Pseudo-Finsler Manifoldlar için Eikonal Denklemleri ve Bazı Teoremler

Muradiye Çimdiker

DOKTORA TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Aralık 2016

The Eikonal Equations and Some Theorems for Pseudo-Finsler Manifolds

Muradiye Çimdiker

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Sciences

December 2016

Pseudo-Finsler Manifoldlar için Eikonal Denklemleri ve Bazı Teoremler

Muradiye Çimdiker

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Cumali Ekici

Aralık 2016

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı doktora öğrencisi Muradiye Çimdiker' in DOKTORA TEZİ olarak hazırladığı "**Pseudo-Finsler Manifoldlar için Eikonal Denklemleri ve Bazı Teoremler** " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman	:	Prof. Dr. Cumali Ekici
İkinci Danışman	:	Yrd. Doç. Dr. Yasin Ünlütürk

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Cumali Ekici

Üye : Prof. Dr. Ali Görgülü

Üye : Prof. Dr. Nedim Değirmenci

Üye : Prof. Dr. Murat Limoncu

Üye : Doç. Dr. Özcan Gelişgen

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet Erşahan

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Cumali Ekici danışmanlığında hazırlamış olduğum ”Pseudo-Finsler Manifoldlar için Eikonal Denklemleri ve Bazı Teoremler” başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

08/12/2016

Muradiye Çimdiker

ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı, pseudo-Riemannian manifoldlarda uygulanan yapıları kullanarak, metriğin değişimi esas alınarak, pseudo-Finsler manifoldlarda eikonal denklemleri ve bazı teoremleri elde etmektir.

Yedi bölümden oluşan çalışmamızda giriş bölümünde konunun tarihsel gelişimi hakkında bilgiler aktarılmıştır. Üçüncü bölümde çalışmamıza temel oluşturan tanımlar ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde Finsler eikonal denklemi, Riemannian metriğin özel bir hali olan Berwald metrik için eikonal denklemi elde edilmiştir ve fiziksel yorumları verilmiştir. Son iki bölümde mevcut olan pseudo-Riemannian dönüşüm ve eikonal denklemleri pseudo-Finsler manifoldlara uyarlanarak, pseudo-Finsler dönüşüm ve eikonal denklemleri elde edilmiştir. Pseudo-Finsler eikonal denklem çeşitlerinden biri olan null Finsler eikonal denklemi için bazı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca elde edilen pseudo-Finsler eikonal denklemlerinin afin çözümleri ve ilgili bazı teoremler bulunmuştur. Son olarak, pseudo-Finsler manifoldlar üzerinde divergens teoremiyle ilgili bazı teoremler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Eikonal denklem, pseudo-Finsler manifold, Berwald metrik, divergens teoremi.

SUMMARY

The aim of this thesis is to obtain the eikonal equations and some theorems for pseudo-Finsler manifolds, based on the change of the metric by the structures practised in pseudo-Riemannian manifolds.

The study consist of seven chapters and some information about the historical development of the topic is given in the introduction chapter. The third chapter contains the basic definitions and theorems for pseudo-Finsler manifolds. In the fourth chapters, Finsler eikonal equation and eikonal equation for Berwald metric which is a special aspect of Riemannian metric are obtained and physical interpretation of them are given. In last two chapters, the existing pseudo-Riemannian map and eikonal equation is adapted to pseudo-Finsler manifolds and then, pseudo-Finsler map and eikonal equations are obtained. Besides, affine solutions of the obtained pseudo-Finsler eikonal equations and some related theorems are derived. Several results are obtained for null Finsler eikonal equation which is a kind of pseudo-Finsler eikonal equation. Finally, several theorems are obtained about divergence theorem on pseudo-Finsler manifolds.

Keywords: Eikonal equation, pseudo-Finsler manifold, Berwald metric, divergence theorem.

TEŞEKKÜR

Pseudo-Finsler manifoldlar için eikonal denklemleri ve bazı teoremler adlı tez çalışmamda, lisans eğitimimden itibaren, engin bilgisi ve deneyimleri ile bana emek harcayan, çok kıymetli danışmanım Sayın

Prof. Dr. Cumali Ekici

hocama, Yüksek Öğretim Kurumu'ndan aldığım altı aylık doktora tez araştırma bursu kapsamında beni İndiana Üniversitesi-Purdue Üniversitesi (İndianapolis) ne davet edip, Finsler geometrideki engin bilgisini benimle paylaşan Sayın Prof. Dr. Zhongmin Shen hocama, benim bu tez çalışmamda başarılı olacağıma inanan ve bu anlamda bana desteklerini esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Yasin Ünlütürk'e, beni yetiştirip buralara kadar taşıyan ve sevgilerini her zaman hissettiğim değerli aileme, kalbi teşekkürlerimi iletmeyi bir borç bilirim.

Muradiye Çimdiker

Aralık 2016

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
F	Finsler Metrik
F^*	Pseudo-Finsler Metrik
g	Metrik Tensör
$\overline{\widetilde{g}}$	Konformal İlişkili Metrik Tensör
$£$	Lie Bracket Operatörü
C	Cartan Tensör
H_f	Hessian Formu
f	Diferensiyellenebilir Dönüşüm
$£_X$	X Vektör Alanına Göre Lie Türev Operatörü
$\|,\|$	Finsler norm
T_pTM	$p \in M$ Noktasındaki Tanjant Uzay
Δ	Laplacian Operatörü
∇	Levi-Civita Koneksiyon (Chern Koneksiyon)
$\overset{f}{\nabla}$	f Dönüşümü Boyunca Geri Çekme Koneksiyonu
$\overline{\nabla}$	Konformal İlişkili Levi-Civita Koneksiyon
F^i_{jk}	Finsler Koneksiyon
C^i_{jk}	Cartan Koneksiyon
div	Divergens Operatörü
B	Dönüşümün İkinci Temel Formu
E	Enerji Fonksiyoneli
μ	Pseudo-Finsler Hacim Formu
i	Dış Çarpım Operatörü
Ω	Kompakt Bölge

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Geometride, bir flat, (düz) düşük boyutlu Öklid uzayına denk olan m-boyutlu uzayın bir altkümesidir. Flatler, 2-boyutlu uzayda noktalar ve doğrular, 3-boyutlu uzayda noktalar, doğrular ve düzlemlerdir. $(m-1)$-boyutlu flatler hiperdüzlem olarak adlandırılır. Bir flat, lineer manifold veya lineer variyete adını da alır (Anonim, 2015). Euclid, geometrisini bu flat uzaylar üzerine kurmuştur. Sonrasında G. F. B. Riemann, 1854 yılında ”Über die Hypotheses, welche der Geometrie zu grund-liegen” eseri ile geometride, matematiğin diğer alanlarında ve de bilimin çeşitli dallarında, bu flat uzayları kullanarak yeni bir dönem başlatmış ve Öklid uzayında konumlandırılamayan nesnelere yönelik diferensiyel geometriyi geliştirmek için Öklid uzaya homeomorf olan manifoldların notasyonunu tasarlamıştır. Sonrasında manifold üzerinde eğrilerin uzunluğunu, iki nokta arasındaki uzaklığı ve vektörler arasındaki açıyı hesaplamada gereksinim duyulan Riemannian metriğini geliştirmiştir (Tek, 2003).

Genel itibariyle, Finsler geometri, Riemannian geometriden birkaç adım daha ileridir. x noktasında tanjant uzay bir Öklid uzaydır, Finsler geometride ise tanjant uzay bir normlu uzay, yani Minkowski uzaydır. Başka bir deyişle, diferensiyellenebilir bir M manifoldu için, bir Finsler metrik, T_xM tanjant uzayı üzerindeki $x \in M$ noktasına normu atayan bir dönüşümdür. Yani, Finsler manifoldu, manifoldun her noktasındaki tanjant uzayını Minkowski norm ile donatır. Buradaki norm klasik anlamdaki norm tanımından farklı olarak iç çarpım tarafından üretilmemiştir. Tam tersine norm yardımıyla iç çarpım üretilmiştir. Bu yolla elde edilen iç çarpımlar, manifold üzerindeki noktalar tarafından değil, TM tanjant demeti üzerindeki yönler tarafından parametrize edilir (Altunkaya, 2007).

Eikonal denklemi, fizik biliminde birçok fenomeni tanımlayan basit birinci dereceden lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemdir. Bu denklem optiklerde, akustiklerde, elastisitede ve elektromagnetiklerde dalganın yayılımını içerir. Dolayısıyla eikonal denkleminin çözümü birçok araştırmacının büyük ilgisini çekmiştir. Eikonal denkleminin genel formu

$$\|\nabla f(x)\| = k$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\nabla f(x)$, $f(x)$ skalar fonksiyonunun gradient vektörüne, $\|\cdot\|$ Öklidyen norma karşılık gelir ve k ışığın kırılma indeksi olarak adlandırılır (Jahanandish, 2010).

∇f, matematiksel fizik ve geometri gibi bilimin birçok alanında kullanılmıştır. Örneğin $\|\nabla f(x)\|^2 = 1$ olarak ifade edilen Riemannian şartı geometrik optiklerin eikonal denklemidir.

Geometrik optikler, optiklerin en eski yaklaşımlarından biridir. Geometrik optiklerin yorumunda, f seviye kümeleri dalga cepheleri olarak yorumlanır. Eikonal denklemlerinin karakteristikleri, f seviye kümeleri için gradient akış denkleminin çözümleridir ki, bu çözümler yay uzunluğu yardımıyla parametrize edilen f seviye kümelerine ortogonal olan M manifoldunun

$$x' = \operatorname{grad} f(x)$$

şeklindeki jeodezikleridir. Bu jeodezikler dalga cephelerine ortogonal olan ışık ışınları olarak da yorumlanabilir (Fischer, 1992).

Divergens teoremi, mühendislik matematiğinde, özellikle de elektrostatik ve akışkan dinamiğinde önemli bir yer alır. Bu teorem $m-$boyutlu Finsler uzaylarında kompakt bir bölgeyle sınırlandırılan hiperyüzeyler için türetilir (Cartan, 1967).

Finsler geometride divergens teoremleri H. Rund (Rund, 1975) ve Z. Shen (Shen, 1998) tarafından çalışılmış ve bu bilimadamları sınırda bir yüzey integralli M manifoldunun bölgesi üzerinde bir belirli hacim integralini eşitlerken, oldukça farklı yapılara ulaşmışlardır.

Finsler metrik kullanılarak aşağıda türetilen divergens teoremi, bir düşünce altında M manifoldu üzerinde metriğin herhangi bir çeşidinin durumundan bağımsız olan, Stokes teoreminin özel bir durumudur. Bu teorem

$$\int_G d\Omega = \int_{\partial G} \Omega$$

şeklinde ifade edilmek üzere, burada G, C^1 sınıfından ∂G hiperyüzeyine karşılık gelen, $(m-1)-$boyutlu sınırıyla donatılan bir M manifoldunun $m-$boyutlu bölgesidir (Rund, 1975).

Bu tez çalışmasının amacı, pseudo-Riemannian manifoldlarda uygulanan yapıları kullanarak, metriğin değişimi esas alınarak, pseudo-Finsler manifoldlarda eikonal denklemleri ve bazı teoremleri elde etmektir. Eikonal denklemini oluşturabilmek için bir dönüşüme ihtiyaç duyulduğundan, bu bağlamda Riemannian ve pseudo-Riemannian dönüşümlerine ait yapılar esas alınarak, Finsler ve pseudo-Finsler dönüşüm yapılarını kurmaktır. Ayrıca bu dönüşümü ve eikonal denklemini Riemannian metriğin özel bir hali olan Berwald metrik için de vermektir. Bir fiziksel sonuç olarak pseudo-Finsler eikonal denklem çeşitlerinden biri olan null Finsler eikonal denkleminin enerji fonksiyonelinin kritik noktaları olduğunu ispatlamaktır. Son olarak, pseudo-Finsler manifoldların non-dejenere sınırı üzerinde hacim formu kullanılarak, var olan yapısından farklı olan divergens teoreminin iki yeni versiyonunu elde etmektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Genelleştirilmiş metrik uzayların teorisi; J. L. Synge (1925), J. H. Taylor (1925) ve özellikle de Riemannian geometrinin en doğal bir genelleştirilmesi olarak 1920'lerin ortasında L. Berwald tarafından bağımsız bir şekilde geliştirilmiştir. 1918 yılında Paul Finsler, farklı hesaplamaların etkili geometrizasyonu altında, genelleştirilmiş metrik uzaylar adını verdiği eğriler ve yüzeyler teziyle bu konuyu başlatmıştır (Matsumoto, 1986). $m-$boyutlu M manifoldu üzerinde

$$ds = F(x,dx), \quad x = (x^1,...,x^m), \quad dx = (dx^1,...,dx^m)$$

olarak ifade edilen Finsler metriğini tanımlamıştır. Burada $F(x,dx)$ Finsler fonksiyonudur (Tek, 2003).

Bir manifold veya vektör demetinin Finsler metriği her bir temel noktası için diferensiyellenebilir bir atama olarak her bir fiber uzay üzerinde bir norm olarak tanımlanır ve dolayısıyla Finsler metrik sınıfı Riemannian metriklerini özel bir alt sınıf olarak içerir. Bu nedenle, Finsler geometrisi genellikle Riemannian geometrisinin genelleştirilmesi olarak ele alınır. Bu anlamda Riemannian geometrisini özel bir durum olarak içeren Finsler geometrisi bir çok bilim insanı tarafından çalışılmıştır (Matsumoto, 1986; Bao vd., 2000).

E. Cartan (1933), bir Finsler uzayının lokal bir şekilde Öklid olmasından yola çıkarak bir metrik koneksiyon tanımlaması yardımıyla Finsler geometrisinin temellerini kurmuştur ve sonrasında Finsler geometride Riemannian geometrinin analojisi üzerine birbiri ardına süregelen sonuçları elde etmiştir.

L. Berwald, diğer esaslı görüş olan, bir Finsler uzayın lokal Minkowskian olduğunu göstermiş ve O. Varga, H. Rund, Z. Shen ve diğerleri tarafından Finsler geometrisinin gelişmesi aktif bir şekilde sağlanmıştır (Varga, 1986; Rund, 1959; Shen, 2001).

M manifoldu üzerindeki, özellikle jeodezik sapmalarla ilişkili önemli bir değişmez olan F Finsler metriğinin flag eğriliğini hesaplamada kolay bir yol sağlayan Chern koneksiyonu S. S. Chern (Chern, 1943) tarafından $TM \setminus \{0\}$ üzerine bir fiber demetindeki koneksiyon olarak düşünülmüştür. Chern koneksiyonu yeniden H. Rund (Rund, 1959) tarafından bağımsız olarak tanımlanmış ve daha sonra ilgili bilim adamlarının Chern koneksiyonunun Finsler geometrisinin global problemlerinin çözümünde olağanüstü yararlılığını gösterdiği D. Bao ve S. S. Chern'in (Bao ve Chern, 1993) çalışmalarına kadar tamamen unutulmuştur.

Riemannian geometrinin bir genelleştirmesi olan Finsler geometri, matematiğin yanısıra biyoloji, kontrol teorisi, ve mühendislik gibi bilimin diğer dallarında da uygulamaları vardır (Antonelli, 1996; Gardener vd., 1996). Finsler manifoldlar bazı fiziksel fenomenler için ilginç modellerdir, dolayısıyla Finsler manifoldların özellikleri araştırılmaya elverişlidir (Bao vd., 2000; Bucătaru ve Miron, 2007; Miron ve Anastasiei, 1994). Şu ana kadar Finsler diferensiyel geometrisinin formüllerinin kullanımı teorik fizikte deneme şeklindeydi, fakat son zamanlarda bu durum belirgin bir şekilde değişerek anizotropik medya teori, Lagrange mekaniği, klasik Finsler geometri ve onun genelleştirilmeleri gibi böyle geleneksel alanlardan ayrı olarak optimizasyon problemlerinin çözümünde, ekolojide ve biyolojik sistemlerin evrim teorisinde, statik fizik ve termodinamikte, uzay-zaman ve yerçekimi teorisinde geniş uygulamalar bulmuştur. Örneğin, bu geometri anizotropinin (madde, alanlar) çeşitli sistemlerinin daha iyi anlaşılmasına olanak sağlayan yardımcı bir hesaplama yöntemi olarak uygulama alanı oluşturmuştur. Bu durum fiziğin geometrizasyonunda, Finsler geometrisinin kullanımından uzaktır. Diğer bir örnek olarak biyolojik sistemlerde

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i(x^l, x'^m) = 0$$

formunda tanımlanan adi diferensiyel denklemler Finsler geometri yardımıyla yorumlanmıştır (Antonelli, 1999).

Finsler manifoldlar alanında çalışanların aksine indefinite Finsler manifoldlar çok az bilim adamı tarafından çalışılmıştır. Bu konuda çalışan bazı bilim adamları Bejancu, Miron, Farran, Teodorescu'dur. Pseudo-Finsler manifoldlara Bejancu ve Farran tarafından Finsler metriğinin sadece fiziksel ve biyolojik açıdan kesinlikle gerekli olan non-dejenere olma halinde çalışılmıştır (Bejancu ve Farran, 2000).

Eikonal denklemi karakteristik kullanılarak çözümlenir. Bu çözümler, birleştirilmiş koordinatlarda, ışın parametre faz uzayındaki ışın denklemlerini ve bu ışınlar boyunca seyahat-zamanın integralini içerir (Cervency vd., 1977). Fiziksel olarak ışınlar yüksek frekanslı enerji akışı boyunca oluşan yörüngelerdir. Işın denklemlerinin çözümü için etkili metotlardan biri geliştirilmiştir (Julian vd., 1977). Bu karakteristiklerin metodu kullanılarak, ışınlar boyunca seyahat-zaman hesaplanmış ve eikonal denklemlerinin yaklaşık çözümleri R. L. Nowack (1992) tarafından elde edilmiştir.

Riemannian dönüşümlerin yapısı Fischer (1992) tarafından tanıtılmış ve bu dönüşümlerin eikonal denklemlerinin çözümleri olduğu gösterilmiştir. Buna istinaden Garcio ve Küpeli (1999) tarafından pseudo-Riemannian dönüşümünün notasyonu kurulmuş ve bu dönüşüm kullanılarak eikonal denklemlerinin çözümleri ve onların afin çözümleri elde edilmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak olan temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir.

3.1 Pseudo-Riemannian Manifoldlar

Bu kısımda, konuya temel oluşturan manifold ve pseudo-Riemannian manifold tanımlarına yer verilmiştir.

Tanım 3.1.1 M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir $m-$boyutlu topolojik manifold veya $m-$manifold dur denir:

1) M bir Hausdorff uzayıdır.

2) M, $m-$boyutlu lokal Ökliddir.

3) M açık cümlelerin sayılabilir bir tabanına sahiptir (Boothby, 1986).

Tanım 3.1.2 M, bir $m-$boyutlu topolojik manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M manifolduna C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir (Boothby, 1986).

Tanım 3.1.3 V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \in V$ için

i) $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u})$

ii) $g(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) = ag(\vec{u}, \vec{w}) + bg(\vec{v}, \vec{w})$

iii) $g(\vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w}) = a\overline{g}(\vec{u}, \vec{v}) + bg(\vec{u}, \vec{w})$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.4 V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

i) $\forall\vec{v}\in V$ ve $\vec{v}\neq\vec{0}$ için $g(\vec{v},\vec{v})>0$ ise g simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

ii) $\forall\vec{v}\in V$ ve $\vec{v}\neq\vec{0}$ için $g(\vec{v},\vec{v})<0$ ise g simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

iii) $\forall\vec{v}\in V$ için $g(\vec{v},\vec{v})\geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna pozitif yarı tanımlı,

iv) $\forall\vec{v}\in V$ için $g(\vec{v},\vec{v})\leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna negatif yarı tanımlı,

v) $\forall\vec{w}\in V$ için $g(\vec{v},\vec{w})=0$ iken $\vec{v}=\vec{0}$ olmak zorunda ise g simetrik bilineer formuna non-dejenere, aksi taktirde dejeneredir denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.5 g, V üzerinde simetrik bilineer form olsun. g nin L_g dejenere uzayı

$$L_g=\{u\in V\mid \forall v\in V \text{ için } g(u,v)=0\}$$

yardımıyla tanımlanır (Eduardo ve Küpeli, 1999).

Tanım 3.1.6 (V,g) reel $m-$boyutlu pseudo-Öklid uzay ve W uzayıda onun altuzayı olsun. W üzerine indirgenmiş metrik g dejenere ise W ya lightlike (dejenere) altuzay denir. Aksi durumda W ya non-dejenere denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 3.1.7 (V,g) reel $m-$boyutlu pseudo-Öklid uzay ve W da onun altuzayı olsun.

$$W^{\perp}=\{v\in V\mid \forall w\in W \text{ için } g(v,w)=0\}$$

altuzayına W uzayının dik uzayı denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 3.1.8 V,W vektör uzayları olmak üzere $T:V\to W$ dönüşümünde W uzayının $T(\alpha)$ elemanına $\alpha\in V$ uzayının T ile elde edilen resmi denir. W uzayının

$$T(S)=\{T(\alpha):\alpha\in S\}$$

altkümesine V uzayının S altkümesinin resmi denir. V uzayının

$$T^{-1}(0)=\{\alpha\in V:T(\alpha)=0\}$$

altcümlesine T lineer dönüşümünün sıfır uzayı veya çekirdeği denir. W uzayının

$$T(V)=\{T(\alpha):\alpha\in V\}$$

altcümlesine T lineer dönüşümünün değerler bölgesi denir (Hacısalihoğlu, 1985).

Tanım 3.1.9 $T:V\to W$ lineer dönüşümünde, dönüşümün rankı $boyT(V)$ dir (Hacısalihoğlu, 1985).

Tanım 3.1.10 V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve H, V vektör uzayının bir alt vektör uzayı olsun. V vektör uzayında modülo bağıntısının ortaya çıkardığı bütün denklik sınıflarının kümesi V/H olsun. V/H kümesi K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. V/H vektör uzayına bölüm uzayı adı verilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 3.1.11 M bir C^{∞} manifold olsun. $p\in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} g_p: & T_pM\times T_pM & \to & \mathbb{R} \\ & (X_p,Y_p) & \to & g_p(X_p,Y_p) \end{array}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer ve non-dejenere $(0,2)$ tipindeki tensör alanına M üzerinde bir metrik tensör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.12 Bir C^{∞}, M manifoldu g metrik tensörü ile donatılmış ise pseudo-Riemannian manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.13 M, $m-$boyutlu pseudo-Riemannian manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine pseudo-Riemannian manifoldunun indeksi denir ve ind$M$ ile gösterilir. Eğer indeks ν ise, $0\leq\nu\leq boyM$ dir. Özel olarak, $\nu=0$ ise $\forall p\in M$ noktası için g_p, T_pM üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir Riemannian manifoldu olur. $\nu=1$ ve $m\geq 2$ olması durumunda ise, M manifolduna bir Lorentz Manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.14 M_m ve M_p sırasıyla C^k ve C^q sınıfından diferensiyellenebilir manifoldlar olsunlar. $G\subset M_m$ açık küme olmak üzere $f:G\to M_p$ sürekli dönüşümüne bakalım ve farzedelim ki, φ, bölgesi $U\subset G$ olan harita, ψ ise bölgesi $f(U)\subset V$ olan harita olsun.

Keyfi (U,φ), $U\subset G$ haritası için,

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V),\ \varphi(U)\subset\mathbb{R}^m,\ \psi(V)\subset\mathbb{R}^p$$

dönüşümü C^m sınıfından ise f dönüşümüne $(m \leq \min(k,q))$ sınıfından diferensiyellenebilirdir denir (Salimov ve Mağden, 2008).

3.2 Dönüşümün İkinci Temel Formu

Çalışmanın bu kısmında keyfi bir lineer dönüşüm için ikinci temel form, tamamen jeodezik olma, afin dönüşüm, harmonik dönüşüm gibi bazı geometrik kavramlar tanımlanmaktadır.

Tanım 3.2.1 $T:(V_1,g_1)\to(V_2,g_2)$ bir lineer dönüşüm olsun. T dönüşümünün ${}^*T$ adjointi her bir $x\in V_1$ ve $y\in V_2$ için

$$g_1(x,{}^*Ty)=g_2(Tx,y)$$

olmak üzere ${}^*T:(V_2,g_2)\to(V_1,g_1)$ şeklinde tanımlanan bir tek lineer dönüşümdür (Eduardo ve Küpeli, 1999).

Tanım 3.2.2 $f:M_1\to M_2$ bir dönüşüm ve $\widetilde{\nabla}$, M_2 üzerinde bir koneksiyon olsun. O zaman f boyunca M_2 üzerinde bir tek $\widetilde{\nabla}^f$ koneksiyonu, f boyunca $\widetilde{\nabla}$ koneksiyonunun geri çekme koneksiyonu olarak adlandırılır (Eduardo ve Küpeli, 1999).

Teorem 3.2.1 $f:M_1\to M_2$ bir dönüşüm ve $\widetilde{\nabla}$, M_2 üzerinde bir koneksiyon olsun. O zaman $Y\in\Gamma TM_2$ için

$$\widetilde{\nabla}^f_X(Y\circ f)=\widetilde{\nabla}_{f_*X}Y \tag{3.1}$$

olacak şekilde M_2 üzerinde f boyunca bir tek $\widetilde{\nabla}^f$ koneksiyonu vardır (Şahin, 2012).

Tanım 3.2.3 $f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ bir dönüşüm olsun. f boyunca $\widetilde{\nabla}$ koneksiyonunun geri çekme koneksiyonu $\widetilde{\nabla}^f$ olmak üzere

$$B:\Gamma(TM_1)\times\Gamma(TM_1)\to\Gamma_f(TM_2)$$

ve

$$B(X,Y)=\widetilde{\nabla}^f_X f_*Y-f_*(\nabla_XY) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan B dönüşümüne f dönüşümünün ikinci temel formu denir. Burada f_* türev dönüşümüdür (Şahin, 2012).

Tanım 3.2.4 $f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ dönüşümü için ikinci temel form sıfır ise f dönüşümüne tamamen jeodezik denir. Tamamen jeodezik dönüşümler afin dönüşüm olarak da adlandırılır (Şahin, 2012).

Önerme 3.2.1 $f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ bir dönüşüm olsun. f dönüşümünün tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter koşul f dönüşümünün M_1 manifoldunun jeodeziğini M_2 manifoldunun jeodeziğine göndermesidir (Şahin, 2012).

Tanım 3.2.5 $f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ bir dönüşüm olsun. O zaman f_* türev dönüşümünün kare normu

$$\|f_*\|^2(p_1)=\left\|f_{*p_1}\right\|^2$$

yardımıyla tanımlanan

$$\|f_*\|^2 : M_1\to\mathbb{R}$$

bir dönüşümdür.

$$\|f_*\|^2=\sum_{i=1}^{m_1} g_1(X_i,X_i)g_2(f_*X_i,f_*X_i) \tag{3.3}$$

olduğundan, $\|f_*\|^2$, M_1 de bir dönüşümdür. Burada $\{X_1,...,X_{m_1}\}$ kümesi TM_1 için ortonormal lokal çatıdır (Eduardo ve Küpeli, 1999).

Ayrıca $X\in\Gamma TM$ için,

$$f_*X=g_{\nabla f}(\nabla f,X)\frac{d}{dt}\circ f \tag{3.4}$$

dir (Eduardo ve Küpeli, 1999).

