Latin Kareler ve Fano Düzleminde Etiketlemeler Üzerine

Kübra Pamuksuz

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Ocak 2017

On the Latin Squares and Labeled Fano Planes

Kübra Pamuksuz

MASTER OF SCIENCE THESIS

Mathematics-Computer Department

January 2017

Latin Kareler ve Fano Düzleminde Etiketlemeler Üzerine

Kübra Pamuksuz

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ziya Akça

Ocak 2017

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Kübra Pamuksuz'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Latin Kareler ve Fano Düzleminde Etiketlemeler Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ziya Akça

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ziya Akça

Üye : Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

Üye : Doç. Dr. Mine Turan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ziya Akça danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Latin Kareler ve Fano Düzleminde Etiketlemeler Üzerine**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

02/01/2017

Kübra Pamuksuz

ÖZET

Bu çalışmada, Latin Kareler ve Etiketlenmiş Fano Düzlemlerinin Kombinasyonlarının özellikleri incelenmektedir.

İlk bölümde, gerekli olan bazı tanımlar, Latin Kare kavramı ve özellikleri verilmektedir. Bu bölümdeki genel bilgiler literatürden özetlenerek verilmiştir.

İkinci bölümde, Etiketlenmiş Fano Düzlemleri ve Etiketlenmiş Fano Düzlemlerinin Kombinasyonlarının özellikleri incelenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Afin düzlem, Fano düzlemi, Projektif düzlem, Latin kareler.

SUMMARY

In this study, Latin Squares and Combinatorial Intricacies of Labeled Fano Planes are investigated.

In the first chapter, some definitions needed, the concept and of Latin Square and its properties are given. Infact, this chapter is summarized from some known references.

In the second chapter, Labeled Fano Planes and Combinatorial Intricacies of Labeled Fano Planes are investigated.

Keywords: Affine Plane, Fano Plane, Projective Plane, Latin Squares.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında deneyimlerini, bilimsel katkılarını ve desteklerini esirgemeyen değerli danışmanım

Prof. Dr. Ziya AKÇA'ya,

her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini benden esirgemeyen sayın hocalarım

Prof. Dr. Süheyla EKMEKÇİ ve Prof. Dr. Ayşe BAYAR'a

bu süreçte her zaman yanımda olup maddi, manevi bana destek olan sevgili AİLEME en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2017
Kübra Pamuksuz

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simge veya Kısaltma	**Açıklamalar**
$N(n)$	MOLS'ların Maksimum Sayısı
$\Leftrightarrow$	Gerek ve Yeter Koşul
$\Rightarrow$	İse Bağlacı
$\cap$	Kesişim
$\emptyset$	Boş Küme
$\forall$	Her
$\in$	Eleman
∞	Sonsuz
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif Tam Sayılar
$\mathcal{N}$	Noktalar Kümesi
N∅d	N Noktası d doğrusu üzerinde değildir.
$\mathcal{D}$	Doğrular kümesi
MOLS	Karşılıklı Dik Latin Kare

1. GİRİŞ

Latin kare kavramının, tam olarak ne zaman ortaya atıldığı bilinmemektedir. Bazı araştırmacılar mertebesi 1,2,3,...,11 olan Latin karelerin varlığı ve sayısı ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Latin karelerin dikliği ise Euler'den önce bilinmekteydi. Euler mertebesi 6 olan birbirine dik iki latin kare bulmaya çalışmış fakat başarılı olamamıştır. Mertebesi 10,14,18,22 olan birbirine dik latin karelerin olmadığı gösterilmiştir. Bundan yola çıkarak, Euler'in ölümünden sonra mertebesi $4k + 2$ olan iki dik latin karenin olamayacağı iddiası ortaya atılmıştır. Yüz yıldan fazla bir zaman bu iddia ne ispatlanabilmiş ne de ters bir örnek gösterilebilmiştir. Gaston Tarry(1843-1913) kaba bir ispatla 6. mertebeden dik latin kareler olmadığını göstermiştir. 1984'te Stinson daha düzgün bir ispat yapmıştır. 1958'de Tilden Parker 10. mertebeden latin karelerin olabileceğine dair ipuçları yakalamıştır. R.C.Bose Parker'ın bulduklarından yola çıkarak mertebesi $4k + 2$ olan dik latin kareler bulmuştur.

Bu tezin birinci bölümünde gerekli olan bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Latin kare ile ilgili yapılan bazı çalışmalar incelenmiştir.

İkinci bölümde, en küçük projektif düzlem olan Fano düzleminin kaç farklı şekilde etiketlenebileceği incelenmiştir.

2. LATİN KARELER

2.1 Latin Karenin Tanımı

Tanım 1. *(Seçkin vd. 1991) n elemanlı bir küme üzerinde tanımlanan $n \times n$ boyutunda bir kare matrisin her satır ve sütununda kümenin bütün elemanları birer kez kullanılıyorsa bu matrise bir* ***Latin kare*** *denir.*

Böyle bir matrise Latin kare denmesinin nedeni bu yapının ilk ortaya çıktığında kümenin elemanlarının Latin harfleri olarak alınmasındandır. Ancak tanımlarda ve hesaplamalarda sağlayacağı kolaylık açısından, genellikle $\{1, 2, ..., n\}$ veya $\{0, 1, , ..., n-1\}$ kümesi tercih edilir.

Örnek 1. *(Seçkin vd. 1991) 2×2 boyutunda $\{1, 2\}$ kümesi üzerinde tanımlı sadece 2 tane Latin kare vardır.*

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

Örnek 2. *$\{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde tanımlı 3×3 boyutunda 12 tane Latin kare vardır. Bu Latin kareler aşağıda verilmiştir.*

$$L_1 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \quad L_2 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} \quad L_3 = \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix} \quad L_4 = \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

$$L_5 = \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix} \quad L_6 = \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \quad L_7 = \begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \quad L_8 = \begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$L_9 = \begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} \quad L_{10} = \begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \quad L_{11} = \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \quad L_{12} = \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

4. mertebeden ise 576 Latin kare bulunmaktadır. Mertebeyi 5'e çıkardığımızda Latin kare sayısı 161 280'e çıkar. Sadece yakın zamanda 11'inci mertebeden Latin kare sayısının Çizelge 2.1'deki 48 basamaklı bir sayı olduğu gösterilebilmiştir. (Yazıcı, 2004)

Çizelge 2.1 Mertebeye Göre Latin Kare Sayısı

n	latin kare sayısı
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161280
6	812851200
7	61479419904000
8	108776032459082956800
9	5524751496156892842531225600
10	9982437658213039871725064756920320000
11	776966836171770144107444346734230682311065600000
	Öyle bir c sabiti vardır ki, n çok büyük bir sayıysa, mertebesi n olan aşağı yukarı $(cn)^{n^2}$ tane latin kare vardır.

Çizelge 2.2 Mertebeye Göre Farklı Latin Kare Sayısı

n	farklı latin kare sayısı	
1	1	
2	1	
3	1	
4	4	
5	56	Euler (1782), Cayley (1890), MacMahon (1915; yanlış değer)
6	9408	Frolov (1890) and Tarry (1900)
7	16942080	Frolov (1890; yanlış), Norton (1939; eksik), Sade (1948), Saxena (1951)
8	535281401856	Wells (1967)
9	377597570964258816	Bammel and Rothstein (1975)
10	7580721483160132811489280	McKay and Rogoyski (1995)
11	5363937773277371298119673540771840	McKay and Wanless (2005)

Çizelge 2.2 de n. mertebeden üretilen farklı Latin karelerin sayısı verilmiştir. Başka bir deyişle, Latin karelerin normalleştirilmesiyle elde edilen Latin kare sayısıdır.

Tanım 2. *(Seçkin vd. 1991) İlk satırı $(123...n)$ olan $n \times n$ boyutunda Latin kareye **standart formda** denir. Her Latin kareden standart formda Latin kareler elde edilebilir.*

Örnek 3. *$S = \{1, 2, ..., n\}$ kümesi üzerinde tanımlı n. mertebeden bir Latin kare standart formda aşağıdaki gibi bir Latin karedir.*

$$\begin{array}{lllll} 1 & 2 & ... & n-1 & n \\ 2 & 3 & ... & n & 1 \\ . & . & ... & . & . \\ . & . & ... & . & . \\ . & . & ... & . & . \\ n & 1 & ... & n-2 & n-1 \end{array}$$

Tanım 3. *(J., 2011) S sembol kümesi üzerinde tanımlı n. mertebeden bir L Latin karesinin transpozu L^T bütün $0 \leq i, j \leq n-1$ için; $L^T(i, j) = L(j, i)$ olacak şekilde tanımlanır.*

Tanım 4. *(Bermúdez J., 2009) L, n. mertebeden bir Latin kare olsun. L^T, L'nin transpozu olmak üzere $L = L^T$ ise L Latin karesine n. mertebeden **simetrik Latin kare** denir.*

Örnek 4. *A ve B, 5. mertebeden iki Latin kare olmak üzere*

$$A = \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad B = \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}$$

$$A^T = \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad B^T = \begin{array}{ccccc} 0 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

$A = A^T$ olduğu için A bir simetrik Latin karedir. $B \neq B^T$ olduğu için B simetrik olmayan bir Latin karedir.

Tanım 5. *(Seçkin vd. 1991) $L_1 = (a_{ij})$ ve $L_2 = (b_{ij})$, $n \times n$ boyutunda iki Latin kare olsun. Eğer tüm $i, j = 1, 2, ..., n$ için $(a_{i,j}, b_{i,j})$ sıralı ikilileri farklı oluyorsa L_1 ve L_2 latin karelerine birbirlerine **dik Latin karelerdir** denir.*

Örnek 1 de 2×2 boyutunda sadece iki tane Latin kare olduğunu verilmişti, bunlar birbirlerine dik olmadığından 2×2 boyutunda dik Latin kare yoktur. 3×3 boyutunda da birbirlerine dik sadece bir Latin kare çifti vardır, ve bunlar şu Latin karelerdir:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Dik Latin kareleri tek bir kareyle de gösterebiliriz. Örneğin, yukarıdaki 3×3 dik Latin kareler

$$\begin{matrix} 11 & 22 & 33 \\ 23 & 31 & 12 \\ 32 & 13 & 21 \end{matrix}$$

şeklinde de gösterilebilir. Bu matriste aynı ikili tekrarlamadığı için kolayca iki Latin karenin dik olduğunu söylenebilir.

Latin karelerin Latin harfleri ile inşa edildikleri belirtilmişti. Dik Latin karelerin gösteriminde ise, karelerin birincisi için Latin harfleri; ikincisi için Yunan harfleri kullanılırdı. Bu nedenle dik Latin karelere **Greko-Latin Kareler** adı da verilir. Bu gösterimle, yukarıdaki 3×3 dik Latin kareler ve ortaya çıkan Greko-Latin kare şöyle yazılabilir:

$$\begin{matrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A\alpha & B\beta & C\gamma \\ B\gamma & C\alpha & A\beta \\ C\beta & A\gamma & B\alpha \end{matrix}$$

Örnek 5. *(Stinson, 2004) 4. mertebeden dik Latin kareler şunlardır:*

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix}$$

Bu Latin karelerin sıralı ikili şeklinde gösterimi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{matrix} 11 & 34 & 42 & 23 \\ 43 & 22 & 14 & 31 \\ 24 & 41 & 33 & 12 \\ 32 & 13 & 21 & 44 \end{matrix}$$

Aynı ikili tekrarlamadığı için bu iki Latin kare diktir.

Örnek 6. *(Stinson, 2004) 8. mertebeden dik Latin kareler şunlardır:*

$$\begin{array}{cccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 2&1&4&3&6&5&8&7\\ 3&4&1&2&7&8&5&6\\ 4&3&2&1&8&7&6&5\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 6&5&8&7&2&1&4&3\\ 7&8&5&6&3&4&1&2\\ 8&7&6&5&4&3&2&1 \end{array} \quad \begin{array}{cccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8\\ 3&4&1&2&7&8&5&6\\ 5&6&7&8&1&2&3&4\\ 7&8&5&6&3&4&1&2\\ 6&5&8&7&2&1&4&3\\ 8&7&6&5&4&3&2&1\\ 2&1&4&3&6&5&8&7\\ 4&3&2&1&8&7&6&5 \end{array}$$

Bu Latin karelerin sıralı ikili şeklinde gösterimi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{cccccccc} 11&22&33&44&55&66&77&88\\ 23&14&41&32&67&58&85&76\\ 35&46&17&28&71&82&53&64\\ 47&38&25&16&83&74&61&52\\ 56&65&78&87&12&21&34&43\\ 68&57&86&75&24&13&42&31\\ 72&81&54&63&36&45&18&27\\ 84&73&62&51&48&37&26&15 \end{array}$$

Mertebe arttıkça Latin karelerin dikliğini kontrol etmek zorlaşır. Bunun için Latin kareyi tek bir kareyle yazmak işimizi biraz daha kolaylaştırabilir. Bu karede tekrar eden ikili olmadığı için Latin kareler diktir.

Teorem 1. *(Stinson, 2004) n>1, n tek sayı ise n. mertebeden dik Latin kareler vardır.*

İspat. *Z_n de n. mertebeden iki Latin kare tanımlayalım. $(i, j) \in Z_n$ olmak üzere,*

$$L_{1(i,j)} = (i + j)\,(modn) \tag{2.1}$$
$$L_{2(i,j)} = (i - j)\,(modn) \tag{2.2}$$

Herhangi pozitif n tamsayısı için L_1 ve L_2 Latin karelerinin var olduğu kolayca görülür. n tek tamsayısı için dik olduklarını ispatlayalım.

$(x, y) \in Z_n \times Z_n$ olduğunu varsayalım. $L_1(i, j) = x$ ve $L_2(i, j) = y$ olacak şekilde bir tek (i, j) ikilisi bulmak gerekir.Başka bir deyişle,

$$i + j \equiv x \quad (modn) \tag{2.3}$$
$$i - j \equiv y \quad (modn) \tag{2.4}$$

i ve j için yukarıdaki sistemi çözmek gerekir. n tek sayı olduğu için; 2, n'nin bir çarpımsal tersine sahiptir. Sistemin tek bir çözümü olduğundan

$$i+j \equiv x \quad (modn) \tag{2.5}$$

$$i-j \equiv y \quad (modn) \tag{2.6}$$

$$2i \equiv (x+y) \quad (modn) \tag{2.7}$$

$$i \equiv (x+y)\,2^{-1} \quad (modn) \tag{2.8}$$

$$j \equiv (x-y)\,2^{-1} \quad (modn) \tag{2.9}$$

elde edilir. Bu yüzden L_1 ve L_2 Latin kareleri diktir.

