.2,$

$b_2=0.3, b_3=1$

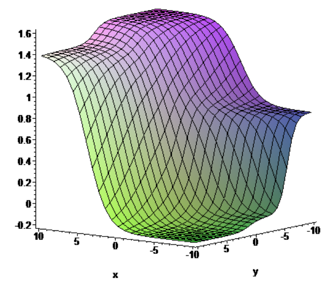


Şekil 3.11. İki Bell formlu dalganın etkileşimi

$u:\ t = 0, k_1 = \text{-}0.1, k_2 = 0.8,$

$m_1 = 1.2, m_2 = \text{-}0.3, a_2 = \text{-}0.2, a_3 = \text{-}0.2,$

$b_2 = 0.1, b_3 = 1$



Şekil 3.12. İki kink soliter dalganın etkileşimi

$v:\ t = 0, k_1 = \text{-}0.1, k_2 = 0.8,$

$m_1 = 1.2, m_2 = \text{-}0.3, a_2 = \text{-}0.2, a_3 = \text{-}0.2,$

$b_2 = 0.1, b_3 = 1$

3.6 (2+1) Boyutlu Burgers Denklem Sistemi İçin Bäcklund Dönüşümü ve Lax Çifti

Bu kısımda, (74) Burgers denklem sisteminin hem ikili formda hem de ikili Bell polinomu formunda bilineer Bäcklund dönüşümü ile Lax çifti araştırılmıştır.

$$P_1 = \left[\mathcal{Y}_t(\widetilde{p}, \widetilde{q}) - \mathcal{Y}_{xx}(\widetilde{p}, \widetilde{q})\right] - \left[\mathcal{Y}_t(p, q) - \mathcal{Y}_{xx}(p, q)\right] \tag{95}$$

$$P_2 = \left[\mathcal{Y}_{yt}(\widetilde{p}, \widetilde{q}) - \mathcal{Y}_{xxy}(\widetilde{p}, \widetilde{q})\right] - \left[\mathcal{Y}_{yt}(p, q) - \mathcal{Y}_{xxy}(p, q)\right] \tag{96}$$

alarak başlayalım. Burada $(\widetilde{p}, \widetilde{q})$ ve (p, q) . (78,79) eşitliklerini sağlayan fonksiyonlardır. $\widetilde{p} = \ln(f'/g')$ ve $\widetilde{q} = \ln(f'g')$ olsun.

$$\begin{aligned} v_1 &= \ln\left(\widetilde{g}/g\right), \quad v_2 = \ln\left(\widetilde{f}/f\right), \quad v_3 = \ln\left(\widetilde{f}/g\right), \quad v_4 = \ln\left(\widetilde{g}/f\right), \\ w_1 &= \ln\left(\widetilde{g}g\right), \quad w_2 = \ln\left(\widetilde{f}f\right), \quad w_3 = \ln\left(\widetilde{f}g\right), \quad w_4 = \ln\left(\widetilde{g}f\right), \end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{p} - p &= v_2 - v_1 = w_3 - w_4 \quad & \widetilde{p} + p &= v_3 - v_4 = w_2 - w_1 \\ \widetilde{q} - q &= v_1 + v_2 = v_3 + v_4 \quad & \widetilde{q} + q &= w_1 + w_2 = w_3 + w_4 \end{aligned} \tag{98}$$

eşitlikleri kullanılarak (74) Burgers denklem sisteminin ikili Bell polinomu formunda

Bäcklund dönüşümü

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Y}_t(v_1, w_1) + \mathcal{Y}_{xx}(v_1, w_1) = 0 \\
&\mathcal{Y}_t(v_2, w_2) + \mathcal{Y}_{xx}(v_2, w_2) = 0 \\
&\mathcal{Y}_x(v_3, w_3) - \mu e^{v_1 - v_2} = 0 \\
&\mathcal{Y}_{xy}(v_3, w_3) - d\mathcal{Y}_x(v_3, w_3) + \mu e^{v_1 - v_2}\mathcal{Y}_y(v_4, w_4) = 0
\end{aligned} \tag{99}$$

şeklinde elde edilir. Burada μ ve d keyfi reel sabitlerdir. Aşağıda (99) eşitliklerinin nasıl elde edildiği gösterilmiştir. (95) eşitliği

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left(\widetilde{p} - p\right)_t + p_x^2 - \left(\widetilde{p}_x\right)^2 - \left(\widetilde{q} - q\right)_{xx} \\
&= \left(\widetilde{p} - p\right)_t + \left(p - \widetilde{p}\right)_x \left(p + \widetilde{p}\right)_x - \left(\widetilde{q} - q\right)_{xx} \\
&= (v_2 - v_1)_t + (v_1 - v_2)_x (v_3 - v_4)_x - (v_1 + v_2)_{xx} \\
&= (v_2 - v_1)_t + (v_1 - v_2)_x (2v_3 - v_1 - v_2)_x - (w_1 - w_2 + 2v_3)_{xx} = 0
\end{aligned} \tag{100}$$

şeklinde ifade edilebilir. (100) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_t(v_1, w_1) + \mathcal{Y}_{xx}(v_1, w_1) &= 0 \\
\mathcal{Y}_t(v_2, w_2) + \mathcal{Y}_{xx}(v_2, w_2) &= 0,
\end{aligned} \tag{101}$$

eşitlikleri elde edildikten sonra kalan terimler düzenlendikten sonra

$$v_{3,xx} + v_{3,x}\left(v_{2,x} - v_{1,x}\right) = 0. \tag{102}$$

şeklindedir. (102) denkleminin her iki tarafını $R = e^{v_2 - v_1}$ integral çarpanı ile çarparak gerekli işlemler yapıldığında

$$v_{3,x}e^{v_2 - v_1} = \mu \implies v_{3,x} = \mu e^{v_1 - v_2}$$

eşitliği elde edilir.

Diğer yandan, (96) eşitliği

$$\begin{aligned} P_2 &= \left(\widetilde{q}\text{-}q\right)_{yt} - \left(\widetilde{p}\text{-}p\right)_{xxy} - 2\left(\widetilde{p}_x\widetilde{q}_{xy}\text{-}p_xq_{xy}\right) \\ &= \left(\widetilde{q}\text{-}q\right)_{yt} - \left(\widetilde{p}\text{-}p\right)_{xxy} - \left(\left(\widetilde{p}\text{-}p\right)_x\left(\widetilde{q}+q\right)_{xy} + \left(\widetilde{p}+p\right)_x\left(\widetilde{q}\text{-}q\right)_{xy}\right) \\ &= \left(v_1+v_2\right)_{yt} - \left(v_2\text{-}v_1\right)_{xxy} - \left(\left(v_2\text{-}v_1\right)_x\left(w_1+w_2\right)_{xy} + \left(v_3\text{-}v_4\right)_x\left(v_1+v_2\right)_{xy}\right) \end{aligned} \tag{103}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} v_{1,yt} &= -2v_{1,x}v_{1,xy} - w_{1,xxy} \\ v_{2,yt} &= -2v_{2,x}v_{2,xy} - w_{2,xxy} \end{aligned}$$

eşitlikleri (103) de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} P_2 &= -2v_{1,x}v_{1,xy} - w_{1,xxy} - 2v_{2,x}v_{2,xy} - w_{2,xxy} - \left(2w_3 - w_1 - w_2\right)_{xxy} \\ &\quad - \left(v_2 - v_1\right)_x\left(2w_3 - v_2 + v_1\right)_{xy} - \left(2v_3 - v_1 - v_2\right)_x\left(v_1 + v_2\right)_{xy} \\ &= w_{3,xxy} + w_{3,xy}\left(v_{2,x} - v_{1,x}\right) + v_{3,x}\left(v_{1,xy} + v_{2,xy}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$v_{3,x}\left(\frac{w_{3,xy}}{v_{3,x}}\right)_x = -v_{3,x}\left(v_3 + v_4\right)_{xy}$$

$$\frac{w_{3,xy}}{v_{3,x}} + \left(v_3 + v_4\right)_y = d$$

$$w_{3,xy} + v_{3,x}v_{3,y} + v_{3,x}v_{4,y} - dv_{3,x} = 0$$

$$\mathcal{Y}_{xy}(v_3, w_3) - d\mathcal{Y}_x(v_3, w_3) + \mu e^{v_1 - v_2}\mathcal{Y}_y(v_4, w_4) = 0$$

elde edilir. (35) yardımıyla, bilineer formda Bäcklund dönüşümü

$$\begin{aligned} &\left(D_t + D_x^2\right)\widetilde{g}.g = 0 \\ &\left(D_t + D_x^2\right)\widetilde{f}.f = 0 \\ &D_x\widetilde{f}.g - \mu\widetilde{g}f = 0 \\ &\left(D_xD_y - dD_x\right)\widetilde{f}.g + \mu D_y\widetilde{g}.f = 0. \end{aligned} \tag{104}$$

eşitlikleriyle verilebilir. (97)-(98) eşitliklerinin sonucu olarak

$$v_2 = v_3 - p, \quad w_2 = w_3 + p, \quad v_4 = v_1 - p, \quad w_4 = w_1 + p \tag{105}$$

eşitlikleri elde edilebilir (Lambert ve Springael, 2011).

$$w_i = v_i + Q_i, \quad v_i = \ln \psi_i, \quad (i = 1, 3) \tag{106}$$

alınarak

$$Q = w_1 - v_1 = w_3 - v_3 = Q_1 = Q_3 \tag{107}$$

eşitlikleri kullanılırsa, (74) Burgers denklem sisteminin Lax çifti

$$\begin{aligned} \psi_{1,y} &= \tfrac{d}{2}\psi_1 - \tfrac{e^{-p}(q_{xy}-p_{xy})}{2\mu}\psi_3 \\ \psi_{1,t} &= (p_{xx} - q_{xx})\,\psi_1 - \psi_{1,xx} \\ \psi_{3,x} &= \mu e^{p}\psi_1 \\ \psi_{3,t} &= \mu p_x e^{p}\psi_1 - \mu e^{p}\psi_{1,x}. \end{aligned} \tag{108}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\psi_{1,yt} = \psi_{1,ty}$, $\psi_{3,xt} = \psi_{3,tx}$ bağdaşabilirlik şartlarının sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Şimdi bu Lax çiftini elde edelim.

$$\begin{aligned} v_{3,x} &= \mu e^{v_1 - v_2} \\ \frac{\psi_{3,x}}{\psi_3} &= \mu e^{v_1 - v_2} = \mu\frac{\psi_1}{\psi_2} \end{aligned} \tag{109}$$

yazılabilir.

$$\frac{\psi_3}{\psi_2} = e^{p},$$

eşitliği kullanılırsa, (109),

$$\psi_{3,x} = \mu e^{p}\psi_1 \tag{110}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
v_{1,t} &= -v_{1,x}^2 - w_{1,xx} \\
\frac{\psi_{1,t}}{\psi_1} &= -\left(\frac{\psi_{1,x}}{\psi_1}\right)^2 - (q-p+v_1)_{xx} \\
\frac{\psi_{1,t}}{\psi_1} &= -\left(\frac{\psi_{1,x}}{\psi_1}\right)^2 - (q_{xx}-p_{xx}) - \frac{\psi_{1,xx}\psi_1 - \psi_{1,x}^2}{\psi_1^2} \\
\psi_{1,t} &= (p_{xx}-q_{xx})\,\psi_1 - \psi_{1,xx}.
\end{aligned}$$

elde edilebilir.

$$v_{2,t} + v_{2,x}^2 + w_{2,xx} = 0$$

eşitliği için (105) kullanılırsa,

$$v_{3,t} - p_t + v_{3,x}^2 + p_x^2 - 2v_{3,x}p_x + w_{3,xx} + p_{xx} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\psi_{3,t}}{\psi_3} &= p_t - p_x^2 - p_{xx} - \left(\frac{\psi_{3,x}}{\psi_3}\right)^2 + 2\frac{\psi_{3,x}}{\psi_3}p_x - (q-p+v_3)_{xx}\,, \\
\frac{\psi_{3,t}}{\psi_3} &= p_t - p_x^2 - p_{xx} - \left(\frac{\psi_{3,x}}{\psi_3}\right)^2 + 2\frac{\psi_{3,x}}{\psi_3}p_x - q_{xx} + p_{xx} - \frac{\psi_{3,xx}\psi_3 - \psi_{3,x}^2}{\psi_3^2}, \\
\frac{\psi_{3,t}}{\psi_3} &= \left(\underbrace{p_t - p_x^2 - p_{xx}}_{0}\right) + 2\frac{\psi_{3,x}}{\psi_3}p_x - \frac{\psi_{3,xx}}{\psi_3}, \\
\psi_{3,t} &= 2\psi_{3,x}p_x - \psi_{3,xx},
\end{aligned}$$

ve (110) eşitliği kullanılırsa,

$$\psi_{3,t} = \mu p_x e^p \psi_1 - \mu e^p \psi_{1,x}.$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$v_{3,x}v_{3,y} + w_{3,xy} - dv_{3,x} + \mu e^{v_1 - v_2} v_{4,y} = 0$$

$$\tfrac{\psi_{3,x}}{\psi_3}\tfrac{\psi_{3,y}}{\psi_3} + (q - p + v_3)_{xy} + v_{3,x}v_{4,y} - dv_{3,x} = 0$$

$$\tfrac{\psi_{3,x}}{\psi_3}\tfrac{\psi_{3,y}}{\psi_3} + q_{xy} - p_{xy} + \left(\tfrac{\psi_{3,xy}\psi_3 - \psi_{3,y}\psi_{3,x}}{\psi_3^2}\right) + \tfrac{\psi_{3,x}}{\psi_3}\left(\tfrac{\psi_{1,y}}{\psi_1} - p_y\right) - d\tfrac{\psi_{3,x}}{\psi_3} = 0$$

$$\tfrac{\psi_{3,xy}}{\psi_3} + q_{xy} - p_{xy} + \tfrac{\psi_{3,x}}{\psi_3}\tfrac{\psi_{1,y}}{\psi_1} - \tfrac{\psi_{3,x}}{\psi_3}p_y - d\tfrac{\psi_{3,x}}{\psi_3} = 0$$

$$\tfrac{\psi_{1,y}}{\psi_1} + \tfrac{\psi_{3,xy}}{\psi_{3,x}} + (q_{xy} - p_{xy})\tfrac{\psi_3}{\psi_{3,x}} - p_y - d = 0$$

(110) eşitliği kullanılarak

$$\psi_{1,y} = \frac{d}{2}\psi_1 - \frac{e^{-p}(q_{xy} - p_{xy})\psi_3}{2\mu}$$

elde edilebilir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİLİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Matematiksel fizikteki birçok denklem bağımlı değişken dönüşümü yardımıyla Hirota bilineer formunda yazılabilir. Hirota bilineer metodu, matematiksel fizikteki lineer olmayan diferensiyel denklemleri Hirota bilineer formuna indirgeyerek çözmek için gayet etkili ve kullanışlı bir yoldur (Hirota, 2004).

Örneğin; KdV denklemi

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{111}$$

Boussinesq denklemi

$$u_{tt} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0 \tag{112}$$

ve KP denklemi

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0 \tag{113}$$

olmak üzere, bu denklemlerin bilineer formları sırasıyla $u = 2(\ln f)_{xx}$ dönüşümü yardımıyla

$$(D_x D_t + D_x^4) f \cdot f = 0, \tag{114}$$

$u = 6(\ln f)_{xx}$ dönüşümü yardımıyla

$$(D_t^2 + D_x^4) f \cdot f = 0, \tag{115}$$

$u = 2(\ln f)_{xx}$ dönüşümü yardımıyla

$$(D_t D_x + D_x^4 + D_y^2) f \cdot f = 0 \tag{116}$$

şeklinde elde edilir.

Genelleştirilmiş bilineer denklemleri elde etmekte kullanılan türevler Hirota türevlerinin daha genel halidir ve

$$\left(D_{p,x}^n f \cdot g\right)(x) = \left(\partial_x + \alpha \partial_{x'}\right)^n f(x) g(x')\big|_{x'=x} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha^i \left(\partial_x^{n-i} f\right)(x) \left(\partial_x^i g\right)(x), \ n \geq 1, \tag{117}$$

ile tanımlanır (Ma, 2011, 2013 a).

