

Lift Metrik Üzerine

Hasan Çetin

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Aralık 2015

On The Lift Metric

Hasan etin

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

December 2015

Lift Metrik Üzerine

Hasan Çetin

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ziya Akça

Aralık 2015

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans ö rencisi Hasan Çetin'in YÜKSEK L SANS tezi olarak hazırladı ı “Lift Metrik Üzerine” ba lıklı bu çalı ma, jürimizce lisansüstü yönetmeli in ilgili maddeleri uyarınca de erlendirilerek oybirli i ile kabul edilmi tir.

Danı man : Prof. Dr. Ziya Akça

kinci Danı man : ----

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ziya Akça

Üye : Prof. Dr. Ay e Bayar

Üye : Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

Üye : Doç. Dr. Aytaç Kurtulu

Üye : Doç. Dr. Mine Turan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmı tir.

Prof. Dr. Hürriyet ER AHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ziya AKÇA danı manlı ında hazırlamı oldu um “Lift Metrik Üzerine” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışmam oldu unu; tez çalışmamın tüm amaçlarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandı mı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde etti mi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptım ve kaynak gösterdiğim ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 15/12/2015

Hasan Çetin

mza

ÖZET

Bu çalışmada, düzlemde ve uzayda Lift uzaklık fonksiyonu incelenmiştir.

İkinci bölümde Öklidyen ve Taxicab geometride bazı temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, düzlemde iki nokta arasındaki Lift uzaklık fonksiyonunun bir metrik olduğu incelenerek bir noktanın bir doğruya Lift uzaklığı verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise uzayda iki nokta arasındaki Lift uzaklık fonksiyonu kullanılarak Lift birim küresi ve bir noktanın orijinden geçen doğrulara ve düzlemlere olan Lift uzaklıkları verilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Öklid Çember, Öklid Küre, Taksi Çember, Taksi Küre, Lift Çember, Lift Küre

SUMMARY

In this thesis, the Lift distance function in the plane and space are examined.

In the second chapter, some fundamental definitions and concepts of Euclidean and Taxicab geometry are given.

In the third section, after it is shown that the Lift distance function between two points is a metric in plane, the Lift distance from one point to a line is given. In the fourth part, the Lift distance between two points, the Lift distances from one point to a plane and to a line passing through origine are given in space.

Keywords: Euclidean Circle, Euclidean Sphere, Taxicab Circle, Taxicab Sphere, Lift Circle, Lift Sphere

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım **Prof. Dr. Ziya AKÇA** başta olmak üzere **Prof. Dr. Ayşe BAYAR** ve **Prof. Dr. Süheyla EKMEKÇİ**'ye; ve beni her zaman destekleyen **sevgili aileme** sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
1. GİRİŞ	1
2. ÖKLİDYEN VE TAKSİ GEOMETRİ İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1. Düzlemde Uzaklık Fonksiyonları.....	5
2.1.1. Düzlemde Öklid çemberi.....	6
2.1.2. Düzlemde Taksi çemberi.....	7
2.2. Taksi Düzlemde Doğruların Sınıflandırılması.....	8
2.3. Taksi Düzlemde Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı.....	8
2.4. Uzayda Uzaklık Fonksiyonları.....	10
2.5. Uzayda Öklid ve Taksi Küreleri.....	12
2.5.1. Uzayda Öklid küresi.....	12
2.5.2. Uzayda Taksi küresi.....	12
3. DÜZLEMDE LİFT METRİK İNCELENMESİ	14
3.1. Lift Metrik Çemberi.....	18
3.2. \mathbb{R}_L^2 de Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı.....	26
4. UZAYDA LİFT METRİK İNCELENMESİ	34
4.1. Lift Metrik Küresi.....	36
4.2. \mathbb{R}_L^3 de Bir Noktanın Koordinat Eksenlerine Uzaklığı.....	41
4.3. \mathbb{R}_L^3 de Bir Noktanın Koordinat Düzlemlerine Uzaklığı.....	43
4.4. \mathbb{R}_L^3 de Bir Noktanın Orijinden Geçen Düzlemlere Uzaklığı.....	45
5.SONUÇ VE ÖNERİLER	50
KAYNAKLAR DİZİNİ	51

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, önce düzlemde verilen Lift uzaklık fonksiyonunun bir metrik olduğu gösterilerek, iki nokta arasındaki Lift uzaklık ve Lift çemberleri elde edilmiştir. Daha sonra uzayda verilen Lift uzaklık fonksiyonu için Lift birim küresi, iki nokta arasındaki Lift uzaklık fonksiyonuna göre verilen herhangi bir noktanın orijinden geçen herhangi bir doğruya ve bir düzleme Lift uzaklıkları incelenmiştir.

İkinci bölümde, çalışmayı diğer kaynaklara başvurmadan anlaşılır kılmak için bilinen bazı temel tanımlar, kavramlar ve özellikler özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde, düzlemde verilen Lift uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığı ispatlanmıştır. Daha sonra Lift metrik çemberleri bulunmuştur. Düzlemde verilen bir noktanın verilen bir doğruya olan Lift uzaklığı belirlenmiştir.

Dördüncü bölümde ise uzayda verilen Lift uzaklık fonksiyonu göz önüne alınarak Lift birim küresinin belirlenerek bazı hallerde grafiği çizilmiştir. Son olarak uzayda verilen bir noktanın orijinden geçen bir düzleme ve bir doğruya olan Lift uzaklığı belirlenmiştir.

2. ÖKLİDYEN VE TAKSİ GEOMETRİ İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezi anlaşılır kılmak için Öklidyen ve Taksi düzlem geometride ve 3-boyutlu Öklidyen ve Taksi uzay geometride bilinen bazı kavram ve özellikler özetlendi. Ayrıca bölümde çalışmaya esas olan tanım, kavram ve teoremler Kaya.R ve Krause.E.F, den alınarak verilecektir.

Tanım 2.1 $A \neq \emptyset$ bir küme ve V de bir reel vektör uzayı olsun. A nın elemanları noktalar ve V nin elemanlarını da vektörler olarak adlandırıyoruz. Eğer bir

$$\begin{aligned} \psi: AxA &\rightarrow V \\ (P, Q) &\rightarrow \psi(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlar ise A kümesine V ile birleştirilmiş bir **Afin Uzay** denir.

- i. $\forall P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir.
- ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$

olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır. \overrightarrow{PQ} vektöründe P noktasına başlangıç noktası ve Q noktasına da uç noktası denir. Ayrıca A afin uzayının boyutu $boyA$ ile gösterilir ve $boyA = boyV$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.2 n -boyutlu reel afin uzay $A = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R}\}$, n -boyutlu standart reel vektör uzayı \mathbb{R}^n ile birleştirilmiş olsun. O zaman $O = (0, 0, \dots, 0)$ noktası ile bir $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktasının karşılık geldiği vektör \overrightarrow{OX} tir. \overrightarrow{OX} vektörünü kısaca \vec{X} ile gösterirsek \vec{X} vektörünün bileşenleri (x_1, x_2, \dots, x_n) olur.

Eğer \mathbb{R}^n vektör uzayında **Öklid iç çarpımı** denen

$$\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{X}, \vec{Y}) \rightarrow \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

işlemini tanımlarsak A afin uzayına **n-boyutlu Öklid Uzayı** denir ve E^n ile gösterilir. Burada $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dir. Ayrıca $x_i = E^n \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ fonksiyonlarına da X noktasının **Öklid koordinat fonksiyonları** denir.

Bu tanımdaki boyut sayısını gösteren $n, n \geq 0$ olacak şekilde bir tam sayıdır.

$n = 0$ için E^0 bir tek **nokta** olarak tanımlanır.

$n = 1$ için $E^1 = \mathbb{R}$ **1-boyutlu standart Öklid uzayı** veya aynı şey demek olan, **reel sayılar eksenini** dediğimiz **Öklid doğrusudur**.

$n = 2$ için E^2 , **2-boyutlu standart Öklid uzayı** veya **reel düzlem** de dediğimiz **Öklid düzlemdir**.

$n = 3$ için E^3 , **3-boyutlu standart Öklid uzayı** veya **adi uzay** denilen yada kısaca **uzay** olarak adlandırılan uzaydır.

Tanım 2.3 n -boyutlu Öklid uzayı E^n olmak üzere

$$d_E: E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow d_E(X, Y) = \|\vec{XY}\| = \sqrt{\langle \vec{XY}, \vec{XY} \rangle} \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlanan d_E fonksiyonuna E^n de **uzaklık fonksiyonu** ve $d_E(X, Y)$ değerine de X ile Y arasındaki **uzaklık** denir.

Uzaklık fonksiyonu d_E nin E^n de bir metrik olduğu, yani aşağıdaki koşulları sağladığı görülür.

Yani $\forall X, Y, Z \in E^n$ için

- i. $d_E(X, Y) \geq 0$ ve $(d_E(X, Y) = 0 \Leftrightarrow Y = X)$
- ii. $d_E(X, Y) = d_E(Y, X)$
- iii. $d_E(X, Z) \leq d_E(X, Y) + d_E(Y, Z)$

Bu nedenle yukarıda tanımladığımız d_E fonksiyonuna E^n de **Öklid metriği** veya **Pisagor metriği** denir.

Tanım 2.4 Uzayda herhangi iki doğru, birbirine aykırı konumda olsalar bile dik durumda olabilirler. Dolayısıyla herhangi iki

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} = \lambda$$

ve

$$\frac{x - x'_0}{p'} = \frac{y - y'_0}{q'} = \frac{z - z'_0}{r'} = \mu$$

doğrularının dik durumlu olması $d = (p, q, r)$ ve $d' = (p', q', r')$ doğrultu vektörlerinin birbirlerine dik olmalarına yani skaler çarpımlarının sıfır olmasına eş değerdir. Dolayısıyla bu doğruların birbirlerine dik olması için

$$pp' + qq' + rr' = 0$$

koşulu sağlanmalıdır.

Doğruların paralel olmaları için de d ve d' nin de paralel olması gerektiğinden

$$d \times d' = 0$$

ya da aynı şey demek olan

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}$$

koşulu sağlanmalıdır.

Tanım 2.5 (Verilen üç noktadan geçen düzlem denklemi):

Verilen noktalar $N_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $N_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $N_3 = (x_3, y_3, z_3)$ olsun. Bu noktalar düzlem üzerinde olduğundan N_1N_2 ve N_1N_3 vektörü, bu iki vektöre dik olduğundan düzleme diktir. Yani düzlemin normal vektörü olarak $n = N_1N_2 \times N_1N_3$ alınabilir. Dolayısıyla $X = (x, y, z)$ düzlem içinde değişken nokta olmak üzere düzlemin denklemi $N_1X \cdot (N_1N_2 \times N_1N_3) = 0$ ifadesinden hesaplanır. Bu ifade $(N_1X, N_1N_2, N_1N_3) = 0$ karma çarpımına eşdeğer olduğundan istenen düzlemin determinant formunda olan

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix}$$

denklemini bulunur.

Teorem 2.6 \mathbb{R}^3 uzayında bir dik koordinat sisteminin başlangıç noktasının, bu sistemde (a, b, c) koordinatlı bir noktaya ötelendiğinde (eksenlere paralel ve aynı yönde kalacak biçimde kaydırıldığını) varsayalım. Eğer herhangi bir N noktasının eski ve yeni koordinat sistemindeki koordinatları sırayla (x, y, z) ve (x', y', z') ise bunlar arasında $x = x' + a$, $y = y' + b$, $z = z' + c$ denklemleri geçerlidir. (Akça, 1995)

2.1. Düzlemde Uzaklık Fonksiyonları

Taksi düzlemi \mathbb{R}^2 nin noktaları ve doğruları, Öklid düzlemi \mathbb{R}^2 nin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açılar da aynı yolla ölçülür. Fakat uzaklık fonksiyonu farklıdır. Analitik düzlemde alınan $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Öklidyen

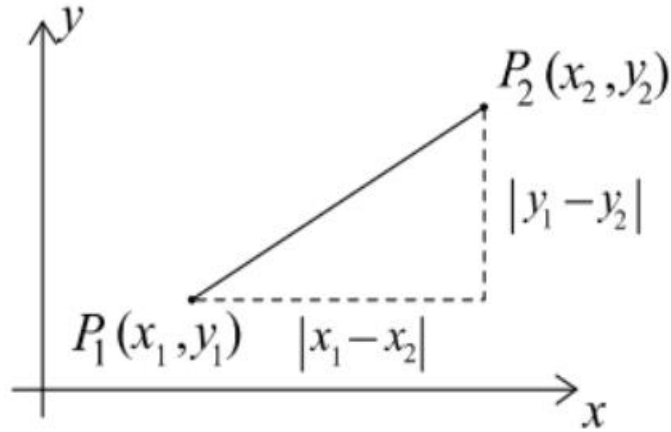
uzaklık

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (2.2)$$

iken, Taksi uzaklık

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \quad (2.3)$$

ile tanımlıdır. Yani P_1 ve P_2 noktaları arasındaki d_T Taksi uzaklığı, P_1 den P_2 ye en kısa yolun uzunluğu olarak, bu noktalardan koordinat eksenlerine paralel olarak çizilen doğru parçalarının birleşiminin uzunluğu olacaktır (Şekil 1.1)



Şekil 2.1

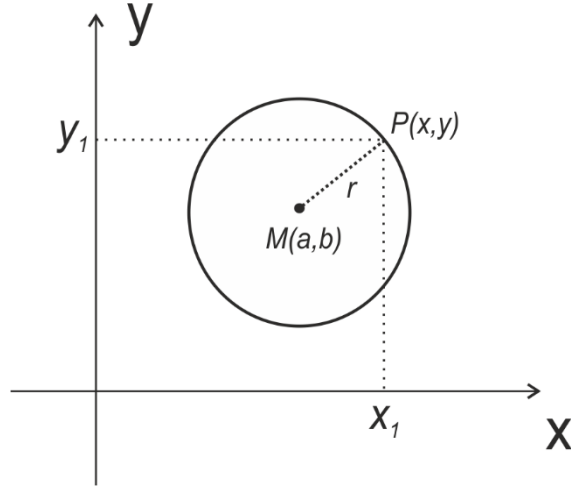
2.1.1. Düzlemde Öklid çemberi

Öklidyen düzlemde sabit bir noktadan sabit bir Öklid uzaklığındaki noktaların geometrik yerine Öklid çemberi denir. Sabit nokta Öklid çemberinin merkezini, sabit Öklid uzaklığı da Öklid çemberinin yarıçap uzunluğunu gösterir.

