

Düşük Sıcaklıklarda  $q$ -Deforme Fermiyon Gaz Modelinin İstatistiksel Mekanik  
Özelliklerinin İncelenmesi ve Bir Fiziksel Uygulaması

Mustafa Şenay

**DOKTORA TEZİ**

Fizik Anabilim Dalı

Aralık 2016

Investigation of Low-Temperature Statistical Mechanical Properties of a  $q$ -Deformed  
Fermion Gas Model and Its Physical Application

Mustafa Şenay

**DOCTORAL DISSERTATION**

Department of Physics

December 2016

Düşük Sıcaklıklarda  $q$ -Deforme Fermiyon Gaz Modelinin İstatistiksel Mekanik  
Özelliklerinin İncelenmesi ve Bir Fiziksel Uygulaması

Mustafa Şenay

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Fizik Anabilim Dalı  
Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Bilim Dalında  
DOKTORA TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Abdullah Algın

**Bu tez TÜBİTAK tarafından 113F226 no'lu araştırma projesi çerçevesince desteklenmiştir.**

Aralık 2016


## ONAY


Fizik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Mustafa Şenay'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Düşük Sıcaklıklarda  $q$ -Deforme Fermiyon Gaz Modelinin İstatistiksel Mekanik Özelliklerinin İncelenmesi ve Bir Fiziksel Uygulaması" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.


**Danışman** : Prof. Dr. Abdullah ALĞIN

**İkinci Danışman** :-

**Doktora Tez Savunma Jürisi:**

Üye: Prof. Dr. Abdullah Algin 

Üye: Yrd. Doç. Dr. Derya PEKER 

Üye: Doç. Dr. Azur Alt Altınar 

Üye: Doç. Dr. Ali Serdar ARUKAN 

Üye: Doç. Dr. Mustafa İRİCİ 

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN  
Enstitü Müdürü

## ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Abdullah Alğın danışmanlığında hazırlamış olduğum “Düşük Sıcaklıklarda  $q$ -Deforme Fermiyon Gaz Modelinin İstatistiksel Mekanik Özelliklerinin İncelenmesi ve Bir Fiziksel Uygulaması” başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 23/12/2016

Mustafa Şenay

## ÖZET

Bu tez çalışmasında ilk olarak, kuantum özdeş parçacık sistemlerinden olan fermiyonların genel kuantum mekaniksel özellikleri ele alınmıştır. Daha sonra, ideal Fermi gazının iki ve üç-boyutlu uzaylarda genel termodinamik ve istatistiksel özellikleri incelenmiştir.

İkinci olarak, özel bir deforme Fermi sistemini oluşturan VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin kuantum cebirsel özelliklerinin yanı sıra, modele ait fermiyonik Jackson türev operatörünün bazı matematiksel fonksiyonlara etkileri de çalışılmıştır.

Tez çalışmasının ilk özgün kısmı olarak; üç-boyutlu uzayda, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin düşük sıcaklıklardaki istatistiksel mekanik davranışı üzerine yoğunlaşmıştır. Özel olarak, modelin deforme kimyasal potansiyeli ve deforme ısı kapasitesinin hem sıcaklık ile hem de  $0 < q < 1$  aralığında tanımlı deformasyon parametresi  $q$  ile değişimleri incelenmiştir. VPJC-fermiyon gaz modelinin fiziksel bir uygulaması olarak deforme ısı kapasitesi fonksiyonu; Niobiyum, Demir ve Kurşun metallerinin elektronik ısı kapasitelerinin sıcaklıkla değişimlerinin incelenmesine uygulanmıştır.

Tez çalışmasının diğer bir özgün kısmında ise, VPJC-fermiyon gaz modelinin iki-boyutlu uzayda termodinamik ve istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Yine iki-boyutta, modelin hal denkleminin virial açılımı yapılarak, ilk beş deforme virial katsayısı bulunmuştur.

Sonuç olarak, VPJC-fermiyon gaz modelinin deformasyon parametresi  $q$ 'nın termodinamik ve istatistiksel fonksiyonlara etkileri araştırılmıştır. Bulunan sonuçların, ideal Fermi gazının istatistiksel mekanik sonuçlarıyla kıyaslamaları yapılmıştır. Özellikle düşük sıcaklıklarda, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinden elde edilen ısı kapasitesi faktörü olan  $q$ -deforme Sommerfeld parametresinin incelenen metaller için deneysel sonuçlarla, serbest-elektron teorisi sonuçlarından daha uyumlu olduğu gösterilmiştir. Son olarak, VPJC-fermiyon gaz modelinin diğer muhtemel uygulama alanlarının neler olabileceği tartışılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Fermi Sistemleri, Fermiyon, Deforme Fermi Gaz Modeli, Kuantum İstatistiği, Fermi-Dirac Fonksiyonu, Sommerfeld Parametresi, Serbest-Elektron Teorisi, Virial Açılımı, Thermo-istatistik.

## SUMMARY

In this thesis, general quantum mechanical properties of fermions, which are one of the quantum identical particle systems were first considered. In the two and three dimensional spaces, general thermodynamic and statistical properties of the ideal Fermi gas were then examined.

Secondly, in addition to quantum algebraic properties of the VPJC-type  $q$ -deformed fermion gas model, which forms a special deformed Fermi system, the effects of the model fermionic Jackson derivative operator on some mathematical functions were studied.

As the first original part of this thesis, in the three-dimensional space, statistical mechanical behaviour of the VPJC-type  $q$ -deformed fermion gas model for low temperatures was focused. Specifically, the changes of both the deformed heat capacity and the deformed chemical potential with the temperature and the deformation parameter  $q$  having the interval  $0 < q < 1$  were examined. As a physical application of the VPJC-fermion gas model, its deformed heat capacity function was applied to analyze the temperature changes of the electronic heat capacities of the metals niobium, iron and lead, respectively.

In another original part of this thesis, in the two-dimensional space, thermodynamic and statistical properties of the VPJC-fermion gas model were investigated. Also, in two dimensions, the first five deformed virial coefficients in a virial expansion of the equation of state of the model were obtained.

Consequently, the effects of the deformation parameter  $q$  on thermodynamic and statistical functions of the VPJC-fermion gas model were examined. The results obtained in this way were compared with the statistical mechanical results of the ideal Fermi gas. For low temperatures, it was specifically shown that the  $q$ -deformed Sommerfeld parameter, which is the heat capacity factor obtained from the VPJC-type  $q$ -deformed fermion gas model, is more compatible with the experimental results than the free-electron theory results for the metals studied. Finally, other possible application areas of the VPJC-type  $q$ -deformed fermion gas model were discussed.

**Keywords:** Fermi Systems, Fermion, Deformed Fermi Gas Model, Quantum Statistics, Fermi-Dirac Function, Sommerfeld Parameter, Free-Electron Theory, Virial Expansion, Thermostatistics.

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'ın 113F226 nolu ve "İki ve Üç Boyutta Deforme Parçacık Sistemlerinin İstatistik Mekaniksel Özellikleri ve Fiziksel Uygulamaları" adlı araştırma projesi kapsamında desteklenmiştir.

Doktora eğitimim boyunca desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesiyle tez çalışmam süresince bana yol gösteren, bilimsel ve mesleki anlamda gerekli donanımı kazanmam için deneyimlerini titizlikle aktaran danışman hocam sayın Prof. Dr. Abdullah Algın'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca manevi olarak desteğini esirgemeyen kıymetli arkadaşım Kürşad Osman Ay'a teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET</b> .....	<b>ix</b>
<b>SUMMARY</b> .....	<b>x</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>xi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>xii</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	<b>xiv</b>
<b>ÇİZELGELER DİZİNİ</b> .....	<b>xv</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ</b> .....	<b>xvi</b>
<b>1. GİRİŞ VE AMAÇ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI</b> .....	<b>5</b>
<b>3. DOĞADA FERMİYON SİSTEMLERİ VE GENEL BAZI KUANTUM MEKANİKSEL ÖZELLİKLERİ</b> .....	<b>7</b>
3.1. Doğada Fermiyonlar .....	7
3.2. Fermiyonların Genel Bazı Kuantum Mekaniksel Özellikleri .....	9
<b>4. İDEAL FERMİ GAZI</b> .....	<b>15</b>
4.1. Üç-Boyutlu Uzayda Genel İstatistiksel Mekanik Özellikler .....	15
4.2. İki-Boyutlu Uzayda Genel İstatistiksel Mekanik Özellikler .....	21
<b>5. YÖNTEM</b> .....	<b>25</b>
5.1. VPJC-tipli $q$ -Deforme Fermiyon Gaz Modeli .....	25
5.2. Fermiyonik JD Operatörünün Bazı Matematiksel Özellikleri .....	26
<b>6. ÜÇ-BOYUTLU UZAYDA DÜŞÜK SICAKLIKLARDA VPJC-FERMİYON MODELİNİN İSTATİSTİKSEL MEKANİK ÖZELLİKLERİ</b> .....	<b>28</b>
<b>7. İKİ-BOYUTLU UZAYDA VPJC-FERMİYON MODELİNİN BAZI İSTATİSTİKSEL MEKANİK ÖZELLİKLERİ</b> .....	<b>36</b>
7.1. Modelin Yüksek Sıcaklıklarda Bazı İstatistiksel Mekanik Özellikleri .....	36
7.2. Modelin Düşük Sıcaklıklarda Bazı İstatistiksel Mekanik Özellikleri .....	41
<b>8. BULGULAR VE TARTIŞMA</b> .....	<b>44</b>
<b>9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER</b> .....	<b>48</b>

<b>KAYNAKLAR DİZİNİ.....</b>	<b>51</b>
<b>EK AÇIKLAMALAR .....</b>	<b>57</b>
Ek Açıklama–A: İdeal Fermi gazının FD dağılım fonksiyonunun farklı sıcaklık değerleri ve $(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimini veren Fortran kodu .....	57
Ek Açıklama–B: İki-boyutlu uzayda ideal Fermi gazı entropisinin $z$ 'ye göre değişimini veren Fortran kodu .....	58
Ek Açıklama–C: $T = 300$ K için, deforme FD dağılım fonksiyonunun $x = (\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimini veren Fortran kodu .....	59
Ek Açıklama–D: $T = 50$ K için, deforme FD dağılım fonksiyonunun $x = (\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimini veren Fortran kodu .....	60
Ek Açıklama–E: VPJC-tipli $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin deforme kimyasal potansiyelinin $(k_B T / \varepsilon_F)$ 'ye göre değişimini veren Fortran kodu $(q < 1)$ .....	61
Ek Açıklama–F: VPJC-tipli $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin deforme ısı kapasitesinin $(k_B T / \varepsilon_F)$ 'ye göre değişimini veren Fortran kodu $(q < 1)$ .....	62
Ek Açıklama–G: Nb metalinin deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimini veren Fortran kodu .....	63
Ek Açıklama–H: Fe metalinin deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimini veren Fortran kodu .....	64
Ek Açıklama–I: Pb metalinin deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimini veren Fortran kodu .....	65
Ek Açıklama–J: İki-boyutlu uzay hali için, deforme entropi fonksiyonunun $z$ ve $q$ 'ya göre değişimlerini veren Fortran kodu .....	66
Ek Açıklama–K: İki-boyutlu uzay hali için, $a_n(q)$ deforme virial katsayılarının deformasyon parametresi $q$ 'ya göre değişimlerini veren Fortran kodu .....	67
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>70</b>

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.1. İdeal FD dağılım fonksiyonunun $\varepsilon$ 'a göre değişimi .....	18
4.2. İdeal Fermi gazının FD dağılım fonksiyonunun farklı sıcaklık değerleri ve ( $\varepsilon - \mu$ ) 'ye göre değişimi .....	19
4.3. İki-boyutlu uzayda ideal Fermi gazı entropisinin $z$ 'ye göre değişimi .....	23
6.1. $T = 300$ K için, deforme FD dağılım fonksiyonunun ( $\varepsilon_i - \mu$ ) 'ye göre değişimi ....	29
6.2. $T = 50$ K için, deforme FD dağılım fonksiyonunun ( $\varepsilon_i - \mu$ ) 'ye göre değişimi ....	29
6.3. VPJC-fermiyon gaz modelinin deforme kimyasal potansiyelinin ( $k_B T / \varepsilon_F$ ) 'ye göre değişimi ( $q < 1$ ) .....	31
6.4. VPJC-fermiyon gaz modelinin deforme ısı kapasitesinin ( $k_B T / \varepsilon_F$ ) 'ye göre değişimi ( $q < 1$ ) .....	32
6.5. Nb için, deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimi ( $q < 1$ ).....	33
6.6. Fe için, deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimi ( $q < 1$ ).....	34
6.7. Pb için, deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimi ( $q < 1$ ).....	34
7.1. İki-boyutlu uzay hali için, deforme entropi fonksiyonunun $z$ ve $q$ 'ya göre değişimleri ( $q < 1$ ) .....	39
7.2. İki-boyutlu uzay hali için, $a_n(q)$ deforme virial katsayılarının deformasyon parametresi $q$ 'ya göre değişimleri ( $q < 1$ ) .....	41

## ÇİZELGELER DİZİNİ

### Cizelge

### Sayfa

- 6.1. Nb, Fe, Pb metallerinin serbest-elektron teorisi yolu, deneysel yol ve deforme ısı kapasitesi yollarıyla elde edilen Sommerfeld parametreleri .....35

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$A$	Alan
$a_n(q)$	İki-boyutlu uzayda $n$ . $q$ -deforme virial katsayısı
$C_A$	İki-boyutlu uzay için sabit yüzeyde ısı kapasitesi
$C_V$	Üç-boyutlu uzay için sabit hacimde ısı kapasitesi
$\hat{c}$	Deforme fermiyonik yok etme operatörü
$\hat{c}^*$	Deforme fermiyonik yaratma operatörü
$\hat{D}_x^{(q)}$	VPJC-tipli fermiyonik Jackson türev operatörü
$F$	Helmholtz serbest enerjisi
$\hat{f}$	Standart fermiyonik yok etme operatörü
$\hat{f}^*$	Standart fermiyonik yaratma operatörü
$f_D(z)$	Standart Fermi-Dirac fonksiyonu
$f_n(z, q)$	$q$ -deforme Fermi-Dirac fonksiyonu
$g(\varepsilon)$	Durum yoğunluğu fonksiyonu
$g$	Spin dejenerlik faktörü
$\hat{H}$	Hamilton operatörü
$h$	Planck sabiti
$\hbar$	$h/2\pi$
$k_B$	Boltzmann sabiti
$m$	Kütle
$[\hat{N}]$	Deforme fermiyon sayısı operatörü
$\hat{N}$	Standart fermiyonik sayısı operatörü
$\langle n_\varepsilon \rangle$	Ortalama işgal sayısı
$P$	Basınç
$q$	Reel pozitif deformasyon parametresi
$S$	Entropi

**SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)****Simgeler****Açıklama**

$T$	Mutlak sıcaklık
$U$	İç enerji
$V$	Hacim
$z$	Fugasite
$\varepsilon_F$	Fermi enerjisi
$\rho$	İki-boyutlu uzay için parçacık yoğunluğu
$\mu$	Kimyasal potansiyel
$\psi_\alpha$	Tek-parçacık dalga fonksiyonu
$\lambda$	Isıl dalga boyu
$\beta$	$1/k_B T$

**Kısaltmalar****Açıklama**

FD	Fermi-Dirac
JD	Jackson türevi
VPJC	Viswanathan-Parthasarathy-Jagannathan-Chaichian

## 1. GİRİŞ VE AMAÇ

Ondokuzuncu yüzyılın sonlarında fizik, temelde; klasik mekanik, elektromanyetik teori ve termodinamikten oluşmaktaydı (Zettili, 2009). Klasik mekanik cisimlerin dinamiğini tahmin etmede kullanılırken, Maxwell'in elektromanyetizması radyasyon çalışmaları için kullanılmaktaydı. Madde ve radyasyon ise sırasıyla parçacıklar ve dalgalar ile açıklanıyordu. Bunlar arasındaki ilişkiyi açıklamak için de Lorentz kuvveti veya termodinamik bilgileri yeterli olmaktaydı. Ancak, makroskopik boyuttaki olayları açıklamada deneysel sonuçlar ile uyum içerisinde olan klasik fizik yasaları, mikroskopik boyuttaki olayları açıklamada yetersiz kalmaktaydı. Örneğin, klasik fizik çerçeve, siyah cisim ışınması, fotoelektrik etki ve atomik spektroskop gibi çeşitli mikroskopik olayları açıklamada başarısız olmuştur. Bu nedenle, atomik boyuttaki olayları açıklamada yeni bir teoriye ihtiyaç duyulmuştur (Zettili, 2009).

Bu bağlamda ilk adım, 1900 yılında Max Planck'ın kara cisim ışınması olayını açıklamak için "Enerji kuantumlanması" fikrini ortaya atmasıyla gerçekleşmiştir (Zettili, 2009). Max Planck tarafından ortaya atılan bu fikir; 1905'de Einstein'ın fotoelektrik olayı açıklamasında, 1913'de Niels Bohr'un atom modelinde elektronların yörüngesinin nasıl belirlenmesi gerektiğini ortaya koymada, 1923'de Compton'ın ışığın tanecikli bir yapıya sahip olmasını göstermesinde yine, Louis de Broglie'nin dalga-parçacık ikililiğinden yola çıkarak madde dalgalarını ortaya koyması gibi olayların keşfedilmesine ışık tutmuştur (Zettili, 2009). Tüm bu gelişmeler; 1926'da Erwin Schrödinger tarafından önerilen ve tıpkı Newton'un hareket denklemi gibi temel bir denklemin ortaya çıkışını, yani mikroskopik sistemler için Schrödinger dalga denkleminin doğuşuna neden olmuştur. 1927'de ise Max Born tarafından dalga fonksiyonunun mutlak değer karesinin olasılık yoğunluğu olarak yorumlanmasıyla birlikte kuantum mekaniği temellerinin ilk adımları atılmıştır (Zettili, 2009). Bu tarihten günümüze kadar kuantum mekaniğinin gelişimi için pek çok çığır açıcı olay meydana gelmiştir ve halen devam etmektedir.

Kuantum mekaniksel bakış açısı göz önüne alındığı zaman, doğada özdeş parçacık sistemleri bozonlar ve fermiyonlar olmak üzere iki grupta toplanırlar. Bunlardan  $\hbar$  birimlerinde spinleri tam sayı olan bozonlar, simetrik dalga fonksiyonuna sahiptirler

(Greiner, 2001). Bu nedenle, iki özdeş bozon parçacığı kendi aralarında yer değiştirdiğinde, dalga fonksiyonu değişmez kalmaktadır. Foton, gluon,  $W^\pm$ ,  $Z^0$  gibi aracı parçacıklar ve iki proton ve iki nötrona sahip  ${}^4\text{He}$  atomu bozon parçacıklarına örneklerdendir (Geissler, 2000). Bozonlara ait operatörler komütasyon bağıntılarını sağlarlar. Ayrıca, bozonlardan oluşan bir sistemin istatistik mekaniksel özellikleri de Bose-Einstein istatistiği ile açıklanır.

Fermiyonlar ise,  $\hbar$  birimlerinde buçuklu tam sayı spine sahip olan kuantum özdeş parçacık grubunu oluştururlar. Fermiyonlar anti-simetrik dalga fonksiyonuna sahiptirler (Greiner, 2001). Bu sebeple, iki özdeş fermiyon parçacığının birbiriyle değiş-tokuş edilmesi durumunda dalga fonksiyonu işaret değiştirmektedir. Fermiyonların en önemli özelliklerinden biri ise Pauli dışarılama ilkesine uymalarıdır. Bu ilkeye göre, herhangi iki fermiyon parçacığı aynı bir kuantum sayıları takımına sahip olamaz. Elektron ve nötrino gibi parçacıkların yer aldığı leptonlar ile proton ve nötron gibi parçacıkların bulunduğu baryonlar fermiyonlara örneklerdendir (Geissler, 2000). Fermiyonlara ait operatörler ise anti-komütasyon bağıntılarını sağlarlar.

Bu tez çalışmasında, Fermi sistemleri ve onların özel bir deformasyonunu sunan VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin hem kuantum mekaniksel hem de düşük sıcaklıklarda iki ve üç uzay boyutlarında istatistiksel mekanik özellikleri araştırılacaktır. Bu yolla bulunan sonuçlar; hem deformasyon parametresi  $q$ 'nun termodinamik ve istatistiksel fonksiyonlara etkilerini hem de yoğun madde sistemlerindeki muhtemel uygulamalarını değerlendirme olanağı sunacaktır. Bu amaçlara ulaşmak için kullanılacak yöntemin detayları ve VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modeli beşinci bölümde tanıtılacaktır.