Eğer $p = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) ise genelleştirilmiş diferensiyel operatörler Hirota türevlerini ifade eder. Eğer $p = 3$ ise α değişkeninin kuvvetleri

$$\alpha = -1, \alpha^2 = \alpha^3 = 1, \alpha^4 = -1, \alpha^5 = \alpha^6 = 1, ..., \tag{118}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre işaretlerin kuralı

$$-, +, +, -+, +, ... \ (p = 3); \tag{119}$$

eğer $p = 5$ ise

$$\begin{gathered} \alpha = -1, \alpha^2 = 1, \alpha^3 = -1, \alpha^4 = \alpha^5 = 1, \\ \alpha^6 = -1, \alpha^7 = 1, \alpha^8 = -1, \alpha^9 = \alpha^{10} = 1, ..., \end{gathered} \tag{120}$$

olmak üzere işaretler arasındaki ilişki

$$-, +, -, +, +, -, +, -, +, +, ... \ (p = 5) \tag{121}$$

dir. Diğer yandan Hirota türevleri için ilişki

$$-, +, -, +, -, +, ... \ (p = 2) \tag{122}$$

iken $p = 7$ için

$$-, +, -, +, -, +, +, -, +, -, +, -, +, +, ... \ (p = 7) \tag{123}$$

dir. Verilen bu yeni türevler yardımıyla yeni bilineer denklemler, (117) de p değerlerinin seçimine bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$D_{3,x} f \cdot g = f_x g - f g_x,$$

$$D_{3,x} D_{3,t} f \cdot g = f_{xt} g - f_x g_t - f_t g_x + f g_{xt},$$

$$D_{3,x}^3 f \cdot g = f_{xxx} g - 3 f_{xx} g_x + 3 f_x g_{xx} + f g_{xxx},$$

$$D_{3,x}^2 D_{3,t} f \cdot g = f_{xxt} g - f_{xx} g_t - 2 f_{xt} g_x + 2 f_x g_{xt} + f_t g_{xx} + f g_{xxt},$$

$$D_{3,x}^3 D_{3,t} f \cdot g = f_{xxxt} g - f_{xxx} g_t - 3 f_{xxt} g_x + 3 f_{xt} g_{xx} + 3 f_{xx} g_{xt} + 3 f_x g_{xxt} + f_t g_{xxx} - f g_{xxxt},$$

$$D_{3,x}^4 f \cdot g = f_{xxxx} g - 4 f_{xxx} g_x + 6 f_{xx} g_{xx} + 4 f_x g_{xxx} - f g_{xxxx},$$

$$D_{3,x}^5 f \cdot g = f_{xxxxx} g - 5 f_{xxxx} g_x + 10 f_{xxx} g_{xx} + 10 f_{xx} g_{xxx} - 5 f_x g_{xxxx} + f g_{xxxxx},$$

ve

$$D_{5,x} f \cdot g = f_x g - f g_x,$$

$$D_{5,x} D_{5,t} f \cdot g = f_{xt} g - f_x g_t - f_t g_x + f g_{xt},$$

$$D_{5,x}^3 f \cdot g = f_{xxx} g - 3 f_{xx} g_x + 3 f_x g_{xx} - f g_{xxx},$$

$$D_{5,x}^2 D_{5,t} f \cdot g = f_{xxt} g - f_{xx} g_t - 2 f_{xt} g_x + 2 f_x g_{xt} + f_t g_{xx} - f g_{xxt},$$

$$D_{5,x}^3 D_{5,t} f \cdot g = f_{xxxt} g - f_{xxx} g_t - 3 f_{xxt} g_x + 3 f_{xt} g_{xx} + 3 f_{xx} g_{xt} - 3 f_x g_{xxt} - f_t g_{xxx} + f g_{xxxt},$$

$$D_{5,x}^4 f \cdot g = f_{xxxx} g - 4 f_{xxx} g_x + 6 f_{xx} g_{xx} - 4 f_x g_{xxx} + f g_{xxxx},$$

$$D_{5,x}^5 f \cdot g = f_{xxxxx} g - 5 f_{xxxx} g_x + 10 f_{xxx} g_{xx} - 10 f_{xx} g_{xxx} + 5 f_x g_{xxxx} + f g_{xxxxx}.$$

Bu türevler daha sonra yine Ma tarafından bir kez daha genelleştirilerek

$$\left(D_{\bar{p},x}^n f \cdot g\right)(x) = \left(D_{\langle p,\widetilde{p}\rangle x}^n f \cdot g\right)(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha_p^{n-i} \alpha_{\widetilde{p}}^i \left(\partial_x^{n-i} f\right)(x) \left(\partial_x^i g\right)(x)\,, \;\; n \geq 1, \tag{124}$$

türevleri elde edilmiştir (Ma, 2013 b).

Kolayca görülebilir ki

$$p = \widetilde{p} = 1$$

durumu bilinen normal türevlere karşılık gelir.

$$p = 1,\;\; \widetilde{p} = 2k,\;\; k \in \mathbb{N}$$

durumu da Hirota bilineer operatörlere karşılık gelir.

$$p = 1,\;\; \widetilde{p} = 2k,\;\; k \in \mathbb{N}$$

ise bir önceki bahsedilen genelleştirilmiş bilineer operatörlere karşılık gelir.

$m = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere, terimlerin işaretlerini oluşturan α_s^m ifadesini inceleyelim.

$$s = 2k,\;\; k \in \mathbb{N} : +, -+, -, ...$$

$$s = 1 : +, +, +, +, ...$$

$$s = 3 : +, -, +, +, -, +, ...$$

$$s = 5 : +, -, +, -, +, +, -, +, -, +, ...$$

$$s = 7 : +, -, +, -, +, -, +, +, -, +, -, +, -, +, ...$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu kural yardımıyla genelleştirilmiş türevlerle yazılabilen bazı bilineer denklemler

$$D^3_{\langle 1,3\rangle x} f \cdot g = f_{3x} g - 3 f_{2x} g_x + 3 f_x g_{2x} + f g_{3x},$$

$$D^5_{\langle 2,5\rangle x} f \cdot g = -f_{5x} - 5 f_{4x} g_x - 10 f_{3x} g_{2x} - 10 f_{2x} g_{3x} - 5 f_x g_{4x} + f g_{5x}$$

$$D^7_{\langle 3,7\rangle x} f \cdot g = -f_{7x} g - 7 f_{6x} g_x + 21 f_{5x} g_{2x} + 35 f_{4x} g_{3x} + 35 f_{3x} g_{4x} - 21 f_{2x} g_{5x} - 7 f_x g_{6x} + f g_{7x}$$

formundadır.

4.1 I. Tür Üst Üste Bindirme Kuralı

Genelleştirilmiş türevlerle yazılan bir bilineer denklem olan

$$P\left(D_{p,x_1}, D_{p,x_2}, ..., D_{p,x_M}\right) f \cdot f = 0 \tag{125}$$

verilsin. Burada P, D_{p,x_i}, $1 \leq i \leq M$, türevlerinin polinomudur. D_{p,x_i} genelleştirilmiş türev operatörleri (117) eşitliği ile tanımlanır (Ma, 2011, 2013 a). Bu eşitlikte α değişkeninin kuvvetleri

$$\alpha^i = (-1)^{r(i)}, \ i = r(i) \mod p, 0 \leq r(i) < p, \ i \geq 0 \tag{126}$$

kuralı ile belirlenir. Şimdi N-dalga değişkenlerini tanımlayalım:

$$\eta_i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} = k_{1,i} x_1 + k_{2,i} x_2 + ... + k_{M,i} x_M, \ 1 \leq i \leq N, \tag{127}$$

ve üstel dalga fonksiyonları

$$f_i = e^{\eta_i} = e^{k_{1,i} x_1 + k_{2,i} x_2 + ... + k_{M,i} x_M}, 1 \leq i \leq N \tag{128}$$

ile verilsin. Burada $k_{j,i}$ ler reel sabitlerdir ve değişkenlerin ağırlıklarına göre özel seçimler yapılabilir. Dalga ilişki(katsayı) vektörü $\mathbf{k}_i$ ve bağımlı değişken vektörü $\mathbf{x}$

$$\mathbf{k}_i = \left(k_{1,i}, k_{2,i}, ..., k_{M,i}\right), \ 1 \leq i \leq N, \ \mathbf{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_M\right) \tag{129}$$

şeklindedir.

$$f = \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 + ... + \varepsilon_N f_N = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i e^{\eta_i} \tag{130}$$

lineer toplamını ele alalım. ε_i, $1 \leq i \leq N$, sabitlerdir. Ma (2013 a) tarafından gösterilmiştir: N üstel dalganın f lineer toplamının (125) genelleştirilmiş bilineer denklemini çözmesi için gerek ve yeter şart

$$P\left(k_{1,i}+\alpha k_{1,j},...,k_{M,i}+\alpha k_{M,j}\right)+P\left(k_{1,j}+\alpha k_{1,i},...,k_{M,j}+\alpha k_{M,i}\right)=0,\ 1\leq i\leq j\leq N, \tag{131}$$

olmasıdır.

4.2 Hiperbolik Fonksiyon Çözümleri İçin I. Tür Üst Üste Bindirme Kuralı

(125) denkleminin hiperbolik fonksiyon çözümleri $f_i = \cosh\eta_i = \frac{1}{2}\left(e^{\eta_i}+e^{-\eta_i}\right)$, $1 \leq i \leq N$, ile verilsin.

$$f=\varepsilon_1 f_1+\varepsilon_2 f_2+...+\varepsilon_N f_N=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\cosh\eta_i=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\frac{1}{2}\left(e^{\eta_i}+e^{-\eta_i}\right) \tag{132}$$

ise hiperbolik fonksiyon çözümlerinin lineer toplamı olsun. Genelleştirilmiş türevler altında

$$P\left(D_{p,x_1},...,D_{p,x_l}\right)e^{\eta_i}\cdot e^{\eta_j}=P\left(k_{1,i}+\alpha k_{1,j},...,k_{M,i}+\alpha k_{M,j}\right)e^{\eta_i+\eta_j},\ 1\leq i,j\leq N. \tag{133}$$

eşitliğinin üstel fonksiyonlar için sağladığı Ma (2013 a) tarafından gösterilmiştir.

Teorem 4.1. $k_{j,i}$ ler reel sabitler olmak üzere $P(x_1,x_2,...,x_M)$ bir polinom ve N dalga değişkeni $\eta_i=\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{x}=k_{1,i}x_1+k_{2,i}x_2+...+k_{M,i}x_M$, $1\leq i\leq N$, ile tanımlansın. $f_i = ch\eta_i = \frac{1}{2}\left(e^{\eta_i}+e^{-\eta_i}\right)$, $1\leq i\leq N$, hiperbolik fonksiyonlarının herhangi bir lineer toplamının (125) genelleştirilmiş bilineer denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$P\left(k_{1,i}+\alpha k_{1,j},...,k_{M,i}+\alpha k_{M,j}\right)+P\left(\alpha k_{1,i}+k_{1,j},...,\alpha k_{M,i}+k_{M,j}\right)=0,$$
$$1\leq i\leq j\leq N,$$
$$P\left(k_{1,i}-\alpha k_{1,j},...,k_{M,i}-\alpha k_{M,j}\right)+P\left(\alpha k_{1,i}-k_{1,j},...,\alpha k_{M,i}-k_{M,j}\right)=0,$$
$$1\leq i\leq j\leq N,$$

$$P\left(\text{-}k_{1,i}+\alpha k_{1,j},...,\text{-}k_{M,i}+\alpha k_{M,j}\right)+P\left(\text{-}\alpha k_{1,i}+k_{1,j},...,\text{-}\alpha k_{M,i}+k_{M,j}\right)=0,\quad 1\leq i<j\leq N,$$

$$P\left(\text{-}k_{1,i}\text{-}\alpha k_{1,j},...,\text{-}k_{M,i}\text{-}\alpha k_{M,j}\right)+P\left(\text{-}\alpha k_{1,i}\text{-}k_{1,j},...,\text{-}\alpha k_{M,i}\text{-}k_{M,j}\right)=0,\quad 1\leq i\leq j\leq N, \tag{134}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. (133) eşitliğini kullanarak aşağıdaki hesaplamaları yapabiliriz:

$$
\begin{aligned}
& P\left(D_{p,x_1},...,D_{p,x_M}\right)f\cdot f \\
= \; & P\left(D_{p,x_1},...,D_{p,x_M}\right)\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\cosh\eta_i\cdot\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j\cosh\eta_j \\
= \; & \sum_{i,j=1}^{N}\varepsilon_i\varepsilon_j P\left(D_{p,x_1},...,D_{p,x_M}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\eta_i}+e^{-\eta_i}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\eta_j}+e^{-\eta_j}\right) \\
= \; & \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{N}\varepsilon_i\varepsilon_j P\left(D_{p,x_1},...,D_{p,x_M}\right)\left(e^{\eta_i}\cdot e^{\eta_j}+e^{\eta_i}\cdot e^{-\eta_j}+e^{-\eta_i}\cdot e^{\eta_j}+e^{-\eta_i}\cdot e^{-\eta_j}\right) \\
= \; & \frac{1}{4}\sum_{1\leq i<j\leq N}^{N}\varepsilon_i\varepsilon_j[P\left(k_{1,i}+\alpha k_{1,j},...,k_{M,i}+\alpha k_{M,j}\right)e^{\eta_i+\eta_j}+P\left(k_{1,i}\text{-}\alpha k_{1,j},...,k_{M,i}\text{-}\alpha k_{M,j}\right)e^{\eta_i-\eta_j} \\
& +P\left(\text{-}k_{1,i}+\alpha k_{1,j},...,\text{-}k_{M,i}+\alpha k_{M,j}\right)e^{-\eta_i+\eta_j}+P\left(\text{-}k_{1,i}\text{-}\alpha k_{1,j},...,\text{-}k_{M,i}\text{-}\alpha k_{M,j}\right)e^{-\eta_i-\eta_j}] \\
& +\frac{1}{4}\sum_{1\leq i>j\leq N}^{N}\varepsilon_i\varepsilon_j[P\left(k_{1,i}+\alpha k_{1,j},...,k_{M,i}+\alpha k_{M,j}\right)e^{\eta_i+\eta_j}+P\left(k_{1,i}\text{-}\alpha k_{1,j},...,k_{M,i}\text{-}\alpha k_{M,j}\right)e^{\eta_i-\eta_j} \\
& +P\left(\text{-}k_{1,i}+\alpha k_{1,j},...,\text{-}k_{M,i}+\alpha k_{M,j}\right)e^{-\eta_i+\eta_j}+P\left(\text{-}k_{1,i}\text{-}\alpha k_{1,j},...,\text{-}k_{M,i}\text{-}\alpha k_{M,j}\right)e^{-\eta_i-\eta_j}] \\
& +\frac{1}{4}\sum_{1\leq i=j\leq N}^{N}\varepsilon_i\varepsilon_j[P\left(k_{1,i}+\alpha k_{1,j},...,k_{M,i}+\alpha k_{M,j}\right)e^{\eta_i+\eta_j}+P\left(k_{1,i}\text{-}\alpha k_{1,j},...,k_{M,i}\text{-}\alpha k_{M,j}\right)e^{\eta_i-\eta_j} \\
& +P\left(\text{-}k_{1,i}+\alpha k_{1,j},...,\text{-}k_{M,i}+\alpha k_{M,j}\right)e^{-\eta_i+\eta_j}+P\left(\text{-}k_{1,i}\text{-}\alpha k_{1,j},...,\text{-}k_{M,i}\text{-}\alpha k_{M,j}\right)e^{-\eta_i-\eta_j}] \\
= \; & \frac{1}{4}\sum_{1\leq i<j\leq N}^{N}\varepsilon_i\varepsilon_j[(P\left(k_{1,i}+\alpha k_{1,j},...,k_{M,i}+\alpha k_{M,j}\right)+P\left(\alpha k_{1,i}+k_{1,j},...,\alpha k_{M,i}+k_{M,j}\right))e^{\eta_i+\eta_j} \\
& +\left(P\left(k_{1,i}\text{-}\alpha k_{1,j},...,k_{M,i}\text{-}\alpha k_{M,j}\right)+P\left(\alpha k_{1,i}\text{-}k_{1,j},...,\alpha k_{M,i}\text{-}k_{M,j}\right)\right)e^{\eta_i-\eta_j} \\
& +\left(P\left(\text{-}k_{1,i}+\alpha k_{1,j},...,\text{-}k_{M,i}+\alpha k_{M,j}\right)+P\left(\text{-}\alpha k_{1,i}+k_{1,j},...,\text{-}\alpha k_{M,i}+k_{M,j}\right)\right)e^{-\eta_i+\eta_j} \\
& +\left(P\left(\text{-}k_{1,i}\text{-}\alpha k_{1,j},...,\text{-}k_{M,i}\text{-}\alpha k_{M,j}\right)+P\left(\text{-}\alpha k_{1,i}\text{-}k_{1,j},...,\text{-}\alpha k_{M,i}\text{-}k_{M,j}\right)\right)e^{-\eta_i-\eta_j}]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{1\leq i\leq N}^{N}\varepsilon_i^2[P\left(k_{1,i}+\alpha k_{1,i},...,k_{M,i}+\alpha k_{M,i}\right)e^{2\eta_i}+P\left(k_{1,i}\text{-}\alpha k_{1,i},...,k_{M,i}\text{-}\alpha k_{M,i}\right)$$
$$+P\left(\text{-}k_{1,i}+\alpha k_{1,i},...,\text{-}k_{M,i}+\alpha k_{M,i}\right)+P\left(\text{-}k_{1,i}\text{-}\alpha k_{1,i},...,\text{-}k_{M,i}\text{-}\alpha k_{M,i}\right)e^{-2\eta_i}]. \tag{135}$$

Buradan, "N adet $f_i = \cosh\eta_i = \frac{1}{2}\left(e^{\eta_i}+e^{-\eta_i}\right)$, $1\leq i\leq N$, hiperbolik fonksiyon çözümünün f lineer toplamının (125) genelleştirilmiş bilineer denklemini çözmesi için gerek ve yeter şart (134) eşitliklerinin sağlanmasıdır" sonucu çıkarılabilir.