Tanım 2.7 Analitik düzlemde merkezi $M = (a, b)$ ve yarıçapı r olan Öklid çember

$$C = \{(x, y): \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r; \quad x, y \in \mathbb{R}\} \quad (2.4)$$

dir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2

2.1.2. Düzlemde Taksi çemberi

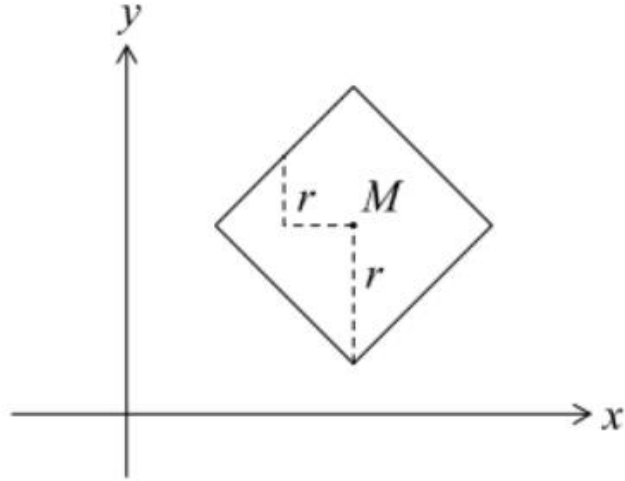
Taksi düzlemde sabit bir noktadan sabit bir Taksi uzaklığındaki noktaların geometrik yerine Taksi çemberi denir. Sabit nokta Taksi çemberinin merkezini, sabit Taksi uzaklığı da Taksi çemberinin yarıçap uzunluğunu gösterir.

Tanım 2.8 Analitik düzlemde merkezi $M = (a, b)$ ve yarıçapı r olan Taksi çember

$$C = \{(x, y): |x - a| + |y - b| = r, \quad x, y \in \mathbb{R}\} \quad (2.5)$$

dir (Krause, 1986, Menger, 1952) .

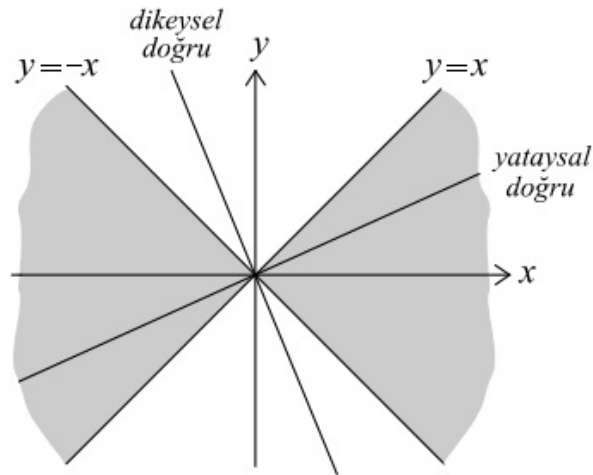
Taksi çemberleri, bir kenarının eğimi 1 ya da -1 olan karelerdir (Şekil 2.3).



Şekil 2.3

2.2. Taksi Düzlemde Doğruların Sınıflandırılması

Tanım 2.9 Taksi düzlemde $l \dots ax + by + c = 0$ doğrusu verilsin. l doğrusuna, $|\frac{-a}{b}| < 1$ ise l ye **yataysal doğru**, $|\frac{-a}{b}| > 1$ ise l ye **dikeysel doğru** ve $|\frac{-a}{b}| = 1$ ise l ye **ayıraç doğru** denir (Krause 1986). Bir yataysal doğru, x-eksenine paralel ise bu doğruya **yatay doğru** ve bir dikeysel doğru, y-eksenine paralel ise bu doğruya **dikey doğru** denir (Şekil 2.4).



Şekil 2.4

2.3. Taksi Düzlemde Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

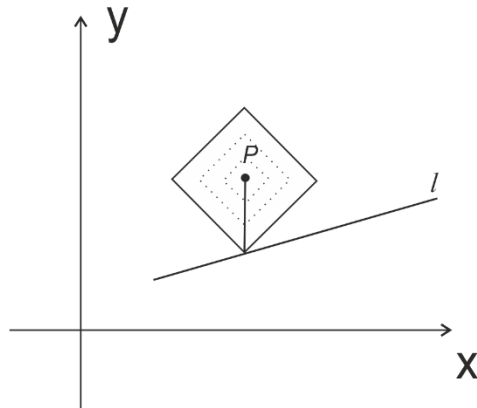
Tanım 2.10 Taksi düzlemde bir P noktasının bir l doğrusuna olan uzaklığı, P nin l doğrusu üzerindeki noktalara uzaklıklarından en küçüğü olarak tanımlanır. Kısaca

$$d_T(P, l) = \min_{X \in l} d_T(X, P)$$

dir (Krause, 1986).

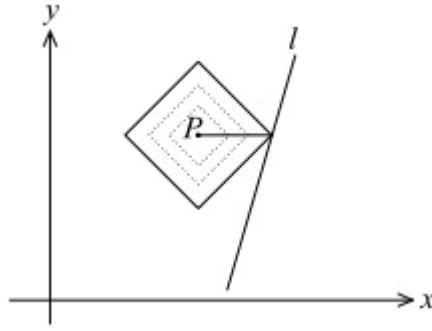
Taksi düzlemde bir P noktasının bir l doğrusuna olan uzaklığını bulmak için izlenilebilecek başka bir yöntem de merkezi P noktası olan bir Taksi çemberinin yarıçapını, çember doğruya değene kadar büyütmeektir. Çember, doğruya değdiği anda çemberin yarıçapı, P noktasının l doğrusuna olan en kısa uzaklığı olur (Krause, 1986). O halde,

i) Eğer l yataysal bir doğru ise, P noktasının l doğrusuna olan uzaklığı, P den l ye y -eksenine paralel uzaklıktır (Şekil 2.5).



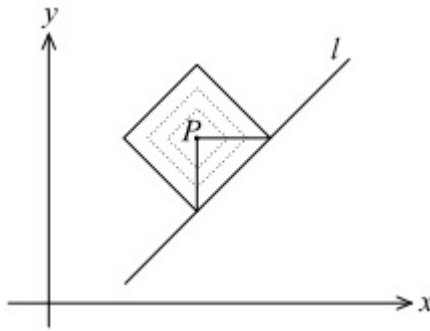
Şekil 2.5

ii) Eğer l dikeysel bir doğru ise, P noktasının l doğrusuna olan uzaklığı, P den l ye x -eksenine paralel uzaklıktır (Şekil 2.6).



Şekil 2.6

iii) Eğer l bir ayıraç doğru ise, P noktasının l doğrusuna olan uzaklığı, P den l ye x -eksenine paralel veya y -eksenine paralel uzaklıktır (Şekil 2.7). (Yurtoğlu, 2014)



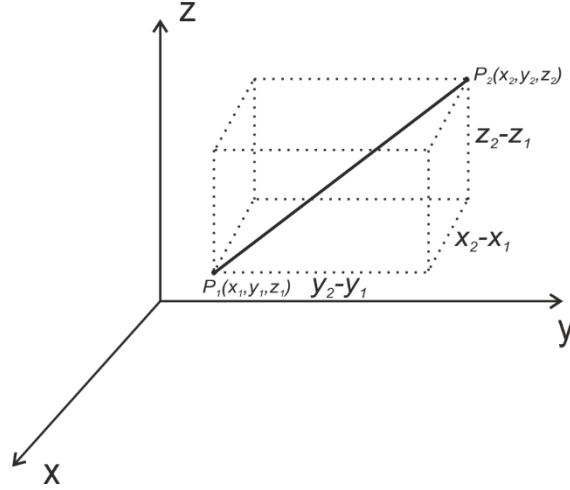
Şekil 2.7

2.4. Uzayda Uzaklık Fonksiyonları

3-boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^3 de 3-boyutlu analitik uzayda alınan $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları için tanımlı Öklidyen uzaklık fonksiyonu

$$d_E(P_1P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (2.6)$$

dir (Şekil 2.8).

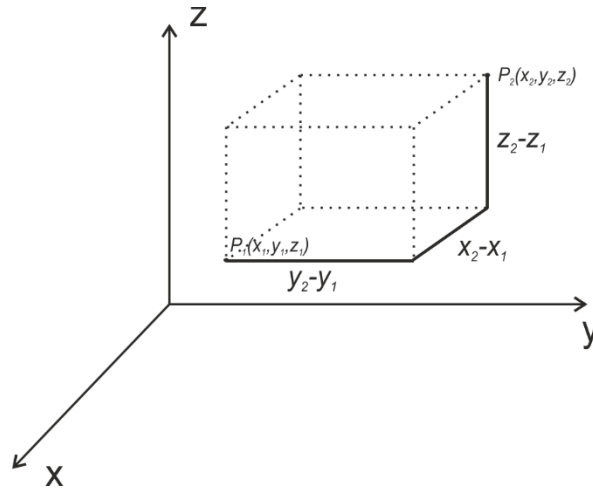


Şekil 2.8

3-boyutlu Taksi uzay \mathbb{R}^3 de benzer biçimde tanımlanır. 3-boyutlu Taksi uzay \mathbb{R}^3 , 3-boyutlu analitik uzayda alınan $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları için tanımlı Öklidyen uzaklık fonksiyonu yerine Taksi uzaklık fonksiyonu

$$d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \quad (2.7)$$

dir (Şekil 2.9).



Şekil 2.9

Yani, basitçe 3-boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^3 de d_E yerine d_T alınarak oluşturulur.

2.5. Uzayda Öklid ve Taksi Küreleri

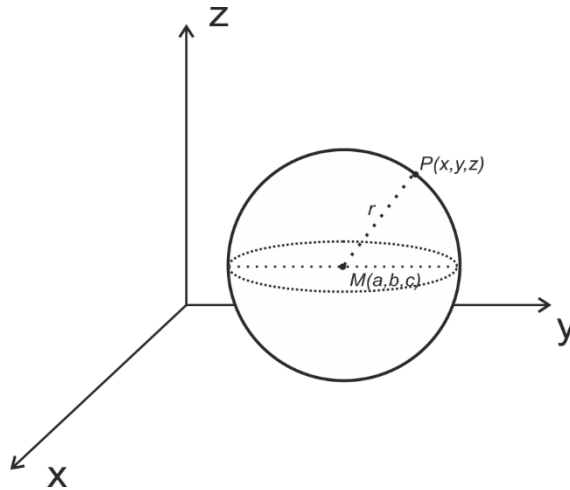
2.5.1. Uzayda Öklid küresi

Öklid uzayında sabit bir noktadan sabit bir Öklid uzaklığındaki noktaların geometrik yerine Öklid küresi denir. Sabit nokta Öklid küresinin merkezini, sabit Öklid uzaklığı da Öklid küresinin yarıçap uzunluğunu gösterir.

Tanım 2.11 Analitik düzlemde merkezi $M = (a, b, c)$ ve yarıçapı r olan Öklid küre

$$C = \{(x, y, z) : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = r; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\} \quad (2.8)$$

dir (Şekil 2.10).



Şekil 2.10

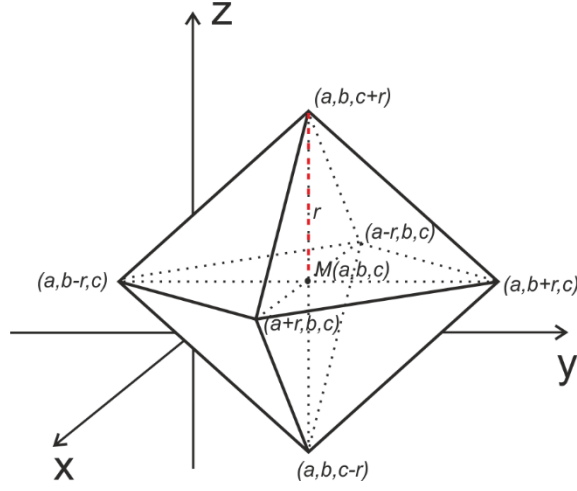
2.5.2. Uzayda Taksi küresi

Taksi uzayında sabit bir noktadan sabit bir Taksi uzaklığındaki noktaların geometrik yerine Taksi küresi denir. Sabit nokta Taksi küresinin merkezini, sabit Taksi uzaklığı da Taksi küresinin yarıçap uzunluğunu gösterir.

Tanım 2.12 Analitik düzlemde merkezi $M = (a, b, c)$ ve yarıçapı r olan Taksi küre

$$C = \{(x, y, z): |x - a| + |y - b| + |z - c| = r; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\} \quad (2.9)$$

dir (Şekil 2.11).



Şekil 2.11

3. DÜZLEMDE LİFT METRİK İNCELENMESİ

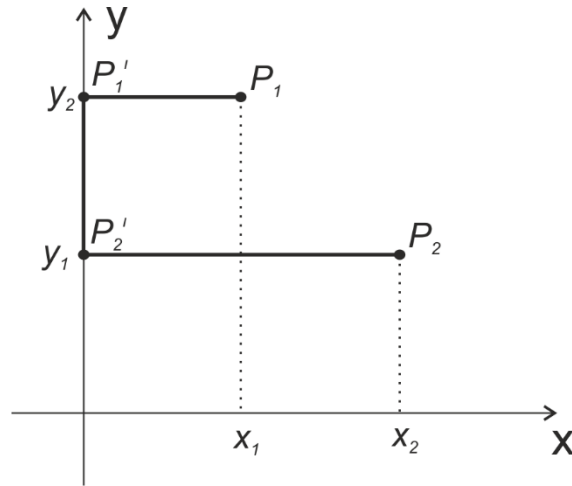
Tanım 3.1 Analitik düzlemde verilen $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ noktaları arasında

$$L(P_1, P_2) = \begin{cases} |x_1 - x_2|, & y_1 = y_2 \text{ ise} \\ |x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2|, & y_1 \neq y_2 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan uzaklığa Lift uzaklık fonksiyonu denir (Stanimirovic, Ciric, Kazakovtsev, Osinuga, 2012).

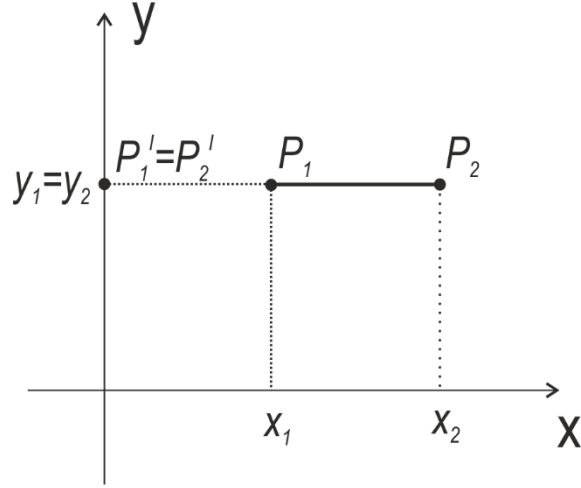
Bu uzaklık fonksiyonu için iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplamada kullanılacak geometrik yol aşağıdaki gibi olmalıdır.

i.hal: $y_1 \neq y_2$ ise P_1 ve P_2 noktaları arasındaki uzunluk; $P_1P'_1$, $P'_1P'_2$ ve P'_2P_2 uzunluklarının toplamıdır. Burada P'_1 ve P'_2 noktaları, P_1 ve P_2 noktalarının y eksenine dikey izdüşümleridir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1

ii.hal: $y_1 = y_2$ ise P_1 ve P_2 noktaları arasındaki uzunluk basitçe P_1P_2 uzunluğudur (Şekil 3.2).