Ana tez konusu içerisinde ilk önce; VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin genel bazı kuantum mekaniksel özellikleri çalışılacaktır. Bu kapsamda modelin kuantum cebirsel özellikleri, VPJC-tipli fermiyonik Jackson türev (JD) operatörü ve bazı matematiksel fonksiyonlar üzerine etkileri incelenecektir. İkinci olarak, üç-boyutlu uzayda düşük sıcaklıklardaki VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin istatistiksel mekanik özellikleri incelenecektir. Çalışmada üçüncü olarak, aynı modelin iki-boyutlu uzaydaki genel istatistiksel mekanik özellikleri araştırılacaktır. Dördüncü olarak modelin, çeşitli fizik dallarında muhtemel uygulama alanlarının neler olabileceği tartışılarak, özel bir uygulamasının metallerde elektron gazına yapılması amaçlanmıştır. Son olarak bu tez



çalışmasında, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modeli için farklı boyut ve sıcaklıklarda elde edilen istatistiksel mekanik fonksiyonlara, deformasyon parametresinin etkisinin nasıl olacağı araştırılarak, yorumlanmaya çalışılacaktır.

Tezin üçüncü bölümünde, kuantum özdeş parçacık sistemlerinin sahip oldukları dalga fonksiyonları ele alınacaktır. Özel olarak, özdeş iki fermiyon parçacığından oluşan bir sistemin sahip olduğu anti-simetrik dalga fonksiyonu incelenecektir. Fermiyonların sağladığı operatör cebiri ve genel özellikleri üzerinde yoğunlaşılacaktır.

Tezin dördüncü bölümünde, ideal Fermi gazının hem iki-boyutlu hem de üç-boyutlu uzaylarda bazı termodinamik ve istatistiksel fonksiyonları ele alınacaktır. İdeal Fermi gazının dağılım fonksiyonu ve büyük bölüşüm fonksiyonunun logaritmasından yararlanarak, standart FD fonksiyonları elde edilecektir. Yüksek sıcaklıklarda ideal Fermi gazının iç enerjisi, entropisi ve ısı kapasitesi gibi farklı termodinamik fonksiyonları araştırılacaktır. Düşük sıcaklıklarda ise, Sommerfeld açılımı yöntemi yardımıyla toplam parçacık sayısı incelenecektir. Yine düşük sıcaklıklarda ideal Fermi gazının kimyasal potansiyeli, iç enerjisi ve Helmholtz serbest enerjisi gibi bazı termodinamik fonksiyonları üzerine yoğunlaşılacaktır.

Beşinci bölümde, bu tez çalışmasının yöntemini oluşturan VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin genel, bazı kuantum mekaniksel özelliklerine bakılacaktır. Model için özel olarak tanımlanan fermiyonik JD operatörü verilerek, bunun bazı matematiksel fonksiyonlara etkisi araştırılacaktır.

Altıncı bölümde, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin üç-boyutlu uzayda düşük sıcaklıklarda bazı termodinamik ve istatistiksel mekanik özellikleri ele alınacaktır. Modelin deforme dağılım fonksiyonunun farklı sıcaklıklarda, farklı  $q$  değerleri için değişimleri araştırılacaktır. Düşük sıcaklıklarda, Sommerfeld açılımı yöntemi kullanılarak modelin kimyasal potansiyeli, iç enerjisi ve ısı kapasitesi gibi bazı termodinamik fonksiyonları türetilenektir. Ayrıca modelin, hem kimyasal potansiyelinin hem de ısı kapasitesinin deformasyon parametresinin farklı değerleri için  $(k_B T / \varepsilon_F)$ 'ye göre değişimleri incelenecektir. Bu bölümde son olarak, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin olası bir uygulaması olarak, deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa bağlı değişimi,

özel olarak (Nb), (Fe) ve (Pb) metallerinin ısı kapasitelerine uygulanacaktır. Bu metaller için elde edilen deforme ısı kapasitesi sonuçları, hem deneysel veriler hem de serbest-elektron teorisi sonuçları ile ayrı ayrı kıyaslanacaktır.

Yedinci bölümde, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin iki-boyutlu uzaydaki genel istatistiksel mekanik özelliklerinin incelenmesine yoğunlaşılacaktır. Modelin deforme dağılım fonksiyonu ve büyük bölüşüm fonksiyonunun logaritması verilerek, yüksek sıcaklıklarda iç enerji, ısı kapasitesi ve entropisi gibi farklı termodinamik fonksiyonları incelenecektir. Modelin deforme entropisinin, fugasite ( $z$ ) ve deformasyon parametresi ( $q$ )'ya göre değişimleri araştırılacaktır. Yine yüksek sıcaklıklar limitinde iki-boyutlu uzayda modelin hal denkleminin virial açılımı ilk beş deforme virial katsayısına kadar yapılacaktır. Düşük sıcaklıklarda, Sommerfeld açılımı yöntemi yardımıyla, modelin iki-boyutta kimyasal potansiyeli, iç enerjisi ve Helmholtz serbest enerjisi gibi bazı termodinamik fonksiyonları türetilecektir.

Sekizinci bölümde, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin hem iki hem de üç-boyutlu uzaylarda termodinamik ve istatistiksel özelliklerinden elde edilen sonuçlar yorumlanmaya çalışılacaktır. Buradan elde edilen sonuçların, ideal Fermi gazının istatistiksel mekanik özellikleri ile kıyaslaması yapılacaktır. Ayrıca, elde edilen deforme istatistiksel mekanik sonuçların, fiziğin farklı alanlarındaki muhtemel uygulamalarının neler olabileceği de son bölümde tartışılacaktır.

## 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Fermiyonların istatistiksel mekanik davranışları FD istatistiği ile açıklanır. FD istatistiği; metallere atom çekirdeğine, kuarklardan beyaz cüce yıldızlara kadar son derece farklı birçok fiziksel sistemin davranışlarının incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu istatistiğin kullanılmasıyla, fermiyonlardan oluşan sistemlerin farklı yönlerinin incelenmesi literatürde pek çok araştırmacı tarafından ele alınmıştır (Kremp vd., 1972; Kim vd., 1995; Magner vd., 1998; Wang, 2003; Clark vd., 2005; Pruschke, 2012; Bradly vd., 2014; Hutchings vd., 2014).

Öte yandan, bozonlar ve fermiyonlar farklı operatör ilişkilerine sahip oldukları için, bunların sağladıkları kuantum cebirleri de farklı olmaktadır (Merzbacher, 1998). İster fermiyonların isterse bozonların, reel veya kompleks deformasyon parametreleri ile deforme edilmeleri sonucunda  $q$ -deforme fermiyon ve bozon cebirleri oluşturulabilir. Bu kapsamda bazı araştırmacılar tarafından yapılan çalışmalar, bu deforme sistemlere örnek gösterilebilir (Arik ve Coon, 1976; Biedenharn, 1989; Macfarlane, 1989; Jing ve Xu, 1991; Song vd., 1993; Ubriaco, 1997; Lavagno ve Narayana Swamy, 2002; Narayana Swamy, 2006a, 2006b, 2006c; Arslan, 2009; Cai vd., 2010; Lavagno ve Narayana Swamy, 2010; Gavrilik vd., 2011; Tristant ve Brito, 2014; Topçu, 2015).

Deforme fermiyon sistemlerine özel bir örnek olarak, 1992'de Viswanathan vd. tarafından önerilen çalışma verilebilir (Viswanathan vd., 1992). Bu  $q$ -deforme fermiyon sisteminin bazı istatistiksel yönlerinin çalışılması da 1993 yılında Chaichian vd. tarafından yapılmıştır (Chaichian vd., 1993). Bu tarihsel gelişimi nedeniyle, bu  $q$ -deforme fermiyon modeli Viswanathan-Parthasarathy-Jagannathan-Chaichian (VPJC) olarak adlandırılmıştır (Algin, 2011). Bu modelin üç-boyutlu uzayda yüksek sıcaklıklar limitinde bazı termodinamik ve istatistiksel özellikleri daha önce ele alınmıştır (Algin ve Senay, 2012; Şenay, 2012).

Lakin VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon salınımcılarının oluşturduğu, deforme fermiyon gaz modelinin hem üç hem de iki boyutlu uzaylarda düşük sıcaklıklardaki istatistik mekaniksel yönleri literatürde bugüne kadar çalışılmamıştır. Dolayısıyla bu tez çalışması,

VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gazının yeni istatistiksel mekanik yönlerini ortaya koyacağı için literatüre orjinal katkılar sunacaktır.

### 3. DOĞADA FERMİYON SİSTEMLERİ VE GENEL BAZI KUANTUM MEKANİKSEL ÖZELLİKLERİ

Klasik mekanikte, iki özdeş parçacık birbiriyle etkileştiğinde, parçacıklar birbirinden ayrılana kadar etkileşme bölgesi boyunca her parçacık ayrı ayrı takip edilebilir (Capri, 2002). Bu nedenle, parçacıklar kendi bireyselliklerini devam ettirirler ve gerçekte ayırt edilebilirlerdir. Yani klasik mekanikte, ayırt edilebilir veya ayırt edilemez parçacıkların oluşturduğu bir sistemin davranışında gerçek bir farklılık oluşmamaktadır. Kuantum mekaniğinde, iki özdeş parçacık bir araya gelip, etkileşirler ve daha sonra ayrılırlarsa, kendi bireyselliklerini kaybederler. Çünkü, etkileşme süresince parçacıkların dalga fonksiyonları birbiriyle örtüşür. Bu durumda dalga fonksiyonu, artık iki fonksiyonun çarpımı olarak yazılamaz. Fakat, her iki parçacığın değişkenlerine bağlı olan tek bir fonksiyon şeklinde yazılabilir. Ayrıca, parçacıklar birbirinden ayrıldığı zaman, hangisinin hangi parçacık olduğunu söylemek ise imkansız olur (Capri, 2002).

Bu bölümde ilk olarak, özdeş parçacık sistemlerinin dalga fonksiyonları ele alınacaktır. Daha sonra, özdeş parçacıklardan fermiyonların genel bazı kuantum mekaniksel özellikleri incelenecektir.

#### 3.1. Doğada Fermiyonlar

Kütle, yük, spin, vb. bütün gözlenebilir iç, özgün özellikleri aynı, bu özellikleri ile birbirinden ayırt edilemeyen parçacıklara özdeş parçacıklar denir (Dereli ve Verçin, 2009). Özdeş parçacıklar, herhangi bir fiziksel ölçüm ile ayırt edilemediklerinden genellikle “ayırt edilemez” olarak nitelendirilirler (Rae, 1993). Bu ise şu anlama gelmektedir: Sistem üzerinde herhangi bir fiziksel ölçümü temsil eden operatör, bireysel parçacıkların koordinatları birbiriyle değiş-tokuş olduğunda değişmez kalmalıdır. Buradan hareketle, iki ayırt edilemez parçacığın Hamiltonyeni için

$$\hat{H}(1,2) = \hat{H}(2,1) \quad (3.1)$$

yazılabilir (Rae, 1993). Parçacık değiş-tokuş operatörü  $\hat{P}_{12}$  ise, iki parçacığın tüm koordinatlarına bağlı herhangi bir operatöre ya da fonksiyona etki ettiğinde, operatör ya da fonksiyonun koordinatlarının birbiriyle değiş-tokuşunu sağlamaktadır. Değiş-tokuş operatörü kullanılarak (3.1) denklemini

$$\hat{P}_{12}\hat{H}(1,2) = \hat{H}(2,1) = \hat{H}(1,2) \quad (3.2)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir (Rae, 1993). Özdeş iki parçacıktan oluşan bir sistemin dalga fonksiyonu  $\Psi(1,2)$  ile temsil edilebilir. Bu  $\Psi(1,2)$  dalga fonksiyonu (3.2) eşitliğinde kullanılırsa

$$[\hat{P}_{12}\hat{H}(1,2) - \hat{H}(1,2)\hat{P}_{12}]\Psi(1,2) = 0 \quad (3.3)$$

olur ve

$$[\hat{P}_{12}, \hat{H}(1,2)] = 0 \quad (3.4)$$

şeklindedir (Rae, 1993). (3.4) eşitliğine göre, parçacık değiş-tokuş operatörü ile Hamilton operatörü birbiriyle komüt etmektedir. Bu ise, onların ortak özfonksiyona sahip olacağı anlamına gelmektedir.  $\hat{P}_{12}$ 'nin özfonksiyonlarını bulmak için

$$\hat{P}_{12}\Psi(1,2) = p\Psi(1,2) \quad (3.5)$$

şeklinde,  $\hat{P}_{12}$ 'nin  $p$  özdeğerli  $\Psi(1,2)$  özfonksiyonu olduğunu varsayalım. (3.5) denkleminin her iki tarafına tekrar  $\hat{P}_{12}$  operatörü etki ettirilirse

$$\Psi(1,2) = p^2\Psi(1,2) \quad (3.6)$$

bulunur. Buradan  $p^2 = 1$  olup, özdeğerler  $p = (\pm 1)$  olacaktır.  $p = (+1)$  ve  $p = (-1)$  durumları sırasıyla, iki özdeş parçacığın değiş-tokuşuna karşılık gelen simetrik ve anti-simetrik dalga fonksiyonlarını temsil etmektedirler (Rae, 1993).

Simetrik ve anti-simetrik dalga fonksiyonları hangi durumlarda kullanılır? (Karaoğlu, 2008). Pauli, 1940 yılında, dalga fonksiyonlarının sahip olduğu simetri özellikleri ile parçacıkların spinleri arasında bir ilişki olduğunu göstermiştir. Kuantum mekaniğinde bu

“Simetrikleştirme ilkesi” olarak adlandırılır (Karaoğlu, 2008). Bu ilkeye göre; simetrik dalga fonksiyonlarına sahip parçacıklara bozon parçacıkları adı verilir. Bu parçacıkların  $\hbar$  birimlerinde spin kuantum sayıları 0, 1, 2, ... gibi tam sayı biçimindedir. Foton,  $\pi$ -mezon gibi parçacıklar bozon parçacığı örneklerindedir (Apaydın, 2004a; Karaoğlu, 2008).

Anti-simetrik dalga fonksiyonlarına sahip olan parçacıklara ise fermiyon parçacıkları adı verilir. Bunların  $\hbar$  birimlerinde spin kuantum sayıları  $1/2, 3/2, 5/2, \dots$  gibi yarım tam sayı biçimindedir. Proton ve nötron gibi parçacıklar spinleri  $1/2 (\hbar)$  olan fermiyon parçacıklarına örneklerindedir (Apaydın, 2004a; Karaoğlu, 2008). Bunların her ikisi birlikte nükleon olarak adlandırılır (Williams, 2014). Nötronun net yükü yoktur. Proton ise, elektronun zıt yüküne yani pozitif yüke sahiptir. Atomik kütle numarası  $A$  ve atom numarası  $Z$  olan bir atom,  $Z$  tane protona ve  $A - Z = N$  tane nötrona sahiptir. Örneğin,  ${}^3\text{He}$  atomunun iki tane protonu ve bir tane nötronu vardır (Le Ballac vd., 2004). Bu nedenle,  ${}^3\text{He}$  atomu nükleer spini  $1/2 (\hbar)$  olan bir fermiyona örnektir. Bu şekilde tek sayıda nükleonlardan oluşan çekirdek sistemleri fermiyon sistemleri örneklerini teşkil etmektedir. Bir başka fermiyon sistemi örneği olarak ise baryon sistemleri düşünülebilir. Baryonlar, üç kuarkın veya üç anti-kuarkın bağlı halinden oluşan parçacıklardır (Griffiths, 2008). Parçacık fiziğinin standart modeli kapsamında; yukarı ( $u$ ), aşağı ( $d$ ), tılsım ( $c$ ), acayip ( $s$ ), üst ( $t$ ) ve alt ( $b$ ) kuarkları ile bunların her birine karşılık gelen anti-kuarklar olmak üzere 12 adet kuark çeşidi vardır. Örneğin, lambda ( $\Lambda$ ) baryonu; bir yukarı, bir aşağı ve birde acayip kuarkın ( $uds$ ) bağlı halinden oluşurken, bir delta baryonu ( $\Delta^0$ ); bir yukarı ve iki aşağı kuarkın ( $udd$ ) bağlı halinden oluşur. Bu şekilde üç kuarkın bağlı halinden oluşan baryon sistemleri fermiyon sistemlerine örneklerindedir.

Bundan sonraki kısımda, özdeş parçacık sistemlerinden biri olan fermiyonlar üzerine yoğunlaşılacaktır. Burada, fermiyonların genel bazı kuantum mekaniksel özellikleri ele alınacaktır.

### 3.2. Fermiyonların Genel Bazı Kuantum Mekaniksel Özellikleri

Fermiyonlar anti-simetrik dalga fonksiyonlarına sahiptirler. Bu durum, özel olarak iki özdeş fermiyon parçacıklı bir sistem için şu şekilde incelenebilir: İki özdeş fermiyon parçacığından oluşan sistemin zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$\hat{H}(1,2)\Psi(1,2) = E\Psi(1,2) \quad (3.7)$$

ile verilir (Dereli ve Verçin, 2009). Burada 1 ve 2 rakamları sırasıyla 1. ve 2. parçacığa karşılık gelen tüm (konum ve spin) koordinatlarını temsil etmektedir. Basitlik açısından parçacıkların birbiriyle etkileşmediği varsayılmaktadır. Bu durumda sistemin Hamilton operatörü

$$\hat{H}(1,2) = \hat{H}(1) + \hat{H}(2) \quad (3.8)$$

şeklinde 1. ve 2. parçacıkların Hamilton operatörlerinin toplamı olarak yazılabilir (Dereli ve Verçin, 2009). Ayrıca, sistemin toplam dalga fonksiyonu  $\Psi(1,2)$  ve toplam enerjisi ( $E$ ) için sırasıyla

$$\Psi(1,2) = \psi_{\alpha}(1)\psi_{\tilde{\beta}}(2) \quad (3.9)$$

$$E = E_{1\alpha} + E_{2\tilde{\beta}} \quad (3.10)$$

bağıntıları yazılabilir (Dereli ve Verçin, 2009). Burada  $\alpha$  ve  $\tilde{\beta}$  indisleri sırasıyla 1. ve 2. parçacığın kuantum durumlarını göstermektedir. Buradan (3.7) eşitliği yardımıyla

$$\hat{H}(1)\psi_{\alpha}(1) = E_{1\alpha}\psi_{\alpha}(1) \quad (3.11)$$

$$\hat{H}(2)\psi_{\tilde{\beta}}(2) = E_{2\tilde{\beta}}\psi_{\tilde{\beta}}(2) \quad (3.12)$$

olduğu görülebilir (Dereli ve Verçin, 2009). Eğer, iki parçacık kendi arasında yer değiştirirse, yani  $\alpha$  kuantum durumundaki 1 parçacığı  $\tilde{\beta}$  kuantum durumuna ve  $\tilde{\beta}$  kuantum durumundaki 2 parçacığı da  $\alpha$  kuantum durumuna geçerse, sistemin  $\Psi(1,2)$  dalga fonksiyonu ve toplam enerjisi ( $E$ ) sırasıyla

$$\Psi(1,2) = \psi_{\alpha}(2)\psi_{\tilde{\beta}}(1) \quad (3.13)$$

$$E = E_{2\alpha} + E_{1\tilde{\beta}} = E_{1\alpha} + E_{2\tilde{\beta}} \quad (3.14)$$

olur. (3.14) eşitliği; parçacıkların özdeş oluşunun doğal bir sonucu olarak, 1. parçacığın  $\alpha$  kuantum durumunda iken enerjisi ne ise 2. parçacığın da aynı  $\alpha$  kuantum durumunda aynı enerjiye sahip olacağını göstermektedir (Dereli ve Verçin, 2009). Bu durumda enerji öz değerleri için  $E_{1\alpha} = E_{2\alpha}$  ve  $E_{1\tilde{\beta}} = E_{2\tilde{\beta}}$  yazılabilir. Buna göre, özdeş parçacık sistemlerinin



enerji özdeğerleri yozlaşmıştır. Parçacıkların ayırt edilmezliğinden kaynaklanan bu duruma değiş-tokuş yozlaşması denir (Dereli ve Verçin, 2009).