Bu teorem bize, verilen genelleştirilmiş bir bilineer denklem için hiperbolik fonksiyon çözümlerinin bir lineer toplamının da ne zaman bir çözüm olacağını ifade eder. Bu teorem aynı zamanda verilen genelleştirilmiş bilineer denklemlere $N-$dalga çözüm oluşturmak için bir metot geliştirmiş olur. (134) sistemi çözümün sağlaması gereken şarttır. Daha açık bir deyişle, eğer (134) sistemi çözülebilirse, verilen genellleştirilmiş bilineer denklem için (132) N-dalga çözümü elde edilmiş olur.

4.3 Trigonometrik Fonksiyon Çözümleri İçin I. Tür Üst Üste Bindirme Kuralı

(125) denkleminin trigonometrik fonksiyon çözümleri olmak üzere $f_i = \cos\eta_i = \frac{1}{2}\left(e^{I\eta_i}+e^{-I\eta_i}\right)$, $1\leq i\leq N$, verilsin. Burada $\eta_i = \mathbf{k}_i\cdot\mathbf{x}$, $1\leq i\leq N$, $I=\sqrt{-1}$, dir.

$$f=\varepsilon_1 f_1+\varepsilon_2 f_2+...+\varepsilon_N f_N=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\cos\eta_i=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\frac{1}{2}\left(e^{I\eta_i}+e^{-I\eta_i}\right) \tag{136}$$

ise trigonometrik fonksiyon çözümlerinin lineer toplamı olsun. Benzer şekilde, N adet trigonometrik fonksiyon çözümünün f lineer toplamının (125) genelleştirilmiş bilineer denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$P\left(Ik_{1,i}+\alpha Ik_{1,j},...,Ik_{M,i}+\alpha Ik_{M,j}\right)+P\left(\alpha Ik_{1,i}+Ik_{1,j},...,\alpha Ik_{M,i}+Ik_{M,j}\right)=0,$$
$$1\leq i\leq j\leq N,$$
$$P\left(Ik_{1,i}\text{-}\alpha Ik_{1,j},...,Ik_{M,i}\text{-}\alpha Ik_{M,j}\right)+P\left(\alpha Ik_{1,i}\text{-}Ik_{1,j},...,\alpha Ik_{M,i}\text{-}Ik_{M,j}\right)=0,$$
$$1\leq i\leq j\leq N,$$

$$P\left(-Ik_{1,i}+\alpha Ik_{1,j},...,-Ik_{M,i}+\alpha Ik_{M,j}\right)+P\left(-\alpha Ik_{1,i}+Ik_{1,j},...,-\alpha Ik_{M,i}+Ik_{M,j}\right)=0,$$
$$1\leq i<j\leq N,$$
$$P\left(-Ik_{1,i}-\alpha Ik_{1,j},...,-Ik_{M,i}-\alpha Ik_{M,j}\right)+P\left(-\alpha Ik_{1,i}-Ik_{1,j},...,-\alpha Ik_{M,i}-Ik_{M,j}\right)=0,$$
$$1\leq i\leq j\leq N, \tag{137}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

Teorem 4.2. $k_{j,i}$ ler reel sabitler olmak üzere $P(x_1, x_2, ..., x_M)$ bir polinom ve N dalga değişkeni $\eta_i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} = k_{1,i}x_1 + k_{2,i}x_2 + ... + k_{M,i}x_M$, $1 \leq i \leq N$, ile tanımlansın. $f_i = \cos\eta_i$, $1 \leq i \leq N$, trigonometrik fonksiyonlarının herhangi bir lineer toplamının (125) genelleştirilmiş bilineer denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart (137) denklemlerinin sağlanmasıdır.

Bu teorem bize, verilen genelleştirilmiş bir bilineer denklem için trigonometrik fonksiyon çözümlerinin bir lineer toplamının da ne zaman bir çözüm olacağını ifade eder. Bu teorem aynı zamanda verilen genelleştirilmiş bilineer denklemlere $N-$dalga çözüm oluşturmak için bir metot geliştirmiş olur. (137) sistemi çözümün sağlaması gereken şarttır. Daha açık bir deyişle, eğer (137) sistemi çözülebilirse, verilen genellleştirilmiş bilineer denklem için (136) N-dalga çözümü elde edilmiş olur.

4.4 Uygulamalar

Örnek 1.

(129) daki $k_{j,i}$ lerin seçimlerini gösteren bağımsız değişkenlerin ağırlıklarını

$$(w(x), w(y), w(z), w(t)) = (1, 2, 3, 4) \tag{138}$$

şeklinde alalım. $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ sabitler olmak üzere 7. dereceden ağırlığa göre homojen olan

$$P = c_1xy^3 + c_2xz^2 + c_3x^3t + c_4y^2z + c_5xyt + c_6x^2yz, \tag{139}$$

polinomunu ele alalım. k_i, $1 \leq i \leq N$, sabitler olmak üzere dalga değişkenleri

$$\eta_i = k_ix + b_1k_i^2y + b_2k_i^3z + b_3k_i^4t,\ 1 \leq i \leq N \tag{140}$$

şeklinde olsun. b_1, b_2 ve b_3 belirlenecek sabitlerdir.

(139) polinomunun karşılık geldiği genelleştirilmiş bilineer denklem $S = P\left(D_{3,x}, D_{3,y}, D_{3,z}, D_{3,t}\right) f \cdot f$ olmak üzere

$$S = 6c_1 f_{yy} f_{yx} + 2c_2 f_{xzz} f + 6c_3 f_{xx} f_{xt} + 2c_4 f_{yyz} f$$
$$+2c_5 f_{xyt} f + 2c_6 f_{xx} f_{yz} + 4c_6 f_{xy} f_{xz} = 0 \tag{141}$$

formundadır. b_1, ε_i ve k_i ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$b_2 = -\tfrac{3b_1^2 c_1}{2c_6}, \quad b_3 = \tfrac{b_1^3 c_1}{2c_3} \tag{142}$$

ve

$$9c_1 c_2 c_3 = 2c_6\left(3c_4 c_3 - c_5 c_6\right) \tag{143}$$

eşitlikleri sağlandığı takdirde (141) denkleminin çözümü aşağıdaki

$$f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i ch\eta_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i ch\left(k_i x + b_1 k_i^2 y + b_2 k_i^3 z + b_3 k_i^4 t\right), \tag{144}$$

yada

$$f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cos\eta_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cos\left(k_i x + b_1 k_i^2 y + b_2 k_i^3 z + b_3 k_i^4 t\right), \tag{145}$$

ile tanımlanan N-dalga çözümlerinin lineer alt uzaylarını içerir.

Örnek 2.

(129) daki $k_{j,i}$ lerin seçimlerini gösteren bağımsız değişkenlerin ağırlıklarını

$$(w(x), w(y), w(z), w(t)) = (1, 3, 5, 7), \tag{146}$$

ile verelim. c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 sabitler olmak üzere 8. dereceden ağırlığa göre homojen olan

$$P = c_1 x^8 + c_2 x^5 y + c_3 x^3 z + c_4 yz + c_5 xt \tag{147}$$

polinomunu ele alalım. k_i, $1 \leq i \leq N$, sabitler olmak üzere dalga değişkenleri

$$\eta_i = k_i x + b_1 k_i^3 y + b_2 k_i^5 z + b_3 k_i^7 t,\ 1 \leq i \leq N, \tag{148}$$

olsun. b_1, b_2 ve b_3 belirlenecek sabitlerdir.

(147) polinomuna karşılık gelen genelleştirilmiş bilineer denklem $S = P\left(D_{5,x}, D_{5,y}, D_{5,z}, D_{5,t}\right) f \cdot f$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S &= 70c_1 f_{xxxx}^2 + 20c_2 f_{xx} f_{xxxy} + 10c_2 f_{xy} f_{xxxx} - 20c_2 f_{xxx} f_{xxy} \\ &+ 2c_3 f f_{xxxz} - 2c_3 f_z f_{xxx} - 6c_3 f_x f_{xxz} + 6c_3 f_{xx} f_{xz} + 2c_4 f f_{yz} \\ &- 2c_4 f_y f_z + 2c_5 f f_{xt} - 2c_5 f_x f_t = 0 \end{aligned} \tag{149}$$

dır. ε_i ler ve k_i ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$b_1 = -\tfrac{7c_1}{c_2}, \quad b_2 = \tfrac{70c_1}{3c_3}, \quad b_3 = -\tfrac{70c_1}{c_5} \tag{150}$$

ve

$$7c_1c_4 = -2c_3c_2. \tag{151}$$

eşitlikleri sağlandığı takdirde (149) denkleminin çözümü

$$f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i ch\eta_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i ch\left(k_i x + b_1 k_i^3 y + b_2 k_i^5 z + b_3 k_i^7 t\right), \tag{152}$$

ile tanımlanan N-dalga çözümlerinin lineer alt uzaylarını içerir.

Benzer şekilde,

$$b_1 = \tfrac{7c_1}{c_2}, \quad b_2 = \tfrac{70c_1}{3c_3}, \quad b_3 = \tfrac{70c_1}{c_5} \tag{153}$$

ve

$$7c_1c_4 = -2c_3c_2 \tag{154}$$

eşitlikleri sağlandığı takdirde (149) denkleminin çözümü

$$f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cos\eta_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cos\left(k_i x + b_1 k_i^3 y + b_2 k_i^5 z + b_3 k_i^7 t\right), \tag{155}$$

ile tanımlanan N-dalga çözümlerinin lineer alt uzaylarını içerir.

Örnek 3.

$$\left(w(x), w(y), w(z), w(t)\right) = (1, 3, -1, -3),$$

(129) daki $k_{j,i}$ lerin seçimlerini gösteren bağımsız değişkenlerin ağırlıkları ve c_1, c_2, c_3, c_4 sabitler olmak üzere 4. dereceden ağırlığa göre homojen olan

$$P = c_1 x^4 + c_2 xy + c_3 x^5 z + c_4 x^7 t \tag{156}$$

polinomunu inceleyelim. Bu örnek negatif ağırlık içeren bir örnektir. k_i, $1 \leq i \leq N$, sabitler olmak üzere dalga değişkenlerini

$$\eta_i = k_i x + b_1 k_i^3 y + b_2 k_i^{-1} z + b_3 k_i^{-3} t,\ 1 \leq i \leq N \tag{157}$$

ile verelim. b_1, b_2 ve b_3 belirlenecek sabitlerdir.

(156) polinomunun ifade ettiği genelleştirilmiş bilineer denklem $S = P\left(D_{5,x}, D_{5,y}, D_{5,z}, D_{5,t}\right) f \cdot f$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S &= 2c_1 f f_{xxxx} - 8c_1 f_{xxx} f_x + 6c_1 f_{xx}^2 + 2c_2 f f_{xy} - 2c_2 f_x f_y \\ &+ 20c_3 f_{xx} f_{xxxz} + 10c_3 f_{xz} f_{xxxx} - 20c_3 f_{xxx} f_{xxz} + 70c_4 f_{xxxx} f_{xxxt} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{158}$$

dır. ε_i ler ve k_i ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$b_1 = -\tfrac{c_1}{c_2}, \quad b_2 = -\tfrac{3c_1}{10c_3}, \quad b_3 = \tfrac{3c_1}{70c_4}. \tag{159}$$

eşitliklerinin sağlanması halinde (158) denkleminin çözümü

$$f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i ch\eta_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i ch\left(k_i x + b_1 k_i^3 y + b_2 k_i^{-1} z + b_3 k_i^{-3} t\right), \tag{160}$$

ile tanımlanan N-dalga çözümlerinin lineer alt uzaylarını içerir.

Benzer yoldan,

$$b_1 = \tfrac{c_1}{c_2}, \quad b_2 = \tfrac{3c_1}{10c_3}, \quad b_3 = \tfrac{3c_1}{70c_4}. \tag{161}$$

eşitliklerinin sağlanması halinde, (158) denkleminin çözümü

$$f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cos\eta_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cos\left(k_i x + b_1 k_i^3 y + b_2 k_i^{-1} z + b_3 k_i^{-3} t\right),$$

ile tanımlanan N-dalga çözümlerinin lineer alt uzaylarını içerir.

4.5 II. Tür Üst Üste Bindirme Kuralı

Genelleştirilmiş bilineer türevlerle ifade edilen

$$P\left(D_{\bar{p}_1,x_1},...,D_{\bar{p_m},x_1};...;D_{\bar{p}_1,x_M},...,D_{\bar{p_m},x_M}\right)f\cdot f=0 \tag{162}$$

bilineer denklemini ele alalım. Burada P; $D_{\bar{p}_i,x_j}$, $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq M$ türevlerinin bir polinomudur. Bu türevler (124) ile tanımlanır ve α_s değerlerini belirlemek için kullanılan kural

$$\alpha_s^l=(-1)^{r_s(l)},\ l=r_s(l)\mod s,\ 0\leq r_s(l)<s,\ s\geq 1,\ l\geq 0 \tag{163}$$

şeklindedir (Ma, 2013 b). Bu türevler, Ma (Ma, 2011, 2013 a) da verilen genelleştirilmiş türevlerin bir adım daha genelleştirilmesiyle elde edilen. N-dalga değişkenleri

$$\eta_i=\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{x}=k_{1,i}x_1+k_{2,i}x_2+...+k_{M,i}x_M,\ 1\leq i\leq N \tag{164}$$

şeklinde ve üstel dalga fonksiyonları

$$f_i=e^{\eta_i}=e^{k_{1,i}x_1+k_{2,i}x_2+...+k_{M,i}x_M},\ 1\leq i\leq N \tag{165}$$

olarak tanımlansın. Burada $k_{j,i}$ ler reel sabitlerdir ve değişkenlerin ağırlıklarına göre özel seçimler yapılabilir. Dalga katsayı vektörü $\mathbf{k}_i$ ve bağımlı değişken vektörü $\mathbf{x}$, sırasıyla

$$\mathbf{k}_i=(k_{1,i},k_{2,i},...,k_{M,i}),\ 1\leq i\leq N,\ \mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_M) \tag{166}$$

şeklinde olsun.

$$f=\varepsilon_1 f_1+\varepsilon_2 f_2+...+\varepsilon_N f_N=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i f_i=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i e^{\eta_i}, \tag{167}$$

lineer toplamını alalım. ε_i, $1\leq i\leq N$ ler keyfi sabitlerdir. (Ma, 2013 b) den N üstel dalganın f lineer toplamının (162) genelleştirilmiş bilineer denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}P&\Big(\beta_{1,1}(i,j),...,\beta_{1,m}(i,j);...;\beta_{M,1}(i,j),...,\beta_{M,m}(i,j)\Big)\\&+P\Big(\beta_{1,1}(j,i),...,\beta_{1,m}(j,i);...;\beta_{M,1}(j,i),...,\beta_{M,m}(j,i)\Big)=0,\\&\qquad 1\leq i\leq j\leq N,\end{aligned} \tag{168}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. $\beta_{r,s}(i,j)$ ler

$$\beta_{r,s}(i,j) = \alpha_{p_s} k_{r,i} + \alpha_{p'_s} k_{r,j} \tag{169}$$

ile tanımlanır.