Tanım 3.2.6 $f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ dönüşüm olsun. f dönüşümünün $\tau(f)$ tensiyon alanı g_1 metriğine göre ∇f_* nin izidir. Yani,

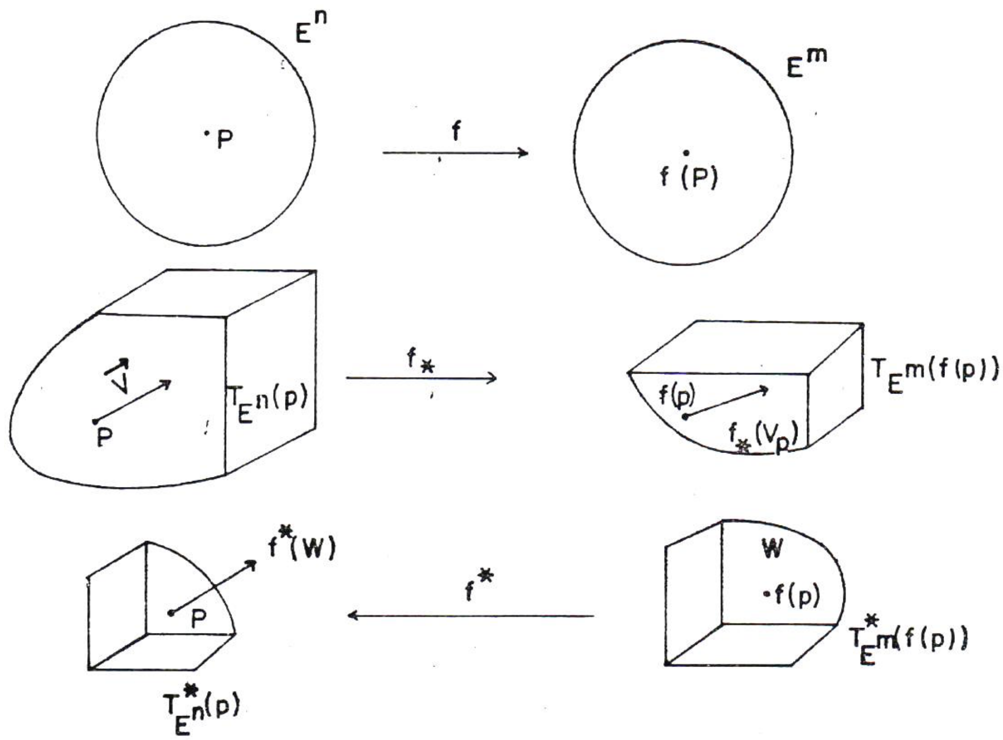
$$\tau(f)=\sum_{i=1}^{m_1} g_1(X_i,X_i)(\nabla f_*)(X_i,X_i) \tag{3.5}$$

dir. Burada $\{X_1,...,X_{m_1}\}$ kümesi TM_1 için ortonormal lokal çatıdır (Eduardo ve Küpeli, 1999).

Tanım 3.2.7 $f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\tau(f)=0$ veya $\Delta f=0$ ise f dönüşümüne harmonik dönüşüm denir. Eğer $\Delta f\geq 0$ ise f dönüşümüne altharmonik dönüşüm denir. Burada Δ Laplacian operatörüdür (Eduardo ve Küpeli, 1999).

Tanım 3.2.8 $f : E^n \to E^m$ fonksiyonuna f nin Jakobiyan matrisiyle birlikte $f_* : T_{E^n}(p) \to T_{E^m}(f(p))$ lineer dönüşümü karşılık gelir. Burada $v_p \in T_{E^n}(p)$ dir. f_* lineer dönüşümünün eki $f^* : T^*_{E^m}(f(p)) \to T^*_{E^n}(p)$ ile gösterilen bir diğer lineer dönüşümdür.

f^* ile f_* dönüşümleri arasındaki geçiş $[f^*(w)]|_p(v_p) = w|_{f(p)}[f_*(v_p)]$ bağıntısı ile verilir. Bu operatör, w 1-formları yerine k-formlar içinde tanımlanabilir.



Şekil 3.1: Fonksiyon ve türev dönüşümleri

f fonksiyonu, f_* ve f^* türev dönüşümleri (Şekil 3.1) deki gibi resmedilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.2.9 $\mathfrak{J}^p_q(M_m)$, M_m üzerindeki tüm (p,q) tipli tensör alanlarının $\mathbb{R}$ üzerindeki vektör üzayı olmak üzere, $D = £_X$, $X \in \mathfrak{J}^1_0(M_m)$ diferensiyelleme işlemi aşağıdaki şartları sağlarsa buna X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi adı verilir:

i) $£_X f = Xf, \forall f \in \mathfrak{J}^0_0(M_m)$

ii) $£_X Y = [X,Y], \forall X,Y \in \mathfrak{J}^1_0(M_m)$.

Burada $[X,Y]$ Lie parantezidir.

$\pounds_X$ türevinin özelliklerine göre

$$\pounds_X(\omega(Y)) = (\pounds_X\omega)Y + \omega(\pounds_X Y)$$

ve buradan da

$$(\pounds_X\omega)Y = \pounds_X(\omega(Y)) - \omega(\pounds_X Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y])$$

olarak yazılır. Burada $\omega \in \Im_1^0(M_m)$ kovektör alanıdır (Salimov ve Mağden, 2008).

3.3 Pseudo-Finsler Manifoldlar

Bu kısmın amacı, çalışmanın sonraki bölümlerinde sıkça kullanılacak olan pseudo-Finsler manifoldunun incelenmesine yönelik ihtiyaç duyulacak gerekli temel tanım, teorem ve geometrik yapıları vermektir.

Tanım 3.3.1 V sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa V üzerinde $F = F(y)$ fonksiyonu bir Minkowski norm olarak adlandırılır:

1) Herhangi bir $y \in V$ için $F(y) \geq 0$ dır ve $F(y) = 0$ dır ancak ve ancak $y = 0$ dır.

2) Herhangi bir $y \in V$ ve $\lambda > 0$ için $F(\lambda y) = \lambda F(y)$ dir.

3) Herhangi bir $y \in V \setminus \{0\}$ için,

$$\begin{aligned} g_y : \quad & V \times V \quad \to \quad \mathbb{R} \\ & (u,v) \quad \mapsto \quad g_y(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[F^2(y + su + tv)\right]_{s=t=0} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı V üzerinde g_y simetrik bilineer fonksiyoneli bir iç çarpım olacak şekilde F, $V \setminus \{0\}$ üzerinde C^∞ sınıfındandır. g_y iç çarpımı y doğrultusunda bir temel form olarak adlandırılır. (V,F) ikilisine bir Minkowski uzayı denir (Chern ve Shen, 2005).

Tanım 3.3.2 M, C^∞, bağlantılı ve sonlu boyutlu bir manifold olsun.

$$TM^0 = TM \setminus \{0\} = \{y \in T_xM \text{ için } y \neq 0,\ x \in M\}$$

ifadesi M manifoldu üzerinde slit tanjant demet olarak adlandırılır. M manifoldu üzerinde F Finsler metrik, $TM^0 = TM \setminus \{0\}$ slit tanjant demetinde C^∞ bir fonksiyondur. Öyle ki onun her bir T_xM tanjant uzayına kısıtlanmışı bir Minkowski normdur (Mo, 2006).

M, $m-$boyutlu reel diferensiyellenebilir bir manifold olsun ve TM, M manifoldunun tanjant demeti olsun. M manifoldunda bir koordinat sistemi $\{(U,\varphi);\, x^1,...,x^m\}$ veya $\{(U,\varphi);\, x^i\}$ tarafından gösterilir. Burada U, M manifoldunun bir açık altkümesi, $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu U altkümesinin $\varphi(U)$ üzerine bir diffeomorfizmi ve herhangi bir $x \in U$ için $(x^1,...,x^m) = \varphi(x)$ dir. M manifoldunda TM tanjant demetinin kanonik projeksiyonu π olmak üzere $T_xM = \pi^{-1}(x)$, $x \in M$ noktasında T_xM nin fibresini göstersin. M manifoldunda $\{(U,\varphi);\, x^i\}$ koordinat sistemi, TM tanjant demetinde $\{(U^*,\Phi);\, x^1,...,x^m,y^1,...,y^m\} = \{(U^*,\Phi);\, x^i,y^i\}$ koordinat sistemini tanımlar.Burada $U^* = \pi^{-1}(U)$ olmak üzere $\Phi : U^* \to \mathbb{R}^{2m}$, U^* altkümesinin $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ üzerine bir diffeomorfizmidir ve herhangi bir $x \in U$ ve $y_x \in T_xM$ için $(x^1,...,x^m,y^1,...,y^m) = \Phi(y_x)$ dir. Kısalık için y_x in koordinatları (x,y) tarafından gösterilir (Bejancu ve Farran, 2000).

$U \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$ olacak şekilde M manifoldunda $\{(\widetilde{U},\widetilde{\varphi});\, \widetilde{x}^i\}$ bir diğer koordinat sistemini düşünelim. O zaman TM tanjant demeti üzerinde (x,y) ve $(\widetilde{x},\widetilde{y})$ lokal koordinatlar

$$\begin{aligned} \widetilde{x}^i &= \widetilde{x}^i(x^1,...,x^m) \\ \widetilde{y}^i &= B^i_j(x)y^j \end{aligned} \tag{3.6}$$

tarafından ilişkilendirilir. Burada $B^i_j(x) = \dfrac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j}$ olarak alınır. $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ ve $\left\{\dfrac{\partial}{\partial \widetilde{x}^i}, \dfrac{\partial}{\partial \widetilde{y}^i}\right\}$ lokal çatı alanları, (3.6) ifadesinin bir sonucu olarak

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = B^j_i(x)\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^j} + B^j_{ik}(x)y^k\frac{\partial}{\partial \widetilde{y}^j}; \qquad B^j_{ik}(x) = \frac{\partial^2 \widetilde{x}^j}{\partial x^i \partial x^k} \tag{3.7}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = B^j_i(x)\frac{\partial}{\partial \widetilde{y}^j} \tag{3.8}$$

ifadelerini sağlar.

Benzer şekilde, T^*M kotanjant demeti üzerinde $\{dx^i, dy^i\}$ ve $\{d\widetilde{x}^i, d\widetilde{y}^i\}$ lokal çatı alanları

$$d\widetilde{y}^i = B^i_{jk}(x)y^j dx^k + B^i_j(x)dy^j$$

ve

$$d\widetilde{x}^i = B^i_j(x)dx^j$$

tarafından ilişkilendirilir (Bejancu ve Farran, 2000).

Tanım 3.3.3 M', $\pi(M') = M$ ve $TM \setminus \{0\} \cap M'$ olacak şekilde TM tanjant demetinin boş kümeden farklı açık altmanifoldu olsun. Varsayalım ki $M'_x = T_xM \cap M'$, herhangi bir $k > 0$ ve $y \in M'_x$ için, $ky \in M'_x$ olan, pozitif konik kümesidir. $F : M' \to (0,\infty)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu $F^* = F^2$ olarak düşünülür. Bu durumda $\{(U^*, \Phi);\ x^i, y^i\}$ herhangi koordinat sistemi için, aşağıdaki şartlar sağlansın:

$\mathbf{F}_1$) F, $(y^1, ..., y^m)$ e göre birinci dereceden pozitif homojendir. Yani herhangi bir $(x, y) \in \Phi(U^*)$ ve $k > 0$ için

$$F(x^1, ..., x^m, ky^1, ..., ky^m) = kF(x^1, ..., x^m, y^1, ..., y^m)$$

dir.

$\mathbf{F}_2$) Herhangi bir $(x, y) \in \Phi(U^*)$ noktasında

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^i \partial y^j}(x, y), \qquad i,\ j \in \{1, ..., m\} \tag{3.9}$$

$\mathbb{R}^m$ de pozitif tanımlı kuadratik form bileşenleridir.

F ile birlikte $(\mathbf{F}_1)$ ve $(\mathbf{F}_2)$ şartlarını sağlayan $\mathbb{F}^m = (M, M', F)$ üçlüsüne Finsler manifold denir ve F, $\mathbb{F}^m$ nin temel fonksiyonudur (Bejancu ve Farran, 2000).

Burada $(\mathbf{F}_2)$ şartı Finsler geometride bazı uygulamalar için yeterli değildir. Bu durumu gidermek için $q < m$ bir pozitif tamsayı ve $F^* : M' \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyonu düşünelim. Burada M', TM tanjant demetinin boş kümeden farklı açık altmanifoldudur.

Varsayalım ki $\{\Phi(U^*);\ x^i, y^i\}$ herhangi bir koordinat sistemi için aşağıdaki şartlar sağlansın:

$\mathbf{F}_1^*$) F^*, $(y^1, ..., y^m)$ göre ikinci dereceden pozitif homojendir.Yani herhangi bir $(x, y) \in \Phi(U^*)$ ve $k > 0$ için

$$F^*(x^1, ..., x^m, ky^1, ..., ky^m) = k^2 F^*(x^1, ..., x^m, y^1, ..., y^m)$$

dir.

$\mathbf{F}_2^*$) Herhangi bir $(x, y) \in \Phi(U^*)$ noktasında, $\mathbb{R}^m$ de $g_{ij}(x, y)$, (3.9) formülü tarafından tanımlanan, $0 < q < m$ indeksli $m - q$ tane pozitif özdeğerli ve q tane negatif özdeğerli kuadratik form bileşenleridir.

Bu durumda $\mathbb{F}^m = (M, M', F^*)$ üçlüsüne q indeksli indefinit Finsler manifold denir. Eğer $q = 1$ ise, $\mathbb{F}^m$ ye Lorenzian işaretli Finsler manifold denir. İndefinit Finsler manifold için temel fonksiyon, $\forall (x, y) \in \Phi(U^*)$ için $F(x, y) = |F^*(x, y)|^{\frac{1}{2}}$ tarafından lokal bir şekilde tanımlanan $F : M' \to [0,\infty)$ fonksiyonudur. $0 \leq q < m$ indeksli $(\mathbf{F}_1^*)$ ve $(\mathbf{F}_2^*)$ şartlarını sağlayan $\mathbb{F}^m = (M, M', F^*)$ üçlüsü pseudo-Finsler manifold olarak adlandırılır (Bejancu ve Farran, 2000).

Tanım 3.3.4 Herhangi bir $x \in M$ için, $G^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y^j y^k$ spray bileşenleri eğer $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x \in T_x M$ de kuadratikse, F Finsler metriği, Berwald metrik olarak adlandırılır. Burada $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x)$, $x \in M$ noktasının Christoffel sembolleridir (Chern ve Shen, 2005). Ayrıca Riemannian metrikler, özel Berwald metriklerdir (Mo, 2006).

Tanım 3.3.5 Finsler geometride Riemannian yapının aksine, koneksiyonu tanımlayabilmek için metriğin üçüncü türevini düşünmeye ihtiyaç vardır. Bu ifade Cartan tensörde mevcuttur. 3-lineer form olan Cartan tensor, $w_1, w_2, w_3 \in T_{\pi(v)}M$ için

$$C_v(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{4}\frac{\partial^3}{\partial s_3 \partial s_2 \partial s_1} F^*\left(v + \sum_{i=1}^{3} s_i w_i\right)\Bigg|_{s_1=s_2=s_3=0} \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $v \in M'$ olmak üzere $M' \subset TM \setminus \{0\}$, TM tanjant demetinin konik açık kümesidir (Mo, 2006).

Sonuç 3.3.1 (M,F) pseudo-Finsler manifoldu olduğundan Cartan tensör simetriktir. Herhangi bir $v \in M', M' \subset TM \setminus \{0\}$ ve $w_1, w_2 \in T_{\pi(v)}M$ için

$$C_v(v, w_1, w_2) = C_v(w_1, v, w_2) = C_v(w_1, w_2, v) = 0 \tag{3.11}$$

dır (Mo, 2006).

Teorem 3.3.1 $\mathbb{F}^m = (M, M', F)$ pseudo-Finsler manifold bir pseudo-Riemannian manifolddur ancak ve ancak $M' = TM^0$ dır ve TM^0 üzerinde Cartan tensör alanı sıfırdır (Bejancu ve Farran, 2000).

Teorem 3.3.2 İki Finsler metrik konformaldir ancak ve ancak eş metrik tensörler birbirleriyle orantılıdır. Knebelman'ın teoreminden, bu çıkarsama

$$\widetilde{g}_{ij} = e^{2\alpha} g_{ij} \tag{3.12}$$

şeklinde yazılır. Burada $\alpha = \alpha(x) : M \to \mathbb{R}$ skalar bir fonksiyon, $\widetilde{g}$ ve g Finsler metriklerdir. Ayrıca E. Cartan'ın türettiği Cartan tensörü de

$$\widetilde{C}_{ijk} = e^{2\alpha} C_{ijk} \tag{3.13}$$

olarak kabul edilir (Knebelman, 1929).

Tanım 3.3.6 M ve N, m ve $m+n$ boyutlu iki diferensiyellenebilir manifold olsun ve (u^α) ve (x^i) sırasıyla M ve N üzerinde lokal koordinatlar olsun. TM ve TN tanjant demetlerinin doğru elementleri olan durum ve doğrultmanları içeren çiftleri (u^α, v^α) ve (x^i, y^i) tarafından gösterilir. Burada α, $\beta = 1, ..., m$ ve $i,\ j = 1, ..., m+n$ dir.

$$\begin{array}{rccl} f & : & M & \rightarrow & N \\ & & (u^1, u^2, ..., u^m) & \rightarrow & x^i(u^1, u^2, ..., u^m) \end{array}$$

olarak verilen diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. f dönüşümünün tanjant ya da türev dönüşümü

$$\begin{array}{rccl} f_* & : & T_uM & \rightarrow & T_xN \\ & & (u^\alpha, v^\alpha) & \rightarrow & (x^i(u), y^i(u,v)) \end{array}$$

olarak tanımlanır. Burada $y^i(u,v) = B^i_\alpha v^\alpha$ ve $B^i_\alpha = \dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ dir (Bidabad, 2009).

Tanım 3.3.7 $G = F^2$ fonksiyonu F Finsler metriğinin kare normu olarak adlandırılır. Eğer F Finsler metriğinin kare normu g metriğinin kare normuyla çakışıyorsa, F Finsler metriğine g Riemannian metriğiyle ilişkilidir denir. Örneğin, herhangi bir $v \in TM$ için

$$G(v) = F^2(v) = g(v,v) \tag{3.14}$$

dir (Spiro, 1999).

Tanım 3.3.8 $f : M \rightarrow N$ Finsler manifoldlar arasındaki f dönüşümünün her bir $p \in M$ noktasındaki türevi $f_* : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ olacak şekilde birebir dönüşüm ise f dönüşümüne immersion denir (Bejancu ve Farran, 2000).

Tanım 3.3.9 (M_1, F_1) ve (M_2, F_2) Finsler manifoldlar arasında

$$f : (M_1, F_1) \rightarrow (M_2, F_2)$$

diferensiyellenebilir dönüşümü

i) f bir diffeomorfizmdir.

ii) $F_1(t,s) = F_2(f(t), f_*(t)),\ \forall (t,s) \in TM_1 \setminus \{0\}$

şartlarını sağlıyorsa, bir izometri ya da Finsler izometri olarak adlandırılır (Mircea, 2008).

Tanım 3.3.10 M, $m-$boyutlu bir reel manifold ve $A = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in \iota}\}$, M manifoldunda C^∞ sınıfından bir atlası olsun. Her bir $p \in M$ için, T_pM ve T_p^*M sırasıyla tanjant ve kotanjant uzayları gösterir. $TM = \cup_{p \in M} T_pM$, M manifoldu üzerinde tanjant demet olarak adlandırılır. Benzer şekilde $T^*M = \cup_{p \in M} T_p^*M$, M manifoldu üzerinde kotanjant demet olarak adlandırılır (Antonelli, 2004).

Tanım 3.3.11 M manifoldunda (U, ϕ) bir lokal haritası için $\pi : TM \to M$ kanonik projeksiyon olmak üzere $\Phi(v) = (\phi(\pi(v)), h_{\phi,\, \pi(v)}(v))$ tarafından, $\Phi : \pi^{-1}(U) \subset TM \to \phi(U) \times \mathbb{R}^m$ şeklinde tanımlanır. $(\pi^{-1}(U), \Phi)$, TM tanjant demetinde lokal haritalardır ve indirgenmiş lokal harita olarak adlandırılır. Bütün indirgenmiş lokal haritaların kümesi TM tanjant demetinde C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir atlası tanımlar. Sonuç olarak, TM tanjant demetinde $2m-$boyutlu C^∞ sınıfından manifolddur. (TM, π, M) üçlüsü M taban manifoldunun tanjant demeti olarak adlandırılır. (T^*M, π^*, M) üçlüsü kotanjant demet olarak adlandırılır ve $\pi^*(w) = p$ tarafından tanımlanan $\pi^* : T^*M \to M$ kanonik submersiyondur ancak ve ancak $w \in T_p^*M$ dir (Antonelli, 2004).

Tanım 3.3.12 $u \in TM$ olmak üzere TM ye u noktasında tanjant uzay denilir ve T_uTM tarafından gösterilir. T_uTM tanjant uzayındaki X_u vektörü doğal bazlara göre $X_u = X^i(u) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_u + Y^i(u) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_u$ formunda gösterilir. T_uTM tanjant uzayının V_uTM, $m-$boyutlu vektör altuzayını $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_u \right\}$ gerer ve V_uTM dikey altuzay olarak adlandırılır ve dikey ayrışım olarak adlandırılan

$$V : u \in TM \to V_uTM \subset T_uTM$$

$m-$boyutlu integrallenebilen ayrışımı tanımlar.

Eğer $VTM = \cup_{u \in TM} V_uTM$ tarafından gösterilirse, o zaman, VTM, (TTM, τ, TM) tanjant demetinin alt demetidir.

$\pi : TM \to M$ bir submersiyon iken, $\forall u \in TM$ için $\pi_{*,u} : T_uTM \to T_{\pi(u)}M$ lineer uzayının bir epimorfizmidir. Burada $\pi_{*,u}$, $u \in TM$ noktasında π tarafından indirgenen bir lineer dönüşümdür. $\pi_{*,u}$ dönüşümünün çekirdeği dikey altuzaydır, yani $\forall u \in TM$ için $V_uTM = \ker \pi_{*,u}$, dir.

TTM tanjant uzayı iki doğal projeksiyon taşır. Bunlardan birincisi (TTM, τ, TM) tanjant demetinin τ doğal projeksiyonudur. İkincisi π tarafından indirgenen π_* lineer dönüşümüdür. Lokal koordinatlarda $\tau : (x, y, X, Y) \in TTM \to (x, y) \in TM$ ve

$\pi_* : (x,y,X,Y) \in TTM \to (x,X) \in TM$, TM tanjant demeti üzerinde bir lineer olmayan koneksiyon

$$T_uTM = H_uTM \oplus V_uTM, \quad \forall u \in TM \tag{3.15}$$

olacak şekilde (TTM,τ,TM) tanjant demetinin (HTM,τ_H,TM) alt demetidir. TM de HTM non-lineer koneksiyonu, M bağlantılı olmak kaydıyla, m sabit ranklı

$$H : u \in TM \to H_uTM \subset T_uTM \tag{3.16}$$

yatay ayrışım olarak adlandırılan ayrışımı yatay indirger ve (3.15) ifadesinde görüldüğü gibi yatay ayrışım dikey ayrışımın bir tümleyenidir.

$\pi_{*,u} : T_uTM \to T_{\pi(u)}M$ bir epimorfizm iken, $\pi_{*,u}$ dönüşümünün H_uTM yatay altuzayına kısıtlanmışı $\pi_{*,u}|_{H_uTM} : H_uTM \to T_{\pi(u)}M$ izomorfizmidir (Antonelli, 2004).

Tanım 3.3.13 M', TM tanjant demetinin boş kümeden farklı açık altmanifoldu olmak üzere, $\mathbb{F}^m = (M,M',F)$, $0 \leq q < m$ indeksli pseudo-Finsler manifold olsun. $\pi : M' \to M$ submersiyonlu $\pi_* : TM' \to TM$ tanjant dönüşümünü düşünelim ve $VM' = \ker \pi_*$ vektör demeti tanımlansın. Lokal olarak $\pi^i(x,y) = x^i$ ise, $U' \subset M'$ koordinat komşuluğunda

$$\pi^i_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j \quad \text{ve} \quad \pi^i_*\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0$$

olarak elde edilir. $\left\{\frac{\partial}{\partial y^j}\right\}$, M' üzerinde m ranklı integrallenebilen ayrışım olan $\Gamma(VM'|_{U'})$ nün bazıdır. VM', $\mathbb{F}^m$ nin dikey vektör demeti olarak adlandırılır. VM' dikey vektör demetinin dual vektör demeti V^*M' tarafından gösterilir. O zaman V^*M' demetinin diferensiyellenebilir kesmesi Finsler 1-form dur. Varsayalım ki $\{\theta^1,...,\theta^m\}$ bazı, $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1},...,\frac{\partial}{\partial y^m}\right\}$ bazının dual bazıdır. Bu durumda $\theta^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \delta^i_j$ dir. $\forall w \in \Gamma(V^*M')$ için

$$w = w_i(x,y)\theta^i \tag{3.17}$$

olarak lokal bir şekilde yazılır. Burada $w_i(x,y) = w\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$ dir. (3.8) ve (3.17) ifadeleri kullanılarak, (3.6) ifadesine göre

$$w_i(x,y) = \widetilde{w}_i(\widetilde{x},\widetilde{y})B^j_i(x)$$

ve

$$\widetilde{\theta}^i(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \theta^j(x,y)B^i_j(x)$$

olarak türetilir (Bejancu ve Farran, 2000).

Tanım 3.3.14 M', TM tanjant demetinin boş kümeden farklı açık altmanifoldu olmak üzere $\mathbb{F}^m = (M, M', F)$ pseudo-Finsler manifold üzerinde (r,s) tipli bir Finsler tensör alanı

$$T : (\Gamma(V^*M'))^r \times (\Gamma(VM'))^s \to \mathfrak{F}(M') \tag{3.18}$$

$(r+s)$ çok lineer bir dönüşümdür. Burada $\mathfrak{F}(M')$ çoklineer fonksiyonları gösterir. Lokal bir şekilde,

$$\widetilde{T}^{h_1,\ldots,h_r}_{k_1,\ldots,k_s}(\widetilde{x},\widetilde{y})B^{k_1}_{j_1}(x)\ldots B^{k_s}_{j_s}(x) = T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}(x,y)B^{h_1}_{i_1}(x)\ldots B^{h_r}_{i_r}(x)$$

sağlayan, T, m^{r+s} diferensiyellenebilir fonksiyonları tarafından verilir ve

$$T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}(x,y) = T\left(\theta^{i_1},\ldots,\theta^{i_r},\frac{\partial}{\partial y^{j_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial y^{j_s}}\right)(x,y)$$

şeklinde ifade edilir. $y_x \in M'_x$ noktasında (r,s) tipli Finsler tensör vektör uzayının elementi

$$T^r_s(VM')_{y_x} = L_{(r+s)}((V^*M')^r{}_{y_x} \times (VM')^s{}_{y_x}, \mathbb{R})$$

dir. Buradan

$$T^r_s(VM') = \bigcup_{y_x \in M'} T^r_s(VM')\ {}_{y_x}$$

vektör demeti M' üzerinde, $\mathbb{F}^m$ pseudo-Finsler manifoldunun (r,s) tipli Finsler tensör demeti olarak adlandırılır. Özellikle

$$T^1_0(VM') = VM'$$

$\mathbb{F}^m$ pseudo-Finsler manifoldunun Finsler vektör demeti ve

$$T^0_1(VM') = V^*M'$$

$\mathbb{F}^m$ pseudo-Finsler manifoldunun Finsler kovektör demeti olarak adlandırılır (Bejancu ve Farran, 2000).

Tanım 3.3.15 g, VM' üzerinde bir pseudo-Riemannian metrik olduğundan, bir Finsler vektör aşağıdaki gibi kausal karakterlere sahiptir. $X \in VM'$ için

1) Eğer $g_u(X,X) > 0$ ya da $X = 0$ ise, X vektörü spacelike

2) Eğer $g_u(X,X) < 0$ ise, X vektörü timelike

3) Eğer $g_u(X,X) = 0$ ise, X vektörü lightlike (null) dır. Burada $g_u = g(u)$ dur (Bejancu ve Farran, 2000).

X vektörünün Finsler normu (uzunluğu),

$$\|X\| = |g_u(X,X)|^{\frac{1}{2}} \tag{3.19}$$

tarafından tanımlanan negatif olmayan sayıdır.

Eğer $g_u(X,X)=1$ ve $g_u(X,X)=-1$ ise, sırasıyla, X birim spacelike vektör ve birim timelike vektördür. Eğer X birim Finsler vektör ise, o zaman $\varepsilon=g_u(X,X)$, X vektörünün işareti olarak adlandırılır (Bejancu ve Farran, 2000).

3.4 Pseudo-Finsler Manifold Üzerinde Koneksiyon ve Jeodezikleri

Bu kısmında, pseudo-Finsler manifold üzerinde tanımlanan afin koneksiyon, Levi-Civita koneksiyon, Chern koneksiyon, Finsler koneksiyon kavramlarına değinilmiştir. Ayrıca pseudo-Finsler manifold üzerinde jeodezik yapı tanımlanmıştır.