Örnek 7. *5. mertebeden dik Latin karelerin inşasında teorem 1'nin uygulaması :*

$$\begin{array}{lll} L_1(1,1)=1+1=2 & L_1(2,1)=2+1=3 & L_1(3,1)=3+1=4 \\ L_1(1,2)=1+2=3 & L_1(2,2)=2+2=4 & L_1(3,2)=3+2=5=0 \\ L_1(1,3)=1+3=4 & L_1(2,3)=2+3=5=0 & L_1(3,3)=3+3=6=1 \\ L_1(1,4)=1+4=5=0 & L_1(2,4)=2+4=6=1 & L_1(3,4)=3+4=7=2 \\ L_1(1,5)=1+5=6=1 & L_1(2,5)=2+5=7=2 & L_1(3,5)=3+5=8=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} L_1(4,1)=4+1=5=0 & L_1(5,1)=5+1=6=1 \\ L_1(4,2)=4+2=6=1 & L_1(5,2)=5+2=7=2 \\ L_1(4,3)=4+3=7=2 & L_1(5,3)=5+3=8=3 \\ L_1(4,4)=4+4=8=3 & L_1(5,4)=5+4=9=4 \\ L_1(4,5)=4+5=9=4 & L_1(5,5)=5+5=10=0 \end{array}$$

$$L_1 = \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} L_2(1,1)=1-1=0 & L_2(2,1)=2-1=1 & L_2(3,1)=3-1=2 \\ L_2(1,2)=1-2=-1=4 & L_2(2,2)=2-2=0 & L_2(3,2)=3-2=1 \\ L_2(1,3)=1-3=-2=3 & L_2(2,3)=2-3=-1=4 & L_2(3,3)=3-3=0 \\ L_2(1,4)=1-4=-3=2 & L_2(2,4)=2-4=-2=3 & L_2(3,4)=3-4=-1=4 \\ L_2(1,5)=1-5=-4=1 & L_2(2,5)=2-5=-3=2 & L_2(3,5)=3-5=-2=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} L_2(4,1)=4-1=3 & L_2(5,1)=5-1=4 \\ L_2(4,2)=4-2=2 & L_2(5,2)=5-2=3 \\ L_2(4,3)=4-3=1 & L_2(5,3)=5-3=2 \\ L_2(4,4)=4-4=0 & L_2(5,4)=5-4=1 \\ L_2(4,5)=4-5=-1=4 & L_2(5,5)=5-5=0 \end{array}$$

$$L_2 = \begin{matrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Teorem 2. *(Stinson, 2004)$n \not\equiv 2 \ (mod 4)$ ise n. mertebeden dik Latin kareler vardır.*

Teorem 3. *(Seçkin vd. 1991)n, 2 den büyük bir doğal sayı olmak üzere; $n \times n$ boyutunda birbirlerine dik Latin karelerin maksimum sayısı $(n-1)$ dir.*

İspat. *$L_1, L_2, ..., L_k$ $\{0, 1, ..., k\}$ kümesi üzerinde tanımlı her biri diğerleri ile dik olan $n \times n$ boyutunda Latin kareleri göz önüne alalım ve L_m $(1 \leq m \leq k)$ karesininin (i, j) elemanını da $a_{ij}^{(m)}$ ile gösterelim. $a_{11}^{(1)} = a$ ve $a_{11}^{(2)} = b$ olsun. $(0 \leq a, b \leq n-1)$ a sayısı L_1'in ikinci satırında j numaralı sütunda bulunuyorsa, yani $a_{2j}^{(1)} = a$ $(j \neq 1)$ ise L_1 ve L_2 dik olduklarından $a_{2j}^{(2)} = b$ olamaz. O halde, $a_{2j}^{(2)}$ için kullanılabilecek en fazla $n-1$ sayı vardır.*

Teorem 4. *(Seçkin vd. 1991) p asal bir sayı ve $n = p^t$ $(t, n \in Z^+, n > 1)$ ise, $n \times n$ boyutunda $n-1$ tane $L_1, L_2, ..., L_{n-1}$ dik Latin kareleri vardır ve $L_m = a_{ij}^{(m)}$ olmak üzere, bu kareler $a_{ij}^{(m)} = i + mj \ (mod n)$ $(0 \leq i, j \leq n-1; m = 1, 2, ..., n-1)$ şeklinde tanımlanabilir.*

İspat. *$\forall k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ için L_k'nın bir Latin kare olduğunu göstermekle başlayalım. Farzedelim ki, L_k bir Latin kare olmasın. O halde, L_k'nın belli bir satırında veya sütununda tekrarlanan bir eleman olacaktır. Eğer t. sütununda eleman tekrarı varsa, $r \neq s$ olmak üzere öyle $r, s \in \{1, 2, ..., n\}$ bulunabilir ki, $a_{rt}^{(k)} = a_{st}^{(k)}$ olur. Tanım gereği $r + kt = s + kt$ $(mod n) \Rightarrow r = s$ bulunur ki bu $r \neq s$ ile çelişir. Bu çelişkiden L_k'nın hiçbir sütununda tekrar olmadığı anlaşılır.*

Tekrarlanma t. satırında ise $r \neq s$ olmak üzere öyle $r, s \in \{1, 2, ..., n\}$ vardır ki $a_{tr}^{(k)} = a_{ts}^{(k)}$ dır. Buradan $t + rk = t + sk$ $(mod n)$, yani $rk = sk$ $(mod n)$ elde edilir. $k \neq 0$ ise $r, s \in \{1, 2, ..., n\}$ ve $n = p^t$ olduğundan $r = s$ olur ki bu da bir çelişkidir. Yani L_k'nın hiçbir satırında da tekrar yoktur. O halde varsayım hatalı olduğundan L_k bir Latin karedir.

Bu karelerin dikliğini görelim. Farz edelim ki, L_m ve L_k $(1 \leq k \neq m \leq n-1)$ dik olmasın. Bir başka deyişle, $1 \leq i, j, r, s \leq n$ ve $(i, j) \neq (r, s)$ için $a_{ij}^{(k)} = a_{rs}^{(k)}$ ve $a_{ij}^{(m)} = a_{rs}^{(m)}$ olduğunu farzedelim.

Tanımlardan

$$i + kj = \quad r + ks \quad (mod n) \tag{2.10}$$

$$i + mj = \quad r + ms \quad (mod n) \tag{2.11}$$

elde edilir. İki eşitliğin taraf tarafa farkları alınarak

$$(k-m)\,j=(k-m)\,s\,(modn) \tag{2.12}$$

yazılır. $k\neq m$ *alındığında* $k-m\neq 0$ *olur ve* n *de* p^t *(p asal) tipinde olduğu için* $j=s$ *olduğu görülür. Bu eşitlik denklem (2.10) da yerine konularak* $i=r$ *bulunur. Yani* $(i,j)=(r,s)$ *sonucu elde edilir ki, bu da çelişkidir. O halde* L_k *ve* L_m *birbirlerine dik Latin karelerdir.*

Örnek 8. *Teorem 4 deki metodu kullanarak* 5×5 *boyutunda 4 tane dik Latin kare yazılabilir:* L_1 *karesi* $a_{ij}^{(1)}=i+j\,(mod5)$ *ile tanımlı, o halde*

$$\begin{array}{lll}
a_{11}^{(1)}=1+1=2 & a_{21}^{(1)}=2+1=3 & a_{31}^{(1)}=3+1=4\\
a_{12}^{(1)}=1+2=3 & a_{22}^{(1)}=2+2=4 & a_{32}^{(1)}=3+2=5=0\\
a_{13}^{(1)}=1+3=4 & a_{23}^{(1)}=2+3=5=0 & a_{33}^{(1)}=3+3=6=1\\
a_{14}^{(1)}=1+4=5=0 & a_{24}^{(1)}=2+4=6=1 & a_{34}^{(1)}=3+4=7=2\\
a_{15}^{(1)}=1+5=6=1 & a_{25}^{(1)}=2+5=7=2 & a_{35}^{(1)}=3+5=8=3
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
a_{41}^{(1)}=4+1=5=0 & a_{51}^{(1)}=5+1=6=1\\
a_{42}^{(1)}=4+2=6=1 & a_{52}^{(1)}=5+2=7=2\\
a_{43}^{(1)}=4+3=7=2 & a_{53}^{(1)}=5+3=8=3\\
a_{44}^{(1)}=4+4=8=3 & a_{54}^{(1)}=5+4=9=4\\
a_{45}^{(1)}=4+5=9=4 & a_{55}^{(1)}=5+5=10=0
\end{array}$$

ve sonuçta

$$L_1=\begin{array}{ccccc}
2&3&4&0&1\\
3&4&0&1&2\\
4&0&1&2&3\\
0&1&2&3&4\\
1&2&3&4&0
\end{array}$$

bulunur.

L_2 *ise* $a_{ij}^{(2)}=i+2jmod\,(5)$ *olarak tanımlı olduğundan*

$$\begin{array}{lll}
a_{11}^{(2)}=1+2.1=3 & a_{21}^{(2)}=2+2.1=4 & a_{31}^{(2)}=3+2.1=5=0\\
a_{12}^{(2)}=1+2.2=5=0 & a_{22}^{(2)}=2+2.2=6=1 & a_{32}^{(2)}=3+2.2=7=2\\
a_{13}^{(2)}=1+2.3=7=2 & a_{23}^{(2)}=2+2.3=8=3 & a_{33}^{(2)}=3+2.3=9=4\\
a_{14}^{(2)}=1+2.4=9=4 & a_{24}^{(2)}=2+2.4=10=0 & a_{34}^{(2)}=3+2.4=11=1\\
a_{15}^{(2)}=1+2.5=11=1 & a_{25}^{(2)}=2+2.5=12=2 & a_{35}^{(2)}=3+2.5=13=3
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
a_{41}^{(2)}=4+2.1=6=1 & a_{51}^{(2)}=5+2.1=7=2\\
a_{42}^{(2)}=4+2.2=8=3 & a_{52}^{(2)}=5+2.2=9=4\\
a_{43}^{(2)}=4+2.3=10=0 & a_{53}^{(2)}=5+2.3=11=1\\
a_{44}^{(2)}=4+2.4=12=2 & a_{54}^{(2)}=5+2.4=13=3\\
a_{45}^{(2)}=4+2.5=14=4 & a_{55}^{(2)}=5+2.5=15=0
\end{array}$$

$$L_2 = \begin{matrix} 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{matrix}$$

elde edilir.

L_3 için $a_{ij}^{(3)} = i + 3j\ (mod 5)$ ve L_4 için $a_{ij}^{(4)} = i + 4j\ (mod 5)$ kullanılarak L_1, L_2, L_3, L_4 dik kareleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$L_1 = \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{matrix} \quad L_2 = \begin{matrix} 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{matrix}$$

$$L_3 = \begin{matrix} 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{matrix} \quad L_4 = \begin{matrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

2.2 Latin Karelerin Çarpımı

Tanım 6. *(Stinson,2004) L ve M, sırasıyla X ve Y kümelerindeki sembollerle tanımlanmış n. ve m. mertebeden iki Latin kare olsun. $L \times M$ ile gösterilen L ve M'nin çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$(L \times M)\left(\left(i_1, i_2\right), \left(j_1, j_2\right)\right) = \left(L\left(i_1, j_1\right), \left(i_2, j_2\right)\right) \tag{2.13}$$

Üstelik, $L \times M$'nin mertebesi nm dir.

Örnek 9.

$$L = \begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \quad M = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

iki Latin kare ise

$$L \times M = \begin{matrix} (3,1) & (1,1) & (2,1) & (3,2) & (1,2) & (2,2) \\ (2,1) & (3,1) & (1,1) & (2,2) & (3,2) & (1,2) \\ (1,1) & (2,1) & (3,1) & (1,2) & (2,2) & (3,2) \\ (3,2) & (1,2) & (2,2) & (3,1) & (1,1) & (2,1) \\ (2,2) & (3,2) & (1,2) & (2,1) & (3,1) & (1,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (1,1) & (2,1) & (3,1) \end{matrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 5. *(Stinson, 2004) L ve M sırasıyla X ve Y kümelerindeki sembollerle tanımlanmış m. ve n. mertebeden Latin kareler ise $L \times M$, $X \times Y$ kümesindeki sembollerle tanımlanmış mn. mertebeden bir Latin karedir.*

İspat. *$L \times M$'nin (i_1, i_2) satırını düşünelim. $x \in X$ ve $y \in Y$ olsun. $L \times M$'nin (i_1, i_2) satırında (x, y) olduğunu görelim. L bir Latin kare olduğu için $L(i_1, j_1) = x$ olacak şekilde bir tek j_1 sütunu vardır. M bir Latin kare olduğu için $M(i_2, j_2) = y$ olacak şekilde bir tek j_2 sütunu vardır. Bu yüzden $(L \times M)((i_1, i_2), (j_1, j_2)) = (x, y)$ dir. Benzer şekilde $L \times M$'nin her sütunu $X \times Y$'nin her sembolünü içerir. Bu yüzden $L \times M$ bir Latin karedir.*

Teorem 6. *(Stinson, 2004) n_1. ve n_2. mertebeden dik Latin kareler var ise $n_1 n_2$. mertebeden dik Latin kare vardır.*

İspat. *Varsayalım ki; L_1 ve L_2, X kümesinde tanımlı n_1. mertebeden dik Latin kareler ve M_1 ve M_2, Y kümesi üzerinde tanımlı n_2. mertebeden dik Latin kareler olsun. $L_1 \times M_1$ ve $L_2 \times M_2$'nin $n_1 n_2$. mertebeden dik Latin kareler oldukları gösterilmeli. $L_1 \times M_1$ ve $L_2 \times M_2$ teorem 5'den Latin karedirler. Bu yüzden sadece dik olduklarını göstermek yeterlidir. $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ sembollerinin sıralı çiftleri ele alınırsa bir tek $((i_1, i_2), (j_1, j_2))$ ikilisi bulmak için*

$$(L_1, M_1)((i_1, i_2), (j_1, j_2)) = (x_1, y_1) \quad (2.14)$$

$$(L_2, M_2)((i_1, i_2), (j_1, j_2)) = (x_2, y_2) \quad (2.15)$$

olsun. O zaman

$$L_1(i_1, j_1) = x_1 \quad (2.16)$$

$$M_1(i_2, j_2) = y_1 \quad (2.17)$$

$$L_2(i_1, j_1) = x_2 \quad (2.18)$$

$$M_2(i_2, j_2) = y_2 \quad (2.19)$$

L_1 ve L_2 dik olduğundan denklem (2.16) ve denklem (2.18), (i_1, j_1)'i tek olarak belirler. M_1 ve M_2 dik olduklarından denklem (2.17) ve denklem (2.19), (i_2, j_2)'yi tek olarak belirler. İstenilen ikili $((i_1, i_2), (j_1, j_2))$ tek olarak belirlenir.