4.6 Hiperbolik Fonksiyon Çözümleri İçin II. Tür Üst Üste Bindirme Kuralı

(162) denkleminin $f_i = ch\eta_i = \frac{1}{2}\left(e^{\eta_i} + e^{-\eta_i}\right),\ 1 \leq i \leq N$ hiperbolik fonksiyon çözümlerini alalım. Hiperbolik fonksiyonların keyfi bir lineer toplamı olan

$$f = \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 + ... + \varepsilon_N f_N = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i ch\eta_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \frac{1}{2}\left(e^{\eta_i} + e^{-\eta_i}\right) \tag{170}$$

ifadesini ele alalım. Yukarıda tanımlanan genelleştirilmiş türevler altında üstel fonksiyonların

$$\begin{aligned} &P\left(D_{\bar{p_1},x_1}, ..., D_{\bar{p_m},x_1}; ...; D_{\bar{p_1},x_M}, ..., D_{\bar{p_m},x_M}\right) e^{\eta_i} \cdot e^{\eta_j} \\ &\quad = P\Big(\beta_{1,1}(i,j), ..., \beta_{1,m}(i,j); ...; \beta_{M,1}(i,j), ..., \beta_{M,m}(i,j)\Big) e^{\eta_i + \eta_j}, \\ &\qquad\qquad 1 \leq i,j \leq N. \end{aligned} \tag{171}$$

eşitliğini sağladığı Ma tarafından (Ma, 2013 b) de gösterilmiştir.

Teorem 4.3. $k_{j,i}$ ler reel sabitler olmak üzere $P(x_{1,1}, ..., x_{m,1}; ...; x_{1,M}, ..., x_{m,M})$ bir polinom ve N dalga değişkeni $\eta_i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} = k_{1,i}x_1 + k_{2,i}x_2 + ... + k_{M,i}x_M$, $1 \leq i \leq N$, ile tanımlansın. $f_i = ch\eta_i = \frac{1}{2}\left(e^{\eta_i} + e^{-\eta_i}\right),\ 1 \leq i \leq N$, hiperbolik fonksiyonlarının herhangi bir lineer toplamının (162) genelleştirilmiş bilineer denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$P\left(\beta_{1,1}(i,j), ..., \beta_{1,m}(i,j); ...; \beta_{M,1}(i,j), ..., \beta_{M,m}(i,j)\right)$$

$$+P\left(\beta_{1,1}(j,i), ..., \beta_{1,m}(j,i); ...; \beta_{M,1}(j,i), ..., \beta_{M,m}(j,i)\right) = 0,\ 1 \leq i \leq j \leq N,$$

$$P\left(\beta_{1,1}(i,-j), ..., \beta_{1,m}(i,-j); ...; \beta_{M,1}(i,-j), ..., \beta_{M,m}(i,-j)\right)$$

$$+P\left(\beta_{1,1}(-j,i), ..., \beta_{1,m}(-j,i); ...; \beta_{M,1}(-j,i), ..., \beta_{M,m}(-j,i)\right) = 0,\ 1 \leq i,j \leq N,$$

$$P\left(\beta_{1,1}(-i,-j),...,\beta_{1,m}(-i,-j);...;\beta_{M,1}(-i,-j),...,\beta_{M,m}(-i,-j)\right)$$

$$+P\left(\beta_{1,1}(\text{-}j,\text{-}i),...,\beta_{1,m}(\text{-}j,\text{-}i);...;\beta_{M,1}(\text{-}j,\text{-}i),...,\beta_{M,m}(\text{-}j,\text{-}i)\right)=0,\ 1\leq i\leq j\leq N, \tag{172}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. (171) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& P\left(D_{\bar{p_1},x_1},...,D_{\bar{p_m},x_1};...;D_{\bar{p_1},x_M},...,D_{\bar{p_m},x_M}\right)f\cdot f \\
= \; & P\left(D_{\bar{p_1},x_1},...,D_{\bar{p_m},x_1};...;D_{\bar{p_1},x_M},...,D_{\bar{p_m},x_M}\right)\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i ch\eta_i\cdot\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j ch\eta_j \\
= \; & \sum_{i,j=1}^{N}\varepsilon_i\varepsilon_j P\left(D_{\bar{p_1},x_1},...,D_{\bar{p_m},x_1};...;D_{\bar{p_1},x_M},...,D_{\bar{p_m},x_M}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\eta_i}+e^{-\eta_i}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\eta_j}+e^{-\eta_j}\right) \\
= \; & \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{N}\varepsilon_i\varepsilon_j P\left(D_{\bar{p_1},x_1},...,D_{\bar{p_m},x_1};...;D_{\bar{p_1},x_M},...,D_{\bar{p_m},x_M}\right) \\
& \times\left(e^{\eta_i}\cdot e^{\eta_j}+e^{\eta_i}\cdot e^{\text{-}\eta_j}+e^{\text{-}\eta_i}\cdot e^{\eta_j}+e^{\text{-}\eta_i}\cdot e^{\text{-}\eta_j}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \; & \frac{1}{4}\sum_{1\leq i<j\leq N}^{N}\varepsilon_i\varepsilon_j\Big[P\Big(\beta_{1,1}(i,j),...,\beta_{1,m}(i,j);...;\beta_{M,1}(i,j),...,\beta_{M,m}(i,j)\Big)\ e^{\eta_i+\eta_j} \\
& +P\Big(\beta_{1,1}(i,\text{-}j),...,\beta_{1,m}(i,\text{-}j);...;\beta_{M,1}(i,\text{-}j),...,\beta_{M,m}(i,\text{-}j)\Big)\ e^{\eta_i\text{-}\eta_j} \\
& +P\Big(\beta_{1,1}(\text{-}i,j),...,\beta_{1,m}(\text{-}i,j);...;\beta_{M,1}(\text{-}i,j),...,\beta_{M,m}(\text{-}i,j)\Big)\ e^{\text{-}\eta_i+\eta_j} \\
& +P\Big(\beta_{1,1}(\text{-}i,\text{-}j),...,\beta_{1,m}(\text{-}i,\text{-}j);...;\beta_{M,1}(\text{-}i,\text{-}j),...,\beta_{M,m}(\text{-}i,\text{-}j)\Big)\ e^{\text{-}\eta_i\text{-}\eta_j}\Big] \\
& +\frac{1}{4}\sum_{1\leq i>j\leq N}^{N}\varepsilon_i\varepsilon_j\Big[P\Big(\beta_{1,1}(i,j),...,\beta_{1,m}(i,j);...;\beta_{M,1}(i,j),...,\beta_{M,m}(i,j)\Big)e^{\eta_i+\eta_j} \\
& +P\Big(\beta_{1,1}(i,-j),...,\beta_{1,m}(i,-j);...;\beta_{M,1}(i,-j),...,\beta_{M,m}(i,-j)\Big)\ e^{\eta_i-\eta_j} \\
& +P\Big(\beta_{1,1}(-i,j),...,\beta_{1,m}(-i,j);...;\beta_{M,1}(-i,j),...,\beta_{M,m}(-i,j)\Big)\ e^{-\eta_i+\eta_j} \\
& +P\Big(\beta_{1,1}(-i,-j),...,\beta_{1,m}(-i,-j);...;\beta_{M,1}(-i,-j),...,\beta_{M,m}(-i,-j)\Big)e^{-\eta_i-\eta_j}\Big]
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{1\le i=j\le N}^{N}\varepsilon_i\varepsilon_j\Big[P\Big(\beta_{1,1}(i,j),...,\beta_{1,m}(i,j);...;\beta_{M,1}(i,j),...,\beta_{M,m}(i,j)\Big)e^{\eta_i+\eta_j}$$
$$+P\Big(\beta_{1,1}(i,\text{-}j),...,\beta_{1,m}(i,\text{-}j);...;\beta_{M,1}(i,\text{-}j),...,\beta_{M,m}(i,\text{-}j)\Big)e^{\eta_i\text{-}\eta_j}$$
$$+P\Big(\beta_{1,1}(\text{-}i,j),...,\beta_{1,m}(\text{-}i,j);...;\beta_{M,1}(\text{-}i,j),...,\beta_{M,m}(\text{-}i,j)\Big)e^{\text{-}\eta_i+\eta_j}$$
$$+P\Big(\beta_{1,1}(\text{-}i,\text{-}j),...,\beta_{1,m}(\text{-}i,\text{-}j);...;\beta_{M,1}(\text{-}i,\text{-}j),...,\beta_{M,m}(\text{-}i,\text{-}j)\Big)e^{\text{-}\eta_i\text{-}\eta_j}\Big]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{1\le i<j\le N}^{N}\varepsilon_i\varepsilon_j\Big[\Big(P\Big(\beta_{1,1}(i,j),...,\beta_{1,m}(i,j);...;\beta_{M,1}(i,j),...,\beta_{M,m}(i,j)\Big)$$
$$+P\Big(\beta_{1,1}(j,i),...,\beta_{1,m}(j,i);...;\beta_{M,1}(j,i),...,\beta_{M,m}(j,i)\Big)\Big)e^{\eta_i+\eta_j}$$
$$+\Big(P\Big(\beta_{1,1}(i,-j),...,\beta_{1,m}(i,-j);...;\beta_{M,1}(i,-j),...,\beta_{M,m}(i,-j)\Big)$$
$$+P\Big(\beta_{1,1}(-j,i),...,\beta_{1,m}(-j,i);...;\beta_{M,1}(-j,i),...,\beta_{M,m}(-j,i)\Big)\Big)e^{\eta_i-\eta_j}$$
$$+\Big(P\Big(\beta_{1,1}(-i,j),...,\beta_{1,m}(-i,j);...;\beta_{M,1}(-i,j),...,\beta_{M,m}(-i,j)\Big)$$
$$+P\Big(\beta_{1,1}(j,-i),...,\beta_{1,m}(j,-i);...;\beta_{M,1}(j,-i),...,\beta_{M,m}(j,-i)\Big)\Big)e^{-\eta_i+\eta_j}$$
$$+\Big(P\Big(\beta_{1,1}(-i,-j),...,\beta_{1,m}(-i,-j);...;\beta_{M,1}(-i,-j),...,\beta_{M,m}(-i,-j)\Big)$$
$$+P\Big(\beta_{1,1}(-j,-i),...,\beta_{1,m}(-j,-i);...;\beta_{M,1}(-j,-i),...,\beta_{M,m}(-j,-i)\Big)\Big)e^{-\eta_i-\eta_j}\Big]$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{1\le i\le N}^{N}\varepsilon_i^2\Big[P\Big(\beta_{1,1}(i,i),...,\beta_{1,m}(i,i);...;\beta_{M,1}(i,i),...,\beta_{M,m}(i,i)\Big)e^{2\eta_i}$$
$$+P\Big(\beta_{1,1}(i,\text{-}i),...,\beta_{1,m}(i,\text{-}i);...;\beta_{M,1}(i,\text{-}i),...,\beta_{M,m}(i,\text{-}i)\Big)$$
$$+P\Big(\beta_{1,1}(\text{-}i,i),...,\beta_{1,m}(\text{-}i,i);...;\beta_{M,1}(\text{-}i,i),...,\beta_{M,m}(\text{-}i,i)\Big)$$
$$+P\Big(\beta_{1,1}(\text{-}i,\text{-}i),...,\beta_{1,m}(\text{-}i,\text{-}i);...;\beta_{M,1}(\text{-}i,\text{-}i),...,\beta_{M,m}(\text{-}i,\text{-}i)\Big)e^{\text{-}2\eta_i}\Big]. \tag{173}$$

işlemleri yapılır ve burada

$$\begin{aligned}
\beta_{r,s}(i,j) &= \alpha_{p_s}k_{r,i}+\alpha_{p'_s}k_{r,j},\\
\beta_{r,s}(i,-j) &= \alpha_{p_s}k_{r,i}-\alpha_{p'_s}k_{r,j},\\
\beta_{r,s}(-i,j) &= -\alpha_{p_s}k_{r,i}+\alpha_{p'_s}k_{r,j},\\
\beta_{r,s}(-i,-j) &= -\alpha_{p_s}k_{r,i}-\alpha_{p'_s}k_{r,j}
\end{aligned} \tag{174}$$

eşitlikleri kullanılırsa, (173) dan, "N adet $f_i = ch\eta_i = \frac{1}{2}\left(e^{\eta_i}+e^{-\eta_i}\right)$, $1\le i\le N$ hiperbolik fonksiyonun f lineer toplamının (162) genelleştirilmiş bilineer denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter şart (172) eşitliklerinin sağlanmasıdır" sonucu çıkarılabilir.

Bu teorem bize, verilen genelleştirilmiş bir bilineer denklem için hiperbolik fonksiyon çözümlerinin bir lineer toplamının da ne zaman bir çözüm olacağını ifade eder. Bu teorem aynı zamanda verilen genelleştirilmiş bilineer denklemlere $N-$dalga çözümü oluşturmak için bir metot geliştirmiş olur. (172) sistemi çözümün sağlaması gereken şarttır. Daha açık bir deyişle, eğer (172) sistemi çözülebilirse, verilen genellleştirilmiş bilineer denklem için (170) N-dalga çözümü elde edilmiş olur.

4.7 Trigonometrik Fonksiyon Çözümleri İçin II. Tür Üst Üste Bindirme Kuralı

$\eta_i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}$, $1 \leq i \leq N$, $I = \sqrt{-1}$ olmak üzere, $f_i = \cos\eta_i = \frac{1}{2}\left(e^{I\eta_i} + e^{-I\eta_i}\right)$, $1 \leq i \leq N$, (162) denkleminin trigonometrik fonksiyon çözümleri olsun. Trigonometrik fonksiyon çözümlerinin lineer toplamı olan

$$f = \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 + ... + \varepsilon_N f_N = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cos\eta_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \frac{1}{2}\left(e^{I\eta_i} + e^{-I\eta_i}\right), \tag{175}$$

ifadesini ele alalım. Benzer mantıkla, N adet trigonometrik fonksiyon çözümünün f lineer toplamının (162) genelleştirilmiş bilineer denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
&P\left(\beta_{1,1}(Ii,Ij),...,\beta_{1,m}(Ii,Ij);...;\beta_{M,1}(Ii,Ij),...,\beta_{M,m}(Ii,Ij)\right)\\
&+P\left(\beta_{1,1}(Ij,Ii),...,\beta_{1,m}(Ij,Ii);...;\beta_{M,1}(Ij,Ii),...,\beta_{M,m}(Ij,Ii)\right) = 0,\ 1 \leq i \leq j \leq N,\\
&P\left(\beta_{1,1}(Ii,-Ij),...,\beta_{1,m}(Ii,-Ij);...;\beta_{M,1}(Ii,-Ij),...,\beta_{M,m}(Ii,-Ij)\right)\\
&+P\left(\beta_{1,1}(-Ij,Ii),...,\beta_{1,m}(-Ij,Ii);...;\beta_{M,1}(-Ij,Ii),...,\beta_{M,m}(-Ij,Ii)\right) = 0,\ 1 \leq i,j \leq N,\\
&P\left(\beta_{1,1}(-Ii,-Ij),...,\beta_{1,m}(-Ii,-Ij);...;\beta_{M,1}(-Ii,-Ij),...,\beta_{M,m}(-Ii,-Ij)\right)\\
&+P\left(\beta_{1,1}(\text{-}Ij,\text{-}Ii),...,\beta_{1,m}(\text{-}Ij,\text{-}Ii);...;\beta_{M,1}(\text{-}Ij,\text{-}Ii),...,\beta_{M,m}(\text{-}Ij,\text{-}Ii)\right) = 0,\ 1 \leq i \leq j \leq N,
\end{aligned} \tag{176}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. Burada

$$\begin{aligned}
\beta_{r,s}(Ii, Ij) &= \alpha_{p_s} Ik_{r,i} + \alpha_{p'_s} Ik_{r,j}, \\
\beta_{r,s}(Ii, -Ij) &= \alpha_{p_s} Ik_{r,i} - \alpha_{p'_s} Ik_{r,j}, \\
\beta_{r,s}(-Ii, Ij) &= -\alpha_{p_s} Ik_{r,i} + \alpha_{p'_s} Ik_{r,j}, \\
\beta_{r,s}(-Ii, -Ij) &= -\alpha_{p_s} Ik_{r,i} - \alpha_{p'_s} Ik_{r,j}, \text{ ve } I = \sqrt{-1}
\end{aligned} \tag{177}$$

kullanılır. Bunun üzerine aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.4. $k_{j,i}$ ler reel sabitler olmak üzere $P(x_{1,1}, ..., x_{m,1}; ...; x_{1,M}, ..., x_{m,M})$ bir polinom ve N dalga değişkeni $\eta_i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} = k_{1,i}x_1 + k_{2,i}x_2 + ... + k_{M,i}x_M$, $1 \leq i \leq N$, ile tanımlansın. $f_i = \cos \eta_i$, $1 \leq i \leq N$, hiperbolik fonksiyonlarının herhangi bir lineer toplamının (162) genelleştirilmiş bilineer denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart (176) denklemlerinin sağlanmasıdır.