Şekil 3.2

Örnek 3.1 $P_1 = (0,2)$ ile $P_2 = (3,0)$ ve $P_3 = (1,2)$ ile $P_4 = (4,0)$ noktaları arasındaki Öklid, Taksi ve Lift metrik uzaklıklarını bulalım.

$$d_E(P_1 = (0,2), P_2 = (3,0)) = d_E(P_3 = (1,2), P_4 = (4,0)) = \sqrt{(3^2 + 2^2)} = \sqrt{13}.$$

$$d_T(P_1 = (0,2), P_2 = (3,0)) = d_T(P_3 = (1,2), P_4 = (4,0)) = 3 + 2 = 5.$$

Diğer taraftan,

$$L(P_1 = (0,2), P_2 = (3,0)) = 3 + 2 = 5 \neq L(P_3 = (1,2), P_4 = (4,0)) = 4 + 2 + 1 = 7.$$

Teorem 3.2 Analitik düzlemde tanımlanan Lift uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İspat 1) $y_1 = y_2$ iken $L(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| \geq 0$.

$y_1 \neq y_2$ iken $L(P_1, P_2) = |x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2| \geq 0$.

$L(P_1, P_2) = 0$ olsun.

$y_1 = y_2$ iken $L(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| = 0$ ve $x_1 = x_2$ olur.

$y_1 \neq y_2$ iken $L(P_1, P_2) = |x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2| = 0$ ise

$|x_1| = 0$, $|x_2| = 0$ ve $|y_2 - y_1| = 0$ dir. Bu durumda $y_2 = y_1$ olur.

Bu bir çelişkidir. $y_1 \neq y_2$ olamaz.

Dolayısıyla $P_1 = P_2$ dir. O halde $L(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$ dir. Yani Lift uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır.

$$2) y_1 = y_2 \text{ iken } L(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1| = L(P_2, P_1).$$

$$y_1 \neq y_2 \text{ iken } L(P_1, P_2) = |x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2| = |x_2| + |y_1 - y_2| + |x_1| \\ = L(P_2, P_1)$$

dir. Böylece Lift uzaklık fonksiyonu simetriktir.

$$3) P_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2 \text{ olsun,}$$

i) Eğer $y_1 = y_2 = y_3$ ise

$$L(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| = |x_1 + x_3 - x_3 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \\ = L(P_1, P_3) + L(P_3, P_2).$$

Mutlak değer özelliği gereğince;

$$L(P_1, P_2) \leq L(P_1, P_3) + L(P_3, P_2)$$

sonucuna ulaşılır.

ii) $y_1 = y_2 \neq y_3$ iken,

$$L(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|,$$

$$L(P_1, P_3) = |x_1| + |y_3 - y_1| + |x_3| \text{ ve}$$

$$L(P_3, P_2) = |x_3| + |y_2 - y_3| + |x_2| \text{ tanımlarından,}$$

$$L(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| \leq |x_1| + |x_2|$$

$$|x_1 - x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq |x_1| + |y_3 - y_1| + |x_3| + |x_3| + |y_2 - y_3| + |x_2|$$

$$|x_1 - x_2| \leq (|x_1| + |y_3 - y_1| + |x_3|) + (|x_3| + |y_2 - y_3| + |x_2|)$$

$$L(P_1, P_2) \leq L(P_1, P_3) + L(P_3, P_2)$$

sonucuna ulaşılır.

iii) $y_1 \neq y_2 = y_3$ iken,

$$L(P_1, P_2) = |x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2|,$$

$$L(P_1, P_3) = |x_1| + |y_3 - y_1| + |x_3| \text{ ve}$$

$$L(P_3, P_2) = |x_2 - x_3| \text{ tanımlarından;}$$

$$L(P_1, P_2) = |x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2| = |x_1| + |y_3 - y_1| + |x_2| \text{ olduğundan}$$

$$|x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2| \leq |x_1| + |y_3 - y_1| + |x_3| + |x_2 - x_3|$$

elde edilir. Buradan

$$L(P_1, P_2) \leq L(P_1, P_3) + L(P_3, P_2)$$

sonucuna ulaşılır.

iv) $y_3 = y_1 \neq y_2$ iken,

$$L(P_1, P_2) = |x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2|,$$

$$L(P_1, P_3) = |x_3 - x_1| \text{ ve}$$

$$L(P_3, P_2) = |x_2| + |y_3 - y_2| + |x_3| \text{ tanımlarından};$$

$$L(P_1, P_2) = |x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2| = |x_1| + |y_2 - y_3| + |x_2|$$

$$|x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2| \leq |x_3 - x_1| + |x_2| + |y_3 - y_2| + |x_3|$$

$$L(P_1, P_2) \leq L(P_1, P_3) + L(P_3, P_2)$$

sonucuna ulaşılır.

v) $y_1 \neq y_2 \neq y_3$ iken,

$$L(P_1, P_2) = |x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2|,$$

$$L(P_1, P_3) = |x_1| + |y_3 - y_1| + |x_3| \text{ ve}$$

$$L(P_3, P_2) = |x_3| + |y_3 - y_2| + |x_1| \text{ tanımlarından};$$

$$L(P_1, P_2) = |x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2| \leq |x_1| + |y_2 - y_1 + y_3 - y_3| + |x_2|$$

$$|x_1| + |y_2 - y_1 + y_3 - y_3| + |x_2| \leq |x_1| + |y_2 - y_3| + |y_1 - y_3| + |x_2| \text{ olur.}$$

$$|x_1| + |y_2 - y_1| + |x_2| \leq |x_1| + |y_2 - y_3| + |y_3 - y_1| + |x_2| \leq |x_1| + |x_2| +$$

$|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| + 2|x_3|$ yazılabilir.

$$|x_1| + |x_2| + |y_1 - y_2| \leq (|x_1| + |y_1 - y_3| + |x_3|) + (|x_2| + |y_3 - y_2| + |x_3|)$$

$$L(P_1, P_2) \leq L(P_1, P_3) + L(P_3, P_2)$$

sonucuna ulaşılır.

Bir başka deyişle Lift uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. O halde analitik düzlemde tanımlanan Lift uzaklık fonksiyonu L bir metriktir.

3.1. Lift Metrik Çemberleri

Düzlemde verilen $M = (a, b)$ noktasına r birim Lift uzaklıktaki $X = (x, y)$ noktalarının geometrik yerine Lift çember denir ve $L(M, X) = r$ denkleminde sahiptir.

$$L(P_1, P_2) = \begin{cases} |x - a|, & y = b \text{ ise} \\ |x| + |y - b| + |a|, & y \neq b \text{ ise} \end{cases} \quad (3.2)$$

Lift uzaklık fonksiyonu için Lift çemberlerini irdelersek;

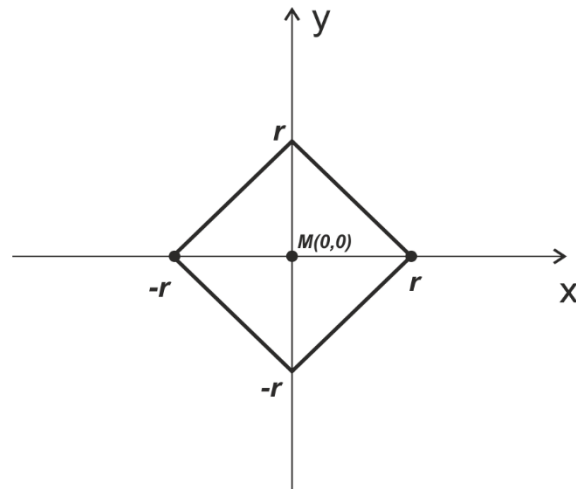
1. Hal: $M = (0,0)$ noktasına r uzaklıktaki $X = (x, y)$ noktalarının durumu,

$y = 0$ iken $|x - 0| = r \rightarrow |x| = r \rightarrow x = \pm r$ olur.

$y \neq 0$ iken $|x| + |y - 0| + |0| = r \rightarrow |x| + |y| = r$ olur.

$$|x| + |y| = r \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, y > 0 \Rightarrow & x + y = r \Rightarrow & y = -x + r \\ x \geq 0, y < 0 \Rightarrow & x - y = r \Rightarrow & y = x - r \\ x < 0, y > 0 \Rightarrow & -x + y = r \Rightarrow & y = x + r \\ x < 0, y < 0 \Rightarrow & -x - y = r \Rightarrow & y = -x - r \end{cases}$$

(Şekil 3.3)



Şekil 3.3

Bu durumda bir Lift çemberi merkezi orijin olan bir Taksi çemberidir.

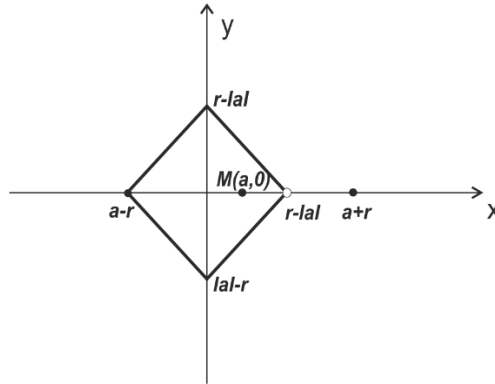
2. Hal: $M = (a, 0)$ noktasına r uzaklıktaki $X = (x, y)$ noktalarının durumu,

$y = 0$ iken $|x - a| = r \rightarrow x - a = \mp r \rightarrow x = a \mp r$ olur.

$y \neq 0$ iken $|x| + |y - 0| + |a| = r \rightarrow |x| + |y| + |a| = r \rightarrow |x| + |y| = r - |a|$ olur. ($r \geq |a|$ olmak zorundadır.)

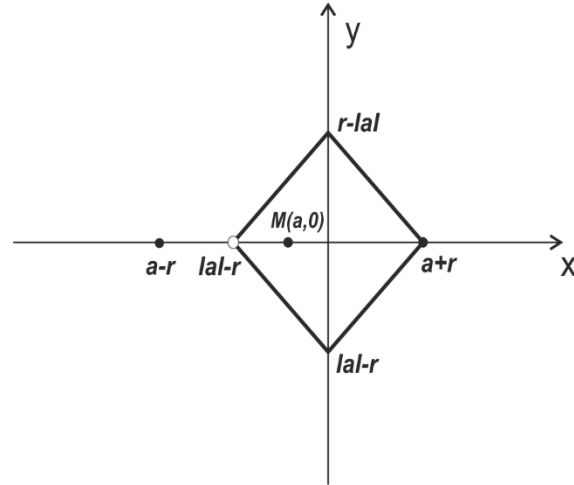
$$|x| + |y| = r - |a| \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, y > 0 \Rightarrow & x + y = r - |a| \Rightarrow & y = -x + r - |a| \\ x \geq 0, y < 0 \Rightarrow & x - y = r - |a| \Rightarrow & y = x - r + |a| \\ x < 0, y > 0 \Rightarrow & -x + y = r - |a| \Rightarrow & y = x + r - |a| \\ x < 0, y < 0 \Rightarrow & -x - y = r - |a| \Rightarrow & y = -x - r + |a| \end{cases}$$

1) $a > 0$ ise Lift çemberi merkezi $M = (0,0)$ ve yarıçapı $r - |a|$ olan Taksi çemberinin x-ekseni üzerindeki $(r - |a|, 0)$ noktasının $(a + r, 0)$ noktasına ötelenmiş halidir. (Şekil 3.4)



Şekil 3.4

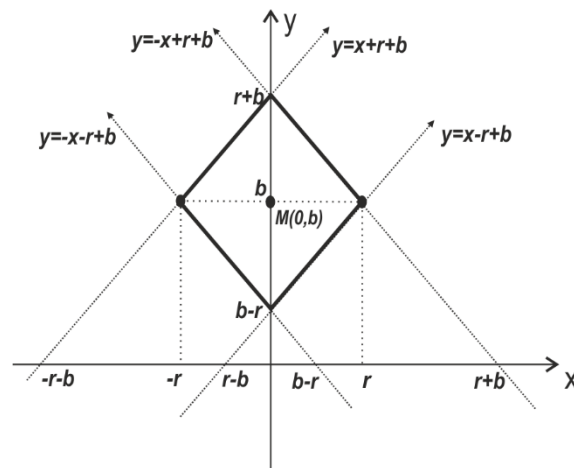
2) $a < 0$ ise Lift çemberi merkezi $M = (0,0)$ ve yarıçapı $r - |a|$ olan Taksi çemberinin x-ekseni üzerindeki $(|a| - r, 0)$ noktasının $(a - r, 0)$ noktasına ötelenmiş halidir. (Şekil 3.5)



Şekil 3.5

- 3. Hal:** $M = (0, b)$ noktasına r uzaklıktaki $X = (x, y)$ noktalarının durumu,
 $y = b$ iken $|x - 0| = r \rightarrow |x| = r \rightarrow x = \mp r$ olur.
 $y \neq b$ iken $|x| + |y - b| + |0| = r \rightarrow |x| + |y - b| = r$ olur. (Şekil 3.6)

$$|x| + |y - b| = r \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, y > b \Rightarrow & x + y - b = r \Rightarrow & y = -x + r + b \\ x \geq 0, y < b \Rightarrow & x - y + b = r \Rightarrow & y = x - r + b \\ x < 0, y > b \Rightarrow & -x + y - b = r \Rightarrow & y = x + r + b \\ x < 0, y < b \Rightarrow & -x - y + b = r \Rightarrow & y = -x - r + b \end{cases}$$



Şekil 3.6

4. Hal: $M = (a, b)$ noktasına r uzaklıktaki $X = (x, y)$ noktalarının durumu,

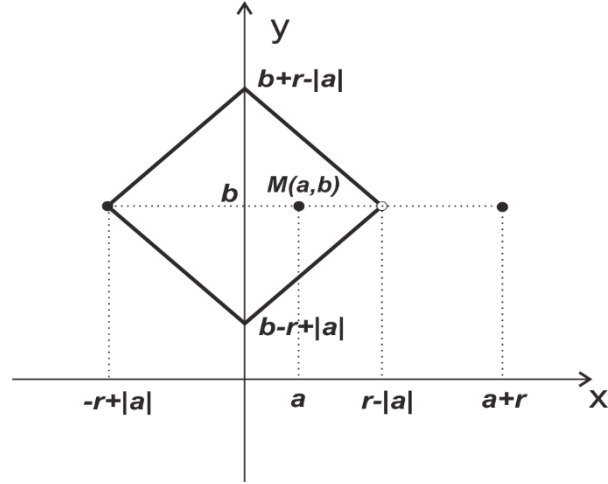
$y = b$ iken $|x - a| = r \rightarrow x - a = \mp r \rightarrow x = \mp r + a$ olur.