2.3 Karşılıklı Dik Latin Kareler

Tanım 7. *(Stinson,2004) $1 \leq i,\ j \leq s$ için n. mertebeden L_i ve L_j Latin kareler , dik ise **karşılıklı dik Latin kareler** denir. Karşılıklı dik Latin kareler demek yerine kısaca "**MOLS** "diye ifade edilir. n. mertebeden s tane MOLS'ların kümesi $sMOLS\,(n)$ şeklinde gösterilir.*

n. mertebeden MOLS'ların maksimum sayısı $N\ (n)$ ile gösterilir. 1. mertebeden herhangi iki Latin kare dik olduğu için $N\,(1) = \infty$ dır. $n > 1$ için $N\,(n)$ üzerinde sonlu bir üst sınırın var olduğunu söylemek mümkündür.

Örnek 10. *(Bermúdez J., 2009) L_1, L_2, L_3, 4. mertebeden Latin kareler*

$$L_1 = \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix} \quad L_2 = \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{matrix} \quad L_3 = \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{matrix}$$

olsun.

$$L_1 \quad ve \quad L_2 = \begin{matrix} 00 & 11 & 22 & 33 \\ 13 & 02 & 31 & 20 \\ 21 & 30 & 03 & 12 \\ 32 & 23 & 10 & 01 \end{matrix} \qquad L_1 \quad ve \quad L_3 = \begin{matrix} 00 & 11 & 22 & 33 \\ 12 & 03 & 30 & 21 \\ 23 & 32 & 01 & 10 \\ 31 & 20 & 13 & 02 \end{matrix}$$

$$L_2 \quad ve \quad L_3 = \begin{matrix} 00 & 11 & 22 & 33 \\ 32 & 23 & 10 & 01 \\ 13 & 02 & 31 & 20 \\ 21 & 30 & 03 & 12 \end{matrix}$$

Göz önüne alınırsa L_1 ve L_2, L_1 ve L_3, L_2 ve L_3 diktirler. Bu yüzden L_1, L_2 ve L_3 karşılıklı dik Latin karelerdir.

Teorem 7. *(Stinson, 2004) $n > 1$ için $N\,(n) \leq n - 1$ ise $nMOLS\,(n)$ mevcut değildir.*

2.4 Afin Düzlemler

Bu bölümde afin düzlemin tanımı ve afin düzlemlerle ilgili bazı temel kavramlar verildikten sonra karşılıklı dik Latin kareden afin düzlem elde edilecektir. Ayrıca bir afin düzlemden nasıl karşılıklı dik Latin kareler elde edebiliriz verilecektir..

Tanım 8. *(Kaya, 2005) $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olsun ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme, $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı ($\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen A1, A2 ve A3 aksiyomlarını sağlayan $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemine **afin düzlem** denir.*

(A1) *$\forall\ M, N \in \mathcal{N}$ ve $M \neq N$ noktalarından geçen tek bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.*

(A2) *$N \not\circ d$ olmak üzere her $N \in \mathcal{N}$ ve $d \in \mathcal{D}$ için $N \circ c$ ve $d \parallel c$ olacak şekilde tek bir $c \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.*

(A3) *Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.*

Tanım 9. *(Kaya, 2005) Her sonlu $\mathcal{A}$ afin düzlemi için $n \geq 2$ olmak şartıyla*

(1) *Her doğrusu üzerinde tam olarak n tane nokta vardır.*

(2) *Her noktası tam olarak $n + 1$ tane doğru üzerindedir.*

(3) *Toplam nokta sayısı n^2 dir.*

(4) *Toplam doğruların sayısı $n^2 + n$ dir.*

Teorem 8. *(Stinson, 2004) Herhangi afin düzlem paralel sınıflara ayrılabilir.*

Tanım 10. *(Wikipedia, 2016b) S, λ elemanlı bir küme olmak üzere S'nin k elemanlı alt kümeleri blokları oluştursun ve S'nin v elemanlı her alt kümesi tam olarak bir blok da bulunsun. Bu sisteme **Steiner sistemi** denir. v, k, λ parametreleri ile Steiner sistem $S(v, k, \lambda)$ şeklinde yazılır.*

Teorem 9. *(Stinson, 2004) (v, k, λ) paralel sınıflara ayrılabilen afin düzlemin farklı paralel sınıflarından herhangi iki blok tam olarak $\frac{k^2}{v}$ nokta da kesişir.*

2.5 Afin Düzlem'den MOLS Elde Etme

$N(n) = n - 1$ olduğu durumlar afin düzlemlere karşılık geldiği için oldukça önemlidir. n. mertebede bir afin düzlemden bir $(n-1)\, MOLS\,(n)$ elde edilir. Varsayalım ki (X, A) n. mertebeden bir afin düzlem (yani $(n^2, n, 1)$) olsun. Teorem 8'den afin düzlemler paralel sınıflara ayrılabilirdir. $(n+1)$ tane paralel sınıfın her biri n tane ayrık blok içerir. Teorem 9'dan farklı paralel sınıflardan herhangi iki blok tam olarak bir ortak nokta da kesişirler. $1 \leq i \leq n+1$ için Π_i deki (i. paralel sınıftaki) bloklar $A_{(i,j)}, 1 \leq j \leq n$ diye adlandırılsın. n. mertebeden elde edilecek Latin kareler $L_1, L_2, ..., L_{n-1}$ diye isimlendirilsin. Bu Latin kareler aşağıdaki formülle oluşturulurlar.

$$1 \leq x \leq n-1, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n; \quad L_x(i,j) = k \Longleftrightarrow A_{n,i} \cap A_{n+1,j} \in A_{x,k} \quad (2.20)$$

Her L_x'in bir Latin kare olduğunu görmek için i. satırda bir k sembolü verildiğinde $L_x(i,j) = k$ olacak şekilde bir tek j sütunu bulunmalıdır. Π_n ve Π_x deki herhangi iki blok bir tek noktada kesiştiği için bir tek $y \in A_{n,i} \cap A_{x,k}$ vardır. O halde Π_{n+1} parelel sınıf olduğundan $y \in A_{n+1,j}$ için bir tek j vardır. Bu yüzden $L_x(i,j) = k$ dır.

j. sütunda bir k sembolü verilsin. $L_x(i,j) = k$ olacak şekilde bir tek i satırı bulunmalıdır. Π_{n+1} ve Π_n deki herhangi iki blok bir tek noktada kesiştiği için bir tek $y \in A_{n+1,j} \cap A_{x,k}$ noktası vardır. Π_n paralel bir sınıf olduğu için $y \in A_{n,i}$ olacak şekilde bir tek i vardır. $L_x(i,j) = k$ dır.

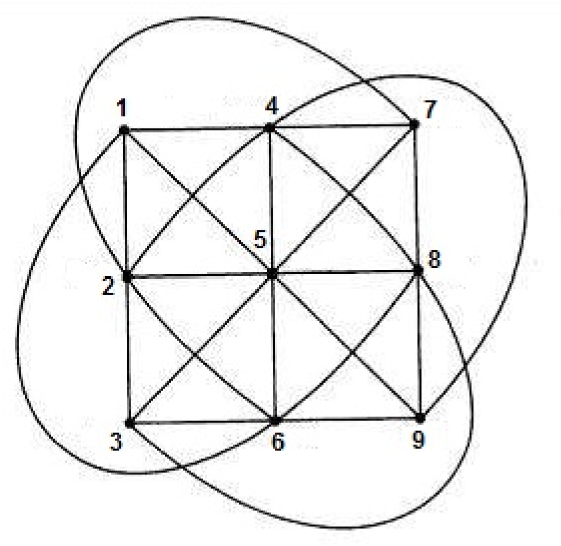
$x \neq y$ ise L_x ve L_y'nin dik olduğunu görmek için k ve l iki sembol iken $L_x(i,j) = k$ ve $L_y(i,j) = l$ olacak şekilde bir tek (i,j) ikilisi bulunmalıdır.

$A_{n,i} \cap A_{n+1,j} \in A_{x,k}$ ve $A_{n,i} \cap A_{n+1,j} \in A_{y,l}$ olduğundan Π_x ve Π_y'deki herhangi iki blok bir tek noktada kesiştiği için bir tek $z \in A_{x,k} \cap A_{y,l}$ noktası vardır. Π_n paralel sınıf olduğu için $z \in A_{n,i}$ olacak şekilde bir tek i vardır. Benzer olarak Π_{n+1} paralel sınıf olduğu için $z \in A_{n+1,j}$ olacak şekilde bir tek j vardır. Sonuç olarak istenilen (i,j) ikilisi bulunur. L_x ve L_y'nin dik olduğu ispatlanmış olur.

Örnek 11. *(Stinson, 2004)* $\mathcal{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$$\mathcal{D} = \{123, 456, 789, 147, 258, 369, 159, 267, 348, 168, 249, 357\}$$

$\mathcal{N}$ noktalar kümesi, $\mathcal{D}$ doğrular kümesi ve $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı ($\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere 3. mertebeden $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ afin düzlemi verilsin. Bu afin düzlem Şekil 2.1 de resmedilir.



Şekil 2.1 3. Mertebeden Afin Düzlem

Bu afin düzlemden karşılıklı dik Latin kareler elde etmek için afin düzlemi paralel alt sınıflara ayıralım. Aşağıdaki gibi blokları isimlendirelim.

$$\begin{array}{llll} A_{1,1}=\{1,2,3\} & A_{2,1}=\{1,4,7\} & A_{3,1}=\{1,5,9\} & A_{4,1}=\{1,6,8\} \\ A_{1,2}=\{4,5,6\} & A_{2,2}=\{2,5,8\} & A_{3,2}=\{2,6,7\} & A_{4,2}=\{2,4,9\} \\ A_{1,3}=\{7,8,9\} & A_{2,3}=\{3,6,9\} & A_{3,3}=\{3,4,8\} & A_{4,3}=\{3,5,7\} \end{array}$$

Denklem (2.20)'den yararlanarak karşılıklı dik Latin karelerimizi oluşturalım.

$x=1$ *için,*

$$L_1(i,j)=k \Longleftrightarrow A_{3,i}\cap A_{4,j}\in A_{1,k} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} (i,j)=(1,1) \Longrightarrow \quad & A_{3,1}\cap A_{4,1}\in A_{1,k} \\ & \{1\}\in A_{1,k} \\ & k=1 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$L_1(1,1)=1$

$$\begin{aligned} (i,j)=(1,2) \Longrightarrow \quad & A_{3,1}\cap A_{4,2}\in A_{1,k} \\ & \{9\}\in A_{1,k} \\ & k=3 \end{aligned} \tag{2.23}$$

$L_1(1,2)=3$

$$\begin{aligned}(i,j)=(1,3)\Longrightarrow\ & A_{3,1}\cap A_{4,3}\in A_{1,k}\\ & \{5\}\in A_{1,k}\\ & k=2\\ L_1(1,3)=2 &\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(2,1)\Longrightarrow\ & A_{3,2}\cap A_{4,1}\in A_{1,k}\\ & \{6\}\in A_{1,k}\\ & k=2\\ L_1(2,1)=2 &\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(2,2)\Longrightarrow\ & A_{3,2}\cap A_{4,2}\in A_{1,k}\\ & \{2\}\in A_{1,k}\\ & k=1\\ L_1(2,2)=1 &\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(2,3)\Longrightarrow\ & A_{3,2}\cap A_{4,3}\in A_{1,k}\\ & \{7\}\in A_{1,k}\\ & k=3\\ L_1(2,3)=3 &\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(3,1)\Longrightarrow\ & A_{3,3}\cap A_{4,1}\in A_{1,k},\\ & \{8\}\in A_{1,k}\\ & k=3\\ L_1(3,1)=3 &\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(3,2)\Longrightarrow\ & A_{3,3}\cap A_{4,2}\in A_{1,k}\\ & \{4\}\in A_{1,k}\\ & k=2\\ L_1(3,2)=2 &\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(3,3)\Longrightarrow\ & A_{3,3}\cap A_{4,3}\in A_{1,k}\\ & \{3\}\in A_{1,k}\\ & k=1\\ L_1(3,3)=1 &\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$L_1=\begin{matrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{matrix}$$

$x=2$ *için,*

$$L_2(i,j)=k\Longleftrightarrow A_{3,i}\cap A_{4,j}\in A_{2,k} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(1,1)\Longrightarrow\quad & A_{3,1}\cap A_{4,1}\in A_{2,k}\\ & \{1\}\in A_{2,k}\\ & k=1\end{aligned}\tag{2.32}$$
$$L_2\left(1,1\right)=1$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(2,1)\Longrightarrow\quad & A_{3,2}\cap A_{4,1}\in A_{2,k},\\ & \{6\}\in A_{2,k}\\ & k=3\end{aligned}\tag{2.33}$$
$$L_2\left(2,1\right)=3$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(3,1)\Longrightarrow\quad & A_{3,3}\cap A_{4,1}\in A_{2,k}\\ & \{8\}\in A_{2,k}\\ & k=2\end{aligned}\tag{2.34}$$
$$L_2\left(3,1\right)=2$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(1,2)\Longrightarrow\quad & A_{3,1}\cap A_{4,2}\in A_{2,k}\\ & \{9\}\in A_{2,k}\\ & k=3\end{aligned}\tag{2.35}$$
$$L_2\left(1,2\right)=3$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(2,2)\Longrightarrow\quad & A_{3,2}\cap A_{4,2}\in A_{2,k}\\ & \{2\}\in A_{2,k}\\ & k=2\end{aligned}\tag{2.36}$$
$$L_2\left(2,2\right)=2$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(3,2)\Longrightarrow\quad & A_{3,3}\cap A_{4,2}\in A_{2,k}\\ & \{4\}\in A_{2,k}\\ & k=1\end{aligned}\tag{2.37}$$
$$L_2\left(3,2\right)=1$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(1,3)\Longrightarrow\quad & A_{3,1}\cap A_{4,3}\in A_{2,k}\\ & \{5\}\in A_{2,k}\\ & k=2\end{aligned}\tag{2.38}$$
$$L_2\left(1,3\right)=2$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(2,3)\Longrightarrow\quad & A_{3,2}\cap A_{4,3}\in A_{2,k}\\ & \{7\}\in A_{2,k}\\ & k=1\end{aligned}\tag{2.39}$$
$$L_2\left(2,3\right)=1$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(3,3) \Longrightarrow\ & A_{3,3}\cap A_{4,3}\in A_{2,k}\\ & \{3\}\in A_{2,k}\\ & k=3\end{aligned} \tag{2.40}$$
$$L_2\,(3,3)=3$$

$$L_2=\begin{array}{ccc}1&3&2\\3&2&1\\2&1&3\end{array}$$

Örnek 12. $\mathcal{N}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$

$\mathcal{D}=\{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{9,10,11,12\},\{13,14,15,16\},\{1,5,9,13\},\{2,6,10,14\},$
$\{3,7,11,15\},\{4,8,12,16\},\{1,6,11,16\},\{2,5,12,15\},\{3,8,9,14\},\{4,7,10,13\},$
$\{1,7,12,14\},\{2,8,11,13\},\{3,5,10,16\},\{4,6,9,15\},\{1,8,10,15\},\{2,7,9,16\},$
$\{3,6,12,13\},\{4,5,11,14\}\}$

$\mathcal{N}$ noktalar kümesi, $\mathcal{D}$ doğrular kümesi ve $\circ$ da $\mathcal{N}\times\mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı ($\circ\subset\mathcal{N}\times\mathcal{D}$) olmak üzere 4. mertebeden $(\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ afin düzlemi verilsin. Bu afin düzlemden karşılıklı dik Latin kareler elde etmek için afin düzlemi paralel alt sınıflara ayıralım. Aşağıdaki gibi blokları isimlendirelim.

$$\begin{array}{lll}A_{1,1}=\{1,2,3,4\} & A_{2,1}=\{1,5,9,13\} & A_{3,1}=\{1,6,11,16\}\\ A_{1,2}=\{5,6,7,8\} & A_{2,2}=\{2,6,10,14\} & A_{3,2}=\{2,5,12,15\}\\ A_{1,3}=\{9,10,11,12\} & A_{2,3}=\{3,7,11,15\} & A_{3,3}=\{3,8,9,14\}\\ A_{1,4}=\{13,14,15,16\} & A_{2,4}=\{4,8,12,16\} & A_{3,4}=\{4,7,10,13\}\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}A_{4,1}=\{1,7,12,14\} & A_{5,1}=\{1,8,10,15\}\\ A_{4,2}=\{2,8,11,13\} & A_{5,2}=\{2,7,9,16\}\\ A_{4,3}=\{3,5,10,16\} & A_{5,3}=\{3,6,12,13\}\\ A_{4,4}=\{4,6,9,15\} & A_{5,4}=\{4,5,11,14\}\end{array}$$

Denklem (2.20)'den yararlanarak karşılıklı dik Latin karelerimizi oluşturalım.

$x=1$ *için,*

$$L_1\,(i,j)=k \Longleftrightarrow A_{4,i}\cap A_{5,j}\in A_{1,k} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(1,1) \Longrightarrow\ & A_{4,1}\cap A_{5,1}\in A_{1,k}\\ & \{1\}\in A_{1,k}\\ & k=1\end{aligned} \tag{2.42}$$
$$L_1\,(1,1)=1$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(1,2)\Longrightarrow\;& A_{4,1}\cap A_{5,2}\in A_{1,k}\\ & \{7\}\in A_{1,k}\\ & k=2\\ L_1\left(1,2\right)=2 &\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(1,3)\Longrightarrow\;& A_{4,1}\cap A_{5,3}\in A_{1,k}\\ & \{12\}\in A_{1,k}\\ & k=3\\ L_1\left(1,3\right)=3 &\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(1,4)\Longrightarrow\;& A_{4,1}\cap A_{5,4}\in A_{1,k}\\ & \{14\}\in A_{1,k}\\ & k=4\\ L_1\left(1,4\right)=4 &\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(2,1)\Longrightarrow\;& A_{4,2}\cap A_{5,1}\in A_{1,k}\\ & \{8\}\in A_{1,k}\\ & k=2\\ L_1\left(2,1\right)=2 &\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(2,2)\Longrightarrow\;& A_{4,2}\cap A_{5,2}\in A_{1,k}\\ & \{2\}\in A_{1,k}\\ & k=1\\ L_1\left(2,2\right)=1 &\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(2,3)\Longrightarrow\;& A_{4,2}\cap A_{5,3}\in A_{1,k}\\ & \{13\}\in A_{1,k}\\ & k=4\\ L_1\left(2,3\right)=4 &\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(2,4)\Longrightarrow\;& A_{4,2}\cap A_{5,4}\in A_{1,k}\\ & \{11\}\in A_{1,k}\\ & k=3\\ L_1\left(2,4\right)=3 &\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(3,1)\Longrightarrow\;& A_{4,3}\cap A_{5,1}\in A_{1,k}\\ & \{10\}\in A_{1,k}\\ & k=3\\ L_1\left(3,1\right)=3 &\end{aligned} \tag{2.50}$$

$x = 2$ *için,*

$$\begin{aligned}(i,j) = (3,2) \Longrightarrow \quad & A_{4,3} \cap A_{5,2} \in A_{1,k} \\ & \{16\} \in A_{1,k} \\ & k = 4 \\ L_1(3,2) = 4 &\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (3,3) \Longrightarrow \quad & A_{4,3} \cap A_{5,3} \in A_{1,k} \\ & \{3\} \in A_{1,k} \\ & k = 1 \\ L_1(3,3) = 1 &\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (3,4) \Longrightarrow \quad & A_{4,3} \cap A_{5,4} \in A_{1,k} \\ & \{5\} \in A_{1,k} \\ & k = 2 \\ L_1(3,4) = 2 &\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (4,1) \Longrightarrow \quad & A_{4,4} \cap A_{5,1} \in A_{1,k} \\ & \{15\} \in A_{1,k} \\ & k = 4 \\ L_1(4,1) = 4 &\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (4,2) \Longrightarrow \quad & A_{4,4} \cap A_{5,2} \in A_{1,k} \\ & \{9\} \in A_{1,k} \\ & k = 3 \\ L_1(4,2) = 3 &\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (4,3) \Longrightarrow \quad & A_{4,4} \cap A_{5,3} \in A_{1,k} \\ & \{6\} \in A_{1,k} \\ & k = 2 \\ L_1(4,3) = 2 &\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (4,4) \Longrightarrow \quad & A_{4,4} \cap A_{5,4} \in A_{1,k} \\ & \{4\} \in A_{1,k} \\ & k = 1 \\ L_1(4,4) = 1 &\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$L_1 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$x = 2$ *için,*

$$L_2(i,j) = k \Longleftrightarrow A_{4,i} \cap A_{5,j} \in A_{2,k} \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (1,1) \Longrightarrow \quad & A_{4,1} \cap A_{5,1} \in A_{2,k} \\ & \{1\} \in A_{2,k} \\ & k = 1 \\ L_2\,(1,1) = 1 &\end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (1,2) \Longrightarrow \quad & A_{4,1} \cap A_{5,2} \in A_{2,k} \\ & \{7\} \in A_{2,k} \\ & k = 3 \\ L_2\,(1,2) = 3 &\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (1,3) \Longrightarrow \quad & A_{4,1} \cap A_{5,3} \in A_{2,k} \\ & \{12\} \in A_{2,k} \\ & k = 4 \\ L_2\,(1,3) = 4 &\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (1,4) \Longrightarrow \quad & A_{4,1} \cap A_{5,4} \in A_{2,k} \\ & \{14\} \in A_{2,k} \\ & k = 2 \\ L_2\,(1,4) = 2 &\end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (2,1) \Longrightarrow \quad & A_{4,2} \cap A_{5,1} \in A_{2,k} \\ & \{8\} \in A_{2,k} \\ & k = 4 \\ L_2\,(2,1) = 4 &\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (2,2) \Longrightarrow \quad & A_{4,2} \cap A_{5,2} \in A_{2,k} \\ & \{2\} \in A_{2,k} \\ & k = 2 \\ L_2\,(2,2) = 2 &\end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (2,3) \Longrightarrow \quad & A_{4,2} \cap A_{5,3} \in A_{2,k} \\ & \{13\} \in A_{2,k} \\ & k = 1 \\ L_2\,(2,3) = 1 &\end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}(i,j) = (2,4) \Longrightarrow \quad & A_{4,2} \cap A_{5,4} \in A_{2,k} \\ & \{11\} \in A_{2,k} \\ & k = 3 \\ L_2\,(2,4) = 3 &\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(3,1)\implies\ & A_{4,3}\cap A_{5,1}\in A_{2,k}\\ & \{10\}\in A_{2,k}\\ & k=2\\ L_2\left(3,1\right)=2 &\end{aligned}\tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(3,2)\implies\ & A_{4,3}\cap A_{5,2}\in A_{2,k}\\ & \{16\}\in A_{2,k}\\ & k=4\\ L_2\left(3,2\right)=4 &\end{aligned}\tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(3,3)\implies\ & A_{4,3}\cap A_{5,3}\in A_{2,k}\\ & \{3\}\in A_{2,k}\\ & k=3\\ L_2\left(3,3\right)=3 &\end{aligned}\tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(3,4)\implies\ & A_{4,3}\cap A_{5,4}\in A_{2,k}\\ & \{5\}\in A_{2,k}\\ & k=1\\ L_2\left(3,4\right)=1 &\end{aligned}\tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(4,1)\implies\ & A_{4,4}\cap A_{5,1}\in A_{2,k}\\ & \{15\}\in A_{2,k}\\ & k=3\\ L_2\left(4,1\right)=3 &\end{aligned}\tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(4,2)\implies\ & A_{4,4}\cap A_{5,2}\in A_{2,k}\\ & \{9\}\in A_{2,k}\\ & k=1\\ L_2\left(4,2\right)=1 &\end{aligned}\tag{2.72}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(4,3)\implies\ & A_{4,4}\cap A_{5,3}\in A_{2,k}\\ & \{6\}\in A_{2,k}\\ & k=2\\ L_2\left(4,3\right)=2 &\end{aligned}\tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}(i,j)=(4,4)\implies\ & A_{4,4}\cap A_{5,4}\in A_{2,k}\\ & \{4\}\in A_{2,k}\\ & k=4\\ L_2\left(4,4\right)=4 &\end{aligned}\tag{2.74}$$

$$L_2 = \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{matrix}$$

L_2 karşılıklı dik Latin karesi elde edilir. Bu Latin kare standart formda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$L_2 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$x = 3$ ***için,***

$$L_3(i,j) = k \Longleftrightarrow A_{4,i} \cap A_{5,j} \in A_{3,k} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned} (i,j) = (1,1) \Longrightarrow \quad & A_{4,1} \cap A_{5,1} \in A_{3,k} \\ & \{1\} \in A_{3,k} \\ & k = 1 \end{aligned} \tag{2.76}$$

$L_3(1,1) = 1$

$$\begin{aligned} (i,j) = (1,2) \Longrightarrow \quad & A_{4,1} \cap A_{5,2} \in A_{3,k} \\ & \{7\} \in A_{3,k} \\ & k = 4 \end{aligned} \tag{2.77}$$

$L_3(1,2) = 4$

$$\begin{aligned} (i,j) = (1,3) \Longrightarrow \quad & A_{4,1} \cap A_{5,3} \in A_{3,k} \\ & \{12\} \in A_{3,k} \\ & k = 2 \end{aligned} \tag{2.78}$$

$L_3(1,3) = 2$

$$\begin{aligned} (i,j) = (1,4) \Longrightarrow \quad & A_{4,1} \cap A_{5,4} \in A_{3,k} \\ & \{14\} \in A_{3,k} \\ & k = 3 \end{aligned} \tag{2.79}$$

$L_3(1,4) = 3$

$$\begin{aligned} (i,j) = (2,1) \Longrightarrow \quad & A_{4,2} \cap A_{5,1} \in A_{3,k} \\ & \{8\} \in A_{3,k} \\ & k = 3 \end{aligned} \tag{2.80}$$

$L_3(2,1) = 3$

$$\begin{aligned} (i,j) = (2,2) \Longrightarrow \quad & A_{4,2} \cap A_{5,2} \in A_{3,k} \\ & \{2\} \in A_{3,k} \\ & k = 2 \\ L_3\,(2,2) = 2 & \end{aligned} \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned} (i,j) = (2,3) \Longrightarrow \quad & A_{4,2} \cap A_{5,3} \in A_{3,k} \\ & \{13\} \in A_{3,k} \\ & k = 4 \\ L_3\,(2,3) = 4 & \end{aligned} \tag{2.82}$$

$$\begin{aligned} (i,j) = (2,4) \Longrightarrow \quad & A_{4,2} \cap A_{5,4} \in A_{3,k} \\ & \{11\} \in A_{3,k} \\ & k = 1 \\ L_3\,(2,4) = 1 & \end{aligned} \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned} (i,j) = (3,1) \Longrightarrow \quad & A_{4,3} \cap A_{5,1} \in A_{3,k} \\ & \{10\} \in A_{3,k} \\ & k = 4 \\ L_3\,(3,1) = 4 & \end{aligned} \tag{2.84}$$

$$\begin{aligned} (i,j) = (3,2) \Longrightarrow \quad & A_{4,3} \cap A_{5,2} \in A_{3,k} \\ & \{16\} \in A_{3,k} \\ & k = 1 \\ L_3\,(3,2) = 1 & \end{aligned} \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned} (i,j) = (3,3) \Longrightarrow \quad & A_{4,3} \cap A_{5,3} \in A_{3,k} \\ & \{3\} \in A_{3,k} \\ & k = 3 \\ L_3\,(3,3) = 3 & \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned} (i,j) = (3,4) \Longrightarrow \quad & A_{4,3} \cap A_{5,4} \in A_{3,k} \\ & \{5\} \in A_{3,k} \\ & k = 2 \\ L_3\,(3,4) = 2 & \end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned} (i,j) = (4,1) \Longrightarrow \quad & A_{4,4} \cap A_{5,1} \in A_{3,k} \\ & \{15\} \in A_{3,k} \\ & k = 2 \\ L_3\,(4,1) = 2 & \end{aligned} \tag{2.88}$$

$$
\begin{aligned}
(i,j)=(4,2) \Longrightarrow \quad & A_{4,4}\cap A_{5,2}\in A_{3,k} \\
& \{9\}\in A_{3,k} \\
& k=3
\end{aligned} \tag{2.89}
$$

$$L_3\,(4,2)=3$$

$$
\begin{aligned}
(i,j)=(4,3) \Longrightarrow \quad & A_{4,4}\cap A_{5,3}\in A_{3,k} \\
& \{6\}\in A_{3,k} \\
& k=1
\end{aligned} \tag{2.90}
$$

$$L_3\,(4,3)=1$$

$$
\begin{aligned}
(i,j)=(4,4) \Longrightarrow \quad & A_{4,4}\cap A_{5,4}\in A_{3,k} \\
& \{4\}\in A_{3,k} \\
& k=4
\end{aligned} \tag{2.91}
$$

$$L_3\,(4,4)=4$$

$$
L_3=\begin{matrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{matrix}
$$

L_3 karşılıklı dik Latin karesi elde edilir. Bu latin kare standart formda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$
L_3=\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{matrix}
$$

2.6 MOLS’dan Afin Düzlem Elde Etme

q. mertebeden MOLS’ların tamamı kullanılarak q. mertebeden afin düzlem elde edilebilir. $L_1, L_2, ..., L_{q-1}$ n. mertebeden MOLS’ların kümesi olsun ve bir $q \times q$ matrisi q^2 farklı sembol içersin. (Afin düzlemin noktaları) q^2 kümesindeki semboller (afin düzlemin doğruları) q boyutunda kümeler şeklinde aşağıdaki gibi tanımlanır. A, sembollerin ilk satırı oluşturduğu ve daha sonraki her satıra mertebe eklenerek oluşturulan matris olmak üzere A’nın satırlarında ve sütunlarında q kümeleri vardır. Kalan $q^2 - q$ küme MOLS’lara aynı işlem uygulanarak bulunur.

Örnek 13. 3. *mertebeden karşılıklı dik Latin kareleri kullanarak afin düzlem elde etme.*

$$
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}
$$

Yukarıda gösterilen latin kareler 3*. mertebeden karşılıklı dik Latin karelerdir.*

$1\ 2\ 3$ *satırını alıp her terime* 3 *ekleyerek* 3×3*'lük* A *matrisi elde edilir.*

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

Yukarıdaki matrisin satır ve sütunlarından $\{1,2,3\}$*,* $\{4,5,6\}$*,* $\{7,8,9\}$*,* $\{1,4,7\}$*,* $\{2,5,8\}$*,* $\{3,6,9\}$ *doğruları elde edilir.*

Birinci karşılıklı dik Latin kare kullanılarak aşağıdaki matris elde edilir.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 7 \end{matrix}$$

Bu matristen $\{1,6,8\}$*,* $\{2,4,9\}$ *,* $\{3,5,7\}$ *doğruları elde edilir.*

İkinci karşılıklı dik Latin kare kullanılarak aşağıdaki matris elde edilir.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{matrix}$$

Bu matristen $\{1,5,9\}$*,* $\{2,6,7\}$ *,* $\{3,4,8\}$ *doğruları elde edilir.*

Dolayısıyla, noktalar kümesi $\mathcal{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *ve doğrular kümesi*

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \quad & \{\{1,2,3\}, & \{4,5,6\}, & \quad \{7,8,9\}, & \{1,4,7\}, \\ & \{2,5,8\}, & \{3,6,9\}, & \quad \{1,6,8\}, & \{2,4,9\}, \\ & \{3,5,7\}, & \{1,5,9\}, & \quad \{2,6,7\}, & \{3,4,8\}\} \end{aligned}$$

olan 3. mertebeden afin düzlem elde edilir.

Örnek 14. *(U.C.Denver, 2016)* 4*. mertebeden karşılıklı dik Latin kareleri kullanarak afin düzlem elde etme.* 4*. mertebeden 3 tane karşılıklı dik Latin kare vardır. Bunlar şunlardır:*

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix}$$

1 2 3 4 *satırını alıp her terime* 4 *ekleyerek* 4×4*'lük* A *matrisi elde edilir.*

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{matrix}$$

A *matrisindeki sütunlar ve satırlar afin düzlemin bazı doğrularını verir. Bu doğrular şunlardır :*

$\{1, 2, 3, 4, \}$, $\{5, 6, 7, 8\}$, $\{9, 10, 11, 12\}$, $\{13, 14, 15, 16\}$,

$\{1, 5, 9, 13\}$, $\{2, 6, 10, 14\}$, $\{3, 7, 11, 15\}$, $\{4, 8, 12, 16\}$.

Yani, 8 *tane doğru elde edilir.*

Birinci karşılıklı dik Latin kareyi kullanarak bir kaç doğru daha elde edebiliriz. İlk satır sabit olmak üzere 2. *satıra* 4*,* 3. *satıra* 8 *ve* 4. *satıra* 12 *ekleyerek elde edilen matrisin satır ve sütunları afin düzlemin birkaç doğrusunu daha verir.*

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 11 & 12 & 9 & 10 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{matrix}$$

Matrisin sütunlarından elde edilen doğrular şunlardır: $\{1, 6, 11, 16\}$*,* $\{2, 5, 12, 15\}$*,* $\{3, 8, 9, 14\}$*,* $\{4, 7, 10, 13\}$. *Satırlarındaki doğrular daha önce elde edilmişti.*

Diğer iki karşılıklı dik Latin kareyede aynı işlem uygulanılarak kalan doğrular elde edilir.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 14 & 13 & 16 & 15 \end{matrix}$$

$\{1, 7, 12, 14\}$, $\{2, 8, 11, 13\}$, $\{3, 5, 10, 16\}$, $\{4, 6, 9, 15\}$ *doğruları elde edilir.*

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 10 & 9 & 12 & 11 \\ 15 & 16 & 13 & 14 \end{matrix}$$

$\{1, 8, 10, 15\}$, $\{2, 7, 9, 16\}$, $\{3, 6, 12, 13\}$, $\{4, 5, 11, 14\}$ *doğruları elde edilir.*

Dolayısıyla noktalar kümesi ve $\mathcal{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$ *doğrular kümesi*

$$\begin{array}{rlllll} \mathcal{D} = & \{\{1,2,3,4\}, & \{5,6,7,8\}, & \{9,10,11,12\}, & \{13,14,15,16\}, & \{1,5,9,13\}, \\ & \{2,6,10,14\}, & \{3,7,11,15\}, & \{4,8,12,16\}, & \{1,6,11,16\}, & \{2,5,12,15\}, \\ & \{3,8,9,14\}, & \{4,7,10,13\}, & \{1,7,12,14\}, & \{2,8,11,13\}, & \{3,5,10,16\}, \\ & \{4,6,9,15\}, & \{1,8,10,15\}, & \{2,7,9,16\}, & \{3,6,12,13\}, & \{4,5,11,14\}\} \end{array}$$

olan 4. mertebeden afin düzlem elde edilir.

Teorem 10. *(Stinson, 2004)* $n \geq 2$ *olsun. Aşağıdaki tanımlar eşdeğerdir.*

1) $n-1MOLS(n)$

2) n*. mertebeden bir afin düzlem*

3) n*. mertebeden bir projektif düzlem*

3. EN KÜÇÜK PROJEKTİF DÜZLEM

Bu bölümde projektif düzlemlerle ilgili bazı temel kavramlar ve 2. mertebeden projektif düzlem olan Fano düzleminin etiketlenmiş kombinasyonları verilecektir.

Tanım 11. *(Kaya, 2005) $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme (yani $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme) ve $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen P1, P2 ve P3 aksiyomlarını gerçekleyen ($\mathcal{N}$,$\mathcal{D}$, $\circ$) sistemine bir* ***projektif düzlem*** *denir.*

P1: Her $M, N \in \mathcal{N}$, $M \neq N$ için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır. Yani farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.

P2: Her $c, d \in \mathcal{D}$, için $N \circ c$ ve $N \circ d$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır. Yani iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

P3: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Tanım 12.*(Kaya,2005) S bir projektif düzleme ilişkin herhengi bir ifade olsun. S'de "nokta"sözcüğü yerine "doğru", ve "doğru"sözcüğü yerine "nokta"koyarak bulunan yeni ifadeye S'nin* ***dual ifadesi*** *denir ve bu S^* ile gösterilir.*

Teorem 11. *(Kaya, 2005) Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir projektif düzlem vardır.*

İspat. *F verilen bir cisim olsun. $x_1, x_2, x_3 \in F$ ve x_1, x_2, x_3 hepsi aynı anda sıfır olmamak koşuluyla (x_1, x_2, x_3) sıralı üçlüsünü bir nokta olarak düşünelim. Üstelik bu üçlü ile orantılı bütün üçlüler yine bu noktayı göstersinler. Yani $\forall\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$ için; $\lambda(x_1, x_2, x_3) \equiv (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ üçlüsü (x_1, x_2, x_3)'ün gösterdiği noktayı göstersin. Dolayısıyla F'nin eleman sayısı sonlu ve bu sayı n ise $n - 1$ tane üçlü aynı noktayı gösterecektir. Bunu $(x_1, x_2, x_3) \equiv \lambda(x_1, x_2, x_3)$ yazarak ifade edeceğiz. Böylece*

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = \{ & (x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in F, (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0), \\ & (x_1, x_2, x_3) \equiv \lambda(x_1, x_2, x_3), \lambda \in F, \lambda \neq 0 \} \end{aligned} \tag{3.1}$$

olur.

Buna dual olarak $a_1, a_2, a_3 \in F$ ve a_1, a_2, a_3 hepsi birden sıfır olmamak koşulu altında her $[a_1, a_2, a_3]$ üçlüsü ve bu üçlüyle orantılı olan bütün üçlüler aynı bir doğru olarak tanımlansın. Böylece;

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \{ & [a_1, a_2, a_3] : a_1, a_2, a_3 \in F, [a_1, a_2, a_3] \neq [0, 0, 0], \\ & [a_1, a_2, a_3] \equiv \lambda [a_1, a_2, a_3], \lambda \in F, \lambda \neq 0\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

olur.

(Doğru ve noktalara karşı tutulan böyle üçlülere, ilgili doğru yada nokta'nın homogen koordinatları denir.) Besbelli burada $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ aynı kümelerdir. Ama onların birbirinden farklı ve hatta ayrık olması zorunlu kullanılan adi ve köşeli parantezler yardımı ile sağlanmaktadır. (x_1, x_2, x_3) noktasının $[a_1, a_2, a_3]$ doğrusu üzerinde olması şöyle tanımlansın:

$$(x_1, x_2, x_3) \circ [a_1, a_2, a_3] \Longleftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{3.3}$$

Şimdi bu $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sisteminin projektif düzlem olduğunu gösterelim. Önce üzerinde bulunma bağıntısının bir nokta ve doğruyu gösteren üçlülerin seçiminden bağımsız olduğunu görelim. $\lambda, \mu \in F, \lambda \neq 0 \neq \mu$ için cisim özellikleri ve $\circ$ bağıntısının tanımı gereğince

$$\begin{aligned} (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \circ [\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3] & \Longleftrightarrow (\mu a_1)(\lambda x_1) + (\mu a_2)(\lambda x_2) + (\mu a_3)(\lambda x_3) = 0 && (3.4) \\ & \Longleftrightarrow (\lambda\mu)(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = 0 && (3.5) \\ & \Longleftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 && (3.6) \\ & \Longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \circ [a_1, a_2, a_3] && (3.7) \end{aligned}$$

bulunur ki bu da isteneni verir.

P_1 aksiyomunu gerçekleyelim. $N = (x_1, x_2, x_3)$ ve $M = (y_1, y_2, y_3)$ farklı iki nokta olsun. $[a_1, a_2, a_3]$ doğrusu bu iki noktadan geçiyorsa

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \tag{3.8}$$

$$a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0 \tag{3.9}$$

denklemleri sağlanır. Bütün x_i'ler sıfır olamayacağı için x_1, x_2, x_3'ten en az birinin, örneğin x_1'in sıfırdan farklı olduğunun kabulü genelliği bozmaz.

$x_1 \neq 0$ olsun. $x_1 \neq 0$ ise $\exists x_1^{-1} \in F$ olduğundan (3.8) denkleminden

$$a_1 = -(a_2x_2 + a_3x_3)\, x_1^{-1} \tag{3.10}$$

denklemi bulunur. Bu (3.9). denklemde kullanılırsa

$$\begin{aligned} -\left(a_2x_2+a_3x_3\right)x_1^{-1}y_1+a_2y_2+a_3y_3 &= 0 \quad (3.11)\\ -a_2x_2x_1^{-1}y_1-a_3x_3x_1^{-1}y_1+a_2y_2+a_3y_3 &= 0 \quad (3.12)\\ a_2\left(y_2-y_1x_2x_1^{-1}\right)+a_3\left(y_3-y_1x_3x_1^{-1}\right) &= 0 \quad (3.13)\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Burada

$$k=y_2-y_1x_2x_1^{-1} \quad (3.14)$$

ve

$$h=y_3-y_1x_3x_1^{-1} \quad (3.15)$$

diyelim.

Eğer $h=k=0$ *ise* $y_3=\left(y_1x_1^{-1}\right)x_3$ $y_2=\left(y_1x_1^{-1}\right)x_2$ *olur. Oysa* $y_1=\left(y_1x_1^{-1}\right)x_1$ *yazılabileceğinden* $i=1,2,3$ *için* $y_i=\left(y_1x_1^{-1}\right)x_i$ *elde edilir ki bu* (x_1,x_2,x_3) *ve* (y_1,y_2,y_3)*'ün farklı nokta olarak alınışlarıyla çelişir. Dolayısıyla* k *ve* h *birlikte sıfır olamazlar. Eğer yalnız* $k=0$ *ise (3.13) denklemi için* $a_3=0$*, (*a_2 *keyfi ama sıfır değil) bir çözüm olur. Bunlar (3.10) denkleminde kullanılırsa*

$$a_1=\left(-x_2x_1^{-1}\right)a_2 \quad (3.16)$$

bulunur.

Dolayısıyla $a_2\left[-x_2x_1^{-1},1,0\right]$ *istenen biricik doğrudur; çünkü* a_2 *ne olursa olsun bu üçlüler orantılıdır. Benzer şekilde* $k\neq 0$ *fakat* $h=0$ *ise istenen doğru* $a_3\neq 0$ *olmak üzere* $a_3\left[-x_3x_1^{-1},0,1\right]$ *üçlüsüyle temsil edilir. Son olarak* $k\neq 0\neq h$ *ise* $a_3\in F$*,* $a_3\neq 0$ *olmak üzere (3.13). denklemden*

$$\begin{aligned} a_2k+a_3h &= 0 \quad (3.17)\\ a_2k &= -a_3h \quad (3.18)\\ a_2 &= -a_3hk^{-1} \quad (3.19)\end{aligned}$$

ve (3.10). denklemden

$$\begin{aligned} a_1 &= -\left(a_2x_2+a_3x_3\right)x_1^{-1} \quad (3.20)\\ a_1 &= -\left(-a_3hk^{-1}x_2+a_3x_3\right)x_1^{-1} \quad (3.21)\\ a_1 &= a_3\left(hk^{-1}x_2-x_3\right)x_1^{-1} \quad (3.22)\end{aligned}$$

bulunur ki bu da $[a_1,a_2,a_3]$*'in*

$$\begin{aligned} &\left[a_3\left(hk^{-1}x_2+x_3\right)x_1^{-1},-a_3hk^{-1},a_3\right] \quad (3.23)\\ &a_3\left[hk^{-1}x_2x_1^{-1}+x_3x_1^{-1},-hk^{-1},1\right] \quad (3.24)\\ &a_3k^{-1}\left[hx_2x_1^{-1}+x_3x_1^{-1}k,-h,k\right] \quad (3.25)\\ &a_3k^{-1}x_1^{-1}\left[hx_2+x_3k,-hx_1,kx_1\right] \quad (3.26)\end{aligned}$$

$$a_3k^{-1}x_1^{-1}\left[y_3x_2 - y_1x_3x_2x_1^{-1} - x_3y_2 + x_3y_1x_2x_1^{-1}, -y_3x_1 + y_1x_3, y_2x_1 - y_1x_2\right] \quad (3.27)$$

$$a_3k^{-1}x_1^{-1}\left[x_2y_3 - y_2x_3, x_3y_1 - y_3x_1, x_1y_2 - y_1x_2\right] \quad (3.28)$$

orantılı üçlüleriyle gösterilen biricik doğru olduğunu gösterir. Böylece $P1$ *aksiyomunun sağlandığı görülür.*

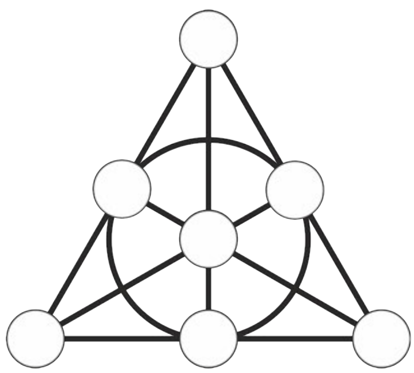
Doğrular da noktalar gibi koordinatlandığı için farklı iki doğru üzerinde bir tek nokta bulunduğu aynı yolla ispatlanır. Bu $P2$ *aksiyomundan daha kuvvetlidir. Bu düzlemlerde* $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)$ *noktalarını düşünelim.* F *cisminde* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $x + y + z = 0$ *denklemlerinden herhangi üçünü sağlayan ve bir doğru belirtmeyen* $[0,0,0]$*'dan başka çözüm olmadığı için bu noktalardan herhangi üçü doğrudaş olamaz. Dolayısıyla* $P3$ *sağlanır.*

Tanım 13. *(Kaya,2005)* F *cismi yardımıyla tanımlanan bu projektif düzlemlere* ***cisim düzlemleri*** *denir ve genel olarak* P_2F *ile gösterilir.*

Tanım 14.*(Kaya,2005) Sonlu sayıda eleman içeren bir cisim,* ***sonlu cisim*** *olarak adlandırılır. Örneğin,* n *tamsayı modülü* Z_n *ile gösterildiğinde,* $(mod n)$*'de yapılan standart toplama ve çarpma işlemlerine göre* Z_n *sonlu bir cisimdir.*

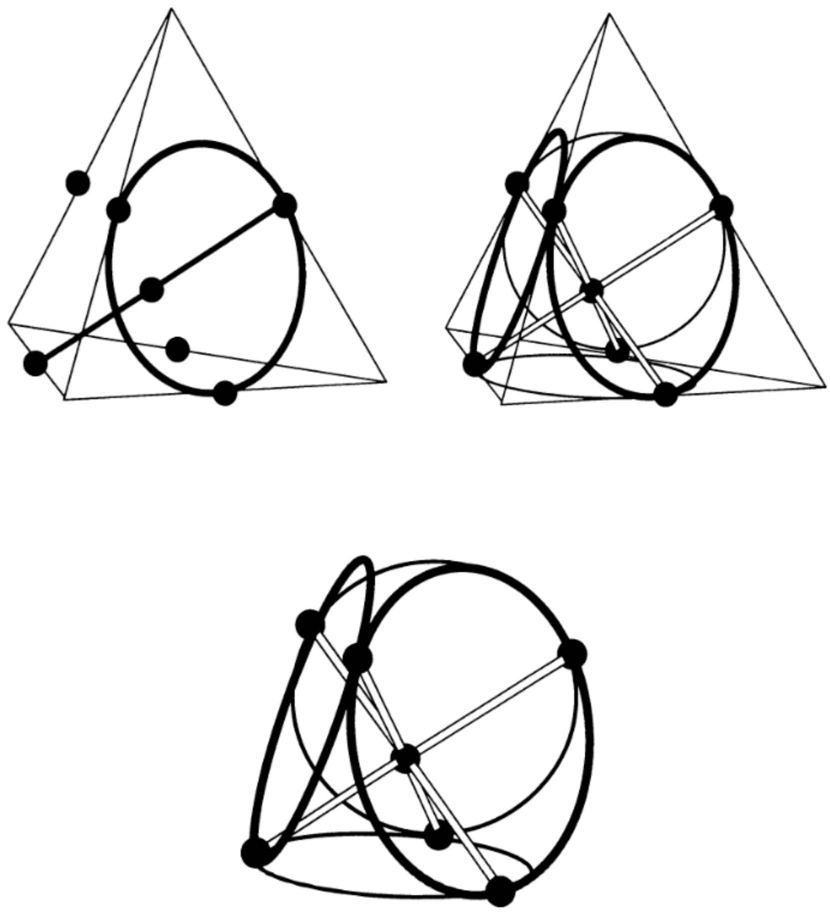
3.1 Fano Düzlemi İçin Modeller

Z_2 cismi ile ilişkilendirilen en küçük projektif düzlem Fano düzlemidir. Fano düzlemi 7 nokta ve 7 doğruya sahiptir. Her doğru tam olarak 3 nokta içerir. Her nokta tam olarak 3 doğru üzerinde bulunur. Fano düzleminin klasik resmi Şekil 3.1 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Fano Düzleminin Klasik Resmi

MODEL 1: 2. mertebeden projektif düzlem farklı kavramlar kullanılarak elde edilebilir. Dörtyüzlü de noktaları ve doğruları aşağıdaki gibi tanımlayarak bu modeli düşünebiliriz. Noktalar, dörtyüzlünün merkezi ve dörtyüzlünün altı kenarının merkezidir. Doğrular, karşıt kenarların merkezlerini birleştiren doğru parçaları ve her nokta üç doğru üzerinde bulunur prensibi ile elde edilen çemberlerdir. Fano düzleminin bu uzaysal modeline ise **stereogram** denir. Bu model Şekil 3.2 de resmedilmiştir. (Polster, 1998b)



Şekil 3.2 Fano Düzleminin Uzaysal Modeli Stereogram (Polster, 1998a)

Tanım 15. *(Wikipedia, 2016c) Bir nesnenin (resim, sembol, vb.)* ***simetri grubu****, nesnenin grup işlemleri ile olduğu gibi bileşke altında da değişmez kaldığı bütün dönüşüm gruplarıdır.*

Tanım 16. *(Kaya, 2005)* $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *ve* $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ *herhangi iki geometrik yapı olsun. Eğer* $f : \mathcal{N} \cup \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{N}' \cup \mathcal{D}'$ *fonksiyonu*

(1) $f(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}'$

(2) $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}'$

(3) Her $N \in \mathcal{N}, d \in \mathcal{D}$ *ve* $N \circ d \Longrightarrow f(N) \circ' f(d)$

koşullarını da sağlıyorsa f *ye* $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *dan* $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ *ye bir* ***homomorfizm*** *denir. Birebir ve örten özelliği bulunan homomorfizme* ***izomorfizm*** *denir. Bir geometrik yapıyı kendisine dönüştüren izomorfizme de* ***kolinasyon*** *veya* ***otomorfizm*** *denir.*

Tanım 17. *(Wikipedia, 2016a) Dörtyüzlünün her simetrisi geometrinin otomorfizmalarına dönüşür. Dörtyüzlünün simetri grubu 24. mertebedendir. Simetri grubu izomorfiklerinden oluşur. Bunlar şöyle kategorilendirilebilir:*

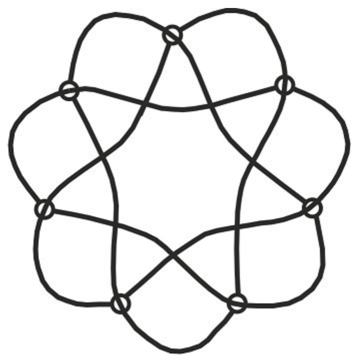
. Özdeşlik

. Bir köşeden geçen ve karşı yüze dik bir eksen etrafında ± 120 *dönme (4 eksen, eksen başına 2, 4.2 =8)*

. Bir kenara dik bir düzlemde yansıma (6)

. Bir düzlemde yansıma ile o düzleme dik bir eksen etrafında 90 *dönme (3 eksen, eksen başına 2, 3.2 =6)*

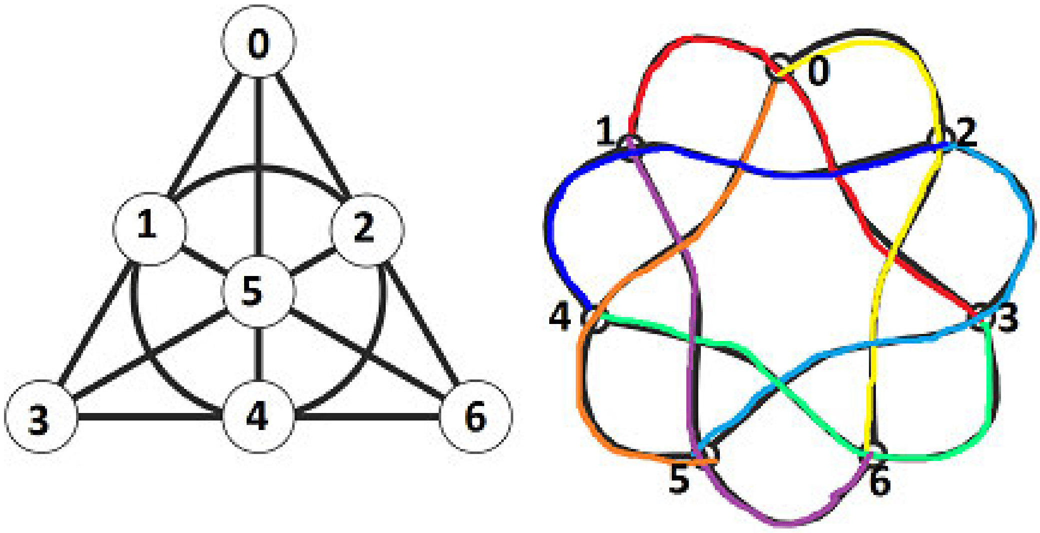
MODEL 2: Fano düzleminin başka bir modeli Şekil 3.3 de verilmiştir. Bu düzlemin noktalarının hiçbiri noktalardan, doğrularının hiçbiri doğrulardan ayırt edilemez. Şeklin merkezindeki $\frac{360}{7}$ derecelik dönme 7. mertebeden otomorfizmaya karşılık gelir.



Şekil 3.3 Fano Düzlemi: Bütün noktalar eşittir!

Şekil 3.3'deki 7. mertebeden otomorfizmalar ile birlikte, uzaysal modeldeki 24. mertebeden otomorfizmalar Fano düzleminin bütün otomorfizma gruplarını üretir. $24.7 = 168$. mertebedendir.

Örnek 15. *Şekil 3.4 de Fano düzleminin klasik resminin, model 2 de nasıl bir etiketleme yapılarak elde edilebileceğine dair bir örnek verilmiştir.*



Şekil 3.4 Fano Düzleminin Klasik Resmi ve Model 2

3.2 Etiketlenmiş Fano Düzlemlerinin Kombinasyonları

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 7 elemanlı kümesi verilsin. Bu küme üzerinde Fano düzlemi 30 farklı şekilde etiketlenebilir. Çünkü Fano düzleminin otomorfizmalar grubu 168. mertebedendir. Bu nedenle $\frac{7!}{168} = 30$ farklı etiketleme vardır.

Tanım 18. *(Saniga, 2015) X kümesinin elemanlarından oluşan sıralı olmayan üçlüleri Fano düzleminin doğruları olarak düşünelim. Doğruyu oluşturan üçlüdeki en küçük iki tamsayının toplamı üçüncüsüne eşitse doğruya* ***sıradan doğru*** *denir. Eğer üçüncüsüne eşit değilse doğruya* ***kusurlu doğru*** *denir. Bu şekilde doğrular kusurlu doğru ve sıradan doğru olmak üzere iki çeşite ayrılır.*

Tanım 19. *(Saniga, 2015) Etiketlenmiş Fano düzleminin bir noktasından geçen kusurlu doğruların sayısı s ise $(0 \leq s \leq 3)$ bu* ***noktanın mertebesi*** *s dir. Fano düzlemin de bir noktadan 3 tane doğru geçtiği için bu doğruların hepsinin kusurlu doğru olduğunu düşünürsek s en fazla 3 olabilir. Eğer bu noktadan hiç kusurlu doğru geçmezse s en az 0* *olabilir. Dolayısıyla s, 0 ve 3 dahil olmak üzere 0 ve 3 arasında değer alır. Bir nokta 0., 1., 2.ve 3. mertebeden olabilir. Bundan dolayı 4 farklı çeşit nokta vardır.*

Etiketlenmiş Fano düzlemlerinin kümesi tek bir şekilde A ve B gibi iki kümeye ayrılabilir. A kümesinden yada B kümesinden alınan herhangi iki etiketlemenin tek bir ortak doğrusu vardır. Bu kümeler 15 elemanlıdır.

Burkard Polster (Saniga, 2015) tarafından yapılan etiketleme aşağıda verilmiştir. Tamsayı üçlüleri $\{a, b, c\} = abc$ biçiminde gösterilmiştir. Etiketlenmiş 30 Fano düzlemi aşağıda verilmektedir. A ve B kümelerindeki sıradan doğrular üzerlerine çizgi koyularak ifade edilir.

$$A_1 : \left\{124, 136, 157, \overline{235}, 267, \overline{347}, 456\right\}$$

$$A_2 : \left\{127, 136, \overline{145}, 234, 256, 357, 467\right\}$$

$$A_3 : \left\{125, 136, 147, 237, \overline{246}, 345, 567\right\}$$

$$A_4 : \left\{125, \overline{134}, \overline{167}, 236, 247, 357, 456\right\}$$

$$A_5 : \left\{127, 135, 146, 236, 245, \overline{347}, 567\right\}$$

$$A_6 : \left\{124, 137, \overline{156}, 236, \overline{257}, 345, 467\right\}$$

$$A_7 : \left\{\overline{123}, 147, \overline{156}, 245, 267, 346, 357\right\}$$

$$A_8 : \left\{124, 135, \overline{167}, 237, 256, 346, 457\right\}$$

$$A_9 : \left\{126, 137, \overline{145}, \overline{235}, 247, 346, 567\right\}$$

$$A_{10} : \left\{\overline{123}, \overline{145}, \overline{167}, \overline{246}, \overline{257}, \overline{347}, 356\right\}$$

$$A_{11} : \left\{126, \overline{134}, 157, 237, 245, 356, 457\right\}$$

$$A_{12} : \{125, 137, 146, 234, 267, 356, 457\}$$

$$A_{13} : \left\{\overline{123}, 146, 157, 247, 256, 345, 367\right\}$$

$$A_{14} : \left\{127, \overline{134}, \overline{156}, \overline{235}, \overline{246}, 367, 457\right\}$$

$$A_{15} : \left\{126, 135, 147, 234, \overline{257}, 367, 456\right\}$$

$$A = \{A_1, A_2, ..., A_{15}\}$$

$$B_1 : \left\{127, 136, \overline{145}, \overline{235}, \overline{246}, \overline{347}, 567\right\}$$

$$B_2 : \{125, 136, 147, 234, 267, 357, 456\}$$

$$B_3 : \{124, 136, 157, 237, 256, 345, 467\}$$

$$B_4 : \left\{127, \overline{134}, \overline{156}, 236, 245, 357, 467\right\}$$

$$B_5 : \{124, 135, \overline{167}, 236, \overline{257}, \overline{347}, 456\}$$

$$B_6 : \{125, 137, 146, 236, 247, 345, 567\}$$

$$B_7 : \{\overline{123}, \overline{145}, \overline{167}, 247, 256, 346, 357\}$$

$$B_8 : \{126, 135, 147, 237, 245, 346, 567\}$$

$$B_9 : \{124, 137, \overline{156}, \overline{235}, 267, 346, 457\}$$

$$B_{10} : \{\overline{123}, 146, 157, 245, 267, \overline{347}, 356\}$$

$$B_{11} : \{125, \overline{134}, \overline{167}, 237, \overline{246}, 356, 457\}$$

$$B_{12} : \{126, 137, \overline{145}, 234, \overline{257}, 356, 467\}$$

$$B_{13} : \{\overline{123}, 147, \overline{156}, \overline{246}, \overline{257}, 345, 367\}$$

$$B_{14} : \{126, \overline{134}, 157, \overline{235}, 247, 367, 456\}$$

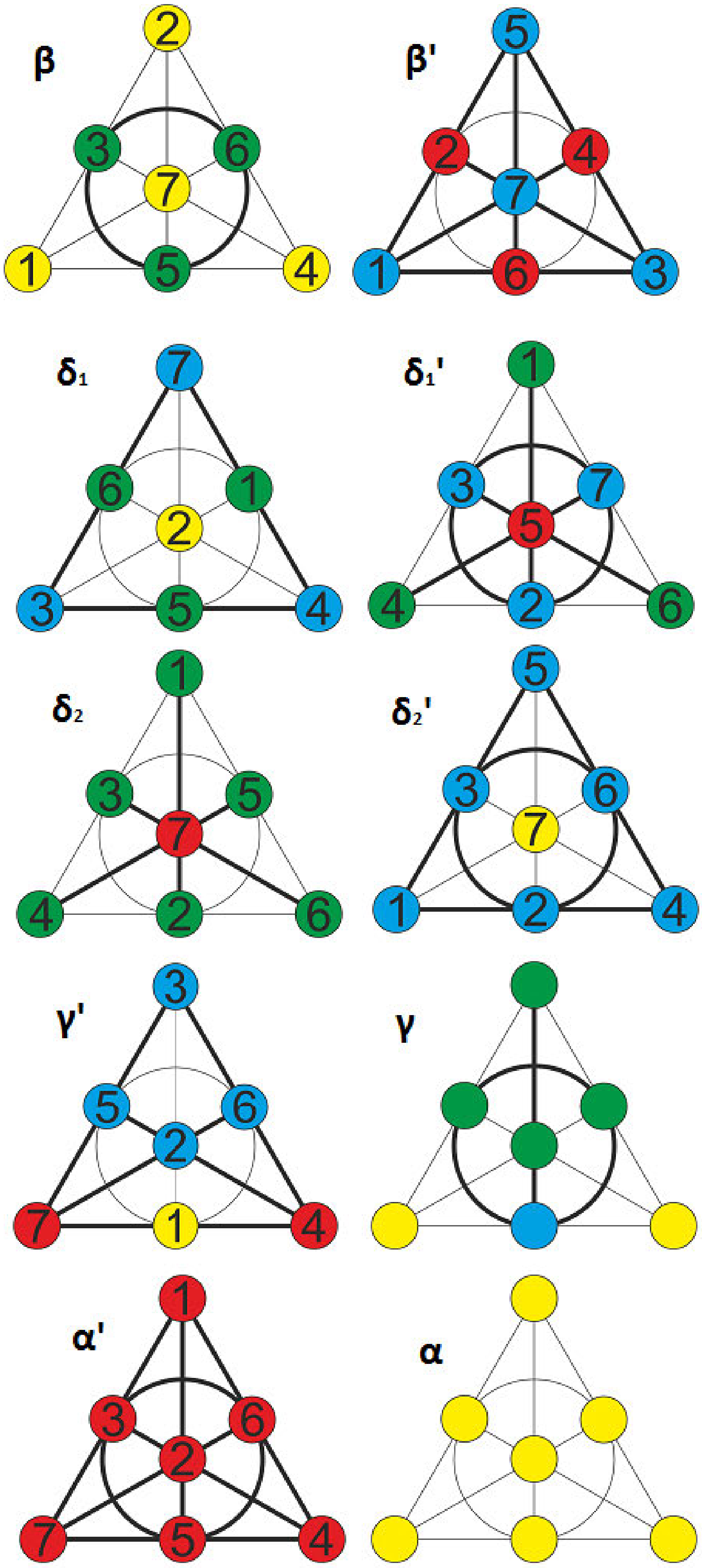
$$B_{15} : \{127, 135, 146, 234, 256, 367, 457\}$$

$$B = \{B_1, B_2, ..., B_{15}\}$$

İki etiketlenmiş Fano düzlemi sıfır, bir yada üç ortak doğruya sahip olabilir. Örneğin, A_1 ve B_{15} düzlemlerine bakalım. Bu iki düzlemin hiçbir ortak doğrusu yoktur. A_2 ve B_2 düzlemlerinde ise 136, 234, 357 doğruları bulunur. Bu düzlemlerin 3 ortak doğrusu vardır. A_1 ve A_2 düzlemlerini ele aldığımızda ise bu iki düzlemin tek bir ortak doğrusu vardır.

Fano düzleminde yapılan her etiketlemede herbir noktanın belli bir mertebesi vardır. Fano düzlemindeki 30 etiketlemede, herbir etiketlemedeki noktaların mertebesi dikkate alınarak bütün etiketlemeler 10 farklı grupta toplanabilir. Fakat doğruların tümü yada 5 tanesi sıradan doğru olacak şekilde Fano düzlemini etiketlemek imkansızdır. Bu yüzden α ve γ çeşiti düzlem bulunmamaktadır. α ve γ çeşiti düzlem bulunmadığı için 8 farklı gruba ayrıldıkları söylenebilir. Bu düzlem çeşitleri Şekil 3.5 de temsili şekillerle gösterilir. 3., 2., 1. ve 0. mertebeden noktalar sırasıyla kırmızı, mavi, yeşil ve sarı renkle gösterilir. Kalın doğrular kusurludur. A ve B kümesindeki düzlem çeşitlerinde bulunan noktaların mertebelerinin sayısı da tek bir tabloda Çizelge 3.1 de bulunur. Çizelge 3.2 de A düzleminde bulunan çeşitler, Çizelge 3.3 de B düzleminde bulunan çeşitler tablo halinde verilmiştir. Fano düzleminde bulunan çeşitlerin toplam sayısı ise tablo şeklinde Çizelge 3.4 de gösterilmiştir.

α' çeşitindeki bir düzlemde hiç sıradan doğru yoktur. β çeşitindeki bir düzlemde ise sadece tek kusurlu doğru vardır. A kümesinde sıradan doğrusu olmayan tek düzlem var iken, B kümesinde sıradan doğrusu olmayan 5 düzlem vardır. A'daki bu düzlem A_{12} düzlemidir. B'deki düzlemler ise B_2, B_3, B_6, B_8 ve B_{15} düzlemleridir.



Şekil 3.5 Düzlem Çeşitleri

Çizelge 3.1 Etiketlenmiş Fano düzlemlerinin 8 farklı çeşiti; her noktasının mertebelerinin sayısı ile tek türlü tanımlanır.

Çeşit	0. mertebeden noktaların sayısı	1. mertebeden noktaların sayısı	2. mertebeden noktaların sayısı	3. mertebeden noktaların sayısı
(α)	(7)	(0)	(0)	(0)
α'	0	0	0	7
β	4	3	0	0
β'	0	0	3	4
(γ)	(2)	(4)	(1)	(0)
γ'	0	1	4	2
δ_1	1	3	3	0
δ_1'	0	3	3	1
δ_2	0	6	0	1
δ_2'	1	0	6	0

Çizelge 3.2 A Kümesindeki Fano Düzlemlerinin Çeşitleri

Düzlem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Çeşit	γ'	β'	β'	γ'	β'	γ'	β'	β'	γ'	β	β'	α'	β'	δ_2	β'

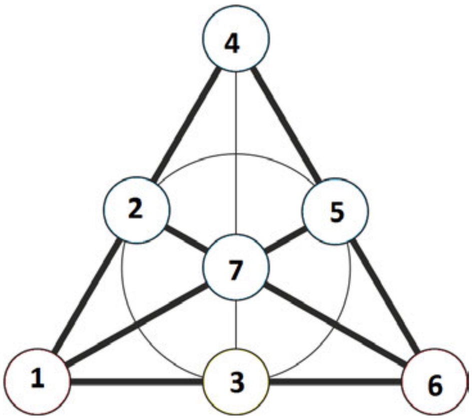
Çizelge 3.3 B Kümesindeki Fano Düzlemlerinin Çeşitleri

Düzlem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Çeşit	δ_1	α'	α'	γ'	δ_2'	α'	δ_2'	α'	γ'	γ'	δ_1'	γ'	δ_1	γ'	α'

Çizelge 3.4 Fano Düzleminde Bulunan Çeşitlerin Eleman Sayısı

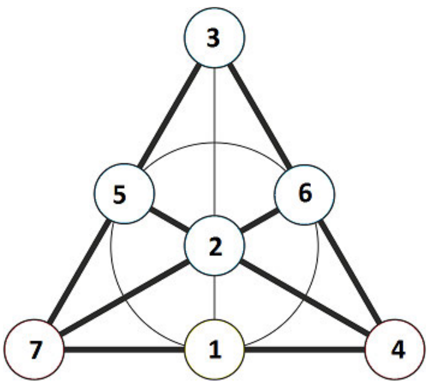
Çeşit	(α)	β	(γ)	δ_1	δ_2	α'	β'	γ'	δ_1'	δ_2'
A kümesi	-	1	-	0	1	1	7	5	0	0
B kümesi	-	0	-	2	0	5	0	5	1	2
Toplam	-	1	-	2	1	6	7	10	1	2

A_1 düzleminin temsili çizimi Şekil 3.6 da gösterilmiştir. Bu çizimdeki kalın doğrular kusurludur. Çizimde rahatça görüldüğü üzere 1 noktasının mertebesi 3, 2 noktasının mertebesi 2, 3 noktasının mertebesi 1, 4 noktasının mertebesi 2, 5 noktasının mertebesi 2, 6 noktasının mertebesi 3 ve 7 noktasının mertebesi 2 dir. A_1 düzleminde mertebesi 1 olan 1 nokta, mertebesi 2 olan 4 nokta ve mertebesi 3 olan 2 nokta vardır.



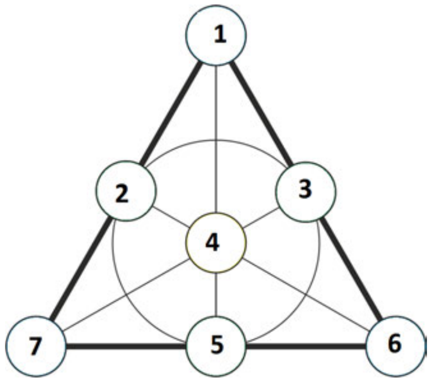
Şekil 3.6 A_1 düzlemi

γ' çeşiti düzlem Şekil 3.7 de temsili olarak resmedilmiştir. γ' çeşiti düzlemde 1 noktasının mertebesi 1, 2 noktasının mertebesi 2, 3 noktasının mertebesi 2, 4 noktasının mertebesi 3, 5 noktasının mertebesi 2, 6 noktasının mertebesi 2, 7 noktasının mertebesi 3 dür. Bu düzlemde mertebesi 1 olan 1 nokta, mertebesi 2 olan 4 nokta ve mertebesi 3 olan 2 nokta vardır. A_1 düzlemi γ' çeşiti düzlem ile aynı mertebeden aynı sayıda noktaya sahip olduğu için A_1 düzlemi γ' çeşiti düzlemdir.



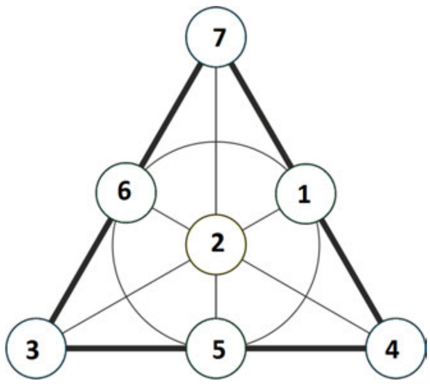
Şekil 3.7 γ' düzlemi

B_1 düzleminin temsili çizimi Şekil 3.8 de gösterilmiştir. Bu çizimde rahatça görüldüğü üzere 1 noktasının mertebesi 2, 2 noktasının mertebesi 1, 3 noktasının mertebesi 1, 4 noktasının mertebesi 0, 5 noktasının mertebesi 1, 6 noktasının mertebesi 2, 7 noktasının mertebesi 2 dir. B_1 düzlemin de mertebesi 0 olan 1 nokta, mertebesi 1 olan 3 nokta, mertebesi 2 olan 3 nokta vardır. Bu düzlemde mertebesi 3 olan nokta yoktur.

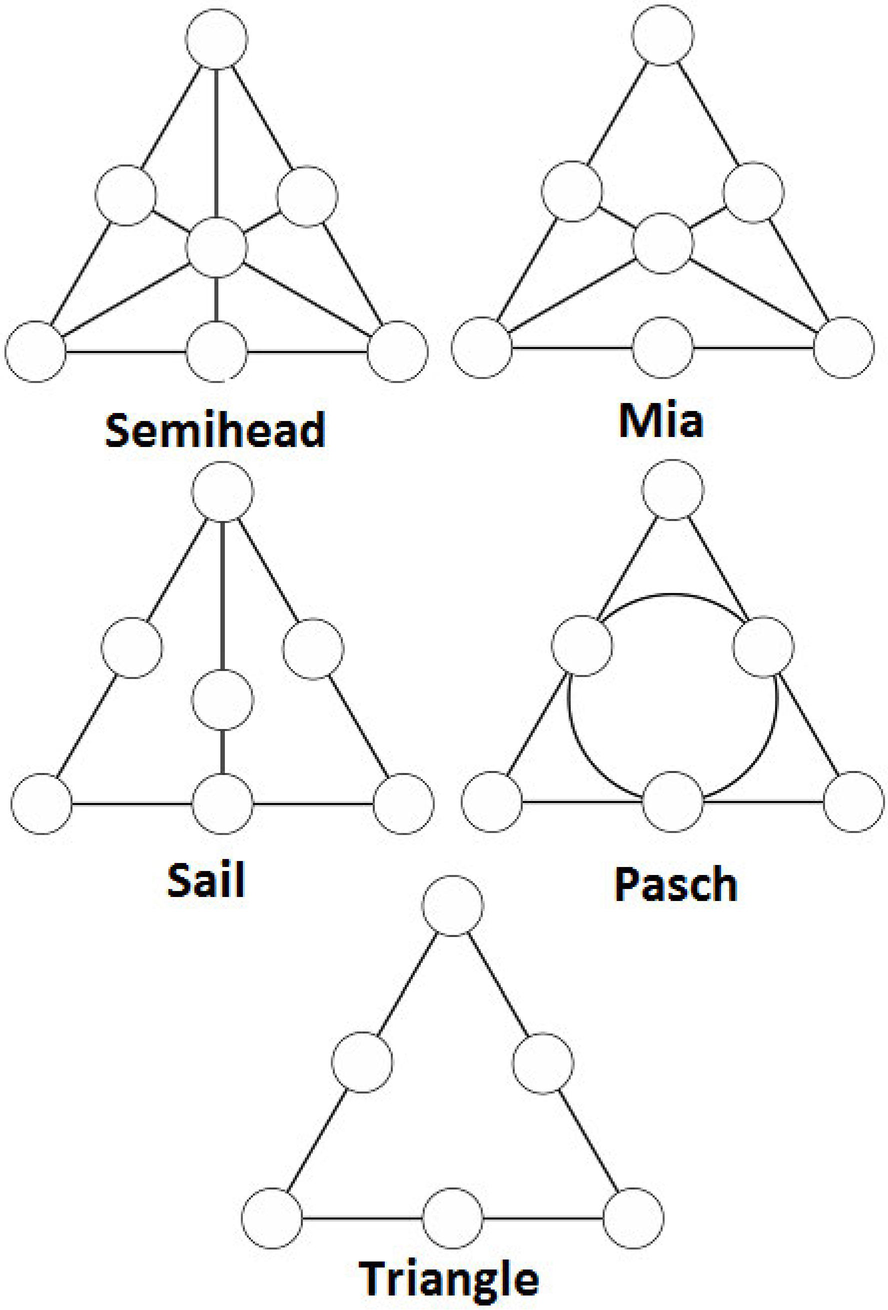


Şekil 3.8 B_1 düzlemi

δ_1 düzleminin temsili çizimi Şekil 3.9 da gösterilmiştir. Bu çizimde rahatça görüldüğü üzere 1 noktasının mertebesi 1, 2 noktasının mertebesi 0, 3 noktasının mertebesi 2, 4 noktasının mertebesi 2, 5 noktasının mertebesi 1, 6 noktasının mertebesi 1, 7 noktasının mertebesi 2 dir. δ_1 düzlemin de mertebesi 0 olan 1 nokta, mertebesi 1 olan 3 nokta, mertebesi 2 olan 3 nokta vardır. Bu düzlemde mertebesi 3 olan nokta yoktur. B_1 düzlemi δ_1 çeşiti düzlem ile aynı mertebeden aynı sayıda noktaya sahip olduğu için B_1 düzlemi δ_1 çeşiti düzlemdir.



Şekil 3.9 δ_1 düzlemi



Şekil 3.10 Geleneksel isimleriyle bilinen etiketlenmiş Fano düzleminde bulunan 5 farklı Fano türevi

Geleneksel isimleriyle bilinen etiketlenmiş Fano düzleminde bulunan 5 farklı Fano türevi Şekil 3.10 da resmedilmiştir. Semihead β' çeşiti düzlemde, Mia γ' çeşiti düzlemde bulunur. Sail δ_1' çeşiti düzlem tarafından kapsanır. Pasch δ_2' çeşiti düzlemde, Triangle(üçgen) δ_1 çeşiti düzlemde ve α' çeşiti düzlem ise Fano düzleminin kendisinde yer alır.

Fano düzlemlerinde bulunan 35 doğrunun, 26 tanesi kusurlu ve 9 tanesi sıradan doğrudur. Düzlemlerde bulunma sayıları dikkate alınarak bu doğrular çeşitlere ayrılır. Doğruların hangi düzlemde kaç adet bulunduğu dikkate alınarak yapılan bu çeşitleme Çizelge 3.5 de tablo şeklinde verilmiştir. 123, 145, 257, 347 birinci çeşit; 156, 235 ikinci çeşit; 246 üçüncü çeşit; 167 dördüncü çeşit ve 134 ise beşinci çeşit doğrudur. Böylece 9 sıradan doğru 5 çeşite ayrılmış olur. 124, 236, 247, 346, 357, 456 birinci çeşit; 136, 147, 345, 567 ikinci çeşit; 126, 157, 245, 467 üçüncü çeşit; 135, 237, 256 dördüncü çeşit; 127, 367 beşinci çeşit; 146, 234 altıncı çeşit; 137, 267 yedinci çeşit; 356 sekizinci çeşit; 457 dokuzuncu çeşit; 125 onuncu çeşit olmak üzere 26 kusurlu doğru ise 10 çeşite ayrılır.

Çizelge 3.5 Doğruların çeşitleri; ilk 9 doğru sıradan doğrudur. Kalan 26 doğru kusurlu doğrudur.

Doğru	(α)	β	(γ)	δ_1	δ_2	α'	β'	γ'	δ_1'	δ_2'
123	-	1	-	1	0	0	1	2	0	1
145	-	1	-	1	0	0	1	2	0	1
257	-	1	-	1	0	0	1	2	0	1
347	-	1	-	1	0	0	1	2	0	1
156	-	0	-	1	1	0	0	4	0	0
235	-	0	-	1	1	0	0	4	0	0
246	-	1	-	2	1	0	1	0	1	0
167	-	1	-	0	0	0	1	1	1	2
134	-	0	-	0	1	0	1	3	1	0
124	-	0	-	0	0	1	1	3	0	1
236	-	0	-	0	0	1	1	3	0	1
247	-	0	-	0	0	1	1	3	0	1
346	-	0	-	0	0	1	1	3	0	1
357	-	0	-	0	0	1	1	3	0	1
456	-	0	-	0	0	1	1	3	0	1
136	-	0	-	1	0	2	2	1	0	0
147		0	-	1	0	2	2	1	0	0
345	-	0	-	1	0	2	2	1	0	0
567	-	0	-	1	0	2	2	1	0	0
126	-	0	-	0	0	1	2	3	0	0
157	-	0	-	0	0	1	2	3	0	0
245	-	0	-	0	0	1	2	3	0	0
467	-	0	-	0	0	1	2	3	0	0
135	-	0	-	0	0	2	3	0	0	1
237	-	0	-	0	0	2	3	0	0	1
256	-	0	-	0	0	2	3	0	0	1
127	-	0	-	1	1	1	2	1	0	0
367	-	0	-	1	1	1	2	1	0	0
146	-	0	-	0	0	3	2	1	0	0
234	-	0	-	0	0	3	2	1	0	0
137	-	0	-	0	0	2	0	4	0	0
267	-	0	-	0	0	2	0	4	0	0
356	-	1	-	0	0	1	1	2	1	0
457	-	0	-	0	1	2	1	1	1	0
125	-	0	-	0	0	3	1	1	1	0

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Latin kare, Latin karelerin çarpımı, Latin karelerin dikliği ve karşılıklı dik Latin kareler kavramları incelenmiştir. Karşıklıklı dik Latin kareden afin düzlem elde etme ve afin düzlemden karşılıklı dik Latin kare elde etme üzerine çalışılmıştır.

Daha sonra Fano düzleminin kaç farklı şekilde etiketlenebileceği ele alınmıştır. 35 farklı etiketleme yapılabileceği görülmüştür. Bu etiketlemelerin bazı özellikleri detaylı olarak incelenmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Bermúdez J., Morales M. L. (2009). *Some Properties Of Latin Squares - Study of Mutually Orthogonal Latin Squares*. URL: `http://ccom.uprrp.edu/~labemmy/Wordpress/wp-content/uploads/2010/12/tech_report_final_draft.pdf`.

J., Vanpoucke (2011). *Mutually Orthogonal Latin Squares and Their Generalization*. URL: `http://homepages.vub.ac.be/~jvpoucke/MasterThesisMOLS.pdf`.

Kaya, R. (2005). *Projektif Geometri*.

Polster, B. (1998a). *A Geometrical Picture Book*.

— (1998b). *A Tour of the Smallest Projective Space*. URL: `http://www.qedcat.com/articles/yea.pdf`.

Saniga, M. (2015). *Combinatorial Intricacies of Labeled Fano Planes*. URL: `https://arxiv.org/abs/1509.06009`.

Seçkin, E., F. Şenses ve B. Ünal (1991). *Matematik Dünyası, Latin Kareler*. URL: `http://www.matematikdunyasi.org/arsiv/PDF_eskisayilar/91_4_11_14_LATIN.pdf`.

Stinson, D. R. (2004). *Combinatorial Designs: Constructions and Analysis*. Ed. by Springer.

U.C.Denver, Math. (2016). *Lecture Notes 4: Affine Planes and Mutually Orthogonal Latin Squares*. URL: `http://www-math.ucdenver.edu/~wcherowi/courses/m4220/hg2lec4.html`.

Wikipedia (2016a). *Dört yüzlü*. URL: `https://tr.wikipedia.org/wiki/D%C3%B6rt_y%C3%BCzl%C3%BC`.

— (2016b). *Steiner System*. URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Steiner_system`.

— (2016c). *Symmetry Group*. URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_group`.

Yazıcı, E.Ş. (2004). *Matematik Dünyası, Latin ve Grekoromen Kareler*. URL: http://www.matematikdunyasi.org/arsiv/PDF/04_4_09_12_LATINVEGREKOROME.pdf.