Bu teorem bize, verilen genelleştirilmiş bir bilineer denklem için trigonometrik fonksiyon çözümlerinin bir lineer toplamının da ne zaman bir çözüm olacağını ifade eder. Bu teorem aynı zamanda verilen genelleştirilmiş bilineer denklemlere $N-$dalga çözümü oluşturmak için bir metot geliştirmiş olur. (176) sistemi çözümün sağlaması gereken şarttır. Daha açık bir deyişle, eğer (176) sistemi çözülebilirse, verilen genelleştirilmiş bilineer denklem için (175) N-dalga çözümü elde edilmiş olur.

4.8 Uygulamalar

Örnek 1.

(166) deki $k_{j,i}$ lerin seçimlerini gösteren bağımsız değişkenlerin ağırlıklarını

$$(w(x), w(y), w(z), w(t)) = (1, 3, 5, 7) \tag{178}$$

olarak seçelim. c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 sabitler olmak üzere 8. dereceden ağırlığa göre homojen olan

$$P = c_1x^8 + c_2x^5y + c_3x^3z + c_4xt + c_5yz \tag{179}$$

polinomunu ele alalım. k_i, $1 \leq i \leq N$, b_1, b_2 ve b_3 sabitler olmak üzere, dalga değişkenlerini

$$\eta_i = k_ix + b_1k_i^3y + b_2k_i^5z + b_3k_i^7t, \ 1 \leq i \leq N, \tag{180}$$

olarak seçelim.

Bu durumda (179) polinomunun karşılık geldiği genelleştirilmiş bilineer denklem $S = P\left(D_{\langle 2,5\rangle x}, D_{\langle 2,5\rangle y}, D_{\langle 2,5\rangle z}, D_{\langle 2,5\rangle t}\right) f \cdot f$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S &= 70c_1 f_{xxxx}^2 + 20c_2 f_{xx} f_{xxxy} + 10c_2 f_{xy} f_{xxxx} + 20c_2 f_{xxx} f_{xxy} \\ &+ 2c_3 f f_{xxxz} + 2c_3 f_z f_{xxx} + 6c_3 f_x f_{xxz} + 6c_3 f_{xx} f_{xz} + 2c_4 f f_{yz} \\ &+ 2c_4 f_y f_z + 2c_5 f f_{xt} + 2c_5 f_x f_t = 0 \end{aligned} \tag{181}$$

dır. ε_i ve k_i ler keyfi sabitler olmak üzere;

$$b_1 = \tfrac{2c_3}{c_5}, \quad b_2 = -\tfrac{20c_2}{3c_5}, \quad b_3 = \tfrac{20c_3c_2}{c_5c_4}, \tag{182}$$

ve

$$7c_1c_5 = -2c_3c_2 \tag{183}$$

eşitlikleri sağlandığı takdirde (181) denkleminin çözümü

$$f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i ch\eta_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i ch\left(k_i x + b_1 k_i^3 y + b_2 k_i^5 z + b_3 k_i^7 t\right), \tag{184}$$

ile tanımlanan N-dalga çözümlerinin lineer alt uzaylarını içerir.

Benzer şekilde,

$$b_1 = -\tfrac{2c_3}{c_5}, \quad b_2 = -\tfrac{20c_2}{3c_5}, \quad b_3 = -\tfrac{20c_3c_2}{c_5c_4} \tag{185}$$

ve

$$7c_1c_5 = -2c_3c_2 \tag{186}$$

eşitlikleri sağlandığı zaman (181) denkleminin çözümü

$$f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cos\eta_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cos\left(k_i x + b_1 k_i^3 y + b_2 k_i^5 z + b_3 k_i^7 t\right), \tag{187}$$

ile tanımlanan N-dalga çözümlerinin lineer alt uzaylarını içerir.

Örnek 2.

(166) deki $k_{j,i}$ lerin seçimlerini gösteren bağımsız değişkenlerin ağırlıkları

$$(w(x), w(y), w(z), w(t)) = (1, -1, 3, 5) \tag{188}$$

olsun. $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ sabitler olmak üzere 4.dereceden ağırlığa göre homojen olan:

$$P = c_1x^4 + c_2x^5y + c_3xz + c_4yt + c_5y^2z^2 + c_6x^2yz + c_7xty^2 \tag{189}$$

polinomunu seçelim. k_i, $1 \leq i \leq N$, b_1, b_2 ve b_3 sabitler olmak üzere, dalga değişkenleri

$$\eta_i = k_ix + b_1k_i^{-1}y + b_2k_i^3z + b_3k_i^5t,\ 1 \leq i \leq N, \tag{190}$$

şeklinde olsun.

Bu durumda (189) polinomuna karşılık gelen genelleştirilmiş bilineer denklem $S = P\left(D_{\langle 3,5\rangle x}, D_{\langle 3,5\rangle y}, D_{\langle 3,5\rangle z}, D_{\langle 3,5\rangle t}\right) f \cdot f$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S &= 6c_1f_{xx}^2 - 20c_2f_{xxy}f_{xxx} - 2c_2f_yf_{xxxxx} - 10c_2f_xf_{xxxxy} + 2c_3f_{xz}f \\ &+2c_3f_xf_z + 2c_4f_{yt}f + 2c_4f_yf_t + 2c_5f_{yy}f_{zz} + 4c_5f_{yz}f_{yz} + 2c_6f_{xx}f_{yz} \\ &+4c_6f_{xy}f_{xz} + 2c_7f_{yy}f_{xt} + 4c_7f_{xy}f_{yt}=0 \end{aligned} \tag{191}$$

şeklindedir. ε_i ve k_i ler keyfi sabitler olmak üzere

$$b_1 = -\tfrac{8c_4c_3}{15c_6c_4+c_7c_3},\quad b_2 = -\tfrac{45(15c_6c_4+c_7c_3)c_1}{8(2c_7c_3-15c_6c_4)c_3},\quad b_3 = \tfrac{3c_1(15c_6c_4+c_7c_3)^2}{64c_4^2c_3(2c_7c_3-15c_6c_4)}, \tag{192}$$

ve

$$3c_1(15c_6c_4+c_7c_3)^2 = 64c_2c_3c_4(2c_7c_3-15c_6c_4),\ 675c_1c_5c_4^2 = -c_7c_3(2c_7c_3-15c_6c_4) \tag{193}$$

eşitliklerinin sağlanması halinde (191) denkleminin çözümü

$$f = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_if_i = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_ich\eta_i = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_ich\left(k_ix + b_1k_i^2y + b_2k_i^3z + b_3k_i^4t\right), \tag{194}$$

ile tanımlanan N-dalga çözümlerinin lineer alt uzaylarını içerir.

Benzer yolla,

$$b_1 = \tfrac{8c_4c_3}{15c_6c_4+c_7c_3},\quad b_2 = \tfrac{45(15c_6c_4+c_7c_3)c_1}{8(2c_7c_3-15c_6c_4)c_3},\quad b_3 = \tfrac{3c_1(15c_6c_4+c_7c_3)^2}{64c_4^2c_3(2c_7c_3-15c_6c_4)}, \tag{195}$$

ve

$$3c_1(15c_6c_4+c_7c_3)^2 = 64c_2c_3c_4(2c_7c_3-15c_6c_4),\ 675c_1c_5c_4^2 = -c_7c_3(2c_7c_3-15c_6c_4) \quad (196)$$

eşitliklerinin sağlanması halinde (191) denkleminin çözümü

$$f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cos\eta_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cos\left(k_i x + b_1 k_i^2 y + b_2 k_i^3 z + b_3 k_i^4 t\right), \quad (197)$$

ile tanımlanan N-dalga çözümlerinin lineer alt uzaylarını içerir.

Örnek 3.

(166) deki $k_{j,i}$ lerin seçimlerini gösteren bağımsız değişkenlerin ağırlıkları

$$(w(x), w(y), w(z), w(t)) = (1, 3, -1, -3) \quad (198)$$

olsun. $\bar{p_1} = \langle 2,5\rangle$, $\bar{p_2} = \langle 3,5\rangle$ olmak üzere, $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9$ sabitlerdir. 4.dereceden ağırlığa göre homojen olan:

$$P = c_1 x_{\bar{p_1}}^4 + c_2 x_{\bar{p_1}} y + c_3 x_{\bar{p_1}}^5 z + c_4 x_{\bar{p_1}}^7 t + c_5 y^2 z^2 + c_6 x_{\bar{p_2}}^4 + c_7 x_{\bar{p_2}} y + c_8 x_{\bar{p_2}}^5 z + c_9 x_{\bar{p_2}}^7 t, \quad (199)$$

polinomu için k_i, $1 \le i \le N$, sabitler olmak üzere dalga değişkenleri

$$\eta_i = k_i x + b_1 k_i^3 y + b_2 k_i^{-1} z + b_3 k_i^{-3} t,\ 1 \le i \le N, \quad (200)$$

olarak tanımlansın. b_1, b_2 ve b_3 belirlenecek sabitlerdir.

(199) polinomuna karşılık gelen genelleştirilmiş bilineer denklem $S = P\left(D_{\langle 2,5\rangle x}, D_{\langle 3,5\rangle x}, D_{\langle 2,5\rangle y}, D_{\langle 2,5\rangle z}, D_{\langle 2,5\rangle t}\right) f\cdot f$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S &= 2c_1 f f_{xxxx} + 8c_1 f_{xxx} f_x + 6c_1 f_{xx}^2 + 2c_2 f f_{xy} + 2c_2 f_x f_y \\ &+20c_3 f_{xx} f_{xxxz} + 10c_3 f_{xz} f_{xxxx} + 20c_3 f_{xxx} f_{xxz} + 70c_4 f_{xxxx} f_{xxxt} \\ &+2c_5 f f_{yyzz} + 4c_5 f_y f_{yzz} + 4c_5 f_z f_{zyy} + 2c_5 f_{yy} f_{zz} + 4c_5 f_{yz}^2 \\ &+6c_6 f_{xx}^2 + 2c_7 f f_{xy} + 2c_7 f_x f_y - 2c_8 f_{xxxxxz} f - 2c_8 f_z f_{xxxxx} \\ &-42c_9 f_{xxt} f_{xxxxx} - 42c_9 f_{xxxxxt} f_{xx} - 70c_9 f_{xxxxt} f_{xxx} - 70c_9 f_{xxxx} f_{xxxt} = 0 \end{aligned} \quad (201)$$

dır. ε_i ve k_i ler keyfi sabitler olmak üzere

$$b_1 = \frac{57c_6c_9+17c_1c_9-30c_4c_6+10c_4c_1}{(37c_9-10c_4)(c_7+c_2)}, \quad b_2 = -\frac{3(17c_6c_9+20c_1c_9-5c_4c_6-5c_4c_1)}{5c_3(37c_9-10c_4)}, \quad b_3 = \frac{3(-c_1+c_6)}{7(37c_9-10c_4)}, \tag{202}$$

ve

$$15c_3c_9(-c_1+c_6) = c_8(17c_6c_9+20c_1c_9-5c_4c_6-5c_4c_1), \; c_5 = 0 \tag{203}$$

eşitliklerinin sağlanması halinde (201) denkleminin çözümü

$$f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i ch\eta_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i ch\left(k_i x + b_1 k_i^3 y + b_2 k_i^{-1} z + b_3 k_i^{-3} t\right), \tag{204}$$

ile tanımlanan N-dalga çözümlerinin lineer alt uzaylarını içerir.

Benzer işlemlerle,

$$b_1 = -\frac{57c_6c_9+17c_1c_9-30c_4c_6+10c_4c_1}{(37c_9-10c_4)(c_7+c_2)}, \quad b_2 = \frac{3(17c_6c_9+20c_1c_9-5c_4c_6-5c_4c_1)}{5c_3(37c_9-10c_4)}, \quad b_3 = \frac{3(-c_1+c_6)}{7(37c_9-10c_4)}, \tag{205}$$

ve

$$15c_3c_9(-c_1+c_6) = c_8(17c_6c_9+20c_1c_9-5c_4c_6-5c_4c_1), \; c_5 = 0 \tag{206}$$

eşitlikleri sağlanırsa, (201) denkleminin çözümü

$$f = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i f_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cos\eta_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cos\left(k_i x + b_1 k_i^3 y + b_2 k_i^{-1} z + b_3 k_i^{-3} t\right), \tag{207}$$

ile tanımlanan N-dalga çözümlerinin lineer alt uzaylarını içerir.

5. KOMPLEKSİTON ÇÖZÜMLER

Son zamanlarda, integrallenebilen denklemlerin tam çözümlerinin sınıflandırılmasında yeni terimlerin kullanımı artmış, bir başka deyişle yeni tam çözüm çeşitleri türetilmeye başlanmıştır. Bunlardan biride, Lax çiftlerinde kullanılan λ spektral parametresinin işareti yardımıyla yapılır (Wazwaz, 2013), (Ma, 2002). Bu çalışmalarda verilen bilgilere göre negaton çözümler negatif spektral parametre($\lambda < 0$) ile ilişkilendirilir. Negaton çözümler, solitonlar gibi üstel fonksiyonlar içerirken, trigonometrik fonksiyon içermez. Positon çözümler ise pozitif spektral parametre($\lambda > 0$) ile ilişkilendirilir. Bu tür çözümler, soliton ve negaton çözümlerin aksine trigonometrik fonksiyonlar içerirken, üstel fonksiyonlar içermezler. Kompleksiton çözümler ise buraya kadar bahsedilen çözümlerin birleşimi gibi düşünülebilir, λ spektral parametresinin kompleks değerler alması üzerine ortaya çıkmış çözüm türüdür. Kompleksiton çözümler hem üstel hem de trigonometrik fonksiyon içerir. Spektral parametrenin sıfıra eşit olması durumunda ise, çözüm üstel fonksiyonlar cinsinden ifade edilen bir solitondur.

Yakın zamanda, soliton teorideki integrallenebilen denklemlerin kompleksiton çözümlerini bulmak için çeşitli metotlar geliştirilmiştir. Bu metotlar Wronskian formülü (Ma, 2002, 2005 a), Casoratian tekniği (Ma, W.X., 2005 b), Darboux dönüşümü (Hu vd., 2006, 2010) gibi teknikler içerir. Daha sonra Wazwaz (2013, 2015) tarafından yapılan iki çalışma ile kompleksiton çözüm bulmak için yeni bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntem bilinen Hirota bilineer metodunda kullanılan dalga değişkenlerinin reel parametrelerden kompleks parametrelere geçişi temeline dayanan bir yöntemdir. İzleyen kısımlarda, bu yöntem kullanılarak iki farklı denklemin kompleksiton çözümleri elde edilecektir.

5.1 Sawada Kotera Denkleminin Kompleksiton Çözümleri

Bu kısımda Sawada Kotera denkleminin kompleksiton çözümlerini elde etmek için Abdul Majid Wazwaz'ın, Hirota'nın bilineer metodunu kullanarak geliştirdiği yeni yöntem kullanılacaktır (Wazwaz, 2013, 2015)

$$u_t + 45u^2u_x - 15u_xu_{2x} - 15uu_{3x} + u_{5x} = 0 \tag{208}$$

denklemi literatürde Sawada Kotera denklemi olarak bilinir (Yang ve Ruan, 2013).

$$u = -2(\ln f)_{xx} \tag{209}$$

dönüşümü ile (208) Sawada Kotera denklemi

$$\left(D_tD_x + D_x^6\right) f \cdot f = 0 \tag{210}$$

bilineer denklemine dönüşür. Burada D_t ve D_x Hirota bilineer türev operatörleridir ve bu operatörler (36) ile tanımlanır (Hirota, 2004). Literatürde (208) denkleminin

$$u = -2\left(\ln\left(\sum_{\mu=0,1}\exp\left(\sum_{j=1}^{2N}\mu_j\eta_j + \sum_{1\leq j<l}^{2N}\mu_j\mu_lA_{jl}\right)\right)\right)_{xx}. \tag{211}$$

formunda $2N$-soliton çözümlerinin olduğu bilinmektedir. (211) çözümüne ilişkin yayılma bağıntısı ve faz kaydırmaları

$$\eta_j = k'_jx + w'_jt,\ w'_j = -k_j^5,\ e^{A_{jl}} = -\frac{(w'_j - w'_l)(k'_j - k'_l) + (k'_j - k'_l)^6}{(w'_j + w'_l)(k'_j + k'_l) + (k'_j + k'_l)^6} \quad (1 \leq j < l \leq 2N) \tag{212}$$

şeklindedir. $w'_j = -k_j^5$ yayılma bağıntısı yardımıyla faz kaydırmaları

$$e^{A_{jl}} = \frac{(k'_j - k'_l)^2(k_l'^2 - k'_jk'_l + k_j'^2)}{(k'_j + k'_l)^2(k_l'^2 + k'_jk'_l + k_j'^2)} \quad (1 \leq j < l \leq 2N) \tag{213}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. (208) denkleminin kompleksiton çözümünü bulmak istediğimiz için k'_n $(1 \leq n \leq 2N)$ reel parametrelerini karmaşık parametrelere çevirilmesi uygun olur. Bu amacımıza

$$k'_{2m-1} = k_m = a_m + ib_m,\ k'_{2m} = k_m^* = a_m - ib_m \ \ (1 \leq m \leq N) \tag{214}$$

atamasıyla ulaşabiliriz. Burada a_m ve b_m $(1 \leq m \leq N)$ reel parametrelerdir.