Tanım 3.4.1 Geri çekme demeti π^*TM üzerinde $\nabla_{\overline{X}}U=\left\{dU^i(\overline{X})+U^j(x)w_j^i(\overline{X})\right\}\otimes e_i$ veya daha basit bir şekilde $\nabla U=\left\{dU^i+U^jw_j^i\right\}\otimes e_i$ tarafından ifade edilen

$$\nabla : T(TM)\times C^\infty(\pi^*TM)\rightarrow \pi^*TM$$

fonksiyonu bir lineer koneksiyondur ve Chern koneksiyon olarak adlandırılır (Shen, 2001).

Finsler uzay üzerindeki vektör alanlarına, doğrultman türevinin notasyonu aşağıdaki gibi genişletilebilir:

Tanım 3.4.2 (M,F) Finsler uzayı olsun. Her bir $x\in M$ noktasında

$$\nabla : T_xM\times C^\infty(TM)\rightarrow T_xM$$

dönüşümü

$$\nabla_yU=\left\{dU^{-1}+U^j(x)N_j^i(y)\right\}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x \tag{3.20}$$

tarafından tanımlanır. Burada $y\in T_xM$ ve $U\in C^\infty(TM)$ dir. Ayrıca $N_j^i(x)=\dfrac{\partial G^i}{\partial y^j}$ olarak tanımlanan TM üzerinde lokal fonksiyondur. Bu durumda ∇_yU, y yönünde x noktasında U vektör alanının kovaryant türevidir. $y=0$ için $\nabla_yU(x)=0$ alalım. Bu durumda ∇ koneksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) $\nabla_y(U+V)=\nabla_yU+\nabla_yV$

2) $\nabla_y(fU)=df_x(y)U+f(x)\nabla_yU$

3) $\nabla_{\lambda y} U = \lambda \nabla_y U, \lambda > 0$

Bu şartlar altında $\nabla = \{\nabla_y\}_{y \in TM}$ ailesi F Finsler metriğinin koneksiyonu olarak adlandırılır. Ek olarak,

4) $\nabla_{y+v} U = \nabla_y U + \nabla_v U$

lineerlik şartı da sağlanıyorsa, o zaman ∇ koneksiyonu TM tanjant demetinde afin koneksiyon olarak adlandırılır (Shen, 2001).

Önerme 3.4.1 F Finsler metriğinin ∇ koneksiyonu afin koneksiyondur ancak ve ancak F Berwald metriktir.

Dolayısıyla Berwald metrikler için ∇ koneksiyonu TM tanjant demet üzerinde afin koneksiyondur ve bu koneksiyon Levi-Civita koneksiyonu olarak adlandırılır (Shen, 2001).

Tanım 3.4.3 $\gamma = \gamma(t)$, M manifoldu üzerinde bir C^∞ eğri olsun ve $U = U^i(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)}$, γ eğrisi boyunca bir vektör alanı olsun. Eğer U vektör alanı $D_{\gamma'} U(t) = 0$ denklemini sağlarsa, U vektör alanına lineer bir şekilde paralel vektör alanı denir (Chern ve Shen, 2005).

Tanım 3.4.4 (M, F), $M' \subset TM$ tanım kümesiyle birlikte bir pseudo-Finsler manifold olsun ve $U \subset M$ açık altkümesi üzerinde diferensiyellenebilir vektör alanlarının uzayı $\chi(U)$ tarafından gösterilsin. Her bir $p \in U$ için $V_p \in M'$ ise $V \in \chi(U)$ vektörü F^*-admissibledır denir (Javaloyes ve Soares, 2014).

Tanım 3.4.5 (M, F) bir Finsler manifold ve $U \subset M$ açık bir altküme olsun. Bu durumda

$$\nabla : \chi(U) \times \chi(U) \times \chi(U) \to \nabla_X^V \in \chi(U)$$

dönüşümü

1) ∇^V koneksiyonun torsiyonu sıfırdır. Yani, her bir $X, Y \in \chi(U)$ için

$$\nabla_X^V Y - \nabla_Y^V X = [X, Y] \tag{3.21}$$

2) ∇^V koneksiyonu hemen hemen metrikle bağdaşabilir. Yani, her bir $X, Y, Z \in \chi(U)$ için

$$X(g_V(Y, Z)) = g_V(\nabla_X^V Y, Z) + g_V(\nabla_X^V Z, Y) + 2C_V(\nabla_X^V V, Y, Z) \tag{3.22}$$

şartlarını sağlar.

Ayrıca, her bir $X,Y,Z \in \chi(U)$ vektör alanları için,

$$\begin{aligned} 2g_V(\nabla^V_X Y,Z) &= X(g_V(Y,Z)) + Y(g_V(Z,X)) - Z(g_V(X,Y)) \\ &\quad + g_V([X,Y],Z) - g_V([Y,Z],X) + g_V([Z,X],Y) \\ &\quad - 2C_V(\nabla^V_X V,Y,Z) - 2C_V(\nabla^V_Y V,Z,X) + 2C_V(\nabla^V_Z V,X,Y) \end{aligned} \tag{3.23}$$

eşitliği genelleştirilmiş Kozsul formülü olarak adlandırılır (Bao vd., 2004).

Tanım 3.4.6 $\mathbb{F}^m = (M,M',F)$ bir pseudo-Finsler manifold olsun. Burada M', $\pi(M') = M$ ve $TM \setminus \{0\} \cap M'$ olacak şekilde TM tanjant demetinin boş kümeden farklı açık altmanifoldudur. TM' tanjant demetinde VM' dikey demete HM' tümleyen ayrışımı lineer olmayan koneksiyon ya da yatay ayrışım olmak üzere $\mathbb{F}^m$ üzerinde Finsler koneksiyon $FC = (HM', \nabla)$ çiftidir. Burada ∇, VM' dikey vektör demeti üzerinde bir lineer koneksiyondur.

M' de $\{(U',\Phi');x^i,y^i\}$ koordinat sistemini düşünelim ve M'de

$$TM' = HM' \oplus VM'$$

direkt toplamıyla ilişkili $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ lokal çatı alanını ele alalım. Buradan

$$\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\partial}{\partial y^i} = F^k_{ij}(x,y)\frac{\partial}{\partial y^k} \tag{3.24}$$

ve

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = C^k_{ij}(x,y)\frac{\partial}{\partial y^k} \tag{3.25}$$

elde edilir. Burada F^k_{ij} ve C^k_{ij}, M' de diferensiyellenebilir fonksiyonlardır (Bejancu ve Farran, 2000).

Tanım 3.4.7 $\pi_E : VE \to E,\ E = TM \setminus \{0\}$ demeti üzerinde bir lineer koneksiyon tanımlansın ve $s : M \to E$ bir kesme verilsin. Geri çekme demeti $s^*(VE)$, $\pi_M : TM \to M$ bir tanjant demettir. $\overset{s}{\nabla} = s^*(\nabla)$ bir geri çekme koneksiyonu olarak tanımlanabilir. Bu durumda $X,\ Y : M \to TM$ kesmeleri verilsin. $s_*(X) \in TE$ hesaplanır, $\widetilde{Y}(s(p)) = (s(p),Y(p)),\ p \in M$ tarafından verilen $s(M)$ de tanımlanan $\pi_E : VE \to E,\ E = TM \setminus \{0\}$ kesmesidir. $\widetilde{Y}(x,s(x)) = (s(x),Y(x))$ olması için $s(M)$ nin bir komşuluğunda $\widetilde{Y}(x,y)$ olarak genişletilir ve

$$\overset{s}{\nabla}_X Y = s^*(\nabla_{s_*(X)}\widetilde{Y}) = s^*(\nabla^V_{D_X s}\widetilde{Y} + \nabla^H_X \widetilde{Y}) \tag{3.26}$$

şeklinde elde edilir.

Bu ifade kovaryant türev bileşenlerinde

$$\overset{s}{\nabla}{}^{k}_{ij} = dx^k \left(\overset{s}{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)(x) = H^k_{ji}(x,s(x)) + V^k_{j\alpha}(x,s(x)) \left\{ \frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i} + N^\alpha_i(x,s(x)) \right\} \tag{3.27}$$

dir. Burada H^k_{ji}, Finsler koneksiyonunun yatay kovaryant türevinin ve $V^k_{j\alpha}$, Finsler koneksiyonunun dikey kovaryant türevinin bileşenleridir (Minguzzi, 2015).

Berwald koneksiyon

$$V^\alpha_{\beta\gamma} = 0 \tag{3.28}$$

ve

$$H^\alpha_{\mu\nu} = G^\alpha_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial v^\nu} G^\alpha_\nu \tag{3.29}$$

tarafından tanımlanır.

$\nabla^H_g = 0$ olacak şekilde hem Chern-Rund hem Cartan koneksiyonlar

$$H^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \left(\frac{\delta}{\delta x^\beta} g_{\sigma\gamma} + \frac{\delta}{\delta x^\gamma} g_{\sigma\beta} - \frac{\delta}{\delta x^\sigma} g_{\beta\gamma} \right) \tag{3.30}$$

ve

$$V^\alpha_{\beta\gamma} = C^\alpha_{\beta\gamma} \tag{3.31}$$

dir (Minguzzi, 2015).

Önerme 3.4.2 M Finsler manifoldunda $\gamma : t \in I \mapsto \gamma(t) = (x^i(t), y^i(t)) \in TM$ diferensiyellenebilir eğrisi D Finsler koneksiyonunun bir jeodeziğidir ancak ve ancak $D_\gamma \gamma' = 0$ dır, burada $\gamma'(t) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dy^i}{dt}\frac{\partial}{\partial y^i}$, γ eğrisi boyunca tanjant vektördür. $\gamma'(t) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\delta}{\delta x^i} + \frac{\delta y^i}{dt}\frac{\partial}{\partial y^i}$ iken, γ eğrisi D Finsler koneksiyonunun bir jeodeziğidir ancak ve ancak

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + F^{*i}_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + C^{*i}_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{\delta y^k}{dt} = 0 \tag{3.32}$$

dır. Burada F^{*i}_{jk} ve C^{*i}_{jk}, M manifoldunun, sırasıyla, Finsler ve Cartan koneksiyonlarıdır (Antonelli, 2004).

Önerme 3.4.3 Lineer olmayan koneksiyonun $\gamma(t) = (x^i(t))$ otoparalel eğrisi Finsler koneksiyonunun bir jeodeziğidir ancak ve ancak

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + F^{*i}_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{3.33}$$

dır (Antonelli, 2004).

Tanım 3.4.8 $\mathbb{F}^m = (M, M', F^*)$ bir pseudo-Finsler manifold olsun ve γ, M manifoldu üzerinde yönlendirilmiş diferensiyellenebilir bir eğri olsun.

$$x^i = x^i(t),\ t \in [a,b]$$

ifadesi tarafından verilen γ eğrisinin AB parçasını düşünelim. Burada A ve B, sırasıyla, $x^i(a)$ ve $x^i(b)$ koordinatlara sahiptir.

Varsayalım ki AB parçası non-dejeneredir. Yani,

$$F(x(t), x'(t)) \neq 0,\ \forall t \in [a,b]$$

dir. Burada $x(t) = x^i(t)$ ve $x'(t) = \dfrac{dx^i}{dt}$ olarak kabul edilir. O zaman AB parçasının uzunluğu

$$\|AB\| = \int_a^b F(x(t), x'(t))dt \tag{3.34}$$

tarafından tanımlanır. Bu ifadeye göre γ eğrisinde s yay uzunluğu parametresi

$$s = \int_a^b F(x(t), x'(t))dt \tag{3.35}$$

tarafından verilir ve dolayısıyla

$$\frac{ds}{dt} = F(x(t), x'(t)) \tag{3.36}$$

dir.

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + 2G^i(x(s), x'(s)) = 0 \tag{3.37}$$

ifadesinde homojen fonksiyonlara göre Euler teoreminden $\dfrac{\partial G^i}{\partial y^k} y^k = 2G^i$ ifadesi kullanılırsa

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{\partial G^i}{\partial y^k}(x(s), x'(s))\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{3.38}$$

olarak bulunur. Eğer $\{(U, \varphi);\ x^i\}$ herhangi koordinat sistemi için (3.37) diferensiyel denklem sisteminin bir çözümü $x^i = x^i(s)$ olacak şekilde γ eğrisi üzerinde bir s parametresi mevcutsa, M manifoldunda γ non-dejenere diferensiyellenebilir eğri $\mathbb{F}^m$ pseudo-Finsler manifoldunun bir non-dejenere jeodeziğidir (Bejancu ve Farran, 2000).

Önerme 3.4.4 $\widetilde{M}$, M manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere, $\widetilde{M}$ pseudo-Finsler manifoldu üzerinde γ eğrisi $h-$otoparaleldir ancak ve ancak

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \widetilde{F}^{*i}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{3.39}$$

eşitliği mevcuttur (Bejancu ve Farran, 2000).

$h-$otoparalel eğriler için (3.39) denkleminin non-dejenere çözümleri $\widetilde{\mathbb{F}}^{m+n} = (\widetilde{M}, \widetilde{M}', \widetilde{F}^*)$ pseudo-Finsler manifoldunun non-dejenere jeodezikleri olan (3.37) denklemleriyle örtüşür. Buna göre, genelde, $\widetilde{M}$ pseudo-Finsler manifoldunda γ eğrisi, Cartan koneksiyonuna göre $h-$otoparalel eğri ise, bu eğri $\widetilde{\mathbb{F}}^{m+n}$ pseudo-Finsler manifoldunun bir jeodeziğidir (Bejancu ve Farran, 2000).

Tanım 3.4.9 (M_1, F_1) ve (M_2, F_2) Finsler manifoldlar arasındaki $f : (M_1, F_1) \to (M_2, F_2)$ diferensiyellenebilir dönüşümü afin dönüşümdür ancak ve ancak

$$f^i_{\alpha\beta} - \nabla^{\gamma}_{\alpha\beta} f^i_{\alpha} + \widetilde{\nabla}^i_{jk} f^j_{\alpha} f^k_{\beta} = 0 \tag{3.40}$$

dir. Burada $\nabla^{\gamma}_{\alpha\beta} = \nabla^{\gamma}_{\alpha\beta}(t^{\mu}, y^{\mu})$ ve $\widetilde{\nabla}^i_{jk} = \widetilde{\nabla}^i_{jk}(f^l(t^{\mu}), f^l_{\varepsilon}(t^{\mu}) y^{\varepsilon})$, sırasıyla, (M_1, F_1) ve (M_2, F_2) üzerinde Berwald koneksiyonun adapte edilmiş bileşenleridir (Mircea, 2008).

3.5 Pseudo-Finsler Geometride Bazı Diferensiyel Operatörler

Bu kısımda değinilen gradient fonksiyonunun, Finsler geometrideki karşılığı Riemannian geometridekinden farklı olarak Legendre dönüşümü yardımıyla verilmektedir. Ayrıca bu kısımda pseudo-Finsler manifoldlar üzerinde tanımlanan divergens teoremi ile bu teorem için gerekli olan hacim formu tanımı gibi bazı kavramlara da yer verilmiştir.

Tanım 3.6.1 Finsler manifoldundaki gradient fonksiyonunu tanımlamak için, M manifoldu üzerinde F Finsler yapısı verilsin.

$$F^*(x, \xi) = \sup_{F(x,v) \leq 1} \xi(v), \ \forall \ \xi \in T^*_x M \tag{3.41}$$

yardımıyla tanımlanan F^*, $T^*_x M$ kotanjant uzayında dual normdur. Böylelikle F^*, $T^*_x M$ dual uzayında bir Minkowski norm olduğunda

$$g^*_{ij}(x, \xi) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \left(\frac{1}{2} F^{*2} \right) (x, \xi) \tag{3.42}$$

ifadesi $\forall \ (x, \xi) \in T^*M \setminus \{0\}$ için pozitif tanımlıdır (Chao, 2013).

Legendre dönüşümü $l : TM \to T^*M$ olacak şekilde

$$l(Y) = \begin{cases} g_Y(Y, \cdot), & Y \neq 0 \\ 0 \quad , & Y = 0 \end{cases}$$

tarafından tanımlanır. Herhangi bir $x \in M$ noktası için $T_xM \setminus \{0\}$ dan $T_x^*M \setminus \{0\}$ Legendre dönüşümü bir diffeomorfizmdir ve normu korur. Yani, $\forall Y \in TM$ için $F(Y) = F^*(l(Y))$ dir.

$f = M \to \mathbb{R}$, M manifoldunda bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun gradienti, $\nabla f = l^{-1}(df)$ olarak tanımlanır. Burada $l^{-1} : T^*M \to TM$ Legendre dönüşümünün tersi ve d diferensiyel operatörüdür. Dolayısıyla

$$df(X) = g_{\nabla f}(\nabla f, X),\ X \in TM \tag{3.43}$$

ifadesi mevcuttur.

Tanım 3.6.2 $U = \{x \in M : \nabla f\ |_x \neq 0\}$ olmak üzere U kümesinde f fonksiyonunun H_f Hessian'ı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$H_f(X,Y) = X(Y(f)) - \nabla_X^{\nabla f} Y(f),\ \forall X,\ Y \in TM|_U\,. \tag{3.44}$$

H_f simetrik olduğundan,

$$H_f(X,Y) = g_{\nabla f}(\nabla_X^{\nabla f} \nabla f, Y) \tag{3.45}$$

olarak yeniden yazılabilir (Wu, 2013).

Tanım 3.6.3 M manifoldunun (U,Φ) lokal haritasını ve bir keyfi $x \in U$ noktasını ele alalım. T_xM tanjant uzayı, $y \mapsto (y^i)$ fibre koordinat aracılığıyla $\mathbb{R}^k$ ile kanonik özdeştir.

x noktasında

$$B_x = \{(y^i) \in \mathbb{R}^k : F(x,y) \leq 1\}$$

kapalı Finsler birim yuvar $\mathbb{R}^k$ nın kompakt, konveks altkümesidir. B_x Finsler birim yuvarında homojen fonksiyonların integralleri ve onun sınırı (indikatrisi) $S_x = \partial B_x$ aşağıdaki şekildedir: (Crampin, 2014)

Eğer

$$\begin{array}{rcl} f: & TM^0 \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

C^∞ sınıfından ve y de m. dereceden homojen ise, o zaman

$$\int_{B_x} f(x,y)d^k y = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq F(x,\,y) \leq 1} f(x,y)d^k y$$

iyi tanımlıdır ve

$$\int_{S_x} f\mu = (k+m)\int_{B_x} f(x,y)d^k y$$

dir. Burada μ, S_x sınırında Öklid hacim formunu gösterir (Crampin, 2014).

Tanım 3.6.4 M bir C^∞ $m-$manifold olsun. M manifoldu üzerinde $d\mu$ hacim formu

V1) $M = \cup U_i$

V2) Eğer $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ ise, o zaman $U_i \cap U_j$ de $d\mu_i = d\mu_j$ dir,

şartlarnıı sağlayacak şekilde $\{\varphi_i, U_i\}$ koordinat komşuluğunda $d\mu_i = \sigma_i(x)dx^1...dx^m$ non-dejenere $m-$formların topluluğudur (Shen, 2001).

Teorem 3.6.1 $(M,F,d\mu)$ kompakt, yönlendirilmiş Finsler m uzay ve $\mathbf{n}$, ∂M sınırında dış noktasal normal vektör olsun. O zaman M de herhangi X vektör alanı için

$$\int_M \mathrm{div}(X)d\mu = \int_{\partial M} g_{\mathbf{n}}(\mathbf{n},X)d\nu \tag{3.46}$$

dir. Özellikle, eğer M kapalı yönlendirilmiş manifold ise, o zaman $\int_M \mathrm{div}(X)d\mu = 0$ dır (Shen, 2001).

Tanım 3.6.5 $(M,F,d\mu)$ bir Finsler m uzayı olsun. $(M,d\mu)$ de bir $C^k(k \geq 2)$ X vektör alanı için, $\mathrm{div}(X)$, M manifoldu üzerinde bir C^{k-1} fonksiyondur (Shen, 2001).

$U \subset M$ de Δf

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f) \tag{3.47}$$

tarafından tanımlanır.

Herhangi bir $\phi \in C_0^\infty(U)$ için

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\phi\nabla f) &= \phi\,\mathrm{div}(\nabla f) + d\phi(\nabla f) \\ &= \phi(\Delta f) + d\phi(\nabla f) \end{aligned} \tag{3.48}$$

dir. Burada Δ Laplacian operatörüdür (Shen, 2001).

Tanım 3.6.6 M manifoldunda μ bir hacim formu ve $S \subset M$, $\mathbf{n}$ normalli bir hiperyüzey olsun. X, S ye enine vektör alanı olsun. O zaman S de indirgenmiş hacim formu

$$\nu = \frac{1}{-g_{\mathbf{n}}(\mathbf{n},X)} i_X\mu \tag{3.49}$$

dir ve sadece S ye teğet vektörler üzerinde hesaplanır. $D,\ \partial D = S$ olacak şekilde bir bölgedir. Divergens teoremi yardımıyla

$$\int_D \mathrm{div}_\mu X\mu = \int_D di_X\mu = \int_S i_X\mu = -\int_S g_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}, X)\nu \tag{3.50}$$

dir (Minguzzi, 2015).

3.6 Pseudo-Riemannian Dönüşüm ve Eikonal Denklemleri

Bu kısımda, Riemannian dönüşüm, pseudo-Riemannian dönüşüm ve eikonal denklemleri gibi tanımlara yer verilmiştir.

Fischer, (1992) çalışmasına göre, (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) sonlu boyutlu diferensiyellenebilir Riemannian manifoldlar arasında

$$f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$$

diferensiyellenebilir dönüşüm olsun.

$$f_{*p} : T_xM_1 \to T_yM_2$$

$p \in M_1,\ q = f(p) \in M_2$ olacak şekilde tanjant dönüşümü ya da türev dönüşümü göstersin.

Bu durumda

$$\begin{aligned} T_pM_1 &= \ker f_{*p} \oplus (\ker f_{*p})^\perp \\ &= V_p \oplus H_p \end{aligned}$$

ve

$$T_qM_2 = range f_{*p} \oplus (range f_{*p})^\perp$$

olur. Burada $V_p = \ker f_{*p} \subseteq T_pM_1$ olmak üzere T_pM_1 uzayının dikey altuzayını gösterir. $H_p = (\ker f_{*p})^\perp \subseteq T_pM_1$ olmak üzere T_pM_1 uzayının yatay altuzayını gösterir. Dolayısıyla

$$f_{*p} : V_p \oplus H_p \to range f_{*p} \oplus (range f_{*p})^\perp$$

olarak ifade edilir.

Tanım 3.7.1 Eğer

$$(f_{*p})^h = f_{*p}\big|_{H_p} : H_p \to range f_{*p}$$

dönüşümü $(H_p, g_{M_1}(p)|_{H_p})$ ve $(range f_{*p}, g_{M_2}(q)|_{range f_{*p}})$ iç çarpım uzayları arasındaki f_{*p} türev dönüşümünün yatay kısıtlaması izometrik izomorfizm olarak da bilinen bir lineer izometri ise, o zaman

$$f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

diferensiyellenebilir dönüşümüne $p \in M_1$ noktasında Riemannian dönüşümdür denir (Fischer, 1992).

Sonuç 3.7.1 M bağlantılı manifold ve $(M_2, g_2) = (\mathbb{R}, 1) = \mathbb{R}$ olacak şekilde Öklidyen metrikle birlikte reel doğru ise ve ayrıca $f : (M_1, g_1) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli dönüşüm Riemannian dönüşüm ise, o zaman $rank f = 0$ veya $rank f = 1$ dir. Bu durumda eğer $rank f = 0$ ise f sabit dönüşümdür. Eğer $rank f = 1$ ise f, $\|df\|^2 = 1$ ifadesini sağlayan geometrik optiklerin eikonal denklemini sağlar denir. Özet olarak, bağlantılı manifold üzerinde Riemannian dönüşüm, genelleştirilmiş eikonal denklemini sağlar (Fischer, 1992).

Örnek 3.7.1 $2-$boyutlu dalga denklemi $f_{tt} = c^2(f_{xx} + f_{yy})$ olsun. Burada $c = c(x, y)$ dir. $V(x, y)$ büyüklük fonksiyonu için Helmholtz denklemi

$$V_{xx} + V_{yy} + \frac{w^2}{c^2}V = 0 \tag{3.51}$$

olarak elde edilir.

c_0, dalga hızı için sabit referans değerini göstersin. Örneğin c_0, vakumda ışığın hızı ve $c(x, y)$, maddede ışığın hızıdır. Bunlar kullanılarak elde edilen $n(x, y) = \dfrac{c_0}{c(x, y)}$ sayısı ışığın kırılma indeksi olarak adlandırılır. $k = \dfrac{w}{c_0}$ dalga sayısı olmak üzere

$$\frac{w}{c(x, y)} = \frac{wn(x, y)}{c_0} = kn(x, y)$$

eşitliği mevcuttur. Bu durumda $V(x, y)$ için (3.51) denklemi

$$V_{xx} + V_{yy} + k^2 n^2(x, y)V = 0 \tag{3.52}$$

halini alır. (3.52) denkleminin çözümleri $V(x, y) = A(x, y)e^{ikf(x,y)}$ formunda elde edilir. Burada $f(x, y)$ faz fonksiyonu ve $A(x, y)$ büyüklüktür.

$E = e^{ikf(x,y)}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} V_x &= A_x E + A\,\mathrm{E}\mathrm{i}\,k f_x \\ V_{xx} &= A_{xx}E + 2A_x\,\mathrm{E}\mathrm{i}\,k f_x + AE(-k^2)(f_x)^2 + A\,\mathrm{E}\mathrm{i}\,k f_{xx} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer yollarla V_y, V_{yy} eşitlikleri de bulunur. E ile bölme işlemi yapıldıktan sonra (3.52) denklemi

$$\Delta A + ik(2A_x f_x + 2A_y f_y + A\Delta f) - k^2 A((f_x)^2 + (f_y)^2 - n^2(x,y)) = 0$$

halini alır.

Eğer $k \geq 1$ ise, ΔA terimi ihmal edilebilir ve

$$\begin{aligned} (f_x)^2 + (f_y)^2 &= n^2(x,y) \\ 2A_x f_x + 2A_y f_y + A\Delta f &= 0 \end{aligned} \tag{3.53}$$

denklemleri çözülür. Böylelikle $f(x,y)$ faz fonksiyonu için eikonal denklemi elde edilmiş olur.

(3.53) eşitliklerinde $c(x,y) = c_0 = c$ sabit olarak alınırsa, eikonal denklemi olarak $(f_x)^2 + (f_y)^2 = 1$ bulunur (Lorenz, 2015).

Örnek 3.7.2 $M^3 = \mathbb{R}^3$ olacak şekilde $\langle , \rangle$ Öklidyen metrikli Riemannian manifoldunu gözönüne alalım. M^3 manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} f: \quad M^3 &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto f(x,y,z) = x^2 + y + z^2 \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlasın. Bu f fonksiyonunun

$$\begin{aligned} \gamma: \quad I \subset \mathbb{R} &\to M^3 \\ s &\mapsto \gamma(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

eğrisi boyunca eikonal denklemi aşağıdaki gibi hesaplanır:

f fonksiyonunun gradienti

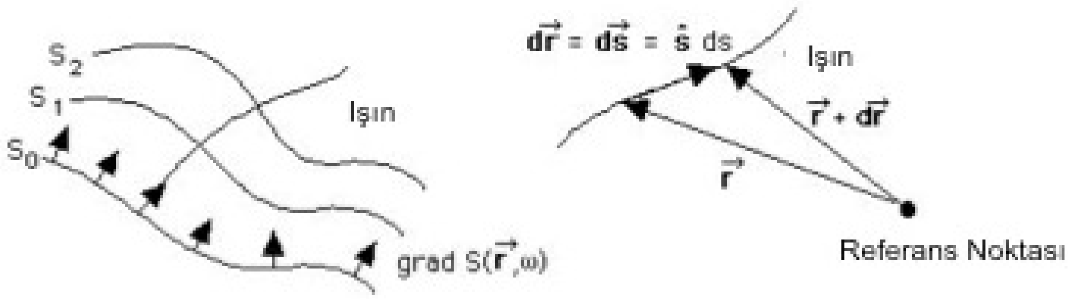
$$\nabla f = (2x, 1, 2z)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\|\nabla f\| = \sqrt{4(x^2+z^2)+1}$$

şeklinde elde edilir. γ eğrisi boyunca $\|\nabla f\| = \sqrt{5} = sbt$ olarak bulunur. M^3 Riemannian manifoldu iken $\|\nabla f\| = sbt$ ise, $f: M^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu eikonal olduğundan, f fonksiyonu γ eğrisi boyunca eikonaldir denir (Zıplar vd., 2012). Bu durumda $x^2 + z^2 = 1$ eşitliği eikonal denklemi olarak ifade edilir.