$y \neq b$ iken $|x| + |y - b| + |a| = r \rightarrow |x| + |y - b| = r - |a|$ olur. ($r \geq |a|$ olmak zorundadır.)

$$|x| + |y - b| = r - |a|$$

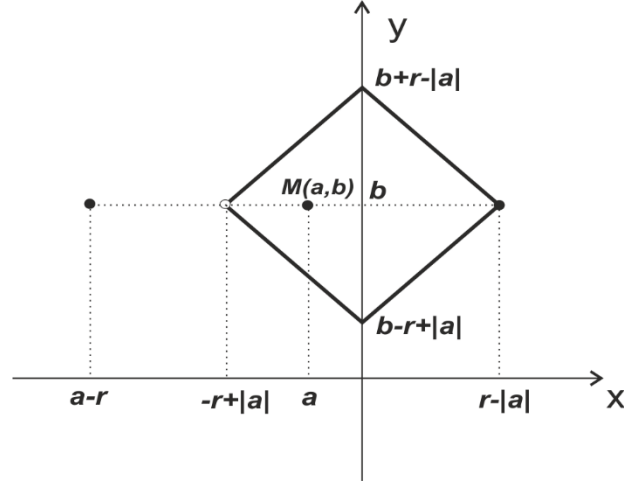
$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, y > b \Rightarrow & x + y - b = r - |a| \Rightarrow & y = -x + r + b - |a| \\ x \geq 0, y < b \Rightarrow & x - y + b = r - |a| \Rightarrow & y = x - r + b + |a| \\ x < 0, y > b \Rightarrow & -x + y - b = r - |a| \Rightarrow & y = x + r + b - |a| \\ x < 0, y < b \Rightarrow & -x - y + b = r - |a| \Rightarrow & y = -x - r + b + |a| \end{cases}$$

- 1) $a > 0$ ise Lift çemberi merkezi $M = (0, b)$ ve yarıçapı $r - |a|$ olan Taksi çemberinin x-ekseni üzerindeki $(r - |a|, b)$ noktasının $(a + r, b)$ noktasına ötelenmiş halidir (Şekil 3.7).



Şekil 3.7

- 2) $a < 0$ ise Lift çemberi merkezi $M = (0, b)$ ve yarıçapı $r - |a|$ olan Taksi çemberinin x-ekseni üzerindeki $(-r + |a|, b)$ noktasının $(a - r, b)$ noktasına ötelenmiş halidir (Şekil 3.8).



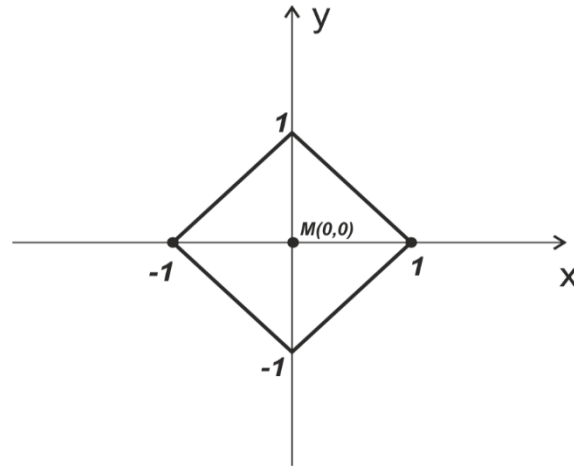
Şekil 3.8

Örnek 3.2 $M = (0,0)$ merkezli, $r = 1$ yarıçaplı Lift çemberi

$y = 0$ ise; $|x - 0| = 1 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \mp 1 \Rightarrow (1,0)$ ve $(-1,0)$

$y \neq 0$ ise; $|y| + |x| = 1$ (Şekil 3.9)

$$|x| + |y| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, y > 0 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1 \\ x \geq 0, y < 0 \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1 \\ x < 0, y > 0 \Rightarrow -x + y = 1 \Rightarrow y = x + 1 \\ x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y = 1 \Rightarrow y = -x - 1 \end{cases}$$



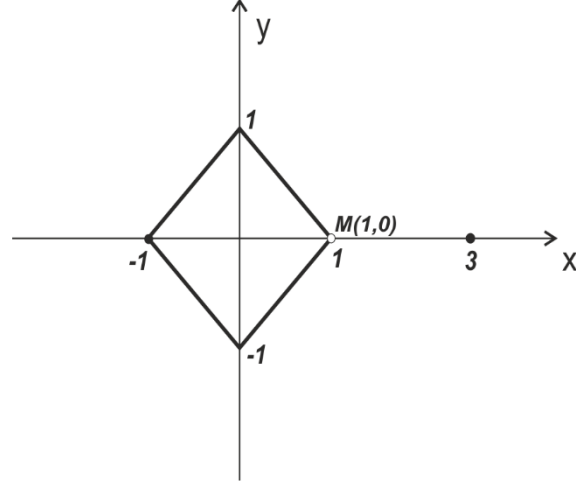
Şekil 3.9

Örnek 3.3 $M = (1,0)$ merkezli, $r = 2$ yarıçaplı Lift çemberi

$y = 0$ ise; $|x - 1| = 2 \Rightarrow x - 1 = \mp 2 \Rightarrow (3,0)$ ve $(-1,0)$

$y \neq 0$ ise; $1 + |y| + |x| = 2 \Rightarrow |y| + |x| = 1$ (Şekil 3.10)

$$|x| + |y| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, y > 0 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1 \\ x \geq 0, y < 0 \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1 \\ x < 0, y > 0 \Rightarrow -x + y = 1 \Rightarrow y = x + 1 \\ x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y = 1 \Rightarrow y = -x - 1 \end{cases}$$



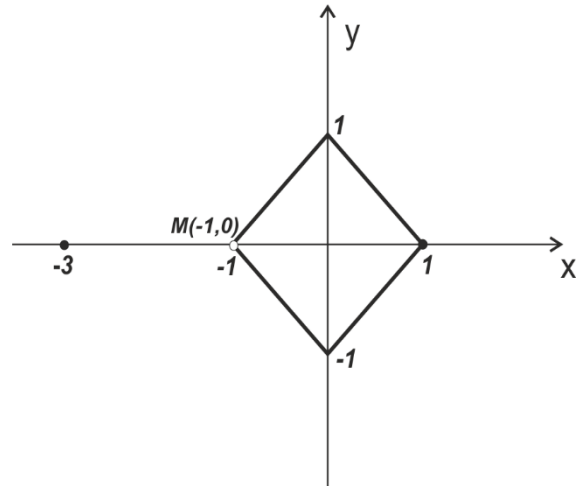
Şekil 3.10

Örnek 3.4 $M = (-1,0)$ merkezli, $r = 2$ yarıçaplı Lift çemberi

$y = 0$ ise; $|x + 1| = 2 \Rightarrow x + 1 = \mp 2 \Rightarrow (1,0)$ ve $(-3,0)$

$y \neq 0$ ise; $1 + |y| + |x| = 2 \Rightarrow |y| + |x| = 1$ (Şekil 3.11)

$$|x| + |y| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, y > 0 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1 \\ x \geq 0, y < 0 \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1 \\ x < 0, y > 0 \Rightarrow -x + y = 1 \Rightarrow y = x + 1 \\ x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y = 1 \Rightarrow y = -x - 1 \end{cases}$$



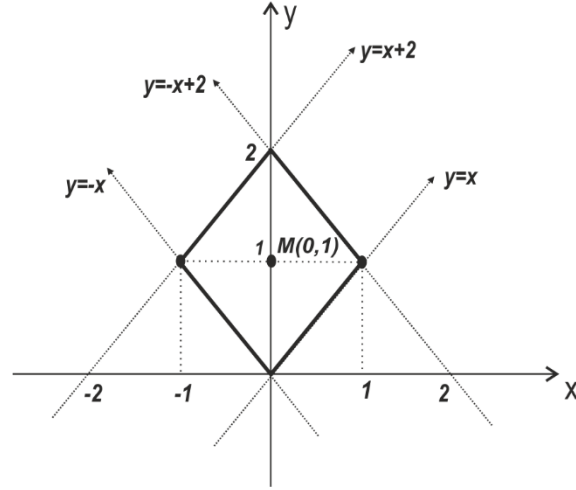
Şekil 3.11

Örnek 3.5 $M = (0,1)$ merkezli, $r = 1$ yarıçaplı Lift çemberi

$y = 1$ ise; $|x - 0| = 1 \Rightarrow |x| = 1 \rightarrow x = \mp 1 \Rightarrow (-1,1)$ ve $(1,1)$

$y \neq 1$ ise; $|x| + |y - 1| + |0| = 1 \Rightarrow |x| + |y - 1| = 1$ (Şekil 3.12)

$$|x| + |y - 1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, y > 1 \Rightarrow y = -x + 2 \\ x \geq 0, y < 1 \Rightarrow y = x \\ x < 0, y > 1 \Rightarrow y = x + 2 \\ x < 0, y < 1 \Rightarrow y = -x \end{cases}$$



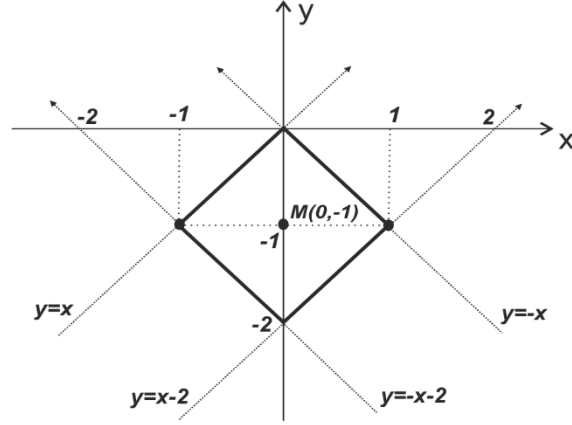
Şekil 3.12

Örnek 3.6 $M = (0, -1)$ merkezli, $r = 1$ yarıçaplı Lift çemberi

$y = -1$ ise; $|x - 0| = 1 \Rightarrow |x| = 1 \rightarrow x = \mp 1 \Rightarrow (-1, -1)$ ve $(1, -1)$

$y \neq -1$ ise; $|x| + |y - (-1)| + |0| = 1 \Rightarrow |y + 1| + |x| = 1$ (Şekil 3.13)

$$|x| + |y + 1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, y > -1 \Rightarrow y = -x \\ x \geq 0, y < -1 \Rightarrow y = x - 2 \\ x < 0, y > -1 \Rightarrow y = x \\ x < 0, y < -1 \Rightarrow y = -x - 2 \end{cases}$$



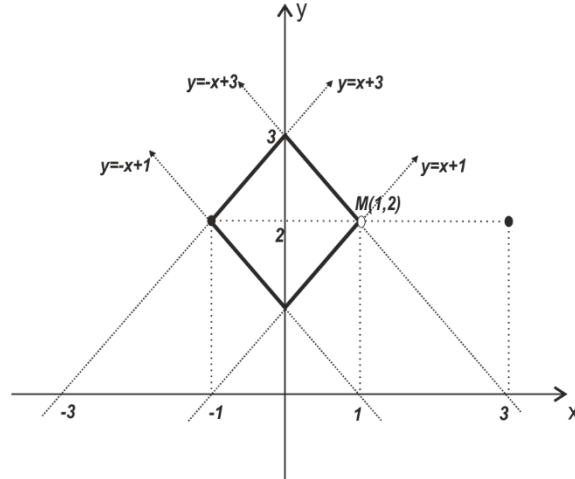
Şekil 3.13

Örnek 3.7 $M = (1,2)$ merkezli, $r = 2$ yarıçaplı Lift çemberi

$y = 2$ ise; $|x - 1| = 2 \Rightarrow x - 1 = \mp 2 \rightarrow x = \mp 2 + 1 \Rightarrow (-1,2)$ ve $(3,2)$

$y \neq 2$ ise; $|x| + |y - 2| + |1| = 2 \Rightarrow |x| + |y - 2| = 1$ (Şekil 3.14)

$$|x| + |y - 2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, y > 2 \Rightarrow y = -x + 3 \\ x \geq 0, y < 2 \Rightarrow y = x + 1 \\ x < 0, y > 2 \Rightarrow y = x + 3 \\ x < 0, y < 2 \Rightarrow y = -x + 1 \end{cases}$$



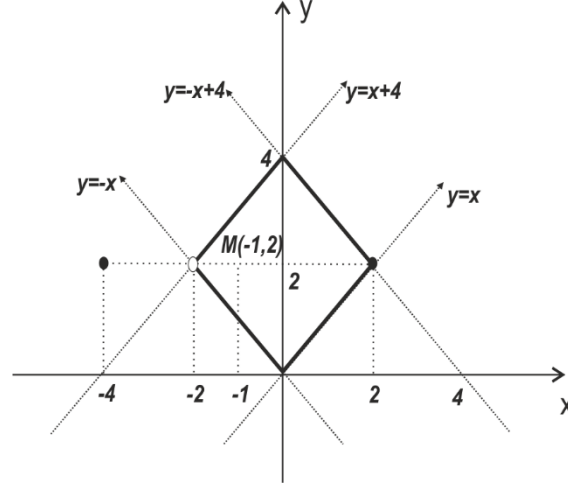
Şekil 3.14

Örnek 3.8 $M = (-1,2)$ merkezli, $r = 3$ yarıçaplı Lift çemberi

$y = 2$ ise; $|x + 1| = 3 \Rightarrow x + 1 = \mp 3 \rightarrow x = \mp 3 - 1 \Rightarrow (-4,2)$ ve $(2,2)$

$y \neq 2$ ise; $|x| + |y - 2| + |1| = 3 \Rightarrow |x| + |y - 2| = 2$ (Şekil 3.15)

$$|x| + |y - 2| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, y > 2 \Rightarrow y = -x + 4 \\ x \geq 0, y < 2 \Rightarrow y = x \\ x < 0, y > 2 \Rightarrow y = x + 4 \\ x < 0, y < 2 \Rightarrow y = -x \end{cases}$$



Şekil 3.15

3.2. \mathbb{R}_L^2 Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı

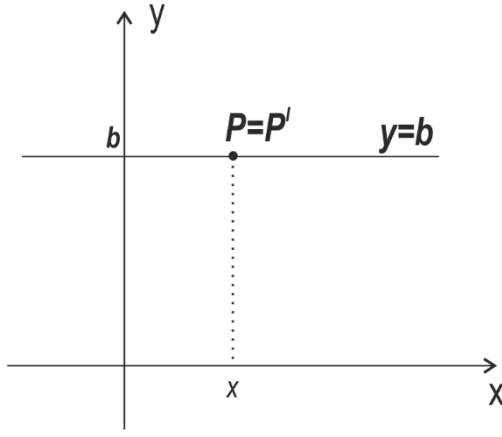
\mathbb{R}_L^2 de verilen herhangi bir $P = (x_0, y_0)$ noktasının verilen bir doğruya en kısa Lift uzaklığını bulmak için;

1. Hal: Verilen doğru $y = b$ ise;

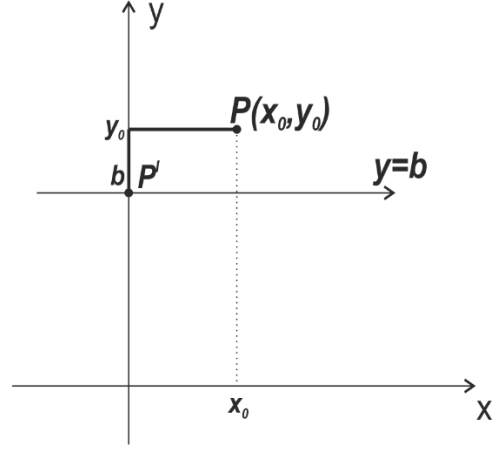
$P = (x_0, y_0)$ noktasına $y = b$ doğrusu üzerinde en yakın nokta $P' = (x', b)$ olsun. O zaman

$$L(P, l) = L(P, P') = \begin{cases} 0, & y_0 = b \text{ ise} \\ |x_0| + |y_0 - b|, & y_0 \neq b \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir. Bu hale ilişkin grafikler Şekil 3.16 ve Şekil 3.17 de verilmektedir.