Genel olarak, $e^{A_{2m-1,2m}} > 1$, $1 \leq m \leq N$ sağlandığı durumda (211) tekil olmayan N-kompleksiton çözüm belirtir. Şayet a_m, b_m özel olarak seçilirse, aşağıda gösterildiği gibi tekil olmayan kompleksiton çözüm veya soliton çözüm belirtir:

(i) $\left|\sqrt{3}b_m\right| > |a_m|$ ve $\left|\sqrt{3}a_m\right| > |b_m|$ olduğu durumda, (211) tekil olmayan N-kompleksiton çözüm ifade eder.

(ii) $a_m \neq 0$ ve $b_m = 0$ olduğu durumda (211) N-soliton çözüm ifade eder.

Durum I: $(N = 1)$

$$\Omega_1 = a_1 x + (-a_1^5 + 10a_1^3 b_1^2 - 5a_1 b_1^4)t,\ \theta_1 = b_1 x + (-5a_1^4 b_1 + 10a_1^2 b_1^3 - b_1^5)t$$

olmak üzere

$$\eta_1 = \eta_2^* = \Omega_1 + i\theta_1 \tag{215}$$

alınırsa,

$$e^{A_{12}} = \frac{b_1^2\,(3b_1^2 - a_1^2)}{a_1^2\,(3a_1^2 - b_1^2)} \tag{216}$$

elde edilir. (215) ve (216) kullanılarak

$$f = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{A_{12}} e^{\eta_1+\eta_2} \tag{217}$$

$$\begin{aligned} u \;=\; & \text{-}2[a_1 e^{A_{12}} e^{\Omega_1}(a_1 \cos\theta_1 + b_1 \sin\theta_1) + (\text{-}a_1 b_1 \sin\theta_1 \text{-} b_1^2 \cos\theta_1 + a_1^2 e^{A_{12}} e^{\Omega_1}) \\ & \times(\sqrt{e^{A_{12}}}\cosh(\Omega_1 + \ln(\sqrt{e^{A_{12}}})))\text{-}(a_1 \cos\theta_1 \text{-} b_1 \sin\theta_1 + a_1 e^{A_{12}} e^{\Omega_1}) \\ & \times(a_1 \sqrt{e^{A_{12}}}\sinh(\Omega_1 + \ln(\sqrt{e^{A_{12}}})))\text{-}b_1^2] \\ & /(\sqrt{e^{A_{12}}}\cosh(\Omega_1 + \ln(\sqrt{e^{A_{12}}})) + \cos\theta_1)^2 \end{aligned} \tag{218}$$

çözümü elde edilir. (218) çözümü detaylı incelenirse:

(i) $\left|\sqrt{3}b_1\right| > |a_1|$ ve $\left|\sqrt{3}a_1\right| > |b_1|$ olduğu durumda, (218) den tekil olmayan 1-kompleksiton çözüm elde ederiz.

(ii) $a_1 \neq 0$ ve $b_1 = 0$ olduğu durumda (218) den 1-soliton çözüm elde ederiz.

Durum II: $(N = 2)$

$$\eta_{2m-1} = \eta_{2m}^* = \Omega_m + i\theta_m \tag{219}$$

alınırsa,

$$\Omega_m = a_m x + (-a_m^5 + 10a_m^3 b_m^2 - 5a_m b_m^4)t, \theta_m = b_m x + (-5a_m^4 b_m + 10a_m^2 b_m^3 - b_m^5)t (m = 1, 2)$$

olmak üzere

$$(e^{A_{13}})^* = e^{A_{24}},\ (e^{A_{14}})^* = (e^{A_{23}}),\ e^{A_{2m-1,2m}} = \frac{b_m^2(3b_m^2 - a_m^2)}{a_m^2(3a_m^2 - b_m^2)}\ (m = 1, 2).$$

$$\begin{aligned} e^{A_{13}} &= \frac{(\text{-}b_2^2 + b_1 b_2 \text{-} b_1^2 + a_2^2 \text{-} a_1 a_2 + a_1^2 + i(2a_2 b_2 \text{-} b_1 a_2 \text{-} a_1 b_2 + 2a_1 b_1))(a_1 + b_1 i \text{-} a_2 \text{-} i b_2)^2}{(\text{-}b_2^2 \text{-} b_1 b_2 \text{-} b_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 + a_1^2 + i(2a_2 b_2 + b_1 a_2 + a_1 b_2 + 2a_1 b_1))(a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i)^2} \\ e^{A_{14}} &= \frac{(\text{-}b_2^2 \text{-} b_1 b_2 \text{-} b_1^2 + a_2^2 \text{-} a_1 a_2 + a_1^2 + i(a_1 b_2 + 2a_1 b_1 \text{-} b_1 a_2 \text{-} 2a_2 b_2))(a_1 + b_1 i \text{-} a_2 + b_2 i)^2}{(\text{-}b_2^2 + b_1 b_2 \text{-} b_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 + a_1^2 + i(b_1 a_2 \text{-} a_1 b_2 + 2a_1 b_1 \text{-} 2a_2 b_2))(a_1 + b_1 i + a_2 \text{-} i b_2)^2} \end{aligned} \tag{220}$$

eşitlikleri yazılabilir. (219) ve (220) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} u &= -2(\ln(1+2e^{\Omega_1}\cos\theta_1+2e^{\Omega_2}\cos\theta_2+e^{A_{12}}e^{2\Omega_1}+e^{A_{34}}e^{2\Omega_2} \\ &\quad +2e^{\Omega_1+\Omega_2}[\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\cos(\theta_1+\theta_2)-\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\sin(\theta_1+\theta_2) \\ &\quad +\mathrm{Re}(e^{A_{14}})\cos(\theta_1-\theta_2)-\mathrm{Im}(e^{A_{14}})\sin(\theta_1-\theta_2)]+2e^{A_{12}}e^{2\Omega_1+\Omega_2} \\ &\quad \times[\big(\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Re}(e^{A_{14}})+\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Im}(e^{A_{14}})\big)\cos\theta_2-(\mathrm{Im}(e^{A_{13}}) \\ &\quad \times\mathrm{Re}(e^{A_{14}})-\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Im}(e^{A_{14}}))\sin\theta_2]+2e^{A_{34}}e^{\Omega_1+2\Omega_2} \\ &\quad \times[\big(\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Re}(e^{A_{14}})-\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Im}(e^{A_{14}})\big)\cos\theta_1 \\ &\quad -\big(\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Im}(e^{A_{14}})+\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Re}(e^{A_{14}})\big)\sin\theta_1] \\ &\quad +e^{A_{12}}e^{A_{34}}\left|e^{A_{13}}\right|^2\left|e^{A_{14}}\right|^2e^{2\Omega_1+2\Omega_2}))_{xx} \end{aligned} \tag{221}$$

çözümü elde edilir. (221) ışığında:

(i) $\left|\sqrt{3}b_m\right| > |a_m|$ ve $\left|\sqrt{3}a_m\right| > |b_m|$ $(m=1,2)$ sağlandığında, (221) den iki-kompleksiton çözüm elde ederiz.

(ii) $\left|\sqrt{3}b_1\right| > |a_1|$, $\left|\sqrt{3}a_1\right| > |b_1|$, $a_2 \neq 0$ ve $b_2 = 0$, ise (221) den bir soliton ile bir kompleksitonun etkileşimini içeren soliton-kompleksiton çözüm elde ederiz.

(iii) $a_m \neq 0$ ve $b_m = 0$ $(m=1,2)$, ise (221) den iki-soliton çözüm elde ederiz.

Durum III: $(N=3)$ Son olarak

$$\eta_{2m-1} = \eta_{2m}^* = \Omega_m + i\theta_m \tag{222}$$

ve

$$\Omega_m = a_m x + (-a_m^5 + 10a_m^3 b_m^2 - 5a_m b_m^4)t,\ \theta_m = b_m x + (-5a_m^4 b_m + 10a_m^2 b_m^3 - b_m^5)t (m=1,2,3)$$

alınırsa

$$\begin{aligned} (e^{A_{13}})^* &= e^{A_{24}},\ (e^{A_{14}})^* = (e^{A_{23}}),\ (e^{A_{15}})^* = e^{A_{26}}, (e^{A_{16}})^* = e^{A_{25}}, \\ (e^{A_{35}})^* &= e^{A_{46}}, (e^{A_{36}})^* = e^{A_{45}}, e^{A_{2m-1,2m}} = \frac{b_m^2(3b_m^2-a_m^2)}{a_m^2(3a_m^2-b_m^2)}\ (m=1,2,3) \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Durum I ve Durum II de kullanılan yol kullanılarak

$$\begin{aligned}
u &= -2\ln[1+2e^{\Omega_1}\cos\theta_1+2e^{\Omega_2}\cos\theta_2+2e^{\Omega_3}\cos\theta_3+e^{A_{12}}e^{2\Omega_1}\\
&\quad +e^{A_{34}}e^{2\Omega_2}+e^{A_{56}}e^{2\Omega_3}+2e^{\Omega_1+\Omega_2}[\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\cos(\theta_1+\theta_2)\\
&\quad -\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\sin(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{Re}(e^{A_{14}})\cos(\theta_1-\theta_2)-\mathrm{Im}(e^{A_{14}})\\
&\quad \times\sin(\theta_1-\theta_2)]+2e^{\Omega_1+\Omega_3}[\mathrm{Re}(e^{A_{15}})\cos(\theta_1+\theta_3)-\mathrm{Im}(e^{A_{15}})\\
&\quad \times\sin(\theta_1+\theta_3)+\mathrm{Re}(e^{A_{16}})\cos(\theta_1-\theta_3)-\mathrm{Im}(e^{A_{16}})\sin(\theta_1-\theta_3)]\\
&\quad +2e^{\Omega_2+\Omega_3}[\mathrm{Re}(e^{A_{35}})\cos(\theta_2+\theta_3)-\mathrm{Im}(e^{A_{35}})\sin(\theta_2+\theta_3)\\
&\quad +\mathrm{Re}(e^{A_{36}})\cos(\theta_2-\theta_3)-\mathrm{Im}(e^{A_{36}})\sin(\theta_2-\theta_3)]+2e^{A_{12}}e^{2\Omega_1+\Omega_2}\\
&\quad \times[\big(\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\mathrm{Re}(e^{A_{14}})+\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\mathrm{Im}(e^{A_{14}})\big)\cos\theta_2-(\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\\
&\quad \times\mathrm{Re}(e^{A_{14}})-\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\mathrm{Im}(e^{A_{14}}))\sin\theta_2]+2e^{A_{34}}e^{2\Omega_2+\Omega_1}\\
&\quad \times[(\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\mathrm{Re}(e^{A_{14}})-\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\mathrm{Im}(e^{A_{14}}))\cos\theta_1-(\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\\
&\quad \times\mathrm{Re}(e^{A_{14}})+\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\mathrm{Im}(e^{A_{14}}))\sin\theta_1]+2e^{A_{12}}e^{2\Omega_1+\Omega_3}\\
&\quad \times[(\mathrm{Re}(e^{A_{15}})\mathrm{Re}(e^{A_{16}})+\mathrm{Im}(e^{A_{15}})\mathrm{Im}(e^{A_{16}}))\cos\theta_3-(\mathrm{Im}(e^{A_{15}})\\
&\quad \times\mathrm{Re}(e^{A_{16}})-\mathrm{Re}(e^{A_{15}})\mathrm{Im}(e^{A_{16}}))\sin\theta_3]+2e^{A_{56}}e^{2\Omega_3+\Omega_1}\\
&\quad \times[(\mathrm{Re}(e^{A_{15}})\mathrm{Re}(e^{A_{16}})-\mathrm{Im}(e^{A_{15}})\mathrm{Im}(e^{A_{16}}))\cos\theta_1-(\mathrm{Im}(e^{A_{15}})\\
&\quad \times\mathrm{Re}(e^{A_{16}})+\mathrm{Re}(e^{A_{15}})\mathrm{Im}(e^{A_{16}}))\sin\theta_1]+2e^{A_{34}}e^{2\Omega_2+\Omega_3}\\
&\quad \times[(\mathrm{Re}(e^{A_{35}})\mathrm{Re}(e^{A_{36}})+\mathrm{Im}(e^{A_{35}})\mathrm{Im}(e^{A_{36}}))\cos\theta_3-(\mathrm{Im}(e^{A_{35}})\\
&\quad \times\mathrm{Re}(e^{A_{36}})-\mathrm{Re}(e^{A_{35}})\mathrm{Im}(e^{A_{36}}))\sin\theta_3]+2e^{A_{56}}e^{2\Omega_3+\Omega_2}\\
&\quad \times[(\mathrm{Re}(e^{A_{35}})\mathrm{Re}(e^{A_{36}})-\mathrm{Im}(e^{A_{35}})\mathrm{Im}(e^{A_{36}}))\cos\theta_2-(\mathrm{Im}(e^{A_{35}})\\
&\quad \times\mathrm{Re}(e^{A_{36}})+\mathrm{Re}(e^{A_{35}})\mathrm{Im}(e^{A_{36}}))\sin\theta_2]+2e^{A_{34}}e^{\Omega_1+2\Omega_2}\\
&\quad \times[(\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\mathrm{Re}(e^{A_{14}})-\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\mathrm{Im}(e^{A_{14}}))\cos\theta_1-(\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\\
&\quad \times\mathrm{Im}(e^{A_{14}})+\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\mathrm{Re}(e^{A_{14}}))\sin\theta_1]+...+e^{A_{12}}e^{A_{34}}e^{A_{56}}\\
&\quad \times\left|e^{A_{13}}\right|^2\left|e^{A_{14}}\right|^2\left|e^{A_{15}}\right|^2\left|e^{A_{16}}\right|^2\left|e^{A_{35}}\right|^2\left|e^{A_{36}}\right|^2e^{2\Omega_1+2\Omega_2+2\Omega_3}]_{xx}
\end{aligned}\tag{223}$$

çözümü elde edilir. (223) incelenirse:

(i) $\left|\sqrt{3}b_m\right|>|a_m|$ ve $\left|\sqrt{3}a_m\right|>|b_m|$ $(m=1,2,3)$ sağlandığında, (223) den üç-kompleksiton çözüm elde ederiz.

(ii) $\left|\sqrt{3}b_m\right|>|a_m|$, $\left|\sqrt{3}a_m\right|>|b_m|$ $(m=1,2)$, $a_3\neq 0$ ve $b_3=0$, ise (223) den bir soliton ile iki kompleksitonun etkileşimini içeren soliton-kompleksiton çözüm elde ederiz.

(iii) $\left|\sqrt{3}b_1\right| > |a_1|,\ \left|\sqrt{3}a_1\right| > |b_1|$, $a_2 \neq 0,\ b_2 = 0,\ a_3 \neq 0$ ve $b_3 = 0$, ise (223) den iki soliton ile bir kompleksitonun etkileşimini içeren soliton-kompleksiton çözüm elde ederiz.

(iv) $a_m \neq 0$ ve $b_m = 0$ $(m = 1, 2, 3)$, ise (223) den üç-soliton çözüm elde ederiz.