(3.9) ve (3.13) eşitliklerinde verilen dalga fonksiyonları özdeş iki parçacıktan oluşan bir sistemi tam olarak belirleyebilir mi? (Apaydın, 2004a). Başka bir ifadeyle, bu iki eşitlik kuantum sisteminin kabul edilebilir özfonksiyonları mıdır? (Apaydın, 2004a). Bunu anlamak için ölçülebilir bir fiziksel nicelik olan olasılık yoğunluğuna bakılmalıdır. (3.9) eşitliğindeki özfonksiyonun belirlediği olasılık yoğunluğu

$$\begin{aligned}\Psi^*(1,2)\Psi(1,2) &= \psi_\alpha^*(1)\psi_{\tilde{\beta}}^*(2)\psi_\alpha(1)\psi_{\tilde{\beta}}(2) \\ &= |\psi_\alpha(1)|^2 |\psi_{\tilde{\beta}}(2)|^2\end{aligned}\quad (3.15)$$

dir (Apaydın, 2004a). (3.13) denklemindeki özfonksiyonun belirlediği olasılık yoğunluğu ise

$$\begin{aligned}\Psi^*(1,2)\Psi(1,2) &= \psi_\alpha^*(2)\psi_{\tilde{\beta}}^*(1)\psi_\alpha(2)\psi_{\tilde{\beta}}(1) \\ &= |\psi_\alpha(2)|^2 |\psi_{\tilde{\beta}}(1)|^2\end{aligned}\quad (3.16)$$

olur (Apaydın, 2004a). (3.15) ve (3.16) denklemlerinde verilen olasılık yoğunlukları birbirinden farklıdır. Oysa parçacıklar özdeş, yani birbirinden ayırt edilemeyen parçacıklar oldukları için, hangi parçacığın  $\alpha$  ve hangi parçacığın  $\tilde{\beta}$  kuantum durumunda olduğu bilinemez. Ayrıca, ölçülebilir bir fiziksel nicelik olan olasılık yoğunluğu, parçacıkların yer değiştirmesinden etkilenmemelidir. Bu nedenle, (3.9) ve (3.13) eşitlikleri, (3.7) ile verilen Schrödinger denklemini sağlamalarına rağmen, bu kuantum sisteminin kabul edilebilir özfonksiyonları olamazlar (Apaydın, 2004a). Ancak, kabul edilebilir özfonksiyonları oluşturmak için bu fonksiyonlar kullanılabilir. Böylece, iki özdeş fermiyon parçacığından oluşan bir sistemin anti-simetrik dalga fonksiyonu

$$\Psi_A(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_\alpha(1)\psi_{\tilde{\beta}}(2) - \psi_\alpha(2)\psi_{\tilde{\beta}}(1)] \quad (3.17)$$

şeklinde elde edilir (Dereli ve Verçin, 2009). Burada  $(1/\sqrt{2})$  faktörü, dalga fonksiyonunun normalizasyon koşulundan gelmektedir.

(3.17) eşitliğinde verilen anti-simetrik dalga fonksiyonu

$$\Psi_A(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) \\ \psi_{\tilde{\beta}}(1) & \psi_{\tilde{\beta}}(2) \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

şeklinde determinant biçiminde de yazılabilir (Dereli ve Verçin, 2009). Bu durum,  $N$  tane etkileşmeyen fermiyon parçacığını içeren bir sistem için

$$\Psi_A(1,2,\dots,N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) & \dots & \psi_\alpha(N) \\ \psi_{\tilde{\beta}}(1) & \psi_{\tilde{\beta}}(2) & \dots & \psi_{\tilde{\beta}}(N) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \psi_{E_N}(1) & \psi_{E_N}(2) & \dots & \psi_{E_N}(N) \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

şeklinde Slater determinantı olarak yazılabilir (Dereli ve Verçin, 2009). Buradan eğer herhangi iki satır ya da iki sütun birbiriyle aynı kuantum durumlarını işgal ederse o zaman determinantın değeri sıfır olur. Bu da esasen fermiyon sistemlerindeki Pauli dışarılama ilkesinin bir yansımasıdır.

Öte yandan, bir denge konumu etrafında harmonik salınımlar yapan bir parçacığın hareketi fiziğin en temel problemlerinden birini oluşturur (Karaoğlu, 2008). Diatomik moleküllerin titreşimi, kristal örgüde atomların veya çekirdek içindeki nükleonların salınımları gibi değişik birçok fiziksel sistemin kuantum mekaniksel incelemelerinde harmonik salınımcı önemli bir rol oynamaktadır (Karaoğlu, 2008; Dereli ve Verçin, 2009).

Tek-boyutta standart fermiyon salınımcı sisteminin Hamiltonyeni

$$\hat{H} = \hbar w \left( \hat{f}^* \hat{f} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.20)$$

ile tanımlıdır (Manoukian, 2006). Burada,  $\hbar = h/2\pi$  ve  $w$  açısal frekansı göstermektedir.

Ayrıca,  $\hat{f}^*$  standart fermiyonik yaratma operatörünü ve  $\hat{f}$  standart fermiyonik yok etme

operatörünü temsil etmektedir ve bunlar aşağıdaki bağıntıları sağlarlar (Shankar, 1994; Nolting, 2009):

$$\{\hat{f}, \hat{f}^*\} = \hat{f}\hat{f}^* + \hat{f}^*\hat{f} = 1 \quad (3.21)$$

$$\{\hat{f}, \hat{f}\} = \{\hat{f}^*, \hat{f}^*\} = 0 \quad (3.22)$$

$$[\hat{N}, \hat{f}^*] = \hat{f}^* \quad (3.23)$$

$$[\hat{N}, \hat{f}] = -\hat{f} \quad (3.24)$$

Burada  $\hat{N}$ , standart fermiyonik sayı operatörü olup,  $\hat{N} = \hat{f}^*\hat{f}$  ile tanımlıdır (Shankar, 1994). Standart fermiyonik sayı operatörünün karesi

$$\hat{N}^2 = \hat{f}^*\hat{f}\hat{f}^*\hat{f} = \hat{f}^*(1 - \hat{f}^*\hat{f})\hat{f} = \hat{N} \quad (3.25)$$

şeklindedir (Shankar, 1994). Bu sonuç,  $\hat{N}$  sayı operatörünün özdeğerlerinin yalnızca “0, 1” olacağını gösterir. Ayrıca, standart fermiyonik yaratma ve yok etme operatörlerinin sırasıyla  $|0\rangle$  ve  $|1\rangle$  ketlerine etkisi

$$\hat{f}^*|0\rangle = |1\rangle \quad (3.26)$$

$$\hat{f}|1\rangle = |0\rangle \quad (3.27)$$

ile tanımlıdır (Shankar, 1994). Buradan (3.20) denklemi ile verilen Hamilton operatörünün  $|0\rangle$  ve  $|1\rangle$  ketlerine etkisi

$$\hat{H}|0\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle \quad (3.28)$$

$$\hat{H}|1\rangle = +\frac{\hbar\omega}{2}|1\rangle \quad (3.29)$$

şeklinde olur (Manoukian, 2006).

(3.21) ve (3.22) bağıntılarıyla verilen standart fermiyon salınımcı sisteminin çok-boyuta genelleştirilmiş hali

$$\hat{f}_k\hat{f}_l^* + \hat{f}_l^*\hat{f}_k = \{\hat{f}_k, \hat{f}_l^*\} = \delta_{kl}\hat{I} \quad (3.30)$$

$$\{\hat{f}_k, \hat{f}_l\} = \{\hat{f}_k^*, \hat{f}_l^*\} = 0 \quad (3.31)$$

eşitlikleri ile verilir (Merzbacher, 1998). Fermiyon salınımcıları, kuantum istatistiksel olarak FD dağılım ilkesine uygun davranış gösterirler. Bununla ilgili detaylar bir sonraki bölümde incelenecektir.

Bundan sonraki kısımda; etkileşmeyen fermiyon salınımcılarının oluşturduğu Fermi gazı modelinin hem üç-boyutlu hem de iki-boyutlu uzaylarda genel termodinamik ve istatistiksel özellikleri ele alınacaktır.

## 4. İDEAL FERMİ GAZI

Bu bölümde, özdeş parçacık sistemlerinden biri olan fermiyonların, iki ve üç-boyutlu uzaylardaki genel istatistiksel mekanik özellikleri incelenecektir. Bunun için etkileşmeyen fermiyonların oluşturduğu ideal Fermi gazının dağılım fonksiyonu ve büyük bölüşüm fonksiyonunun logaritmasından yararlanarak, yüksek ve düşük sıcaklıklarda bazı önemli termodinamik fonksiyonları üzerinde yoğunlaşılacaktır.

### 4.1. Üç-Boyutlu Uzayda Genel İstatistiksel Mekanik Özellikler

Üç-boyutlu uzayda ideal Fermi gazının büyük bölüşüm fonksiyonunun logaritması

$$\frac{PV}{k_B T} = \ln Z = \sum_{\varepsilon} \ln (1 + z e^{-\beta \varepsilon}) \quad (4.1)$$

ile verilir (Pathria ve Beale, 2011). Burada,  $z = e^{\beta \mu}$  fugasitedir ve fermiyonlar için  $0 \leq z < \infty$  aralığında değer alır. Ayrıca,  $\beta = 1/k_B T$  olup,  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} (J/K)$  Boltzmann sabitini göstermektedir (Apaydın, 2004b). İdeal Fermi gazının toplam parçacık sayısı

$$N = \sum_{\varepsilon} \langle n_{\varepsilon} \rangle = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} + 1} \quad (4.2)$$

şeklindedir (Pathria ve Beale, 2011). Enerji öz durumları, hacim ve parçacık sayısı çok büyük olduğunda birbirine oldukça yakın olacağı için, (4.1) ve (4.2) eşitliklerindeki toplamlar integral formuna dönüştürülebilirler (Huang, 1987; Greiner vd., 1994). Böylece

$$\frac{PV}{k_B T} = \int_0^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) \ln (1 + z e^{-\beta \varepsilon}) \quad (4.3)$$

$$N = \int_0^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} + 1} \quad (4.4)$$

elde edilir (Greiner vd., 1994). Burada,  $g(\varepsilon)$  tek-parçacık durum yoğunluğunu göstermektedir ve

$$g(\varepsilon) = g \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} \quad (4.5)$$

ile tanımlıdır (Greiner vd., 1994). Burada  $g$ , parçacıkların sahip olduğu farklı spin yönelimlerini gösteren  $g = (2s + 1)$  farklı değer alabilen bir yozlaşma faktörüdür. (4.5) eşitliğinin, (4.3) ve (4.4)'de yerine yazılmasıyla

$$\frac{PV}{k_B T} = g \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{1/2} \ln(1 + ze^{-\beta\varepsilon}) \quad (4.6)$$

$$N = g \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} + 1} \quad (4.7)$$

elde edilir (Greiner vd., 1994). Ayrıca, (4.6) ve (4.7) eşitlikleri standart FD fonksiyonları cinsinden

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{g}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad (4.8)$$

$$\frac{N}{V} = \frac{g}{\lambda^3} f_{3/2}(z) \quad (4.9)$$

şeklinde bulunur (Pathria ve Beale, 2011). Burada standart FD fonksiyonları

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1} dx}{z^{-1}e^x + 1} = z - \frac{z^2}{2^\nu} + \frac{z^3}{3^\nu} - \dots \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlı olup,  $x = \beta\varepsilon$  dur (Pathria ve Beale, 2011). Ayrıca,  $\lambda = h/(2\pi m k_B T)^{1/2}$  ısı dalga boyunu göstermektedir ve Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx = (\nu-1)! \quad (\nu > 0) \quad (4.11)$$

dir (Pathria ve Beale, 2011).

İdeal Fermi gazının iç enerjisi

$$U = -\left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z\right)_{z,V} = k_B T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z\right)_{z,V} \quad (4.12)$$

ile verilir (Pathria ve Beale, 2011). Burada, (4.1) ve (4.8) denklemleri kullanılarak

$$U = \frac{3}{2} k_B T \frac{gV}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad (4.13)$$

bulunur. (4.8) eşitliğinin (4.13)'de kullanılmasıyla ideal Fermi gazının basıncı

$$P = \frac{2U}{3V} \quad (4.14)$$

olur. İdeal Fermi gazının ısı kapasitesi  $C_V = (\partial U / \partial T)_{V,N}$  termodinamik bağıntısı kullanılarak

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \frac{15}{4} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)} \quad (4.15)$$

şeklinde standart FD fonksiyonlarına bağlı olarak elde edilir (Pathria ve Beale, 2011). İdeal Fermi gazının Helmholtz serbest enerjisi

$$F = N\mu - PV = Nk_B T \left[ \ln z - \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \right] \quad (4.16)$$

ile tanımlıdır (Pathria ve Beale, 2011). Ayrıca, ideal Fermi gazının entropisi ise

$$S = \frac{U - F}{T} = Nk_B \left[ \frac{5}{2} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \ln z \right] \quad (4.17)$$

dir (Pathria ve Beale, 2011).

Öte yandan, yüksek sıcaklıklar limitinde ortalama parçacıklar arası uzaklık ısı dalgı boyundan daha büyüktür (Huang, 1987). Bu nedenle, kuantum etkiler ihmal edilebilir. Bu durumda, (4.10) eşitliğinde verilen FD fonksiyonları  $z \ll 1$  kalacaktır ve burada  $f_\nu(z) \simeq z$

düşünülebilir (Pathria ve Beale, 2011). Bu durumda, ideal Fermi gazının basıncı, iç enerjisi ve ısı kapasitesi sırasıyla

$$P = Nk_B T / V , \quad U = \frac{3}{2} Nk_B T , \quad C_V = \frac{3}{2} Nk_B \quad (4.18)$$

şeklindeki klasik sonuçlara indirgenir (Pathria ve Beale, 2011).

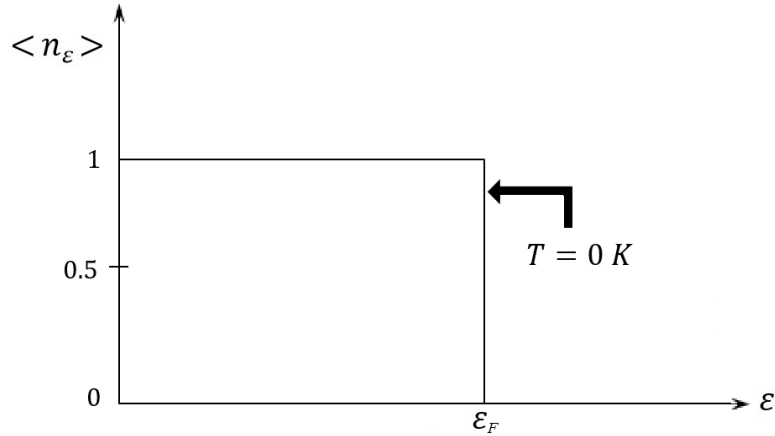
Öte yandan,  $T \rightarrow 0 K$  limitinde ideal Fermi gazının ortalama parçacık sayısı

$$\langle n_\varepsilon \rangle \equiv \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/k_B T} + 1} = \begin{cases} 1 , & (\varepsilon < \mu_0) \\ 0 , & (\varepsilon > \mu_0) \end{cases} \quad (4.19)$$

ile tanımlıdır (Pathria ve Beale, 2011).  $\mu_0$ ,  $T = 0 K$ 'daki sistemin kimyasal potansiyelidir. Böylece,  $\langle n_\varepsilon \rangle$  bir adım fonksiyonu olur ve  $\varepsilon = 0$ 'dan  $\varepsilon = \mu_0$ 'a kadar 1 değerini alır. Daha sonra aniden sıfıra düşer.  $T = 0 K$ 'da tüm tek-parçacık durumları  $\varepsilon = \mu_0$ 'a kadar tamamen doludur. Fakat,  $\varepsilon > \mu_0$  durumundaki tek-parçacık durumları boştur.  $\mu_0$  enerji limiti sistemin Fermi enerjisi olup,  $\varepsilon_F$  ile gösterilir ve  $T = 0 K$ 'da

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3N}{4\pi gV} \right)^{2/3} \quad (4.20)$$

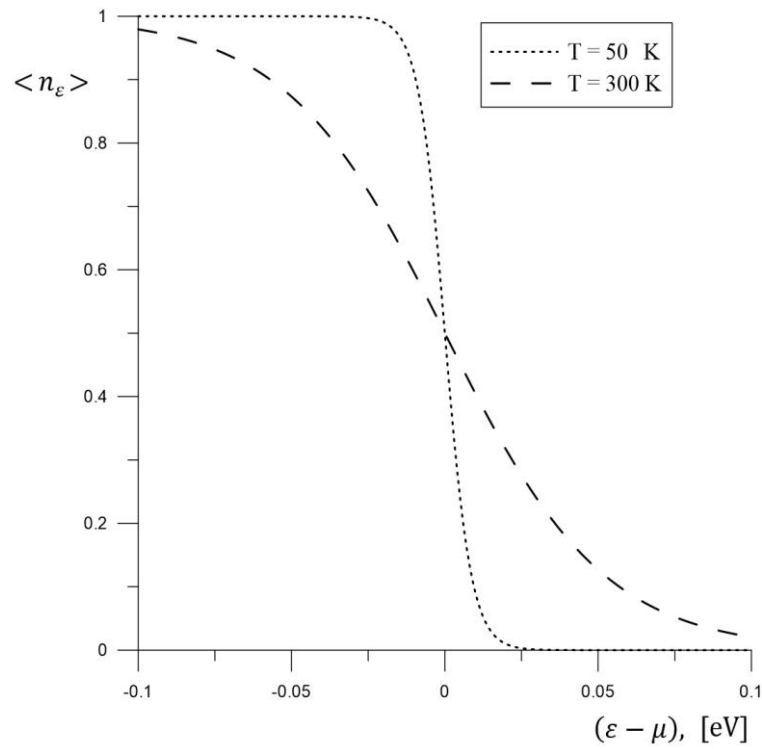
ile tanımlıdır (Pathria ve Beale, 2011). (4.19) eşitliğinde verilen ideal Fermi gazının dağılım fonksiyonunun  $\varepsilon$ 'a göre değişimi Şekil 4.1'de gösterilmiştir (Greiner vd., 1994).



Şekil 4.1. İdeal FD dağılım fonksiyonunun  $\varepsilon$ 'a göre değişimi (Greiner vd., 1994).



$T = 0\text{ K}$ 'dan itibaren sıcaklık arttıkça, ideal Fermi gazının davranışı oldukça farklı olmaktadır. Sıcaklık arttıkça, elektronların kinetik enerjileri artmaktadır (Kittel, 1976). Bu nedenle,  $\varepsilon_F$ 'nin hemen üst kısmında bulunan bazı boş durumlar işgal edilirken,  $\varepsilon_F$ 'nin hemen alt kısmında bulunan işgal edilmiş durumlar ise boş duruma geçerler. İdeal Fermi gazı dağılım fonksiyonunun  $(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimi farklı sıcaklık değerleri için Şekil 4.2'de gösterilmiştir (Bu grafiği çizmek için kullanılan Fortran kodu Ek Açıklama-A'da verilmiştir. Ayrıca, grafik çizimi için Grapher 8 çizim programından yararlanılmıştır).



**Şekil 4.2.** İdeal Fermi gazının FD dağılım fonksiyonunun farklı sıcaklık değerleri ve  $(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimi.

Şekil 4.2'den görüldüğü gibi,  $(\varepsilon - \mu) < 0$  bölgesinde,  $(\varepsilon - \mu)$  sabit iken sıcaklık arttıkça dağılım fonksiyonu değerleri azalmaktadır.  $(\varepsilon - \mu) > 0$  bölgesinde ise,  $(\varepsilon - \mu)$  sabit iken sıcaklık arttıkça dağılım fonksiyonu değerleri artmaktadır.