Şekil 3.16



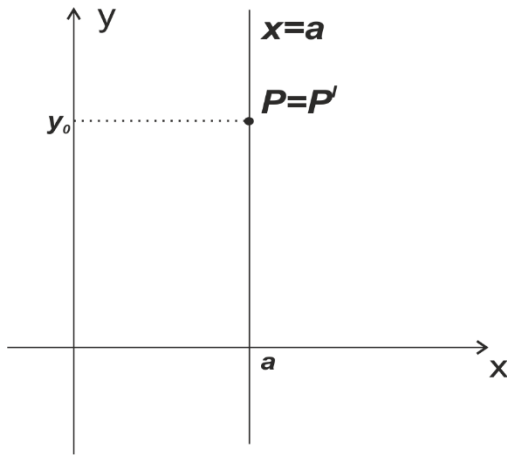
Şekil 3.17

2. Hal: $x = a$ doğruları için;

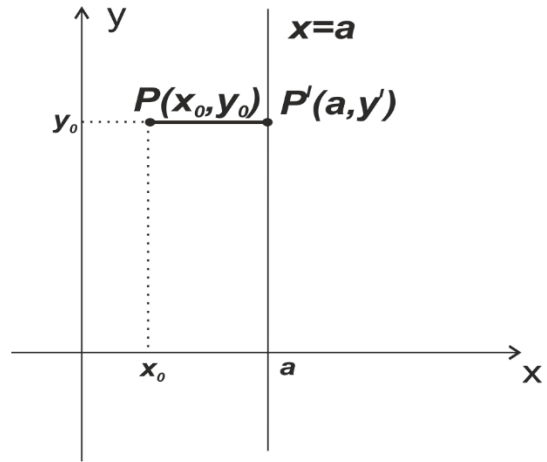
$P = (x_0, y_0)$ noktasına $x = a$ doğrusu üzerinde en yakın nokta $P' = (a, y')$ olsun. O zaman

$$L(P, l) = L(P, P') = \begin{cases} 0, & x_0 = a \text{ ve } y_0 = y' \text{ ise} \\ |x_0 - a|, & x_0 \neq a \text{ ve } y_0 = y' \text{ ise} \end{cases}$$

olarak elde edilir. Bu hale ilişkin grafikler Şekil 3.18 ve Şekil 3.19 da verilmektedir.



Şekil 3.18



Şekil 3.19

3. Hal: $l \dots y = mx + n$ doğruları için;

l doğrusunun $P = (x_0, y_0)$ noktasına en yakın noktası $P' = (x', y') \in l$ olsun.

$$L(P, l) = L(P, P') = \begin{cases} |x' - x_0|, & y' = y_0 \text{ ise} \\ |x_0| + |y' - y_0| + |x'|, & y' \neq y_0 \text{ ise} \end{cases}$$

$y' = mx' + n$ ve $x' = \frac{y' - n}{m}$ alırsak,

$$L(P, l) = L(P, P') \begin{cases} \left| \frac{y' - n}{m} - x_0 \right|, & y' = y_0 \text{ ise} \\ |x_0| + |mx' + n - y_0| + \left| \frac{y' - n}{m} \right|, & y' \neq y_0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$|x_0| + |mx' + n - y_0| + |x'| = \begin{cases} x' = 0, & |x_0| + |n - y_0| \\ x' = \frac{y_0 - n}{m}, & |x_0| + \left| \frac{y_0 - n}{m} \right| \end{cases}$$

alırsak;

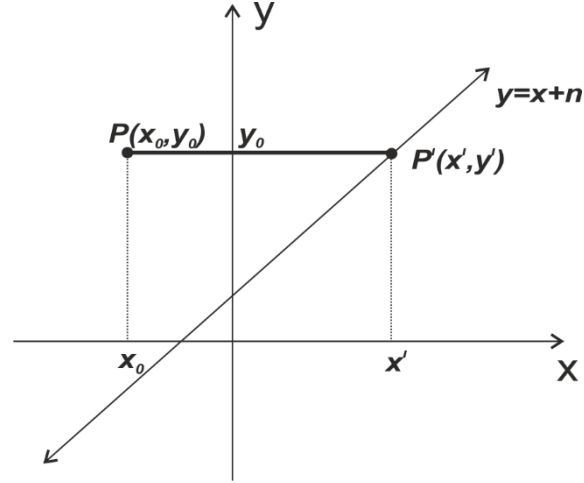
$$L(P, l) = L(P, P') = \begin{cases} \left| \frac{y_0 - n}{m} - x_0 \right|, & y' = y_0 \text{ ise} \\ |x_0| + |n - y_0|, & x' = 0 \text{ ve } y' \neq y_0 \text{ ise} \\ |x_0| + \left| \frac{y_0 - n}{m} \right|, & x' = \frac{y_0 - n}{m} \text{ ve } y' \neq y_0 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

i. $|m| = 1$ iken;

$$L(P, P') = \min\{|y_0 - n - x_0|, |x_0| + |n - y_0|\}$$

olur. (Şekil 3.20)

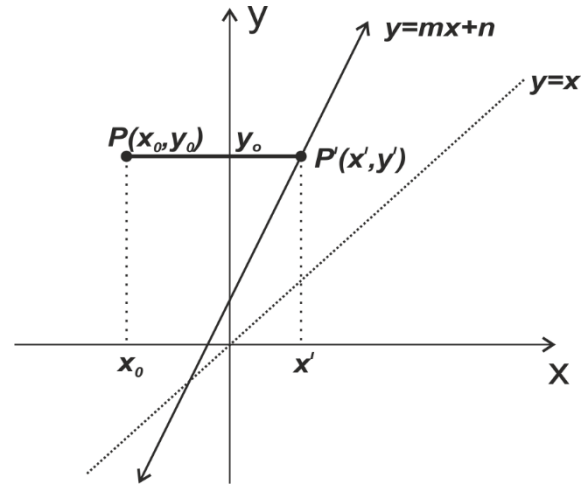


Şekil 3.20

ii. $|m| > 1$ iken;

$$L(P, P') = \min\left\{\left|\frac{y_0 - n}{m} - x_0\right|, |x_0| + |n - y_0|\right\} = \left|\frac{y_0 - n}{m} - x_0\right|$$

olur. (Şekil 3.21)

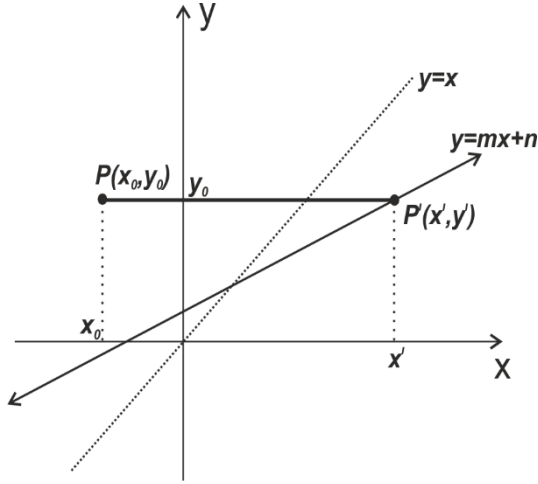


Şekil 3.21

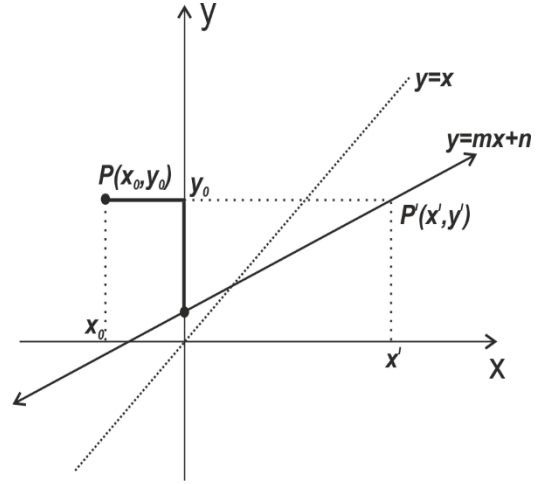
iii. $|m| < 1$ iken;

$$L(P, P') = \min\left\{\left|\frac{y_0 - n}{m} - x_0\right|, |x_0| + |n - y_0|\right\}$$

olur. (Şekil 3.22 ve 3.23)



Şekil 3.22



Şekil 3.23

Örnek 3.10 $P = (2, 4)$ noktasının $y = -2$ doğrusuna olan uzaklığı

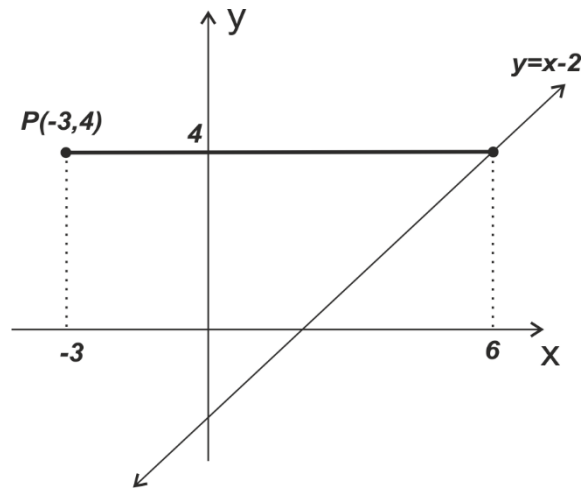
$$L = |2| + |4 - (-2)| = 2 + 6 = 8 \text{ birimdir.}$$

Örnek 3.11 $P = (4, -1)$ noktasının $x = 5$ doğrusuna olan uzaklığı

$$L = |4 - 5| = 1 \text{ birimdir.}$$

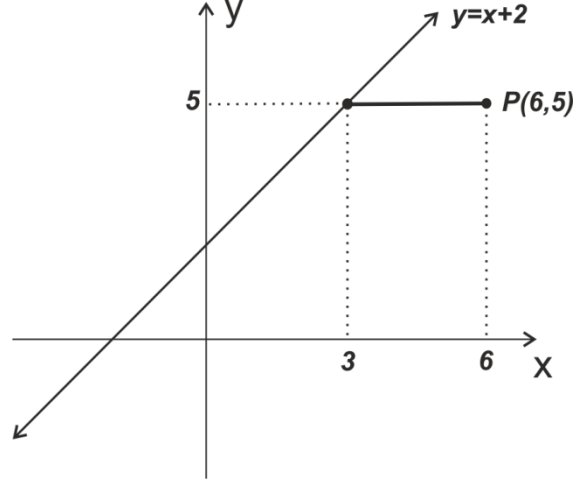
Örnek 3.12 $P = (-3, 4)$ noktasının $y = x - 2$ doğrusuna olan en yakın uzaklığı

$$L = \min\{|4 - (-2) - (-3)|, |-3| + |-2 - 4|\} = \min\{9, 9\} = 9 \text{ birimdir (Şekil 3.24).}$$



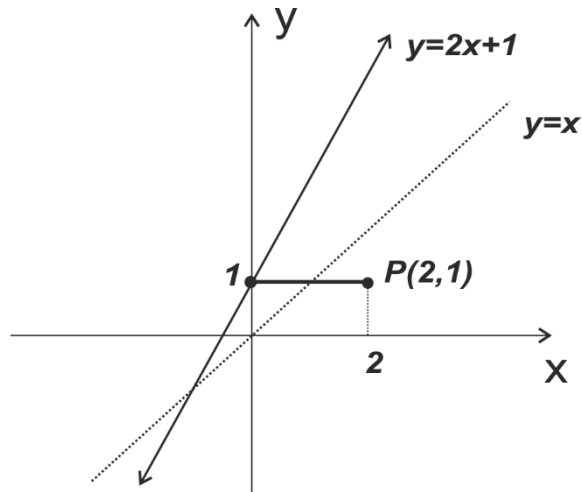
Şekil 3.24

Örnek 3.13 $P = (6,5)$ noktasının $y = x + 2$ doğrusuna olan en yakın uzaklığı
 $L = \min\{|5 - 2 - 6|, |6| + |2 - 5|\} = \min\{3,9\} = 3$ birimdir (Şekil 3.25).



Şekil 3.25

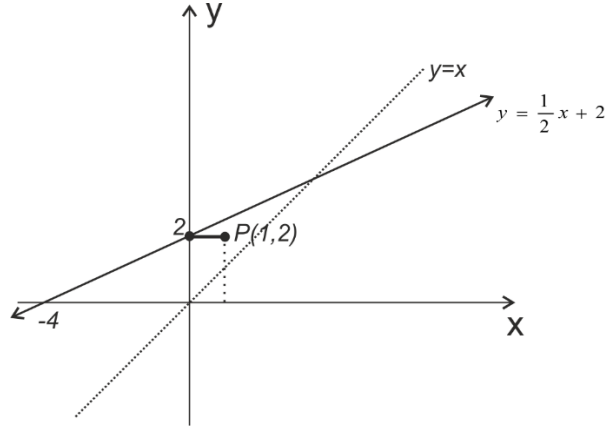
Örnek 3.14 $P = (2,1)$ noktasının $y = 2x + 1$ doğrusuna olan en yakın uzaklığı
 $L = \left| \frac{1-1}{2} - 2 \right| = 2$ birimdir (Şekil 3.26).