5.2 Dokuzuncu Mertebeden KdV Denkleminin Kompleksiton Çözümleri

İkinci olarak dokuzuncu mertebeden KdV denkleminin kompleksiton çözümleri elde edilecektir. Bu denklem literatürde

$$\begin{aligned} & u_t + 45u_x u_{6x} + 45uu_{7x} + 210u_{3x}u_{4x} + 210u_{2x}u_{5x} + 1575u_x(u_{2x})^2 + 3150uu_{2x}u_{3x} \\ & +1260uu_x u_{4x} + 630u^2u_{5x} + 9450u^2u_x u_{2x} + 3150u^3u_{3x} + 4725u^4u_x + u_{9x} = 0 \end{aligned} \tag{224}$$

şeklinde verilir (Wazwaz, 2008).

$$u = 2(\ln f)_{xx} \tag{225}$$

dönüşümü kullanılırsa (224) denklemi

$$\left(D_t D_x + D_x^{10}\right) f \cdot f = 0 \tag{226}$$

bilineer denklemine dönüşür. Literatürde (224) denkleminin

$$u = 2\left(\ln\left(\sum_{\mu=0,1} \exp\left(\sum_{j=1}^{2N} \mu_j\eta_j + \sum_{1\le j<l}^{2N} \mu_j\mu_l A_{jl}\right)\right)\right)_{xx}. \tag{227}$$

formunda $2N$-soliton çözümlerinin olduğu bilinmektedir. (227) çözümüne ilişkin yayılma bağıntısı ve faz kaydırmaları

$$\eta_j = k'_j x + w'_j t,\ w'_j = -k_j^9,\ e^{A_{jl}} = -\frac{(w'_j - w'_l)(k'_j - k'_l) + (k'_j - k'_l)^{10}}{(w'_j + w'_l)(k'_j + k'_l) + (k'_j + k'_l)^{10}} \quad (1 \le j < l \le 2N) \tag{228}$$

şeklindedir. $w'_j = -k_j^5$ yayılma bağıntısı yardımıyla faz kaydırmaları

$$e^{A_{jl}} = \frac{(k'_j - k'_l)^2(3k'^6_j - 9k'_i k'^5_j + 19k'^2_i k^4_j - 23k'^3_i k'^3_j + 19k'^4_i k'^2_j - 9k'^5_i k'_j + 3k'^6_i)}{(k'_j + k'_l)^2(3k'^6_j + 9k'_i k'^5_j + 19k'^2_i k^4_j + 23k'^3_i k'^3_j + 19k'^4_i k'^2_j + 9k'^5_i k'_j + 3k'^6_i)}, \quad (1 \le j < l \le 2N) \tag{229}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. (208) denkleminin kompleksiton çözümünü bulmak istediğimiz için k'_n $(1 \le n \le 2N)$ reel parametrelerini karmaşık parametrelere çevirilmesi uygun olur. Bu amacımıza

$$k'_{2m-1} = k_m = a_m + ib_m,\; k'_{2m} = k^*_m = a_m - ib_m \;\; (1 \leq m \leq N) \tag{230}$$

atamasıyla ulaşabiliriz. Burada a_m ve b_m $(1 \leq m \leq N)$ reel parametrelerdir.

Genel olarak, $e^{A_{2m-1,2m}} > 1$, $1 \leq m \leq N$ sağlandığı durumda (227) tekil olmayan N-kompleksiton çözüm belirtir. Şayet a_m, b_m özel olarak seçilirse, aşağıda gösterildiği gibi tekil olmayan kompleksiton çözüm veya soliton çözüm belirtir:

(i) $-3a_m^6 + 31a_m^4 b_m^2 - 73a_m^2 b_m^4 + 85b_m^6 > 0$ ve $-3b_m^6 + 31b_m^4 a_m^2 - 73b_m^2 a_m^4 + 85a_m^6 > 0$ eşitsizliklerinin sağlandığı durumda, (227) tekil olmayan N-kompleksiton çözüm ifade eder.

(ii) $a_m \neq 0$ ve $b_m = 0$ olduğu durumda (227) N-soliton çözüm ifade eder.

Durum I: $(N = 1)$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= a_1 x + (-a_1^9 + 36a_1^7 b_1^2 - 1265a_1^5 b_1^4 + 84a_1^3 b_1^6 - 9a_1 b_1^8)t, \\ \theta_1 &= b_1 x + (36a_1^2 b_1^7 + 84a_1^6 b_1^3 - 126a_1^4 b_1^5 - b_1^9 - 9b_1 a_1^8)t \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\eta_1 = \eta_2^* = \Omega_1 + i\theta_1 \tag{231}$$

alınırsa,

$$e^{A_{12}} = \frac{b_1^2\,(-3a_1^6 + 31a_1^4 b_1^2 - 73a_1^2 b_1^4 + 85b_1^6)}{a_1^2\,(-3b_1^6 + 31b_1^4 a_1^2 - 73b_1^2 a_1^4 + 85a_1^6)} \tag{232}$$

elde edilir. (231) ve (232) kullanılarak

$$f = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{A_{12}} e^{\eta_1 + \eta_2} \tag{233}$$

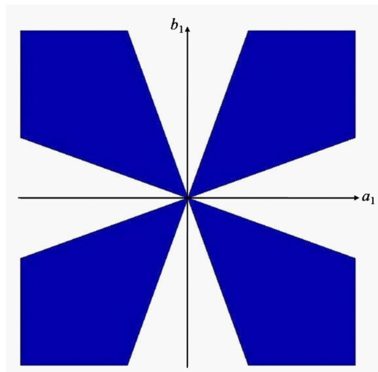
$$\begin{aligned} u &= 2[a_1 e^{A_{12}} e^{\Omega_1}(a_1 \cos\theta_1 + b_1 \sin\theta_1) + (-a_1 b_1 \sin\theta_1 - b_1^2 \cos\theta_1 + a_1^2 e^{A_{12}} e^{\Omega_1}) \\ &\quad \times(\sqrt{e^{A_{12}}} \cosh(\Omega_1 + \ln(\sqrt{e^{A_{12}}}))) - (a_1 \cos\theta_1 - b_1 \sin\theta_1 + a_1 e^{A_{12}} e^{\Omega_1}) \\ &\quad \times(a_1 \sqrt{e^{A_{12}}} \sinh(\Omega_1 + \ln(\sqrt{e^{A_{12}}}))) - b_1^2] \\ &\quad /(\sqrt{e^{A_{12}}} \cosh(\Omega_1 + \ln(\sqrt{e^{A_{12}}})) + \cos\theta_1)^2 \end{aligned} \tag{234}$$

çözümü elde edilir. (234) çözümü detaylı incelenirse:

(i) $-3a_1^6 + 31a_1^4 b_1^2 - 73a_1^2 b_1^4 + 85b_1^6 > 0$ ve $-3b_1^6 + 31b_1^4 a_1^2 - 73b_1^2 a_1^4 + 85a_1^6 > 0$ eşitsizliklerinin sağlandığı durumda, (234) den tekil olmayan 1-kompleksiton çözüm elde ederiz.

(ii) $a_1 \neq 0$ ve $b_1 = 0$ olduğu durumda (234) den 1-soliton çözüm elde ederiz.

$-3a_1^6 + 31a_1^4b_1^2 - 73a_1^2b_1^4 + 85b_1^6 > 0$ ve $-3b_1^6 + 31b_1^4a_1^2 - 73b_1^2a_1^4 + 85a_1^6 > 0$ eşitsizliklerinin çözüm kümesi



Şekil **4.1**. Dokuzuncu mertebeden
KdV denklemi için eşitsizliklerin çözüm kümesi

şeklindedir.

Durum II: $(N = 2)$

$$\eta_{2m-1} = \eta_{2m}^{*} = \Omega_m + i\theta_m \tag{235}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
\Omega_m &= a_m x + (-a_m^9 + 36a_m^7b_m^2 - 1265a_m^5b_m^4 + 84a_m^3b_m^6 - 9a_mb_m^8)t, \\
\theta_m &= b_m x + (36a_m^2b_m^7 + 84a_m^6b_m^3 - 126a_m^4b_m^5 - b_m^9 - 9b_ma_m^8)t \ (m = 1, 2)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$(e^{A_{13}})^* = e^{A_{24}}, \ (e^{A_{14}})^* = (e^{A_{23}}),$$

$$e^{A_{2m-1,2m}} = \frac{b_m^2\left(-3a_m^6 + 31a_m^4b_m^2 - 73a_m^2b_m^4 + 85b_m^6\right)}{a_m^2\left(-3b_m^6 + 31b_m^4a_m^2 - 73b_m^2a_m^4 + 85a_m^6\right)}, (m = 1, 2).$$

$$\begin{aligned}
e^{A_{13}} = \ & (-45a_1^4b_1^2 + 45a_1^2b_1^4 + 3a_1^6 - 3b_1^6 + 3a_2^6 - 9a_1a_2^5 - 9a_1^5a_2 + 19a_1^4a_2^2 \\
& -23a_1^3a_2^3 - 3b_2^6 - 45a_1a_2b_2^4 + 69a_1^3a_2b_2^2 + ... + 19a_1^2a_2^4 - 76a_1b_1^3a_2^2) \\
& \times(a_1 - a_2 + i(b_1 - b_2))^2/(-45a_1^4b_1^2 + 45a_1^2b_1^4 + 3a_1^6 - 3b_1^6 + 3a_2^6 \\
& +9a_1a_2^5 + 19a_1^2a_2^4 + 9a_1^5a_2 + 19a_1^4a_2^2 + 23a_1^3a_2^3 + 9b_1a_2^5 - 23b_1^3a_2^3 \\
& +9b_1^5a_2 + ... + 9a_1^5b_2 + 9a_1b_2^5 - 23a_1^3b_2^3))(a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2))^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e^{A_{14}} &= (-45a_1^4b_1^2+45a_1^2b_1^4+3a_1^6-3b_1^6+3a_2^6-9a_1a_2^5+19a_1^2a_2^4-9a_1^5a_2 \\
&\quad +69a_1^3a_2^2b_2+45a_1a_2^4b_2-90a_1a_2^2b_2^3+228a_1^2b_1^2a_2b_2+...+60a_2^3b_2^3) \\
&\quad \times(a_1+ib_1-a_2+b_2i)^2/(-45a_1^4b_1^2+45a_1^2b_1^4+3a_1^6-3b_1^6+3a_2^6 \\
&\quad -3b_2^6+45a_1a_2b_2^4-69a_1^3a_2b_2^2-114a_1^2a_2^2b_2^2+9a_1a_2^5+...+19a_1^2a_2^4 \\
&\quad +228a_1^2b_1^2a_2b_2-18a_2^5b_2+60a_2^3b_2^3-18a_2b_2^5)(a_1+b_1i+a_2-ib_2)^2 \qquad (236)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri yazılabilir. (235) ve (236) eşitlikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
u &= 2(\ln(1+2e^{\Omega_1}\cos\theta_1+2e^{\Omega_2}\cos\theta_2+e^{A_{12}}e^{2\Omega_1}+e^{A_{34}}e^{2\Omega_2} \\
&\quad +2e^{\Omega_1+\Omega_2}[\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\cos(\theta_1+\theta_2)-\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\sin(\theta_1+\theta_2) \\
&\quad +\mathrm{Re}(e^{A_{14}})\cos(\theta_1-\theta_2)-\mathrm{Im}(e^{A_{14}})\sin(\theta_1-\theta_2)]+2e^{A_{12}}e^{2\Omega_1+\Omega_2} \\
&\quad \times[\big(\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Re}(e^{A_{14}})+\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Im}(e^{A_{14}})\big)\cos\theta_2-(\mathrm{Im}(e^{A_{13}}) \\
&\quad \times\mathrm{Re}(e^{A_{14}})-\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Im}(e^{A_{14}}))\sin\theta_2]+2e^{A_{34}}e^{\Omega_1+2\Omega_2} \\
&\quad \times[\big(\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Re}(e^{A_{14}})-\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Im}(e^{A_{14}})\big)\cos\theta_1 \\
&\quad -\big(\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Im}(e^{A_{14}})+\mathrm{Im}(e^{A_{13}})\,\mathrm{Re}(e^{A_{14}})\big)\sin\theta_1] \\
&\quad +e^{A_{12}}e^{A_{34}}\left|e^{A_{13}}\right|^2\left|e^{A_{14}}\right|^2e^{2\Omega_1+2\Omega_2}))_{xx} \qquad (237)
\end{aligned}
$$

çözümü elde edilir. (237) ışığında:

(i) $-3a_m^6+31a_m^4b_m^2-73a_m^2b_m^4+85b_m^6>0$ ve $-3b_m^6+31b_m^4a_m^2-73b_m^2a_m^4+85a_m^6>0$ eşitsizliklerinin sağlandığı durumda, (237) iki-kompleksiton çözüm belirtir.

(ii) $-3a_1^6+31a_1^4b_1^2-73a_1^2b_1^4+85b_1^6>0$, $-3b_1^6+31b_1^4a_1^2-73b_1^2a_1^4+85a_1^6>0$, $a_2\neq 0$ ve $b_2=0$, ise (237) bir soliton ile bir kompleksitonun etkileşimini içeren soliton-kompleksiton çözüm belirtir.

(iii) $a_m\neq 0$ ve $b_m=0$ $(m=1,2)$ ise(237) iki soliton çözüm belirtir..

Durum III: $(N=3)$ Son olarak

$$\eta_{2m-1}=\eta_{2m}^{*}=\Omega_m+i\theta_m \qquad (238)$$

ve

$$
\begin{aligned}
\Omega_m &= a_mx+(-a_m^9+36a_m^7b_m^2-1265a_m^5b_m^4+84a_m^3b_m^6-9a_mb_m^8)t, \\
\theta_m &= b_mx+(36a_m^2b_m^7+84a_m^6b_m^3-126a_m^4b_m^5-b_m^9-9b_ma_m^8)t\ (m=1,2,3)
\end{aligned}
$$

alınırsa

$$
\begin{aligned}
(e^{A_{13}})^* &= e^{A_{24}},\ (e^{A_{14}})^* = (e^{A_{23}}),\ (e^{A_{15}})^* = e^{A_{26}}, (e^{A_{16}})^* = e^{A_{25}}, (e^{A_{35}})^* = e^{A_{46}}, \\
(e^{A_{36}})^* &= e^{A_{45}}, e^{A_{2m-1,2m}} = \frac{b_m^2\left(-3a_m^6 + 31a_m^4 b_m^2 - 73a_m^2 b_m^4 + 85b_m^6\right)}{a_m^2\left(-3b_m^6 + 31b_m^4 a_m^2 - 73b_m^2 a_m^4 + 85a_m^6\right)}\ (m = 1, 2, 3)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri bulunur. Durum I ve Durum II deki kullanılan yol kullanılarak