Düşük sıcaklıklar limitinde, parçacıkların ortalama de Broglie dalga boyu, parçacıklar arası ortalama uzaklıktan daha büyüktür (Huang, 1987). Bu nedenle kuantum etkiler, özellikle de Pauli dışarılama ilkesinin etkisi önemli olmaktadır. Bu limitde standart FD fonksiyonları Sommerfeld açılımı yöntemi kullanılırsa

$$f_{5/2}(z) \approx \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (\ln z)^{5/2} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right] \quad (4.21)$$

$$f_{3/2}(z) \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right] \quad (4.22)$$

formunda bulunur (Pathria ve Beale, 2011). Buradan hareketle, ideal Fermi gazının düşük sıcaklıklardaki toplam parçacık sayısı

$$N = \frac{4\pi g V}{3} \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} (k_B T \ln z)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-2} + \dots \right] \quad (4.23)$$

olur. Buradan sıfıncı yaklaşımda kimyasal potansiyel

$$k_B T \ln z \equiv \mu \simeq \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3N}{4\pi g V} \right)^{2/3} \quad (4.24)$$

elde edilir (Pathria ve Beale, 2011). Bu da (4.20)'de tanımlanan eşitliğe özdeştir. Eşitlik (4.23)'den yararlanarak ideal Fermi gazının birinci yaklaşımdaki kimyasal potansiyeli

$$k_B T \ln z \equiv \mu \simeq \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 \right] \quad (4.25)$$

şeklinde bulunur (Pathria ve Beale, 2011). Ayrıca, ideal Fermi gazının iç enerjisi

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.26)$$

formundadır (Pathria ve Beale, 2011).  $P = (2U/3V)$  termodinamik ilişkisi yardımıyla ideal Fermi gazının basıncı

$$P = \frac{2}{5} n \varepsilon_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.27)$$

dir. Burada  $n = N/V$  üç-boyutta parçacık yoğunluğudur. İdeal Fermi gazının düşük sıcaklıklardaki ısı kapasitesi

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right) + \dots \quad (4.28)$$

formundadır (Pathria ve Beale, 2011). İdeal Fermi gazının Helmholtz serbest enerjisi, (4.25) ve (4.27) bağıntıları kullanılarak

$$\frac{F}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (4.29)$$

şeklinde bulunur (Pathria ve Beale, 2011). Ayrıca, ideal Fermi gazının entropisi

$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right) + \dots \quad (4.30)$$

şeklinindedir (Pathria ve Beale, 2011). (4.30) eşitliğinden görüldüğü gibi sistemin entropisi  $T$  sıcaklığına bağlı olarak artmaktadır. Burada,  $T \rightarrow 0$  limitinde entropi sıfıra gitmektedir. Bu nedenle, (4.30) eşitliği termodinamiğin üçüncü yasasını sağlamaktadır (Apaydın, 2004b; Schwabl, 2006; Sinha, 2009; Pathria ve Beale, 2011).

## 4.2. İki-Boyutlu Uzayda Genel İstatistiksel Mekanik Özellikler

İki-boyutlu uzayda, ideal Fermi gazının büyük bölüşüm fonksiyonunun logaritması

$$\frac{PA}{k_B T} = \ln Z = \sum_{\varepsilon} \ln (1 + z e^{-\beta \varepsilon}) \quad (4.31)$$

ile tanımlıdır (Khare, 2005). İdeal Fermi gazının toplam parçacık sayısı

$$N \equiv z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} + 1} \quad (4.32)$$

dir. İki-boyutlu uzayda,  $N \rightarrow \infty$  ve  $A \rightarrow \infty$  limitlerinde, (4.31) ve (4.32) eşitliklerindeki toplamlar integral ile yer değiştirebilir (Khare, 2005; Bolstad, 2009). İki-boyutlu uzayda  $g(\varepsilon) = (2\pi mA/h^2)$  tek-parçacık durum yoğunluğu fonksiyonu kullanılarak (4.31) ve (4.32) eşitliklerinin integral formu

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{2\pi m}{h^2} \int_0^{\infty} d\varepsilon \ln(1 + ze^{-\beta\varepsilon}) \quad (4.33)$$

$$\frac{N}{A} = \frac{2\pi m}{h^2} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} + 1} \quad (4.34)$$

olur ( $g = 1$  kabul edilmiştir). Buradan

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{1}{\lambda^2} f_2(z) \quad (4.35)$$

$$\frac{N}{A} = \frac{1}{\lambda^2} f_1(z) \quad (4.36)$$

şeklinde olup,  $f_\nu(z)$  'ler standart FD fonksiyonlarıdır (Khare, 2005).

İdeal Fermi gazının iki-boyutlu uzaydaki iç enerjisi

$$U = - \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \right)_{z,A} \quad (4.37)$$

ile verilir (Khare, 2005). (4.31) ve (4.35) eşitlikleri kullanılarak ideal Fermi Gazının iç enerjisi

$$U = \frac{A}{\lambda^2} k_B T f_2(z) \quad (4.38)$$

bulunur. İdeal Fermi gazının iki-boyutta basıncı

$$P = \frac{U}{A} \quad (4.39)$$

dir. Yine, ideal Fermi gazının ısı kapasitesi  $C_A = (\partial U / \partial T)_{A,N}$  termodinamik bağıntısı kullanılarak

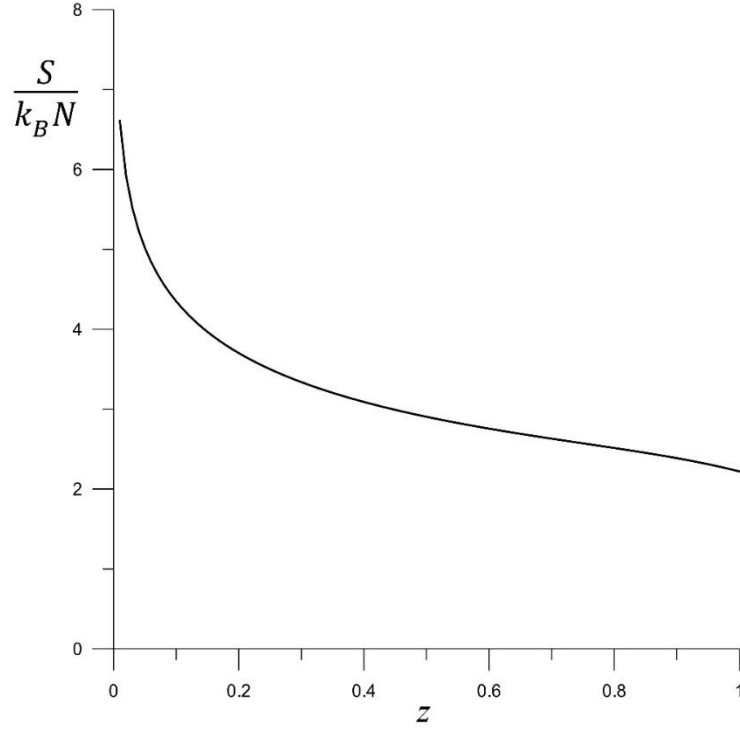
$$\frac{C_A}{Nk_B} = 2 \frac{f_2(z)}{f_1(z)} - \frac{f_1(z)}{f_0(z)} \quad (4.40)$$

bulunur (Khare, 2005). İdeal Fermi gazının iki-boyutlu uzayda Helmholtz serbest enerjisi ve entropisi

$$F = N\mu - PA = Nk_B T \left[ \ln z - \frac{f_2(z)}{f_1(z)} \right] \quad (4.41)$$

$$S = \frac{U - F}{T} = Nk_B \left[ 2 \frac{f_2(z)}{f_1(z)} - \ln z \right] \quad (4.42)$$

dir (Khare, 2005). Bu entropi fonksiyonunun  $z$ 'ye göre değişimi Şekil 4.3'de gösterilmiştir (Bu grafiği çizmek için kullanılan Fortran kodu Ek Açıklama-B'de verilmiştir. Ayrıca, grafiği çizmek için Grapher 8 izim programı kullanılmıştır).



**Şekil 4.3.** İki-boyutlu uzayda ideal Fermi gazı entropisinin  $z$ 'ye göre değişimi.

Düşük sıcaklıklar limitinde, Sommerfeld açılımı yöntemi kullanılarak iki-boyutta standart FD fonksiyonları

$$f_2(z) = \frac{1}{2} (\ln z)^2 + \frac{\pi^2}{6} + \dots \quad (4.43)$$

$$f_1(z) = \ln z + \dots \quad (4.44)$$

formunda elde edilir (Khare, 2005). Buradan, ideal Fermi gazının iki-boyutlu uzaydaki kimyasal potansiyeli

$$k_B T \ln z \equiv \mu = \frac{2\pi \rho \hbar^2}{m} = \varepsilon_F \quad (4.45)$$

şeklinde elde edilir (Khare, 2005). Burada,  $\rho = (N/A)$  iki-boyutta parçacık yoğunluğudur. İdeal Fermi gazının iki-boyutlu uzay hali için düşük sıcaklıklardaki iç enerjisi

$$U = \frac{1}{2} N \varepsilon_F \left[ 1 + \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 \right] \quad (4.46)$$

formundadır (Khare, 2005). (4.39) eşitliği kullanılırsa, ideal Fermi gazının iki-boyutta basıncı

$$P = \frac{1}{2A} N \varepsilon_F \left[ 1 + \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 \right] \quad (4.47)$$

elde edilir. İdeal Fermi gazının iki-boyutta düşük sıcaklıklardaki ısı kapasitesi

$$\frac{C_A}{N k_B} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right) \quad (4.48)$$

ile verilir (Khare, 2005). (4.45) ve (4.47) eşitlikleri kullanılarak ideal Fermi gazının iki-boyutta Helmholtz serbest enerjisi

$$F = \frac{1}{2} N \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 \right] \quad (4.49)$$

bulunur (Khare, 2005). (4.46) ve (4.49) eşitlikleri kullanılarak, ideal Fermi gazının iki-boyutta düşük sıcaklıklardaki entropisi

$$\frac{S}{N k_B} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right) \quad (4.50)$$

elde edilir (Khare, 2005).

Buraya kadar ideal Fermi gazının hem üç-boyutlu hem de iki-boyutlu uzaylardaki bazı istatistiksel mekanik özellikleri incelenmiştir. Bundan sonraki kısımda bu tez çalışmasının odağını oluşturan VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin bazı kuantum mekaniksel özellikleri ele alınacaktır.

## 5. YÖNTEM

(3.21)-(3.24) eşitliklerinde verilen standart fermiyon salınımcı sisteminin geliştirilmiş halleri olan, deforme fermiyon salınımcı sistemleri kullanılarak da istatistiksel mekanik özellikler incelenebilir. Bu tür çalışmalara iki örnek (Lavagno ve Narayana Swamy, 2002; Narayana Swamy, 2006b) kaynaklarında yapılan çalışmalar verilebilir. Yine bu kapsamda 2011 yılında yapılan (Algin, 2011) çalışması; deforme fermiyon sistemlerinin hem kuantum mekaniksel hem de istatistiksel mekanik özellikleri üzerine farklı yönleri içeren kıyaslamalar ile geniş bir incelenme sunmaktadır.

Genel olarak, deforme fermiyon sistemleri kuantum grup simetrisi içerenler ve içermeyenler olmak üzere ikiye ayrılabilir. Bu bölümde, tez çalışmasının orijinal kısmını oluşturan ve kuantum grup simetrisi içermeyen VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon salınımcı modelinin genel bazı kuantum mekaniksel özellikleri incelenecektir. Bu yöntem ile aşağıda, modele ait fermiyonik JD operatörünün bazı matematiksel fonksiyonlara etkisinin neler olabileceği araştırılacaktır.

### 5.1. VPJC-tipli $q$ -Deforme Fermiyon Gaz Modeli

Tek-boyutta VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon salınımcı cebiri (Viswanathan vd., 1992; Chaichian vd., 1993)

$$\hat{c}\hat{c}^* + q\hat{c}^*\hat{c} = 1 \quad (5.1)$$

$$[\hat{N}, \hat{c}] = -\hat{c}, \quad [\hat{N}, \hat{c}^*] = \hat{c}^* \quad (5.2)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Burada  $\hat{c}^*$ , deforme fermiyonik yaratma operatörünü,  $\hat{c}$  ise deforme fermiyonik yok etme operatörünü göstermektedir. Deforme fermiyonik sayı operatörü  $[\hat{N}]$  ise

$$\hat{c}^*\hat{c} = [\hat{N}] = \frac{1 - (-1)^{\hat{N}} q^{\hat{N}}}{1 + q} \quad (5.3)$$

ile tanımlıdır (Viswanathan vd., 1992; Chaichian vd., 1993; Algin, 2011). Ayrıca, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon modelinin istatistiksel mekanik fonksiyonlarını incelemek için standart türev operatörü yerine, bu sistem için özel olarak tanımlanan fermiyonik JD operatörü kullanılır. Bu ise

$$\hat{D}_x^{(q)} f(x) = \frac{1}{x} \left[ \frac{f(x) - f(-qx)}{1+q} \right] \quad (5.4)$$

eşitliği ile verilir (Algin, 2011).

## 5.2. Fermiyonik JD Operatörünün Bazı Matematiksel Özellikleri

Yukarıda bahsedilen özelliklerden yararlanarak, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon modelinin JD operatörünün bazı matematiksel fonksiyonlar üzerine etkisi incelenebilir. Örneğin,  $\alpha$  bir sabit olmak üzere  $f(x) = \alpha x^n$ 'e  $\hat{D}_x^{(q)}$ 'nin etkisi

$$\hat{D}_x^{(q)}(\alpha x^n) = \alpha [n] x^{n-1} \quad (5.5)$$

şeklindedir (Algin ve Senay, 2016a). Ayrıca,  $f(x) = a x^r$  ve  $g(x) = b x^s$  olmak üzere, JD operatörünün bu iki fonksiyonun çarpımına etkisi

$$\hat{D}_x^{(q)}(a x^r b x^s) = a b [r+s] x^{r+s-1} \quad (5.6)$$

formundadır (Algin ve Senay, 2016a). Burada  $r \geq 0$  ve  $s \geq 0$  dır ve  $(a, b)$  reel sabitlerdir. Eğer, VPJC-fermiyon modelinin fermiyonik JD operatörü,  $m$  farklı kez  $f(x) = \alpha x^n$ 'e uygulanırsa

$$(\hat{D}_x^{(q)})^m(\alpha x^n) = \alpha \frac{[n]!}{[n-m]!} x^{n-m} \quad (5.7)$$

sonucu bulunur (Burada  $m \geq 0$  dır). Ayrıca,  $f(x)$  ve  $g(x)$  genel birer fonksiyon olmak üzere (5.4) eşitliği ve (Jackson, 1909; Kac ve Cheung, 2001, Yardımcı, 2005; Aral vd., 2013) kaynakları yardımıyla



$$\hat{D}_x^{(q)}(f(x)g(x)) = g(x)(\hat{D}_x^{(q)}f(x)) + f(-qx)(\hat{D}_x^{(q)}g(x)) \quad (5.8)$$

$$= f(x)(\hat{D}_x^{(q)}g(x)) + g(-qx)(\hat{D}_x^{(q)}f(x)) \quad (5.9)$$

$$\hat{D}_x^{(q)}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(-qx)(\hat{D}_x^{(q)}f(x)) - f(-qx)(\hat{D}_x^{(q)}g(x))}{g(x)g(-qx)} \quad (5.10)$$

$$= \frac{g(x)(\hat{D}_x^{(q)}f(x)) - f(x)(\hat{D}_x^{(q)}g(x))}{g(x)g(-qx)} \quad (5.11)$$

eşitlikleri elde edilir (Algin ve Senay, 2016a). Buraya kadar VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon modelinin genel bazı kuantum mekaniksel özellikleri ve fermiyonik JD operatörünün bazı matematiksel fonksiyonlar üzerine etkileri ele alınmıştır.

Bundan sonraki bölümde, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin ortaya koyduğu yöntem yardımıyla, üç-boyutlu uzayda düşük sıcaklıklar limitindeki istatistiksel mekanik özellikleri ele alınacaktır.

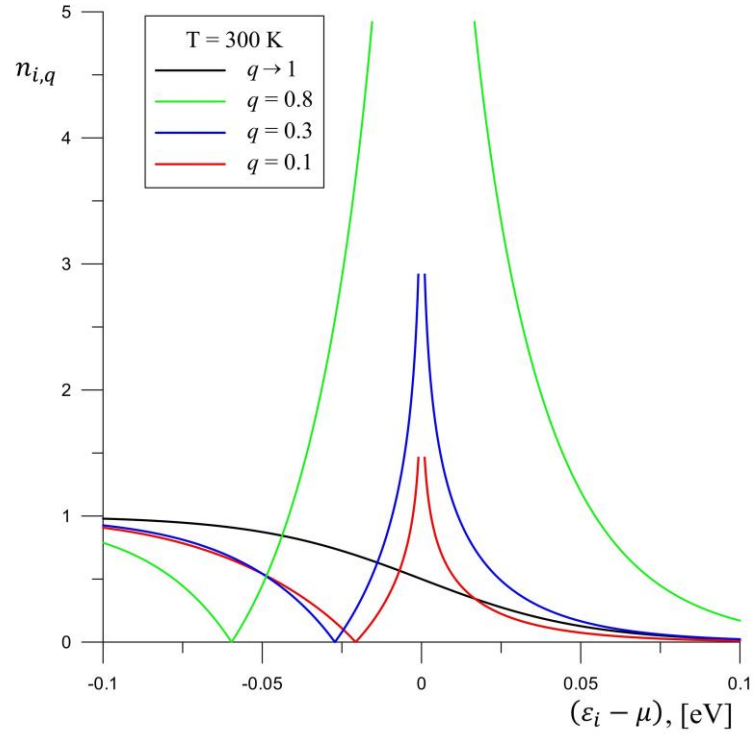
## 6. ÜÇ-BOYUTLU UZAYDA DÜŞÜK SICAKLIKLARDA VPJC-FERMİYON MODELİNİN İSTATİSTİKSEL MEKANİK ÖZELLİKLERİ

VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin yüksek sıcaklıklardaki bazı istatistiksel mekanik fonksiyonları daha önce incelenmiştir (Algin ve Senay, 2012). Bu bölümde, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin (3+1)-boyutlu uzay-zaman hali için düşük sıcaklıklardaki davranışı incelenecektir. Modelin deforme fermiyon dağılım fonksiyonu verilerek, Sommerfeld açılımı yöntemi yardımıyla düşük sıcaklıklardaki toplam parçacık sayısı bağıntısı türetilenektir. Modele ait iç enerji, ısı kapasitesi ve entropi gibi diğer termodinamik fonksiyonlar düşük sıcaklıklarda araştırılacaktır.

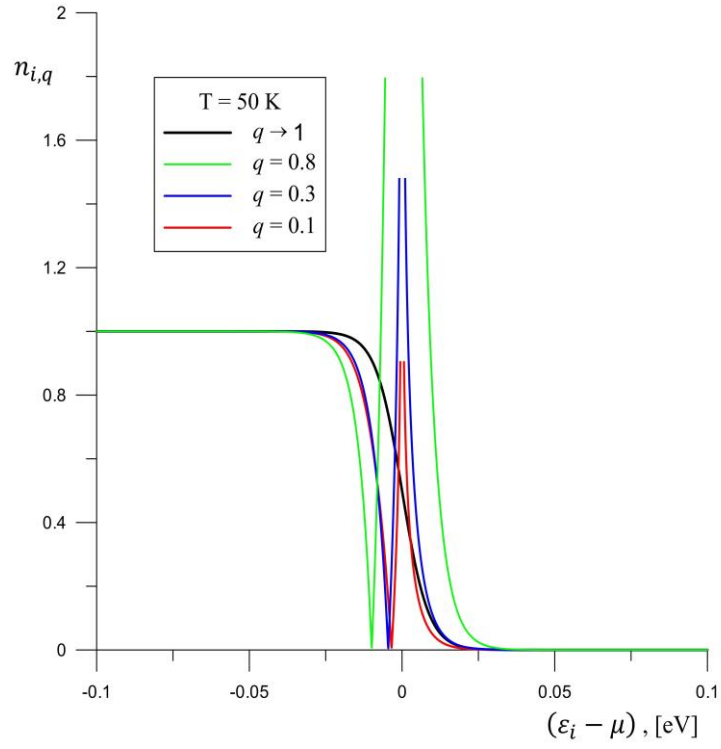
VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon modelinin dördüncü bölümde bahsedilen kuantum mekaniksel özelliklerinden yararlanarak, istatistiksel mekanik özellikleri çalışılabilir. Model için tanımlanan (5.1)-(5.3) eşitlikleri ve de  $[n_{i,q}] = Tr(e^{-\beta\hat{H}} \hat{c}_i^* \hat{c}_i) / Z$  eşitliği (Tuszynski vd., 1993; Lavagno ve Narayana Swamy, 2002; Algin, 2011) kullanılarak, modelin deforme dağılım fonksiyonu,  $\hat{H} = \sum_i (\varepsilon_i - \mu) \hat{N}_i$  yardımıyla elde edilebilir. Buradan

$$n_{i,q} = \frac{1}{|\ln q|} \left| \ln \left( \frac{|e^{\eta_i} - 1|}{e^{\eta_i} + q} \right) \right| \quad (6.1)$$

şeklindedir (Algin, 2011). Burada  $\eta_i = \beta(\varepsilon_i - \mu)$  ve deformasyon parametresi  $q$ 'da  $0 < q < 1$  aralığında tanımlıdır. Bu deforme fermiyon dağılım fonksiyonunun  $(\varepsilon_i - \mu)$ 'ye göre değişimi iki farklı sıcaklık değeri için Şekil 6.1 ve Şekil 6.2' de gösterilmiştir (Bu grafikleri çizmek için kullanılan Fortran kodları Ek Açıklama-C ve Ek Açıklama-D'de verilmiştir. Ayrıca, grafiklerin çizimi için Grapher 8 çizim programı kullanılmıştır).



Şekil 6.1.  $T = 300$  K için, deforme FD dağılım fonksiyonunun  $(\epsilon_i - \mu)$ 'ye göre değişimi.



Şekil 6.2.  $T = 50$  K için, deforme FD dağılım fonksiyonunun  $(\epsilon_i - \mu)$ 'ye göre değişimi.

Yukarıdaki her iki grafikte hem  $(\varepsilon_i - \mu)$  hem de sıcaklık sabit olduğunda,  $q$  parametresi arttıkça deforme dağılım fonksiyonu değerleri artmaktadır. Ayrıca, her iki grafikte  $(\varepsilon_i = \mu)$  durumunda bu dağılım fonksiyonu ıraksak olmaktadır.

Düşük sıcaklıklarda, Sommerfeld açılımı yöntemi yardımıyla (Ashcroft, 1976; Kittel, 1976; Huang, 1989; Greiner vd., 1994; Karaoğlu, 2009; Pathria ve Beale, 2011), VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon modelinin istatistiksel mekanik özellikleri incelenebilir. VPJC-fermion gaz modelinin deforme toplam parçacık sayısı  $N^{(q)}$  ve deforme toplam enerjisi  $U^{(q)}$ , üç-boyutlu uzay hali için aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$N^{(q)}(T) = \int_0^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon, T, q) \quad (6.2)$$

$$U^{(q)}(T) = \int_0^{\infty} \varepsilon d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon, T, q) \quad (6.3)$$

Burada  $g(\varepsilon)$  hal yoğunluğu olup,  $g(\varepsilon) = (V/2\pi^2)(2m/\hbar^2)\varepsilon^{1/2}$  alınacaktır. (6.2)'den yararlanarak modelin toplam parçacık sayısı

$$N^{(q)}(T) = \frac{V}{3\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu^{3/2} \left[ 1 - \frac{3}{8} I^{(VPJC)}(q) \left( \frac{k_B T}{\mu} \right)^2 \right] \quad (6.4)$$

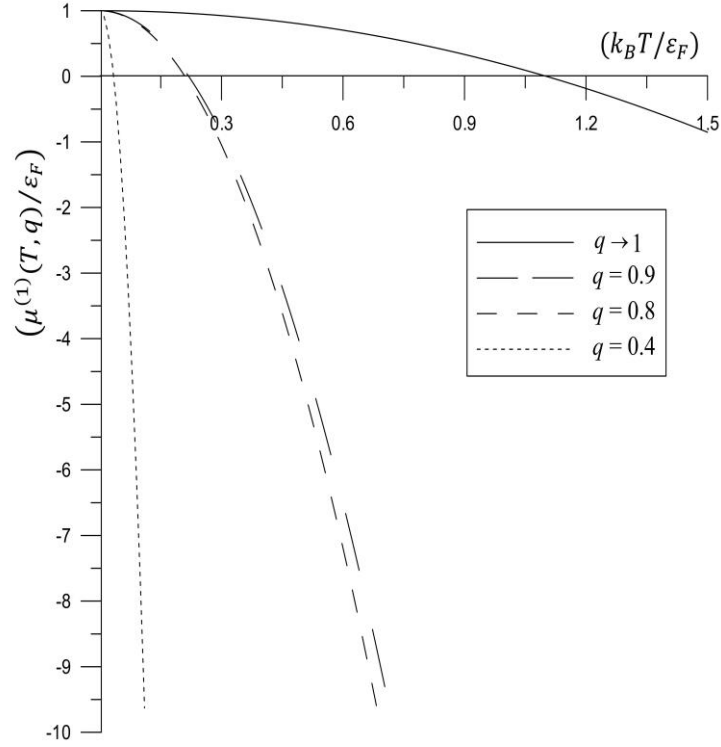
formundadır (Algin ve Senay, 2016a). Burada

$$I^{(VPJC)}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\ln q|} \left[ \frac{x^2}{(1-e^{-x})} - \frac{x^2}{(1+qe^{-x})} \right] dx \quad (6.5)$$

ile tanımlı olup,  $x = \beta\varepsilon$  dur.  $I^{(VPJC)}(q)$  fonksiyonu,  $q < 1$  için negatif değerler almaktadır. (6.4) eşitliği kullanılarak, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon modelinin deforme kimyasal potansiyeli

$$\mu^{(1)}(T, q) = \varepsilon_F \left[ 1 + I^{(VPJC)}(q) \left( \frac{k_B T}{2\varepsilon_F} \right)^2 \right] \quad (6.6)$$

bulunur (Algin ve Senay, 2016a). Bu deforme kimyasal potansiyelin  $(k_B T / \varepsilon_F)$ 'ye göre değişimi Şekil 6.3'de gösterilmiştir (Bu grafiği çizmek için kullanılan Fortran kodu Ek Açıklama-E'de verilmiştir. Ayrıca, grafik çizimi için Grapher 8 çizim programı kullanılmıştır).



**Şekil 6.3.** VPJC-fermion gaz modelinin deforme kimyasal potansiyelinin  $(k_B T / \varepsilon_F)$ 'ye göre değişimi ( $q < 1$ ).

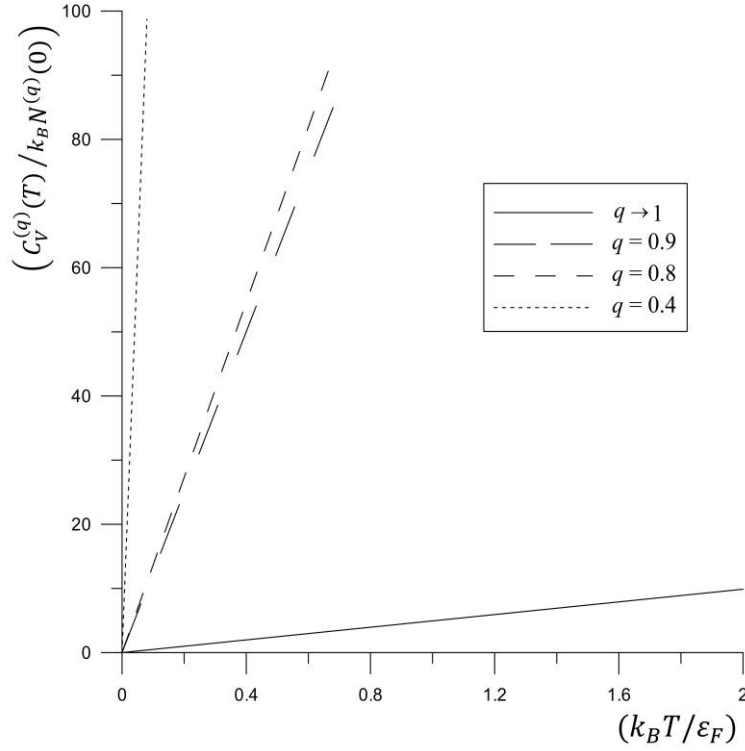
Düşük sıcaklıklarda, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermion gaz modelinin iç enerjisi

$$U^{(q)}(T) = \frac{3}{5} N^{(q)}(0) \varepsilon_F \left[ 1 - 5 I^{(VPJC)}(q) \left( \frac{k_B T}{2 \varepsilon_F} \right)^2 \right] \quad (6.7)$$

şeklindedir (Algin ve Senay, 2016a). Buradan modelin ısı kapasitesi,  $C_V = (\partial U / \partial T)_{V, N}$  termodinamik bağıntısı kullanılarak

$$C_V^{(q)}(T) = -\frac{3}{2} k_B N^{(q)}(0) I^{(VPJC)}(q) \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right) \quad (6.8)$$

şeklinde bulunur (Algin ve Senay, 2016a). Bu deforme ısı kapasitesinin  $(k_B T / \varepsilon_F)$ 'ye göre değişimi Şekil 6.4'de gösterilmiştir (Bu grafiği çizmek için kullanılan Fortran kodu Ek Açıklama-F'de verilmiştir. Ayrıca, grafik çizimi için Grapher 8 çizim programı kullanılmıştır).



**Şekil 6.4.** VPJC-fermion gaz modelinin deforme ısı kapasitesinin  $(k_B T / \varepsilon_F)$ 'ye göre değişimi ( $q < 1$ ).

Öte yandan, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin düşük sıcaklıklardaki Helmholtz serbest enerjisi ve entropisi

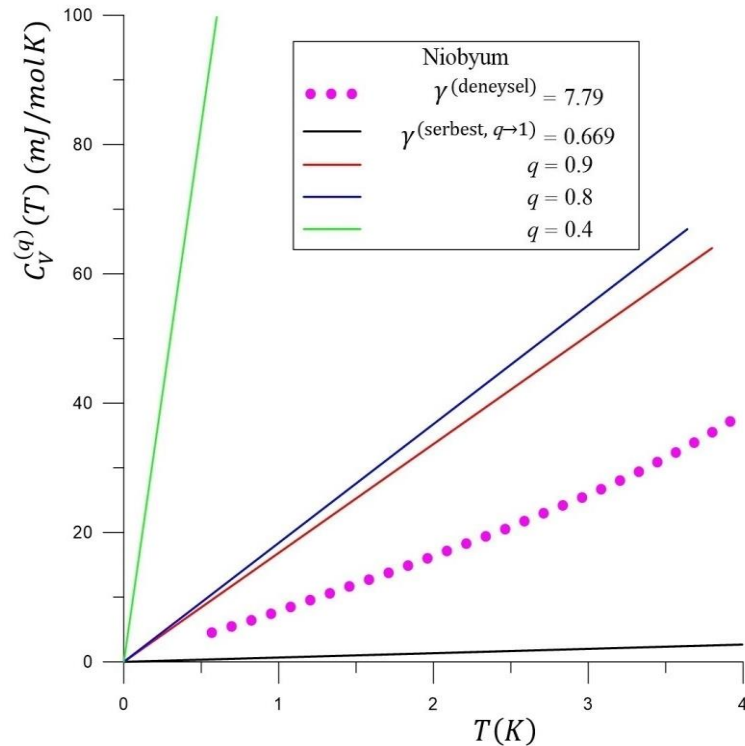
$$F^{(q)}(T) = \frac{3}{5} N^{(q)}(0) \varepsilon_F \left[ 1 + 5 I^{(VPJC)}(q) \left( \frac{k_B T}{2 \varepsilon_F} \right)^2 \right] \quad (6.9)$$

$$S^{(q)}(T) = -\frac{3}{2} k_B N^{(q)}(0) I^{(VPJC)}(q) \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right) \quad (6.10)$$

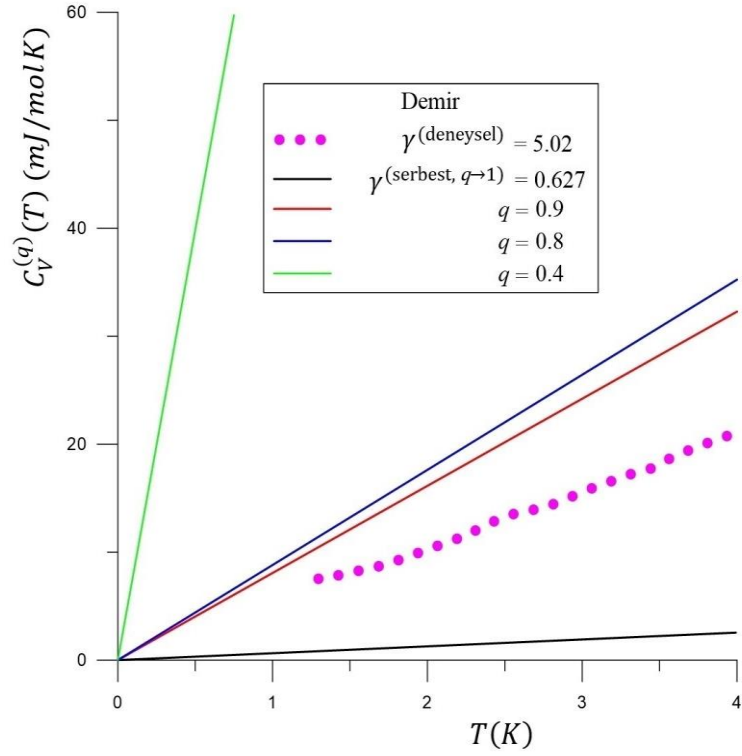
formundadır (Algin ve Senay, 2016a).

VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin fiziksel bir uygulaması olarak, metallerin elektronik ısı kapasitesi çalışmasına ne gibi etkilerinin olabileceği araştırılabilir.

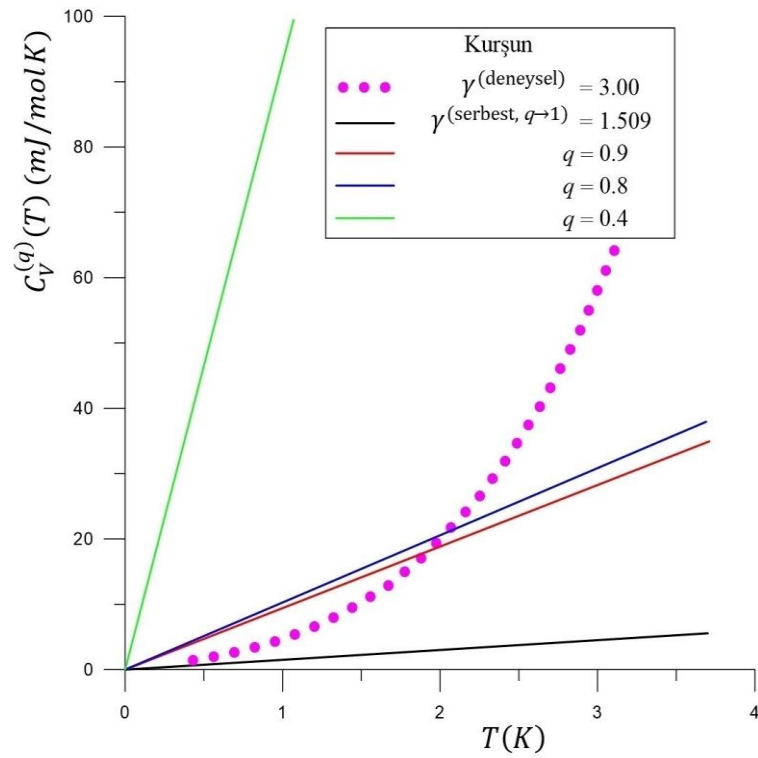
Bu amaçla Nb, Fe, Pb metalleri seçilerek, VPJC-tipli deforme fermiyon gaz modelinin ısı kapasitesi üzerinden deformasyonun etkileri araştırılmıştır. Bu bağlamda, (6.8) eşitliğinden yararlanarak Nb, Fe ve Pb metallerinin elektronik ısı kapasiteleri, Boltzmann sabiti  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} (J/K)$ , Avagadro sayısı ( $N_A$ ) ve  $\varepsilon_F(\text{Nb}) = 5.32 (eV)$ ,  $\varepsilon_F(\text{Fe}) = 11.1 (eV)$ ,  $\varepsilon_F(\text{Pb}) = 9.47 (eV)$  (Ashcroft and Mermin, 1976) değerleri alınarak hesaplanabilir. Buradan Nb, Fe ve Pb metalleri için deforme ısı kapasitelerinin sıcaklık ve farklı  $q$  değerlerine bağlı değişimleri Şekil 6.5, Şekil 6.6 ve Şekil 6.7’de gösterilmiştir ( Bu grafikleri elde etmek için kullanılan Fortran kodları sırasıyla Ek Açıklama-G, Ek Açıklama-H ve Ek Açıklama-I’da verilmiştir. Ayrıca, grafikleri çizmek için Grapher 8 çizim programı ve Excel programından yararlanılmıştır). Şekil 6.5, 6.6, 6.7’de Nb, Fe ve Pb metalleri için verilen grafiklerde, serbest-elektron teorisi yoluyla (Ashcroft ve Mermin, 1976; Kittel, 1976; Tritt, 2004), deneysel yolla (Keesom ve Kurrelmeyer, 1939; Van Der Hoeven ve Keesom, 1964; Van Der Hoeven ve Keesom, 1965) ve de deforme ısı kapasitesi (Algin ve Senay, 2016a) yoluyla ile elde edilen sonuçlar bir arada verilmiştir.



**Şekil 6.5.** Nb için, deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimi ( $q < 1$ ) (Ashcroft ve Mermin, 1976; Kittel, 1976; Tritt, 2004; Van Der Hoeven ve Keesom, 1964).



**Şekil 6.6.** Fe için, deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimi ( $q < 1$ ) (Ashcroft ve Mermin, 1976; Kittel, 1976; Tritt, 2004; Keesom ve Kurrelmeyer, 1939).



**Şekil 6.7.** Pb için, deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimi ( $q < 1$ ) (Ashcroft ve Mermin, 1976; Kittel, 1976; Tritt, 2004; Van Der Hoeven ve Keesom, 1965).



Düşük sıcaklıklarda, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modeli yardımıyla elde edilen Nb, Fe ve Pb metallerinin elektronik ısı kapasiteleri

$$C_V^{(q)}(T) = \gamma^{(q)} T \quad (6.11)$$

formunda da yazılabilir. Burada  $\gamma^{(q)}$ ,  $q$ -deforme Sommerfeld parametresi olarak adlandırılmıştır. Böylece Şekil 6.5, 6.6, 6.7 aracılığıyla elde edilen  $q$ -deforme Sommerfeld parametreleri, Nb, Fe ve Pb için deneysel  $\gamma^{(\text{deneysel})}$  değerler, serbest-elektron teorisi yoluyla bulunan  $\gamma^{(\text{serbest})}$  değerleri, topluca Çizelge 6.1’de gösterilmiştir.

**Çizelge 6.1.** Nb, Fe, Pb metallerinin serbest-elektron teorisi yolu, deneysel yol ve deforme ısı kapasitesi yollarıyla elde edilen Sommerfeld parametreleri (Keesom ve Kurrelmeyer, 1939; Van Der Hoeven ve Keesom, 1964; Van Der Hoeven ve Keesom, 1965; Ashcroft ve Mermin, 1976; Kittel, 1976; Algin ve Senay, 2016a).

Metal	$\gamma^{(\text{serbest})}$	$\gamma^{(\text{deneysel})}$	$\gamma^{(q)}$
Nb	0.669	7.79	7.96 ( $q = 0.79$ )
Fe	0.627	5.02	5.02 ( $q = 0.84$ )
Pb	1.509	3.00	3.00 ( $q = 0.67$ )

Ayrıca, eşitlik (6.8) yardımıyla Nb, Fe ve Pb için bulunan  $C_V^{(q)}(T)$  sonuçları daha güncel deneysel çalışmaların sonuçlarıyla da kıyaslanmıştır (Marklund vd., 1971; Kuentzler, 1984; Tagliati vd., 2012). Buradan da VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinden elde edilen sonuçların deneysel sonuçlara, serbest-elektron teorisinden daha çok uyum sağladığı görülmüştür.

VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gazının düşük sıcaklıklardaki diğer bazı istatistiksel mekanik özellikleri ve bunlara deformasyon parametresinin etkileri de incelenmiştir (Algin ve Senay, 2016a, 2016b, 2016c). Bundan sonraki bölümde, bu tez çalışmasının bir başka orijinal kısmını oluşturan VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin iki-boyutlu uzay hali için genel istatistiksel mekanik özellikleri ele alınacaktır.

## 7. İKİ-BOYUTLU UZAYDA VPJC-FERMİYON MODELİNİN BAZI İSTATİSTİKSEL MEKANİK ÖZELLİKLERİ

Tez çalışmasının diğer bir orijinal kısmı olan bu bölümde, ilk olarak VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon modelinin dağılım fonksiyonu ve fermiyonik büyük bölüşüm fonksiyonunun logaritması verilecektir. Daha sonra, (2+1)-boyutlu uzay-zaman hali için modelin hem yüksek hem de düşük sıcaklıklarda deforme iç enerjisi, deforme ısı kapasitesi ve deforme entropisi gibi bazı termodinamik fonksiyonları elde edilecektir. Özel olarak, yüksek sıcaklıklarda modele ait deforme entropi fonksiyonunun  $z$  ve  $q$  parametrelerine göre değişimleri incelenecektir. Ayrıca, iki-boyutta modelin hal denkleminin virial açılımı yapılarak, ilk beş deforme virial katsayısı bulunacaktır.

### 7.1. Modelin Yüksek Sıcaklıklarda Bazı İstatistiksel Mekanik Özellikleri

VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin deforme dağılım fonksiyonu

$$n_{i,q} = \frac{1}{|\ln q|} \left\| \ln \left( \frac{|e^{\eta_i} - 1|}{e^{\eta_i} + q} \right) \right\| \quad (7.1)$$

şeklindedir (Algin, 2011). Burada  $\eta_i = \beta(\varepsilon_i - \mu)$  ve deformasyon parametresi  $q$ 'da  $0 < q < 1$  aralığında tanımlıdır. Bu deforme fermiyon gaz modelinin fermiyonik büyük bölüşüm fonksiyonunun logaritması (5.4) ve (7.1) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\ln Z^{(VPJC)} = \frac{(1+q)}{|\ln q|} \sum_i \left\| \ln \left( 1 - ze^{-\beta\varepsilon_i} \right) \right\| \quad (7.2)$$

formunda bulunur (Algin ve Senay, 2016d). Modelin toplam parçacık sayısı ifadesini elde etmek için, standart termodinamik türev kullanılırsa

$$N \neq z \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \ln Z^{(VPJC)} \quad (7.3)$$

olduğu görülür. Bu nedenle, standart termodinamik türev operatörü yerine

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \hat{D}_z^{(q)} \quad (7.4)$$

şeklindeki modelin fermiyonik JD operatörü kullanılmalıdır. Bu ise (5.4) eşitliği ile tanımlı olup, burada  $x$  yerine  $z$  değişkeni alınması yeterli olacaktır. Modelin fermiyonik JD operatörü kullanılarak, toplam parçacık sayısının

$$N^{(q)} = z \hat{D}_z^{(q)} \ln Z^{(VPJC)} \equiv \sum_i n_{i,q} \quad (7.5)$$

şeklinde olduğu görülür (Algin ve Senay, 2016d).

VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin yukarıda tanımlanan denklemleri göz önüne alındığında, modelin iki-boyutlu uzaydaki diğer istatistiksel mekanik özellikleri incelenebilir. Örneğin, hal denklemi

$$\frac{P^{(q)} A}{k_B T} = \ln Z^{(VPJC)} = \frac{(1+q)}{|\ln q|} \sum_i \left| \ln |1 - z e^{-\beta \varepsilon_i}| \right| \quad (7.6)$$

formunda yazılabilir. İki-boyutlu uzayda,  $N \rightarrow \infty$  ve  $A \rightarrow \infty$  limitlerinde (7.5) ve (7.6)'daki toplamlar integral ile yer değiştirebilir (Khare, 2005; Bolstad, 2009). Buradan hareketle, iki-boyutlu uzaydaki  $g(\varepsilon) = (2\pi m A / h^2)$  durum yoğunluğu fonksiyonu kullanılarak, (7.5) ve (7.6)'daki eşitlikler integral formunda sırasıyla

$$\frac{N^{(q)}}{A} = \frac{1}{|\ln q|} \frac{2\pi m}{h^2} \int_0^\infty \left| \ln \left( \frac{|1 - z e^{-\beta \varepsilon}|}{(1 + q z e^{-\beta \varepsilon})} \right) \right| d\varepsilon \quad (7.7)$$

$$\frac{P^{(q)}}{k_B T} = \frac{(1+q)}{|\ln q|} \frac{2\pi m}{h^2} \int_0^\infty \left| \ln |1 - z e^{-\beta \varepsilon}| \right| d\varepsilon \quad (7.8)$$

olur (Yozlaşma faktörü  $g = 1$  kabul edilmiştir). Buradan (7.7) ve (7.8) eşitlikleri

$$\frac{N^{(q)}}{A} = \frac{1}{\lambda^2} f_1(z, q) \quad (7.9)$$

$$\frac{P^{(q)}}{k_B T} = \frac{1}{\lambda^2} f_2(z, q) \quad (7.10)$$

şeklinde,  $q$ -deforme FD fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir (Algin ve Senay, 2016d). Burada,  $\lambda = h/(2\pi mk_B T)^{1/2}$  ısı dalga boyunu göstermektedir. Buradaki  $q$ -deforme FD fonksiyonları ise  $x = \beta\varepsilon$  olmak üzere

$$\begin{aligned} f_n(z, q) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{|\ln q|} \left| \ln \left( \frac{|1 - ze^{-x}|}{|1 + qze^{-x}|} \right) \right| dx \\ &= \frac{1}{|\ln q|} \left[ \sum_{l=1}^\infty (-1)^{(l-1)} \frac{(zq)^l}{l^{n+1}} - \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^{n+1}} \right] \end{aligned} \quad (7.11)$$

ile tanımlıdır (Algin ve Senay, 2016d).

Öte yandan, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon modelinin iki-boyutta iç enerjisi

$$U^{(q)} = - \left( \frac{\partial \ln Z^{(VPJC)}}{\partial \beta} \right)_{z, A} = - \frac{(1+q)}{|\ln q|} \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial \beta} \hat{D}_{y_i}^{(q)} |\ln(1 - zy_i)| \quad (7.12)$$

ile tanımlı olup,  $y_i = e^{-\beta\varepsilon_i}$  dir. (7.11) eşitliğinden yararlanarak modelin iç enerjisi

$$\frac{U^{(q)}}{A} = \frac{1}{\lambda^2} k_B T f_2(z, q) \quad (7.13)$$

şeklinde bulunabilir (Algin ve Senay, 2016d). Modelin iki-boyutlu uzaydaki ısı kapasitesi  $C_A = (\partial U / \partial T)_{A, N}$  termodinamik ilişkisi kullanılarak

$$\frac{C_A^{(q)} \lambda^2}{k_B A} = 2(z \hat{D}_z^{(q)} f_3(z, q)) - \frac{(z \hat{D}_z^{(q)} f_2(z, q))^2}{(z \hat{D}_z^{(q)} f_1(z, q))} \quad (7.14)$$

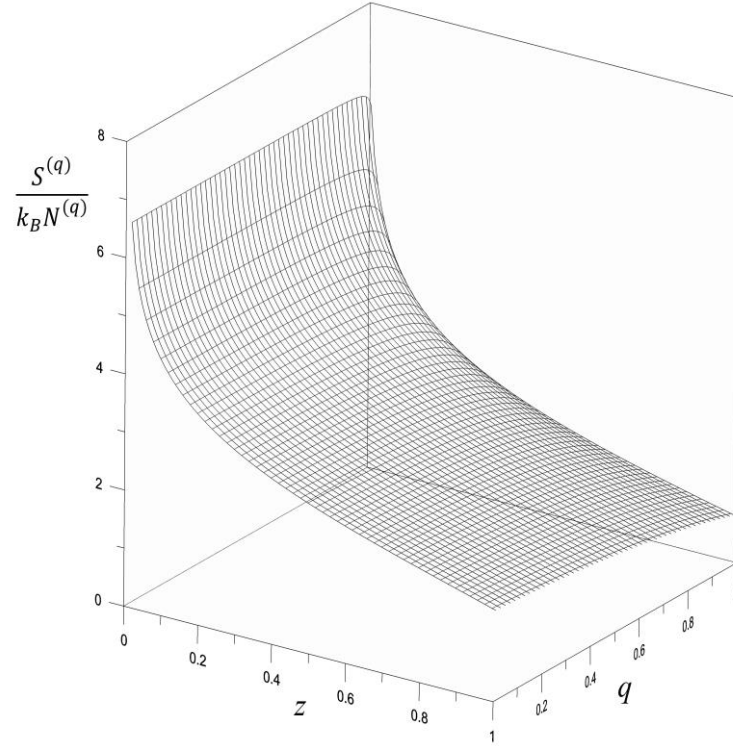
formunda türetilebilir (Algin ve Senay, 2016d). Ayrıca, modelin iki-boyutlu uzaydaki Helmholtz serbest enerjisi  $F = N\mu - PA$  termodinamik ilişkisi yardımıyla

$$F^{(q)} = N^{(q)} k_B T \left[ \ln z - \left( \frac{f_2(z, q)}{f_1(z, q)} \right) \right] \quad (7.15)$$

olur (Algin ve Senay, 2016d). İki-boyutlu uzay hali için modele ait deforme entropi fonksiyonu,  $S = (U - F)/T$  eşitliği göz önüne alındığında

$$\frac{S^{(q)}}{k_B N^{(q)}} = \left[ 2 \left( \frac{f_2(z, q)}{f_1(z, q)} \right) - \ln z \right] \quad (7.16)$$

bulunur (Algin ve Senay, 2016d). Bu deforme entropi fonksiyonun  $z$  ve  $q$ 'ya göre değişimleri Şekil 7.1'de gösterilmiştir (Bu grafiği çizmek için kullanılan Fortran kodu Ek Açıklama-J'de verilmiştir. Ayrıca, grafik çizimi için Grapher 8 çizim programı kullanılmıştır).  $(S^{(q)} / k_B N^{(q)})$  fonksiyonunun, Şekil 4.3'te verilen ideal Fermi gazı entropi fonksiyonu ile kıyaslaması yoluyla bulunan sonuçlar son bölümde ele alınmıştır.



**Şekil 7.1.** İki-boyutlu uzay hali için, deforme entropi fonksiyonunun  $z$  ve  $q$ 'ya göre değişimleri ( $q < 1$ ).

VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon modelinin iki-boyutlu uzay hali için hal denkleminin virial açılımı (7.9)-(7.11) denklemlerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \frac{P^{(q)}A}{N^{(q)}k_B T} &= a_1(q) + a_2(q) \left( \frac{N^{(q)}\lambda^2}{A} \right) + a_3(q) \left( \frac{N^{(q)}\lambda^2}{A} \right)^2 + a_4(q) \left( \frac{N^{(q)}\lambda^2}{A} \right)^3 \\ &+ a_5(q) \left( \frac{N^{(q)}\lambda^2}{A} \right)^4 + \dots \end{aligned} \quad (7.17)$$

formunda türetilebilir. Burada  $a_1(q)$ ,  $a_2(q)$ ,  $a_3(q)$ ,  $a_4(q)$  ve  $a_5(q)$  modelin iki-boyutlu uzayda deforme virial katsayılarını göstermektedir.  $0 < q < 1$  aralığı için elde edilen deforme virial katsayıları

$$a_1(q) = 1 \quad (7.18)$$

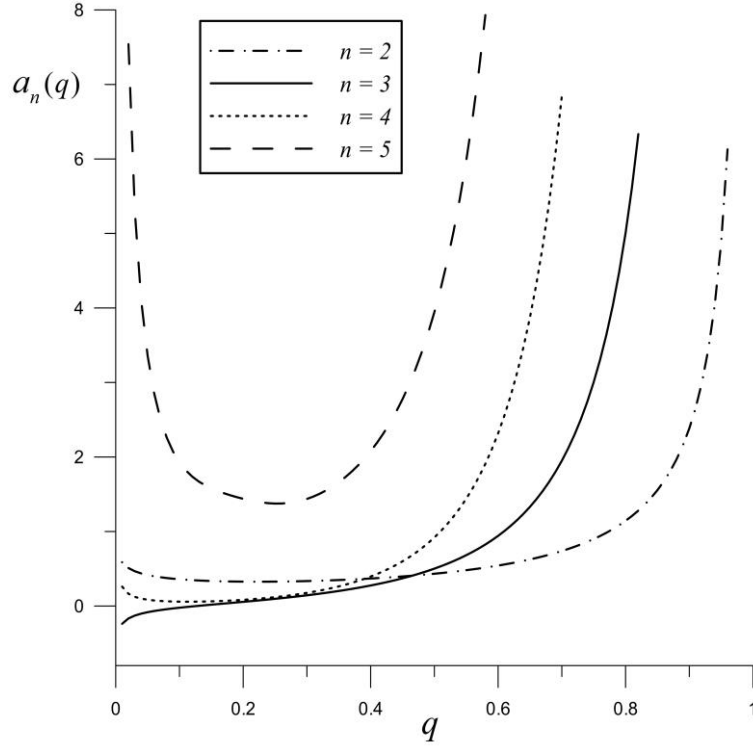
$$a_2(q) = \frac{1}{2^3} \frac{|\ln q|}{(q-1)^2} (q^2 + 1) \quad (7.19)$$

$$a_3(q) = \frac{1}{2^4} \frac{|\ln q|^2}{(q-1)^4} (q^2 + 1)^2 - \frac{2}{3^3} \frac{|\ln q|^2}{(q-1)^3} (q^3 - 1) \quad (7.20)$$

$$a_4(q) = \frac{5}{2^7} \frac{|\ln q|^3}{(q-1)^6} (q^2 + 1)^3 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} \frac{|\ln q|^3}{(q-1)^5} (q^2 + 1)(q^3 - 1) + \frac{3}{2^6} \frac{|\ln q|^3}{(q-1)^4} (q^4 + 1) \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} a_5(q) &= \frac{7}{2^8} \frac{|\ln q|^4}{(q-1)^8} (q^2 + 1)^4 - \frac{1}{12} \frac{|\ln q|^4}{(q-1)^7} (q^2 + 1)^2 (q^3 - 1) + \frac{1}{2^4} \frac{|\ln q|^4}{(q-1)^6} (q^2 + 1)(q^4 + 1) \\ &+ \frac{2}{3^4} \frac{|\ln q|^4}{(q-1)^6} (q^3 - 1)^2 - \frac{4}{5^3} \frac{|\ln q|^4}{(q-1)^5} (q^5 - 1) \end{aligned} \quad (7.22)$$

şeklindedir (Algin ve Senay, 2016d). (7.19)-(7.22) eşitlikleriyle tanımlanan iki-boyutlu uzaydaki deforme virial katsayılarının  $q$ 'ya değişimleri Şekil 7.2'de gösterilmiştir (Bu grafiği çizmek için kullanılan Fortran kodları Ek Açıklama-K'da verilmiştir. Ayrıca, grafik çizimi için Grapher 8 çizim programı kullanılmıştır).



**Şekil 7.2.** İki-boyutlu uzay hali için,  $a_n(q)$  deforme virial katsayılarının deformasyon parametresi  $q$ 'ya göre değişimleri ( $q < 1$ ).

## 7.2. Modelin Düşük Sıcaklıklarda Bazı İstatistiksel Mekanik Özellikleri

İki-boyutlu uzayda, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin düşük sıcaklıklarda bazı istatistiksel mekanik fonksiyonları da incelenebilir (Ashcroft ve Mermin, 1976; Kittel, 1976; Iguchi, 1997; Yan, 2000; Khare, 2005). Buradan hareketle, modelin toplam parçacık sayısı ve iç enerjisi fonksiyonları

$$N^{(q)}(T) = \int_0^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon, T, q) \quad (7.23)$$

$$U^{(q)}(T) = \int_0^{\infty} \varepsilon d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon, T, q) \quad (7.24)$$

eşitlikleriyle tanımlanırlar (Algin ve Senay, 2016d). Burada  $g(\varepsilon) = (2\pi mA/h^2)$  dir ve iki-boyutlu uzaydaki tek-parçacık durum yoğunluğunu göstermektedir (Bolstad, 2009). Ayrıca,  $n(\varepsilon, T, q)$  modelin deforme dağılım fonksiyonu olup, (7.1) eşitliği ile tanımlıdır. Düşük sıcaklıklar limitinde, Sommerfeld açılımı yöntemi yardımıyla VPJC-tipli  $q$ -deforme

fermiyon gazının iki-boyutlu uzaydaki kimyasal potansiyeli (7.23) denkleminde de yararlanarak

$$\mu = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{4\pi N^{(q)}(0)}{A} \right) \equiv \varepsilon_F \quad (7.25)$$

şeklinde bulunur (Algin ve Senay, 2016d). Yine iki-boyutlu uzay hali için modelin iç enerjisi

$$U^{(q)}(T) = \frac{1}{2} N^{(q)}(0) \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{I^{(VPJC)}(q) \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2}{4} \right] \quad (7.26)$$

formundadır (Algin ve Senay, 2016d). Burada

$$I^{(VPJC)}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\ln q|} \left[ \frac{x^2}{(1-e^{-x})} - \frac{x^2}{(1+qe^{-x})} \right] dx \quad (7.27)$$

ile tanımlı olup,  $x = \beta\varepsilon$  'dur. Bu fonksiyon,  $q < 1$  için negatif değerlere sahiptir. İki-boyutlu uzay hali için, düşük sıcaklıklarda modelin ısı kapasitesi

$$C_A^{(q)}(T) = -\frac{1}{4} k_B N^{(q)}(0) I^{(VPJC)}(q) \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right) \quad (7.28)$$

şeklinde elde edilmiştir. Ayrıca, modelin iki-boyutlu uzaydaki basıncı ise

$$P^{(q)}(T) = \frac{N^{(q)}(0) \varepsilon_F}{2A} \left[ 1 - \frac{I^{(VPJC)}(q) \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2}{4} \right] \quad (7.29)$$

şeklinde bulunmuştur. (7.25) ve (7.29) bağıntıları kullanılarak modelin iki-boyutlu uzaydaki Helmholtz serbest enerjisi

$$F^{(q)}(T) = \frac{1}{2} N^{(q)}(0) \varepsilon_F \left[ 1 + \frac{I^{(VPJC)}(q) \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2}{4} \right] \quad (7.30)$$

şeklindedir (Algin ve Senay, 2016d). Modelin deforme entropisi ise, (7.26) ve (7.30) bağıntıları yardımıyla



$$S^{(q)}(T) = -\frac{1}{4} k_B N^{(q)}(0) I^{(VPJC)}(q) \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right) \quad (7.31)$$

formundadır (Algin ve Senay, 2016d).

Buraya kadar iki-boyutlu uzayda VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin hem yüksek hem de düşük sıcaklıklar limitlerinde bazı istatistiksel mekanik özellikleri incelenmiştir. Bundan sonraki kısımda, bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar, ideal Fermi gazı sonuçları ile kıyaslamalı olarak tartışılıp, yorumlanacaktır.

## 8. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında ilk olarak, kuantum özdeş parçacık sistemlerinden biri olan fermiyonların, hem genel bazı kuantum mekaniksel özellikleri hem de (3+1) ve (2+1)-boyutlu uzay-zaman halleri için termodinamik ve istatistiksel özellikleri çalışılmıştır. Çalışmada özel olarak, literatürde VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon modeli olarak bilinen bir sistemin genel bazı kuantum mekaniksel yönleriyle birlikte, düşük sıcaklıklardaki kuantum istatistiksel özelliklerinin de ayrıntılı olarak incelenmesine yoğunlaşmıştır.

Tez çalışmasının üçüncü bölümünde, kuantum özdeş parçacık sistemlerinin hangi durumda simetrik hangi durumda anti-simetrik dalga fonksiyonuna sahip olacakları ele alınmıştır. Buradan, özdeş iki fermiyon parçacığından oluşan bir sistemin sahip olduğu anti-simetrik dalga fonksiyonu incelenmiştir. Ayrıca, Pauli dışarılama ilkesine uyan fermiyonların sağladıkları anti-komütasyon bağıntıları üzerinde durulmuştur.

Tez çalışmasının dördüncü bölümünde, ideal Fermi gazının hem üç hem de iki-boyuttaki bazı istatistiksel mekanik özellikleri ele alınmıştır. Burada, standart FD fonksiyonları elde edilerek, yüksek sıcaklıklar limitinde sisteme ait iç enerji, entropi ve ısı kapasitesi gibi termodinamik fonksiyonlar incelenmiştir. İncelenen bu fonksiyonların düşük sıcaklıklardaki davranışları, Sommerfeld açılımı yöntemi kullanılarak her biri ayrı ayrı çalışılmıştır. Ayrıca, ideal Fermi gazının FD dağılım fonksiyonunun farklı sıcaklık değerleri için  $(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimleri de incelenmiştir.

Tez çalışmasının beşinci bölümünde ise VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin bazı kuantum mekaniksel özellikleri ele alınmıştır. Modelin istatistiksel mekanik fonksiyonlarını hesaplayabilmek için fermiyonik JD operatörü ( $\hat{D}_x^{(q)}$ ) incelenmiş ve bazı matematiksel fonksiyonlar üzerine etkisi araştırılmıştır (Eşitlik (5.5)-(5.11)).

Bu çalışmanın ilk özgün kısmını oluşturan altıncı bölümde ise VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin üç-boyutta düşük sıcaklıklardaki bazı istatistiksel mekanik özellikleri incelenmiştir. Modelin deforme fermiyonik dağılım fonksiyonu (6.1) eşitliği ile

verilmiştir. Bu deforme fermiyonik dağılım fonksiyonunun farklı sıcaklıklarda,  $0 < q < 1$  aralığındaki farklı  $q$  değerleri için  $(\varepsilon_i - \mu)$ 'ye göre değişimleri Şekil 6.1, 6.2'de gösterilmiştir. Burada deforme fermiyonik dağılım fonksiyonu, hem  $(\varepsilon_i - \mu)$  hem de sıcaklık sabit iken,  $q$  parametresi arttıkça artmaktadır. Ayrıca deformasyon parametresi  $q$  sabit iken,  $(\varepsilon_i > \mu)$  bölgesinde deforme fermiyonik dağılım fonksiyonu sıcaklık arttıkça artmaktadır. Öte yandan yine aynı bölgede  $(\varepsilon_i - \mu)$  sabit iken,  $n_{i,q}$  fonksiyonu her  $q$  değeri için ideal FD dağılım fonksiyonundan genellikle büyük değerler almaktadır.

Düşük sıcaklıklarda, Sommerfeld açılımı yöntemi kullanılarak, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin toplam parçacık sayısı ifadesi (6.4) eşitliğindeki gibi bulunmuştur. Modelin düşük sıcaklıklardaki deforme kimyasal potansiyeli ve deforme iç enerjisi sırasıyla (6.6) ve (6.7) eşitlikleri ile verilmiştir. Deforme kimyasal potansiyelin  $0 < q < 1$  aralığında farklı  $q$  değerleri için  $(k_B T / \varepsilon_F)$ 'ye göre değişimi Şekil 6.3'de gösterilmiştir. Deforme kimyasal potansiyel, deformasyon parametresi sabit olduğunda,  $(k_B T / \varepsilon_F)$  arttıkça azalmaktadır. Eğer,  $(k_B T / \varepsilon_F)$  değeri sabit ise bu kez deformasyon parametresi arttıkça artmaktadır. Ayrıca,  $(k_B T / \varepsilon_F)$ 'nin sabit değerlerinde, her  $q$  değeri için deforme kimyasal potansiyel, ideal Fermi gazının kimyasal potansiyelinden daha küçük değerler almaktadır.

VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon modelinin düşük sıcaklıklardaki deforme ısı kapasitesi (6.8) eşitliğindeki gibi bulunmuştur. Bu deforme ısı kapasitesinin farklı  $q$  değerleri için  $(k_B T / \varepsilon_F)$ 'ye göre değişimi Şekil 6.4'de verilmiştir. Deforme ısı kapasitesi, deformasyon parametresi sabit iken  $(k_B T / \varepsilon_F)$  değerleri arttıkça artmaktadır. Sabit  $(k_B T / \varepsilon_F)$  değerlerinde ise deformasyon parametresi arttıkça, deforme ısı kapasitesi azalmaktadır. Ayrıca her  $q$  değerinde, deforme ısı kapasitesi, ideal Fermi gazının ısı kapasitesinden daha büyük değerler almaktadır.

VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin fiziksel bir uygulaması olarak, (6.8) eşitliğindeki modelin deforme ısı kapasitesi, Nb, Fe ve Pb metallerinin elektronik ısı kapasiteleri çalışmalarına uygulanmıştır. Bu üç metal için deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa ve farklı  $q$  değerlerine bağlı değişimleri sırasıyla Şekil 6.5, 6.6, 6.7'de gösterilmiştir. Her üç

şekilde de deformasyon parametresinin sabit değerleri için sıcaklık arttıkça, deforme ısı kapasitesi değerleri artmaktadır. Öte yandan, düşük sıcaklıklarda Nb, Fe ve Pb metalleri için elde edilen  $q$ -deforme Sommerfeld parametreleri Çizelge 6.1'de gösterilmiştir. Bu çizelgeden görüldüğü gibi, söz konusu metallerin deneysel Sommerfeld parametreleri sonuçları serbest-elektron teorisi sonuçları ile uyuşmamaktadır. Bu tutarsızlık, doğrudan serbest-elektron teorisinin yetersizliklerinden kaynaklanmaktadır (Ashcroft, 1976; Kittel, 1976). Bu nedenle, serbest-elektron teorisi bu üç metalin Sommerfeld parametresi özelinde iyi sonuç verememektedir. VPJC-fermiyon gaz modeli özelliklerinin Nb, Fe ve Pb metallerine uygulanmasıyla elde edilen  $q$ -deforme Sommerfeld parametreleri, deneysel olarak elde edilen değerlerle birebir uyuşmaktadır. Bu sebeple, bu üç metalin elektronik ısı kapasitesi fonksiyonlarının incelenmesinde VPJC-fermiyon gaz modelinin serbest-elektron teorisinden daha iyi sonuçlar vereceği ortaya çıkmaktadır (Algin ve Senay, 2016a).

Yedinci bölüm ise, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin iki-boyutlu uzaydaki genel bazı istatistiksel mekanik özelliklerinin incelenmesini içeren tez çalışmasının bir başka özgün kısmını oluşturmaktadır. Modelin iki-boyutlu uzay hali için toplam parçacık sayısı ve hal denklemi,  $q$ -deforme FD fonksiyonlarına bağlı olarak sırasıyla eşitlik (7.9) ve (7.10)'da türetilmiştir. Yüksek sıcaklıklarda modele ait deforme iç enerji, deforme ısı kapasitesi ve deforme entropi gibi diğer termodinamik fonksiyonlar da yine burada elde edilmiştir.

Deforme entropi fonksiyonunun  $z$  ve  $q$ 'ya göre değişimleri Şekil 7.1'de gösterilmiştir. Burada  $(S^{(q)} / k_B N^{(q)})$  ile verilen deforme entropi fonksiyonu sabit  $z$  değerlerinde, deformasyon parametresi arttıkça azalmaktadır. Ayrıca,  $z$ 'nin sabit değerlerinde her  $q$  değeri için deforme entropi fonksiyonu ideal Fermi gazının entropi fonksiyonundan daha küçük değerler almaktadır. Şu da belirtilmelidir ki  $(S^{(q)} / k_B N^{(q)})$  fonksiyonu  $q \rightarrow 1$  limitinde ideal Fermi gazının entropi fonksiyonuna indirgenmektedir.

Yüksek sıcaklıklarda, iki-boyutlu uzay hali için hal denkleminin virial açılımı yapılmıştır. Buradan elde edilen deforme virial katsayıları (7.19)-(7.22) bağıntılarıyla verilmiştir. Bu deforme virial katsayılarının  $0 < q < 1$  aralığında  $q$ 'ya göre değişimleri Şekil 7.2'de gösterilmiştir. Burada  $q$ 'nun tüm değerlerinde  $a_2(q)$ ,  $a_4(q)$  ve  $a_5(q)$  deforme virial

katsayıları pozitif değerler alırken,  $a_3(q)$  katsayısı aynı aralıkta hem pozitif hem de negatif değerler alabilmektedir. Ayrıca  $a_3(q)$  deforme virial katsayısı  $q=0.1632$  değerinde, ideal Fermi gazının karşılık gelen virial katsayısı olan  $a_3(\text{ideal})=0.0278$  (Khare, 2005) değerine ulaşmaktadır (Algin ve Senay, 2016d).

## 9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonuç olarak bu tez çalışmasında; deforme bir Fermi sistemini oluşturan VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin düşük sıcaklıklardaki üç-boyutlu uzayda istatistiksel mekanik yönleri üzerine elde edilen sonuçlar, fiziğin çeşitli alanlarında olduğu kadar kuantum analizinde de yeni uygulama alanları doğurabilecek niteliktedir. Yukarıdaki bölümlerde ortaya konan deforme kuantum istatistiksel sonuçların, kuramsal ve deneysel uygulamalarda bir model olarak kullanılabilmesi öngörülmektedir. Bunun ilk göstergesi de (Algin ve Senay, 2016a) makalesinde ortaya konan deforme istatistiksel mekanik sonuçların yoğun madde sistemlerinin özelliklerinden biri olan metallerin elektronik ısı kapasitelerine uygulamasıdır. Ortaya konan VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon modelinin oluşturduğu fermiyonik deformasyon ile hem sıcaklık parametresi ( $T$ ) hem de parçacıkların ısıl etkin kütleleri arasında önemli ilişkiler bulunmuştur (Algin ve Senay, 2016a, 2016d). Bunlar, hem bu tez çalışmasının özgün yönlerini hem de bu alandaki literatüre katkılarını göstermektedir.

Son olarak, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin diğer muhtemel uygulama alanlarının neler olabileceğinden bahsedilebilir. Bu uygulama alanlarından ilki, evrenimizin neredeyse her yerinde karşımıza çıkan ve gerçek bir fermiyon sistemi örneğini oluşturan nötrino gazlarıdır. Hafif bir nötr parçacık olan nötrinonun varlığı, Beta bozunmasında sürekli enerji spektrumunun gözlenmesinden dolayı enerji, momentum ve açısal momentum korunum yasalarını koruyabilmek için Pauli tarafından ortaya atılmıştır (Kamal, 2014). Parçacık fiziğinin standart modelinde lepton ailesi içerisinde kendilerine yer bulan nötrinolar,  $1/2$  ( $\hbar$ ) spine sahiptirler ve elektron tipi nötrino ( $\nu_e$ ), müon tipi nötrino ( $\nu_\mu$ ), tau tipi nötrino ( $\nu_\tau$ ) olmak üzere üç farklı tiptedirler (Griffiths, 2008). Bir nötrinonun durgun kütlesi, bir elektronun durgun kütesinden bir milyar kez daha küçüktür (Hui vd., 2009). Böyle fermiyon sistemleri  $k_B T \ll mc^2$  koşuluna uymazlar. Yani, düşük kütleli parçacıkların kinetik enerjileri ile durgun enerjileri kıyaslanabilir ve bu nedenle rölativistik etkiler göz önüne alınmalıdır (Hui vd., 2009). Böylelikle, küçük kütleli parçacıklardan olan nötrinoların oluşturduğu gazlar için istatistiksel mekanik özellikler incelenebilir. Bu bağlamda literatürde, başka bir  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin, nötrinoların oluşturduğu bir gazın bazı istatistiksel mekanik özelliklerinin çalışılması için kullanıldığı görülmüştür

(Hui vd., 2009; Hui vd., 2010). Bu çalışmalardan esinlenerek, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinden elde edilen sonuçların da, nötrino gazlarının diğer istatistiksel mekanik özelliklerinin incelenmesinde kullanılabileceği öngörülmektedir. Hatta, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modeli kullanılarak elde edilecek sonuçların, (Hui vd., 2009; Hui vd., 2010) çalışmalarında elde edilen sonuçlarla kıyaslaması yapılarak, hangi deforme fermiyon sisteminden elde edilen sonuçların deneysel verilere daha yakın olacağı mukayese edilebilir.

İkinci uygulama alanı olarak da manyetik duyarlılık çalışmaları gösterilebilir. 1927 yılında Pauli, alkali metallerdeki iletim elektronlarının oldukça yozlaşmış bir Fermi gazı olarak düşünülebileceğini önermiştir (Pathria ve Beale, 2011). Bu öneri kendisine, metallerin paramanyetizmasının neden sıcaklıktan bağımsız bir karaktere sahip olabileceği konusunu açıklama fırsatı sunmuştur. Bu nedenle, bu olay Pauli paramanyetizması olarak adlandırılır (Pathria ve Beale, 2011). Genel olarak, bir Fermi gazındaki toplam manyetik duyarlılık ise, hem Pauli paramanyetizmasından hem de Landau diyamanyetizmasından gelen katkıların toplamı kadardır. Dolayısıyla, VPJC-fermion gaz modelinin istatistiksel mekanik özellikleri de manyetik duyarlılık için hem paramanyetik hem de diyamanyetik katkıların çalışılmasında uygulanabilir.

Öte yandan, manyetik alanda hareket eden bir parçacığın serbest-elektron teorisi yardımıyla manyetik duyarlılık hesapları incelenmiştir (Pathria ve Beale, 2011). Ancak, manyetik olmayan bazı metaller için serbest-elektron teorisinden elde edilen manyetik duyarlılık değerleri ile deneysel olarak elde edilen değerler arasında bir tutarlılık gözlenememiştir (Mizutani, 2001). Örneğin, Altın (Au) için serbest-elektron teorisi yoluyla elde edilen manyetik duyarlılık değeri  $5.85 \times 10^{-6} (mol^{-1})$  iken, deneysel olarak elde edilen değer  $-27.9 \times 10^{-6} (mol^{-1})$  şeklindedir. Bu tutarsızlık ise doğrudan serbest-elektron teorisinin yetersizliklerinden kaynaklanmaktadır. Buradan hareketle, VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin teorik olarak istatistiksel mekanik özelliklerinin manyetik duyarlılık çalışmalarına uygulanmasıyla elde edilecek sonuçların deneysel sonuçlar ile daha uyumlu olabileceği öngörülmektedir.

VPJC-fermion gaz modelinin başka bir muhtemel uygulama alanı olarak ise karmaşıklık üzerine yapılan çalışmalar verilebilir. Bu bağlamda 1995 yılında Lopez-Ruiz

vd. tarafından yapılan çalışmaya göre karmaşıklığın istatistiksel ölçüsü, sistemde depolanan bilgi veya entropiyi tanımlar (Lopez-Ruiz vd., 1995). Literatürde, Fermi sistemlerinin karmaşıklık üzerine istatistiksel analizleri incelenmiştir. Buna bir örnek, Moustakidis vd. tarafından 2010 yılında yapılan çalışma verilebilir (Moustakidis vd., 2010). Burada, ideal Fermi gazının FD dağılım fonksiyonu ve kimyasal potansiyeli kullanılarak karmaşıklık bağlamında ısı etkileri araştırılmıştır. Beşinci bölümde detayları incelenen VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin deforme fermiyonik istatistiksel dağılım fonksiyonu ve deforme kimyasal potansiyeli kullanılarak, deformasyon parametresi  $q$ 'nun, örneğin elektron gazındaki karmaşıklık analizi çalışmalarında karşılaşılan ısı etkileri ilişkilendirilebileceği düşünülmektedir. Bu da modelin ortaya koyduğu gelecekte çalışılabilecek problemlerden biridir.

Sonuç olarak, bu tez çalışmasında ortaya konan VPJC-fermion gaz modelinin tüm istatistiksel mekanik özellikleri hem yukarıda bahsedilen muhtemel uygulama alanlarına hem de parçacık fizikinden yoğun madde fizikine kadar pek çok alanda uygulama bulabileceği değerlendirilmektedir.



## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Algin, A., 2011, A comparative study on  $q$ -deformed fermion oscillators, *International Journal of Theoretical Physics*, 50, 1554-1568.
- Algin, A., Senay, M., 2012, High-temperature behavior of a deformed Fermi gas obeying interpolating statistics, *Physical Review E*, 85, 041123-1-041123-10.
- Algin, A., Senay, M., 2016a, Fermionic  $q$ -deformation and its connection to thermal effective mass of a quasiparticle, *Physica A*, 447, 232-246.
- Algin, A., Senay, M., 2016b, Low-temperature thermostistical properties of the VPJC-type deformed fermion gas model, *International Conference on Quantum Science and Applications ( ICQSA-2016) (Sözlü Bildiri)*, 25-27 Mayıs, Eskişehir.
- Algin, A., Senay, M., 2016c, Some thermostistical properties of a deformed fermion gas, *3<sup>rd</sup> International Conference on Computational and Experimental Science and Engineering (ICCESEN-2016) (Sözlü Bildiri)*, 19-24 Ekim, Antalya.
- Algin, A., Senay, M., 2016d, General thermostistical properties of a  $q$ -deformed fermion gas in two dimensions, *Journal of Physics: Conference Series*, 766, 012008-1-0012008-6.
- Apaydın, F., 2004a, *Kuantum Fiziği*, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara, s. 351-357.
- Apaydın, F., 2004b, *İstatistik Fizik*, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara, s. 430.
- Aral, A., Gupta, V., Agorwal, R. P., 2013, *Applications of  $q$ -Calculus in Operator Theory*, Springer, New York, p. 3-5.
- Arik, M. and Coon, D.D., 1976, Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states, *Journal of Mathematical Physics*, 17, 524-527.
- Arslan, E., 2009, *Q-deforme fermiyonik Newton osilatörlerinin istatistik mekaniksel özellikleri*, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Ashcroft, N. W., Mermin, N. D., 1976, *Solid State Physics*, Saunders College Publishing, New York, p. 42-49.
- Biedenharn, L.C., 1989, The quantum group  $SU_q(2)$  and a  $q$ -analogue of the boson operators, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22, L873-L878.
- Bolstad, J., 2009, *Intermediate statistics in two-dimensional quantum gases*, Master Thesis, University of Oslo, Department of Physics, Oslo.
- Bradly, C.J., Mulkerin, C., Martin, A.M., Quiney, H.M., 2014, Coupled-pair approach for strongly interacting trapped fermionic atoms, *Physical Review A*, 90, 023626-1-023626-7.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Cai, S.K., Su, G.Z., Chen, J.C., 2010, General thermostistical properties of a  $q$ -deformed Fermi gas trapped in a power-law potential, *International Journal of Modern Physics B*, 24, 3323-3330.
- Capri, A.Z., 2002, *Nonrelativistic Quantum Mechanics*, World Scientific, Singapore, p. 452.
- Chaichian, M., Felipe, R.G., Montonen, C., 1993, Statistics of  $q$ -oscillators, quons, and relations to fractional statistics, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26, 4017-4034.
- Clark, W.J., Khodel, V.A., Zverev, M.V., 2005, Anomalous low-temperature behavior of strongly correlated Fermi systems, *Physical Review B*, 71, 012401-1-012401-4.
- Dereli, T., Verçin, A., 2009, *Kuantum Mekaniği: Temel Kavramlar ve Uygulamaları*, METU Yayınları, Ankara, s. 272-278.
- Gavrilik, A.M., Kachurik, I.I., Mishchenko, Yu.A., 2011, Quasibosons composed of two  $q$ -fermions: realization by deformed oscillators, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44, 475303-1-475303-23.
- Geissler, E., 2000, *Statistical Thermodynamics and Properties of Matter*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, p. 41.
- Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H., 1994, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Springer Verlag, New York, p. 341-349.
- Greiner, W., 2001, *Quantum Mechanics: An Introduction*, Springer Verlag, New York, p. 404.
- Griffiths, D., 2008, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley and Sons, New York, p. 30.
- Huang, K., 1987, *Statistical Mechanics (Second Edition)*, John Wiley and Sons, New York, p. 185-189, 241-247.
- Hui, L., Fu-Dian, M., Mao-Lian, Z., Yu-Lian, W., 2009, Thermostatic properties of a relativistic  $q$ -deformed ideal Fermi gas at low temperatures, *Journal of Sichuan University*, 46, 1391-1398.
- Hui, L., FuDian, M., Yong, L., Banggui, G., Maolian, Z., 2010, Thermostatic properties of the relativistic  $q$ -deformed ideal Fermi gas at high temperature, *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, 15, 57-63.
- Hutchings, M., O'driscoll, I., Smowton, P.M., Blood, P., 2014, Fermi-Dirac and random carrier distributions in quantum dot lasers, *Applied Physics Letters*, 104, 031103-1-031103-4.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Iguchi, K., 1997, Generalized Sommerfeld theory: Specific heat of a degenerate  $g$ -on gas in any dimensions and the generalized Riemann zeta function, *International Journal of Modern Physics B*, 11, 3551-3580.
- Jackson, F.H., 1909,  $q$ -form of Taylor's theorem, *Messenger of Mathematics*, 38, 62-64.
- Jing, S., Xu, J.J., 1991, Comment on the  $q$ -deformed fermionic oscillator, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 24, L891-L894.
- Kac, V., Cheung, P., 2001, *Quantum Calculus*, Springer, New York, p. 2, 3.
- Kamal, A., 2014, *Particle Physics*, Springer Verlag, New York, p. 177.
- Karaoğlu, B., 2009, *İstatistik Mekaniğe Giriş*, Seçkin Yayıncılık, Ankara, s. 127-136.
- Karaoğlu, B., 2008, *Kuantum Mekaniğine Giriş*, Seçkin Yayıncılık, Ankara, s. 79, 237-239.
- Keesom, W. H., Kurrelmeyer, B., 1939, The atomic heat of Iron from 1.1 to 20.4 K, *Physica*, 6, 633-647.
- Khare, A., 2005, *Fractional Statistics and Quantum Theory (Second Edition)*, World Scientific, New Jersey, p. 104-109.
- Kim, J.G., Lee, E.K., Lee, S., 1995, Temperature-dependent behavior of free-electron susceptibility, *Physical Review Letters*, 75, 2019-2022.
- Kittel, C., 1976, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley and Sons, New York, p. 239-256.
- Kremp, D., Kraeft, W.D., Fennel, W., 1972, Degenerate electron gas at finite temperatures, *Physica*, 62, 462-473.
- Kuentzler, R., 1984, Effect of plastic deformation of V, Nb And Ta on the superconducting transition temperature and the specific heat coefficients, *Physics Letters*, 104A, 221-224.
- Lavagno, A., Narayana Swamy, P., 2002, Generalized thermodynamics of  $q$ -deformed bosons and fermions, *Physical Review E*, 65, 036101-036105.
- Lavagno, A., Narayana Swamy, P., 2010, Thermostatistics of deformed bosons and fermions, *Foundations of Physics*, 40, 814-828.
- Le Bellac, M., Mortessagne, F., Batrouni, G., 2004, *Equilibrium and Non-equilibrium Statistical Thermodynamics*, Cambridge University Press, New York, p. 268.
- Lopez-Ruiz, R., Mancini, H.L., Calbet, X., 1995, A statistical measure of complexity, *Physics Letters A*, 209, 321-326.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Macfarlane, A.J., 1989, On  $q$ -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group  $SU(2)_q$ , *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22, 4581-4588.
- Magner, A.G., Fedotkin, S.N., Ivanyuk, F.A., Meier, P., Brack, M., 1998, Shells and periodic orbits in fermion systems, *Czechoslovak Journal of Physics*, 48, 845-852.
- Manoukian, E.B., 2006, *Quantum Theory: A Wide Spectrum*, Springer, Netherland, p. 343.
- Marklund, K., Hoel, L., Spahr, K., Lindqvist, T., 1971, Electronic and Magnon specific heat of Iron-based Tungsten Alloys, *Journal of Low Temperature Physics*, 5, 227-236.
- Merzbacher, E., 1998, *Quantum Mechanics*, John Wiley and Sons, New York, p. 542, 543.
- Mizutani, U., 2001, *Introduction to The Electron Theory of Metals*, Cambridge University Press, Cambridge, p. 50.
- Moustakidis, Ch.C., Psonis, V.P., Chatzisavvas, K. Ch., Panos, C.P., Massen, S.E., 2010, Statistical measure of complexity and correlated behavior of Fermi system, *Physical Review E*, 81, 011104-1-011104-11.
- Narayana Swamy, P., 2006a, Interpolating statistics and  $q$ -deformed oscillator algebras, *International Journal of Modern Physics B*, 20, 697-713.
- Narayana Swamy, P., 2006b,  $q$ -Deformed fermions: Algebra, Fock space and thermodynamics, *International Journal of Modern Physics B*, 20, 2537-2550.
- Narayana Swamy, P., 2006c,  $q$ -Deformed fermions, *European Physical Journal B*, 50, 291-294.
- Nolting, W., 2009, *Fundamentals of Many-body Physics: Principles and Methods*, Springer Verlag, Berlin, p. 19.
- Pathria, R.K., Beale, P.D, 2011, *Statistical Mechanics (Third Edition)*, Betterworth Heinemann, New York, p. 148-238.
- Pruschke, T., 2012, Landau's Fermi liquid concept to the extreme: The physics of heavy fermions, *AIP Conference Proceedings*, 1485, p. 78-134.
- Rae, A.I.M., 1993, *Quantum Mechanics*, IOP Publishing, London, p. 205, 206.
- Schwabl, F, 2006, *Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, p. 168-185.
- Shankar, R., 1994, *Principles of Quantum Mechanics*, Plenum Press, New York, p. 640.
- Sinha, S.K., 2009, *Introduction to Statistical Mechanics*, Narosa Publishing House, New Delhi, p. 162-171.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Song, H., Ding, S., An, I., 1993, Statistical mechanical properties of the  $q$ -oscillator system, *Journal and Physics A: Mathematical and General*, 26, 5197-5205.
- Şenay, M., 2012, Deforme bir Fermi gazı modelinin yüksek sıcaklıklarda termo-istatistiksel özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Tagliati, S., Krasnov, V. M., Rydh, A., 2012, Differential membrane-based nanocalorimeter for high-resolution measurements of low-temperature specific heat, *Review of Scientific Instruments*, 83, 055107-1-055107-1-11.
- Topçu, G., 2015, Özel bir  $q$ -deforme fermiyonik kuantum gaz modelinin matematiksel ve termo-istatistiksel özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Tritt, M.T., 2004, *Physics of Solids and Liquids, Thermal Conductivity, Theory, Properties, and Applications*, Kluwer Academic, New York, p. 29-32.
- Tristant, D., Brito, F.A., 2014, Some electronic properties of metals through  $q$ -deformed algebras, *Physica A*, 407, 276-286.
- Tuszynski, J.A., Rubin, J.L., Meyer, J., Kibler, J., 1993, Statistical mechanics of a  $q$ -deformed boson gas, *Physics Letters A*, 175, 173-177.
- Ubricco, M.R., 1997, Anyonic behavior of quantum group gases, *Physical Review E*, 55, 291-296.
- Van Der Hoeven, Jr., B.J.C. and Keesom, P.H., 1964, Specific heat of Niobium between 0.4 and 4.2 K, *Physical Review*, 134, A1320, A1321.
- Van Der Hoeven, Jr., B.J.C. and Keesom, P.H., 1965, Specific heat of Lead and Lead alloys between 0.4 and 4.2 K, *Physical Review*, 137, A103-A107.
- Viswanathan, K.S., Parthasarathy, R., Jagannathan, R., 1992, Generalized  $q$ -fermion oscillators and  $q$ -coherent states, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 25, L335-L339.
- Wang, Q.A., 2003, Correlated electrons and generalized statistics, *European Physical Journal B*, 31, 75-79.
- Williams, W.S.C., 2014, Nükleer ve Parçacık Fiziği, (Çev. I. Dumanoğlu, S. Ertürk), Nobel Yayınevi, Ankara, s. 14, 15.
- Yan, Z., 2000, General thermal wavelength and its applications, *European Physical Journal*, 21, 625-631.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

Yardımcı, T., 2005, *q*-Analiz, Yüksek Lisans Tezi, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Zettili, N., 2009, Quantum Mechanics, John Wiley and Sons, New York, p. 1-3.

**EK AÇIKLAMALAR**

**Ek Açıklama–A: İdeal Fermi gazının FD dağılım fonksiyonunun farklı sıcaklık değerleri ve  $(\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimini veren Fortran kodu.**

Program “ideal dağılım fonksiyonu”

```
double precision ::f,x,T
```

```
open (8,FILE='idealdagilim.txt')
```

```
T=300 (veya istenirse T=50 ve T=100 değerleri aynı programa uygulanabilir.)
```

```
do x=-0.1,0.1,0.001
```

```
f=1./(exp((1.1594*(10**4)*(x))/(T))+1)
```

```
write(8,10)x,f
```

```
end do
```

```
close (8)
```

```
10 Format(F8.3,F18.10)
```

```
end
```

**EK AÇIKLAMALAR**

**Ek Açıklama–B: İki-boyutlu uzayda ideal Fermi gazı entropisinin  $z$ 'ye göre değişimini veren Fortran kodu.**

Program “ideal entropi fonksiyonu”

```
double precision ::z,A,B,h
open (8,FILE='idealentropi.txt')
do z=0.01,1,0.01
A=0
B=0
do l=1,9
A=A+((-1)**(l-1))*((z**l)/(l**2))
B=B+((-1)**(l-1))*((z**l)/(l**1))
h=((2*A)/B)-log(z)
end do
write(8,10)z,h
end do
close (8)
10 Format(F8.2,F18.10)
end
```



## EK AÇIKLAMALAR

**Ek Açıklama–C: T = 300 K için, deforme FD dağılım fonksiyonunun  $x = (\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimini veren Fortran kodu.**

Program “Deforme dagilim fonksiyonu”

```
double precision ::f,q,x,A,B
open (8,FILE='deformedagilim_T=300_q=0.8.txt')
q=0.8 (veya istenirse q=0.3 ve q=0.1 değerleri aynı programa uygulanabilir.)
Do x=-0.1,0.1,0.0001
if (x==0) Then
write (8,10) x
else
A=(abs((exp(0.386*x*(10**2)))-1))
B=(((exp(0.386*x*(10**2)))+q))
f=(1./(abs(log(q)))*(abs(log(A/B))))
write(8,10)x,f
end if
end do
close (8)
10 Format(F16.6,F18.10)
end
```

---

Program “Ideal dagilim fonksiyonu”

```
double precision ::f,x,T
open (8,FILE='idealdagilim_T=300.txt')
do x=-0.1,0.1,0.001
f=1./(exp(0.386*(10**2)*(x))+1)
write(8,10)x,f
end do
close (8)
10 Format(F8.3,F18.10)
end
```

## EK AÇIKLAMALAR

**Ek Açıklama–D: T = 50 K için, deforme FD dağılım fonksiyonunun  $x = (\varepsilon - \mu)$ 'ye göre değişimini veren Fortran kodu.**

Program “Deforme dagilim fonksiyonu”

```
double precision ::f,q,x,A,B
open (8,FILE='deformedagilim_T=50_q=0.8.txt')
q=0.8 (veya istenirse q=0.3 ve q=0.1 değerleri aynı programa uygulanabilir.)
Do x=-0.1,0.1,0.0001
if (x==0) Then
write (8,10) x
else
A=(abs((exp(2.3188*x*(10**2)))-1))
B=(((exp(2.3188*x*(10**2)))+q))
f=(1./(abs(log(q)))*(abs(log(A/B))))
write(8,10)x,f
end if
end do
close (8)
10 Format(F16.6,F60.30)
end
```

---

Program “İdeal dagilim fonksiyonu”

```
double precision ::f,x,T
open (8,FILE='idealdagilim_T=50.txt')
do x=-0.1,0.1,0.001
f=1./(exp(2.3188*(10**2)*(x))+1)
write(8,10)x,f
end do
close (8)
10 Format(F8.3,F18.10)
end
```

## EK AÇIKLAMALAR

**Ek Açıklama–E: VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin deforme kimyasal potansiyelinin ( $k_B T/\varepsilon_F$ )’ye göre değişimini veren Fortran kodu ( $q < 1$ ).**

Program “Deforme kimyasal potansiyelin ( $kT/\varepsilon_F$ )’ ye göre değişimi”

```
double precision ::A,q,y,x
open (8,FILE='VPJC_kimyasalpotansiyel_q=0.9.txt')
q=0.9 (veya istenirse q=0.8 ve q=0.4 değerleri aynı programa uygulanabilir.)
Do y=0.01,1.50,0.01
A=0
Do k=1,63
A=A+(4./log(q))*(1./(k**3))*(1-((-1/q)**k))
end do
x=1+A*((y/2)**2)
write(8,10)y,x
end do
close (8)
10 Format(F6.3,F40.10)
end
```

---

Program “İdeal kimyasal potansiyel”

```
double precision ::y,x
integer ::l
open (8,FILE='idealkimyasalpotansiyel.txt')
Do y=0,001.500,0.001
x = 1 - (((22./7.)**2)/12.)*(y**2)
write(8,10) y,x
End Do
close (8)
10 Format(F6.3,F14.6)
end
```

## EK AÇIKLAMALAR

**Ek Açıklama-F: VPJC-tipli  $q$ -deforme fermiyon gaz modelinin deforme ısı kapasitesinin ( $k_B T/\varepsilon_F$ )'ye göre değişimini veren Fortran kodu ( $q < 1$ ).**

Program “Deforme ısı kapasitesinin ( $kT/\varepsilon_F$ )’ ye göre değişimi”

```
double precision ::A,q,y,x
open (8,FILE='VPJC_ozisi_q=0.9.txt')
q=0.9 (veya istenirse q=0.8 ve q=0.4 değerleri aynı programa uygulanabilir.)
Do y=0,2.00,0.01
A=0
Do k=1,15
A=A+(4./log(q))*(1./(k**3))*(1-((-1/q)**k))
end do
x=(-3./2.)*A*y
write(8,10)y,x
end do
close (8)
10 Format(F6.3,F40.10)
end
```

---

Program “İdeal ısı kapasitesi”

```
double precision ::f,y
open (8,FILE='ozisi_q=1.txt')
Do y=0,2,0.001
f = (((22./7.）**2)/2.)*y
write(8,10) y,f
End Do
close (8)
10 Format(F6.2,F14.6)
end
```

**EK AÇIKLAMALAR**

**Ek Açıklama–G: Nb metalinin deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimini veren Fortran kodu.**

Program “Nb metalinin deforme ısı kapasitesi”

```
double precision ::A,q,T,x
```

```
open (8,FILE='VPJC_niobyum_q=0.9.txt')
```

```
q=0.9 (veya istenirse q=0.8 ve q=0.4 değerleri aynı programa uygulanabilir.)
```

```
Do T=0,4,0.01
```

```
A=0
```

```
Do k=1,19
```

```
A=A+(4./log(q))*(1./(k**3))*(1-((-1/q)**k))
```

```
end do
```

```
x=(-0.202*A)*T
```

```
write(8,10)T,x
```

```
end do
```

```
close (8)
```

```
10 Format(F6.3,F40.10)
```

```
end
```

**EK AÇIKLAMALAR**

**Ek Açıklama–H: Fe metalinin deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimini veren Fortran kodu.**

Program “Fe metalinin deforme ısı kapasitesi”

```
double precision ::A,q,T,x
```

```
open (8,FILE='VPJC_demir_q=0.9.txt')
```

```
q=0.9 (veya istenirse q=0.8 ve q=0.4 değerleri aynı programa uygulanabilir.)
```

```
Do T=0,4,0.01
```

```
A=0
```

```
Do k=1,19
```

```
A=A+(4./log(q))*(1./(k**3))*(1-((-1/q)**k))
```

```
end do
```

```
x=(-0.0968*A)*T
```

```
write(8,10)T,x
```

```
end do
```

```
close (8)
```

```
10 Format(F6.3,F40.10)
```

```
end
```

**EK AÇIKLAMALAR**

**Ek Açıklama–I: Pb metalinin deforme ısı kapasitesinin sıcaklığa göre değişimini veren Fortran kodu.**

Program “Pb metalinin deforme ısı kapasitesi”

```
double precision ::A,q,T,x
```

```
open (8,FILE='VPJC_kursun_q=0.9.txt')
```

```
q=0.9 (veya istenirse q=0.8 ve q=0.4 değerleri aynı programa uygulanabilir.)
```

```
Do T=0,4,0.01
```

```
A=0
```

```
Do k=1,19
```

```
A=A+(4./log(q))*(1./(k**3))*(1-((-1/q)**k))
```

```
end do
```

```
x=(-0.113*A)*T
```

```
write(8,10)T,x
```

```
end do
```

```
close (8)
```

```
10 Format(F6.3,F40.10)
```

```
end
```

## EK AÇIKLAMALAR

**Ek Açıklama–J: İki-boyutlu uzay hali için, deforme entropi fonksiyonunun  $z$  ve  $q$ 'ya göre değişimlerini veren Fortran kodu.**

Program “iki-boyutta deforme entropi fonksiyonu”

```

double precision ::z,q,A,B,h,y
open (8,FILE='VPJC_entropi_.txt')
do z=0.01,1,0.01
do q=0.01,0.99,0.01
y=abs(log(q))
A=0
B=0
do l=1,9
A=A+((1/y)*(((1-1)**(1-1))*(((z*q)**1)/(1**3)))-((z**1)/(1**3)))
B=B+((1/y)*(((1-1)**(1-1))*(((z*q)**1)/(1**2)))-((z**1)/(1**2)))
h=((2*A)/B)-log(z)
end do
write(8,10)q,z,h
end do
end do
close (8)
10 Format(F8.2,F8.2,F18.10)
end

```



## EK AÇIKLAMALAR

**Ek Açıklama–K: İki-boyutlu uzay hali için,  $a_n(q)$  deforme virial katsayılarının deformasyon parametresi  $q$ 'ya göre değişimlerini veren Fortran kodu.**

Program “iki-boyutta  $a_2(q)$  deforme virial katsayısı”

```
double precision ::y,a,b,f,q
open (8,FILE='a2.txt')
do q=0.01,0.99,0.01
y=abs(log(q))
a=q-1
b=(q**2)+1
f=(1./(2**3))*((y*b)/(a**2))
write(8,10)q,f
end do
close (8)
10 Format(F8.2,F18.10)
end
```

Program “iki-boyutta  $a_3(q)$  deforme virial katsayısı”

```
double precision ::y,a,b,f,q
open (8,FILE='a3.txt')
do q=0.01,0.99,0.0001
y=abs(log(q))
a=q-1
b=(q**2)+1
c=(q**3)-1
f=(1./(2**4))*(((y**2)*(b**2))/(a**4))-(2./(3**3))*(((y**2)*c)/(a**3))
write(8,10)q,f
end do
close (8)
10 Format(F8.4,F18.10)
End
```

## EK AÇIKLAMALAR

Program “iki-boyutta  $a_4(q)$  deforme virial katsayısı

```
double precision ::y,a,b,f,q
open (8,FILE='a4.txt')
do q=0.01,0.99,0.01
y=abs(log(q))
a=q-1
b=(q**2)+1
c=(q**3)-1
d=(q**4)+1
f=(5./(2**7))*(((y**3)*(b**3))/(a**6))-
(1./(12))*(((y**3)*b*c)/(a**5))+3./(2**6))*(((y**3)*d)/(a**4))
write(8,10)q,f
end do
close (8)
10 Format(F8.2,F18.10)
End
```

Program “iki-boyutta  $a_5(q)$  deforme virial katsayısı”

```
double precision ::y,a,b,f,q,A,B,C,D,E
open (8,FILE='a5.txt')
do q=0.01,0.99,0.01
y=abs(log(q))
a=q-1
b=(q**2)+1
c=(q**3)-1
d=(q**4)+1
e=(q**5)-1
A=(7./(2**8))*(((y**4)*(b**4))/(a**8))
B=(1./(12))*(((y**4)*(b**2)*c)/(a**7))
C=(1./(2**4))*(((y**4)*b*d)/(a**6))
D=(2./(3**4))*(((y**4)*(c**2))/(a**6))
```

**EK AÇIKLAMALAR**

```
E=(4./(5**3))*(((y**4)*e)/(a**5))
```

```
f=A-B+C+D-E
```

```
write(8,10)q,f
```

```
end do
```

```
close (8)
```

```
10 Format(F8.2,F22.10)
```

```
end
```

## ÖZGEÇMİŞ

Mustafa Şenay, 1986 yılında, Ankara'da doğdu. 2003 yılında, Keçiören Bağlum lisesinden mezun oldu. 2009 yılında, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nde lisans öğrenimini tamamlayarak mezun olan Şenay, aynı yıl Eskişehir Osmangazi Üniversitesi (ESOGÜ) Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2012 yılında, yüksek lisans eğitimini tamamladıktan sonra, ESOĞÜ'de aynı Bilim ve Anabilim dalında doktora eğitimine devam etti.

### İletişim :

Tel : 0 542 728 22 98

e-mail : mustafasenay86@hotmail.com; mustafasenay86@gmail.com