Şekil 3.26

Örnek 3.15 $P = (1,2)$ noktasının $y = \frac{1}{2}x + 2$ doğrusuna olan en yakın uzaklığı

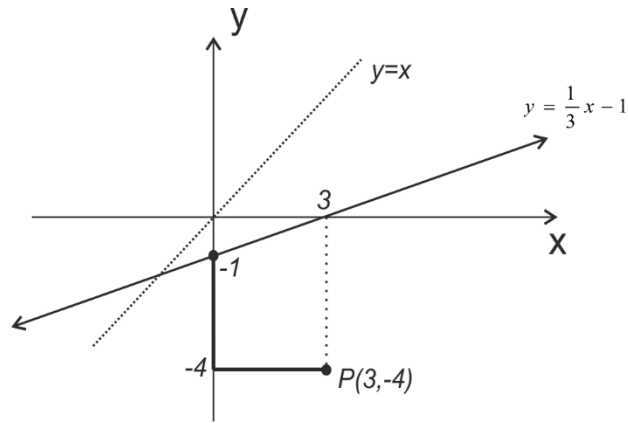
$$L = \min\left\{\left|\frac{2-2}{\frac{1}{2}} - 1\right|, |1| + |2-2|\right\} = \min\{1,1\} = 1 \text{ birimdir (Şekil 3.27).}$$



Şekil 3.27

Örnek 3.16 $P = (3,-4)$ noktasının $y = \frac{1}{3}x - 1$ doğrusuna olan en yakın uzaklığı

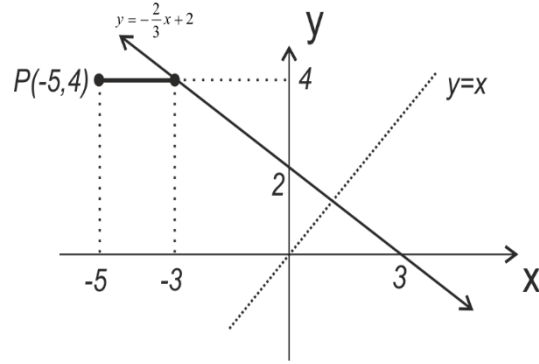
$$L = \min\left\{\left|\frac{-4-(-1)}{\frac{1}{3}} - 3\right|, |3| + |-1-(-4)|\right\} = \min\{12,6\} = 6 \text{ birimdir (Şekil 3.28).}$$



Şekil 3.28

Örnek 3.17 $P = (-5,4)$ noktasının $y = -\frac{2}{3}x + 2$ doğrusuna olan en yakın uzaklığı

$$L = \min\left\{\left|\frac{4-2}{-\frac{2}{3}} - (-5)\right|, |-5| + |2-4|\right\} = \min\{2,7\} = 2 \text{ birimdir (Şekil 3.29).}$$



Şekil 3.29

4. UZAYDA LİFT METRİK İNCELENMESİ

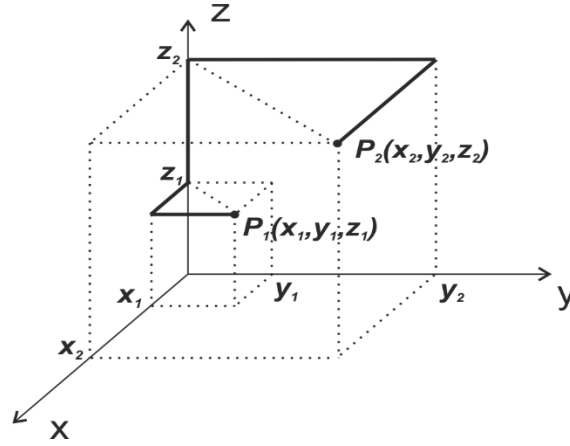
Öklidyen uzayda noktalar, doğrular ve düzlemler aynı kalmak üzere $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki Lift uzaklık fonksiyonu

$$L(P_1, P_2) = \begin{cases} |x_1| + |y_1| + |z_2 - z_1| + |x_2| + |y_2|, & z_1 \neq z_2 \text{ ise} \\ |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, & z_1 = z_2 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.1)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. (Stanimirovic, Ciric, Kazakovtsev, Osinuga, 2012)

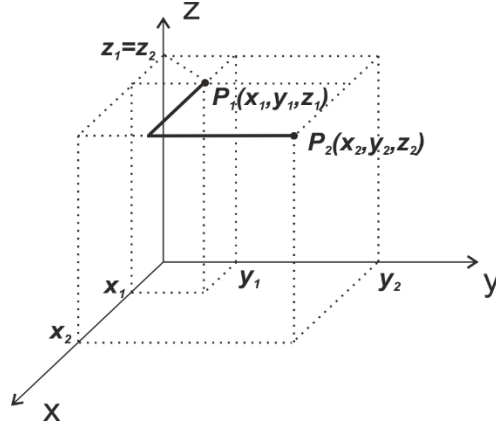
Bu metrikle donatılan uzayı \mathbb{R}_L^3 ile gösterelim. Bu uzaklık fonksiyonuna ait yollar aşağıdaki durumlarda verilmektedir.

i. $z_1 \neq z_2$ ise $L(P_1, P_2) = |x_1| + |y_1| + |z_2 - z_1| + |x_2| + |y_2|$ dir. (Şekil 4.1)



Şekil 4.1

ii. $z_1 = z_2$ ise $L(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ dir. (Şekil 4.2)



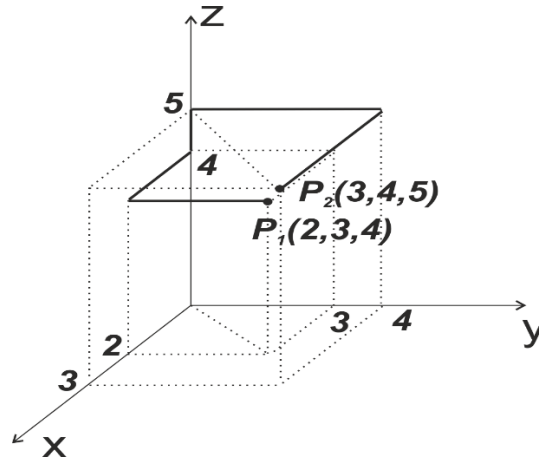
Şekil 4.2

Örnek 4.1 $P_1 = (2,3,4)$ ve $P_2 = (3,4,5)$ ise $L(P_1, P_2)$ uzaklığı

$$L(P_1, P_2) = |2| + |3| + |5 - 4| + |3| + |4| = 2 + 3 + 1 + 3 + 4 = 13$$

birimdir

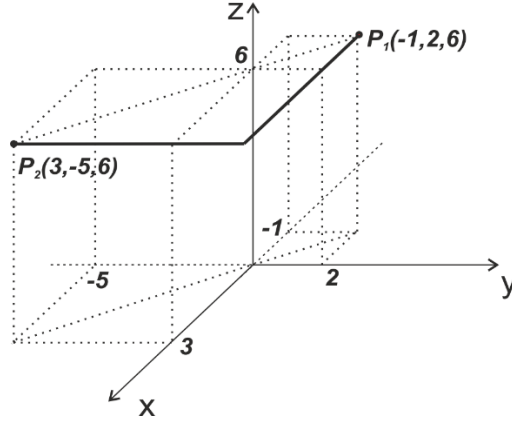
(Şekil 4.3).



Şekil 4.3

Örnek 4.2 $P_1 = (-1,2,6)$ ve $P_2 = (3, -5,6)$ ise $L(P_1, P_2)$ uzaklığı

$$L(P_1, P_2) = |-1 - 3| + |2 - (-5)| = 4 + 7 = 11 \text{ birimdir (Şekil 4.4).}$$



Şekil 4.4

4.1. Lift Küresi

Uzayda verilen bir $M = (a, b, c)$ noktasından r birim Lift uzaklıktaki $X = (x, y, z)$ noktalarının geometrik yerine Lift küre denir. Bu kürenin denklemi $L(M, X) = r$ den

$$\begin{cases} |x - a| + |y - b| = r, & z = c \text{ ise} \\ |x| + |y| + |z - c| + |a| + |b| = r, & z \neq c \text{ ise} \end{cases}$$

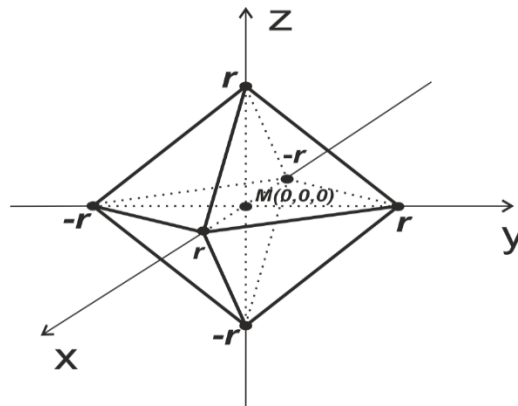
biçiminde elde edilir.

1. Hal: Merkezi $M = (0,0,0)$ noktası ve yarıçapı r olan Lift küresi

$z = 0$ iken $|x| + |y| = r$ ve

$z \neq 0$ iken $|x| + |y| + |z| = r$

olduğundan merkezi orijin ve yarıçapı r olan bir Taksi küresidir (Şekil 4.5).



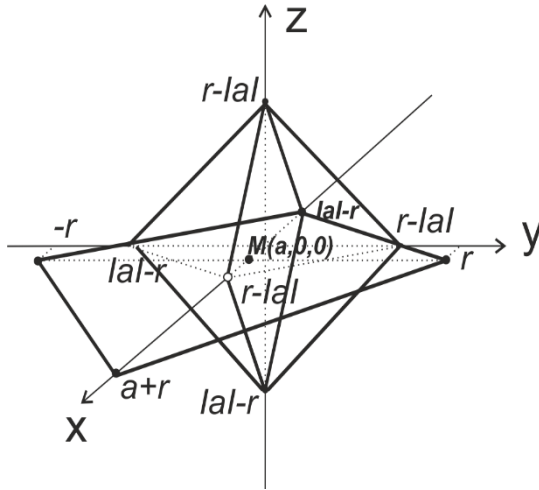
Şekil 4.5

2.Hal: $M = (a, 0, 0)$ noktasına r uzaklıktaki $X = (x, y, z)$ noktalarının durumu,

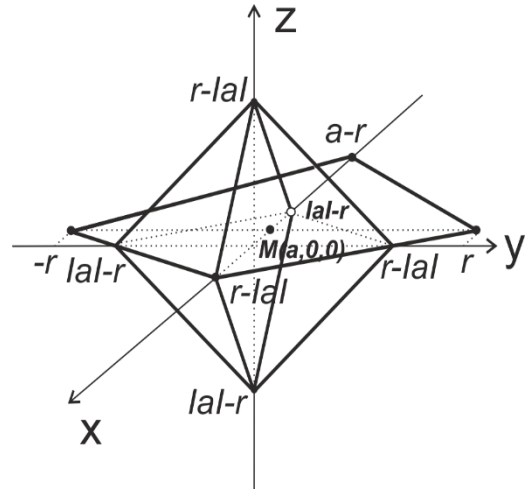
$z = 0$ iken $|x - a| + |y| = r$ olur.

$z \neq 0$ iken $|x| + |y| + |z| + |a| = r \rightarrow |x| + |y| + |z| = r - |a|$ olur. ($r > |a|$ olmak zorundadır.)

Merkezi $M = (a, 0, 0)$ olan Lift küresi $z = 0$ iken merkezi $(a, 0, 0)$ ve yarıçapı r olan taksi çemberi ile $z \neq 0$ iken merkezi $(0,0,0)$ ve yarıçapı r olan Taksi küresi üzerindeki noktalardan oluşur. Bu duruma ait kürelerin grafikleri $a > 0$ ve $a < 0$ için Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 de verilmiştir.



Şekil 4.6



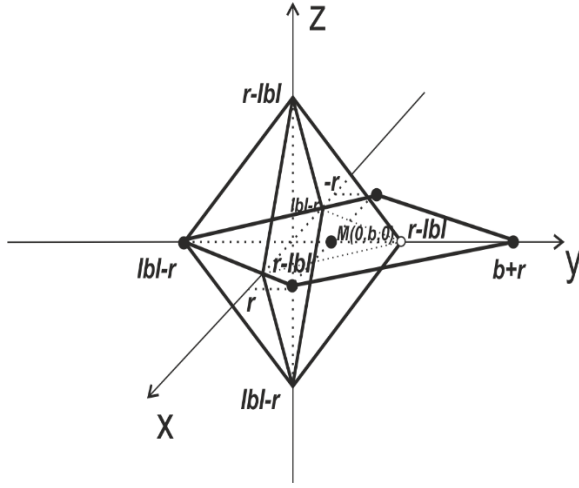
Şekil 4.7

2. Hal: $M = (0, b, 0)$ noktasına r uzaklıktaki $X = (x, y, z)$ noktalarının durumu,

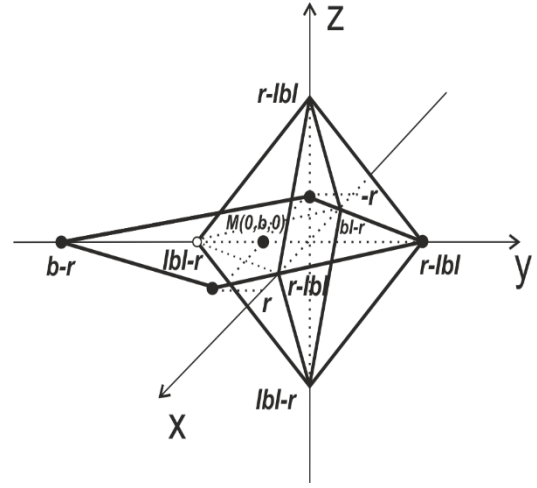
$z = 0$ iken $|x| + |y - b| = r$ olur.

$z \neq 0$ iken $|x| + |y| + |z| + |b| = r \rightarrow |x| + |y| + |z| = r - |b|$ olur. ($r > |b|$ olmak zorundadır.)