Sonuç 3.7.1 de verilen geometrik optik ifadesi ışık ışınlarının yollarının geometrisi ve optik sistemlerdeki görüntüleri demektir. Şöyle ki, bu ifade ışık ışınlarının optik sistem olarak aynalar, küresel aynalar, mercekler, iki farklı ortamlarda hareketleri vardır. İşte bunlarda ışığın hareket etmesi, yoluna devam etmesi, kırılması ve yansıması geometrik kurallarla anlatılan fiziksel kurallara bağlıdır.



Şekil 3.2: Eikonal denklemi

Eikonal denkleminin geometrik olarak ne anlama geldiği (Şekil 3.2) ile verilmiştir. Buna göre bir $\overrightarrow{r}$ ışınının, dalga cepheleri arasındaki değişim $\nabla\overrightarrow{r}$ gradient vektörü ile miktarı ise eikonal denklemi yardımıyla bulunur. Yani eikonal denklemi $\overrightarrow{r}$ ışınının, dalga cepheleri için gradient akış denkleminin çözümleridir.

$f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ pseudo-Riemannian manifoldlar arasında bir dönüşüm ve $\forall p\in M_1$ için $q=f(p)$ olsun.

$$f_{*p}:(T_pM_1,g_{1_p})\to(T_qM_2,g_{2_q})$$

türev dönüşümü, (T_pM_1,g_{1_p}) ve (T_qM_2,g_{2_q}) iç çarpım uzayları arasında bir lineer dönüşümdür.

$$\begin{aligned}
&\nu(p)=\ker f_{*p}\\
&\kappa(p)=(\ker f_{*p})^{\perp}=\nu(p)^{\perp}\\
&L_1(p)=\ker f_{*p}\cap(\ker f_{*p})^{\perp}\\
&A_1(p)=\ker f_{*p}+(\ker f_{*p})^{\perp}\\
&A_2(q)=range f_{*p}\\
&L_2(q)=range f_{*p}\cap(range f_{*p})^{\perp}
\end{aligned}$$

olarak verilsin. Buradan

$$\pi_1:\kappa(p)\to\overline{\kappa}(p)\quad \text{ve}\quad \pi_2:A_2(q)\to\overline{A}_2(q)$$

izdüşümlerle birlikte

$$\overline{\kappa}:\kappa(p)/L_1(p)\quad \text{ve}\quad \overline{A}_2=A_2(q)/L_2(q)$$

olsun. $\overline{g}_{1\overline{\kappa}(p)}$ ve $\overline{g}_{2\overline{A}_2(q)}$ sırasıyla $\overline{\kappa}$ ve $\overline{A}_2$ nın bölüm iç çarpımları olsun. Böylelikle f_{*p_1} türev dönüşümünün bölümü

$$\overline{f}_{*p} : (\overline{\kappa}(p), \overline{g}_{1\overline{\kappa}(p)}) \to (\overline{A}_2(q), \overline{g}_{2\overline{A_2}(q)}) \tag{3.54}$$

olarak tanımlanır (Eduardo ve Küpeli, 1999).

Tanım 3.7.2 $f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ bir dönüşüm olsun. $p_1 \in M_1$ noktasında f non-dejenere dönüşümünün rankı $\overline{f}_{*p_1}$ dönüşümünün rankı olarak tanımlanır (Küpeli, 1995).

Tanım 3.7.3 $f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p_1 \in M_1$ noktasında, $\|f_*\|^2 (p_1) = rank\overline{f}_{*p_1}$ ise, o zaman f dönüşümüne zayıflatılmış pseudo-Riemannian denir (Eduardo ve Küpeli, 1999).

Tanım 3.7.4 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) pseudo-Riemannian manifoldlar olsun. O zaman

$$\|f_*\|^2 = rank\overline{f}_* \tag{3.55}$$

denklemi $f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ şeklindeki dönüşümler için her bir $p_1 \in M_1$ noktasında

$$\|f_*\|^2 (p_1) = rank\overline{f}_{*p_1} \tag{3.56}$$

tarafından tanımlanan bir genelleştirilmiş eikonal denklemi olarak adlandırılır. Dolayısıyla zayıflatılmış pseudo-Riemannian dönüşümler genelleştirilmiş eikonal denkleminin birer çözümleridir (Eduardo ve Küpeli, 1999).

Böylece $f : (M, g) \to (\mathbb{R}, kdt \otimes dt)$ için genelleştirilmiş eikonal denklemi

$$g(\nabla f, \nabla f) = krank\overline{f}_* \tag{3.57}$$

halini alır. Fakat $rank\overline{f}_* \leq 1$ olduğundan, $f : (M, g) \to (\mathbb{R}, kdt \otimes dt)$ zayıflatılmış pseudo-Riemannian dönüşümü

$$g(\nabla f, \nabla f) = k \tag{3.58}$$

denklemini sağlar. Burada $k = -1$, $k = 0$ veya $k = 1$ dir. Bu şekilde tanımlanan denklemler, $f : (M, g) \to \mathbb{R}$ dönüşümleri için (M, g) manifoldunun pseudo-Riemannian eikonal denklemleri olarak isimlendirilir. Açık bir şekilde (M, g) manifoldunun pseudo-Riemannian eikonal denklemlerinin çözümleri $f : (M, g) \to (\mathbb{R}, kdt \otimes dt)$ zayıflatılmış pseudo-Riemannian dönüşümlerdir. Burada $k = -1$ ya da $k = 1$ dir (Eduardo ve Küpeli, 1999).

Örnek 3.7.3 $\mathbb{R}^3 = M_1$, $g_1 = -dx \otimes dx - dy \otimes dy + dz \otimes dz$ metrikli bir Minkowski uzay ve $\mathbb{R}^2 = M_2$, $g_1 = du \otimes du + dv \otimes dv$ metrikli bir Öklidyen uzay olsun. $f(x,y,z) = (x + \sqrt{2}z, y + \sqrt{2}z)$ tarafından tanımlanan $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümünün f_* türev dönüşümünün Jakobiyanı

$$f_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Jakobiyan matrisinin rankı 2 olarak bulunduğundan, bu durumda genelleştirilmiş eikonal denklemi olan $\|f_*\|^2 = rank f_* = 2$ eşitliği sağlanır (Küpeli, 1995).

Tanım 3.7.5 (M,g), ν indeksli, $m-$boyutlu pseudo-Riemannian manifold olsun. $f : (M,g) \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm için enerji yoğunluğu

$$e(f) = -\frac{1}{2} g(\nabla f, \nabla f) \tag{3.59}$$

yardımıyla tanımlanır. Eğer $e(f)$, (M,g) pseudo-Riemannian manifoldunda altharmonik dönüşüm ise, yani $-\Delta e(f) \geq 0$ ise f dönüşümüne altharmonik enerji yoğunluklu denir (Eduardo ve Küpeli, 1999).

Sonuç 3.7.2 $f : (M,g) \to \mathbb{R}$ dönüşümü için (M,g) pseudo-Riemannian manifoldunda pseudo-Riemannian eikonal denklemi sağlanıyorsa, yani $-\Delta e(f) = 0$ ise, o zaman f dönüşümüne altharmonik enerji yoğunluklu denir (Eduardo ve Küpeli, 1999).

4. FİNSLER EİKONAL DENKLEMLERİ

Bu bölümde Fischer'in (1992) yılında yayınlamış olduğu "Riemannian maps between Riemannian manifolds" çalışmasındaki Riemannian dönüşüm yapısı Finsler manifoldlara uyarlanmıştır. Uyarlanan bu dönüşüm kullanılarak Finsler eikonal denklemi ve fiziksel bazı yorumları verilmiştir. Ayrıca özel bir Riemannian metrik olan Berwald metrik içinde bu eikonal denklem yapısı yorumlanmış ve beraberinde Berwald eikonal denkleminin afin çözümü ve bazı teoremler elde edilmiştir.

4.1 Finsler Dönüşümü ve Finsler Eikonal Denklemi

Bu kısımda Riemannian geometrisinde varolan birçok temel kavramla benzerlik taşıyan, fakat iç çarpımın yalnızca manifold üzerinde nerede olduğumuza bağlı değil hangi yöne baktığımıza da bağlı olduğu Finsler geometrisinde Finsler dönüşümü ve Finsler eikonal denklemi gibi bazı yapılara ulaşılmıştır.

TM_1 ve TM_2 tanjant demetleri, sırasıyla, M_1 ve M_2 sonlu boyutlu bağlantılı diferensiyellenebilir Finsler manifoldların tanjant manifoldları ve

$$f : TM_1 \to TM_2$$

bu tanjant manifoldlar arasında diferensiyellenebilir dönüşüm olsun.

$$f_{*p} : T_pTM_1 \to T_qTM_2$$

$p \in TM_1,\ q = f(p) \in TM_2$ olacak şekilde tanjant dönüşümü ya da türev dönüşümü göstersin. Bu durumda

$$\begin{aligned} T_pTM_1 &= \ker f_{*p} \oplus (\ker f_{*p})^{\perp} \\ &= V_pTM_1 \oplus H_pTM_1 \end{aligned}$$

ve

$$T_qTM_2 = range f_{*p} \oplus (range f_{*p})^{\perp}$$

olarak ifade edilir. Burada $V_pTM_1 = \ker f_{*p} \subseteq T_pTM_1$ ve $H_pTM_1 = (\ker f_{*p})^{\perp} \subseteq T_pTM_1$ olmak üzere, sırasıyla, T_pTM_1 tanjant demetinin dikey altuzayı ve yatay altuzayını gösterir. Dolayısıyla türev dönüşümü

$$f_{*p} : V_pTM_1 \oplus H_pTM_1 \to range f_{*p} \oplus (range f_{*p})^{\perp}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 4.1.1 Eğer

$$(f_{*p})^h : f_{*p}\big|_{H_pTM_1} : H_pTM_1 \to range f_{*p}$$

dönüşümü, f_{*p} türev dönüşümünün yatay kısıtlaması Finsler izometri ise, o zaman

$$f : TM_1 \to TM_2$$

diferensiyellenebilir dönüşümüne Finsler dönüşümdür denir.

M_1' ve M_2', sırasıyla, TM_1 ve TM_2 tanjant demetlerinin boş kümeden farklı açık altmanifoldları olmak üzere $f : M_1' \to M_2'$ herhangi bir dönüşüm için

$$\begin{aligned} rank_p f &= boy(range f_{*p}) \\ &= boy(M_1') - boy(V_pM_1') \end{aligned}$$

ifadesi $p \in M_1'$ noktasında f dönüşümünün rankını ifade eder. O zaman

$$0 \leq rank_p f \leq \min\{boy(M_1'), boy(M_2')\}$$

olacak şekilde $rank_p f$ negatif olmayan tamsayılardır. Burada eğer f, Finsler manifoldlar arasında dönüşümler ise, o zaman $rank_p f = boy H_p M_1'$ dir.

Tanım 4.1.2 (M_1, F_1) ve (M_2, F_2) Finsler manifoldlar olmak üzere, M_1' ve M_2', sırasıyla, TM_1 ve TM_2 tanjant demetlerinin boş kümeden farklı açık altmanifoldları arasında $f : M_1' \to M_2'$ bir dönüşüm olsun. f_* türev dönüşümünün kare normu $p \in M_1'$ noktası için

$$\|f_*\|^2 (p) = \left\|f_{*p}\right\|^2 \tag{4.1}$$

yardımıyla tanımlanan

$$\|f_*\|^2 : M_1' \to \mathbb{R}$$

bir dönüşümdür. Burada F_1 ve F_2 Finsler metriklerdir.

Buradan (3.3) ifadesi $g_{X_i}(X_i, X_i) = F_1^2(X_i)$ ve $g_{f_*X_i}(f_*X_i, f_*X_i) = F_2^2(f_*X_i)$ olmak üzere, F Finsler metrik kullanılarak

$$\|f_*\|^2 = \sum_{i=1}^{m_1} F_1^2(X_i) F_2^2(f_*X_i) \tag{4.2}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\|f_*\|^2$, M_1' manifoldunda bir dönüşüm ve $\{X_1,...,X_{m_1}\}$ TM_1 tanjant uzayı için ortonormal lokal çatıdır.

Ayrıca M_1' manifoldunda bir ∇f vektör alanı için, (3.43) ifadesinde $X=\nabla f$ olarak alınırsa ve aynı ifadede (3.14) eşitliği kullanılırsa

$$g_{\nabla f}(\nabla f,X)=g_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)=F^2(\nabla f) \tag{4.3}$$

elde edilir. Burada g simetrik bilineer formdur. Böylelikle (3.4) denklemindeki f_*X_i ifadesi Finsler metrik kullanılarak

$$f_*X_i=F^2(\nabla f)\frac{d}{dt}\circ f \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi Finsler eikonal denklemleri için, M', TM tanjant demetinin boş kümeden farklı açık altmanifoldu olmak üzere $f:(M',F)\to(\mathbb{R},dt\otimes dt)$ dönüşümünün kare normunu hesaplayalım. Bunun için $\{X_1,...,X_m\}$ ortonormal lokal çatı olsun. O zaman

$$\|f_*\|^2=\sum_{i=1}^{m}g_{X_i}(X_i,X_i)(dt\otimes dt)(f_*X_i,f_*X_i)$$

olur. Burada (3.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|f_*\|^2 &= \sum_{i=1}^{m}g_{X_i}(X_i,X_i)(dt\otimes dt)\left(g_{\nabla f}(\nabla f,X_i)\frac{d}{dt}\circ f,g_{\nabla f}(\nabla f,X_i)\frac{d}{dt}\circ f\right)\\ &= \sum_{i=1}^{m}F^2(X_i)g_{\nabla f}(\nabla f,X_i)^2(dt\otimes dt)\left(\frac{d}{dt}\circ f,\frac{d}{dt}\circ f\right)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\|f_*\|^2=\sum_{i=1}^{m}g_{\nabla f}(\nabla f,X_i)^2 \tag{4.5}$$

eşitliği elde edilir. (4.5) eşitliğinde (4.3) eşitliği kullanılır ve f dönüşümünün Finsler dönüşüm olduğu gözönüne alınırsa, o zaman

$$\|f_*\|^2=F^2(\nabla f)=g_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f) \tag{4.6}$$

eşitliği bulunur. Böylelikle $f:(M',F)\to(\mathbb{R},dt\otimes dt)$ dönüşümü için Finsler anlamında genelleştirilmiş eikonal denklemi elde edilmiş olur. Burada g simetrik bilineer formdur.

Sonuç 4.1.1 M_1', TM_1 tanjant demetinin boş kümeden farklı açık altmanifoldu ve $(M_2',F_2)=(\mathbb{R},1)=\mathbb{R}$ olacak şekilde Öklid metrikle birlikte reel doğru ve ayrıca

$f:(M'_1,F_1)\to\mathbb{R}$ reel değerli dönüşüm, Finsler dönüşüm ise, o zaman $rankf=0$ veya $rankf=1$ dir. Bu durumda $rankf=0$ ise f sabit dönüşümdür, $rankf=1$ ise f dönüşümü geometrik optiklerin eikonal denklemi olan $\|df\|^2=1$ ifadesini sağlar. Özet olarak, Finsler manifoldlar arasında Finsler dönüşümler için $\|df\|^2=rankf$ olan denklem genelleştirilmiş eikonal denklemi olarak düşünülebilir.

Sonuç 4.1.2 M', TM tanjant demetinin boş kümeden farklı açık altmanifoldu olmak üzere $f:(M',F)\to\mathbb{R}$ bir reel değerli fonksiyonu, (M',F) Finsler manifold üzerinde olsun. O zaman $p\in M'$ noktasında f Finsler dönüşümdür ancak ve ancak $df(p)=0$ ya da $F^2(\nabla f)=1$ dir.

Sonuç 4.1.3 $\|\nabla f\|^2=1$ olarak verilen Riemannian şartı geometrik optiklerin eikonal denklemidir (Fischer, 1992). Bu şart, aynı zamanda $g_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)=F^2(\nabla f)=1$ olacak şekilde Finsler metriğe göre geometrik optiklerin eikonal denklemidir.

Ayrıca $F^2(\nabla f)=1$ skalar denkleminin gradienti alınırsa

$$\begin{aligned}\nabla(F^2(\nabla f)) &= 2F(\nabla f)\nabla(F(\nabla f))\\ 0 &= 2F\left(\nabla(\nabla f),\nabla f\right)\end{aligned}$$

olarak (M',F) Finsler manifoldunun jeodezikleri elde edilir.

4.2 Berwald Dönüşümü ve Berwald Eikonal Denkleminin Afin Çözümü

Bu kısımda, bir önceki kısımda elde edilen yapılar özel bir Riemannian metrik olan Berwald metrik için de benzer şekilde elde edilmiş olup, ayrıca Berwald eikonal denkleminin afin çözümüne ve beraberinde bazı teoremlere ulaşılmıştır.

M_1 ve M_2, m_1 ve m_2 boyutlu bağlantılı diferensiyellenebilir Berwald manifoldlar ve TM_1 ve TM_2 tanjant demetleri, sırasıyla, M_1 ve M_2 manifoldlarının tanjant manifoldları olsun. $f:(M'_1,F_1)\to(M'_2,F_2)$, TM_1 ve TM_2 tanjant manifoldlarının boş kümeden farklı açık altmanifoldları arasında bir dönüşüm olsun. $p\in M'_1$, $q=f(p)\in M'_2$ için

$$f_{*p}:V_pM'_1\oplus H_pM'_1\to rangef_{*p}\oplus range(f_{*p})^{\perp} \tag{4.7}$$

dir. Bu türev dönüşümü kullanılarak, aşağıdaki Tanım 4.2.1, Tanım 4.1.1 e benzer şekilde verilir.

Tanım 4.2.1 Eğer $q = f(p)$ noktasında $(H_pM'_1, F_1(p)|_{H_p})$ ve $(rangef_{*p}, F_2(q)|_{rangef_{*p}})$ arasında

$$(f_{*p})^h : H_pM'_1 \to rangef_{*p}$$

yatay kısıtlaması bir Finsler izometri ise, bu durumda (M'_1, F_1) ve (M'_2, F_2) sonlu boyutlu diferensiyellenebilir manifoldları arasında $p \in M'_1$ noktasında $f : (M'_1, F_1) \to (M'_2, F_2)$ diferensiyellenebilir dönüşümü bir Berwald dönüşümdür.

Berwald metrik özel bir Riemannian metrik olduğundan, Berwald manifoldlar için Tanım 4.1.2, (4.2), (4.3) ve (4.4) denklemleri aynı şekilde ifade edilir. Örneğin, $f : (M', F) \to (\mathbb{R}^+, dt \otimes dt)$ dönüşümünün kare normu $\{X_1, ..., X_m\}$ bir ortonormal lokal çatı olmak üzere (4.6) eşitliği Berwald manifoldlar için aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \|f_*\|^2 &= \sum_{i=1}^{m} F^2(X_i)(dt \otimes dt)\left(g_{\nabla f}(\nabla f, X_i)\frac{d}{dt} \circ f, g_{\nabla f}(\nabla f, X_i)\frac{d}{dt} \circ f\right) \\ &= g_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Burada $g_{X_i}(X_i, X_i) = F^2(X_i)$ dir. Dolayısıyla Sonuç 4.1.1 gereği, (4.8) eşitliği kullanılarak $f : (M', F) \to (\mathbb{R}^+, dt \otimes dt)$ dönüşümü için geometrik optiklerin eikonal denklemi

$$\|f_*\|^2 = g_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f) = F^2(\nabla f) = 1 \tag{4.9}$$

olur. Burada g simetrik bilineer formdur ve M', TM tanjant manifoldunun boştan farklı bir açık altmanifoldudur.

Berwald dönüşümler üzerinde afin dönüşüm yapısını analiz edebilmek için, öncelikle $f : (M', F) \to (\mathbb{R}^+, dt \otimes dt)$ dönüşümünün ikinci temel formunun hesaplanması gerekir. F, Berwald metriği özel bir Riemannian metrik olduğu için g bir Riemannian metriktir. ∇, (M', F) manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu ve D, $(\mathbb{R}^+, dt \otimes dt)$ nin bir Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere, (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$f_*Y = g_{\nabla f}(\nabla f, Y)\frac{d}{dt} \circ f \tag{4.10}$$

ve

$$f_*(\nabla_X Y) = g_{\nabla f}(\nabla f, (\nabla_X Y))\frac{d}{dt} \circ f \tag{4.11}$$

elde edilir. $X, Y \in \Gamma TM$ için, (4.10) ve (4.11) eşitlikleri f dönüşümünün ikinci temel formu olan

(3.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, o zaman

$$
\begin{aligned}
B(X,Y) &= D_X\left(g_{\nabla f}(\nabla f, Y)\left(\frac{d}{dt}\circ f\right)\right) - g_{\nabla f}(\nabla f, (\nabla_X^{\nabla f} Y))\left(\frac{d}{dt}\circ f\right) \\
&= g_{\nabla f}(\nabla f, Y) D_X\left(\frac{d}{dt}\circ f\right) + X(g_{\nabla f}(\nabla f, Y))\left(\frac{d}{dt}\circ f\right) \\
&\quad - g_{\nabla f}(\nabla f, (\nabla_X^{\nabla f} Y))\left(\frac{d}{dt}\circ f\right) \\
&= g_{\nabla f}(\nabla f, Y) D_X\left(\frac{d}{dt}\circ f\right) + g_{\nabla f}(\nabla_X^{\nabla f}\nabla f, Y)\left(\frac{d}{dt}\circ f\right) \\
&\quad + g_{\nabla f}(\nabla f, (\nabla_X^{\nabla f} Y))\left(\frac{d}{dt}\circ f\right) - g_{\nabla f}(\nabla f, (\nabla_X^{\nabla f} Y))\left(\frac{d}{dt}\circ f\right).
\end{aligned}
$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler sonucunda

$$
B(X,Y) = g_{\nabla f}(\nabla f, Y) D_X\left(\frac{d}{dt}\circ f\right) + g_{\nabla f}(\nabla_X^{\nabla f}\nabla f, Y)\left(\frac{d}{dt}\circ f\right) \tag{4.12}
$$

olarak bulunur. Ayrıca (4.12) eşitliğindeki ilk terimde yer alan

$$
\begin{aligned}
D_X\left(\frac{d}{dt}\circ f\right) &= D_{f_* X}\frac{d}{dt} \\
&= D_{g_{\nabla f}(\nabla f, X)\frac{d}{dt}\circ f}\frac{d}{dt} \\
&= g_{\nabla f}(\nabla f, X) D_{\frac{d}{dt}\circ f}\frac{d}{dt} \\
&= g_{\nabla f}(\nabla f, X)\left(D_{\frac{d}{dt}}\frac{d}{dt}\right)\circ f \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olduğundan, (4.12) eşitliği

$$
B(X,Y) = g_{\nabla f}(\nabla_X^{\nabla f}\nabla f, Y)\left(\frac{d}{dt}\circ f\right) \tag{4.13}
$$

halini alır. (3.45) denklemi (4.13) eşitliğinde kullanılırsa,

$$
B(X,Y) = H_f(X,Y)\left(\frac{d}{dt}\circ f\right) \tag{4.14}
$$

olarak bulunur. Elde edilen (4.14) eşitliği gözönüne alınarak aşağıdaki tanımlar verilebilir:

Tanım 4.2.2 $f : (M', F) \to (\mathbb{R}^+, dt\otimes dt)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $H_f = 0$ ise, o zaman f, afin dönüşüm olarak adlandırılır.

Tanım 4.2.3 $f : (M', F) \to (\mathbb{R}^+, dt\otimes dt)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $H_f = 0$ ise, o zaman f, total bir şekilde jeodezik olarak adlandırılır.

Önerme 4.2.1 $f:(M',F)\to(\mathbb{R}^+,dt\otimes dt)$ bir dönüşüm olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) f dönüşümü bir afin dönüşümdür.

(ii) Eğer $\gamma:I\to M'$, (M',F) Berwald manifoldunun bir jeodeziği ise, o zaman $f\circ\gamma:I\to\mathbb{R}^+$ dönüşümü bir afin fonksiyondur.

(iii) ∇f, (M',F) Berwald manifoldunda bir paralel vektör alanıdır.

İspat. (i)⇔(ii) $\gamma:I\to M'$, (M',F) manifoldunun bir jeodeziği olsun.

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=g_{\nabla f}((\nabla f)\circ\gamma,\gamma'), \tag{4.15}$$

olduğundan, (4.15) denkleminin her iki yanının türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma) &= \frac{d}{dt}(g_{\nabla f}((\nabla f)\circ\gamma,\gamma')) \\ &= g_{\nabla f}(((\nabla f)\circ\gamma)',\gamma')+g_{\nabla f}((\nabla f)\circ\gamma,\gamma'')\end{aligned} \tag{4.16}$$

eşitliği bulunur. $\gamma''=D_{\gamma'}\gamma'=0$ olduğundan, o zaman (4.16) eşitliği

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma) &= \frac{d}{dt}(g_{\nabla f}((\nabla f)\circ\gamma,\gamma')) \\ &= g_{\nabla f}\left(\frac{d}{dt}((\nabla f)\circ\gamma),\gamma'\right)\end{aligned} \tag{4.17}$$

olarak elde edilir. Burada $\frac{d}{dt}((\nabla f)\circ\gamma)=\nabla^{\nabla f}_{\gamma'}(\nabla f)$ şeklinde ifade edilebildiğinden, (4.17) eşitliği

$$\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma)=g_{\nabla f}(\nabla^{\nabla f}_{\gamma'}(\nabla f),\gamma') \tag{4.18}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla (4.18) eşitliği (3.45) denklemi gereği

$$\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma)=H_f(\gamma',\gamma')$$

halini alır. Böylece (M',F) Berwald manifoldunun her bir $\gamma:I\to M'$ jeodeziği için, $f\circ\gamma:I\to\mathbb{R}^+$ dönüşümü bir afin fonksiyondur ancak ve ancak $H_f(\gamma',\gamma')=0$ dır. Yani, f bir afin dönüşümdür.

(i)⇔(iii) $X,Y\in\Gamma TM$ için,

$$H_f(X,Y)=g_{\nabla f}(\nabla^{\nabla f}_X\nabla f,Y) \tag{4.19}$$

dir. Buradan $H_f = 0$ dır ancak ve ancak $\nabla\nabla f = 0$ dir. Böylelikle ∇f bir paralel vektör alanıdır.

Yardımcı Teorem 4.2.1 $f : (M', F) \to (\mathbb{R}^+, dt \otimes dt)$ bir dönüşüm olsun. O zaman

$$\nabla(F^2(\nabla f)) = 2\nabla^{\nabla f}_{\nabla f}\nabla f \tag{4.20}$$

dir. Burada ∇f ve $\nabla(F^2(\nabla f))$, Berwald manifoldlarda, sırasıyla, f dönüşümünün ve $F^2(\nabla f)$ nin gradientlerini gösterir.

İspat. Eğer $X \in \Gamma TM$ ise, (3.22) ve (3.11) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g(\nabla(F^2(\nabla f)), X) &= X(F^2(\nabla f)) \\ &= g_{\nabla f}(\nabla^{\nabla f}_X \nabla f, \nabla f) + g_{\nabla f}(\nabla f, \nabla^{\nabla f}_X \nabla f) \\ &= 2g_{\nabla f}(\nabla^{\nabla f}_X \nabla f, \nabla f) \end{aligned} \tag{4.21}$$

eşitliği elde edilir. $h_f(X) = \nabla^{\nabla f}_X \nabla f$ olduğundan, (4.21) eşitliği

$$g(\nabla(F^2(\nabla f)), X) = 2g_{\nabla f}(h_f(X), \nabla f) \tag{4.22}$$

şeklinde ifade edilip simetriklik şartı gereği, (4.22) eşitliği

$$\begin{aligned} g(\nabla(F^2(\nabla f)), X) &= 2g_{\nabla f}(h_f(\nabla f), X) \\ &= 2g_{\nabla f}(\nabla^{\nabla f}_{\nabla f} \nabla f, X) \end{aligned} \tag{4.23}$$

halini alır. Dolayısıyla (4.23) eşitliği her X vektör alanı için sağlandığından ispat tamamlanır.

Önerme 4.2.2 $f : (M', F) \to (\mathbb{R}^+, dt \otimes dt)$ bir dönüşüm olsun. Eğer f dönüşümü $F^2(\nabla f) = 1$ olacak şekilde Berwald eikonal denklemini sağlarsa, o zaman ∇f, (M', F) manifoldunda bir jeodezik vektör alanıdır.