$$
\begin{aligned}
u &= 2\ln[1 + 2e^{\Omega_1}\cos\theta_1 + 2e^{\Omega_2}\cos\theta_2 + 2e^{\Omega_3}\cos\theta_3 + e^{A_{12}}e^{2\Omega_1} \\
&\quad + e^{A_{34}}e^{2\Omega_2} + e^{A_{56}}e^{2\Omega_3} + 2e^{\Omega_1+\Omega_2}[\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\cos(\theta_1+\theta_2) \\
&\quad - \mathrm{Im}(e^{A_{13}})\sin(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{Re}(e^{A_{14}})\cos(\theta_1-\theta_2) - \mathrm{Im}(e^{A_{14}}) \\
&\quad \times\sin(\theta_1-\theta_2)] + 2e^{\Omega_1+\Omega_3}[\mathrm{Re}(e^{A_{15}})\cos(\theta_1+\theta_3) - \mathrm{Im}(e^{A_{15}}) \\
&\quad \times\sin(\theta_1+\theta_3) + \mathrm{Re}(e^{A_{16}})\cos(\theta_1-\theta_3) - \mathrm{Im}(e^{A_{16}})\sin(\theta_1-\theta_3)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2e^{\Omega_2+\Omega_3}[\mathrm{Re}(e^{A_{35}})\cos(\theta_2+\theta_3) - \mathrm{Im}(e^{A_{35}})\sin(\theta_2+\theta_3) \\
&+\mathrm{Re}(e^{A_{36}})\cos(\theta_2-\theta_3) - \mathrm{Im}(e^{A_{36}})\sin(\theta_2-\theta_3)] + 2e^{A_{12}}e^{2\Omega_1+\Omega_2} \\
&\times[\big(\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\mathrm{Re}(e^{A_{14}}) + \mathrm{Im}(e^{A_{13}})\mathrm{Im}(e^{A_{14}})\big)\cos\theta_2 - (\mathrm{Im}(e^{A_{13}}) \\
&\times\mathrm{Re}(e^{A_{14}}) - \mathrm{Re}(e^{A_{13}})\mathrm{Im}(e^{A_{14}}))\sin\theta_2] + 2e^{A_{34}}e^{2\Omega_2+\Omega_1} \\
&\times[(\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\mathrm{Re}(e^{A_{14}}) - \mathrm{Im}(e^{A_{13}})\mathrm{Im}(e^{A_{14}}))\cos\theta_1 - (\mathrm{Im}(e^{A_{13}}) \\
&\times\mathrm{Re}(e^{A_{14}}) + \mathrm{Re}(e^{A_{13}})\mathrm{Im}(e^{A_{14}}))\sin\theta_1] + 2e^{A_{12}}e^{2\Omega_1+\Omega_3} \\
&\times[(\mathrm{Re}(e^{A_{15}})\mathrm{Re}(e^{A_{16}}) + \mathrm{Im}(e^{A_{15}})\mathrm{Im}(e^{A_{16}}))\cos\theta_3 - (\mathrm{Im}(e^{A_{15}}) \\
&\times\mathrm{Re}(e^{A_{16}}) - \mathrm{Re}(e^{A_{15}})\mathrm{Im}(e^{A_{16}}))\sin\theta_3] + 2e^{A_{56}}e^{2\Omega_3+\Omega_1} \\
&\times[(\mathrm{Re}(e^{A_{15}})\mathrm{Re}(e^{A_{16}}) - \mathrm{Im}(e^{A_{15}})\mathrm{Im}(e^{A_{16}}))\cos\theta_1 - (\mathrm{Im}(e^{A_{15}}) \\
&\times\mathrm{Re}(e^{A_{16}}) + \mathrm{Re}(e^{A_{15}})\mathrm{Im}(e^{A_{16}}))\sin\theta_1] + 2e^{A_{34}}e^{2\Omega_2+\Omega_3} \\
&\times[(\mathrm{Re}(e^{A_{35}})\mathrm{Re}(e^{A_{36}}) + \mathrm{Im}(e^{A_{35}})\mathrm{Im}(e^{A_{36}}))\cos\theta_3 - (\mathrm{Im}(e^{A_{35}}) \\
&\times\mathrm{Re}(e^{A_{36}}) - \mathrm{Re}(e^{A_{35}})\mathrm{Im}(e^{A_{36}}))\sin\theta_3] + 2e^{A_{56}}e^{2\Omega_3+\Omega_2} \\
&\times[(\mathrm{Re}(e^{A_{35}})\mathrm{Re}(e^{A_{36}}) - \mathrm{Im}(e^{A_{35}})\mathrm{Im}(e^{A_{36}}))\cos\theta_2 - (\mathrm{Im}(e^{A_{35}}) \\
&\times\mathrm{Re}(e^{A_{36}}) + \mathrm{Re}(e^{A_{35}})\mathrm{Im}(e^{A_{36}}))\sin\theta_2] + 2e^{A_{34}}e^{\Omega_1+2\Omega_2} \\
&\times[(\mathrm{Re}(e^{A_{13}})\mathrm{Re}(e^{A_{14}}) - \mathrm{Im}(e^{A_{13}})\mathrm{Im}(e^{A_{14}}))\cos\theta_1 - (\mathrm{Re}(e^{A_{13}}) \\
&\times\mathrm{Im}(e^{A_{14}}) + \mathrm{Im}(e^{A_{13}})\mathrm{Re}(e^{A_{14}}))\sin\theta_1] + ... + e^{A_{12}}e^{A_{34}}e^{A_{56}} \\
&\times\left|e^{A_{13}}\right|^2\left|e^{A_{14}}\right|^2\left|e^{A_{15}}\right|^2\left|e^{A_{16}}\right|^2\left|e^{A_{35}}\right|^2\left|e^{A_{36}}\right|^2 e^{2\Omega_1+2\Omega_2+2\Omega_3}]_{xx} \qquad (239)
\end{aligned}
$$

çözümü elde edilir. (239) incelenirse:

(i) $-3a_m^6+31a_m^4b_m^2-73a_m^2b_m^4+85b_m^6>0$ ve $-3b_m^6+31b_m^4a_m^2-73b_m^2a_m^4+85a_m^6>0$ eşitsizliklerinin sağlandığı durumda, (239) üç-kompleksiton çözüm belirtir.

(ii) $-3a_m^6+31a_m^4b_m^2-73a_m^2b_m^4+85b_m^6>0$ ve $-3b_m^6+31b_m^4a_m^2-73b_m^2a_m^4+85a_m^6>0$, $a_3\neq 0$ ve $b_3=0$, ise (239) bir soliton ile iki kompleksitonun etkileşimini içeren soliton-kompleksiton çözüm belirtir.

(iii) $-3a_1^6+31a_1^4b_1^2-73a_1^2b_1^4+85b_1^6>0$ ve $-3b_1^6+31b_1^4a_1^2-73b_1^2a_1^4+85a_1^6>0$, $a_2\neq 0$, $b_2=0$, $a_3\neq 0$ ve $b_3=0$, ise (239) iki soliton ile bir kompleksitonun etkileşimini içeren soliton-kompleksiton çözüm belirtir.

(iv) $a_m\neq 0$ ve $b_m=0$ $(m=1,2,3)$, ise (239) üç-soliton çözüm ifade eder.

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Literatürde integrallenebilirlik konusu üzerine yapılmış birçok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalar kapsamında, kısmi diferensiyel denklemlerin integrallenebilirliğini incelemek için birçok yöntem türetilmiş ve bunlara ilişkin uygulamalar yapılmıştır. Bu tez dahilinde, ilgili denklemin integrallenebilirliğini incelemek için kullanılan bu yöntemlerin(kriterlerin) birkaçını bir arada uygulama imkanı sunan Bell polinomu yaklaşımı kullanılmıştır. Bell polinomu yaklaşımı, yakın zamanda integralenebilirlik konusunda kullanılan en etkili ve anlaşılır metotlardan birisidir. Bell polinomu yaklaşımı ile genel olarak lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin bilineer formları yardımıyla soliton çözüm, Lax çifti, Bäcklund dönüşümü, korunum kanunları gibi kriterleri çalışılarak integrallenebilirlikleri incelenmiş yahut integrallenebilir olduğu görüşünü kuvvetlenirecek çalışmalar yapılmıştır, soliton çözümlerin grafikleri çizilerek çözümlerin davranışları hakkında açıklamalarda bulunulmuştur.

Son üç senede, literatürde yerini yeni yeni almaya başlayan ve henüz çok az sayıda uygulaması bulunan genelleştirilmiş bilineer türev operatörleri üzerine oluşturduğumuz bölüm kapsamında, genelleştirilmiş bilineer türevler cinsinden bilineer formda yazılabilen denklemlerin N-dalga çözümlerinin elde edilmesi için gerek ve yeterli şartları ifade eden teoremler literatüre kazandırılmıştır. Bu teoremler aynı zamanda ilgili denklemlerin çözümleri ile oluşturulan üst üste bindirme kuralınıda teşkil eder.

Literatürde yerini yeni yeni alan, hiperbolik ve trigonometrik tipten fonksiyon çözümleri içeren kompleksiton çözümler Abdul Majid Wazwaz tarafından geliştirilen metot kullanılarak, Sawada Kotera ve dokuzuncu mertebeden KdV denklemleri için elde edilmiştir. Tez boyunca yapılan tüm hesaplamalar Maple paket programı yardımıyla gerçekleştirilmiştir ve bulunan çözümler, literatürde daha önce elde edilen çözümlerden farklıdır. Bulunan bu çözümler, nümerik yöntemlerle elde edilen yaklaşık(nümerik) çözümlerin karşılaştırılmasında kullanılarak yaklaşık çözümlerin hata oranının belirlenmesine yardımcı olabilir. Bu tez kapsamında elde edilen yenilikler; mühendislik, fizik ve kimya gibi bilim dallarındaki uygulama alanlarının genişletilmesine katkı sağlayacaktır.

Tez süresinde yapılmış toplamda 3 adet çalışma, bilimsel makale olarak çeşitli bilimsel dergilere sunulmuştur. Bunlardan biri basılmış olup, kaynaklar dizinine eklenmiştir. Diğer iki çalışmada ilgili bilimsel dergilerde inceleme altındadır. Bunlara ek olarak, dördüncü bir çalışma yazım aşamasındadır, nihayete ulaşmasını takiben ilgili bilimsel dergilere sunulacaktır.

Bundan sonraki çalışmalarda, tez dahilinde kullanılan Bell polinomu yaklaşımı ile literatürde mevcut diğer kısmi diferensiyel denklemlerin integrallenebilirlikleri incelenebilir. Literatürde halen var olup Hirota bilineer türevleri için uygulanan tüm metotların genelleştirilmiş bilineer türevler için de genelleştirilmesi üzerine durulabilir. Abdul Majid Wazwaz'ın literatüre kazandırmış olduğu metottan esinlenerek, yani reel parametrelerden kompleks parametrelere geçiş yapılarak, tam çözüm bulmak için kullanılan birçok yöntem, kompleksiton çözüm bulmak için genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ablowitz, M.J., Clarkson, P.A., 1991, Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering, Cambridge University Press, Cambridge, p.513.

Bekir, A., 2005, Lineer olmayan denklemlerin Painlevé analizi, tam çözümleri ve simetrileri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 91 s.

Bekir, A., 2007, Painlevé test for some $(2+1)$-dimensional nonlinear equations, Chaos, Solitons and Fractals, 32, 449-455.

Bell, E.T., 1934, Exponential polynomials, Ann. Math. 35, 258-277.

Fan, E., 2011, The integrability of nonisospectral and variable-coefficient KdV equation with binary Bell polynomials, Physics Letters A, 375, 493-497.

Gilson, C., Lambert, F., Nimmo, J., Willox, R., 1996, On the combinatorics of the Hirota D-operators, Proc. R. Soc. Lond. A, 452, 223-234.

Hietarinta, J., 2005, Hirota's bilinear method and soliton solutions. Phys. AUC, 15, 31-37.

Hirota, R., 2004, The Direct Method in Soliton Theory, New York: Cambridge University Press, p.200.

Hu, H.C., Sang, B.W., Zhu, H.D., 2010, New nonsingular positon, negaton and complexiton solutions for a special coupled mKdV system, Phys. Lett. A, 374, 1141-1146.

Hu, H.C., Tong, B., Lou, S.Y., 2006, Nonsingular positon and complexiton solutions for the coupled KdV system, Phys. Lett. A, 351, 403-412.

Jiang, Y., Tian, B., Liu, W.J., Sun, K., Li, M., 2013, Soliton solutions and integrability for the generalized variable-coefficient extended Korteweg-de Vries equation in fluids, Applied Mathematics Letters, 26, 402-407.

Jiang, Y., Tian, B., Liu, W.J., Li, M., Wang, P., Sun, K., 2010, Solitons, Bäcklund transformation, and Lax pair for the (2+1)-dimensional Boiti-Leon-Pempinelli equation for the water waves, Journal of Mathematical Physics, 51, 093519.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Lambert, F., Leble, S., Springael, J., 2001 b, Binary Bell polynomials and Darboux covariant Lax pairs, Glasg. Math. J.,43A, 53-63.

Lambert, F., Loris, I., Springael, J., Willox, R., 1994, On a direct bilinearization method: Kaup's higher-order water wave equations as a modified nonlocal Boussinesq equation, J. Phys. A: Math. Gen., 27, 5325-5334.

Lambert, F., Loris, I., Springael, J., 2001 a, Classical Darboux transformations and the KP hierarchy, Inverse Problems, 17, 1067-1074.

Lambert, F., Springael, J., 1997, Construction of Bäcklund transformations with binary Bell polynomials, J. Phys. Soc. Jpn., 66, 8, 2211-2213.

Lambert, F., Springael, J., 2001, On a direct procedure for the disclosure of Lax pairs and Bäcklund transformations, Chaos, Solitons and Fractals, 12, 2821-2832.

Lambert, F., Springael, J., 2008, Soliton equations and simple combinatorics, Acta. Appl. Math., 102, 147-178.

Li, X.N., Wei, G.M., Liang, Y.Q., 2010, Painlevé analysis and new analytic solutions for variable-coefficient Kadomtsev-Petviashvili equation with symbolic computation, Appl. Math. Comput. 216, 3568-3577.

Luo, L., 2011, New exact solutions and Bäcklund transformation for Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equation, Physics Letters A, 375, 1059-1063.

Ma, W.X., 2002, Complexiton solutions to the Korteweg-de Vries equation, Physics Letters A, 301, 35–44.

Ma, W.X., 2005 b, Complexiton solutions to integrable equations, Nonlinear Analysis, 63, e2461–e2471.

Ma, W.X., 2011, Generalized bilinear differential equations. *Studies in Nonlinear Sciences*, **2,** 140-144.

Ma, W.X., 2013 a, Bilinear equations, Bell polynomials and linear superposition principle. *Journal of Physics: Conference Series,* 411**,** 012021.

Ma, W.X., 2013 b, Bilinear equations and resonant solutions characterized by Bell polynomials, Reports on Mathematical Physics, 72, 41-56.

Ma, W.X., You, Y., 2005 a, Solving the Korteweg-de Vries equation by its bilinear form: Wronskian solutions, Transactions of the American Mathematical Society, 357, 1753–1778.

Matveev, V.B., Salle, M.A., 1980, Darboux transformation and solitons, Springer, Berlin.

Ming, Z.J., Ming, Z.Y., 2011, The Hirota bilinear method for the coupled Burgers equation and the high-order Boussinesq Burgers equation, Chin. Phys. B, 20, 1, 010205.

Miura, M.R., 1978, Bäcklund Transformation, Springer-Verlag, Berlin.

Qin, Y., Gao, Y.T., Yu, X., Meng, G.Q., 2012, Bell polynomial approach and N-Soliton Solutions for a Coupled KdV-mKdV System, Commun. Theor. Phys., 58, 73-78.

Sun, Y., Tian, B., Sun, W.R., Jiang, Yan., Wang, Y.P., Huang, Z.R., 2014, Bäcklund transformation and N-soliton solutions for a (2+1)-dimensional nonlinear evolution equation in nonlinear water waves, Royal Swedish Academy of Sciences, 89, 075209.

Taşcan, F., 2002, İntegrallenebilirlik ve pertürbasyon teori, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 61 s.

Ünsal, Ömer., Taşcan, Filiz., 2015, Soliton Solutions, Bäcklund Transformation and Lax Pair for Coupled Burgers System via Bell Polynomials, Z. Naturforsch., 70, 359-363.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Yi, Z., Wei, W.W., Fei, C.T., Yang, S., 2011, Binary Bell polynomial application in generalized (2+1)-dimensional KdV equation with variable coefficients, Chinese Physics B, 20, 11, 110204.

Yang, X.D., Ruan, H.Y., 2013, HBFGen: A maple package to construct the Hirota bilinear form for nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation, 219, 8018-8025.

Wang, P., Tian, B., Liu, W.J., Lü, X., Jiang, Y., 2011, Lax pair, Bäcklund transformation and multi-soliton solutions for the Boussinesq-Burgers equations from shallow water waves, Applied Mathematics and Computation, 218, 1726-1734.

Wang, Y.J., Liang, Z.F., Tang, X.Y., 2014, Infinitely many generalized symmetries and Painleve analysis of a (2+1)-dimensional Burgers system, Physica Scripta, 89, 025201.

Wang, Y.F., Tian, B., Wang, P., Li, M., Jiang, Y., 2012, Bell-polynomial approach and soliton solutions for the Zhiber-Shabat equation and (2+1)-dimensional Gardner equation with symbolic computation, Nonlinear Dynamics, 69, 2031-2040.

Wazwaz, A.M., 2007, Multiple-soliton solutions for the KP equation by Hirota's bilinear method and by the tanh–coth method, Applied Mathematics and Computation, 190,1, 633-640.

Wazwaz, A.M., 2008, Multiple-soliton solutions for the ninth-order KdV equation and sixth-order Boussinesq equation, Applied mathematics and Computation, 203, 277-283.

Wazwaz A.M., 2015, New solutions for two integrable cases of a generalized fifth-order nonlinear equation, Modern Physics Letters B, 29, 14, 1550065.

Wazwaz, A.M., Zhaqilao, 2013, Nonsingular complexiton solutions for two higher-dimensional fifth-order nonlinear integrable equations, Physica Scripta, 88, 025001.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Weiss, J., Tabor, M., Carnevale, G., 1983, Painleve property for partial differential equations, J. Math. Phys., 24, 522-526.

Zakharov, V.E., 1991, *What is Integrability?*, Springer-Verlag.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Ömer Ünsal

Uyruğu: T.C

Doğum Yeri, Tarihi: Eskişehir, 11.08.1988

Medeni hali: Bekar

Adres bilgileri:

Ev adresi: Şeker Mh.
Turanbey Sk. No:10/5
26120-Eskişehir

İş adresi: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Ed. Fak. Matematik-Bilgisayar Bölümü
26480-Eskişehir

E-posta: ounsal@ogu.edu.tr

<u>Eğitim Bilgileri:</u>

Doktora:
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
(2012-2016)

Yüksek Lisans:
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
(2010-2012)

Lisans:
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
(2006-2010)

<u>İş Deneyimi:</u>
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik-Bilgisayar Bölümü (Araştırma Görevlisi)
(2010-)