Merkezi $M = (0, b, 0)$ olan Lift küresi $z = 0$ iken merkezi $(0, b, 0)$ ve yarıçapı r olan taksi çemberi ile $z \neq 0$ iken merkezi $(0,0,0)$ ve yarıçapı r olan Taksi küresi üzerindeki noktalardan oluşur. Bu duruma ait kürelerin grafikleri $b > 0$ ve $b < 0$ için Şekil 4.8 ve Şekil 4.9 de verilmiştir.



Şekil 4.8

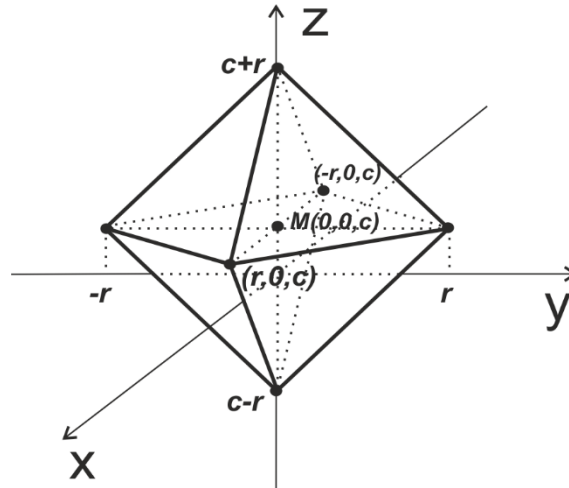


Şekil 4.9

4. Hal: $M = (0, 0, c)$ noktasına r uzaklıktaki $X = (x, y, z)$ noktalarının durumu,

$z = c$ iken $|x| + |y| = r$ olur.

$z \neq c$ iken $|x| + |y| + |z - c| = r$ olur. (Şekil 4.10)

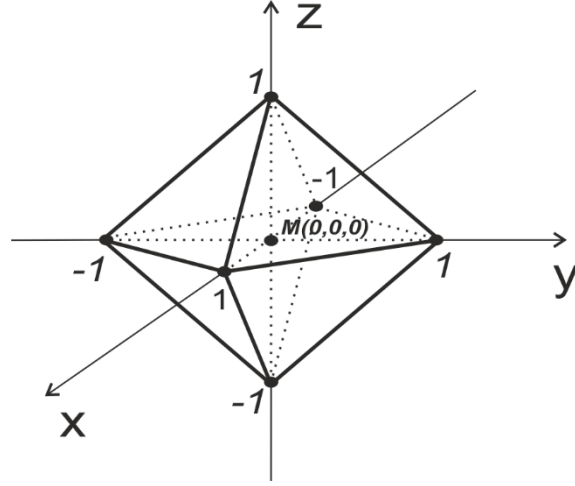


Şekil 4.10

Örnek 4.3 $M = (0, 0, 0)$ merkezli, $r = 1$ yarıçaplı Lift küresi

$z = 0$ ise; $|x| + |y| = 1$

$z \neq 0$ ise; $|x| + |y| + |z| = 1$ (Şekil 4.11)

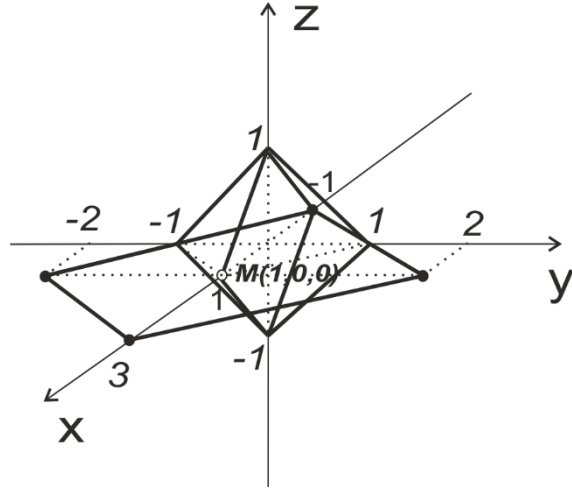


Şekil 4.11

Örnek 4.4 $M = (1,0,0)$ merkezli, $r = 2$ yarıçaplı Lift küresi

$$z = 0 \text{ ise; } |x - 1| + |y| = 2$$

$$z \neq 0 \text{ ise; } |x| + |y| + |z| = 1 \text{ (Şekil 4.12)}$$

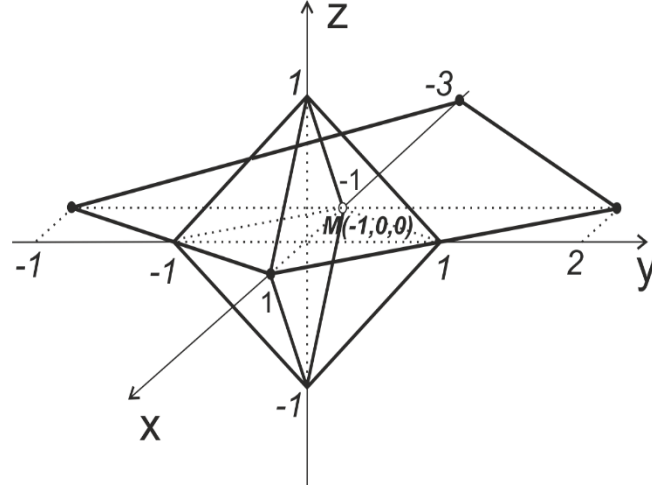


Şekil 4.12

Örnek 4.5 $M = (-1,0,0)$ merkezli, $r = 2$ yarıçaplı Lift küresi

$$z = 0 \text{ ise; } |x + 1| + |y| = 2$$

$$z \neq 0 \text{ ise; } |x| + |y| + |z| = 1 \text{ (Şekil 4.13)}$$

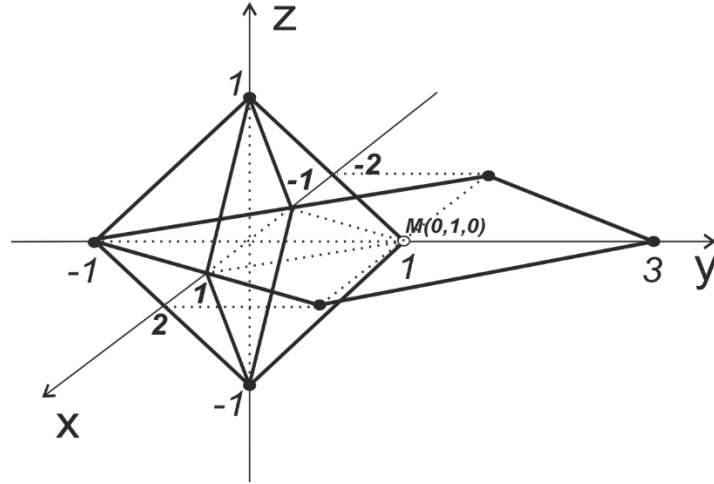


Şekil 4.13

Örnek 4.6 $M = (0,1,0)$ merkezli, $r = 2$ yarıçaplı Lift küresi

$z = 0$ ise; $|x| + |y - 1| = 2$

$z \neq 0$ ise; $|x| + |y| + |z| = 1$ (Şekil 4.14)

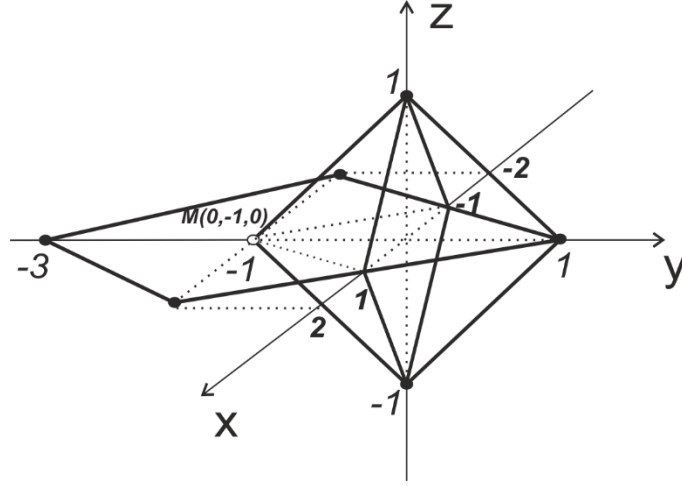


Şekil 4.14

Örnek 4.7 $M = (0, -1, 0)$ merkezli, $r = 2$ yarıçaplı Lift küresi

$z = 0$ ise; $|x| + |y + 1| = 2$

$z \neq 0$ ise; $|x| + |y| + |z| = 1$ (Şekil 4.15)

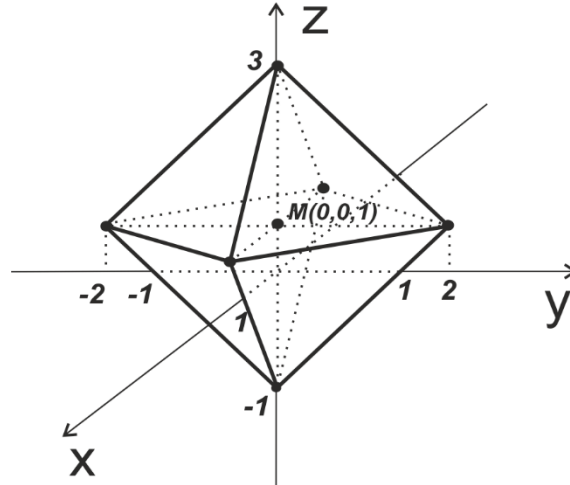


Şekil 4.15

Örnek 4.8 $M = (0,0,1)$ merkezli, $r = 2$ yarıçaplı Lift küresi

$z = 1$ ise; $|x| + |y| = 2$

$z \neq 1$ ise; $|x| + |y| + |z - 1| = 2$ (Şekil 4.16)



Şekil 4.16

4.2. \mathbb{R}_L^3 de Bir Noktanın Koordinat Eksenlerine Uzaklığı

Teorem 4.4 Uzayda verilen bir noktanın koordinat eksenlerine olan uzaklığı:

$|x_0| + |y_0|$ veya $|x_0| + |y_0| + |z_0|$ dir.

İspat Verilen nokta $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ve örneğin doğru da z -ekseni olsun. O zaman öyle bir Q o z bulunmalıdır ki $L(P, Q)$ en küçük olsun. Yani, $L(P, z) = \min L(P, Q)$ olsun. Q o z

olduğundan $Q = (0,0, z_0)$ dir. Buradan,

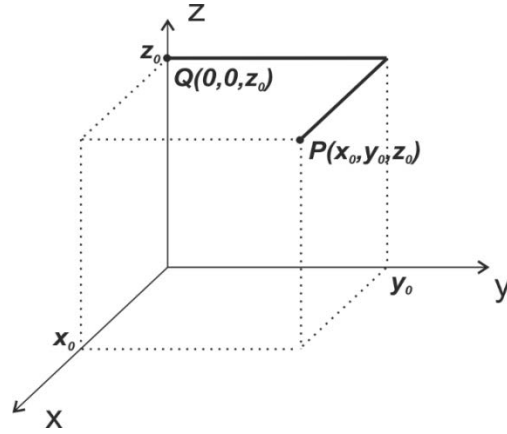
$$L(P, Q) = |x_0 - 0| + |y_0 - 0| + |z_0 - z|$$

$$L(P, Q) = |x_0| + |y_0| + |z_0 - z|$$

dır. Bunun en küçük olması için $z = z_0$ olmalıdır. Dolayısıyla,

$$\min L(P, Q) = |x_0| + |y_0|$$

olur. (Şekil 4.17)



Şekil 4.17

Verilen nokta $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ve örneğin doğru da x -ekseni olsun. O zaman öyle bir Q o x bulunmalıdır ki $L(P, Q)$ en küçük olsun. Yani, $L(P, x) = \min L(P, Q)$ olsun. Q o x olduğundan $Q = (0,0,0)$ dir. Buradan

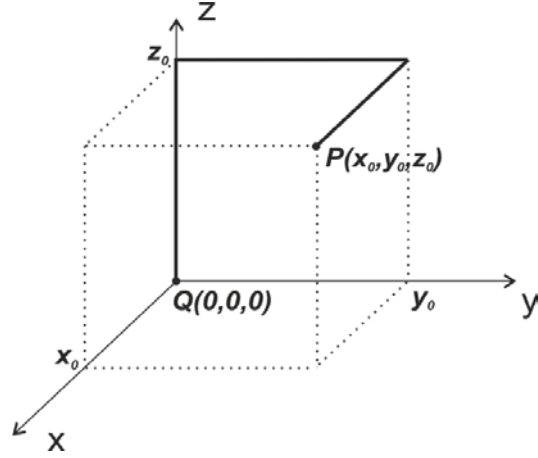
$$L(P, Q) = |x_0 - 0| + |y_0 - 0| + |z_0 - 0|$$

$$L(P, Q) = |x_0| + |y_0| + |z_0|$$

dır. Dolayısıyla,

$$\min L(P, Q) = |x_0| + |y_0| + |z_0|$$

olur. (Şekil 4.18)



Şekil 4.18

y-ekseni içinde benzer ispat verilebileceğinden,

$$L(P, x) = |x_0| + |y_0| + |z_0|,$$

$$L(P, y) = |x_0| + |y_0| + |z_0|,$$

$$L(P, z) = |x_0| + |y_0|$$

dır. Dolayısıyla

$$L(P, Q) = \begin{cases} |x_0| + |y_0|, & Q \text{ o } z - \text{ekseni ise} \\ |x_0| + |y_0| + |z_0|, & Q \text{ o } x \text{ ve } Q \text{ o } y - \text{ekseni ise} \end{cases} \quad (4.2)$$

elde edilir.

4.3. \mathbb{R}_L^3 de Bir Noktanın Koordinat Düzlemlerine Uzaklığı

Teorem 4.5 *Uzayda verilen bir noktanın koordinat düzlemlerine olan uzaklığı:*

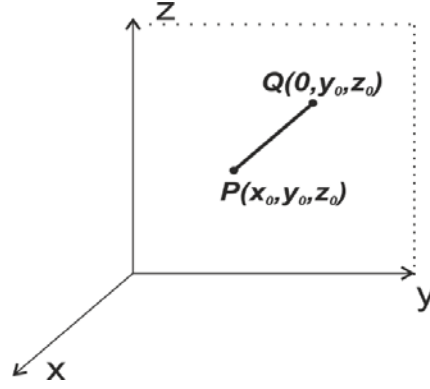
$|x_0|$, $|y_0|$ veya $|x_0| + |y_0| + |z_0|$ dir.