İspat. (4.20) eşitliğinde $F^2(\nabla f) = 1$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla(F^2(\nabla f)) &= \nabla(g_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f)) \\ \nabla(1) &= g_{\nabla f}(\nabla^{\nabla f}_{\nabla f} \nabla f, \nabla f) + g_{\nabla f}(\nabla f, \nabla^{\nabla f}_{\nabla f} \nabla f) \\ 0 &= 2\nabla^{\nabla f}_{\nabla f}(\nabla f) \end{aligned} \tag{4.24}$$

bulunur. Böylelikle, ∇f, (M', F) manifoldunda bir jeodezik vektör alanı olarak elde edilir. Yani, Berwald manifoldların jeodezikleri, f dönüşümünün gradient akısının integral eğrileridir.

Önerme 4.2.3 $f : (M', F) \to (\mathbb{R}^+, dt \otimes dt)$ bir dönüşüm olsun. O zaman

i) M' Berwald manifoldunda, f dönüşümünün rankı sabittir.

ii) M' Berwald manifoldunda, $F^2(\nabla f)$ sabittir.

İspat. M' manifoldunda f dönüşümünün rankı sabittir ancak ve ancak her bir $p \in M'$ noktasında $\nabla f(p) = 0$ ya da $\nabla f(p) \neq 0$ dır. Önermenin ispatında sadece, her bir $p \in M'$ noktasında $\nabla f(p) \neq 0$ durumu dikkate alınmıştır.

i) $p, q \in M'$ olsun ve $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ ile birlikte $\gamma : [a, b] \to M'$ bir eğri olsun. ∇f, (M', F) manifoldunda paralel vektör alanı olduğundan, γ boyunca $(\nabla f) \circ \gamma$ bir paralel vektör alanıdır. Başlangıç şartlarına göre, bir eğri boyunca paralel vektör alanlarının tekliği yardımıyla $\gamma(a) \neq p \Leftrightarrow \gamma(b) \neq q$ dır. Dolayısıyla her bir $p \in M'$ noktasında $\nabla f(p) \neq 0$ dır. Bu da M' manifoldunda f dönüşümünün rankının sabit olduğunu gösterir.

ii) (4.24) eşitliğine göre, M' manifoldunda $F^2(\nabla f)$ sabittir.

5. PSEUDO-FİNSLER EİKONAL DENKLEMLERİ

Bu bölümde pseudo-Riemannian dönüşüm yapıları, pseudo-Finsler manifoldlara uyarlanarak pseudo-Finsler dönüşüm yapısı kurulmuştur. Bu dönüşüm kullanılarak pseudo-Finsler eikonal denklemleri elde edilmiş ve pseudo-Finsler eikonal denklem çeşitlerinden biri olan null Finsler eikonal denklemiyle ilgili bazı fiziksel sonuçlar verilmiştir. Ayrıca pseudo-Finsler eikonal denklemlerinin afin çözümü elde edilip, bu afin çözümünün bazı geometrik karakterizasyonları verilmiştir.

5.1 Pseudo-Finsler Dönüşümü ve Pseudo-Finsler Eikonal Denklemleri

Bu kısımda, pseudo-Riemannian dönüşüm yapıları, pseudo-Finsler manifoldlara uyarlanarak pseudo-Finsler dönüşüm yapısı kurulmuştur. Bu dönüşüm kullanılarak pseudo-Finsler eikonal denklemleri elde edilmiştir.

M, $m-$boyutlu reel bir manifold, $\widetilde{g}$, M üzerinde F^* temel fonksiyonu kullanılarak oluşturulan bir pseudo-Finsler metrik olmak üzere $\mathbb{F}^m = (M, F^*, \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifold olsun. TM, M manifoldunun tanjant demeti, yani tanjant manifoldudur.

M_1 ve M_2, sırasıyla, $\widetilde{g}_1$ ve $\widetilde{g}_2$ pseudo-Finsler metrikleriyle donatılan pseudo-Finsler manifoldlar olsunlar. $f : TM_1 \to TM_2$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Her bir $p \in TM_1$ ve $q = f(p) \in TM_2$ noktasında

$$f_{*p} : T_p(TM_1 \setminus \{0\}) \to T_q(TM_2 \diagdown \{0\})$$

türev dönüşümü olmak üzere

$$L_1(p) = (\ker f_{*p}) \cap (\ker f_{*p})^{\perp} \subseteq T_p(TM_1 \diagdown \{0\})$$

ve

$$L_2(q) = (range f_{*p}) \cap (range f_{*p})^{\perp} \subseteq T_q(TM_2 \diagdown \{0\})$$

olarak tanımlansın. Burada $L_1(p)$ ve $L_2(q)$ sırasıyla, $(\ker f_{*p})^{\perp}$ ve $(range f_{*p})$ ye $\widetilde{g}_1$ ve $\widetilde{g}_2$ metriklerine kısıtlanmışı dejenere altuzaylardır.

$A(p)$ ve $B(q)$ bölüm uzayları,

$$A(p) = (\ker f_{*p})^{\perp}/L_1(p)$$

ve

$$B(q) = (range f_{*p})/L_2(q)$$

tarafından tanımlansın. $A(p)$ ve $B(q)$ bölüm uzayları üzerinde sırasıyla $\overline{\widetilde{g}}_1$ ve $\overline{\widetilde{g}}_2$ metrikleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

i) $\overline{\widetilde{g}}_1(\overline{x},\overline{y}) = \widetilde{g}_1(x,y)$ dir.Burada $\pi_1(x) = \overline{x}$ ve $\pi_1(y) = \overline{y}$ ile birlikte $x,y \in (\ker f_{*p})^{\perp}$ olmak üzere $\pi_1 : (\ker f_{*p})^{\perp} \to A(p)$ bir doğal projeksiyondur.

ii) $\overline{\widetilde{g}}_2(\overline{x},\overline{y}) = \widetilde{g}_2(x,y)$ dir.Burada $\pi_2(x) = \overline{x}$ ve $\pi_2(y) = \overline{y}$ ile birlikte $x,y \in (range f_{*p})$ olmak üzere $\pi_2 : (range f_{*p}) \to B(q)$ bir doğal projeksiyondur.

Sonuç olarak, $(\overline{f}_{*p})(\overline{x}) = \pi_2(\overline{f}_{*p}(x))$ yardımıyla

$$\overline{f}_{*p} : A(p) \to B(q)$$

şeklinde bir lineer dönüşüm tanımlanabilir. Burada $\pi_1(x) = \overline{x}$ ile birlikte $x \in (\ker f_{*p})^{\perp}$ dir. Bunlar doğrultusunda, aşağıdaki gibi bir tanım verilebilir:

Tanım 5.1.1 M_1 ve M_2, sırasıyla, $\widetilde{g}_1$ ve $\widetilde{g}_2$ pseudo-Finsler metrikleriyle donatılan pseudo-Finsler manifoldlar ve TM_1 ve TM_2 sırasıyla, bu manifoldların tanjant manifoldları olmak üzere, $f : M_1' \to M_2'$ diferensiyellenebilir dönüşümü için $p \in M_1'$ noktasında,

$$\overline{f}_{*p} : A(p) \to B(q) \tag{5.1}$$

dönüşümü bir Finsler izometri ise, o zaman f dönüşümü bir pseudo-Finsler dönüşüm olarak adlandırılır. Burada M_1' ve M_2', sırasıyla, TM_1 ve TM_2 tanjant manifoldlarının boş kümeden farklı açık altmanifoldlarıdır.

Yardımcı Teorem 5.1.1 M_1' ve M_2' manifoldları $\widetilde{g}_1$ ve $\widetilde{g}_2$ pseudo-Finsler metrikleriyle birlikte verilen, sırasıyla, TM_1 ve TM_2 tanjant manifoldlarının boş kümeden farklı açık altmanifoldları olmak üzere, $f : M_1' \to M_2'$ diferensiyellenebilir fonksiyon ise, o zaman $\|f_{*p}\|^2 = \|\overline{f}_{*p}\|^2$ dir. Burada $\|f_{*p}\|^2$ ve $\|\overline{f}_{*p}\|^2$, sırasıyla, $\widetilde{g}_1$, $\widetilde{g}_2$ ve $\overline{\widetilde{g}}_1$, $\overline{\widetilde{g}}_2$ metriklerine göre kare normlardır.

İspat. $\{x_1,...,x_l\}$ ve $\{y_1,...,y_m\}$, sırasıyla, $(\ker f_{*p})$ ve $(\ker f_{*p})^{\perp}$ de $L_1(p)$ degenere altuzaya ait non-dejenere bir tümleyen uzayın ortonormal bazları olsunlar. $u_i = z_i + w_i \in L_1(p)$ olacak şekilde $(Sp\{x_1,...,x_l,y_1,...,y_m\})^{\perp}$ için $\{z_1,w_1,...,z_k,w_k\}$ ortonormal bir baz olsun. O zaman $\{z_1,w_1,...,z_k,w_k,x_1,...,x_l,y_1,...,y_m\}$, $T_p(TM_1 \diagdown \{0\})$ için ortonormal bazdır. Böylece

$$\begin{aligned}\|f_{*p}\|^2 = & \sum_{i=1}^{k} \widetilde{g}_1(z_i,z_i)\widetilde{g}_1({}^*f_{*p}\circ f_{*p}(z_i),z_i) \\ & + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{g}_1(w_i,w_i)\widetilde{g}_1({}^*f_{*p}\circ f_{*p}(w_i),w_i) \\ & + \sum_{i=1}^{l} \widetilde{g}_1(x_i,x_i)\widetilde{g}_1({}^*f_{*p}\circ f_{*p}(x_i),x_i) \\ & + \sum_{i=1}^{m} \widetilde{g}_1(y_i,y_i)\widetilde{g}_1({}^*f_{*p}\circ f_{*p}(y_i),y_i)\end{aligned} \tag{5.2}$$

dir. Burada ${}^*f_{*p}\circ f_{*p} : (T_pM_1', \widetilde{g}_1) \to (T_pM_1', \widetilde{g}_1)$ bir self-adjoint lineer dönüşümdür. $\{x_1,...,x_l\} \in (\ker f_{*p})$ ve $\widetilde{g}_{1p}({}^*f_{*p}\circ f_{*p}(z_i),z_i) = \widetilde{g}_{2q}(f_{*p}(z_i), f_{*p}(z_i))$ olduğundan, (5.2) eşitlikleri

$$\begin{aligned}\|f_{*p}\|^2 = & \sum_{i=1}^{k} \widetilde{g}_1(z_i,z_i)\widetilde{g}_2(f_{*p}(z_i), f_{*p}(z_i)) \\ & + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{g}_1(w_i,w_i)\widetilde{g}_2(f_{*p}(w_i), f_{*p}(w_i)) \\ & + \sum_{i=1}^{m} \widetilde{g}_1(y_i,y_i)\widetilde{g}_2(f_{*p}(y_i), f_{*p}(y_i))\end{aligned} \tag{5.3}$$

olarak elde edilir. Burada $u_i = z_i + w_i \in L_1(p) \subseteq (\ker f_{*p})$ olduğundan,

$$0 = f_{*p}(u_i) = f_{*p}(z_i) + f_{*p}(w_i)$$

ve

$$0 = \widetilde{g}_1(u_i,u_i) = \widetilde{g}_1(z_i,z_i) + \widetilde{g}_1(w_i,w_i)$$

dir. Dolayısıyla $f_{*p}(z_i) = -f_{*p}(w_i)$ ve $\widetilde{g}_1(z_i,z_i) = -\widetilde{g}_1(w_i,w_i)$ olduğundan, (5.3) eşitlikleri

$$\begin{aligned}\|f_{*p}\|^2 &= \sum_{i=1}^{m} \widetilde{g}_1(y_i,y_i)\widetilde{g}_2(f_{*p}(y_i), f_{*p}(y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \overline{\widetilde{g}}_1(\bar{y}_i,\bar{y}_i)\overline{\widetilde{g}}_2(\overline{f}_{*p}(\bar{y}_i), \overline{f}_{*p}(\bar{y}_i)) \\ &= \|\overline{f}_{*p}\|^2\end{aligned} \tag{5.4}$$

olarak bulunur.

Tanım 5.1.2 M_1 ve M_2 pseudo-Finsler manifoldlar olsun. M_1' ve M_2' manifoldları $\widetilde{g}_1$ ve $\widetilde{g}_2$ pseudo-Finsler metrikleriyle birlikte verilen, sırasıyla, TM_1 ve TM_2 tanjant manifoldlarının boş kümeden farklı açık altmanifoldları olmak üzere, $f:(M_1',\widetilde{g}_1)\to(M_2',\widetilde{g}_2)$ bir dönüşüm olsun. $p\in M_1'$ noktasında f dönüşümünün non-dejenere rankı, $\overline{f}_{*p}$ dönüşümünün rankı olarak tanımlanır.

Tanım 5.1.3 M_1 ve M_2 pseudo-Finsler manifoldlar olsun. M_1' ve M_2' manifoldları $\widetilde{g}_1$ ve $\widetilde{g}_2$ pseudo-Finsler metrikleriyle birlikte verilen, sırasıyla, TM_1 ve TM_2 tanjant manifoldlarının boş kümeden farklı açık altmanifoldları olmak üzere, $f:(M_1',\widetilde{g}_1)\to(M_2',\widetilde{g}_2)$ bir dönüşüm olsun. $p\in M_1'$ noktasında

$$\left\|f_{*p}\right\|^2 = rank\overline{f}_{*p} \tag{5.5}$$

ise, f dönüşümü zayıflatılmış pseudo-Finsler dönüşüm olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.4 M_1 ve M_2 pseudo-Finsler manifoldlar olsun. M_1' ve M_2' manifoldları $\widetilde{g}_1$ ve $\widetilde{g}_2$ pseudo-Finsler metrikleriyle birlikte verilen, sırasıyla, TM_1 ve TM_2 tanjant manifoldlarının boş kümeden farklı açık altmanifoldları olmak üzere, her bir $p\in M_1'$ noktasında (5.5) ifadesindeki gibi tanımlanan $f:(M_1',\widetilde{g}_1)\to(M_2',\widetilde{g}_2)$ dönüşümü için

$$\|f_*\|^2 = rank\overline{f}_* \tag{5.6}$$

denklemi genelleştirilmiş eikonal denklemi olarak adlandırılır. Böylece zayıflatılmış pseudo-Finsler dönüşümler genelleştirilmiş eikonal denkleminin birer çözümleridir.

Tanım 5.1.5 M_1 ve M_2, sırasıyla m_1 ve m_2 boyutlu pseudo-Finsler manifoldlar olsun. M_1' ve M_2' manifoldları $\widetilde{g}_1$ ve $\widetilde{g}_2$ pseudo-Finsler metrikleriyle birlikte verilen, sırasıyla, TM_1 ve TM_2 tanjant manifoldlarının boş kümeden farklı açık altmanifoldları olmak üzere, $f:(M_1',\widetilde{g}_1)\to(M_2',\widetilde{g}_2)$ bir dönüşüm olsun. f_* türev dönüşümünün kare normu, $p\in M_1'$ noktası için

$$\|f_*\|^2(p) = \left\|f_{*p}\right\|^2 \tag{5.7}$$

yardımıyla tanımlanan

$$\|f_*\|^2 : M_1' \to \mathbb{R}$$

bir dönüşümdür.

Burada pseudo-Finsler metrik kullanılarak varolan (3.3) ifadesi

$$\|f_*\|^2 = \sum_{i=1}^{m_1} \widetilde{g}_1(X_i,X_i)\widetilde{g}_2(f_*X_i,f_*X_i) \tag{5.8}$$

veya

$$\|f_*\|^2 = \sum_{i=1}^{m_1} F_1^{*2}(X_i) F_2^{*2}(f_* X_i) \tag{5.9}$$

şeklinde ifade edilir.

M, $m-$boyutlu pseudo-Finsler manifold ve $\widetilde{g}$ pseudo-Finsler metriğiyle birlikte M', TM tanjant manifoldunun boş kümeden farklı açık altmanifoldu olmak üzere, pseudo-Finsler eikonal denklemleri için $f:(M',\widetilde{g}) \to (\mathbb{R}, kdt\otimes dt)$ dönüşümünün kare normunu hesaplayalım. Burada k, -1 ya da 1 dir. Bunun için $\{X_1,...,X_m\}$ ortonormal lokal çatı olsun. O zaman (5.8) eşitliği kullanılırsa,

$$\|f_*\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{g}_{X_i}(X_i,X_i)(kdt\otimes dt)(f_*X_i, f_*X_i) \tag{5.10}$$

olarak ifade edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \|f_*\|^2 &= \sum_{i=1}^{m} \widetilde{g}_{X_i}(X_i,X_i)(kdt\otimes dt)\left(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, X_i)\frac{d}{dt}\circ f, \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, X_i)\frac{d}{dt}\circ f\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \widetilde{g}_{X_i}(X_i,X_i)(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, X_i))^2(kdt\otimes dt)\left(\frac{d}{dt}\circ f, \frac{d}{dt}\circ f\right) \end{aligned} \tag{5.11}$$

şeklinde elde edilir. (4.3) eşitliği gereği,

$$\|f_*\|^2 = k\sum_{i=1}^{m} \widetilde{g}_{X_i}(X_i,X_i)(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f))^2$$

olarak bulunur. f dönüşümü Finsler izometri olduğundan dolayı

$$\|f_*\|^2 = k\sum_{i=1}^{m} \widetilde{g}_{X_i}(X_i,X_i)\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f) \tag{5.12}$$

olarak elde edilir. Pseudo-Finsler metrik yapısı gereği $\widetilde{g}_{X_i}(X_i,X_i) = F^{*2}(X_i)$ ve $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f) = F^{*2}(\nabla f)$ olup, böylelikle (5.12) eşitliği

$$\begin{aligned} \|f_*\|^2 &= k\sum_{i=1}^{m} F^{*2}(X_i)F^{*2}(\nabla f) \\ &= kF^{*2}(\nabla f) \end{aligned} \tag{5.13}$$

olarak ifade edilir.

$f:(M',\widetilde{g}) \to (\mathbb{R}, kdt\otimes dt)$ dönüşümü için pseudo-Finsler anlamında genelleştirilmiş eikonal denklemi, (5.6) eşitliği kullanılarak

$$\|f_*\|^2 = \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f) = F^{*2}(\nabla f) = krank\overline{f}_* \tag{5.14}$$

şeklinde elde edilir. Ancak $rank\overline{f}_* \leq 1$ olduğundan, $f : (M', \widetilde{g}) \to (\mathbb{R}, kdt \otimes dt)$ zayıflatılmış pseudo-Finsler dönüşümü

$$\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f) = F^{*2}(\nabla f) = k_0 \tag{5.15}$$

denklemini sağlar. Burada k_0, ya -1, 0 ya da 1 dir.

Böylece $f : (M', \widetilde{g}) \to \mathbb{R}$ dönüşümü için (5.15) eşitliğinden elde edilebilen denklemler $(M', \widetilde{g})$ bağlantılı pseudo-Finsler manifoldunun pseudo-Finsler eikonal denklemleridir. $(M', \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldunun pseudo-Finsler eikonal denklemlerinin çözümleri $f : (M', \widetilde{g}) \to (\mathbb{R}, kdt \otimes dt)$ zayıflatılmış pseudo-Finsler dönüşümlerdir. Bu durumda aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 5.1.6 M, $m-$boyutlu pseudo-Finsler manifold ve M' manifoldu $\widetilde{g}$ pseudo-Finsler metriğiyle birlikte verilen, TM tanjant manifoldunun boş kümeden farklı açık altmanifoldu olmak üzere, $f : (M', \widetilde{g}) \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun.

$$\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f) = F^{*2}(\nabla f) = k_0$$

ise, o zaman $(M', \widetilde{g})$ bağlantılı pseudo-Finsler manifoldu üzerinde f dönüşümü bir pseudo-Finsler eikonal denklemini sağlar denilir. Burada k_0, ya -1, 0 ya da 1 dir.

Tanım 5.1.7 M, $m-$boyutlu pseudo-Finsler manifold ve M' manifoldu $\widetilde{g}$ pseudo-Finsler metriğiyle birlikte verilen, TM tanjant manifoldunun boş kümeden farklı açık altmanifoldu olmak üzere, $f : (M', \widetilde{g}) \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun ve bu dönüşüm $(M', \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldu üzerinde $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f) = F^{*2}(\nabla f) = k_0$ olacak şekilde pseudo-Finsler eikonal denklemini sağlasın. Bu durumda,

1) Eğer $k_0 = -1$ ise, o zaman f dönüşümü, $(M', \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldu üzerinde timelike Finsler eikonal denklemini sağlar denir.

2) Eğer $k_0 = 0$ ise, o zaman f dönüşümü, $(M', \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldu üzerinde null Finsler eikonal denklemini sağlar denir.

3) Eğer $k_0 = 1$ ise, o zaman f dönüşümü, $(M', \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldu üzerinde spacelike Finsler eikonal denklemini sağlar denir.

Tanım 5.1.8 M, $m-$boyutlu pseudo-Finsler manifold ve M' manifoldu $\widetilde{g}$ pseudo-Finsler metriğiyle birlikte verilen, TM tanjant manifoldunun boş kümeden farklı açık altmanifoldu olmak üzere, $f : (M', \widetilde{g}) \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. O zaman f dönüşümü,

1) Eğer $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f) = F^{*2}(\nabla f) < 0$ ise timelike Finsler eikonal eşitsizliğini

2) Eğer $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f) = F^{*2}(\nabla f) > 0$ ise spacelike Finsler eikonal eşitsizliğini sağlar denir.

Timelike ve spacelike Finsler eikonal eşitsizlikler, timelike ve spacelike Finsler denklemlere göre daha az kısıtlayıcıdır. Ancak Finsler eikonal eşitsizlikler ve Finsler eikonal denklemleri konformal metrik tensörle de ilişkilendirilebilir. Bu konformal metrik tensörler yardımıyla bazı diferensiyel operatörler arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir:

Yardımcı Teorem 5.1.2 M, $m-$boyutlu pseudo-Finsler manifold ve M' manifoldu $\widetilde{g}$ pseudo-Finsler metriğiyle birlikte verilen, TM tanjant manifoldunun boş kümeden farklı açık altmanifoldu ve $\nabla f \neq 0$ bir referans vektörü olmak üzere,

$$\overline{\widetilde{g}}_{\nabla f} = e^{2\alpha}\widetilde{g}_{\nabla f} \tag{5.16}$$

konformal ilişkili metrik tensör olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:

1) $\overline{\nabla} = \frac{1}{e^{\alpha}}\nabla$ dir. Burada ∇, $(M', \widetilde{g})$ manifoldunun ve $\overline{\nabla}$, $(M', \overline{\widetilde{g}})$ manifoldunun gradientleridir.

2) $X, Y \in \Gamma TM$ için,

$$\overline{\nabla}_X^{\nabla e^{2\alpha}} Y = \nabla_X^{\nabla e^{2\alpha}} Y + \frac{1}{2e^{2\alpha}} X(e^{2\alpha})Y + \frac{1}{2e^{2\alpha}} Y(e^{2\alpha})X - \frac{1}{2e^{2\alpha}} \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(X,Y)\nabla e^{2\alpha} \tag{5.17}$$

dir. Burada ∇, $(M', \widetilde{g})$ manifoldunun ve $\overline{\nabla}$, $(M', \overline{\widetilde{g}})$ manifoldunun Levi-Civita koneksiyonlarıdır.

3) $f : M' \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm ise, o zaman $X, Y \in \Gamma TM$ için,

$$\begin{aligned} \overline{H}_f(X,Y) \;=\; & H_f(X,Y) - \frac{1}{2e^{2\alpha}}\left[\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla e^{2\alpha}, X)\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y)\right. \\ & \left. + \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, X)\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla e^{2\alpha}, Y) - \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla e^{2\alpha}, \nabla f)\widetilde{g}_{\nabla f}(X,Y)\right] \end{aligned} \tag{5.18}$$

dir. Burada $\overline{H}_f$ ve H_f, sırasıyla $(M', \overline{\widetilde{g}})$ ve $(M', \widetilde{g})$ üzerinde f dönüşümünün Hessian formlarıdır.

İspat. 1) $X \in \Gamma TM$ için $f : M' \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. (5.16) eşitliği gereği

$$\begin{aligned} \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}(\overline{\nabla} f, X) &= X(f) \\ &= \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, X) \\ &= \frac{1}{e^{2\alpha}} \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}(\nabla f, X) \end{aligned} \tag{5.19}$$

olur. Pseudo-Finsler manifoldların temel fonksiyonu ikinci dereceden homojen olduğu için (5.19) eşitliği

$$\overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}(\overline{\nabla} f, X) = \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}\left(\frac{1}{e^{\alpha}} \nabla f, X\right)$$

olarak elde edilir. Bu durumda $\overline{\nabla} = \frac{1}{e^{\alpha}} \nabla$ bulunur.

2) (3.23) Kozsul formülü yardımıyla, $\forall X, Y, Z \in \Gamma TM$ için

$$\begin{aligned} \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} e^{2\alpha}}(\overline{\nabla}_X^{\overline{\nabla} e^{2\alpha}} Y, Z) &= \frac{1}{2}\Big[X \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} e^{2\alpha}}(Y, Z) + Y \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} e^{2\alpha}}(Z, X) - Z \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} e^{2\alpha}}(X, Y) \\ &\quad + \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} e^{2\alpha}}([X, Y], Z) + \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} e^{2\alpha}}([Z, X], Y) - \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} e^{2\alpha}}([Y, Z], X) \\ &\quad - 2\overline{C}_{\overline{\nabla} e^{2\alpha}}(\nabla_X^{\overline{\nabla} e^{2\alpha}} \overline{\nabla} e^{2\alpha}, Y, Z) - 2\overline{C}_{\overline{\nabla} e^{2\alpha}}(\nabla_Y^{\overline{\nabla} e^{2\alpha}} \overline{\nabla} e^{2\alpha}, Z, X) \\ &\quad + 2\overline{C}_{\overline{\nabla} e^{2\alpha}}(\nabla_Z^{\overline{\nabla} e^{2\alpha}} \overline{\nabla} e^{2\alpha}, X, Y)\Big] \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada (5.16) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} e^{2\alpha} \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\overline{\nabla}_X^{\nabla e^{2\alpha}} Y, Z) &= \frac{1}{2}\Big[X(e^{2\alpha}) \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(Y, Z) + Y(e^{2\alpha}) \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(Z, X) - Z(e^{2\alpha}) \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(X, Y) \\ &\quad + e^{2\alpha}\left(X(\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(Y, Z)) + Y(\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(Z, X)) - Z(\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(X, Y))\right) \\ &\quad + e^{2\alpha}\left(\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}([X, Y], Z) + \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}([Z, X], Y) - \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}([Y, Z], X)\right) \\ &\quad - 2e^{2\alpha}\Big(C_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla_X^{\nabla e^{2\alpha}} \nabla e^{2\alpha}, Y, Z) + C_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla_Y^{\nabla e^{2\alpha}} \nabla e^{2\alpha}, Z, X) \\ &\quad - C_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla_Z^{\nabla e^{2\alpha}} \nabla e^{2\alpha}, X, Y)\Big)\Big] \end{aligned} \tag{5.20}$$

eşitliği elde edilir. (3.11) eşitliği gereği, (5.20) eşitliği

$$\begin{aligned} e^{2\alpha} \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\overline{\nabla}_X^{\nabla e^{2\alpha}} Y, Z) &= e^{2\alpha} \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla_X^{\nabla e^{2\alpha}} Y, Z) + \frac{1}{2} X(e^{2\alpha}) \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(Y, Z) \\ &\quad + \frac{1}{2} Y(e^{2\alpha}) \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(Z, X) - \frac{1}{2} Z(e^{2\alpha}) \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(X, Y) \end{aligned} \tag{5.21}$$

haline dönüşür. (5.21) ifadesi ortak paranteze alınırsa

$$\begin{aligned} e^{2\alpha} \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\overline{\nabla}_X^{\nabla e^{2\alpha}} Y, Z) &= e^{2\alpha} \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla_X^{\nabla e^{2\alpha}} Y, Z) \\ &\quad + \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}\left(\frac{1}{2} X(e^{2\alpha}) Y + \frac{1}{2} Y(e^{2\alpha}) Z - \frac{1}{2} \widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(X, Y) \nabla e^{2\alpha}, Z\right) \end{aligned} \tag{5.22}$$

olarak elde edilir. Böylece $\forall$Z için (5.22) eşitliği sağlandığından (5.17) ifadesi elde edilir.

3) (3.45) eşitliği gereği,

$$\begin{aligned}\overline{H}_f(X,Y) &= \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}(\overline{\nabla}_X^{\overline{\nabla} f}\overline{\nabla} f, Y)\\ &= \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}\left(\overline{\nabla}_X^{\overline{\nabla} f}\left(\frac{1}{e^{\alpha}}\nabla f\right), Y\right)\end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada koneksiyonun 2. özelliği kullanılırsa

$$\overline{H}_f(X,Y) = \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}\left(X\left(\frac{1}{e^{\alpha}}\right)\nabla f, Y\right) + \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}\left(\frac{1}{e^{\alpha}}\overline{\nabla}_X^{\overline{\nabla} f}\nabla f, Y\right) \tag{5.23}$$

bulunur. Pseudo-Finsler manifoldların temel fonksiyonu ikinci dereceden homojen olduğundan (5.23) ifadesi

$$\begin{aligned}\overline{H}_f(X,Y) &= \overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}\left(-\frac{X(e^{\alpha})}{e^{2\alpha}}\nabla f, Y\right) + \frac{1}{e^{2\alpha}}e^{2\alpha}\widetilde{g}_{\nabla f}(\overline{\nabla}_X^{\overline{\nabla} f}\nabla f, Y)\\ &= -\frac{X(e^{\alpha})e^{2\alpha}}{e^{4\alpha}}\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y) + \widetilde{g}_{\nabla f}(\overline{\nabla}_X^{\overline{\nabla} f}\nabla f, Y)\end{aligned} \tag{5.24}$$

olarak elde edilir. Ayrıca Yardımcı Teorem 5.1.2 (2) şartı kullanılırsa, o zaman

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X^{\overline{\nabla} f}\nabla f &= \nabla_X^{\nabla f}\nabla f + \frac{1}{2e^{2\alpha}}X(e^{2\alpha})\nabla f + \frac{1}{2e^{2\alpha}}\nabla f(e^{2\alpha})X\\ &\quad -\frac{1}{2e^{2\alpha}}\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(X,\nabla f)\nabla e^{2\alpha}\end{aligned} \tag{5.25}$$

eşitliği bulunur. (5.25) eşitliği (5.24) eşitliğinde yerine konulursa,

$$\begin{aligned}\overline{H}_f(X,Y) &= -\frac{X(e^{\alpha})}{e^{2\alpha}}\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y) + \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla_X^{\nabla f}\nabla f, Y)\\ &\quad +\frac{1}{2e^{2\alpha}}X(e^{2\alpha})\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y) + \frac{1}{2e^{2\alpha}}\nabla f(e^{2\alpha})\widetilde{g}_{\nabla f}(X,Y)\\ &\quad -\frac{1}{2e^{2\alpha}}\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(X,\nabla f)\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla e^{2\alpha}, Y)\end{aligned} \tag{5.26}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\overline{H}_f(X,Y) &= H_f(X,Y) + \frac{1}{2e^{2\alpha}}\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla e^{2\alpha}, X)\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y)\\ &\quad +\frac{1}{2e^{2\alpha}}\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla e^{2\alpha}, \nabla f)\widetilde{g}_{\nabla f}(X,Y)\\ &\quad -\frac{1}{2e^{2\alpha}}\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(X,\nabla f)\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla e^{2\alpha}, \nabla f)\\ &\quad -\frac{1}{e^{2\alpha}}\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y)\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla e^{2\alpha}, X)\end{aligned} \tag{5.27}$$

olarak bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\overline{H}_f(X,Y) &= H_f(X,Y) - \frac{1}{2e^{2\alpha}}\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla e^{2\alpha}, X)\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y)\\ &\quad +\frac{1}{2e^{2\alpha}}\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla e^{2\alpha}, \nabla f)\widetilde{g}_{\nabla f}(X,Y)\\ &\quad -\frac{1}{2e^{2\alpha}}\widetilde{g}_{\nabla e^{2\alpha}}(\nabla f, X)\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla e^{2\alpha}, Y)\end{aligned} \tag{5.28}$$

şeklinde elde edilir. Böylelikle (5.28) eşitliği $\left(-\dfrac{1}{2e^{2\alpha}}\right)$ ortak parantezine alınırsa, (5.18) eşitliğine ulaşılır.

Önerme 5.1.1 M, pseudo-Finsler manifold ve M' manifoldu $\widetilde{g}$ pseudo-Finsler metriğiyle birlikte verilen, TM tanjant manifoldunun boş kümeden farklı açık altmanifoldu olmak üzere, $f:(M',\widetilde{g})\to\mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. O zaman, f dönüşümü $(M',\widetilde{g})$ üzerinde timelike (spacelike) Finsler eikonal eşitsizliğini sağlar ancak ve ancak f dönüşümü $(M',\overline{\widetilde{g}})$ üzerinde timelike (spacelike) Finsler eikonal denklemini sağlar. Burada $\overline{\widetilde{g}}=\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|\widetilde{g}$ dir.

İspat. Eğer (5.16) ilişkisi mevcut ise, Yardımcı Teorem 5.1.2 ye göre $(M',\widetilde{g})$ manifoldu üzerindeki ∇ gradienti ile $(M',\overline{\widetilde{g}})$ manifoldu üzerindeki $\overline{\nabla}$ gradienti arasında $\overline{\nabla}=\dfrac{1}{e^{\alpha}}\nabla$ eşitliği vardır.

$e^{2\alpha}=\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|$ olarak kabul edelim. Eğer f dönüşümü $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)<0$ eşitsizliğini (veya $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)>0$) sağlarsa, o zaman

$$\overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}(\overline{\nabla} f,\overline{\nabla} f)=\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|\widetilde{g}_{\nabla f}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|}},\frac{\nabla f}{\sqrt{\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|}}\right) \tag{5.29}$$

olarak ifade edilir. Pseudo-Finsler manifoldların temel fonksiyonu ikinci dereceden homojen olduğu için (5.29) eşitliği

$$\begin{aligned}\overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}(\overline{\nabla} f,\overline{\nabla} f) &= \frac{\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|}{\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|^{2}}\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\\ &= \frac{\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)}{\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|}\end{aligned} \tag{5.30}$$

halini alır. (5.30) eşitliğinde timelike Finsler eikonal eşitsizlik kullanılırsa, $\dfrac{\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)}{\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|}=-1$ veya spacelike Finsler eikonal eşitsizlik kullanılırsa, $\dfrac{\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)}{\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|}=1$ olarak bulunur.

Aksine, eğer f dönüşümü $\overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}(\overline{\nabla} f,\overline{\nabla} f)=-1$ eşitliğini (veya $\overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}(\overline{\nabla} f,\overline{\nabla} f)=1$) sağlarsa, o zaman

$$\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)=\frac{1}{\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|}\overline{\widetilde{g}}_{\overline{\nabla} f}\left(\sqrt{\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|}\,\overline{\nabla} f,\sqrt{\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|}\,\overline{\nabla} f\right) \tag{5.31}$$

olarak bulunur. Pseudo-Finsler manifoldların temel fonksiyonu ikinci dereceden homojen olduğu için (5.31) eşitliği

$$\begin{aligned}\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f) &= \frac{\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|^2}{\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|}\widetilde{\overline{g}}_{\overline{\nabla} f}(\overline{\nabla} f,\overline{\nabla} f)\\ &= \left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right|\widetilde{\overline{g}}_{\overline{\nabla} f}(\overline{\nabla} f,\overline{\nabla} f)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\left|\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f,\nabla f)\right| > 0$ olduğundan, Tanım 5.1.8 gereği, ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 5.1.3 M, pseudo-Finsler manifold ve M' manifoldu $\widetilde{g}$ pseudo-Finsler metriğiyle birlikte verilen, TM tanjant manifoldunun boş kümeden farklı açık altmanifoldu olmak üzere, $f:(M',\widetilde{g})\to\mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. O zaman

$$\nabla(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p))) = 2\nabla^{\nabla f}_{\nabla f}\nabla f \tag{5.32}$$

dir. Burada $\nabla f(p)$ ve $\nabla(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p)))$, sırasıyla $(M',\widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldu üzerinde, $p\in M'$ noktasında f dönüşümünün ve $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p))$ nin gradientleridir.

İspat. $U=\{p\in M' : \nabla f|_p \neq 0\}$ olsun. $\forall X\in TM|_U$ ise, o zaman

$$\nabla(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p))) = X(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p))) \tag{5.33}$$

olarak bulunur. (5.33) eşitliğinde (3.22) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}X(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p))) &= \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla^{\nabla f}_X\nabla f(p),\nabla f(p))\\ &\quad+\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla^{\nabla f}_X\nabla f(p))+2C_{\nabla f}(\nabla^{\nabla f}_X X,\nabla f(p),\nabla f(p))\end{aligned} \tag{5.34}$$

elde edilir. (5.34) eşitliğinde, (3.11) eşitlikleri gereği $C_{\nabla f}(\nabla^{\nabla f}_X X,\nabla f(p),\nabla f(p))=0$ dır. Dolayısıyla (5.34) eşitliği

$$X(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p))) = 2\widetilde{g}_{\nabla f}((\nabla^{\nabla f}_X(\nabla f(p)),\nabla f(p)) \tag{5.35}$$

halini alır. (5.35) eşitliği (5.33) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\nabla(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p))) = 2\widetilde{g}_{\nabla f}((\nabla^{\nabla f}_X(\nabla f(p)),\nabla f(p)) \tag{5.36}$$

eşitliği elde edilir. (5.36) eşitliğinde $\nabla^{\nabla f}_X(\nabla f(p)) = h_f(X)$ olarak ifade edilirse, (5.36) eşitliği

$$\nabla(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p))) = 2\widetilde{g}_{\nabla f}(h_f(X),\nabla f(p)) \tag{5.37}$$

şeklinde elde edilir. (5.37) eşitliği simetriklik özelliği gereği

$$\nabla(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p))) = 2\widetilde{g}_{\nabla f}(h_f(\nabla f(p)),X) \tag{5.38}$$

halini alır. Böylelikle (5.38) eşitliği

$$\nabla(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p), \nabla f(p))) = 2\widetilde{g}_{\nabla f}((\nabla^{\nabla f}_{\nabla f} \nabla f(p)), X) \tag{5.39}$$

olarak bulunur. (5.39) eşitliği $\forall X \in TM|_U$ için sağlandığından (5.32) sonucuna ulaşılır.

Önerme 5.1.2 M, pseudo-Finsler manifold ve M' manifoldu $\widetilde{g}$ pseudo-Finsler metriğiyle birlikte verilen, TM tanjant manifoldunun boş kümeden farklı açık altmanifoldu olmak üzere, $f : (M', \widetilde{g}) \to \mathbb{R}$ bir pseudo-Finsler dönüşümdür (k_0 değerleri için eikonal denkleminin bir çözümü) ancak ve ancak ∇f vektör alanı sıfırdan farklı ve null olmayan Finsler vektör olmak şartıyla, $(M', \widetilde{g})$ manifoldu üzerinde birim jeodezik vektör alanıdır.

İspat. Yardımcı Teorem 5.1.3 yardımıyla, (5.32) eşitliği mevcuttur. Bu eşitliğe göre, $\nabla^{\nabla f}_{\nabla f} \nabla f = 0$ dır ancak ve ancak $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p), \nabla f(p))$ sabittir. Bu yüzden ∇f bir jeodezik vektör alanıdır. Ayrıca $\nabla f|_p \neq 0$ ve null olmayan Finsler vektör olduğundan, o zaman $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p), \nabla f(p)) = -1$ veya $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p), \nabla f(p)) = 1$ dir.

Teorem 5.1.1 M, pseudo-Finsler manifold ve M' manifoldu $\widetilde{g}$ pseudo-Finsler metriğiyle birlikte verilen, TM tanjant manifoldunun boş kümeden farklı açık altmanifoldu olmak üzere, $f : (M', \widetilde{g}) \to \mathbb{R}$ bir pseudo-Finsler dönüşümdür (k_0 değerleri için eikonal denkleminin bir çözümü) ancak ve ancak $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p), \nabla f(p)) = \varepsilon$ dur. Burada ε, 0 ya da 1 dir.

İspat. $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p), \nabla f(p)) = 0$ dır ancak ve ancak

$$\ker f_{*p} = \{a \mid a \in T_p(TM \setminus \{0\}),\, f_{*p}(a) = 0\}$$

olarak tanımlanan $T_p(TM \setminus \{0\})$ tanjant uzayının bir null altuzayıdır. Burada $p \in M'$ ve $f(p) = q \in \mathbb{R}$ için

$$f_{*p} : T_p(TM \setminus \{0\}) \to T_q(T\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

bir türev dönüşümüdür.

Varsayalım ki $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p), \nabla f(p)) = 1$ ve

$$f_{*p} : sp\{\nabla f(p)\} \to T_q(T\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

dönüşümü olsun. Burada

$$\begin{aligned} (f_{*p}(\nabla f(p)), f_{*p}(\nabla f(p))) &= (df_p(\nabla f(p)), df_p(\nabla f(p))) \\ &= (df_p(\nabla f(p)))^2 \end{aligned} \tag{5.40}$$

dir. (3.43) ifadesi gereği, $df_p(\nabla f(p)) = \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p), \nabla f(p))$ olarak tanımlanır. Buradan (5.40) ifadesi

$$(f_{*p}(\nabla f(p)), f_{*p}(\nabla f(p))) = \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p), \nabla f(p))^2 \tag{5.41}$$

olarak elde edilir. Böylece f_{*p} dönüşümü bir Finsler izometridir ancak ve ancak

$$\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p), \nabla f(p)) = \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p), \nabla f(p))^2 \tag{5.42}$$

dir. Dolayısıyla $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p), \nabla f(p)) = \varepsilon$ dur ancak ve ancak $p \in M'$ noktasında f bir pseudo-Finsler dönüşümdür.

Sonuç 5.1.1 $\left\| f_{*p}(\nabla f(p)) \right\|^2 = \left| \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p), \nabla f(p)) \right|$ olarak ifade edildiğinden f pseudo-Finsler dönüşümdür ancak ve ancak $\left\| f_{*p}(\nabla f(p)) \right\|^2 = \varepsilon$ dur. Burada ε, 0 ya da 1 dir.

5.2 Pseudo-Finsler Eikonal Denklemlerinin Afin Çözümleri

Bu kısımda pseudo-Finsler eikonal denklemlerinin afin çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca pseudo-Finsler manifoldlar arasında afin dönüşüm tanımlanıp, bu afin dönüşümün bazı geometrik özellikleri verilmiştir.

M, $m-$boyutlu bir manifold ve $\widetilde{g}$, M üzerinde F^* temel fonksiyonu kullanılarak oluşturulan bir pseudo-Finsler metrik olmak üzere $\mathbb{F}^m = (M, F^*, \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifold ve M', M pseudo-Finsler manifoldunun TM tanjant manifoldunun boş kümeden farklı bir açık altmanifoldudur. $f : (M', \widetilde{g}) \to (\mathbb{R}, kdt \otimes dt)$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Burada k, -1 ya da 1 dir. Bu dönüşümün afin çözümünü bulabilmek için öncelikle dönüşümün ikinci temel formunu hesaplayalım. Burada $\widetilde{\nabla}$, $(M', \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldunun Levi-Civita koneksiyonudur ve $\overset{f}{\nabla}$, $(\mathbb{R}, kdt \otimes dt)$ nin f boyunca geri çekme koneksiyonudur. Dönüşümün ikinci temel formu olan (3.2) formülünde, (4.10) ve (4.11) eşitlikleri $\widetilde{g}$ pseudo-Finsler metriği kullanılarak yerine yazılırsa

$$B(X,Y) = \overset{f}{\nabla}_X \left(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y) \frac{d}{dt} \circ f \right) - \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \widetilde{\nabla}^{\nabla f}_X Y) \frac{d}{dt} \circ f \tag{5.43}$$

eşitliği elde edilir. (5.43) eşitliğinde koneksiyonun 2. özelliği gereği

$$\begin{aligned} B(X,Y) \quad &= \quad \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y) \overset{f}{\nabla}_X \frac{d}{dt} \circ f + X\left(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y)\right) \frac{d}{dt} \circ f \\ &\quad - \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \widetilde{\nabla}^{\nabla f}_X Y) \frac{d}{dt} \circ f \end{aligned} \tag{5.44}$$

dir. (5.44) eşitliğinde $\widetilde{\nabla}^{\nabla f}$ koneksiyonunun metrikle bağdaşabilme özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y)\overset{f}{\nabla}_X \frac{d}{dt}\circ f + \widetilde{g}_{\nabla f}(\widetilde{\nabla}_X^{\nabla f}\nabla f, Y)\frac{d}{dt}\circ f \\ &+\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \widetilde{\nabla}_X^{\nabla f} Y)\frac{d}{dt}\circ f + C_{\nabla f}(\widetilde{\nabla}_X^{\nabla f}\nabla f, \nabla f, Y)\frac{d}{dt}\circ f \\ &-\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \widetilde{\nabla}_X^{\nabla f} Y)\frac{d}{dt}\circ f \end{aligned} \tag{5.45}$$

eşitliği elde edilir. (5.45) eşitliği (3.11) özelliği ve ilgili hesaplamalar sonucunda,

$$B(X,Y) = \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y)\overset{f}{\nabla}_X \frac{d}{dt}\circ f + \widetilde{g}_{\nabla f}(\widetilde{\nabla}_X^{\nabla f}\nabla f, Y)\frac{d}{dt}\circ f \tag{5.46}$$

şeklinde elde edilir. (3.26) eşitliği gereği $\overset{f}{\nabla}$ geri çekme koneksiyonunu açarsak, (5.46) ifadesi

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y) f^* \left(\nabla^V_{df(X)}\frac{d}{dt}\circ f + \nabla^H_X \frac{d}{dt}\circ f\right) \\ &+\widetilde{g}_{\nabla f}(\widetilde{\nabla}_X^{\nabla f}\nabla f, Y)\frac{d}{dt}\circ f \end{aligned} \tag{5.47}$$

olarak bulunur. Burada $\widetilde{g}_{\nabla f}(\widetilde{\nabla}_X^{\nabla f}\nabla f, Y) = H_f(X,Y)$ ve $df(X) = \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, X)\frac{d}{dt}\circ f$ dir. Bu eşitlikler (5.47) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y) f^* \left(\nabla^V_{\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, X)\frac{d}{dt}\circ f}\frac{d}{dt}\circ f + \nabla^H_X \frac{d}{dt}\circ f\right) \\ &+H_f(X,Y)\frac{d}{dt}\circ f \end{aligned} \tag{5.48}$$

olarak elde edilir. (5.48) ifadesinde koneksiyonun 3. özelliği gereği

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, Y) f^* \left(\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, X)\nabla^V_{\frac{d}{dt}\circ f}\frac{d}{dt}\circ f \right. \\ &\left. +\nabla^H_X \frac{d}{dt}\circ f\right) + H_f(X,Y)\frac{d}{dt}\circ f \end{aligned} \tag{5.49}$$

bulunur. Teğet vektörü yatay demet üzerinde bulunduğundan $\nabla^V_{\frac{d}{dt}\circ f}\frac{d}{dt}\circ f = 0$ olur. Ayrıca (5.49) ifadesinde yer alan $\nabla^H_X \frac{d}{dt}\circ f$ terimi için (3.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla^H_X \frac{d}{dt}\circ f &= \nabla_{f_* X}\frac{d}{dt} \\ &= \nabla_{\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, X)\frac{d}{dt}\circ f}\frac{d}{dt} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada koneksiyonun 3. özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\nabla^H_X \frac{d}{dt}\circ f &= \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, X)\nabla_{\frac{d}{dt}\circ f}\frac{d}{dt} \\ &= \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, X)\left(\nabla_{\frac{d}{dt}}\frac{d}{dt}\right)\circ f \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Tüm bunlar neticesinde (5.49) ifadesi

$$B(X,Y) = H_f(X,Y)\frac{d}{dt}\circ f \tag{5.50}$$

olarak bulunur.

(5.50) eşitliği sonucunda aşağıdaki tanım elde edilir:

Tanım 5.2.1 M, pseudo-Finsler manifold ve M' manifoldu $\widetilde{g}$ pseudo-Finsler metriğiyle birlikte verilen, TM tanjant manifoldunun boş kümeden farklı açık altmanifoldu olmak üzere, $f:(M',\widetilde{g}) \to (\mathbb{R}, kdt\otimes dt)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $H_f = 0$ ise, o zaman f afin dönüşüm olarak adlandırılır.

(3.40) ifadesi pseudo-Finsler manifoldlara uyarlanırsa, o zaman $(M_1,\widetilde{g}_1)$ ve $(M_2,\widetilde{g}_2)$ pseudo-Finsler manifoldlar arasındaki afin dönüşüm kavramı lokal bileşenler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

Tanım 5.2.2 $f:(M_1,\widetilde{g}_1)\to(M_2,\widetilde{g}_2)$ diferensiyellenebilir dönüşümü $(M_1,\widetilde{g}_1)$ ve $(M_2,\widetilde{g}_2)$ pseudo-Finsler manifoldlar arasında bir afin dönüşümdür ancak ve ancak H^i_{jk}, ∇^H yatay kovaryant türevinin lokal koneksiyon bileşeni ve V^i_{jk}, ∇^V dikey kovaryant türevinin lokal koneksiyon bileşeni olmak üzere

$$\begin{aligned}B^i_{\alpha\beta} - \nabla^\gamma_{\alpha\beta}(x^m,y^m)B^i_\gamma(x) + \Big(&H^i_{jk}(f^l(x^m), f^l_\varepsilon(x^m)y^\varepsilon) \\ &+V^i_{jk}(f^l(x^m), f^l_\varepsilon(x^m)y^\varepsilon)D_j y^m\Big)B^j_\alpha B^k_\beta \quad = 0\end{aligned} \tag{5.51}$$

eşitliği mevcuttur. Burada B^i_α, $B^i_{\alpha\beta}$ notasyonları (3.7) ve (3.8) ifadelerinde tanımlandığı gibidir ve $\nabla^\gamma_{\alpha\beta} = \nabla^\gamma_{\alpha\beta}(x^m,y^m)$, $(M_1,\widetilde{g}_1)$ pseudo-Finsler manifoldunun koneksiyonu ve

$$\begin{aligned}\overset{f}{\nabla}{}^i_{jk} &= \overset{f}{\nabla}{}^i_{jk}(f^l(x^m), f^l_\varepsilon(x^m)y^\varepsilon) \\ &= H^i_{jk}(f^l(x^m), f^l_\varepsilon(x^m)y^\varepsilon) + V^i_{jk}(f^l(x^m), f^l_\varepsilon(x^m)y^\varepsilon)D_j y^m\end{aligned}$$

olacak şekilde $(M_2,\widetilde{g}_2)$ pseudo-Finsler manifoldunun f boyunca geri çekme koneksiyonudur.

Sonuç 5.2.1 (5.51) denkleminde Finsler koneksiyon yerine Berwald koneksiyon kullanılırsa, (5.51) ifadesi

$$B^i_{\alpha\beta} - H^\gamma_{\alpha\beta}(x^m, y^m)B^i_\gamma(x) + H^i_{jk}(f^l(x^m), f^l_\varepsilon(x^m)y^\varepsilon)B^j_\alpha B^k_\beta = 0 \tag{5.52}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 5.2.2 (5.52) denkleminde (3.29) ifadesi kullanılırsa

$$B^i_{\alpha\beta} - G^\gamma_{\alpha\beta}(x^m, y^m)B^i_\gamma(x) + G^i_{jk}(f^l(x^m), f^l_\varepsilon(x^m)y^\varepsilon)B^j_\alpha B^k_\beta = 0 \tag{5.53}$$

eşitliği elde edilir. (5.53) eşitliği spray bileşenleri cinsinden afin dönüşüm denklemidir.

Sonuç 5.2.3 (5.51) denkleminde Finsler koneksiyon yerine Cartan koneksiyon kullanıldığında ise, (3.30) ve (3.31) ifadeleri gereği

$$\begin{aligned} &B^i_{\alpha\beta} - (\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(x^m, y^m) + C^\gamma_{\alpha\beta}(x^m, y^m))B^i_\gamma(x) \\ &\quad + (\Gamma^i_{jk}(f^l(x^m), \widetilde{x}^l_\varepsilon(x^m)y^\varepsilon) + C^i_{jk}(f^l(x^m), f^l_\varepsilon(x^m)y^\varepsilon)D_j y^m)B^j_\alpha B^k_\beta \quad = 0 \end{aligned} \tag{5.54}$$

eşitliği bulunur.

Sonuç 5.2.4 (5.54) denkleminde Cartan koneksiyon yerine $(G^i_k, \Gamma^i_{jk}, 0)$ üçlüsüyle ifade edilen Chern-Rund koneksiyon kullanılırsa

$$B^i_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(x^m, y^m)B^i_\gamma(x) + \Gamma^i_{jk}(f^l(x^m), f^l_\varepsilon(x^m)y^\varepsilon)B^j_\alpha B^k_\beta = 0 \tag{5.55}$$

eşitliği elde edilir. (5.55) denklemi aynı zamanda $(M_2, \widetilde{g}_2)$ pseudo-Finsler manifoldunu pseudo-Riemannian manifold olarak kabul edildiğinde de geçerli olan bir denklemdir.

Önerme 5.2.1 $f : (M_1, \widetilde{g}_1) \to (M_2, \widetilde{g}_2)$ herhangi bir afin dönüşümü $(M_2, \widetilde{g}_2)$ pseudo-Finsler manifoldunun $h-$otoparalel bir eğrisidir.

İspat. Eğer $(\mathbb{R}, kdt \otimes dt) = (M_1, \widetilde{g}_1)$ olarak düşünülürse, burada $k = 1$ ya da $k = -1$ dir. Bu durumda pseudo-Finsler manifoldlar için elde edilen (5.51) afin dönüşüm denklemi, (3.39) Finsler koneksiyonunun jeodezik denklemi haline dönüşür. $\widetilde{F}^{*i}_{jk}$, $(M_2, \widetilde{g}_2)$ pseudo-Finsler manifoldunun Finsler koneksiyonu olmak üzere (3.39) denkleminde

$$\begin{aligned} \widetilde{F}^{*i}_{jk}(x^i(t), y^i(t)) &= \frac{\partial N^i_k}{\partial y^j}(x^i(t), y^i(t)) \\ &= \Gamma^i_{jk}(x) \end{aligned} \tag{5.56}$$

ifadesi kullanılırsa, (3.39) denklemi

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0 \tag{5.57}$$

halini alır.

Sonuç 5.2.5 (5.57) denklemi Riemannian manifoldlar için jeodezik denklemidir.

Buradan

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\frac{\partial G^i}{\partial y^k}(x(s),x'(s))\frac{dx^k}{ds}=0 \tag{5.58}$$

olup, pseudo-Finsler manifoldlar için non-dejenere jeodezik denklemi elde edilmiş olur.

Teorem 5.2.1 $(M_1,\widetilde{g}_1)$ ve $(M_2,\widetilde{g}_2)$ pseudo-Finsler manifoldlar arasında $f:(M_1,\widetilde{g}_1)\to(M_2,\widetilde{g}_2)$ dönüşümü afin dönüşümdür ancak ve ancak f dönüşümü $(M_1,\widetilde{g}_1)$ manifoldu üzerinde yer alan $h-$otoparalel eğrileri $(M_2,\widetilde{g}_2)$ manifoldu üzerinde yer alan $h-$otoparalel eğrilere taşır.

İspat. $\gamma(t)=(t^\alpha(t))$ lineer olmayan koneksiyonun bir $h-$otoparalel eğrisi, $(M_2,\widetilde{g}_2)$ pseudo-Finsler manifoldu üzerinde Finsler koneksiyonunun bir jeodeziğidir ancak ve ancak (3.39) denklemi mevcuttur.

$\widetilde{\gamma}(t)=(f\circ\gamma)(t)$ eğrisi, $x^i(t)=f^i(t^\alpha(t))$ bileşenleri tarafından ifade edilsin. Burada t ye göre türev alınırsa

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{df^i}{dt^\alpha}\frac{dt^\alpha}{dt}=f^i_\alpha\frac{dt^\alpha}{dt} \tag{5.59}$$

olur. (5.59) ifadesinde tekrar t ye göre türev alınırsa

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}=\frac{df^i_\alpha}{dt^\beta}\frac{dt^\beta}{dt}\frac{dt^\alpha}{dt}+f^i_\mu\frac{d^2t^\mu}{dt^2} \tag{5.60}$$

eşitliği elde edilir. (3.39) ifadesinde (5.59) ve (5.60) ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^i}{ds^2}+\widetilde{F}^{*i}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} &= \frac{df^i_\alpha}{dt^\beta}\frac{dt^\beta}{dt}\frac{dt^\alpha}{dt}+f^i_\mu\frac{d^2t^\mu}{dt^2}\\ &\quad+\widetilde{F}^{*i}_{jk}f^i_\alpha\frac{dt^\alpha}{dt}f^i_\beta\frac{dt^\beta}{dt}\end{aligned} \tag{5.61}$$

olarak bulunur. (5.61) ifadesinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\widetilde{F}^{*i}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=(f^i_{\alpha\beta}+\widetilde{F}^{*i}_{jk}f^i_\alpha f^i_\beta)\frac{dt^\alpha}{dt}\frac{dt^\beta}{dt}+f^i_\mu\frac{d^2t^\mu}{dt^2} \tag{5.62}$$

şeklinde elde edilir. (3.33) ifadesi gereği (5.62) ifadesi

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\widetilde{F}^{*i}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=(f^i_{\alpha\beta}+F^{*\gamma}_{\alpha\beta}f^i_\gamma+\widetilde{F}^{*i}_{jk}f^i_\alpha f^i_\beta)\frac{dt^\alpha}{dt}\frac{dt^\beta}{dt}=0 \tag{5.63}$$

haline dönüşür. Burada $F^{*\gamma}_{\alpha\beta}$ ve $\widetilde{F}^{*i}_{jk}$ Finsler koneksiyonları, sırasıyla, $(M_1,\widetilde{g}_1)$ ve $(M_2,\widetilde{g}_2)$ pseudo-Finsler manifoldlara aittir.

Eğer f bir afin dönüşüm ise, o zaman afin dönüşüm denklemi (5.54) ve (5.56) eşitlikleri gereği

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\widetilde{F}^{*i}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=f^i_{\alpha\beta}-(F^{*\gamma}_{\alpha\beta}+C^{*\gamma}_{\alpha\beta})f^i_\gamma+(\widetilde{F}^{*i}_{jk}+\widetilde{C}^{*i}_{jk})f^i_\alpha f^i_\beta=0 \tag{5.64}$$

olarak bilindiğinden, bu ifade $\frac{dt^\alpha}{dt}$ ve $\frac{dt^\beta}{dt}$ ile genişletilir ve (3.11) özeliği kullanılırsa,

$$C^{*\gamma}_{\alpha\beta}\frac{dt^\alpha}{dt}\frac{dt^\beta}{dt}=0 \tag{5.65}$$

ve

$$\widetilde{C}^{*i}_{jk}f^i_\alpha f^i_\beta\frac{dt^\alpha}{dt}\frac{dt^\beta}{dt}=0 \tag{5.66}$$

elde edilir. (5.65) ve (5.66) eşitlikleri (5.64) eşitliğinde yerine konulursa (5.63) ifadesi bulunur. Burada $C^{*\gamma}_{\alpha\beta}$ ve $\widetilde{C}^{*i}_{jk}$ Cartan koneksiyonları, sırasıyla, $(M_1,\widetilde{g}_1)$ ve $(M_2,\widetilde{g}_2)$ pseudo-Finsler manifoldlara aittir.

Aksine, f dönüşümü $(M_1,\widetilde{g}_1)$ pseudo-Finsler manifoldundan $h-$otoparalel eğrileri $(M_2,\widetilde{g}_2)$ pseudo-Finsler manifoldundaki $h-$otoparalel eğrilere taşıdığını varsayalım. O zaman (5.63) ifadesinde (5.65) ve (5.66) eşitlikleri kullanılırsa

$$\left[f^i_{\alpha\beta}-(F^{*\gamma}_{\alpha\beta}+C^{*\gamma}_{\alpha\beta})f^i_\gamma+(\widetilde{F}^{*i}_{jk}+\widetilde{C}^{*i}_{jk})f^j_\alpha f^k_\beta\right]\frac{dt^\alpha}{dt}\frac{dt^\beta}{dt}=0 \tag{5.67}$$

olarak elde edilir. Bu da f dönüşümünün afin dönüşüm denklemidir.

Sonuç 5.2.6 Teorem 5.2.1 e göre, $(M_1,\widetilde{g}_1)$ pseudo-Finsler manifoldundaki $h-$otoparalel eğrileri $(M_2,\widetilde{g}_2)$ pseudo-Finsler manifoldundaki $h-$otoparalel eğrilere taşıyan $f:(M_1,\widetilde{g}_1)\to(M_2,\widetilde{g}_2)$ dönüşümü, $(M_1,\widetilde{g}_1)$ ve $(M_2,\widetilde{g}_2)$ pseudo-Finsler manifoldlar arasında sıfır tensiyon alanlı harmonik dönüşümdür.

Önerme 5.2.2 $I\subseteq\mathbb{R}$ bir açık aralık ve $(M,\widetilde{g})$ bir pseudo-Finsler manifold olsun. O zaman her bir $f:(I,dt\otimes dt)\to(M,\widetilde{g})$ harmonik dönüşümü bir afin dönüşümdür ve $f:I\to M$, $(M,\widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldunun bir jeodeziğidir.

İspat. (3.5) eşitliğinden, eğer f harmonikse, o zaman f afindir. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 = \tau(f) &= (\nabla f_*)\left(\frac{d}{dt},\frac{d}{dt}\right) \\ &= \overset{f}{\nabla}_{\frac{d}{dt}} f_*\frac{d}{dt}-f_*\left(\nabla_{\frac{d}{dt}}\frac{d}{dt}\right) \end{aligned} \tag{5.68}$$

dir. Burada $\nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{d}{dt} = 0$ olduğundan, (5.68) ifadesinden

$$0 \;=\; \overset{f}{\nabla}_{\frac{d}{dt}} f_* \frac{d}{dt} \;=\; \nabla_{\frac{d}{dt}} f \tag{5.69}$$

elde edilir. Bu durumda f, $(M, \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldunun bir jeodeziğidir.

Önerme 5.2.3 $f : (M, \widetilde{g}) \to (\mathbb{R}, kdt \otimes dt)$ bir dönüşüm olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) f afin dönüşümdür.

(2) Eğer $\gamma : I \to M$, $(M, \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldunun bir jeodeziği ise, o zaman $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ bir afin fonksiyondur.

(3) ∇f, $(M, \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldu üzerinde bir paralel vektör alanıdır.

İspat: $(\mathbf{1}) \Leftrightarrow (\mathbf{2})$ $\gamma : I \to M$, $(M, \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldunun bir jeodeziği olsun. O zaman bileşke fonksiyon türevinden

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \widetilde{g}_{\nabla f}((\nabla f) \circ \gamma, \gamma') \tag{5.70}$$

bulunur. (5.70) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma) &= \frac{d}{dt} \widetilde{g}_{\nabla f}((\nabla f) \circ \gamma, \gamma') \\ &= \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla_{\frac{d}{dt}}((\nabla f) \circ \gamma), \gamma') + \widetilde{g}_{\nabla f}((\nabla f) \circ \gamma, \gamma'') \end{aligned} \tag{5.71}$$

olarak elde edilir. $\gamma'' = 0$ olduğundan, (5.71) eşitliği

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma) &= \widetilde{g}_{\nabla f}\left(\nabla_{\frac{d}{dt}}((\nabla f) \circ \gamma), \gamma'\right) \\ &= \widetilde{g}_{\nabla f}\left(\frac{d}{dt}((\nabla f) \circ \gamma), \gamma'\right) \end{aligned} \tag{5.72}$$

haline dönüşür. $\frac{d}{dt}((\nabla f) \circ \gamma) = \nabla_{\gamma'}^{\nabla f}(\nabla f)$ olarak ifade edilebildiğinden, (5.72) eşitliği

$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma) = \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla_{\gamma'}^{\nabla f}(\nabla f), \gamma') \tag{5.73}$$

olarak bulunur. (5.73) eşitliğinde (3.45) ifadesi kullanılırsa

$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma) = H_f(\gamma', \gamma') \tag{5.74}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ bir afin fonksiyon olmasının gerek ve yeter şartı $H_f(\gamma', \gamma') = 0$ olmasıdır.

$(\mathbf{1}) \Leftrightarrow (\mathbf{3})$ Her bir $X, Y \in \Gamma TM$ için,

$$H_f(X,Y) = \widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla_X^{\nabla f}(\nabla f), Y)$$

olduğundan, $H_f = 0$ dır ancak ve ancak $\nabla(\nabla f) = 0$ dır. Yani ∇f, $(M, \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldu üzerinde paralel vektör alanıdır.

Önerme 5.2.4 $f : (M, \widetilde{g}) \to (\mathbb{R}, kdt \otimes dt)$ bir afin dönüşüm olsun. O zaman,

i) M pseudo-Finsler manifoldunda f dönüşümünün rankı sabittir.

ii) M pseudo-Finsler manifoldunda $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f)$ sabittir.

İspat. M pseudo-Finsler manifoldunda f dönüşümünün rankı sabittir ancak ve ancak her bir $p \in M$ de $\nabla f(p) = 0$ ya da her bir $p \in M$ noktasında $\nabla f(p) \neq 0$ dır. Burada, her bir $p \in M$ noktasında $\nabla f(p) \neq 0$ durumu dikkate alınacaktır.

i) $p, q \in M$ olsun ve $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ ile birlikte $\gamma : [a,b] \to M$ bir eğri olsun. ∇f, $(M, \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifold üzerinde paralel vektör alanı olduğundan, γ boyunca $(\nabla f) \circ \gamma$ bir paralel vektör alanıdır. Başlangıç şartlarına göre bir eğri boyunca paralel vektör alanlarının tekliği yardımıyla $\gamma(a) \neq p \Leftrightarrow \gamma(b) \neq q$ dır. Dolayısıyla her bir $p \in M$ noktasında $\nabla f(p) \neq 0$ dir. Yani, M manifoldunda f dönüşümünün rankı sabittir.

ii) (5.32) ifadesine göre, M manifoldu üzerinde $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f)$ sabittir.

5.3 Null Finsler Eikonal Denklemi

Bu kısımda, bir önceki kısımda $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f, \nabla f) = F^{*2}(\nabla f) = 0$ olacak şekilde tanımlanan pseudo-Finsler eikonal denklem çeşitlerinden biri olan null Finsler eikonal denklemi kullanılarak bazı fiziksel sonuçlara ulaşılmıştır.

Tanım 5.3.1 M', M pseudo-Finsler manifoldunun TM tanjant manifoldunun boş kümeden farklı bir açık altmanifoldu olmak üzere $\mathbb{F}^m = (M, M', \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifold ve $f:(M',\widetilde{g})\to\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu dönüşümün enerji yoğunluğu

$$e(f)=-\frac{1}{2}\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p)) \tag{5.75}$$

olarak tanımlanır. Burada $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p))=\left\|f_{*p}\right\|^2$ dir.

$(M',\widetilde{g})$ üzerinde $e(f)$ altharmonik dönüşüm ise, f dönüşümü altharmonik enerji yoğunluklu olarak adlandırılır. Yani $-\Delta e(f)\geq 0$ dır.

Sonuç 5.3.1 Eğer $f:(M',\widetilde{g})\to\mathbb{R}$ dönüşümü $(M',\widetilde{g})$ üzerinde bir pseudo-Finsler eikonal denklemini sağlarsa, o zaman f dönüşümü altharmonik enerji yoğunlukludur. Yani $-\Delta e(f)=0$ dır.

Sonuç 5.3.2 Finsler manifoldlardan Riemannian manifolda tanımlanan dönüşümde enerji yoğunluğunun sıfır olması f dönüşümünün sabit olması demektir. Fakat pseudo-Finsler manifoldlardan pseudo-Riemannian manifolda tanımlanan dönüşümler için bu geçerli olmaz. Çünkü enerji fonksiyoneli metriklere bağlı olduğu için enerji böyle bir dönüşüm altında negatif olabilir.

Yardımcı Teorem 5.3.1 $(M',\widetilde{g})$ 2-boyutlu Lorentz-Finsler manifold ve $f:(M',\widetilde{g})\to\mathbb{R}$ dönüşümü $(M',\widetilde{g})$ manifoldunun her bir $p\in M'$ noktasında, $\nabla f(p)\neq 0$ olacak şekilde null Finsler eikonal denkleminin bir çözümü olsun. O zaman $(M',\widetilde{g})$ manifoldu üzerinde tanımlanan f dönüşümü harmonik bir dönüşümdür.

İspat. Önerme 5.1.2 yardımıyla $U_1=\nabla f$, $(M',\widetilde{g})$ 2-boyutlu Lorentz-Finsler manifold üzerinde bir jeodezik null Finsler vektör alanı olsun. $(M',\widetilde{g})$ üzerindeki U_2, $\widetilde{g}(Z_1,Z_2)=-\dfrac{1}{2}$ olarak tanımlanan null Finsler vektör alanı olsun. Burada $Z_1=U_1+U_2$ ve $Z_2=U_1-U_2$ timelike ve spacelike Finsler vektörler kullanılarak elde edilen null Finsler vektörlerdir. (3.47) eşitliği gereği

$$\begin{aligned}\Delta f &= -\operatorname{div}(\nabla f)\\ &= -\sum_{i=1}^{2}\widetilde{g}_{Z_i}(Z_i,Z_i)\widetilde{g}_{Z_i}(\nabla_{Z_i}\nabla f,Z_i)\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\Delta f=-\widetilde{g}_{Z_1}(Z_1,Z_1)\widetilde{g}_{Z_1}(\nabla_{Z_1}U_1,Z_1)-\widetilde{g}_{Z_2}(Z_2,Z_2)\widetilde{g}_{Z_2}(\nabla_{Z_2}U_1,Z_2) \tag{5.76}$$

olur. $Z_1=U_1+U_2$ timelike Finsler vektör, $Z_2=U_1-U_2$ spacelike Finsler vektör ve U_1

vektörü bir referans vektörü olarak kabul edilirse bu durumda (5.76) ifadesi

$$\begin{aligned} \Delta f &= \widetilde{g}_{U_1}((\nabla_{U_1+U_2}(U_1)),(U_1+U_2)) \\ &\quad -\widetilde{g}_{U_1}((\nabla_{U_1-U_2}(U_1)),(U_1-U_2)) \end{aligned} \tag{5.77}$$

şeklinde yazılır. Koneksiyonun lineerlik şartı gereği, (5.77) ifadesi

$$\begin{aligned} \Delta f &= \widetilde{g}_{U_1}((\nabla_{U_1}(U_1)),U_1)+\widetilde{g}_{U_1}((\nabla_{U_1}(U_1)),U_2) \\ &\quad +\widetilde{g}_{U_1}((\nabla_{U_2}(U_1)),U_1)+\widetilde{g}_{U_1}((\nabla_{U_2}(U_1)),U_2) \\ &\quad -\widetilde{g}_{U_1}((\nabla_{U_1}(U_1)),U_1)+\widetilde{g}_{U_1}((\nabla_{U_1}(U_1)),U_2) \\ &\quad +\widetilde{g}_{U_1}((\nabla_{U_2}(U_1)),U_1)-\widetilde{g}_{U_1}((\nabla_{U_2}(U_1)),U_2) \end{aligned} \tag{5.78}$$

olarak elde edilir. U_1 null Finsler vektör alanı jeodezik olduğundan, $(\nabla_{U_1}(U_1))=0$ dır. Bu ifade (5.78) eşitliğinde kullanıldığında, (5.78) eşitliği

$$\Delta f=\widetilde{g}_{U_1}((\nabla_{U_2}(U_1)),U_2)-\widetilde{g}_{U_1}((\nabla_{U_2}(U_1)),U_2)=0 \tag{5.79}$$

halini alır. Bundan dolayı $(M',\widetilde{g})$ manifoldunda $\Delta f=0$ olduğundan dolayı, f dönüşümü harmoniktir denir.

Önerme 5.3.1 $(M',\widetilde{g})$ kompakt pseudo-Finsler manifold ve $f:(M',\widetilde{g})\to\mathbb{R}$ dönüşümü $(M',\widetilde{g})$ manifoldu üzerinde her bir $p\in M'$ noktasında, $\nabla f(p)\neq 0$ olmak üzere null Finsler eikonal denkleminin bir çözümü olsun. O zaman $(M',\widetilde{g})$ manifoldu üzerinde f dönüşümü enerji fonksiyonelinin kritik noktalarıdır.

İspat. f dönüşümünün enerji integrali, (5.75) eşitliğinde verilen enerji yoğunluğu kullanılarak,

$$E(f)=-\frac{1}{2}\int_{M'}\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p))ds \tag{5.80}$$

olarak elde edilir. Burada ds, M' manifoldunun hacim elementidir. $p\in M'$ noktası için, $\nabla f(p)\neq 0$ olmak üzere pseudo-Finsler manifoldunun null Finsler eikonal denklemi $\widetilde{g}_{\nabla f}(\nabla f(p),\nabla f(p))=0$ olarak ifade edilir. $E(f)=0$ olarak elde edildiğinde f dönüşümü enerji fonksiyonelinin kritik noktalarıdır.

6. PSEUDO FİNSLER MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI TEOREMLER

Bu bölümde, B. Ünal'ın (1995) yılındaki çalışması "Divergence theorems in semi-Riemannian geometry" referans alınarak, pseudo-Finsler manifoldlar için alışılagelmiş yapısından farklı olan divergens teoreminin iki yeni versiyonu elde edilmiştir ve bunlara bağlı bazı sonuçlara ulaşılmıştır.

6.1 Pseudo-Finsler Manifoldlarda Divergens Teoremleri

Bu kısımda, pseudo-Finsler manifoldlarının bir non-dejenere sınırı tanımlanıp, bu non-dejenere sınır üzerinde hacim formu kullanılarak pseudo-Finsler manifoldlar için bilinen yapısından farklı olan divergens teoreminin iki yeni versiyonu elde edilmiştir ve bunlarla ilgili bazı sonuçlara ulaşılmıştır.

M, $m-$boyutlu bir manifold ve $\widetilde{g}$, M üzerinde F^* temel fonksiyonu kullanılarak oluşturulan bir pseudo-Finsler metrik olmak üzere $\mathbb{F}^m = (M, F^*, \widetilde{g})$ bir pseudo-Finsler manifold gözönüne alalım.

Tanım 6.1.1 $(M, \widetilde{g})$, $\partial\Omega$ sınırlı yönlendirilmiş pseudo-Finsler manifold olsun. Pozitif yönlendirilmiş ortonormal bir çatı için

$$\mu(X_1, ..., X_m) = 1 \tag{6.1}$$

ise M manifoldunda $m-$form olan μ bir pseudo-Finsler hacim formu olarak adlandırılır.

Önerme 6.1.1 $(M, \widetilde{g})$, $\partial\Omega$ sınırlı yönlendirilmiş pseudo-Finsler manifold olsun. O zaman $(M, \widetilde{g})$ üzerinde tek olacak şekilde μ pseudo-Finsler hacim formu mevcuttur.

İspat. $U \subset M$ açık kümesinde $\{X_1, ..., X_m\}$ pozitif yönlendirilmiş ortonormal lokal çatı ve $\{X_1, ..., X_m\}$ çatısına dual olan $\{\mu_1, ..., \mu_m\}$ lokal ko-çatı verilsin. U açık kümesinde tanımlanan $(M, \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldu için $\mu_U = \mu_1 \times ... \times \mu_m$ olarak gösterilen bir pseudo-Finsler hacim formu olsun.

Eğer φ_V, $V \subset M$ açık kümesinde tanımlanan bir pseudo-Finsler hacim formu ise, $U \cap V$ kümesi üzerinde $\mu_U = \varphi_V$ dir. $U \cap V \neq \varnothing$ koşulu altında , $U \cap V$ kümesi üzerinde $\mu_U = h\varphi_V$ olacak şekilde bir h fonksiyonu vardır. Böylece, $U \cap V$ kümesi üzerinde her bir $\{Y_1, ..., Y_n\}$ pozitif yönlendirilmiş ortonormal lokal çatı için

$$\varphi_V(Y_1, ..., Y_m) = \mu_U(Y_1, ..., Y_m) \tag{6.2}$$

olduğunda, $h = 1$ dir. Tanım 6.1.1 e göre, $\mu_U = \mu$ olacak şekilde bir pseudo-Finsler hacim formudur. (6.2) eşitliğinde ise μ hacim formunun tekliği görülmüş olur.

Önerme 6.1.2 $(M, \widetilde{g})$, $\partial\Omega$ sınırlı yönlendirilmiş pseudo-Finsler manifold ve μ, $(M, \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldunun hacim formu olsun. Eğer Z, M manifoldunda vektör alanı ise, $\pounds$, M manifoldu üzerinde Lie türevi olmak üzere

$$\pounds_Z \mu = (\operatorname{div} Z)\mu \tag{6.3}$$

eşitliği vardır.

İspat. $(M, \widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldu üzerinde $\{X_1, ..., X_\nu, X_{\nu+1}, ..., X_m\}$ ortonormal lokal çatı olmak üzere

$$\widetilde{g}_{X_i}(X_i, X_i) = \begin{cases} -1, & 1 \leq i \leq \nu \\ 1, & \nu + 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

eşitliği mevcut olsun.

$l : TM \to T^*M$ Legendre dönüşümü olmak üzere, eğer $\{\mu_1, ..., \mu_m\}$ çatısı, $\{X_1, ..., X_m\}$ ortonormal lokal çatısına dual ko-çatı ve $\{\omega_1, ..., \omega_m\}$ çatısı $i = 1, ..., m$ için $\omega_i = l(X_i) = \widetilde{g}_{X_i}(X_i, \cdot)$ olarak tanımlanan ko-çatı ise,

$$\omega_i = -\mu_i, \quad 1 \leq i \leq \nu \tag{6.4}$$

ve

$$\omega_i = \mu_i, \quad \nu + 1 \leq i \leq m \tag{6.5}$$

eşitlikleri vardır.

$$(\pounds_Z \mu)(X_1, \dots, X_m)(p) = \left[Z\mu(X_1, \dots, X_m) - \sum_{i=1}^{m} \mu(X_1, \dots, L_Z X_i, \dots, X_m) \right](p) \tag{6.6}$$

dir. (6.1) ifadesine ve $\pounds_Z X_i = \nabla_Z X_i - \nabla_{X_i} Z$ eşitliğine göre, (6.6) ifadesi

$$(\pounds_Z \mu)(X_1, \dots, X_n)(p) = \left[-\sum_{i=1}^{m} \mu(X_1, \dots, \nabla_Z X_i - \nabla_{X_i} Z, \dots, X_n) \right](p) \tag{6.7}$$

olarak elde edilir. $\mu = \mu_1 \times ... \times \mu_m$ ve $\nabla_Z X_i = 0$ olduğu gözönüne alınırsa, (6.7) eşitliği

$$(\pounds_Z\mu)(X_1,...,X_m)(p) = \left[\sum_{i=1}^{m} \mu_1 \times ... \times \mu_m(X_1,...,\nabla_{X_i}Z,...,X_m)\right](p) \tag{6.8}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$(\pounds_Z\mu)(X_1,...,X_m)(p) = \left[\sum_{i=1}^{m} \mu_i(\nabla_{X_i}Z)\right](p) \tag{6.9}$$

eşitliği elde edilir. (6.9) eşitliğinde, (6.4) ve (6.5) eşitlikleri gözönüne alındığında,

$$(\pounds_Z\mu)(X_1,...,X_m)(p) = \left[\sum_{i=1}^{\nu}(-\omega_i(\nabla_{X_i}Z)) + \sum_{i=\nu+1}^{m}(\omega_i(\nabla_{X_i}Z))\right](p) \tag{6.10}$$

olarak bulunur. Yani,

$$(\pounds_Z\mu)(X_1,...,X_m)(p) = \left[\sum_{i=1}^{m} \widetilde{g}_{X_i}(X_i,X_i)\widetilde{g}_{X_i}(\nabla_{X_i}Z,X_i)\right](p) \tag{6.11}$$

biçimindedir. (6.11) eşitliği, divergens tanımından,

$$(\pounds_Z\mu)(X_1,...,X_m)(p) = (\operatorname{div} Z)(p)\mu(X_1,...,X_m)(p)$$

şeklindedir. Böylece, T_pM tanjant uzayında her bir $\{X_1,...,X_m\}$ pozitif yönlendirilmiş ortonormal lokal çatı için (6.3) eşitliği elde edilir.

Teorem 6.1.1 $(M,\widetilde{g})$, $\partial\Omega$ sınırlı yönlendirilmiş bir pseudo-Finsler manifold ve μ, $(M,\widetilde{g})$ pseudo-Finsler manifoldunun hacim formu olsun. Eğer Z, M kompakt manifoldunda vektör alanı ise,

$$\int_{\Omega}(\operatorname{div} Z)\mu = \int_{\partial\Omega} i_Z\mu \tag{6.12}$$

eşitliği mevcuttur. Burada i dış çarpım operatörüdür.

İspat. $\pounds_Z = di_Z + i_Zd$ olduğundan ve (6.3) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} Z)\mu &= \pounds_Z\mu \\ &= di_Z\mu + i_Zd\mu \\ &= di_Z\mu\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, Stokes teoremi yardımıyla

$$\int_{\Omega}(\operatorname{div} Z)\mu = \int_{\Omega} di_Z\mu = \int_{\partial\Omega} i_Z\mu$$

elde edilir.

$\mathbb{F}^m = (M, F^*, \widetilde{g})$, $0 \leq q < m$ indeksli bir $m-$boyutlu, yönlendirilebilir ve C^∞ pseudo-Finsler manifoldu ve $x \in M$ noktasında, $\mathbf{n}$ normalli bir hiperyüzey olan, S_x boş kümeden farklı açık altmanifoldu gözönüne alalım. $x \in M$ noktasında $\partial\Omega$=S_x diferensiyellenebilir sınırlı ve indirgenmiş yönlendirme tarafından yönlendirilmiş olacak şekilde bir Ω kompakt bölge varsayalım.

$\partial\Omega$ kompakt sınırına normal vektörleri sırasıyla, timelike, spacelike ve lightlike olan $\partial\Omega^+$, $\partial\Omega^-$, $\partial\Omega^0$ bölgeleri tanımlanabilir. $\partial\Omega^-$ sınırı üzerinde indirgenmiş metriğin indeksi q ve $\partial\Omega^+$ sınırı üzerinde indirgenmiş metriğin indeksi $q-1$ dir.

Yardımcı Teorem 6.1.1 $\partial\Omega^+$ ve $\partial\Omega^-$ bölgeleri $\partial\Omega$ kompakt sınırının açık altkümeleri ve $\partial\Omega^0$ bölgesi $\partial\Omega$ kompakt sınırının kapalı altkümesidir.

İspat. $p \in \partial\Omega^-$ noktasında, $\beta_p = \{e_1, ..., e_{m-1}\}$, $T_p\partial\Omega$ için bir yönlendirilebilir ortonormal baz olmak üzere, $[\widetilde{g}_{\partial\Omega}]_{\beta_p}$ matrisi

$$[\widetilde{g}_{\partial\Omega}]_{\beta_p} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir, burada $\det([\widetilde{g}_{\partial\Omega}]_{\beta_p}) = (-1)^q$ ve $\widetilde{g}_{\partial\Omega}$, $\partial\Omega$ kompakt sınırında indirgenmiş bir pseudo-Finsler metriktir. $\widetilde{g}_{\partial\Omega}$ metriğinin indeksi değişmeyecek şekilde, $\partial\Omega$ sınırında p noktasının bir U komşuluğunu düşünelim. V, lineer bağımsız vektör alanlarına sahip olan $\partial\Omega$ sınırının bir açık altkümesi olsun ve $[h_{ij}]$, bu vektör alanlarına göre $\widetilde{g}_{\partial\Omega}$ metriğinin matrisi olsun. Bu durumda $\det([h_{ij}](p)) = (-1)^q$ olarak elde edilir. Yani $\widetilde{g}_{\partial\Omega}$ metriğinin U komşuluğunda indeksi değişmezdir.

Tersine, $\widetilde{g}_{\partial\Omega}$ metriğinin $w \in U$ noktasında indeksinin değiştiğini ve w noktasında $q-1$ indekse sahip olduğunu varsayalım. $w \in \partial\Omega^-$ ve $\overline{\beta}_w = \{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_{m-1}\}$, $T_w\partial\Omega$ için yönlendirilebilir ortonormal bazı olmak üzere $[\widetilde{g}_{\partial\Omega}]_{\overline{\beta}_w}$ matrisi

$$[\widetilde{g}_{\partial\Omega}]_{\overline{\beta}_w} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir, burada $\det([\widetilde{g}_{\partial\Omega}]_{\overline{\beta}_w}) = (-1)^{q-1}$ dir. O halde

$$[\widetilde{g}_{\partial\Omega}]_{\overline{\beta}_w} = A^{-1}[h_{ij}]A$$

olacak şekilde bir A singüler olmayan matris vardır. Böylece

$$(-1)^{q-1} = (\det A)^2 \det[h_{ij}(w)] \tag{6.13}$$

olarak ifade edilir. $\det([h_{ij}](p)) = (-1)^q$ olduğu gözönüne alınırsa, (6.13) ifadesinde çelişki elde edilir. Dolayısıyla, $\partial\Omega^-$ bölgesi $\partial\Omega$ kompakt sınırında herhangi bir keyfi $p \in \partial\Omega^-$ noktası için $\partial\Omega$ sınırının altkümesidir.

Benzer şekilde, bu sonuçlar $\partial\Omega^+$ bölgesi içinde elde edilir. Sonuç olarak, $\partial\Omega^+$, $\partial\Omega^-$ bölgeleri $\partial\Omega$ kompakt sınırının açık altkümeleridir. $\partial\Omega^0 = \partial\Omega \setminus (\partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-)$ olduğundan, $\partial\Omega^0$ bölgesi $\partial\Omega$ kompakt sınırının kapalı bir altkümesidir.

Sonuç 6.1.1 $\partial\Omega^+$, $\partial\Omega^-$, $\partial\Omega^0$ bölgeleri açık altmanifoldlar olduğundan $\partial\Omega' = (\partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-)$, Ω kompakt bölgesinin non-dejenere sınırı olarak düşünülebilir.

Sonuç 6.1.2 μ, M manifoldu üzerinde bir hacim formu ve $\mu_{\partial\Omega}$, Ω kompakt bölgesinin bir sınırı olan $\partial\Omega$ sınırının indirgenmiş hacim formu olsun. Dolayısıyla, $\partial\Omega^+$ ve $\partial\Omega^-$ sınırlarının indirgenmiş pseudo-Finsler hacim formları, sırasıyla, $\mu_{\partial\Omega^+} = i_{\mathbf{n}^-}\mu$ ve $\mu_{\partial\Omega^-} = i_{\mathbf{n}^+}\mu$, tarafından tanımlanır. Burada $\mathbf{n}^-$ ve $\mathbf{n}^+$, sırasıyla, $\partial\Omega^+$ ve $\partial\Omega^-$ bölgelerine ait dış noktasal birim normalleridir ve $i : \partial\Omega \to M$ doğal embeddingdir. Ek olarak, $\mathbf{n}$ normali $\partial\Omega'$ non-dejenere sınıra birim dış noktasal normal ve $\mu_{\partial\Omega'} = i_{\mathbf{n}}\mu$ olacak şekilde $\partial\Omega'$ non-dejenere sınırı üzerinde indirgenmiş pseudo-Finsler hacim formu olarak düşünülebilir.

Teorem 6.1.2 M pseudo-Finsler manifold ve Ω bölgesi $\partial\Omega$ sınırıyla birlikte bir kompakt bölge ve X, $\partial\Omega$ kompakt sınırına enine vektör alanı olsun. Ayrıca μ, Ω üzerinde hacim formu, $\mathbf{n}$, $\partial\Omega'$ non-dejenere sınırı üzerinde birim dış noktasal normal ve $\mu_{\partial\Omega'}$, $\partial\Omega'$ sınırı üzerinde indirgenmiş pseudo-Finsler hacim formu olsun. Eğer $\partial\Omega^0$ bölgesi $\partial\Omega$ sınırında sıfır ölçüme sahip ise, o zaman

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} X)\mu = \int_{\partial\Omega^-} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}, X)\mu_{\partial\Omega'} - \int_{\partial\Omega^+} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}, X)\mu_{\partial\Omega'} \tag{6.14}$$

dir.

İspat. Teorem 3.6.1 ve Yardımcı Teorem 6.1.1 e göre, $\partial\Omega^0$ bölgesi $\partial\Omega$ sınırında sıfır ölçüme sahiptir. Dolayısıyla

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} X)\mu = \int_{\partial\Omega^+} i_X\mu + \int_{\partial\Omega^-} i_X\mu \tag{6.15}$$

yazılabilir.

$p \in \partial\Omega'$ noktası için, T_pTM tanjant uzayında $\{\mathbf{n}, e_1, ..., e_{m-1}\}$ ortonormal bazını seçelim.

$$(i_X\mu)(e_1, ..., e_{m-1}) = \mu(X, e_1, ..., e_{m-1}) \tag{6.16}$$

eşitliği mevcuttur. Bu eşitlikte yer alan X vektörü lineer bağımsız vektörler cinsinden

$$X = \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n},\mathbf{n})\widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n},X)\mathbf{n} + \sum_{i=1}^{m-1} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(e_i,e_i)\widetilde{g}_{\mathbf{n}}(e_i,X)e_i \tag{6.17}$$

olarak yazılır. (6.16) eşitliğinde X vektörü yerine (6.17) eşitliğinde verilen ifade yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} (i_X\mu)(e_1, ..., e_{m-1}) &= \mu\Big(F^{*2}(\mathbf{n})\widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n},X)\mathbf{n} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m-1} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(e_i,e_i)\widetilde{g}_{\mathbf{n}}(e_i,X)e_i, e_1, ..., e_{m-1}\Big) \\ &= F^{*2}(\mathbf{n})\widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n},X)\mu(\mathbf{n}, e_1, ..., e_{m-1}). \end{aligned}$$

Burada $F^{*2}(\mathbf{n}) = \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n},\mathbf{n})$ dir. O zaman, $\partial\Omega^+$ bölgesi $F^{*2}(\mathbf{n}) = -1$ sabitiyle birlikte spacelike olduğundan, $\partial\Omega^+$ bölgesi üzerinde $i_X\mu = -\widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n},X)\mu_{\partial\Omega'}$ ve $\partial\Omega^-$ bölgesi üzerinde $i_X\mu = \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n},X)\mu_{\partial\Omega'}$ ifadelerine sahip olunur. Böylece, (6.14) denklemi elde edilir. Yani, sınırın degenere kısmı sıfır ölçüme sahip olur.

Teorem 6.1.3. M pseudo-Finsler manifold ve Ω, $\partial\Omega$ sınırıyla birlikte bir kompakt bölge ve X, $\partial\Omega$ sınırında enine vektör alanı olsun. Bunun yanısıra, μ, Ω üzerinde hacim formu, $\mathbf{n}$, $\partial\Omega'$ non-dejenere sınırı üzerinde birim dış noktasal normal ve $\mu_{\partial\Omega'}$, $\partial\Omega'$ sınırı üzerinde indirgenmiş pseudo-Finsler hacim formu olsun. Eğer X, $\partial\Omega^0$ bölgesinin noktalarında $\partial\Omega$ sınırına teğet ise, o zaman

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} X)\mu = \int_{\partial\Omega^-} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n},X)\mu_{\partial\Omega'} - \int_{\partial\Omega^+} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n},X)\mu_{\partial\Omega'} \tag{6.18}$$

elde edilir.

İspat. X, $\partial\Omega^0$ bölgesinin noktasında $\partial\Omega$ sınırına teğet ve $i_X\mu = \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n},X)\mu_{\partial\Omega'}$ dir. O zaman $i_X\mu = 0$ dir. Bu durum (6.15) ifadesinde kullanılırsa, (6.18) ifadesi elde edilir. Sonuç olarak, teoreme göre vektör alanı degenere noktada sınıra teğet olur.

Teorem 6.1.4. Ω, 2-boyutlu Lorentz-Finsler uzayında pozitif yönlendirmeyle birlikte, γ kapalı diferensiyellenebilir sınırlı eğrisi tarafından sınırlandırılmış bir kompakt tanımlı bölge ve X, Ω bölgesinde bir vektör alanı olsun. Eğer γ^0 parçası γ eğrisinde sıfır ölçüme sahipse veya X, γ^0 parçasının noktasında, γ eğrisine teğet ise, o zaman

$$\iint\limits_{\Omega} (\mathrm{div} X) dxdy = \int\limits_{\gamma^-} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}, X) ds + \int\limits_{\gamma^+} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}, X) ds \tag{6.19}$$

dir. Burada $\mu = dx \wedge dy = dxdy$ dir.

İspat. 2-boyutlu Lorentz-Finsler uzayı için norm $F^*(y) = \sqrt{-(y_1)^2 + (y_2)^2}$ olmak üzere 2-boyutlu Lorentz-Finsler uzayında γ eğrisinin doğru elementi $ds = \sqrt{\left|(\gamma_2'(t))^2 - (\gamma_1'(t))^2\right|} dt$ tarafından tanımlanacak şekilde $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ bir regüler eğri olsun. $\mathbf{n}$ dış noktasal birim normali

$$\mathbf{n} = \begin{cases} \gamma^+ \text{ eğrisi üzerinde } \dfrac{-(\gamma_2'(t), \gamma_1'(t))}{\sqrt{\left|(\gamma_2'(t))^2 - (\gamma_1'(t))^2\right|}} \\ \gamma^- \text{ eğrisi üzerinde} \dfrac{(\gamma_2'(t), \gamma_1'(t))}{\sqrt{\left|(\gamma_2'(t))^2 - (\gamma_1'(t))^2\right|}} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Teorem 6.1.2 ve Teorem 6.1.3 den,

$$\iint\limits_{\Omega} (\mathrm{div} X) dxdy = \int\limits_{\gamma^-} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}, X) \mu_{\partial\Omega'} - \int\limits_{\gamma^+} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}, X) \mu_{\partial\Omega'}$$

elde edilir.

Basit bir hesaplamayla

$$\begin{aligned} \gamma^* \mu_{\partial\Omega^-} &= \frac{(\gamma_2'(t))^2 - (\gamma_1'(t))^2}{\sqrt{\left|(\gamma_2'(t))^2 - (\gamma_1'(t))^2\right|}} dt \\ ds &= \sqrt{\left|(\gamma_2'(t))^2 - (\gamma_1'(t))^2\right|} dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma^* \mu_{\partial\Omega^+} &= \frac{(\gamma_2'(t))^2 - (\gamma_1'(t))^2}{\sqrt{\left|(\gamma_2'(t))^2 - (\gamma_1'(t))^2\right|}} dt \\ -ds &= -\sqrt{\left|(\gamma_2'(t))^2 - (\gamma_1'(t))^2\right|} dt \end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak, denklem (6.19) elde edilir.

Sonuç 6.1.3. Eğer M yönlendirilemeyen bir pseudo-Finsler manifold ve Ω, $\partial\Omega$ sınırıyla birlikte kompakt bir bölge ise, Teorem 6.1.2 ve Teorem 6.1.3 geçersiz olur.

Bu sonucu açıklayabilmek için, $\varphi : \overline{\overline{\Omega}} \to \Omega$ diferensiyellenebilir ve örten dönüşüm olsun. O zaman φ,

$$\varphi^* : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\overline{\overline{\Omega}})$$

tarafından tanımlanan, $\overline{\overline{\widetilde{g}}} = \varphi^* \widetilde{g}$ pseudo-Finsler metrikle birlikte diferensiyellenebilir fonksiyonları kümesi üzerinde bir geri dönüşümü indirger. $\overline{\overline{M}}$ (iki katlı) yönlendirilebilir bir pseudo-Finsler manifold ve μ, Ω üzerinde $\overline{\overline{\mu}} = \varphi^* \mu$ lokal bir şekilde tanımlı pseudo-Finsler hacim formu olmak üzere $\overline{\overline{\Omega}}$, Teorem 6.1.2 ve Teorem 6.1.3 de uygulanabilen μ pseudo-Finsler hacim formlu kompakt bölge olsun. Burada dur. Eğer X yönlendirilmemiş M manifoldu üzerinde bir vektör alanı ise, o zaman $\varphi_* \overline{\overline{X}} = X \circ \varphi$ olacak şekilde $\overline{\overline{X}}$, $\overline{M}$ manifoldu üzerinde $\varphi-$ilişkili vektör alanıdır. (Abraham vd., 1983) ve Önerme 6.1.2 e göre, μ bir hacim formu ve F bir vektör alanı olmak üzere $(\pounds_F \mu) = (\operatorname{div} F)\mu$ eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{\overline{\Omega}}} (\operatorname{div} \overline{\overline{X}}) \overline{\overline{\mu}} &= \int_{\overline{\overline{\Omega}}} \pounds_{\overline{\overline{X}}} \overline{\overline{\mu}} \\
&= \int_{\overline{\overline{\Omega}}} \pounds_{\overline{\overline{X}}} (\varphi^* \mu) \\
&= \int_{\overline{\overline{\Omega}}} d i_{\overline{\overline{X}}} (\varphi^* \mu) \\
&= \int_{\overline{\overline{\Omega}}} d \varphi^* (i_X \mu) \\
&= \int_{\overline{\overline{\Omega}}} \varphi^* (d i_X \mu) \\
&= \int_{\overline{\overline{\Omega}}} \varphi^* (\pounds_X \mu) \\
&= \int_{\overline{\overline{\Omega}}} \varphi^* (\operatorname{div} X) \mu \\
&= \int_{\overline{\overline{\Omega}}} ((\operatorname{div} X) \circ \varphi) \mu
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\overline{\overline{M}}$ (iki katlı) yönlendirilebilir bir pseudo-Finsler manifold ve $der(\varphi) = 2$ olduğundan,

$$\int_{\overline{\overline{\Omega}}} (\operatorname{div} \overline{\overline{X}}) \overline{\overline{\mu}} = \int_{\overline{\overline{\Omega}}} ((\operatorname{div} X) \circ \varphi) \mu = 2 \int_{\Omega} (\operatorname{div} X) \mu$$

bulunur.

Diğer yandan, eğer $\overline{\overline{\mathbf{n}}}$, $\partial \overline{\overline{\Omega'}}$ non-dejenere sınırına birim dış noktasal normal vektör ise, o zaman $\varphi_* \overline{\overline{\mathbf{n}}} = \mathbf{n} \circ \varphi$ dir. Burada $\mathbf{n}$, Ω nın $\partial \Omega'$ non-dejenere sınırına birim dış noktasal normal vektördür. φ lokal izometri ve $\int\limits_{\Omega} (\operatorname{div} X)\mu = \int\limits_{\partial\Omega'} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}, X)\mu_{\partial\Omega'}$ eşitliği mevcut olduğundan

$$\int\limits_{\partial\overline{\overline{\Omega}}'} \overline{\overline{\widetilde{g}}}_{\overline{\overline{\mathbf{n}}}}(\overline{\overline{\mathbf{n}}}, \overline{\overline{X}})\overline{\overline{\mu}}_{\partial\overline{\overline{\Omega}}'} = 2\int\limits_{\partial\Omega'} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}, X)\mu_{\partial\Omega'} \tag{6.20}$$

olarak elde edilir.

Böylece (6.20) eşitliğinin Teorem 6.1.2 ve Teorem 6.1.3 ün sonucu olan

$$\int\limits_{\Omega} (\operatorname{div} X)\mu = \int\limits_{\partial\Omega'} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}, X)\mu_{\partial\Omega'} = \int\limits_{\partial\Omega^-} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}, X)\mu_{\partial\Omega'} - \int\limits_{\partial\Omega^+} \widetilde{g}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}, X)\mu_{\partial\Omega'}$$

ifadesini gerçeklemediği görülür.

Şimdi, pseudo-Finsler divergens teoreminin altharmonik fonksiyona bir uygulamasını yapalım.

Teorem 6.1.5 M kapalı yönlendirilebilir kompakt bir pseudo-Finsler manifold olsun. O zaman M manifoldu üzerinde her bir altharmonik fonksiyon, M manifoldu üzerinde bir harmonik fonksiyondur.

İspat. $f : (M, \widetilde{g}) \to \mathbb{R}$, M manifoldu üzerinde bir altharmonik fonksiyon olsun. Teorem 3.6.1 ve (3.47) ifadesi gereği,

$$\int\limits_{M} (\Delta f)\mu = \int\limits_{M} (\operatorname{div}(\nabla f))\mu = 0$$

sonucu elde edilir. Burada μ, M manifoldu üzerinde pseudo-Finsler hacim formudur. $\Delta f \geq 0$ olduğundan, $\Delta f = 0$ bulunur. Bu demektir ki f, M manifoldu üzerinde bir harmonik fonksiyondur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, literatürde mevcut olan Riemannian ve pseudo-Riemannian dönüşüm yapıları, Finsler ve pseudo-Finsler manifoldlara uyarlanarak, Finsler ve pseudo-Finsler dönüşüm yapıları kurulmuştur. Bu dönüşümler kullanılarak Finsler ve pseudo-Finslerde eikonal denklemler elde edilmiş, ayrıca pseudo-Finsler eikonal denklem çeşitlerinden biri olan null Finsler eikonal denklemiyle ilgili bazı fiziksel sonuçlara ulaşılmıştır. Elde edilen pseudo-Finsler eikonal denklemlerinin afin çözümü ve bu afin çözümün bazı geometrik karakterizasyonları verilmiştir.

Çalışmanın ilerleyen kısımlarında, pseudo-Finsler manifoldlarının bir non-dejenere sınırı tanımlanıp, bu non-dejenere sınır üzerinde hacim formu kullanılarak pseudo-Finsler manifoldlar için alışılagelmiş yapısından farklı olan, divergens teoreminin iki yeni versiyonu elde edilmiştir. Pseudo-Finsler manifoldlar için elde edilen bu divergens teoremleri genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abraham, R., Marsden, J. E., Ratiu, T., 1983, Manifolds, Tensor Analysis and Applications, Addison-Wesley, Reading, p.617.

Altunkaya, B., 2007, Finsler geometrisinde eğriler teorisi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, s.30.

Antonelli, P. L., 1996, Preface for application of Finsler differential geometry to biology, engineering and physics, Contemporary Mathematics, 196, 199-202.

Antonelli, P. L., 1999, Finslerian Geometries, A Meeting of Minds, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, p.320.

Antonelli, P. L., 2004, Handbook of Finsler Geometry 2, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, p.1437.

Anonim, 2015, Flat (geometry), https://en.wikipedia.org/wiki/Flat_(geometry), erişim tarihi: 04.06.2016.

Bao, D., Chern S. S., 1993, On a notable connection in Finsler geometry, Houston Journal of Mathematics, 19, 135-180.

Bao, D., Chern S. S., Shen, Z., 2000, An Introduction to Riemann- Finsler Geometry, Graduate Texts in Mathematical 200, Springer-Verlag, Newyork, p.285.

Bao, D., Bryant R. B., Chern S. S., Shen, Z., 2004, A Sampler of Riemann- Finsler Geometry, Mathematical Sciences Research Institute Publications, 50, Cambridge, p.376.

Bejancu, A., Farran, H. R., 2000, Geometry of Pseudo-Finsler Submanifolds, Kluwer Academic Publishers, Boston-London, p.244.

Berwald, L., 1926, Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Răumen auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelisms, Mathematische Zeitschrift, 25, 40-73.

Berwald, L., 1928, Parallelŭbertragung in allgemeinen Răumen, International Atti Congress Mathematicians, Bologna, 4, 263-270.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Bidabad, B., 2009, Complete Finsler manifolds and adapted coordinates, Balkan Journal of Geometry and its Applications, 14, 1, 21-29.

Bucătaru, I., Miron, R., 2007, Finsler-Lagrange Geometry, Applications to Dynamical Systems, Editura Academiei Române, Bucharest, p.250.

Boothby, W. M., 1986, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, Florida Inc., Second Edition, p.430.

Cartan, E., 1933, Observations de M.Ĕlie Cartan sur la communication prĕcĕdente, Comptes Rendus de'l Acadĕmie des Sciences, Paris, 196, 27-28.

Cartan, H., 1967, Formes differĕntielles, Paris: Hermann, p.186.

Cerveny, V., Molotkov, I. A., Psencik, I., 1977, Ray Method in Seismology, Charles University Press, Prague, p.214.

Chao, X., 2013, Lokal gradient estimate for harmonic functions on Finsler manifolds, https://arxiv.org/abs/1308.3609v1, erişim tarihi:16.08.2013.

Chern S. S., 1943, On the Euclidean connections in a Finsler space, Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, 29, 33-37.

Chern, S. S., Shen, Z., 2005, Riemann-Finsler Geometry, World Scientific Publishers, Singapore, p.192.

Crampin, M., 2014, On the construction of Riemann metrics for Berwald spaces by averaging, Houston Journal of Mathematics, 40, 3, 737-750.

Duggal, K. L., Bejancu, A., 1996, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Mathematics and its Applications, Dordrecht, p.303.

Eduardo, G. R., Küpeli, D. N., 1999, Semi-Riemannian Maps and Their Applications, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, p.198.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ekici, C., Çimdiker, M., 2016, A note on Berwald eikonal equation, Journal of Physics: Conference Series, 766, 012029, 1-5.

Finsler, P., 1951, Über Kurven und Flāchen in allgemeinen Rāumen, (Dissertation, Göttingen, 1918), Birkhāuser Verlag, Basel, Switzerland, p.160.

Fischer, A., 1992, Riemannian maps between Riemannian manifolds, Contemporary Mathematics, p.182.

Gardener, R. B., Wilkens, G. R., 1996, Preface for aplication of Finsler geometry to control theory, Contemporary Mathematics, 198, 227-229.

Hacısalihoğlu, H. H., 1985, Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, s.765.

Hacısalihoğlu, H. H., 1983, Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi, s.895.

Jahanandish, M., 2010, A geometric-based numerical solution eikonal equation over a closed level curve, Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A, 34, A1, 47-58.

Javaloyes M. A., Soares, B. L., 2014, Geodesics and jacobi fields of pseudo Finsler manifolds, https://arxiv.org/abs/1401.8149, erişim tarihi:24.02.2014.

Julian, B., Gubbins, D., 1977, Three dimensional seismic ray tracing, Geophysical Journal International, 43, 95-113.

Knebelman, M. S., 1929, Conformal geometry of generalized metric spaces, Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, 15, 376-379.

Küpeli, D. N., 1995, The eikonal equation of an indefinite metric, Acta Applicandae Mathematicae, 40, 245-253.

Lorenz, J., 2015, Introduction to partial differential equations, Department of Mathematics and Statistics, UNM, Albuquerque, Lecture Note, p.174.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Matsumoto, M., 1986, Foundations of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces, Kaiseisha Press, Otsu, Japan, p.344.

Minguzzi, E., 2015, A divergence theorem for pseudo-Finsler spaces, https://arxiv.org/abs/1508.06053, erişim tarihi:25.08.2015.

Miron, R., 1961, Sur les connexions pseudo-euclidiennes des espaces de Finsler ă mĕtrique indĕfinie (Romanian), Academy Republic Polytechnic Romane Fil. lasi, St. Mat., 12, 125-134.

Miron, R., Anastasiei, M., 1994, The Geometry of Lagrange Spaces, Theory of Applications, Kluwer Academic Publishers, 59, p.284.

Mo, X., 2006, An Introduction to Finsler Geometry, Paking University Series in Mathematic, 1, p.120.

Neagu, M., 2008, Jet Berwald-Riemann-Lagrange geometrization for affine maps between Finsler manifolds, https://arxiv.org/abs/0802.1268, erişim tarihi:16.05.2016.

Nowack, R. L., 1992, Wavefronts and solutions of the eikonal equation, Geophysical Journal International, 110, 55-62.

O'Neill, B., 1983, Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York, p.468.

Rund, H., 1959, The Differential Geometry of Finsler Spaces, Springer, Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, p.284.

Rund, H., 1975, A divergence theorem for Finsler metrics, Monatshefte für Mathematik, 79, 233-252.

Sabuncuoğlu, A., 2004, Lineer Cebir, Nobel Yayınevi, Ankara, s.397.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Salimov, A., Mağden, A., 2008, Diferensiyel Geometri, Aktif Yayınevi, Erzurum, s.326.

Shen, Z., 1998, On Finsler geometry of submanifolds, Mathematische Annalen, 311, 549-576.

Shen, Z., 2001, Lectures on Finsler Geometry, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, p.307.

Spiro, A., 1999, Chern's orthonormal frame bundle of finsler space, Houston Journal of Mathematics, 25,4, 641-659.

Synge, J. L., 1925, A generalisation of the Riemannian line-element, Transactions of the American Mathematical Society, 27, 61-67.

Şahin, B., 2012, Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Akademik Yayıncılık, s.294.

Taylor, J. H., 1925, A generalization of Levi-Civita's parallelism and the Frenet formulas, Transactions of the American Mathematical Society, 27, 246-264.

Tek, S., 2003, The geometry of tangent bundle and its applications, Bilkent Üniversitesi, Master Tezi, s.109.

Teodorescu, N., 1941, Sur les gĕodĕsiques de longeur nulle de certain ĕlĕments linĕaires finslĕriens, Bulletin Ecole Polytehnica of Bucharest, 12, 9-16.

Ünal, B., 1995, Divergence theorems in semi-Riemannian geometry, Acta Applicandae Mathematicae, 40, 173-178.

Varga, O., 1949, Über das Krümmungsmass in Finslerschen Rāumen, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 1, 116-122.

Wu, B. Y., 2013, Comparison theorems in Finsler geometry with weighted curvature bounds and related results, Journal of Korean Mathematic Society, 52, 3, 603-624.

Zıplar, E., Şenol, A., Yaylı, Y., 2012, f-Eikonal helix submanifolds and f-eikonal helix, https://arxiv.org/abs/1206.0395, erişim tarihi:24.01.2013.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Muradiye Çimdiker

Uyruğu : T.C.

Doğum Yeri, Yılı : Eskişehir, 1985

Medeni Hali : Bekar

İş Adresi : Kırklareli Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kayalı/Kırklareli

E-posta : muradiye.1001@hotmail.com

Eğitim Bilgileri :

Doktora : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı (2011—)

Yüksek Lisans : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı (2009-2011)

Lisans : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2006-2009)

İş Deneyimi : Kırklareli Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kırklareli (08.04.2013—)

Yayınlar ve Bilimsel Faaliyetler:

1. Ekici C., **Çimdiker M.**, A note on Berwald Eikonal Equation, Journal of Physics: Conference Series, 766, (2016), 012029.

2. Ünlütürk Y., Ekici C., **Çimdiker M.**, Characteristic Properties and The Integral Invariants of The Parallel Ruled Surface with Darboux Frame in E^3, Communication in Mathematical Modeling and Application, 1, (2016), 26-43.

3. Ekici C., Özüsağlam E., **Çimdiker M.**, Öztürk E., On The Curvatures of Viviani Ruled Surface, Ciencia e Tecnical Vitivinicola Journal, 29(7), (2014), 449-474.

4. Ünlütürk Y., **Çimdiker M.**, Some Characterizations of Curves of AW(k)-Type According to the Bishop Frame, New Trends in Mathematical Sciences an International Journal, 2(3), (2014), 206-215.

5. Ekici C., Ünlütürk Y., **Çimdiker M.**, On the Elliptic Linear Parallel Timelike Weingarten Surfaces in E_1^3, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 2(2), (2014), 119-127.

6. Ekici C., Ünlütürk Y., **Çimdiker M.**, On the Elliptic Linear Spacelike Weingarten Surfaces in E_1^3, Balkan Journal of Mathematics 01, (2013), 131-139.

7. Çimdiker M., Ünlütürk Y., Ekici C., On the Integral Invariants of the Parallel Ruled Surfaces with Darboux frame in E^3, 4th International Eurosian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Atina-Yunanistan, 31 Ağustos-3 Eylül 2015.

8. Ünlütürk Y., **Çimdiker M.**, Ekici C., On the Parallel Ruled Surfaces with Darboux frame in E^3, 4th International Eurosian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Atina-Yunanistan, 31 Ağustos-3 Eylül 2015.

9. Ekici C., **Çimdiker M.**, A Note on Berwald Eikonal Equation, International Conference Quantum Science and Applications, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 25-28 Mayıs 2016.

10. Çimdiker M., Ekici C., On the Spacelike Parallel Ruled Surfaces with Darboux frame, 14. Uluslararası Geometri Sempozyumu, Pamukkale Üniversitesi, 25-28 Mayıs 2016.

11. Çimdiker M., Ekici C., The Construction of Divergence Theorems for Pseudo-Finsler Manifolds, 2nd International Conference on Pure and Applied Sciences, Yıldız Teknik Üniversitesi, 01-05 Haziran 2016.