İspat Verilen nokta $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ve düzlem yz -düzlemi olsun. O zaman öyle bir Q o yz bulunmalıdır ki $L(P, Q)$ en küçük olsun. Yani, $L(P, yz) = \min L(P, Q)$ olsun. Q o yz olduğundan $Q = (0, y_0, z_0)$ dir. Buradan

$$L(P, Q) = |x_0 - 0| + |y_0 - y_0| + |z_0 - z_0|$$

$$L(P, Q) = |x_0|$$

dır. (Şekil 4.19)



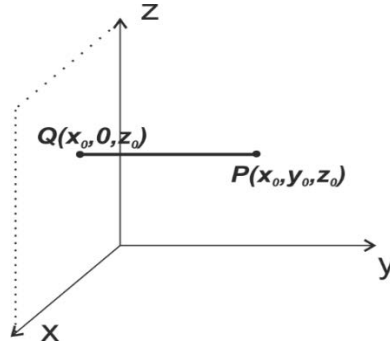
Şekil 4.19

Verilen nokta $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ve örneğin düzlem de xz -düzlemi olsun. O zaman öyle bir Q o xz bulunmalıdır ki $L(P, Q)$ en küçük olsun. Yani, $L(P, xz) = \min L(P, Q)$ olsun. Q o xz olduğundan $Q = (x_0, 0, z_0)$ dır. Buradan

$$L(P_0, Q) = |x_0 - x_0| + |y_0 - 0| + |z_0 - z_0|$$

$$L(P_0, Q) = |y_0|$$

dır. (Şekil 4.20)



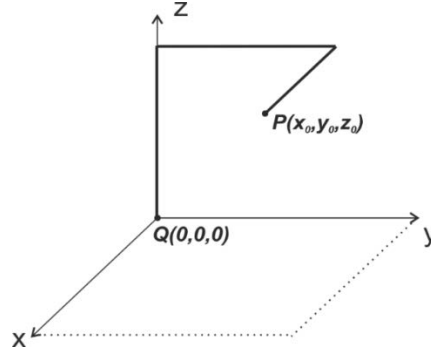
Şekil 4.20

Verilen nokta $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ve örneğin düzlem xy -düzlemi olsun. O zaman öyle bir Q o xy bulunmalıdır ki $L(P, Q)$ en küçük olsun. Yani, $L(P, xy) = \min L(P, Q)$ olsun. Q o xy olduğundan $Q = (0, 0, 0)$ dır. Buradan

$$L(P_0, Q) = |x_0 - 0| + |y_0 - 0| + |z_0 - 0|$$

$$L(P_0, Q) = |x_0| + |y_0| + |z_0|$$

dır. (Şekil 4.21)



Şekil 4.21

$$L(P_0, xy) = |x_0| + |y_0| + |z_0|, \quad L(P_0, yz) = |x_0|, \quad L(P_0, xz) = |y_0| \text{ dır.}$$

$$L(P_0, Q) = \begin{cases} |x_0| + |y_0| + |z_0|, & Q \text{ o } xy \text{ düzlemi ise} \\ |x_0|, & Q \text{ o } yz \text{ düzlemi ise} \\ |y_0|, & Q \text{ o } xz \text{ düzlemi ise} \end{cases} \quad (4.3)$$

4.4. \mathbb{R}_L^3 de Bir Noktanın Orijinden Geçen Düzlemlere Uzaklığı

Teorem 4.6 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının denklemi $Ax + By + Cz = 0$ olan α düzlemine olan uzaklığı,

$$L(P, \alpha) = \min\{|x_0 - x'_0|, |y_0 - y'_0|, |x_0| + |y_0| + |z_0|\}$$

dir.

İspat $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasının denklemi $Ax + By + Cz = 0$ olan α düzlemine gidilecek yollarda ulaşılabilecek noktalar $P' = (x_0, y'_0, z_0)$, $P'' = (x'_0, y_0, z_0)$ veya $P''' = (0, 0, 0)$ olacağından P_0 nin bu noktalara uzaklığı sırasıyla,

$$L(P_0, P') = |x_0 - x_0| + |y_0 - y'_0| + |z_0 - z_0| = |y_0 - y'_0|$$

$$L(P_0, P'') = |x_0 - x'_0| + |y_0 - y_0| + |z_0 - z_0| = |x_0 - x'_0|$$

$$L(P_0, P''') = |x_0 - 0| + |y_0 - 0| + |z_0 - 0| = |x_0| + |y_0| + |z_0|$$

olur. Dolayısıyla,

$$L(P, \alpha) = \min\{|x_0 - x'_0|, |y_0 - y'_0|, |x_0| + |y_0| + |z_0|\} \quad (4.4)$$

olur.

Örnek 4.9 $P_0 = (1,1,0)$ noktasının denklemi $x + y + z = 0$ olan α düzlemine olan en kısa uzaklığı,

P_0 noktası için $P' = (1, y', 0)$, $P'' = (x', 1, 0)$ ve $P''' = (0, 0, 0)$ noktaları vardır.

$P' = (1, y', 0)$ noktasını düzlemde yerine yazarsak, $1 + y' + 0 = 0 \Rightarrow y' = -1$ bulunur.

Yani $P' = (1, -1, 0)$ dir.

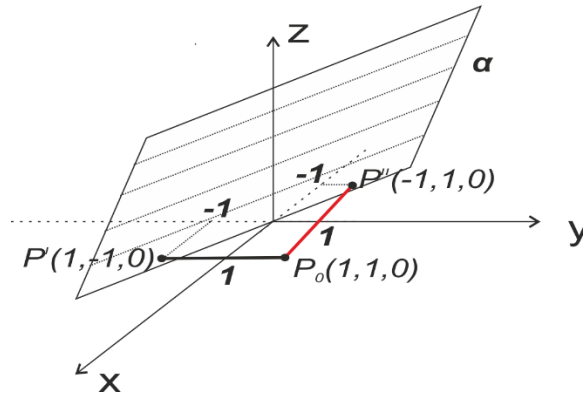
$P'' = (x', 1, 0)$ noktasını düzlemde yerine yazarsak, $x' + 1 + 0 = 0 \Rightarrow x' = -1$ bulunur.

Yani $P'' = (-1, 1, 0)$ dir.

$$L(P_0, \alpha) = \min\{|x_0 - x'_0|, |y_0 - y'_0|, |x_0| + |y_0| + |z_0|\}$$

$$L(P_0, \alpha) = \min\{|1 - (-1)|, |1 - (-1)|, |1| + |1| + |0|\}$$

$$L(P_0, \alpha) = \min\{2, 2, 2\} = 2 \text{ dir. (Şekil 4.22)}$$



Şekil 4.22

Örnek 4.10 $P_0 = (1, -1, 2)$ noktasının denklemi $x + y + z = 0$ olan α düzlemine olan en kısa uzaklığı,

P_0 noktası için $P' = (1, y', 2)$, $P'' = (x', -1, 2)$ ve $P''' = (0, 0, 0)$ noktaları vardır.

$P' = (1, y', 2)$ noktasını düzlemde yerine yazarsak, $1 + y' + 2 = 0 \Rightarrow y' = -3$ bulunur.

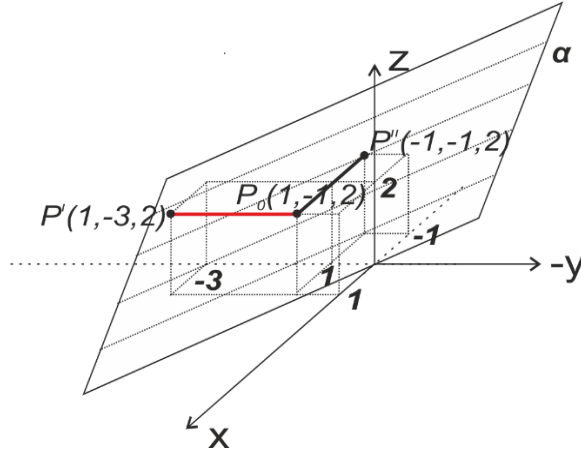
Yani $P' = (1, -3, 2)$ dir.

$P'' = (x', -1, 2)$ noktasını düzlemde yerine yazarsak, $x' - 1 + 2 = 0 \Rightarrow x' = -1$ bulunur. Yani $P'' = (-1, -1, 2)$ dir.

$$L(P_0, \alpha) = \min\{|x_0 - x'_0|, |y_0 - y'_0|, |x_0| + |y_0| + |z_0|\}$$

$$L(P_0, \alpha) = \min\{|1 - (-1)|, |-1 - (-3)|, |1| + |-1| + |2|\}$$

$$L(P_0, \alpha) = \min\{2, 2, 4\} = 2 \text{ dir. (Şekil 4.23)}$$



Şekil 4.23

Örnek 4.11 $P_0 = (1, -1, 0)$ noktasının denklemi $2x - y + z = 0$ olan α düzlemine olan en kısa uzaklığı,

P_0 noktası için $P' = (1, y', 0)$, $P'' = (x', -1, 0)$ ve $P''' = (0, 0, 0)$ noktaları vardır.

$P' = (1, y', 0)$ noktasını düzlemde yerine yazarsak, $2 - y' + 0 = 0 \Rightarrow y' = 2$ bulunur. Yani $P' = (1, 2, 0)$ dir.

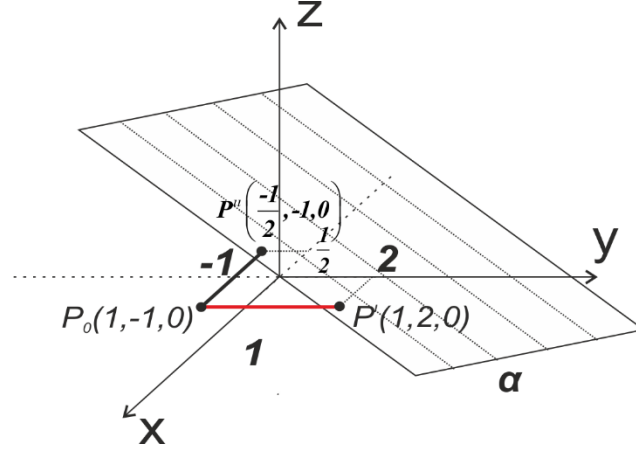
$P'' = (x', -1, 0)$ noktasını düzlemde yerine yazarsak, $2x' - (-1) + 0 = 0 \Rightarrow x' = -\frac{1}{2}$

bulunur. Yani $P'' = (-\frac{1}{2}, -1, 0)$ dir.

$$L(P_0, \alpha) = \min\{|x_0 - x'_0|, |y_0 - y'_0|, |x_0| + |y_0| + |z_0|\}$$

$$L(P_0, \alpha) = \min \left\{ \left| 1 - \left(\frac{-1}{2} \right) \right|, |1 - 2|, |1| + |-1| + |0| \right\}$$

$$L(P_0, \alpha) = \min \left\{ \frac{3}{2}, 1, 2 \right\} = 1 \text{ dir. (Şekil 4.24)}$$



Şekil 4.24

Örnek 4.12 $P_0 = (0,0,1)$ noktasının denkleminin $x - 2y + 4z = 0$ olan α düzlemine olan en kısa uzaklığı,

P_0 noktası için $P' = (0, y', 1)$, $P'' = (x', 0, 1)$ ve $P''' = (0, 0, 0)$ noktaları vardır.

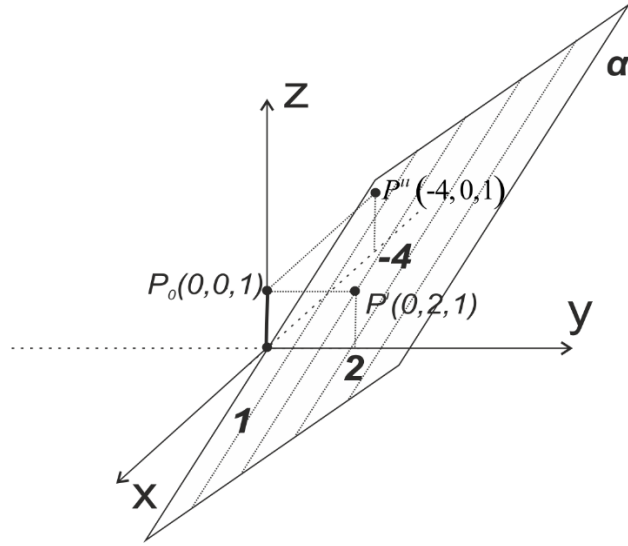
$P' = (0, y', 1)$ noktasını düzlemde yerine yazarsak, $0 - 2y' + 4 = 0 \Rightarrow y' = 2$ bulunur. Yani $P' = (0, 2, 1)$ dir.

$P'' = (x', 0, 1)$ noktasını düzlemde yerine yazarsak, $x' - 0 + 4 = 0 \Rightarrow x' = -4$ bulunur. Yani $P'' = (-4, 0, 1)$ dir.

$$L(P_0, \alpha) = \min \{ |x_0 - x'_0|, |y_0 - y'_0|, |x_0| + |y_0| + |z_0| \}$$

$$L(P_0, \alpha) = \min \{ |0 - (-4)|, |0 - 2|, |0| + |0| + |1| \}$$

$$L(P_0, \alpha) = \min \{ 4, 2, 1 \} = 1 \text{ dir. (Şekil 4.25)}$$



Şekil 4.25

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, “Single-Facility Weber Location Problem Based On The Lift Metric” başlıklı çalışmada verilen düzlemde iki nokta arasındaki Lift uzaklık fonksiyonunun bir metrik olduğu ispatlanmıştır. Bu metrikle donatılmış düzlemde Lift çemberi incelenmiştir. Düzlemde verilen bir noktanın bir doğruya Lift uzaklığı verilmiştir. Son bölümde ise aynı çalışmada verilen uzayda iki nokta arasındaki Lift uzaklık fonksiyonu kullanılarak Lift birim küresi ve bir noktanın orijinden geçen doğrulara ve düzlemlere olan Lift uzaklıkları belirlenmiştir.

Öklidyen düzlemdeki problemler Öklid metriği yerine Lift metrik kullanılarak çözümlenerek aralarındaki benzerlikleri ve farklılıkları ortaya koyan çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça Z., 1995, Taksi Trigonometri Ve Uzay Taksi Geometrisinin Geliştirilmesi Üzerine, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Doktora Tezi

Kaya, R., 2002, Analitik Geometri, Bilim Teknik Yayınevi, 439 s, Eskişehir

Krause, E.F., 1975, Taxicab Geometry, Ann Arbor Michigan Marc, 87 p

Krause, E.F., 1986, Taxicab Geometry : An Adventure in Non-Euclidean Geometry, Dover Publications, Inc., New York

Stanimirovic P.S., Ciric M.s., Kazakovtsev L.A., Osinuga I.A., 2012, Single-Facility Weber Location Problem Based On The Lift Metric, Facta Universitatis (Nis), Se. Math. Inform. Vol. 27 No 2, 175-190

Yurtoğlu, E., 2014, Bir Üçgenin Taksi İç Teğet Çemberi ve Taksi Çevrel Çemberi Üzerine, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi