

İki Boyutlu Geometrilere Işınım Isı Transferi Hesabı İçin Alternatif SK_N Metodu

Zerrin Sert

DOKTORA TEZİ

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Ağustos 2016

Alternative SK_N Method To Compute Radiative Heat Transfer In Two Dimensional
Geometries

Zerrin Sert

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mechanical Engineering

August 2016

İki Boyutlu Geometrilerde Işınım Isı Transferi Hesabı İçin Alternatif SK_N Metodu

Zerrin Sert

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Enerji - Termodinamik Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya ALTAÇ

Ağustos 2016

ONAY

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Zerrin SERT'in DOKTORA tezi olarak hazırladığı "İki Boyutlu Geometrilere Işınım Isı Transferi Hesabı İçin Alternatif SK_N Metodu" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Zekeriya ALTAÇ

İkinci Danışman : -

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ALTAÇ

Üye : Prof. Dr. Nuri YÜCEL

Üye : Doç. Dr. Necati MAHİR

Üye : Doç. Dr. Özer AYDIN

Üye : Doç. Dr. Mesut TEKKALMAZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŐAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Zekeriya ALTAÇ danışmanlığında hazırlamış olduğum “İki Boyutlu Geometrilere Işınım Isı Transferi Hesabı İçin Alternatif SKN Metodu” başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 22/08/2016

Zerrin SERT

İmza

ÖZET

Alternatif Sentetik Kernel yaklaşımı (ASK_N), standart SK_N yaklaşımda olduğu gibi, üç boyutlu ışınım integral transfer denkleminde türetilir. Işınım integral transfer denklemlerinde termal ışınımın doğrudan ve diffüz bileşenleri sırasıyla, yüzey ve hacim integralleri olarak görülmektedir. Standart SK_N metodunda, doğrudan bileşenleri analitik olarak hesaplanırken, diffüz bileşenlere yaklaşım uygulanır. Alternatif SK_N 'nin, standart SK_N 'den farklı olarak, duvarlardan (doğrudan) ışınım katkısını içeren terimlere de sentetik kernel yaklaşımı uygulanır. Bu durumda, ASK_N metodu birbirine bağlı ikinci dereceden kısmi diferansiyel denklem seti haline indirgenir. Böylelikle ASK_N denklemleri sonlu hacimler metodu kullanılarak çözülebilir. Bu çalışmada ASK_N metodu soğuran, yayan ve izotropik olarak saçan dikdörtgen ve dikdörtgen olmayan iki boyutlu ortamlarda ışınım transferine uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar, Crosbie ve Schrenker'in doğrudan çözümünün nümerik sonuçları, kesikli ordinatlar (S_4 ve S_{12}), düzeltilmiş kesikli ordinatlar (S_4), Monte Carlo ve sıralı spektral metot çözümleri ile karşılaştırılmıştır. ASK_N yaklaşımının, ışınım transfer problemlerini çözme kabiliyeti, genellikle kesikli ordinatlar metodundan daha iyi sonuçlar verdiğini ve ışın etkilerinin gözlenmediğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Katılımcı ortam, İki boyutlu bölge, Sentetik Kernel metodu, Işınım Transferi

SUMMARY

The Alternative Synthetic Kernel (ASK_N) approximation, just as the standart SK_N , is derived from the radiative integral transfer equations in 3D. The direct and diffuse components of thermal radiation appear explicitly in the radiative integral transfer equations as surface and volume integrals, respectively. In the standart SK_N method, the approximation is employed to the diffuse components while direct components are evaluated analytically. The alternative formulation differs from the standart one in that the direct radiation contributions from the walls are also approximated with the spirit of the synthetic kernel approximation. In this case, the ASK_N method is reducible to the set of coupled second order partial differential equations. Thus, ASK_N equations can be solved using the finite volume method. In this study, the ASK_N method is applied to radiative transfer of absorbing, emitting, and isotropically scattering regular and irregular two dimensional medium. The result of the study is compared by the direct numerical solution of Crosbie and Schrenker's article, the solution of discrete ordinates (S_4 and S_{12}), modified discrete ordinates (S_4), Monte Carlo and collocation spectral methods. It is demonstrated that the ASK_N approximation possesses the capability of solving radiative transfer problems yields generally better solutions than the Discrete Ordinates method and ray-effect free.

Keywords: Participating medium, Two-dimensional area, Synthetic Kernel method, Radiative transfer

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmalarımın her aşamasında bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Prof. Dr. Zekeriya ALTAÇ'a sonsuz teşekkür ederim.

Her türlü üzüntü ve sevincimi paylaştığım, her konuda desteğini hissettiğim, gerek tezimde gerekse sosyal hayatımda ihtiyaç anında pratik çözümler bulan hayat arkadaşım ve meslektaşım Arş. Gör. Abdullah Sert'e gösterdiği sabır, verdiği destek için teşekkür ederim. Beni yetiştiren, büyüten, bugünlere gelmemi sağlayan değerli anneme ve babama, beni yüreklendiren ve heyecanımı paylaşan kız kardeşlerim Zeliha ve Zuhâl'e ve evimizin yeni üyesi hayatımı renklendiren kızım Feray'a tüm kalbimle teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarım sırasında manevi desteğini her zaman yanımda hissettiğim meslektaşım Arş. Gör. Dr. Çisil Timuralp'e de teşekkür ederim.

Son olarak; 2211-Yurt İçi Doktora Bursu programı kapsamında doktora sürem boyunca maddi destek sağladığı için TÜBİTAK BİDEB kurumuna teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	3
3. TRANSFER DENKLEMLERİ	9
3.1. Işınmın Transfer Denkleminin Türetilmesi	9
3.2. İntegral Transfer Denkleminin Türetilmesi	18
4. STANDART VE ALTERNATİF SENTETİK KERNEL METOTLARININ GELİŞTİRİLMESİ	23
4.1. SK_N Metodunun Uygulanması	24
4.2. Alternatif SK_N Metodu	28
4.3. Sınır Koşullarının Türetilmesi	31
4.4. Sayısal Çözüm Stratejisi	33
5. ORTOGONAL OLMAYAN HÜCRE-MERKEZLİ IZGARALARA SONLU-HACİM METODUNUN UYGULANMASI	34
5.1. Sonlu Hücrenin Tanımı ve Korunum Denkleminin Ayrıklaştırılması	34
5.2. Sınır Koşullarının Uygulanması	38
5.2.1. Dirichlet sınır koşulu	38
5.2.2. Neumann sınır koşulu	40
5.2.3. Taşınım (karışık) sınır koşulu	41
5.3. Hücre-Merkezli Gradyant Hesabı	44
5.3.1 Gradyant teoremi yaklaşımı	44
5.4. Alternatif SK_N Denklemlerinin Sonlu Hacim Metoduna Uygulanması	45
5.5. Alternatif SK_N Denklemlerinin Nümerik Çözümü	46

İÇİNDEKİLER (devam)**Sayfa**

6. BULGULAR VE TARTIŞMALAR.....	48
6.1. TEST PROBLEMLERİ.....	48
6.2. TARTIŞMALAR.....	50
SONUÇ VE ÖNERİLER	74
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	76

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. Işınım şiddeti ve ışınım enerjisinin yöne bağlı değişimi (Çengel'den, 2011).....	10
3.2. Düzlemsel (a) ve katı (b) açının gösterimi (Incropera'dan, 2004).	10
3.3. Kapalı bir ortamda ışınım yolu.....	11
3.4. Bir yüzeye gelen ışınımın saçılmasının şematik temsili.....	12
3.5. Kapalı bir bölgede foton yönünün geometrik gösterimi (Tekkalmaz'dan, 2003).	18
5.1. Ortogonal (dik) olmayan hacim tipleri, (a) Üçgen hacim tipi, (b) Dörtgen hacim tipi.	34
5.2. xy-koordinat sisteminde (a) üçgen (b) dörtgen sonlu-hacimlerinkomşu sonlu-hacimleri ile ilişkisi $\{\oplus$, yüzeyin orta noktasını vermektedir}.....	36
5.3. C0 hücresi ile komşusu arasındaki ilişki ve vektörlerin gösterimi.	36
5.4. Ortogonal olmayan ızgaralarda sabit sıcaklıkta sınır kontrol hücresi.	39
5.5. Ortogonal olmayan ızgaralarda sabit ısı akısı içeren sınır kontrol hücresi.....	41
5.6. Ortogonal olmayan ızgaralarda taşınım sınır şartı içeren sınır kontrol hücresi.....	42
5.7. İki boyutlu geometride Alternatif SK _N programının akış şeması.....	47
6.1. Test problemleri; a) TP-1, b) TP-2, c) TP-3, d) TP-4.....	48
6.2. a) AB, b) BC ve c) DC hattında $\omega_0 = 1,0$ ve $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ için ağ yapısının DOM S ₁₂ (Fluent®) sonuçları.	51
6.3. $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ve $\omega_0 = 0,9$ için yüzeylerdeki ışınım ısı akıları (sol) ve gelen ışınım (sağ) göre ızgaralama hassasiyeti.	53
6.4. $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ve $\omega_0 = 1,0$ için yüzeylerdeki net ışınım ısı akıları ve gelen ışınım dağılımları.	54
6.5. $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ve $\omega_0 = 0,5$ için yüzeylerdeki net ışınım ısı akıları ve gelen ışınım dağılımları.	56
6.6. $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ve $\omega_0 = 0,5$ için yüzeylerdeki net ışınım ısı akıları ve gelen ışınım dağılımları.	57
6.7. $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 2$ ve $\omega_0 = 0,5$ 'li Test Problemi-1 'de a) AB, b) BC ve c) DC hatları için boyutsuz ışınım ısı akıları ve gelen ışınım dağılımları.....	59

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
6.8. $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 2$ ve $\omega_0 = 0,9$ 'li Test Problemi-1'de a) AB, b) BC ve c) DC hatları için boyutsuz ışıınım ısı akıları ve gelen ışıınım dağılımları.....	60
6.9. $\omega_0 = 1,0$ için a) kavisli yüzey-AB hattı b) sağ yüzey-BC hattı, c) üst yüzey-DC hattı için net ışıınım ısı akısı değişimleri.....	63
6.10. $\omega_0 = 0$ için a) AB, b) BC, c) DC hattı için net ışıınım ısı akısı değişimleri.	64
6.11. $\omega_0 = 0,5$ için a) AB, b)BC, c) DC hattı için net ışıınım ısı akısı değişimleri.	65
6.12. Test problemi-2'de $\omega_0 = 0,8$ için a) AB hattı, b) BC hattı, c) DC hattı için net ışıınım ısı akısı değişimleri.....	66
6.13. Test problemi-3'de $\omega_0 = 1,0$ için net ışıınım ısı akısı değişiminin kıyası (a-DC, b-BC, c-AD hattı boyunca).	68
6.14. a-DC, b-BC, c-AD hattı boyunca test problemi-3'de saçılma albedosuna göre net ışıınım ısı akısı miktarları (sol taraf $\omega_0 = 0,2$, sağ taraf $\omega_0 = 0,5$)......	70
6.15. Test problemi-4'de $\omega_0 = 1,0$ için a) DC, b) BC, c) AD ve d) AB hattında ışıınım ısı akısı değişimi.....	72
6.16. Test problemi-4'de DC hattında a) $\omega_0 = 0,5$ ve b) $\omega_0 = 0,2$ için ışıınım ısı akısı değişimi.	73

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklamalar</u>
a_1	Doğrusal anizotropi katsayısı
c	Işık hızı
dA_n	Diferansiyel yüzey alan elemanı
dl	Diferansiyel çember uzunluğu
ds	Diferansiyel optik yol
$d\alpha$	Diferansiyel düzlemsel açı (rad)
$d\Omega$	Diferansiyel katı açı (steradyan, sr)
$d\Gamma$	Yüzeye dik yüzey vektörü
$E_k(x)$	k. dereceden eksponansiyel integral fonksiyonu
f_G	Doğrudan (direkt) gelen enerji fonksiyonu
f_q	Doğrudan (direkt) ışınım ısı akı fonksiyonu
$G(\mathbf{r})$	Gelen ışınım fonksiyonu
I	Işınım şiddeti
$K_n(x)$	n. Dereceden değiştirilmiş Bessel fonksiyonu
M	Anizotropiklik derecesi
mfp	Ortalama-serbest uzunluk
\mathbf{n}	Birim normal vektör
P_m	m. dereceden Legendre polinomları
$\mathbf{q}(\mathbf{r})$	Net ışınım ısı akısı
r	Dairenin yarıçapı
\mathbf{r}	Konum vektörü
s	Optik yol
$S(\mathbf{r})$	Kaynak fonksiyonu
$S_0(\mathbf{r})$	İzotropik kaynak fonksiyonu
$S_I(\mathbf{r})$	Anizotropik kaynak fonksiyonu
t	Zaman

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

Simgeler

w_n

x, y, z

Açıklamalar

Gauss-Legendre kuadratürünün ordinatları

Kartezyen koordinatlar

Yunan Harfleri

Ω

λ

ϕ

θ

φ

σ_s

ω_0

κ

β

τ

ρ

μ_n

δ

Γ

$\Phi(\Omega', \Omega)$

Açıklamalar

Katı açı (steradyan, sr)

Dalga boyu

Genel temsili fonksiyon

Zenit açısı

Azimut açısı

Saçılma katsayısı (m^{-1})

Saçılma albedosu ($= \sigma_s / \beta$)

Soğurma katsayısı (m^{-1})

Yokolma katsayısı ($= \sigma_s + \kappa, m^{-1}$)

Optik kalınlık (mfp)

\mathbf{r}' 'den \mathbf{r} 'ne olan vektör

Gauss-Legendre kuadratürünün absisleri

Delta Dirac fonksiyonu

Yapay difüzyon katsayısı

Saçılma faz fonksiyonu

Alt İndis

b

f

λ

Açıklamalar

Siyah cisim

Yüzey (f_i : 1'olu yüzey vb.)

Spektral

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

Üst İndis

Açıklamalar

+	Gelen
-	Çıkan

Kısaltmalar

Açıklamalar

ASK_N	Alternatif Sentetik Kernel Denklemi
CO	Karbonmonoksit
DA	Diferansiyel Yaklaşım
DOM	Discrete Ordinates Method
DP_N	Çift Küresel Harmonikler Metodu
HM-SHM	Hücre Merkezli Sonlu Hacim Metodu
IİTD	Işınım İntegral Transfer Denklemi
ITD	Işınım Transfer Denklemi
KOM	Kesikli Ordinatlarda Metodu
MDA	Düzeltilmiş Diferansiyel Yaklaşım
NO _x	Azot oksit
$N-SK_N$	Nodal Sentetik Kernel Denklemi
P_l	Difüz Yaklaşım
P_N	Küresel Harmonikler Metodu
S_N	Kesikli Ordinatlarda Metodu
SK_N	Sentetik Kernel Metodu
SP_N	Basitleştirilmiş Küresel Harmonikler Metodu

1. GİRİŞ

Mühendisliğin çeşitli uygulama alanlarında, belirli bir sıcaklık farkının varlığı ile ortam özelliklerine bağlı olarak, birim zamanda birim alandan geçen ısı hesaplanması ve ortamdaki sıcaklık dağılımının bulunması ısı mühendisliğinin en önemli amaçlarından biridir. Isı geçişinin gerçekleşmesine yol açan üç farklı mekanizma vardır: iletim, taşınım ve ışınım. Isı geçiş mekanizmalarından biri olan ışınım, yüksek sıcaklıkların söz konusu olduğu ortamlarda dominant enerji aktarım modunu oluşturmaktadır. Işınım, belirli bir sıcaklığa sahip bir cismin yaydığı enerji olarak tanınmaktadır. Isıl ışınım ile ısı geçişi, endüstriyel fırınlarda ve yüksek sıcaklıktaki yanma odalarında önemli bir rol oynamaktadır. Özellikle yüksek sıcaklıkta çalışan ekipmanların tasarımında, ışınım şiddeti, gelen ışınım ve ışınım ısı akısı gibi miktarların "doğru" tahmin edilmesi çok önemlidir.

Kapalı ortamlarda ısı geçişinin hesaplanacağı iki durum söz konusudur. Ortamın, "katılımsız" veya "katılımcı" olması hesap yöntemini değiştirmektedir. Örneğin, ortamın katılımsız olması demek, ışınımın kapalı ortamı çevreleyen duvarlar arasında ortamı oluşturan gaz tarafından herhangi bir engellemeye maruz kalmaksızın (transparan olması) gidip-gelmesi anlamına gelmektedir. Bu durum ortamın, hava gibi, fotonları ile etkileşmeyen transparan gaz ile dolu olması hallerinde geçerlidir. Işınım ısı geçişinin Stefan-Boltzmann kanunundan yararlanarak hesaplanması için duvarların birbirleri ile şekil faktörlerinin bulunması yeterlidir. Diğer bir deyişle, siyah olarak kabul edilen (1) yüzeyinden yine siyah olarak alınan (2) yüzeyine olan ışınım ısı geçişi $q_{12} = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$ ile hesaplanır; ortamdaki sıcaklık dağılımı yerine duvar sıcaklıklarının bilinmesi yeterlidir. Siyah yüzeylerde, yüzeye gelen ve giden ışınım aynıdır ancak gri yüzeylerde ışınım ayrıca yüzeyden de yansıtılarak giden ışınım bileşeninin artmasına neden olur. Yansıyan ışınım terimi "radyosite" olarak adlandırılır. Böylece her gri yüzeyde oluşan radyositelerin de hesaplanması gerekir. Bu tür hesapların nasıl yapılacağı literatürde mevcuttur. Katılımcı ortamın özelliği, yanmanın meydana geldiği fırınlar gibi ısı ekipmanlarında ortamda, çeşitli oranlarda, sera gazı adı verilen su buharı, CO ve NO_x'ler vb gazlar bulunabilmektedir. Sera gazları ışınımı oluşturan fotonlarla etkileşime girmekte, gaz molekülleri tarafından soğurulmakta, saçılmakta ve değişik yönlerde yayılmaktadır. Sera gazlarının bir diğer özelliğide absorbladıkları ışınım enerjisini yayma

özelliklerinin bulunmasıdır. Bu nedenle, katılımcı ortamda bir duvarın herhangi bir noktasından belirli bir doğrultuda yayılan bir foton bir diğer duvarın herhangi bir noktasına engelsiz bir ışın hareketi ile ulaşamaz, yol boyunca sera gazı molekülleri ile çarpışarak yön değiştirebilir veya ortam içinde soğurulma neticesinde tamamen yok olabilir. Fotonların, ortamı oluşturan sera gazlarının molekülleri ile bu etkileşimlerini göz önüne almadan bir hesap yöntemine ihtiyaç vardır. Şekil faktörlerinin hesaplanmasının bu durumda pek yararı yoktur.

Fotonların katılımcı ortamdaki hareketlerini, dağılımlarını ve ortam özelliklerine bağlı olarak davranışlarını tarif eden bir denkleme ihtiyaç vardır. Fotonların çeşitli miktarlardaki gaz molekülleri içeren ortamlardaki hareketlerini tarif eden denklem "Boltzmann Denklemi olarak anılır. Işınım transfer denklemi (ITD), beş bağımsız değişkenli $(x, y, z, \theta, \varphi)$ bir integro-diferansiyel denklemdir; yani diferansiyeli içerilen ışınım şiddetinin aynı zamanda integralinin de yer aldığı bir denklemdir. Bu değişkenler sadece üç boyutlu uzay değişkenlerini değil, aynı zamanda ışınımın doğrultusunu, yani açısal değişkenleri de, kapsar. ITD'nin genel geometriler için analitik çözümlerini elde etmek oldukça zordur. ITD'nin sadece iki plaka arası ile temsil edilebilen bir boyutlu, oldukça basitleştirilmiş geometrilerde analitik veya sayısal çözümü yapılabilmektedir. Bu karmaşık denklemi çözmek, klasik yöntemlerle mümkün değildir; bu nedenle, ITD'ni çözmek için birçok sayısal yöntem geliştirilmiştir. Ancak, tüm bu sayısal yöntemlerin kendine has avantaj ve dezavantajları vardır. Bu metotlar hakkında daha ayrıntılı açıklamalar Bölüm 2'de verilmiştir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Katılımcı ortamda ITD'ni çözmek için mühendislik ve bilimsel çalışmalarda en yaygın olarak kullanılan sayısal modeller; Küresel Harmonikler Metodu (veya P_N metodu) ve bunun diğer varyasyonları, Monte Carlo metodu, Zonal metot, Işınım İntegral Transfer Denklemi (İİTD) esaslı metotlar, Kesikli Ordinatlar Metodu (KOM veya S_N metodu olarak da anılır) ve bu sınıfa giren daha bir dizi metot, Sentetik Kernel Metodu (SK_N), Nodal Sentetik Kernel Metodu ($N-SK_N$) şeklinde sıralanabilir.

Işınım İntegral Transfer Denkleminin Dayalı Çözümler İçeren Metotlar. Işınım integral transfer denklemi (İİTD), ITD'nin bütün katı açılış üzerinden integralinin alınmasıyla tüm yönlerden gelen ışınım şiddetinin toplanarak bulunan gelen ışınım fonksiyonu cinsinden elde edilmesiyle açısal bağımlılık tamamen ortadan kaldırılır; böylece; sadece x , y ve z gibi uzay değişkenleri cinsinden bir integral denklemi elde edilir. Işınım integral transfer denklemi ile çözüm elde etmek diğer metotlara nazaran daha basittir. Ancak integral denkleminin kernel adı verilen fonksiyonlarında matematiksel tekillikler mevcuttur. İİTD'nin çözümü için "Tekilliğin Çıkarılması" veya Galerkin metodu gibi yarı-sayısal ve yarı-analitik yaklaşımlar önerilmiştir. Nitekim integral denkleminin söz konusu sayısal yöntemler ile iki ve üç boyutlu kapalı geometrilerde çözümünde sıfırları olmayan matrisler içeren lineer denklem sisteminin çözümünü gerektirir. Lineer denklem sistemini bu haliyle çözmek çok fazla bilgisayar hafızasına ve uzun hesaplama süresine ihtiyaç duyar (Altaç ve Tekkalmaz, 2004). Bu yöntemde integral kernellerinin analitik olarak türetilmesi de özellikle karmaşık geometrilere uygulanması önünde en ciddi engellerden birini oluşturmaktadır. Bu nedenle, bu yöntem idealleştirilmiş problemler dışında pratik endüstriye problemlere uygulanabilmesi oldukça zordur (Tekkalmaz ve Altaç, 2005).

Monte Carlo Metodu. Monte Carlo metodu ışınım ısı transfer denklemini istatistiksel yöntemler kullanarak çözmeyi amaçlayan bir metottur. Bu yöntem ile ışınım transfer problemi çözerken, ortamda rastgele seçilen bir noktadan alınan bir fotonun yayılmasından, soğuruluncaya kadar izledikleri yolun istatistiksel hesaplarının yapılmasını içerir. Foton soğurulduktan sonra tekrar ortamdan bir foton daha seçilir ve bu işlemler tekrarlanır. Monte Carlo Metodu çok karmaşık problemlerin çözülebilmeye olanak sağlar. Fakat bu metot,

diğer tüm istatistiksel metotlarda olduğu gibi, belirli bir istatistiksel hataya (standart sapmaya) sahiptir; bu hatayı azaltmak için çok sayıda fotonun ortam içinde izlenmesi gerekmektedir. İstatistiksel hatayı azaltma bağlamında artırılan foton sayısı, çözüm işlemi süresini artırır (Modest, 2013).

Zon Metodu. Soğuran, yayan ve izotropik olarak saçan katılımcı ortamlarda ışı nım ısı transfer problemlerini çözmek için önerilen zon metodu (Zonal Method), net ışı nım alışverişi metodundan geliştirilmiştir. Zon metodu, Hottel'in fırınlardaki ısı transferi üzerine yaptığı öncü çalışmalar ile geliştirilmiştir. Küresel harmonik ve *KOM* metodun aksine Zon metodu, aç ısal değil 3 boyutlu uzaya (x, y, z) yaklaşımda bulunmaktadır. Bu haliyle ortam küçük izotermal alt hacimlere bölünür; yani, kapalı ortamlarda izotermal hacim ve yüzey alan bölgesini sonlu sayıya bölmektedir. Enerjinin korunumu, tekrar hesaplanmış değişen alanlar kullanılarak, herhangi iki bölge arasında ışı nım değişimi için sağlanır. Bu işlem sonunda her sonlu bölge için bilinmeyen sıcaklık ve ısı akısını içine alan bir denklem ile sonuçlanır; bu denklemlerin toplamı için bir lineer denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sisteminin çözümünü gerektirir. Zon metodu optik olarak ince ortamlarda yetersizdir; fakat "ışı n etkisi" ve "yanlı ş saçılma" adı verilen problemlerden muzdarip değildir. Bununla birlikte; karmaş ık geometrilere de uygulanması zordur. Zon metodunda doğruluğunu arttırmak için iki yol vardır: (1) sonlu hacimlerin sayısını arttırmak; (2) doğrudan değişim alanlarını belirlemek için kullanılan nümerik kuadratürlerin doğruluğunu arttırmak. Çözümde kullanılan bölge çok sayıda küçük alanlara (veya hacimlere) bölündüğünden çözüm için çok büyük matrisler içeren (İİTD çözümünde olduğu gibi) lineer denklem sistemleri elde edilir, bu da çözümde işlem zamanını artırır (Modest, 2013).

Kesikli Ordinatl ar Metodu. ışı nım ısı transfer çalışmalarında son zamanlarda en yaygın kullanılan sayısal yöntem Kesikli Ordinatl ar Metodu (*KOM*) veya Discrete Ordinates Method (*DOM*)'dur. Kesikli ordinatl ar metodu (*DOM* veya S_N), küresel harmonik metodundaki gibi, ışı nım transfer denklemini kısmi diferansiyel denklem sistemine dönüştürmek için kullanılan bir yöntemdir. *DOM* metodu, atmosferde ışı nım transferini hesaplamak için Chandrasekhar (1960) tarafından ortaya atılmıştır. *DOM* metodunu, ilk olarak, Lee (1962) ve Lathrop (1966, 1968) nükleer reaktörlerde nötronların dağılımını hesaplamak için uygulamıştır. Kesikli ordinatl ar metodunda, ışı nım şiddetinin 4π 'lik katı aç ı için belirli veya sınırlı sayıda yön seti seçilerek, bu yön setinin ağırlıklı çarpımının gelen

ışınımına olan karşılığının bulunması esasıyla hesaplanır. Farklı doğrultulara bölünen aralık kümesi ile yönsel bağımlılık basit olarak sonlu farklara ayırır. Dolayısıyla her yön için bir adet ITD mevcut olmaktadır ve açısal bağımlılık da bu şekilde devreden çıkarılmaktadır; ancak elde edilen denklem seti iç içe girmiş birinci dereceden diferansiyel denklem takımındır. Katı açı üzerinden alınan integraller nümerik kuadratürler aracılığı ile hesaplanır. Böylelikle çözülecek denklemlerin toplam sayısı katı açığa yapılan yaklaşımın (yön sayısının) derecesine bağlı olur. Bu yaklaşımın dezavantajı ışınlam şiddeti ve ısı akısındaki fiziksel olmayan salınımlar yani ışın etkileridir (Lewis ve Miller, 1984; Chai vd., 1993; Coelho, 2002; Hunter vd Guo, 2015).

Küresel Harmonikler Metodu. Küresel harmonik ya da P_N metodu astrofizik, nükleer reaktör fiziği ve ısı ışınlam transferinde karşılaşılan Boltzmann denklemi çözümünde kullanılan ilk yaklaşım metodlarından biridir. Bu metod ile ışınlam şiddeti, küresel harmonikler (spherical harmonics) cinsinden bir sonsuz seriye açılır. Serinin sonlu terime indirgenmesi ve momentleri oluşturularak bütün açılar ışınlam şiddetinin katı açı üzerinden integralleri ile elde edilir (Döner, 2003). P_N yaklaşımı matematiksel olarak daha basit olduğu için araştırmacılara cazip gelmiştir. Ancak P_l yaklaşımı veya yaygın adıyla difüzyon yaklaşımı sadece optik olarak kalın sistemler için doğru sonuç verdiği anlaşılmıştır (Modest, 2013). Daha sonraki yapılan çalışmalarda yaklaşım derecesi arttırılarak optik olarak ince ortamlarda makul derece doğrulukla sonuçlar elde edilmiştir. Fakat küresel harmonikler için yaklaşım derecesi arttırılırken; çözümün doğruluğu oldukça yavaş yakınsamakta, diğer yandan, P_N denklem sayısı önemli ölçüde artmakta ve daha karmaşık hale gelmektedir (Bayazıtöğlü ve Higenyi, 1979; Ou ve Liou, 1982; Ratzel ve Howell, 1983; Mengüç ve Viskanta, 1985; Tong ve Swathi, 1987; Yang ve Modest, 2007; Modest ve Yang, 2008; Ravishankar vd., 2010; Modest, 2012; Modest, 2013; Marquez vd., 2015).

Çift Küresel Harmonikler Metodu. Diğer bir metodda Legendre polinomları, diğer bir deyişle Çift Küresel Harmonikler (double P_N yada DP_N)'dir. Bu yaklaşım nötron transport problemlerini çözmek için Yvon (1957) tarafından, benzer bir yaklaşım olarak termal ışınlam transfer problemlerini çözmek için de Schuster (1905) ve Schwarzschild (1906) tarafından önerilmiştir. Bu metotta, bütün açılar bir seri yaklaşımına açılması yerine, ileri ve geri yönde hareket eden ışınlam için ayrı seri açılımları uygulanır. Ayrıca düşük yaklaşım derecelerinde bile, yöntem genellikle daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. ışınlam transfer

analizinde, DP_N yaklaşımı 1-boyutlu düzlem ve 1-boyutlu küresel geometrilere uygulanmıştır (Özışık vd., 1975; Wan, 1977; Mengüç ve Iyer, 1988; Tsai, 1991). Fakat DP_N metodu P_N metodu gibi, çok boyutlu geometrilere matematiksel karmaşıklığı yüzünden çok popüler bir metot haline gelmemiştir.

Basitleştirilmiş Küresel Harmonikler Metodu. Başka bir alternatif yöntem de, nötron transport denklemleri çözümü için Gelbard (1961) tarafından ortaya atılan basitleştirilmiş P_N (Simplified SP_N) metodudur. Gelbard (1961) bir boyutlu plaka için türetilen P_N denklemlerini sınır şartlarıyla birlikte 3-boyutlu ortama genellemiştir. Metot optik olarak ince ortamlarda nispeten doğru sonuçlar vermektedir. Fakat SP_N yöntemi içinde yatan bir diğer temel sorun, doğru sınır şartları üretmekteki yetersizliğidir. Ayrıca yöntemin formülasyonunda ışınım şiddeti için gerçek bir ifade vermemektedir.

Düzeltilmiş Diferansiyel Yaklaşım Metodu. Optik olarak ince ortamlar için başarısız olan P_1 yaklaşımını iyileştirmek için sadelik ve kullanım kolaylığı olan diferansiyel yaklaşım (DA) metodu akla gelir (Altaç, 2014). Bu yaklaşımın bir sonucu olarak, düzeltilmiş diferansiyel yaklaşımını (MDA) veya Olfe'nin metodu denilen bir yöntem ortaya atılmıştır (Modest, 2013). Ortamın ışınım şiddeti, temel de iki kaynaktan oluşmaktadır. Bu kaynaklar ikiye ayrılır: (1) kapalı ortamı çevreleyen duvarlardan yama ve yansıtmadan kaynaklanan doğrudan ışınım; (2) ortam içinde fotonların yayınması ve/veya saçılması ile yayılan (diffüz) ışınım. Diffüz ışınım transferi, P_1 yaklaşımı ile hesaplanırken, duvardan yayılan doğrudan ışınım transferi gerçek çözüm metotları ile hesaplanır. Bu metotta başlangıç çalışmaları, siyah yüzeyli saçılmasız ortamları içermekte idi, fakat Wu vd. (1987) bir boyutlu yansıtıcı duvarlı izotropik saçılmalı ortamlar için çalışmalarında bu yöntemi geliştirmişlerdir. Ayrıca Modest (1989) üç boyutlu yansıtıcı sınır şartlı lineer anizotropik saçılmalı ortamda bu yöntemi başarılı ile uygulamıştır.

Sentetik Kernel (SK_N) Metodu. Sentetik Kernel metodu fikri, nükleer reaktörlerde nötron dağılımı problemlerini çözmek için ilk kez 1985'de Spinrad ve Sterbentz tarafından ortaya atılmıştır. Sentetik kernel metodu, ışınım integral denklemlerinin kernellerine bir üstel fonksiyon toplamı ile yapılan yaklaşımdan ibarettir. İntegral denklemi bu şekilde özel sınır şartları da türetilen, ikinci dereceden kısmi takım diferansiyel denklem sistemine indirgenir. Bu yöntemde yaklaşımın ana kaynağı ışınım integral transfer denklemi

olduğundan SK_N denklemleri katı açıyı içermemekte ve DOM 'daki gibi açısal ayrıklaştırma yöntemleri kullanılmamaktadır. Bu nedenle, SK_N denklemleri integral denklemlerinden türetildiği için iki ve üç boyutlu geometrilerin DOM yöntemiyle çözümlerinde karşılaşılan ve "ışın etkisi" adı verilen problem de gözlenmemektedir. Ayrıca, SK_N denklemleri ikinci dereceden adi diferansiyel denklemler sınıfına girmekte olup, sayısal çözüm çok kısa bir sürede gerçekleştirilebilmektedir. Ancak SK_N metodunun en büyük dezavantajlarından birisi de duvarlardan ışınma terimlerine yaklaşımda bulunulmayan analitik ifadelerinin hesaplanmasını gerektirmesidir. Karmaşık geometrilerde çoğu kez bu ifadelerin çıkarılması ve sayısal integrali başlı başına ciddi bir sorun teşkil etmektedir. Bahsedilen bu metotlarda amaç, ışınım ısı transferi içeren karmaşık mühendislik problemlerini daha kısa sürede ve doğru çözen yöntemlere ihtiyaç duyulmasıdır. Bu sebeple bahsedilen her metotta olduğu gibi SK_N yaklaşımı içinde modifiye edilmiş yeni metotlar geliştirilmiştir. Altaç ve Spinrad (1989, 1990) çalışmalarında bir ve iki boyutlu; hem özdeğer homojen ve heterojen hem sabit kaynak problemlerde optik olarak ince sistemlere başarı ile uygulamış ve geliştirmiştir. Döner 2003'deki tezinde öncelikle bir boyutlu soğuran, yayan, izotropik ve anizotropik olarak saçan homojen ve heterojen katı silindir için SK_N metodunu kullanarak iki farklı kuadratür için çözümler elde etmiştir. Bu çözümleri; integral transfer denkleminde elde edilen gerçek çözümler ile değişik optik kalınlıklar ve saçılma albedosu bakımından karşılaştırmıştır. Ayrıca soğuran, yayan, izotropik saçan homojen iki boyutlu katı silindir için de SK_N çözümlerini iki farklı kuadratür kullanarak elde etmiştir. Tekkalmaz (2003) yaptığı tezde soğuran, yayan, izotropik ve lineer anizotropik olarak saçan homojen ve heterojen katı küre, homojen iç içe küre ve izotropik olarak saçan heterojen iki boyutlu ortamlarda SK_N metodunu üç farklı kuadratür kullanarak farklı optik kalınlıklar ve saçılma albedoları için çözümler elde etmiştir. Hem Döner (2003) hemde Tekkalmaz (2003) yaptıkları tezlerinde ele aldıkları problemlerde SK_N metodunda kullandıkları farklı kuadratür setlerinin ışınım transfer denklemini çözme kabiliyetinin diğer yöntemlere kıyasla daha az zaman aldığını ve gerçek çözümlere çok iyi yakınsadığını göstermişlerdir.

Altaç ve Tekkalmaz (2013) çalışmalarında sentetik kernel (SK_N) yaklaşımını temel alan, nodal sentetik kernel metodunu ($N-SK_N$) bir ve iki boyutlu kartezyen koordinat sistemindeki geometrilerde uygulayarak ışınım transfer denklemini çözmüşlerdir. Bu metotta, belirli bir düğüm noktasında gelen enerji ve ısı akısını tahmin etmek için duvardaki saçılmasının lineer olarak ifade ederek ve momentlerini alarak, diğer boyutlardan kaçan

fotonları da içine alan, bir boyutlu nodal denklemler türetmişlerdir. Nodal denklemlerin analitik çözümü mevcuttur. Çözüm işlemi bir boyutlu denklemler ile gerçekleştirilerek her nodun yüzeyinde gelen ve giden ışınım fonksiyonu ile ışınım ısı akısı bileşeninin hesabına dayanır. Bu şekilde tüm yönler için tarama yapılarak nodal yüzeylerde aranan miktarların yakınsaması sağlanır. Bu denklemler bir boyutlu ve cebirsel olarak daha basit olduğu için ne hafıza ne de işlemci zamanı üzerine yük getirmemektedir (Altaç ve Tekkalmaz, 2013).

Alternatif SK_N (ASK_N) Metodu. SK_N metodunda yukarıda bahsedilen ve duvar terimlerindeki yaymanın neden olduğu duvar terimlerine yapılması zorunlu analitik yaklaşımlar nedeniyle pratik karmaşık geometrilere uyarlanmasını mümkün kılmamaktadır. Bu duvar terimlerini de SK_N metodolojisi içinde yaklaşım içine katma imkanı bulmak karmaşık problemlere uygulanabilirliğini artıracaktır. Bu nedenle, sentetik kernelin uygulamasında yeni bir metot (ASK_N yaklaşımı) geliştirmiştir (Altaç, 2014). Bu formülasyon standart SK_N yaklaşımına kıyasla daha az doğrulukla çözümler vereceği öngörülmekle beraber diğer yöntemlere oranla daha doğru sonuçlar vermesi ihtimali yüksektir. Ayrıca duvarlardan yayılan ışınımın katkılarını analitik olarak hesaplamak gerekmeyeceğinden cpu zamanı önemli derecede azaltılabilir. Alternatif ASK_N denklemleri sonlu elemanlar, sonlu farklar yada kontrol hacmi gibi geleneksel nümerik teknikleri kullanarak işlem yapmaya olanak sağlar (Altaç, 2014).

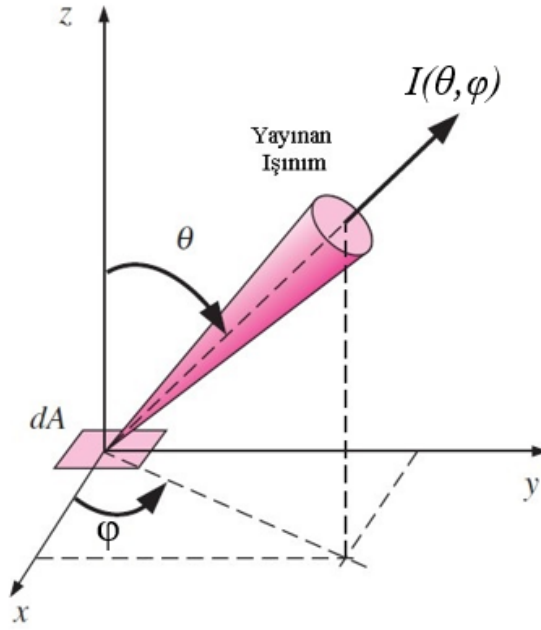
Sonuç olarak, çok boyutlu katılımcı ortamlarda ITD'nde analitik çözümün elde etmek çok zordur. Bu yüzden ITD'ni çözmek için çeşitli sayısal yöntemler araştırılmaya devam edilmektedir. Bu tezde, sonlu hacimler tekniği kullanılarak geliştirilen ASK_N metodu nümerik performansının test edilmesi amaçlanmıştır. İki boyutlu dikdörtgen ve dikdörtgen olmayan ortamlarda, çeşitli optik kalınlık ve saçılma albedosunda üç farklı yaklaşım derecesi için ASK_N metodu çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca, literatürde sıklıkla karşılaşılan kıyaslama problemleri için alternatif ASK_N çözümleri gelen ışınım ve ısı akısı sonuçları karşılaştırılarak verilmiştir.

3. TRANSFER DENKLEMLERİ

3.1. Işınım Transfer Denkleminin Türetilmesi

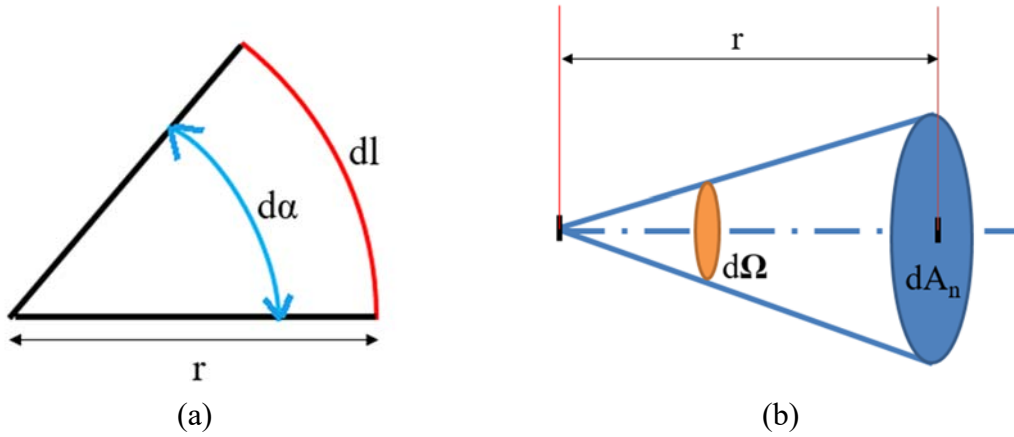
Işınım, fotonların elektromanyetik dalgalar biçimindeki enerji yayılımı ya da aktarımıdır. Isıl ışınım, sıcaklığı nedeniyle maddeden yayılan enerji ile ilgili olup, yayılma mekanizması maddenin iç yapısındaki elektronların salınım ve yörünge değiştirmeleri sonucunda açığa çıkan enerjidir. Bu salınımlar da maddenin iç enerjisi ve bunun göstergesi olan sıcaklığından kaynaklanmaktadır. Işınım standart dalga özellikleri olan frekans ve dalga boyu (λ) ile tanımlanır. Isıl ışınımın dalga boyuna göre değişimi, hesaplamayı zorlaştıran etkenlerden biridir. Işınımla ısı geçişi hesaplamalarını yapabilmek için hem dalga boyuna hemde ışınımın yönüne bağlı değişimleri göz önüne almak gerekir (Incropera, 2004).

Işınım, bir düzlemsel yüzeyin bütün parçalarından, yüzeyin üzerindeki bir noktayı merkez alan yarıküresel tüm yönlerden yayılır ve yayınan (veya gelen) ışınımın yöne bağlı dağılımı genellikle üniform (eşit dağılılı) değildir. Bu yüzden, uzayın belirli bir yönünde yayınan (veya gelen) ışınımın büyüklüğünü tanımlayacak bir niceliğe gerek vardır. Bu nicelik ışınım şiddetidir ve I (Intensity kelimesini temsilen) ile gösterilir (Çengel, 2011). Işınım şiddetinin diğer bir tanımı da; birim zamanda, birim katı açıda, birim spektral değişimde ve birim alandan transfer edilen ışınım enerjisi şeklindedir (Döner, 2003). Şekil 1’de gösterildiği gibi bir noktadan geçen ışınımın yönü küresel koordinatlarda zenit açısı θ ve azimut açısı ϕ cinsinden tanımlanır. Eğer tüm yüzeylerdeki ışınım yayılımı eşit dağılımlı olsaydı, ışınımı ölçmek için yayma gücü yeterli olur ve ışınım şiddetini bulmamıza gerek kalmazdı. Bir siyah cisim tarafından, birim dik alan başına, yayınan ışınım bütün yönlerde aynıdır ve dolayısıyla yöne bağımlılık yoktur. Ancak bu durum gerçek yüzeyler için geçerli değildir. Şiddet tanımlanmadan önce uzayda bir açıklığın büyüklüğünün ölçülmesi gerekir (Çengel, 2011). Şekil 1’de yayılan ışınımın ortasından geçen ve uzaydaki diferansiyel ölçekte küçük bir alana dA_n , ışınımın yayıldığı koni tabanından bakıldığında katı açı $d\Omega$ görülmektedir (Incropera, 2004).



Şekil 3.1. Işınım şiddeti ve ışınım enerjisinin yöne bağlı değişimi (Çengel'den, 2011).

Düzlemde diferansiyel bir $d\alpha$ açısı tanımlanırken, Şekil 3.2a'da gösterildiği gibi, çemberin uzunluğu $d\ell$, dairenin yarıçapı r ile bölünür. Buna benzer şekilde, diferansiyel katı açı $d\Omega$ 'da, Şekil 3.2b'de görüldüğü gibi, küre üzerindeki bir dA_n alanının, kürenin yarıçapının karesi ile bölünmesi biçiminde tanımlanır (Incropera, 2004).



Şekil 3.2. Düzlemsel (a) ve katı (b) açının gösterimi (Incropera'dan, 2004).

Düzlemsel ve katı açının matematiksel gösterimi,

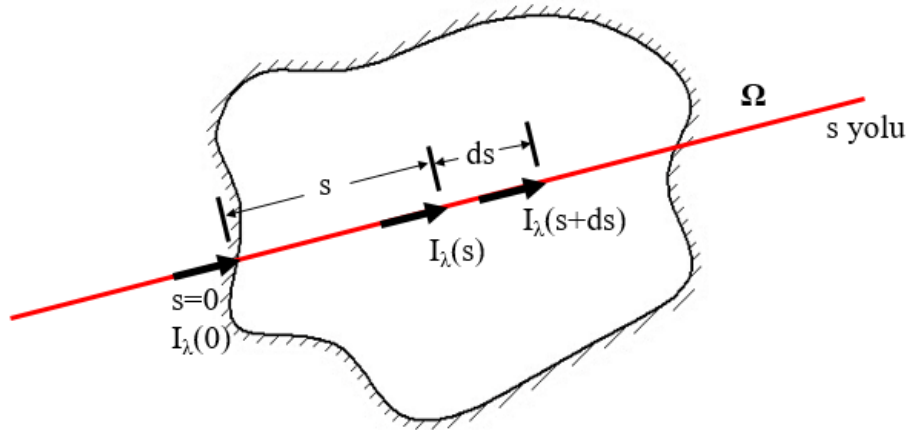
$$d\alpha = \frac{d\ell}{r}, \quad d\Omega = \frac{dA_n}{r^2} \quad 3.1$$

şeklindedir. Düzlemsel açı $d\alpha$ 'nın birimi radyan (rad), katı açı $d\Omega$ 'nın birimi ise steradyan (sr)'dir. dA_n alanı (θ, φ) yönüne diktir ve küresel bir yüzey alan elemanı $dA_n = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ biçiminde yazılabilir. Böylece,

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi \quad 3.2$$

olur. Ayrıca katı açının, üç boyutlu kartezyen koordinatlarda $\Omega_x = \sin\theta \cos\varphi$, $\Omega_y = \sin\theta \sin\varphi$ ve $\Omega_z = \cos\theta$ olmak üzere $\Omega = \Omega_x \mathbf{i} + \Omega_y \mathbf{j} + \Omega_z \mathbf{k}$ şeklinde yazılır.

Işınım şiddetinin, kapalı bir ortamda yola bağlı hareketi Şekil 3.3'de verilmiştir. İki nokta arasındaki ışınım enerjisindeki değişim, Ω doğrultusunda yayınan ışınım enerjisinin şiddetindeki, $I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega, t)$, değişim ile Ω doğrultusunun ds kadar ötesindeki yayınma, soğurma ve saçılma katkılarının enerji dengesine yerine yazılması ile bulunur.



Şekil 3.3. Kapalı bir ortamda ışınım yolu.

Işınım enerjisinin ds yolu boyunca ifadesi

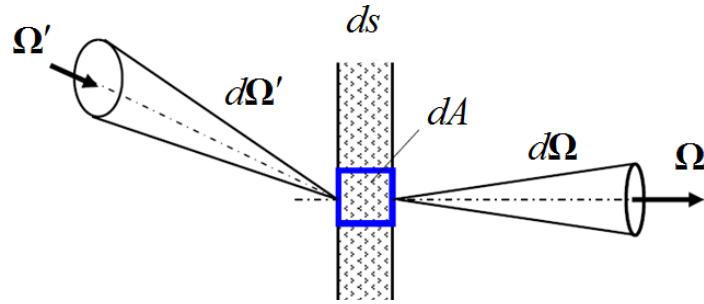
$$\begin{aligned}
 I_\lambda(s+ds, \Omega, t+dt) - I_\lambda(s, \Omega, t) = & \underbrace{\kappa_\lambda I_{b,\lambda}(s, t) ds}_{\text{yayınım ile kazanılan}} - \underbrace{\kappa_\lambda I_\lambda(s, \Omega, t) ds}_{\text{soğurma ile kaybedilen}} \\
 & - \underbrace{\sigma_{s,\lambda} I_\lambda(s, \Omega, t) ds}_{\text{dışa saçılma ile kaybedilen}} + \underbrace{\frac{\sigma_{s,\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} I(s, \Omega', t) \Phi(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega' ds}_{\text{içe saçılma ile kazanılan}} \quad 3.3
 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir; burada $\Phi(\Omega' \cdot \Omega)$ terimi saçılma faz fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır. $\Phi(\Omega' \cdot \Omega) = 1$ olması halinde saçılma izotropik (her yönde eşit dağılımlı)

olarak kabul edilmektedir; $\sigma_{s,\lambda}$ spektral saçılma katsayısı, κ_λ spektral soğurma katsayısı ve β_λ spektral yokolma katsayısı olup bu katsayı hem soğurma hem de saçılma ile şiddetin toplamdaki azalması olarak bilinmektedir ve

$$\beta_\lambda = \kappa_\lambda + \sigma_{s,\lambda} \quad 3.4$$

şeklinde yazılmaktadır. Yokolma katsayısı uzayda (ortamda) genellikle sabit olabileceği gibi değişken de olabilmektedir.



Şekil 3.4. Bir yüzeye gelen ışınımın saçılmasının şematik temsili.

Denklem (3.3) ile verilen ifadenin sağ tarafındaki integral ile temsil edilen ifade, Şekil 3.4'de temsili olarak verilen ve saçılmaya uğrayarak enerji kaybeden (daha düşük enerjili fotona geçen daha düşük enerjili fotonların sayısında artışa neden olan) fotonların toplamını ifade etmektedir. Denklem (3.3)'ün sol tarafındaki ilk terim (ds mesafe sonraki ışınım şiddetini temsil eden terim) Taylor serisine açılabilir. Bu terimde temel olarak iki değişken olmasından dolayı, yani s ve t , Taylor serisi

$$I_\lambda(s + ds, \mathbf{\Omega}, t + dt) = I_\lambda(s, \mathbf{\Omega}, t) + \frac{\partial I_\lambda}{\partial t} dt + \frac{\partial I_\lambda}{\partial s} ds + O[(dt)^2] + O[(ds)^2] \quad 3.5$$

şeklinde yazılabilir. Burada Taylor serisinin ikinci ve daha yüksek mertebeden terimlerini ihmal etmekteyiz. Isıl ışınım, ışık hızı ile yayılmasından dolayı, yol eşittir hız çarpı zaman ($s=ct$) ifadesinden, $dt/ds = 1/c$ elde edilir. Bu bilgiler ışığı altında Denklem (3.5)'i yeniden düzenlersek,

$$I_\lambda(s + ds, \mathbf{\Omega}, t + dt) = I_\lambda(s, \mathbf{\Omega}, t) + \frac{\partial I_\lambda}{\partial t} \frac{ds}{c} + \frac{\partial I_\lambda}{\partial s} ds \quad 3.6$$

elde edilir. Denklem (3.3)'de Denklem (3.4) ve Denklem (3.5) kullanıp Denklem (3.3)'ü yeniden düzenlersek (eşitliğin her iki tarafındaki ds 'ler sadeleşir)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial I_\lambda}{\partial s} = \kappa_\lambda I_{b,\lambda}(s,t) - \kappa_\lambda I_\lambda(s, \mathbf{\Omega}, t) \\ - \sigma_{s,\lambda} I_\lambda(s, \mathbf{\Omega}, t) + \frac{\sigma_{s,\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} I(s, \mathbf{\Omega}', t) \Phi(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega}' \end{aligned} \quad 3.7$$

veya Denklem (3.4)'ün yardımıyla

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial I_\lambda}{\partial s} + \beta_\lambda I_\lambda(s, \mathbf{\Omega}, t) = \kappa_\lambda I_{b,\lambda}(s,t) + \frac{\sigma_{s,\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} I(s, \mathbf{\Omega}', t) \Phi(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega}' \quad 3.8$$

elde edilir. Bu denkleme Işınım Transfer Denklemi (ITD) veya Boltzmann denklemi adı verilir. Işınım transfer denklemi, yayıcı, soğurucu ve saçılmaya uğrayan, yani katılımcı bir ortamdaki, fotonların hareket ve dağılımını matematiksel olarak tanımlayan denklemdir.

Ortam ışınım özelliklerini frekanstan bağımsız monokromatik olduğu; diğer bir deyişle, farklı dalga boylarındaki ışınımının tümünü tek bir dalga boyundaki ışınımına indirgediğimizde, yayılan ışınım şiddeti ve yayma, soğurma ve saçılma terimleri λ dalga boyundan bağımsız olur; yani, $\kappa_\lambda = \kappa$, $\sigma_{s,\lambda} = \sigma_s$ ve $I_\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ olarak yazılabilir. Bu durumda Denklem (3.8) olarak bulunan Işınım Transfer Denklemi

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial s} + \beta I(s, \mathbf{\Omega}, t) = \kappa I_b(s,t) + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(s, \mathbf{\Omega}', t) \Phi(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega}' \quad 3.9$$

halini alır.

Diğer terimlerle karşılaştırıldığında, ışınım şiddeti ışık hızıyla yayınmasından ve c 'nin büyüklüğünün fazla olmasından dolayı $(1/c)(\partial I / \partial t)$ terimi birçok mühendislik uygulamaları için "*ihmal edilebilir*" seviyededir. Bu terimin ihmal edilmesi durumu, aynı zamanda "*sürekli rejim*" durumuna karşılık gelir.

Yokolma katsayısına bağlı olarak, katılımcı ortamda ışınım ısı geçişi hesaplarında çok sık kullanılan bir ortam özelliği de τ ile temsil edilen "*optik kalınlık*"tır. Monokromatik ışınım için ışınımın kat ettiği yola göre hesaplanmakta olup

$$\tau = \int_{r'}^r \beta(s) ds \quad 3.10$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (3.9) ile verilen ifade, yol boyunca yokolma katsayısının değiştiği kabulü esasına dayanmaktadır. Yokolma katsayısının fazla değişmediği ve ortalama bir değer civarında hemen hemen sabit olduğu koşullarda, optik kalınlık $\tau = \beta s$ yada $\tau = \beta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ şeklinde yazılabilir ve boyutsuz olmakla beraber birimi (mfp) ortalama-serbest-uzunluk (mean free path) şeklinde tarif edilir. Optik kalınlık $\tau < 5$ mfp olan katılımcı ortamlarda, fotonların hareketi ışınım transfer denkleminde hesaplanır. $\tau > 5$ mfp için ortam optik olarak "kalın" sistem olarak adlandırılır ve ışınım transfer denkleminde küresel harmonikler metodu yardımıyla elde edilen daha basit bir denklem olan "difüzyon denklemi" olarak adlandırılan denklemin çözümünden bulunur.

Optik kalınlık terimine ek olarak, katılımcı ortamlarda ışınım hesaplarında ve/veya analizlerinde çok sık kullanılan bir diğer terim ışınımın saçılmasının toplam yok olma katsayısına oranı olarak tanımlanan "*saçılma albedosu*" adı verilen terimdir. Saçılma albedosu ω_0 sembolü ile gösterilmekte olup,

$$\omega_0 = \frac{\sigma_s}{\kappa + \sigma_s} = \frac{\sigma_s}{\beta} \quad 3.11$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Diğer bir deyişle, $\omega_0 = 0$ olan ortamlar tamamen soğurucudur; $\omega_0 = 1$ olan ortamlarda tamamen saçıcıdır; yani fotonların soğurulmadan ortam yüzeyinde dışarı kaçıncaya kadar birbirleriyle çarpışırlar. Bu iki ekstrem uç arasında, fotonlar ω_0 'ın büyüklüğü oranında hem soğurulur hem de saçılırlar.

Yukarıda belirtilen sürekli rejim ve monokromatik ışınım kabulleri altında, ve dI/ds teriminin de $\mathbf{\Omega}$ birim vektörü doğrultusundaki s -yoluna göre türevi temsil ettiğine dikkat edilirse (ki bu durumda $dI/ds = \mathbf{\Omega} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ olarak da yazılabilir), Denklem (3.9)'u aşağıdaki şekilde yeniden düzenleyebiliriz:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \beta I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \kappa I_b(T) + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') \Phi(\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}' \quad 3.12$$

burada $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ olarak ifade edilen konum vektörüdür.

Işınım Transfer Denklemi (veya Boltzmann denklemi) yokolma katsayısı sabit kabul edilebilecek kadar küçük değişimlerin olduğu, nispeten daha basit ortamlar için β kullanılarak optik kalınlık τ cinsinden boyutsuzlaştırılabilir; ancak biz burada daha ziyade boyutlu analize değineceğiz.

Ortamdaki saçılmanın "*izotropik saçılma*" şeklinde, yani her yönde eşit-dağılı olarak, meydana geldiği kabulü altında, saçılma fonksiyonunun yüksek mertebeden terimleri ihmal edilir ve $\Phi(\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}) = 1$ olarak yazılır. Bu durumda Denklem (3.12)'deki integral ifadesi aşağıdaki terime indirgenir:

$$G(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \quad 3.13$$

Bu yeni fiziksel terim "*gelen ışınım fonksiyonu*" olarak adlandırılır. Denklem (3.12)'nin yerine yazılmasıyla Işınım Transfer denklemi

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \beta I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} S(\mathbf{r}) \quad 3.14$$

olarak yeniden düzenlenebilir. Burada $S(\mathbf{r}) = 4\pi\kappa I_b(T) + \sigma_s G(\mathbf{r})$ olarak tanımlanmakta olup, kapalı ortamdaki bir uzay noktasına gelen tüm fotonları temsil etmesinden dolayı "*kaynak terimi*" olarak (yani, *ortamdaki foton kaynağı*) adlandırılır.

Uzaydaki bir noktada net ışınım ısı akısı ise, ışınım şiddetinin $\boldsymbol{\Omega}$ 'nın birinci dereceden momentini olarak aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Omega} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \quad 3.15$$

Bir yüzeye etkiyen ışınım ısı akısı yüzeye gelen, $\mathbf{q}^-(\mathbf{r})$, ve yüzeyden çıkan ısı akısı, $\mathbf{q}^+(\mathbf{r})$, olarak ifade edilebilir:

$$\mathbf{q}^-(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0} \boldsymbol{\Omega} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \quad 3.16$$

Burada \mathbf{n} yüzeyin dış birim vektörü olmak üzere, yüzeyden dışarı doğru yönelen ısı akısı pozitif işaretli ($\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0$) kabul edilirse, yüzeye gelen ısı akısı negatif işaretli ($\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0$) olacaktır.

$$\mathbf{q}^+(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0} \boldsymbol{\Omega} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \quad 3.17$$

Eğer yüzey siyah ise ($\varepsilon=1$), yüzeyden enerji yansımaları meydana gelmez; böylece, $I(\mathbf{r}) = I_b[T(\mathbf{r})]$ ve $\mathbf{q}^-(\mathbf{r}) = E_b[\mathbf{r}]$ olur. Yüzey siyah değil ise, “giden” olarak nitelendirilen enerjinin yayılımı ve yansımalarının toplamından ibaret olmaktadır. Yüzeydeki net ısı akısı her iki bileşenin toplanması ile elde edilir.

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \mathbf{q}^+(\mathbf{r}) - \mathbf{q}^-(\mathbf{r}) \quad 3.18$$

burada $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ ışınım ısı akısını temsil etmekte olup $\mathbf{q} = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k}$ ile temsil edilir.

Şimdi Işınım Transfer denkleminin, Denklem (3.14)'ün, katı açı üzerinden integralini aşağıdaki gibi alırsak,

$$\int_{4\pi} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} + \int_{4\pi} \beta I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} S(\mathbf{r}) d\boldsymbol{\Omega} \quad 3.19$$

ve $\int_{4\pi} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} = \nabla \cdot \int_{4\pi} \boldsymbol{\Omega} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}$ olarak yazılabileceğine ayrıca $S(\mathbf{r})$ kaynak teriminin açıdan bağımsız olduğunu göz önüne aldığımızda,

$$\nabla \cdot \int_{4\pi} \boldsymbol{\Omega} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} + \beta \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} = 4\pi \kappa I_b(T) + \sigma_s G(\mathbf{r}) \quad 3.20$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (3.20)'nin sol tarafındaki integral ifadesi Denklem (3.15)'de görülen ısı akısı ve β çarpanı da gelen ışınım fonksiyonudur: Denklem (3.12), sonuç olarak

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 4\pi\kappa I_b(\mathbf{r}) - \beta G(\mathbf{r}) + \sigma_s G(\mathbf{r}) = \kappa(4\pi I_b - G(\mathbf{r})) \quad 3.21$$

elde edilir. Denklem (3.21) ile verilen ifade “ışınım enerjisinin korunumu” ifadesi olarak tanımlanır. Burada $\nabla \cdot \mathbf{q}$ terimi net ışınım enerjisi kaybını, $4\pi\kappa I_b(\mathbf{r})$ yüzeyden içeriye yayılan ışınım enerjisini ve $\kappa G(\mathbf{r})$ katılımcı ortamda soğurulan enerjisini temsil etmektedir.

Katılımcı ortamda saçılmanın anizotropik, yani ışınımın küresel bir noktadan saçılırken farklı doğrultu ve farklı şiddetlerde, saçılması durumları doğada sıkça gözlenen bir olaydır. Anizotropik saçılma problemlerinin karmaşıklığı temel olarak faz fonksiyonu açılımındaki açılım terimlerinin sayısı ile belirlenir. Saçılma faz fonksiyonu (saçılma olasılık fonksiyonu) Legendre polinomları cinsinden bir seri olarak alınmaktadır. Genel olarak;

$$\Phi(\Theta) = 1 + \sum_{m=1}^M a_m P_m(\cos \Theta) \quad 3.22$$

ifade edilir. Burada M anizotropiklik derecesi olup, M=0 izotropik saçılma, M=1 lineer anizotropik saçılma durumlarıdır. Θ , Ω doğrultusundan gelen ışınım ile Ω' doğrultusunda saçılan ışınım arasındaki açıdır. Aynı zamanda Ω ve Ω' , aynı doğrultulara ait birim vektör olduğu için $\Omega \cdot \Omega' = \cos \Theta$ şeklinde yazılabilir. Böylelikle Denklem (3.22)'yi aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür.

$$\Phi(\Omega \cdot \Omega') = 1 + \sum_{m=1}^M a_m P_m(\Omega \cdot \Omega') \quad 3.23$$

burada P_m , m.ci dereceden Legendre Polinomlarını temsil etmektedir. Doğrusal anizotropik saçılma faz fonksiyonu, bu durumda,

$$\Phi(\Omega \cdot \Omega') = 1 + a_1(\Omega \cdot \Omega') \quad 3.24$$

halini alır ve buradaki a_1 katsayısına doğrusal-anizotropi katsayısı denir.

3.2. İntegral Transfer Denkleminin Türetilmesi

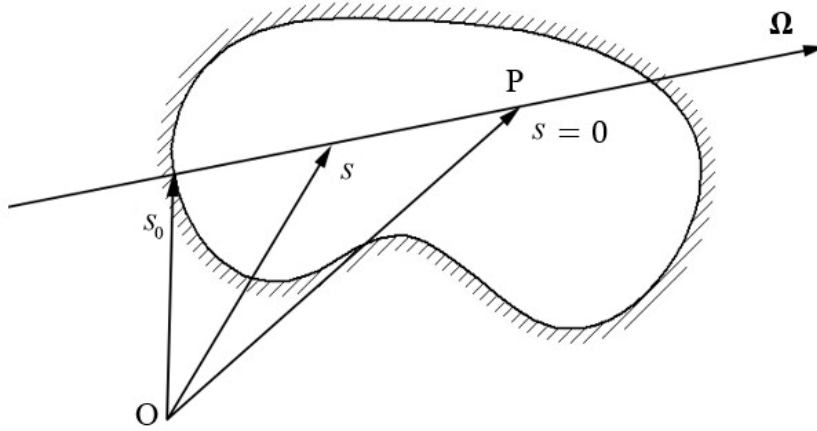
Önceki kısımda ortam kaynağının izotropik olması durumu için ışınım transfer denkleminin nasıl çıkartıldığı üzerinde durulmuştur. Bu kabul altında Işınım Transfer Denklemi;

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \beta I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} S(\mathbf{r}) \quad 3.25$$

şeklinde yazılır. Şekil 3.5'de görüldüğü gibi Denklem (3.25)'deki $\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ terimi ışınım şiddetinin $\boldsymbol{\Omega}$ doğrultusuna göre türevinde s yol parametresine göre konum denklemleri $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - s \boldsymbol{\Omega}$ şeklinde verilebilir. Bu durumda Denklem (3.25)'deki yola göre türev terimi

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I = - \left[\frac{dI(\mathbf{r} - s \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega})}{ds} \right]_{s=0} \quad 3.26$$

şeklinde matematiksel olarak yazılabilir.



Şekil 3.5. Kapalı bir bölgede foton yönünün geometrik gösterimi (Tekkalmaz'dan, 2003).

Denklem (3.26), Denklem (3.25)'de yerine konulduğunda,

$$- \left[\frac{dI(\mathbf{r} - s \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega})}{ds} \right] + \beta I(\mathbf{r} - s \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} S(\mathbf{r} - s \boldsymbol{\Omega}) \quad 3.27$$

elde edilir. Denklem (3.27), s 'e göre tek değişkenli bir "tam diferansiyel" denklemdir. Bu denklemin çözümü için Denklem (3.27)'nin her iki tarafını, denklemin integral çarpanı olan

$e^{-\beta s}$ ile çarparsak, denklemin sol tarafı $-d[e^{-\beta s} I(\mathbf{r}-s\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega})]/ds$ halini alır. Böylece Denklem (3.27) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$-\frac{d}{ds} [e^{-\beta s} I(\mathbf{r}-s\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega})] = \frac{1}{4\pi} S(\mathbf{r}-s\mathbf{\Omega}) e^{-\beta s} \quad 3.28$$

Şimdi Denklem (3.28)'i Şekil 5'de görülen herhangi bir s noktasından, $\mathbf{\Omega}$ doğrultusu boyunca yüzeydeki s_0 noktasına kadar integralini alırsak, önce

$$\int_{s'=s}^{s_0} d[e^{-\beta s'} I(\mathbf{r}-s'\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega})] = \frac{1}{4\pi} \int_{s'=s}^{s_0} S(\mathbf{r}-s'\mathbf{\Omega}) e^{-\beta s'} ds' \quad 3.29$$

ve sonra biraz düzenleme ile

$$e^{-\beta s} I(\mathbf{r}-s\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}) - e^{-\beta s_0} I(\mathbf{r}-s_0\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_{s'=s}^{s_0} S(\mathbf{r}-s'\mathbf{\Omega}) e^{-\beta s'} ds' \quad 3.30$$

veya ışınım şiddetini yanlış başına bırakırsak,

$$I(\mathbf{r}-s\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}) = e^{\beta(s-s_0)} I(\mathbf{r}-s_0\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}) + \frac{1}{4\pi} \int_{s'=s}^{s_0} S(\mathbf{r}-s'\mathbf{\Omega}) e^{-\beta s'} ds' \quad 3.31$$

şeklinde düzenlemek mümkündür. Denklem (3.31)'de $s = 0$ alınarak, ışınım şiddeti Denklem (3.32)'de verildiği şekilde elde edilir.

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = e^{-\beta s_0} I(\mathbf{r}-s_0\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}) + \frac{1}{4\pi} \int_{s'=0}^{s_0} S(\mathbf{r}-s'\mathbf{\Omega}) e^{-\beta s'} ds' \quad 3.32$$

Gelen ışınım fonksiyonu, Denklem (3.32)'de verilen ışınım fonksiyonunun katı açısı üzerinden integre edilmesi ile bulunur.

$$G(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{\Omega}} I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega} = \int_{\mathbf{\Omega}} e^{-\beta s_0} I(\mathbf{r}-s_0\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega} + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{\Omega}} \int_{s'=0}^{s_0} S(\mathbf{r}-s'\mathbf{\Omega}) e^{-\beta s'} ds' d\mathbf{\Omega} \quad 3.33$$

Denklem (3.33)'de $I(\mathbf{r}-s_0\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega})$ terimi duvardan difüzyon yolu ile yayan ve yansıyan ışınım şiddetini temsil etmekte ve gri yüzeyler için difüzyon yolu ile soğuran ve saçan yüzeylerde bu terim izotropik olduğundan, $I(\mathbf{r}-s_0\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega})\equiv I_w(\mathbf{r}-s_0\mathbf{\Omega})$ şeklinde yazılabilir. Burada $I_w(\mathbf{r}-s_0\mathbf{\Omega})$ terimi yüzeyin eşit-dağılı ışınım şiddetini temsil etmektedir.

Bu aşamadan sonra, yukarıdaki denklemlerdeki integralleri daha kullanılabilir bir forma sokmak için, kapalı sistemi sonsuz büyüklükte sayılabilecek bir hacim gibi ele alacağız. Bu durumda, kapalı hacmi küresel koordinat sisteminde değerlendirebiliriz. Kartezyen koordinat sisteminden küresel koordinat sistemine dönüşüm denklemlerinin $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$ ve $z = \rho \cos \theta$ ve hacim elemanının $dV = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$ olduğunu anımsarsak, hacim elemanı katı açı cinsinden $dV = \rho^2 d\rho d\Omega$ bulunur. Bu ifadeden çıkararak $dV = s'^2 ds' d\Omega$ veya $dV / s'^2 = ds' d\Omega$ şeklinde yazılabilir. $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - s'\mathbf{\Omega}$ tanımından, $s' = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ olduğu görülür. Dolayısı ile $ds' d\Omega = dV / |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2$ şeklinde yazılabilir. Denklem (3.33)'de yer alan katlı integraller böylelikle üç katlı hacim integraline dönüştürülebilir. Buna benzer şekilde, yarıçapı a olan küre yüzeyini temsil eden yüzey vektörü \mathbf{r}_w olarak alınırsa, $\mathbf{r}_w = a \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + a \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + a \cos \theta \mathbf{k}$ şeklinde yazılabilir. Küre yüzeyine dik yüzey vektörünü $d\Gamma$ ile temsil edersek, $d\Gamma = (\mathbf{r}_{w\theta} \times \mathbf{r}_{w\varphi}) d\theta d\varphi$ eşitliğinden $d\Gamma = a \mathbf{r}_w \sin \theta d\theta d\varphi = a \mathbf{r}_w d\Omega$ olarak bulunur. Yüzeye dik normal vektörü katı açı olarak alınabilir. Fakat katı açı birim vektör değildir; bu nedenle, katı açı 4π ile bölünürse $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}) / 4\pi$ şeklinde bulunabilir. Katı açının gördüğü yüzey alanı, yüzeye dik yüzey vektörünün yüzey normali ile skalar çarpımına eşittir. $\mathbf{r}_w = \mathbf{r} - s_0\mathbf{\Omega}$ tanımından $s_0 = |\mathbf{r}_w - \mathbf{r}|$ ve $s_0^2 d\Omega = \frac{\mathbf{\Omega}_w \cdot d\Gamma}{4\pi}$ ifadesinden

$$d\Omega = \frac{\mathbf{\Omega}_w \cdot d\Gamma}{4\pi |\mathbf{r}_w - \mathbf{r}|^2} = \frac{(\mathbf{r}_w - \mathbf{r}) \cdot d\Gamma}{4\pi |\mathbf{r}_w - \mathbf{r}|^3} = \frac{(\mathbf{r}_w - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma}{4\pi |\mathbf{r}_w - \mathbf{r}|^3} \quad 3.34$$

şeklinde yazmak mümkündür (Tekkalmaz, 2003).

Denklem (3.33) yukarıda verilen hatırlatmaların ışığında tekrar düzenlenirse net gelen ışınım fonksiyonu,

$$G(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} I_w(\mathbf{r}_w) \frac{(\mathbf{r}_w - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} e^{-\beta|\mathbf{r}_w - \mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_w - \mathbf{r}|^3} d\Gamma + \int_V S(\mathbf{r}') \frac{e^{-\beta|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV' \quad 3.35$$

veya duvardan olan doğrudan ışıma terimini

$$f_G(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} I_w(\mathbf{r}_w) \frac{(\mathbf{r}_w - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} e^{-\beta|\mathbf{r}_w - \mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_w - \mathbf{r}|^3} d\Gamma \quad 3.36$$

şeklinde tanımlarsak

$$G(\mathbf{r}) = f_G(\mathbf{r}) + \int_V S(\mathbf{r}') \frac{e^{-\beta|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV' \quad 3.37$$

şeklinde gelen ışınım fonksiyonu için integral denkleminin son hali elde edilir.

Işınım ısı akısını bulmak için, Denklem (3.33)'ü Ω ile çarptıktan sonra katı açı üzerinden integrali alınır.

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \Omega I(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = \int_{\Omega} \Omega e^{-\beta s_0} I(\mathbf{r} - s_0 \Omega, \Omega) d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \int_{s'=0}^{s_0} \Omega S(\mathbf{r} - s' \Omega) e^{-\beta s'} ds' d\Omega \quad 3.38$$

Yukarıda verilen kabuller ve hatırlatmaların ışığı altında Denklem (3.38)'i aşağıdaki şekillerde yazmak mümkündür.

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} I_w(\mathbf{r}_w) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)(\mathbf{r}_w - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} e^{-\beta|\mathbf{r}_w - \mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_w - \mathbf{r}|^4} d\Gamma + \int_V S(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-\beta|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad 3.39$$

veya gelen ışınımda olduğu gibi duvardan gelen doğrudan ışınım akısı terimini

$$\mathbf{f}_q(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} I_w(\mathbf{r}_w) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)(\mathbf{r}_w - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} e^{-\beta|\mathbf{r}_w - \mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_w - \mathbf{r}|^4} d\Gamma \quad 3.40$$

olarak yazılır. Burada $\mathbf{f}_q(\mathbf{r})$ teriminin vektörel bir büyüklük olduğuna dikkat edilmelidir. Burada $I_w(\mathbf{r}_w, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_w|)$ kapalı yüzeyin ışıınım şiddetini, $d\Gamma$ yüzey alan elemanın dik vektörünü, \mathbf{r}_w yüzeyin konumunu temsil etmektedir.

Işınım ısı akısı için integral denklemi son olarak

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_q(\mathbf{r}) + \int_V S(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-\beta|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad 3.41$$

şeklinde düzenlenmiş olur.

Böylece Denklem (3.37) ile Denklem (3.41) ortak çözülerek sistem içindeki gelen ışıınım enerjisi ile ışıınım ısı akısı hesaplanabilmektedir. Bu denklemlere hangi sayısal yöntemin uygulanacağı analistin çözeceği problemin boyutu, zorluğu vb gibi etmenlere bağlıdır.

4. STANDART VE ALTERNATİF SENTETİK KERNEL METOTLARININ GELİŞTİRİLMESİ

Doğrusal anizotropik saçılma içeren ortamlar için, standart SK_N metoduyla paralel plaka ve küresel katılımcı ortamda SK_N denklemleri türetilmesi yapılmıştır (Altaç 2002; Tekkalmaz ve Altaç, 2007 ve 2008). Bu bölümde, üç boyutlu homojen katılımcı genel ortamlarda izotropik saçılma olması durumu için, Alternatif SK_N metodunun genişletilmiş koordinat sistemine uyarlanması ve sınır koşullarının türetilmesi ele alınmıştır.

Alternatif SK_N metodu da, standart SK_N yaklaşımda olduğu gibi, gelen ışınım fonksiyonu ve net ışınım ısı akısının integral denklemlerinden yararlanılmaktadır. Doğrusal anizotropik saçılmalı homojen olmayan ortam için, gelen ışınım fonksiyonu ve ışınım ısı akısı Bölüm 3'de Denklem (3.37) ve Denklem (3.41) ile verilmiştir. Bu denklemlerde geçen hacim integralleri, ışınım yayımına ve saçılmaya bağlı ortam içindeki ışınımı temsil ederken, $f_G(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{f}_q(\mathbf{r})$ ortamı çevreleyen duvarlarından kaynaklanan, doğrudan (direkt) gelen enerji ve ışınım ısı akısını temsil etmektedir. Bu enerji katkıları sırasıyla Denklem (3.36) ve (3.40)'da tanımlanmıştır. Diğer bir deyişle, ışınım integral terimleri, eşit-dağılı ortam ışınımı ile doğrudan ışıyan enerji katkı terimleri olan $f_G(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{f}_q(\mathbf{r})$ 'nden oluşmaktadır. Alternatif SK_N metodunda da Değiştirilmiş Diferansiyel Yaklaşım (MDA; Modified Diffusion Approximation) gibi Işınım İntegral Transfer Denklemlerinin bu özelliğinden faydalanılmaktadır.

İzotropik olarak saçılan, homojen katılımcı ortam için gelen ışınım ve net ışınım ısı akısı integral denklemleri, Denklem (3.37) ve (3.41),

$$G(\mathbf{r}) = f_G(\mathbf{r}) + \int_V S_0(\mathbf{r}') \frac{e^{-\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} dV' \quad 4.1$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_q(\mathbf{r}) + \int_V S_0(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')e^{-\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' \quad 4.2$$

şeklindedir. Bu denklemde geçen fiziksel niceliklerin tanımı Bölüm 3'de verilmiştir.

4.1. SK_N Metodunun Uygulanması

Analizimize başlamadan önce, kolaylık olması bakımından, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ olarak tanımlarsak, $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ olur. Bu bağlamda, integral denklemlerinde geçen üstel fonksiyonlarla yapılan yaklaşım için

$$\frac{\boldsymbol{\rho}}{4\pi\rho^3} e^{-\beta\rho} = \nabla_{\mathbf{r}'} \left(\int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{-\beta t}}{t^2} dt \right) = \nabla_{\mathbf{r}'} \left(\frac{E_2(\beta\rho)}{4\pi\rho} \right) \quad 4.3$$

şeklinde verilen eşitlikten yararlanacağız (Davison ve Sykes, 1957); burada $E_2(x)$ ikinci dereceden üstel integral fonksiyonudur (Abramowitz ve Stegun, 1972).

Standart SK_N metodunun uygulanmasında birinci aşama Denklem (4.1) ve (4.2)'deki ışınım integral denklemlerinin transfer kernellerinin, üstel fonksiyonların toplamları şeklinde ifade edilmesi yer almaktadır. Bu amaçla, $E_k(x)$ üstel integral fonksiyonlarına, kuadratür toplamından ibaret, aşağıdaki üstel-toplam yaklaşımı önerilmektedir:

$$E_k(x) = \int_{\mu=0}^1 \mu^{k-2} e^{-x/\mu} d\mu \cong \sum_{n=1}^N w_n \mu_n^{k-2} e^{-x/\mu_n}, \quad (k \geq 0) \quad 4.4$$

Burada w_n ve μ_n , bu bölümde çift-küresel harmonik (Double P_N veya DP_N) olarak anılan kuadratürler ki $[0,1]$ aralığına karşılık gelen Gauss-Legendre kuadratürlerini temsil etmektedir.

Denklem (4.4) kullanılarak ve $E_0(x) = e^{-x}/x$ olduğu hatırlanarak (Abramowitz ve Stegun, 1972), genel koordinat sisteminde sentetik kerneller aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$\frac{e^{-\beta\rho}}{4\pi\rho^2} \cong \sum_{n=1}^N \frac{w_n}{D_n} \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad 4.5$$

$$\frac{E_2(\beta\rho)}{4\pi\rho} \cong \sum_{n=1}^N w_n \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad 4.6$$

burada $D_n = \mu_n^2 / \beta$ ve $\mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \exp(-\beta\rho / \mu_n) / (4\pi\rho)$ olarak tanımlanmıştır.

Denklem (4.5)'i, Denklem (4.1)'in hacim integrali olarak verilen teriminde yerine yazarsak ve

$$G_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{D_n} \int_V S_0(\mathbf{r}') \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad 4.7$$

şeklinde tanımlama ile hacim integralini içeren terim $\sum_{n=1}^N w_n G_n(\mathbf{r})$ olur ve Denklem (4.1)

artık

$$G(\mathbf{r}) = f_G(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^N w_n G_n(\mathbf{r}) \quad 4.8$$

şeklinde yazılabilir. Dikkat edilecek olursa, yukarıda tanımlanan $\mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ fonksiyonunu aşağıda en genel hali verilen Poisson kısmi-diferansiyel denkleminin Green fonksiyonu çözümdür (Butkovskiy, 1982); yani

$$-\nabla^2 \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{\beta^2}{\mu_n^2} \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad 4.9$$

burada $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ Dirac fonksiyonudur. Diğer bir deyişle, Denklem (4.7) ile verilen $G_n(\mathbf{r})$, sonsuz büyüklükteki bir ortam için ($\mathbf{r} \rightarrow \infty, G_n(\mathbf{r}) \rightarrow 0$) Green yöntemi çözümüne karşılık gelmektedir; yani, Denklem (4.7)'nin her iki tarafına Laplace operatörü uygulanır ve Denklem (4.9) da kullanırsa

$$D_n \nabla^2 G_n(\mathbf{r}) = \int_V S_0(\mathbf{r}') \nabla^2 \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' = \int_V S_0(\mathbf{r}') \left(\frac{\beta^2}{\mu_n^2} \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) dV' \quad 4.10$$

veya

$$D_n \nabla^2 G_n(\mathbf{r}) = \frac{\beta}{D_n} \int_V S_0(\mathbf{r}') \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \int_V S_0(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \quad 4.11$$

elde edilir; Denklem (4.11)'in birinci terimi Denklem (4.7)'den $\beta G_n(\mathbf{r})$ 'ne ve ikinci terim de integrali alındıktan sonra $S_0(\mathbf{r})$ 'e eşit olduğunu görülmektedir (Bkz Ek.1). Böylece, Denklem (4.11)

$$-D_n \nabla^2 G_n(\mathbf{r}) + \beta G_n(\mathbf{r}) = S_0(\mathbf{r}) \quad 4.12$$

veya $S_0(\mathbf{r})$ izotropik kaynak terimi yerine yazılırsa

$$-D_n \nabla^2 G_n(\mathbf{r}) + \beta G_n(\mathbf{r}) = 4\pi\kappa(\mathbf{r})I_b [T(\mathbf{r})] + \sigma_s(\mathbf{r})G(\mathbf{r}), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad 4.13$$

elde edilir. Denklem (4.13) ile verilen bu en genel kısmi-diferansiyel denklem takımına, izotropik olarak saçan katılımcı ortan için "*standart SK_N denklemleri*" adı verilmektedir. Bu arada, Denklem (4.2)'de integral altındaki aşağıdaki terimi daha dikkatle ele alacak olursak, Denklem (4.3)'deki gradyantı alınan ifade için Denklem (4.6) ile verilen ifadeyi yerine yazarsak

$$\frac{\rho}{4\pi\rho^3} e^{-\beta\rho} \cong \sum_{n=1}^N w_n \nabla_{\mathbf{r}'} \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad 4.14$$

elde edilir. Denklem (4.14) ile verilen eşitliğin Denklem (4.2)'nin sağ tarafındaki hacim integralinde kullanılmasıyla da

$$\mathbf{q}_n(\mathbf{r}) = \int_V S_0(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad 4.15$$

elde ederiz. Denklem (4.15)'in de Denklem (4.2)'de yerine yazılmasıyla

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_q(\mathbf{r}) + \int_V S_0(\mathbf{r}') \frac{\rho e^{-\beta\rho}}{4\pi\rho^3} dV' = \mathbf{f}_q(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^N w_n \mathbf{q}_n(\mathbf{r}) \quad 4.16$$

elde edilebilir ki bu denklem yardımıyla da ortamın net ışıınım ısı akısı hesaplanır.

Denklem (4.16)'da $\mathbf{q}_n(\mathbf{r})$ ile temsil edilen yeni bir değişken elde edilmektedir. Bu değişkenin de çözümünün yapılması şarttır. Ancak $G_n(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{q}_n(\mathbf{r})$ ifadeleri arasında bir ilişkinin varlığı $\mathbf{q}_n(\mathbf{r})$ için çözümü kolaylaştırmaktadır. Bu bölümdeki türetmelerde $\nabla \equiv \nabla_{\mathbf{r}}$ ve $\mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 'nin simetrik olduğuna (yani $\mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbb{K}_n(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ olduğuna) dikkat çektikten sonra, \mathbf{r} ve \mathbf{r}' 'e göre gradyant operatörünün aşağıdaki şekilde yer değiştirebilir:

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad 4.17$$

Bu ilişkiyi belirlemek için Denklem (4.15)'de Denklem (4.17)'yi kullandığımızda

$$\mathbf{q}_n(\mathbf{r}) = -\int_V S_0(\mathbf{r}') \nabla \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' = -\nabla \left(\int_V S_0(\mathbf{r}') \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \right) \quad 4.18$$

veya parantez içindeki terim Denklem (4.7)'den

$$\mathbf{q}_n(\mathbf{r}) = -\nabla(D_n G_n(\mathbf{r})) = -D_n \nabla G_n(\mathbf{r}) \quad 4.19$$

olarak yazarak nihai eşitliğini (veya ilişkiyi) elde etmiş oluyoruz.

Standart SK_N metodu bağlamında yaptığımız türetmelerin enerjinin korunumu ilkesini de sağlaması gerekir; bu bakımdan, Denklem (4.15)'in diverjansını alacağız.

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_n(\mathbf{r}) = \int_V S_0(\mathbf{r}') \nabla \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad 4.20$$

Denklem (4.15) ve Denklem (4.17)'den yararlanırsak, Denklem (4.20)

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_n(\mathbf{r}) = -\int_V S_0(\mathbf{r}') \nabla^2 \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad 4.21$$

şeklinde yazılabilir.

Denklem (4.9)'dan $\nabla^2 \mathbb{K}_n$ terimini çekip, Denklem (4.21)'de yerine yazarsak,

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_n(\mathbf{r}) = - \int_V S_0(\mathbf{r}') \left(\frac{\beta^2}{\mu_n^2} \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) dV' \quad 4.22$$

ve bazı düzenlemelerden sonra

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_n(\mathbf{r}) = - \frac{\beta}{D_n} \int_V S_0(\mathbf{r}') \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \int_V S_0(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \quad 4.23$$

bulunur. Dikkat edilecek olursa, Denklem (4.23)'ün birinci terimi Denklem (4.7)'den $\beta G_n(\mathbf{r})$ 'ne ve ikinci terim de integrali alındıktan sonra $S_0(\mathbf{r})$ 'e eşitliği açıktır (Bkz EK.1). Böylece,

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_n(\mathbf{r}) = S_0(\mathbf{r}) - \beta G_n(\mathbf{r}) \quad 4.24$$

elde edilir.

4.2. Alternatif SK_N Metodu

Standard SK_N metodunda doğrudan ışıyım terimlerinin (f_G ve \mathbf{f}_q) hesaplanması, bu terimler için analitik çözüm bulmayı zorunlu kılmaktadır. Paralel plaka, silindirik veya küresel bir boyutlu kapalı sistemler için, analitik ifadelerin bulunması nispeten zor olsa da mümkündür. Ancak daha da genellenmiş ve karmaşık geometrilerde analitik türetmeler pek kolay olmamakla beraber; bunları nümerik olarak hesaplamak mümkün olsa da oldukça zaman alıcı prosedürleri gerektirdiğinden pratik mühendislik uygulamalarına uyarlanması oldukça zordur. Bu nedenle, alternatif SK_N metodunda, doğrudan ışıyım ifadelerinin analitik hesaplanmasından kaçınmak için eşit-dağılı terimlere uygulanan üstel terimler toplamı yaklaşımı benzer şekilde, benzer üstel yaklaşımla doğrudan (duvar) ışıyımı katkısına da uygulanmaktadır. İlk olarak, \mathbf{r}_w duvarı temsil eden konum vektörü olmak üzere, duvarların eşit-dağılı olduğu kabulüyle, yani $I_w(\mathbf{r}_w, \mathbf{\Omega}_w) \equiv I_{w,0}(\mathbf{r}_w)$ ve $\rho_w = \mathbf{r} - \mathbf{r}_w$ (yada $\rho_w = |\mathbf{r}_w - \mathbf{r}|$) tanımıyla, Denklem (4.3) ve Denklem (4.14) kullanılarak, Denklem (3.36) ve (3.40) yeniden düzenlenebilir.

$$f_G(\mathbf{r}) = \int_S \nabla \left[I_{w,0}(\mathbf{r}_w) \frac{E_2(\beta \rho_w)}{4\pi \rho_w} \right] \cdot d\mathbf{S} \quad 4.25$$

ve

$$\mathbf{f}_q(\mathbf{r}) = \int_S I_{w,0}(\mathbf{r}_w) \frac{\rho_w e^{-\beta \rho_w}}{4\pi \rho_w^4} (\rho_w \cdot d\mathbf{S}) = - \int_S \frac{\rho_w}{\rho_w} \nabla \left[I_{w,0}(\mathbf{r}_w) \frac{E_2(\beta \rho_w)}{4\pi \rho_w} \right] \cdot d\mathbf{S} \quad 4.26$$

burada $d\mathbf{S}$ yüzeye dik vektördür.

Denklem (4.25) ve Denklem (4.26)'da, Denklem (4.4)–(4.6) kullanılarak, aşağıdaki denklemleri tanımlamak mümkündür:

$$f_{G,n}(\mathbf{r}) = \int_S \nabla \left[I_{w,0}(\mathbf{r}_w) \frac{e^{-\beta \rho_w / \mu_n}}{4\pi \rho_w} \right] \cdot d\mathbf{S} \quad 4.27$$

ve

$$\mathbf{f}_q(\mathbf{r}) = \int_S I_{w,0}(\mathbf{r}_w) \frac{\rho_w e^{-\beta \rho_w}}{4\pi \rho_w^4} (\rho_w \cdot d\mathbf{S}) = - \int_S \frac{\rho_w}{\rho_w} \nabla \left[I_{w,0}(\mathbf{r}_w) \frac{E_2(\beta \rho_w)}{4\pi \rho_w} \right] \cdot d\mathbf{S} \quad 4.28$$

Böylece, doğrudan ışınım katkıları da aşağıdaki gibi sonlu toplamlardan oluşur.

$$f_G(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N w_n f_{G,n}(\mathbf{r}) \quad \text{ve} \quad \mathbf{f}_q(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N w_n \mathbf{f}_{q,n}(\mathbf{r}) \quad 4.29$$

Duvarın (doğrudan) ışınım katkısını içeren terimlerin ışınım enerjisi korunumu, $\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}) = S_0(\mathbf{r}) - \beta G(\mathbf{r})$, Denklem (4.8) ve Denklem (4.16) yerine yazıldığında $\nabla \cdot \mathbf{f}_q(\mathbf{r}) = -\beta f_G(\mathbf{r})$ ilişkisinin sağlanması gereği açıktır. Aynı şekilde, Denklem (4.24)'den dolayı, $\nabla \cdot \mathbf{f}_{q,n}(\mathbf{r}) = -\beta f_{G,n}(\mathbf{r})$ özelliği de sağlanır. Buradaki $f_{G,n}(\mathbf{r})$ aşağıdaki verilen difüzyon denklemi benzeri bir diferansiyel denkleme karşılık gelir (Altaç, 2014).

$$-D_n \nabla^2 f_{G,n}(\mathbf{r}) + \beta f_{G,n}(\mathbf{r}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad 4.30$$

Alternatif SK_N metodu gereği doğrudan ışınım terimlerine yapılan üstel yaklaşımlar da Denklem (4.8) ve Denklem (4.16)'da yerine yazılır.

$$G(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N w_n (f_{G,n}(\mathbf{r}) + G_n(\mathbf{r})) \quad 4.31$$

ve

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N w_n (\mathbf{f}_{q,n}(\mathbf{r}) + q_n(\mathbf{r})) \quad 4.32$$

Bundan sonra parantez içindeki ifadelerle

$$G_n^*(\mathbf{r}) = f_{G,n}(\mathbf{r}) + G_n(\mathbf{r}) \text{ ve } \mathbf{q}_n^*(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_{q,n}(\mathbf{r}) + q_n(\mathbf{r}) \quad 4.33$$

şeklindeki tanımlamalardan sonra gelen enerji (fonksiyonu) ve net ışıınım ısı akısı

$$G(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N w_n G_n^*(\mathbf{r}) \text{ ve } \mathbf{q}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N w_n \mathbf{q}_n^*(\mathbf{r}) \quad 4.34$$

biçimde yazılabilir:

Denklem (4.13) ve Denklem (4.30) taraf tarafa toplanarak ve Denklem (3.33)'deki tanımlar kullanılarak alternatif SK_N metodun için ASK_N denklemleri

$$-D_n \nabla^2 G_n^*(\mathbf{r}) + \beta G_n^*(\mathbf{r}) = 4\pi\kappa(\mathbf{r}) I_b [T(\mathbf{r})] + \sigma_s(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad 4.35$$

olarak elde edilir (Altaç, 2014).

Bu yeni formülasyonun standart SK_N metoduna kıyasla, doğrudan ışıınım terimlerinin analitik ifadelerinin bulunması yerine, üstel yaklaşımların kullanılmasından dolayı, daha az doğrulukla çözüm vereceği açıktır; ancak bu yaklaşımın mertebesinin (yani N 'nin) artırılmasıyla giderilebileceği düşünülmektedir. Çözümün doğruluğundan bir miktar fedakarlık edilmiş olmakla beraber, sayısal çözümde çözüm süresinin (cpu-zamanını) önemli ölçüde azaltacağı aşıkardır.

Eşit-dağılı ve doğrudan bileşenlerin Denklem (4.33) ile öngörülen cebirsel toplamları sonucunda, diğer ilişkili bağıntılar da aşağıda şekilde yazılabilmektedir (Altaç, 2014):

$$\mathbf{q}_n^*(\mathbf{r}) = -D_n \nabla G_n^*(\mathbf{r}) \quad 4.36$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_n^*(\mathbf{r}) = S_0(\mathbf{r}) - \beta G_n^*(\mathbf{r}) \quad 4.37$$

Denklem (4.37)'yi w_n ile çarpıp tüm n 'ler üzerinden toplarsak ve Denklem (4.34)'deki tanımlardan yararlanırsak, enerjinin korunumu bağıntısını, yani $\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}) = S_0(\mathbf{r}) - \beta G(\mathbf{r})$, ifadesini elde ederiz.

4.3. Sınır Koşullarının Türetilmesi

Alternatif SK_N metodunun sınır koşullarını türetmek için koordinat sisteminde izotropik saçılmalı ortamlarda uygun sınır şartları türetmek için, Denklem (4.9) $G_n^*(\mathbf{r})$ ile, Denklem (4.35)'te $\mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ile çarpılırsa

$$-D_n \nabla^2 \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_n^*(\mathbf{r}) + \beta \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_n^*(\mathbf{r}) = D_n G_n^*(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad 4.38$$

$$-D_n \nabla^2 G_n^*(\mathbf{r}) \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \beta G_n^*(\mathbf{r}) \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S_0(\mathbf{r}') \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad 4.39$$

olarak yazılır. Şimdi bu iki denklem taraf tarafa çıkarılır, kapalı bölge üzerinden hacim integrali alınır ve aşağıdaki şekilde düzenlenirse,

$$G_n^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{D_n} \int_V S_0(\mathbf{r}') \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \int_V \left(\nabla^2 G_n^*(\mathbf{r}) \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \nabla^2 \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_n^*(\mathbf{r}) \right) dV' \quad 4.40$$

şeklinde düzenlenebilir. Denklem (4.41) ile verilen $G_n^*(\mathbf{r})$ 'nin, Denklem (4.7)'de verilene eşit olması için, ikinci hacim integralinin "sıfır" olması gerekmektedir; yani,

$$\int_V \left(\nabla^2 G_n^*(\mathbf{r}) \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \nabla^2 \mathbb{K}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_n^*(\mathbf{r}) \right) dV' = 0 \quad 4.41$$

Bu koşul, bize alternatif SK_N denklemleri için sınır koşulu türetilmesine kullanılacak bir eşitlik sağlamaktadır. Denklem (4.41)'de aşağıda verilen Green'in ikinci teoremini uygulamamız, sınır koşullarını türetmede daha çok kolaylık sağlar. Green'in ikinci teoremi, üç boyutlu uzayda tanımlı ve sürekli olmak üzere Φ ve Ψ fonksiyonları için aşağıda verilen bağıntının sağlandığını bildirmektedir (Gradshteyn ve Ryzhik, 2007):

$$\int_V \left(\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi \right) dV = \int_S \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS \quad 4.42$$

burada dS yüzey alan elemanı ve n yüzeye dik doğrultuyu temsil etmektedir.

Denklem (4.41), Denklem (4.42) yardımı ile

$$\int_S \left[\mathbb{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_w) \frac{\partial G_n^*}{\partial n(\mathbf{r}_w^-)} + \left(2I_{w,0}(\mathbf{r}_w^-) - G_n^*(\mathbf{r}_w) \right) \frac{\partial \mathbb{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_w)}{\partial n(\mathbf{r}_w^-)} \right] dS = 0 \quad 4.43$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem (4.43)'deki $I_{w,0}(\mathbf{r}_w)$ ile fiziksel ışınım sınır şartını içermektedir. Ancak, $\partial G_n^* / \partial n(\mathbf{r}_w^+)$ terimi sınır yüzeyinin dış tarafından normalin türevidir. ∇G_n^* ve $\mathbf{q}_n^*(\mathbf{r})$ birbiri ile Denklem (4.36) ile ilişkili olduğuna dikkat edildiğinde ve ayrıca β, σ_s gibi ortam özellikleri duvar üzerinden ($\beta = \sigma_s = 0$ gibi) tanımlı olmadığı bilindiğinden, $\partial G_n^* / \partial n(\mathbf{r}_w^+) = \partial G_n^* / \partial n(\mathbf{r}_w^-)$ yazılabilir (Altaç, 2014). Bu koşullar altında sınır şartlar bir boyutlu düzlemde ($-x_0 \leq x \leq x_0$), silindirik ve küresel ($0 \leq r \leq r_0$) ortam için aşağıdaki şekilde verilmiştir (Altaç, 2014):

$$\mp \frac{\mu_n}{\beta} \frac{dG_n^*}{dx}(\mp x_0) + G_n^*(\mp x_0) = 2I_{w,0}^\pm(\mp x_0) \quad 4.45$$

$$\frac{\mu_n}{\beta} \frac{dG_n^*}{dr}(r_0) + \frac{K_1(\beta r_0 / \mu_n)}{K_0(\beta r_0 / \mu_n)} G_n^*(r_0) = 2I_{w,0}^-(r_0) \frac{K_1(\beta r_0 / \mu_n)}{K_0(\beta r_0 / \mu_n)} \quad 4.46$$

$$\frac{\mu_n}{\beta} \frac{dG_n^*}{dr}(r_0) + \left(1 + \frac{\mu_n}{\beta r_0} \right) G_n^*(r_0) = I_{w,0}^-(r_0) \left(1 + \frac{\mu_n}{\beta r_0} \right) \quad 4.47$$

burada $K_0(x)$ ve $K_1(x)$ değiştirilmiş Bessel fonksiyonlarıdır (Abramovitz, 1972)

İki boyutlu geometrilerde sınır koşullarının türetilmesi nispeten daha zordur. Bu yüzden bir ilk yaklaşım olarak bir boyutlu düzlemde türetilen sınır koşulunu ele alabiliriz.

4.4. Sayısal Çözüm Stratejisi

Alternatif SK_N denklemleri, Denklem (4.35), ile sınır koşulları, sonlu-farklar veya sonlu-hacim yöntemleri ile çözülmeye uygun denklemlerdir. Bölüm 5'de sonlu-hacim yöntemiyle çözümüne ilişkin detaylar verilmiştir. Bu denklemlerin çözümünden $G_n^*(\mathbf{r})$ terimden Denklem (4.36) ile $\mathbf{q}_n^*(\mathbf{r})$ hesaplanır. Denklem (4.34) yardımı ile gerçek fiziksel nicelikler olan gelen ışıınım ve net ısı akısı, $G(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ hesaplanır.

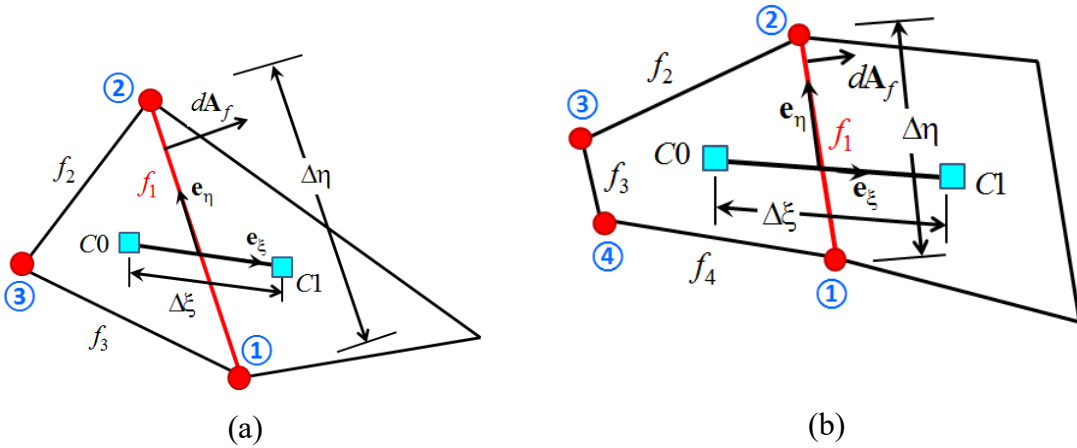
5. ORTOGONAL OLMAYAN HÜCRE-MERKEZLİ İZGARALARA SONLU-HACİM METODUNUN UYGULANMASI

Bu bölümde, gelişigüzel (düzensiz) iki boyutlu alanda genel yayılım denklemi formundaki bir kısmi diferansiyel denklemi ele alınıp ortogonal (dik) olmayan Hücre Merkezli Sonlu Hacim metodunun (HM-SHM) uygulaması verilmiştir.

Bu bölümde iki boyutta sonlu-hacimden “alan” veya “hücre”, yüzey’den de “kenar” kast edilmektedir. İki boyutlu problemlerde en sık kullanılan sonlu-hacimler hücre “üçgen” ve “dörtgen” yapıdadır. Bu nedenle, sonlu-hacim metodunun uyarlanması her iki hücre tipi göz önüne alınmıştır.

5.1. Sonlu Hücresinin Tanımı ve Korunum Denkleminin Ayrıklaştırılması

Şekil 5.1’de görülen C0 ve C1 ağırlık merkezli *üçgen ve dörtgen* tipinde iki komşu hücre (CELL) ele alınmıştır. Bu hücrelerin en genel haliyle ortogonal olmadığı (yani, ①②- ile verilen f_1 -yüzeyi ya da doğrusu ile hücre merkezlerini birleştiren C0-C1 doğrusunun bir birine dik olmadığı) kabul edilmektedir.



Şekil 5.1. Ortogonal (dik) olmayan hacim tipleri, (a) Üçgen hacim tipi, (b) Dörtgen hacim tipi.

İki boyutlu kartezyen koordinat sisteminde korunan sistemlerin uyduğu genel kısmi diferansiyel denklem, veya *yayılım denklemi*, Denklem (5.1) şeklinde verilmiştir.

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = S$$

burada S kaynak terimi olarak adlandırılır; \mathbf{q} ise akıyı temsil etmekte olup, ϕ ile $\mathbf{q} = -\Gamma \nabla \phi = -\Gamma (\partial \phi / \partial x) \mathbf{i} - k (\partial \phi / \partial y) \mathbf{j}$ difüzyon bağıntısı ile ilişkilidir. Denklem (5.1)'i iki boyutlu sistemler için düşündüğümüzde C_0 üçgen (veya dörtgen) kontrol hacmi üzerinden integrali alındığında, Diverjans (veya *Gauss-Ostrogradsky*) teoremi uygulanır. Diverjans teoremi, herhangi bir vektör alanı \mathbf{q} 'nun diverjansının kapalı bir hacimdeki hacim integralinin, aynı vektör alanı \mathbf{q} 'nun o hacmi çevreleyen herhangi bir kapalı bir yüzey üzerindeki yüzey integraline eşit olduğunu söyler. Bu bilgi ışığı altında Denklem (5.1),

$$\oint_{C_0} \mathbf{q}_f \cdot d\mathbf{A}_f = \iiint_{C_0} S dV \quad 5.2$$

şeklinde yazılabilir. Üçgen ızgara kullanılması kabulüyle, akının (\mathbf{q}) C_0 sonlu hacmini örten f_1, f_2 ve f_3 yüzeyleri üzerinde \mathbf{q}_{f_1} , \mathbf{q}_{f_2} ve \mathbf{q}_{f_3} değerlerinde sabit olduğunu kabul ederek Denklem (5.2),

$$\iiint_{C_0} S dV = \mathbf{q}_{f_1} \cdot d\mathbf{A}_{f_1} + \mathbf{q}_{f_2} \cdot d\mathbf{A}_{f_2} + \mathbf{q}_{f_3} \cdot d\mathbf{A}_{f_3} = \sum_i \mathbf{q}_{f_i} \cdot d\mathbf{A}_{f_i} \quad 5.3$$

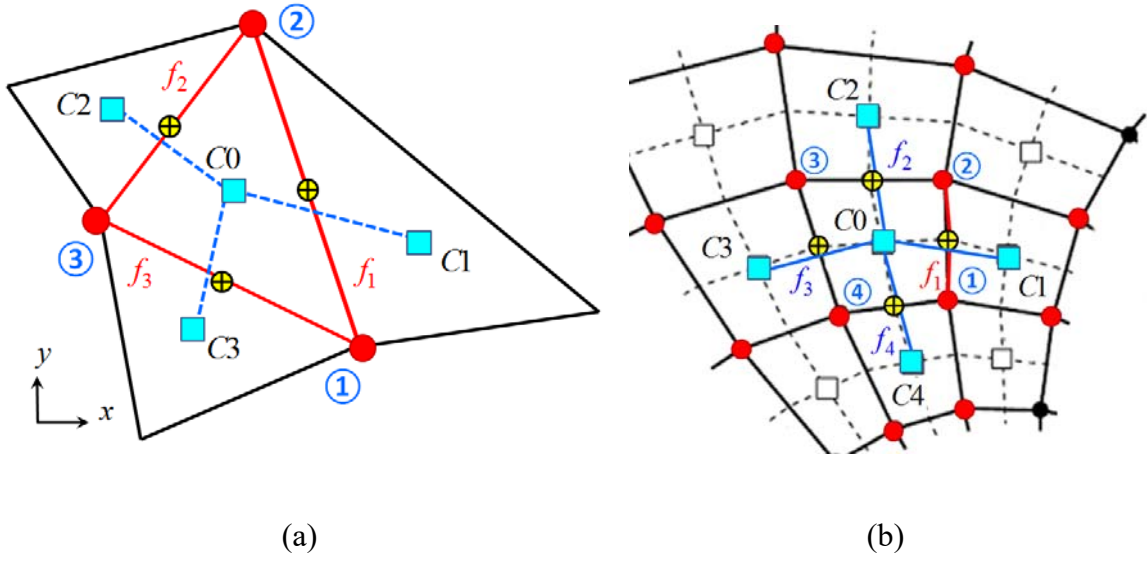
şeklinde verilebilir. Denklem (5.1), (5.2) ve (5.3)'teki S kaynak terimi ($S_C + S_P \phi_P$) şeklinde de genelleştirilebileceği de göz önüne alınarak, Denklem (5.3) çokgen kenarlı sonlu-hacimler için,

$$\sum_f \mathbf{q}_f \cdot d\mathbf{A}_f = (S_C + S_P \phi_P) \Delta V_{C_0} \quad 5.4$$

şeklinde yazılabilir. Bu kısma kadar izlenen yol, birbirine dik (ortogonal) olan komşu sonlu hacimlere uygulanan teknik ile aynıdır. f_1 yüzeyine (①②)doğrusu) dik olan yüzey alan vektörünü ($d\mathbf{A}_f$) bulmak için, $|\overline{\mathbf{12}}|$ doğrusunun eğimi $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$ denklemi ile ifade edilir. Birbirine dik iki vektörün skalar çarpımı sıfır olması gereğinden $\overline{\mathbf{12}} = (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j}$ ve $|\overline{\mathbf{12}}| \cdot d\mathbf{A}_f = 0$ olmalıdır; yani, f_1 yüzeyi için yüzeye dik yüzey vektörü,

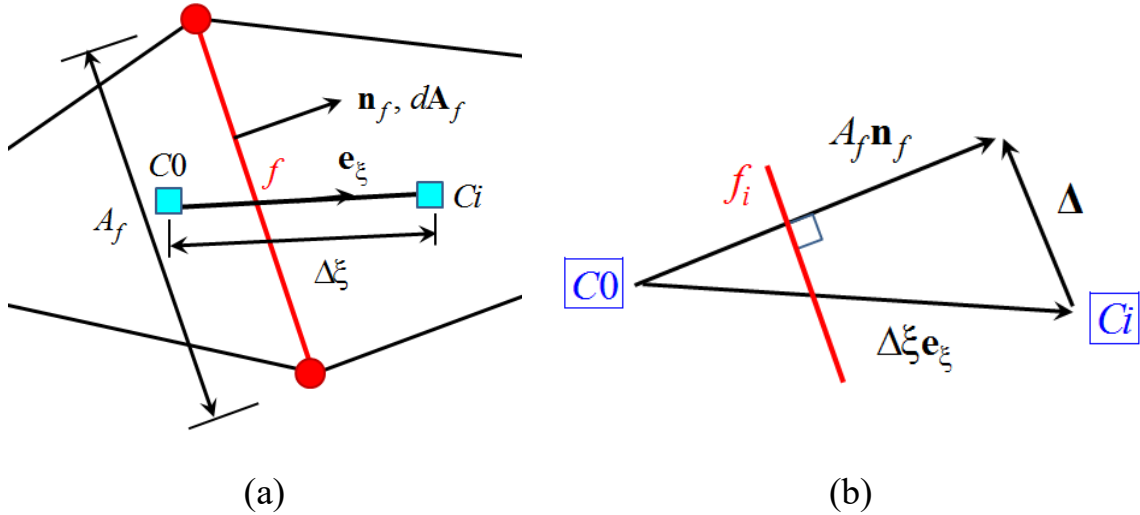
$$d\mathbf{A}_{f_1} = (y_2 - y_1) \mathbf{i} - (x_2 - x_1) \mathbf{j} \quad 5.5$$

olarak yazılabilir.



Şekil 5.2. xy -koordinat sisteminde (a) üçgen (b) dörtgen sonlu-hacimlerin komşu sonlu-hacimleri ile ilişkisi $\{\oplus\}$, yüzeyin orta noktasını vermektedir.

Şekil 5.2'de üçgen ve dörtgen sonlu-hacimlerin komşu hücrelerle olan ilişkileri için benimsenen sembolleştirmeler verilmiştir. Yüzeye dik $d\mathbf{A}_f$ vektörü (Şekil 5.1) aynı zamanda $d\mathbf{A}_f = A_f \mathbf{n}_f$ olarak da yazılabilir (Şekil 5.3a); burada $A_f = |d\mathbf{A}_f| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$ ve $\mathbf{n}_f (= d\mathbf{A}_f / A_f)$ yüzeye dik dış birim vektördür.



Şekil 5.3. C_0 hücresi ile komşusu arasındaki ilişki ve vektörlerin gösterimi.

Yüzeyin orta noktası için difüzyon terimi,

$$\mathbf{q}_f \cdot d\mathbf{A}_f = -(\Gamma \nabla \phi)_f \cdot d\mathbf{A}_f = -\Gamma A_f (\nabla \phi)_f \cdot \mathbf{n}_f \quad 5.6$$

yazılabilir. Şekil 5.3b'deki vektörel gösterimden yararlanarak ortogonalıktan sapmayı temsil eden vektör için $\Delta = \mathbf{n}_f - \mathbf{e}_\xi$ tanımını yaparsak bu tanımdan yararlanarak Denklem (5.6)'yı i yüzeyi için,

$$\begin{aligned} \Gamma A_f (\nabla \phi)_f \cdot \mathbf{n}_f &= \Gamma A_f (\nabla \phi)_f \cdot (\mathbf{e}_\xi + \Delta) \\ &= \Gamma A_f (\nabla \phi)_f \cdot \mathbf{e}_\xi + \Gamma A_f (\nabla \phi)_f \cdot \Delta \\ &= \Gamma A_f \left\{ \frac{\phi_{Ci} - \phi_{C0}}{\Delta \xi} \right\} + \Gamma A_f (\nabla \phi)_f \cdot \Delta \end{aligned} \quad 5.7$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem (5.7)'deki ilk terim *normal difüzyon*, ikincisi de *ikincil difüzyon* terimi olarak adlandırılmaktadır. İkincil difüzyon terimi iki boyutlu sistemlerde alan veya üç-boyutlu sistemlerde hacim ağırlıklı ortalama formülü ile, aşağıdaki gibi hesaplanabilir (Dalal vd., 2008):

$$(\nabla \phi)_f = \frac{\Delta V_{Ci} (\nabla \phi)_{C0} + \Delta V_{C0} (\nabla \phi)_{Ci}}{\Delta V_{C0} + \Delta V_{Ci}} \quad 5.8$$

Ayrıklaştırma işlemi, C0 merkezini kapsayan f_1 , f_2 ve f_3 (örneğin, üçgen ızgaralar için) yüzeyleri için tekrarlandığında,

$$\begin{aligned} &\mathbf{q}_{f1} \cdot d\mathbf{A}_{f1} + \mathbf{q}_{f2} \cdot d\mathbf{A}_{f2} + \mathbf{q}_{f3} \cdot d\mathbf{A}_{f3} \\ &= -\left[A_f (\Gamma \nabla \phi) \cdot \mathbf{n}_f \right]_1 - \left[A_f (\Gamma \nabla \phi) \cdot \mathbf{n}_f \right]_2 - \left[A_f (\Gamma \nabla \phi) \cdot \mathbf{n}_f \right]_3 \\ &= -\left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_1 (\phi_{C1} - \phi_{C0}) - \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_2 (\phi_{C2} - \phi_{C0}) - \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_3 (\phi_{C3} - \phi_{C0}) \\ &\quad - \left[A_f (\Gamma \nabla \phi) \cdot \Delta \right]_1 - \left[A_f (\Gamma \nabla \phi) \cdot \Delta \right]_2 - \left[A_f (\Gamma \nabla \phi) \cdot \Delta \right]_3 \end{aligned} \quad 5.9$$

veya

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{f1} \cdot d\mathbf{A}_{f1} + \mathbf{q}_{f2} \cdot d\mathbf{A}_{f2} + \mathbf{q}_{f3} \cdot d\mathbf{A}_{f3} &= (S_C + S_P \phi_P) \Delta V_{C0} \\
\left\{ \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_1 + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_2 + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_3 - S_P \Delta V_{C0} \right\} \phi_{C0} & \\
= \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_1 \phi_{C1} + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_2 \phi_{C2} + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_3 \phi_{C3} & \\
+ S_C \Delta V_{C0} + A_{f1} [\Gamma \nabla \phi \cdot \Delta]_{f1} + A_{f2} [\Gamma \nabla \phi \cdot \Delta]_{f2} + A_{f3} [\Gamma \nabla \phi \cdot \Delta]_{f3} &
\end{aligned} \tag{5.10}$$

halini alır. Denklem (5.10)'daki kaynak terimindeki ϕ_P çözümü yapılmak istenen merkez hücre yani ϕ_{C0} 'a eşittir. Denklem (5.10)'da yer alan $(\nabla \phi)_{f1}$, $(\nabla \phi)_{f2}$, $(\nabla \phi)_{f3}$ terimleri ise Denklem (5.8)'e göre hesaplanmaktadır. Burada $(\Gamma A_f / \Delta \xi)_i = \Gamma_i A_{fi} / \Delta \xi_i$ 'dir. Denklem (5.10), sınıra komşu olmayan n tane yüzeye sahip bir sonlu hacim hücresi için genelleştirilirse,

$$a_P \phi_{C0} = \sum_i a_{Ci} \phi_{Ci} + b \tag{5.11}$$

şeklini alır. Burada,

$$\begin{aligned}
a_{Ci} &= \frac{\Gamma_i A_{fi}}{\Delta \xi_i}, \quad a_P = \sum_{i=1}^n a_{Ci} - S_P \Delta V_0, \\
b &= S_C \Delta V_{C0} + \sum_{i=1}^n [\Gamma A_f (\nabla \phi) \cdot \Delta]_i, \quad i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{5.12}$$

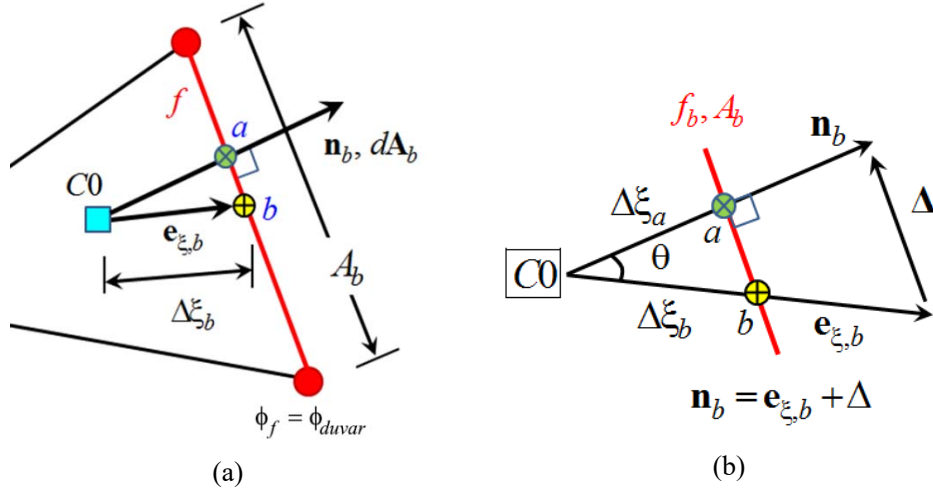
olarak tanımlanır. Bu formülasyon ortogonal formülasyonla aynıdır, sadece sağ tarafta her yüzey için $(\nabla \phi) \cdot \Delta$ terimleri toplamı gelmektedir. Ortogonallik söz konusu olduğunda $\Delta = 0$ olacağından bu terimlerde düşer.

5.2. Sınır Koşullarının Uygulanması

5.2.1. Dirichlet sınır koşulu (Sabit yüzey sıcaklığı, $\phi_f = \phi_{\text{duvar}}$)

Dirichlet sınır koşulunda sınır yüzeyde çözüm bilinmektedir; yani, $\phi_f = \phi_{\text{duvar}}$.

Örneğin f_1 yüzeyinde ϕ biliniyorsa.



Şekil 5.4. Ortogonal olmayan ızgaralarda sabit sıcaklıkta sınır kontrol hücresi.

Şekil 5.4’de verilen sonlu-kontrol hacmi için akı ifadesini yazıldığında,

$$(\nabla\phi)_b \cdot d\mathbf{A}_b = A_b (\nabla\phi)_b \cdot \mathbf{n}_b \cong A_b \left(\frac{\phi_a - \phi_{C0}}{\Delta\xi_a} \right) \quad 5.13$$

elde edilir. Burada $\Delta\xi_a$ duvara olan dik uzaklık, ϕ_a duvar sıcaklığı ve A_b duvar yüzey alanıdır. Ayrıca f_1 yüzeyinde ϕ bilindiği için $\phi_a = \phi_b = \phi_{\text{duvar}}$ olduğuna dikkat edilmelidir. Duvardan ısı geçişi ifadesi yazıldığında,

$$\mathbf{q}_b \cdot d\mathbf{A}_b = -\Gamma A_b (\nabla\phi)_b \cdot \mathbf{n}_b \cong \Gamma A_b \left(\frac{\phi_{C0} - \phi_a}{\Delta\xi_a} \right) \quad 5.14$$

şeklinde olur. Burada ϕ gradyantının doğrultusunun b yüzeyine dik olan \mathbf{n}_b doğrultusu seçildiğinden BC yüzeyi için $(\nabla\phi) \cdot \Delta$ terimine gerek kalmamaktadır. Hücre merkezi $C0$ ’dan duvara olan en kısa mesafe $\Delta\xi_a$ ’dır ve Şekil 5.4 incelenirse, $\Delta\xi_a = \Delta\xi_b \cos\theta$ olduğu görülebilir. İki vektör arasındaki açının kosinüsünü de, aşağıdaki gibi, skalar çarpım tanımından bulunabilir.

$$\mathbf{e}_{\xi,b} \cdot \mathbf{n}_b = |\mathbf{e}_{\xi,b}| |\mathbf{n}_b| \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \mathbf{e}_{\xi,b} \cdot \mathbf{n}_b \quad 5.15$$

Burada $\mathbf{e}_{\xi,b}$ ve \mathbf{n}_b ’nin birim vektörler olduğu ve $|\mathbf{e}_{\xi,b}| = |\mathbf{n}_b| = 1$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Sonuç olarak,

$$\Delta\xi_a = (\mathbf{e}_{\xi,b} \cdot \mathbf{n}_b) \Delta\xi_b \quad 5.16$$

olarak yazılabilir. n kenarlı yüzeye sahip f_i yüzeyinde sabit ϕ sınır koşulu uygulanan bir sonlu-hacim hücresi için, *sonlu hacim ayrıklaştırma denklemi* aşağıdaki formu almaktadır.

$$a_{Ci} = \frac{\Gamma A_{f_i}}{\Delta\xi_i}, \quad a_{C1} = \frac{\Gamma A_b}{\Delta\xi_a}, \quad a_p = \sum_{i=1}^n a_{Ci} - S_p \Delta V_{C0} \quad 5.17$$

$$b = a_{C1} \phi_{\text{duvar}} + S_C \Delta V_{C0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n [A_f (\nabla\phi) \cdot \Delta]_{Ci}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Burada C_i , C_0 'a "komşu" hücreleri temsil etmektedir. ϕ değeri bilinen yüzey için uzaklıklar, hücre merkezine (C_3 'e – hayali yan komşu) göre değil, yüzey orta noktasına (b 'ye) göre hesaplanmaktadır.

5.2.2. Neumann sınır koşulu ($-\Gamma \nabla\phi \cdot \mathbf{n}_f = q_b$)

Neumann tipi sınır koşulu cidarda sabit akının olduğu durumlardır. Örneğin f_1 'de gradyant biliniyor olsun (bknz Şekil 5.5). Bu durumda, $d\mathbf{A}_b = A_b \mathbf{n}_b$ yüzey vektörü ve $-\Gamma(\nabla\phi)_b \cdot \mathbf{n}_b = q_b$ sınır koşulu için $\mathbf{q}_{f_1} \cdot d\mathbf{A}_{f_1}$ terimi $\mathbf{q}_b \cdot d\mathbf{A}_b = A_b q_b$ 'ye eşit olur. Bir dörtgen sonlu hacim hücresi için korunum ifadesi,

$$A_b q_b + \mathbf{q}_{f_2} \cdot d\mathbf{A}_{f_2} + \mathbf{q}_{f_3} \cdot d\mathbf{A}_{f_3} + \mathbf{q}_{f_4} \cdot d\mathbf{A}_{f_4} = (S_C + S_p \phi_{C0}) \Delta V_{C0} \quad 5.18$$

şeklinde yazılır. Bu ifade açılacak olursa,

$$a_p \phi_{C0} = b + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta\xi} \right)_2 \phi_{C2} + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta\xi} \right)_3 \phi_{C3} + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta\xi} \right)_4 \phi_{C4} \quad 5.19$$

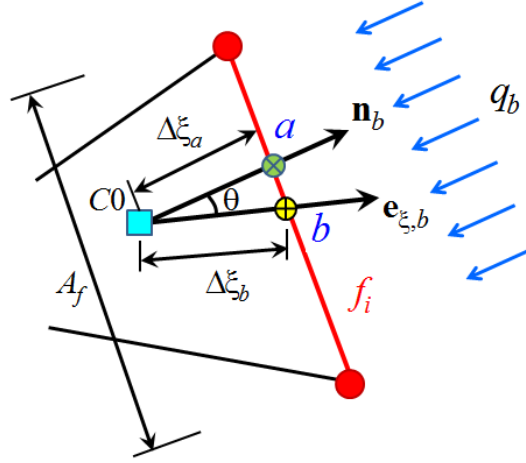
olarak yazılabilir ki burada

$$a_p = \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta\xi} \right)_2 + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta\xi} \right)_3 + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta\xi} \right)_4 - S_p \Delta V_{C0} \quad 5.20$$

$$b = A_{f1} q_b + S_C \Delta V_{C0} + F_b$$

$$F_b = \left[\Gamma A_f (\nabla\phi) \cdot \Delta \right]_{f_2} + \left[\Gamma A_f (\nabla\phi) \cdot \Delta \right]_{f_3} + \left[\Gamma A_f (\nabla\phi) \cdot \Delta \right]_{f_4}$$

elde edilir ($\mathbf{A}_{f_1} = \mathbf{A}_b$). $-\Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_b = q_b$ sınır koşulu doğrudan \mathbf{n}_b dik doğrultusuna göre verildiği için formülasyonda ikincil difüzyon terimine ihtiyaç olmamaktadır.



Şekil 5.5. Ortogonal olmayan ızgaralarda sabit ısı akısı içeren sınır kontrol hücresi.

Duvar cidarındaki a ve b noktalarında sıcaklığı bulmak için,

$$-(\Gamma \nabla \phi)_b \cdot \mathbf{n}_b = \Gamma \left(\frac{\phi_{C0} - \phi_a}{\Delta \xi_a} \right) = q_b \quad 5.21$$

olarak yazılır. Denklem (5.21)'den ϕ_a terimini çekip, Denklem (5.16)'daki terimden yararlanarak,

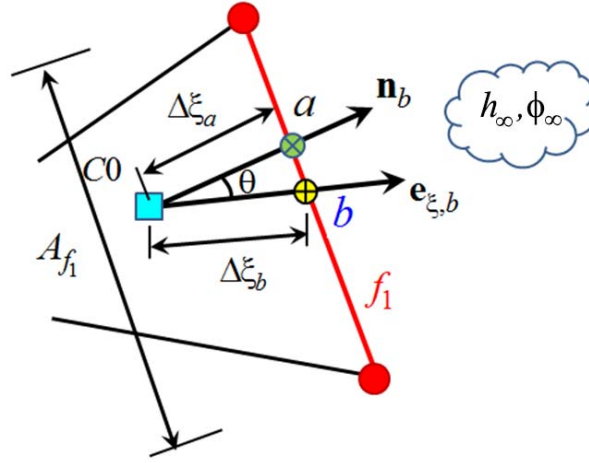
$$\phi_a = \phi_{C0} - \frac{q_b}{\Gamma} \Delta \xi_a = \phi_{C0} - \frac{q_b}{\Gamma} (\mathbf{e}_{\xi,b} \cdot \mathbf{n}_b) \Delta \xi_b \quad 5.22$$

elde edilir.

5.2.3. Taşınım (karışık) sınır koşulu ($-(\Gamma \nabla \phi)_f \cdot \mathbf{n}_f = h_\infty (\phi - \phi_\infty)$)

Dörtgen hücrelerden oluşan bir sonlu-hacim elemanı ele alınarak ve f_1 yüzeyinde taşınım sınır koşulu uygulandığı kabul edilsin. Diğer bir deyişle, koşul matematiksel olarak $-(\Gamma \nabla \phi)_b \cdot \mathbf{n}_b = h_\infty (\phi - \phi_\infty)$ şeklinde yazılacaktır. Burada \mathbf{n}_b duvara dik dış birim vektörü, $\mathbf{e}_{\xi,b}$ ise C0 hücre merkezini f_1 yüzeyinin orta noktası olan b noktasına birleştiren doğrultudaki birim vektörü temsil etmektedir (Bknz Şekil 5.6). Taşınım ve yalıtım sınır

koşulunda gradyant ile çarpılan birim vektör yüzeye dik olan, yani \mathbf{n}_b vektördür. Bu durumda sınır koşulundaki gradyan terimi $-(\Gamma \nabla \phi)_b \cdot \mathbf{n}_b = \Gamma (\phi_{C0} - \phi_a) / \Delta \xi_a$ olarak yazılabilir.



Şekil 5.6. Ortogonal olmayan ızgaralarda taşınım sınır şartı içeren sınır kontrol hücresi.

Sınır koşulu bir bütün olarak ele alındığında,

$$-(\Gamma \nabla \phi)_b \cdot \mathbf{n}_b = \Gamma \left(\frac{\phi_{C0} - \phi_a}{\Delta \xi_a} \right) = h_\infty (\phi_a - \phi_\infty) \quad 5.23$$

olarak yazılabilir. Denklem (5.23)'den ϕ_a terimini çekerek,

$$\phi_a = \frac{h_\infty \phi_\infty + \frac{\Gamma}{\Delta \xi_a} \phi_{C0}}{h_\infty + \frac{\Gamma}{\Delta \xi_a}} \quad 5.24$$

elde edilir. ϕ_a terimini Denklem (5.23)'ün sağ tarafında yerine yazarak,

$$-(\Gamma \nabla \phi)_b \cdot \mathbf{n}_b = R_{eq} (\phi_{C0} - \phi_\infty), \quad R_{eq} = \frac{h_\infty \Gamma / \Delta \xi_a}{h_\infty + \Gamma / \Delta \xi_a} \quad 5.25$$

ifadesi bulunur. Şekil 5.6'da görülen $\Delta \xi_a$ daha önce de gösterildiği gibi sınıra olan en kısa (dik) mesafe olup $\Delta \xi_a = (\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{n}_b) \Delta \xi_b$ 'dir. Bu durumda Denklem (5.25)'i b noktasına göre olan mesafe cinsinden,

$$-(\Gamma \nabla \phi)_b \cdot \mathbf{n}_b = R_{eq} (\phi_{C0} - \phi_\infty), \quad R_{eq} = \frac{\Gamma h_\infty}{\Gamma + h_\infty (\mathbf{e}_{\xi,b} \cdot \mathbf{n}_b) \Delta \xi_b} \quad 5.26$$

şeklinde yazmak mümkündür.

Yüzey 1’de taşınım sınır koşulunun uygulandığını kabul ederek, Denklem (5.9)’u

$$R_{eq} (\phi_{C0} - \phi_\infty) A_{f1} - [A_f (\Gamma \nabla \phi) \cdot \mathbf{n}_f]_2 - [A_f (\Gamma \nabla \phi) \cdot \mathbf{n}_f]_3 - [A_f (\Gamma \nabla \phi) \cdot \mathbf{n}_f]_4 = (S_C + S_P \phi_{C0}) \Delta A_{C0} \quad 5.27$$

şeklinde veya normal ve ikincil difüzyon terimlerini genişleterek yazıldığında,

$$\begin{aligned} & R_{eq} (\phi_{C0} - \phi_\infty) A_{f1} \\ & - \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_2 (\phi_{C2} - \phi_{C0}) - \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_3 (\phi_{C3} - \phi_{C0}) - \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_4 (\phi_{C4} - \phi_{C0}) \\ & = (S_C + S_P \phi_{C0}) \Delta A_{C0} + [\Gamma A_f (\nabla \phi) \cdot \mathbf{\Delta}]_{f2} + [\Gamma A_f (\nabla \phi) \cdot \mathbf{\Delta}]_{f3} + [\Gamma A_f (\nabla \phi) \cdot \mathbf{\Delta}]_{f4} \end{aligned} \quad 5.28$$

halini alır (burada $A_b = A_{f1}$). Bu durumda ısı difüzyon son olarak

$$a_p \phi_{C0} = b + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_2 \phi_{C2} + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_3 \phi_{C3} + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_4 \phi_{C4} \quad 5.29$$

olarak yazılabilir ki burada verilenler,

$$\begin{aligned} a_p &= R_{eq} A_b + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_2 + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_3 + \left(\Gamma \frac{A_f}{\Delta \xi} \right)_4 - S_P \Delta V_{C0} \\ b &= A_b R_{eq} \phi_\infty + S_C \Delta V_{C0} + F_b \\ F_b &= [\Gamma A_f (\nabla \phi) \cdot \mathbf{\Delta}]_{f2} + [\Gamma A_f (\nabla \phi) \cdot \mathbf{\Delta}]_{f3} + [\Gamma A_f (\nabla \phi) \cdot \mathbf{\Delta}]_{f4} \end{aligned} \quad 5.30$$

olarak tanımlıdır. Yüzeyin orta noktasında ϕ ,

$$\phi_b \cong \phi_{C0} + [(\nabla \phi)_{C0} \cdot \mathbf{e}_{\xi,b}] \Delta \xi_b \quad 5.31$$

ifadesinden hesaplanabilir.

5.3. Hücre-Merkezli Gradyant Hesabı

İkincil difüzyon terimlerini hesaplamak için yüzeylerin, f , orta noktalarında gradyant hesabı gerektiğine değinilmişti. Başka durumlar için de gradyant hesabına gerek duyulabilmektedir.

5.3.1 Gradyant teoremi yaklaşımı

Bu teoremdeki gradyant hesabında A yüzeyi ile çevrili ΔV_0 kapalı hacmi için gradyant teoremi,

$$\iiint_{\Delta V_0} (\nabla\phi) dV = \iint_A \phi(d\mathbf{A}) \quad 5.32$$

ifadesi ile yazılabilir; burada $d\mathbf{A}$ dışarı doğrultuyu gösteren yüzey alan vektörüdür. Denklem (5.32)'nin ayrıklaştırılmış formunu elde etmek için kontrol hücresi içinde gradyant'ın sabit olduğu kabul edilip, bu varsayımla,

$$\nabla\phi = \frac{1}{\Delta V_0} \sum_{k=1}^M \iint_{A_k} \phi_k d\mathbf{A}_k \quad 5.33$$

şeklinde yazılabilir (Murthy, 2002); burada M hücrenin yüzey sayısıdır. Daha sonra kontrol hücresi yüzeyi boyunca yüzey-orta değeri (ϕ_f) çarpı yüzey alanı ($d\mathbf{A}_f$) ile yaklaşık değerini elde ediyoruz, yani

$$(\nabla\phi)_{C0} = \frac{1}{\Delta A_{C0}} \sum_{k=1}^M \phi_{f,k} d\mathbf{A}_{f,k} \quad 5.34$$

Denklem (5.34)'ü kullanabilmek için yüzeydeki (ϕ_f) değerini bulmamız gereklidir. En basit yaklaşım aynı yüzeye ortak olan iki kontrol hücresinin hücre değerlerinin aritmetik ortalamasını bulmaktır; yani

$$\phi_f = \frac{\Delta A_{Ci} \phi_{C0} + \Delta A_{C0} \phi_{Ci}}{\Delta A_{C0} + \Delta A_{Ci}} \quad 5.35$$

ifadesi şeklindedir (Dalal vd., 2008). Bu yaklaşımın avantajı her türlü hücre geometrisine kolaylıkla uyarlanabilmesidir (sadece aynı yüzeyi paylaşan kontrol hücresi bilgisine ihtiyaç vardır).

5.4. Alternatif SK_N Denklemlerinin Sonlu Hacim Metoduna Uygulanması

Çok boyutlu geometrilerde ışınım transfer denklemini daha kolay metotlar ile çözebilme yolu arayışları devam etmektedir. Önceki bölümde Alternatif SK_N metodu için ASK_N denklemleri Denklem (4.35) ile verilmiştir. Dikkat edilecek olursa bu denklem, Denklem (5.1)'deki iki boyutlu kartezyen koordinat sistemindeki yayılım denklemine benzerlik göstermektedir. Denklem (5.1)'de ısı akısını temsil eden ifade yerine ϕ ile ilişkili difüzyon bağıntısını yazıp, kaynak fonksiyonu genişleterek denklemde yerine yazarsak

$$-\Gamma \nabla^2 \phi = S = S_C + S_P \phi_P \quad 5.36$$

şeklini alır.

Denklem (4.35), Denklem (5.36)'ya benzetecek şekilde yazabilmek için, gelen enerji fonksiyonu yerine Denklem (4.34)'te verildiği şekilde yazıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-D_n \nabla^2 G_n^*(\mathbf{r}) = 4\pi\kappa(\mathbf{r})I_b [T(\mathbf{r})] + \sum_{n=1}^N w_n \sigma_s(\mathbf{r}) G_n^*(\mathbf{r}) - \beta G_n^*(\mathbf{r}), \quad n=1,2,\dots,N \quad 5.37$$

elde edilir. Denklem (5.37)'de verilen terimler, Denklem (5.36)'daki

$$\phi = G_n^*(\mathbf{r}), \quad \Gamma = D_n, \quad S_C = 4\pi\kappa(\mathbf{r})I_b [T(\mathbf{r})] + \sum_{n=1}^N w_n \sigma_s(\mathbf{r}) G_n^*(\mathbf{r}), \quad S_P = -\beta \quad 5.38$$

ifadelerine karşılık gelir.

Kaynak fonksiyonundaki S_C terimindeki $G_n^*(\mathbf{r})$ ifadesi halihazırdaki iterasyondan, bir önceki iterasyonda hesaplanan değerleri kullanmaktadır.

Ayrıca Bölüm 4'te Denklem (4.45)-(4.47)'de Alternatif SK_N denklemleri için elde edilen sınır şartlar verilmiştir. Alternatif SK_N denklemleri için verilen bu sınır şartlar, sonlu hacimler ile verilen taşınım sınır şartına benzerlik göstermektedir. Sınır şartların uygulanmasında bir boyutlu düzlemde $(-x_0 \leq x \leq x_0)$ tanımlanan sınır şartın kullanılmasına karar verilmiştir.

Sınır şartları sonlu hacim metoduna uygulamak için Γ ile verilen ifadeyi yukarıda D_n 'e eşit olduğu kabul edilmiştir.

Denklem (4.45)'in her iki tarafı μ_n ile çarpılıp ve düzenlirse,

$$\mp \frac{\mu_n^2}{\beta} \frac{dG_n^*}{dx}(\mp x_0) = \mu_n \left(G_n^*(\mp x_0) - 2I_{w,0}^{\pm}(\mp x_0) \right) \quad 5.40$$

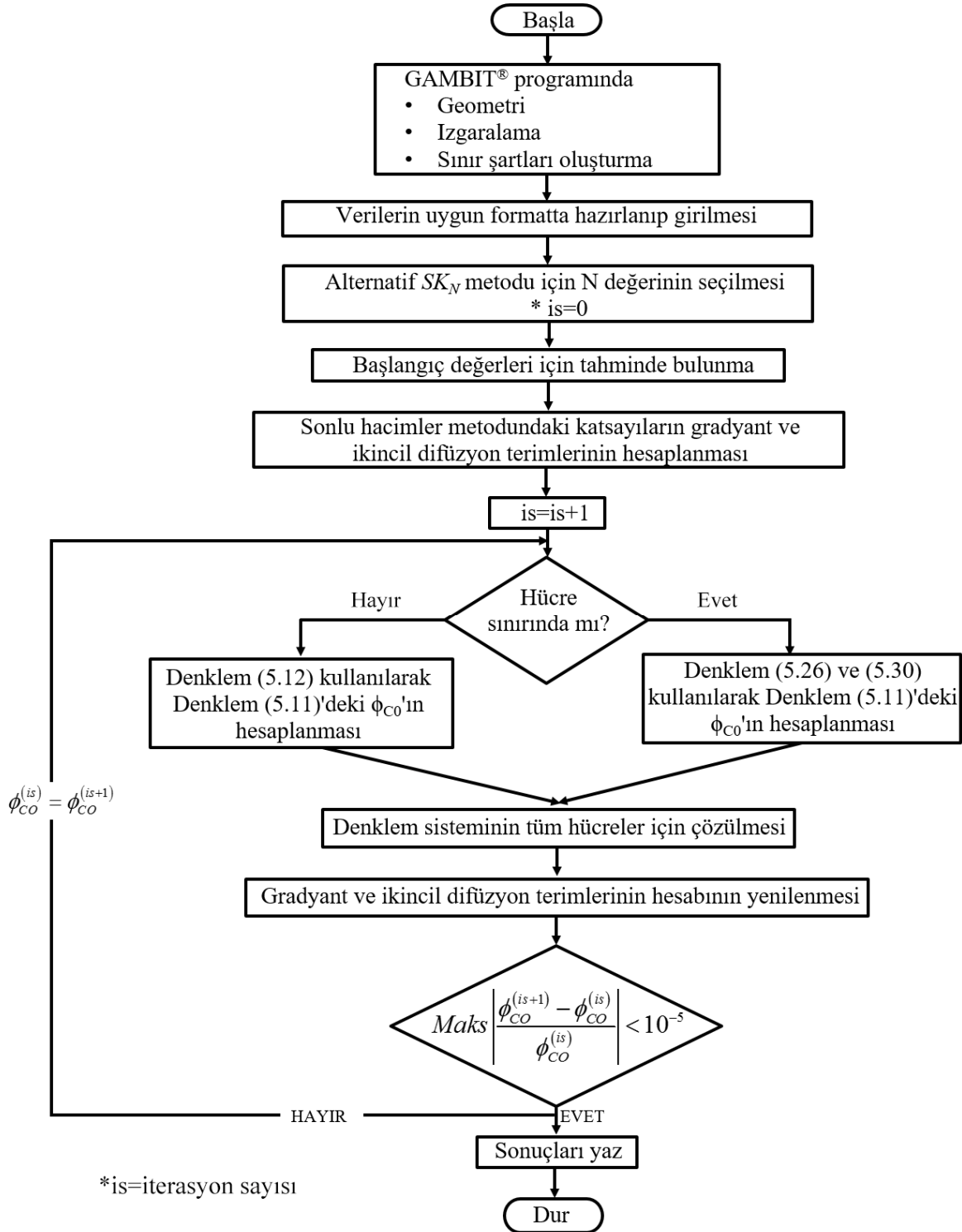
şeklinde yazılır. Denklem (5.40)'daki düzenleme ile sonlu hacimlerde taşınım sınır şartına benzetilecek olursa,

$$\phi_{\infty} = 2I_{w,0}^{-}(r_0), \quad h = \mu_n, \quad q_n = \pm \frac{\mu_n^2}{\beta} \frac{dG_n^*}{dr}(r_0) \quad 5.41$$

ifadesine karşılık gelir.

5.5. Alternatif SK_N Denklemlerinin Nümerik Çözümü

Çözümlerde geometrinin, ızgaralama ve sınır şartların oluşturulması GAMBIT® programı kullanılmıştır. GAMBIT® programında oluşturulan dosyanın formatı Absoft Pro Fortran 2015 programında yazılan koda uygun formatta uyarlanmıştır. Sonlu hacimler ile elde edilen lineer denklem sistemi SOR yöntemi kullanılarak iteratif olarak çözülmüştür. Yakınsama iki iterasyon arasındaki fark 10^{-5} 'den daha küçük olacak şekilde belirlenmiştir. Hazırlanan programa ait akış şeması Şekil 5.7'de verilmiştir.

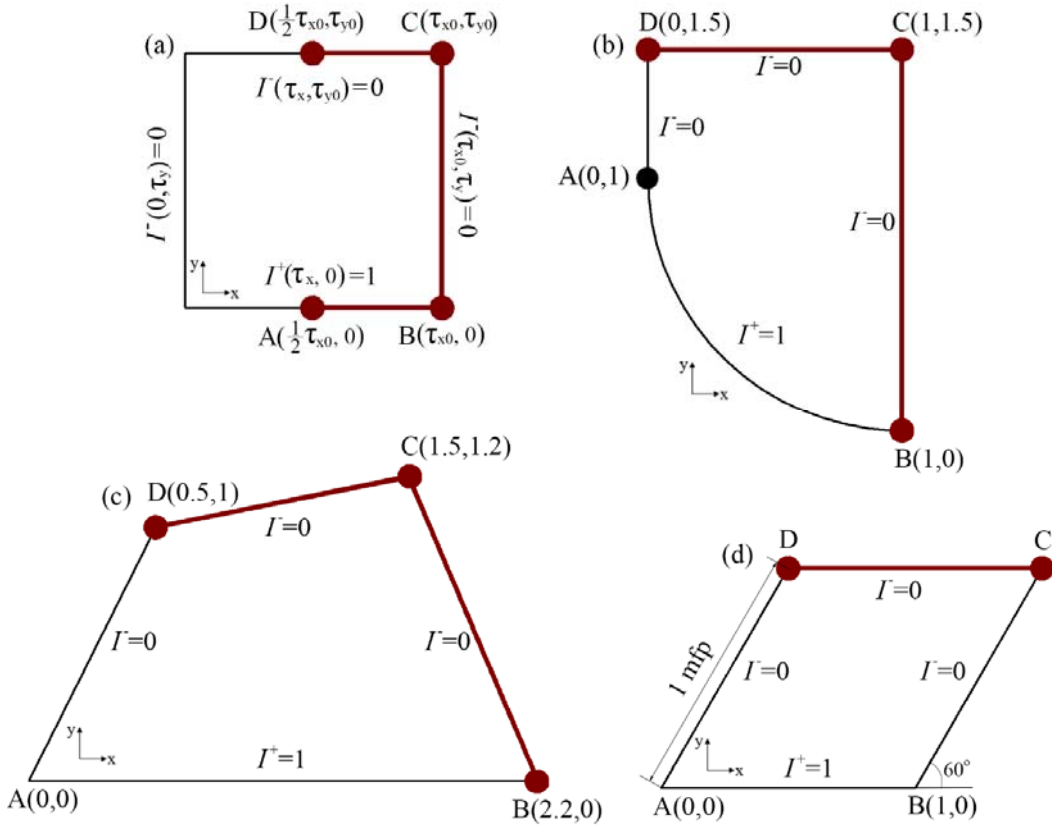


Şekil 5.7. İki boyutlu geometride Alternatif SK_N programının akış şeması.

6. BULGULAR VE TARTIŞMALAR

6.1. TEST PROBLEMLERİ

Bu kısımda alternatif SK_N (ASK_N) yöntemi, iki-boyutlu düzensiz geometrilere (bölgelere) uygulanmış, gelen ışınım ve ışınım ısı akısı hesaplanarak, metodun performansı literatürdeki kullanılan test problemleri kullanılarak araştırılmıştır. Bu kısımda ele alınan, soğuran, yayan ve izotropik olarak saçan iki boyutlu test problemleri Şekil 6.1'de şematik olarak verilmiştir. Işınım transfer denkleminin çözümü üzerindeki olumsuz etkileri daha bariz kılmak için test problemlerindeki ortam soğuk tutulmuş ve yüzeyleri siyah ($\epsilon=1$) yüzey olarak alınmıştır. İzotropik olarak saçan katılımcı ortamın farklı (optik) boyutlarda ve ortamın değişen saçılma albedoları için literatürde çözümü verilen diğer yöntemler ile kıyaslanmıştır. Ayrıca tüm test problemlerinde ortamın yokolma katsayısı $\beta = 1 m^{-1}$ olarak kabul edilmiştir.



Şekil 6.1. Test problemleri; a) TP-1, b) TP-2, c) TP-3, d) TP-4.

Test Problemi 1. Şekil 6.1a'da verilen problemde soğuran, yayan ve izotropik saçan iki boyutlu yüksekliği L , genişliği H olan dörtgen bölge ele alınmıştır. Optik uzunluklar cinsinden bölge $\tau_x = L\beta$ ve $\tau_y = H\beta$ olarak yazılabilir. Bölgenin alt yüzeyi sıcak, diğer yüzeyleri soğuktur. Farklı optik (boyutsuz) kenar uzunlukları için kenarlar boyunca gelen ışınım ile ısı akısı çözümleri kıyaslamalarda kullanılmıştır. Ortamın saçılma albedosu, 0.25 ile 1.0 arasındaki değiştirilerek net ışınım ısı akısı ve gelen ışınım fonksiyonu çözümleri aşağıdaki durumlar için incelenmiştir:

$$\text{Durum 1 : } \tau_{x0} = \tau_{y0} = 1 \text{ mfp}$$

$$\text{Durum 2 : } \tau_{x0} = \tau_{y0} = 2 \text{ mfp}$$

Durum 1. Kare geometrinin optik kenar uzunlukları $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ mfp olan homojen, soğuran, yayan-saçan ve soğuk katılımcı bir ortama alt yüzeyinden etkiyen birim şiddette eşit-dağılımlı ışınımın ($I=1$) olduğu bir test problemi ele alınmıştır. Saçılma albedosunun 1,0; 0,9; 0,5 ve 0,25 için dördüncü merteye ASK_N yaklaşımına kadar çözümleri incelenmiştir.

Durum 2. Optik uzunluğu $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 2$ mfp ve saçılma albedosunun 0,5 ve 0,9 alındığı kare ortam için net ışınım ısı akısı ve gelen ışınım sonuçları izotropik saçılma durumu için çözülmüştür.

Test Problemi 2. Bu problemde soğuran, yayan ve izotropik saçan iki boyutlu Şekil 6.1b'de verilen kavisli geometrik ortamdaki ışınım ısı transferi ele alınmıştır. Kavisli yüzey sıcak, diğer yüzeyler ile ortam soğuktur. Bu problemde de bütün yüzeyler siyah olup ortam saçılma albedosu 0,0; 0,5; 0,8 ve 1,0 değerleri için net ışınım akısı çözümleri elde edilerek kıyaslama yapılmıştır.

Test Problemi 3. Bu test probleminde homojen izotropik olarak saçan yamuk ortamdaki ibarettir. Şekil 6.1c'de görüldüğü gibi bölgenin alt yüzeyden tamamen ısıtılan durumu için ASK_N çözümleri elde edilmiştir. Bölgenin diğer yüzeyleri ile ortam soğuktur. Bütün kenarların yayma oranı $\varepsilon=1$ ve ortam saçılma albedosu 0,2; 0,5 ve 1 ele alınmıştır.

Test Problemi 4. Paralelkenar bölge soğuran, yayan ve izotropik saçan, alt yüzeyden ısıtılan, diğer yüzeyler ile ortamın soğuk olduğu, ortam saçılma albedosunun 0,2; 0,5 ve 1 değerleri için yüzeylerin ışıyım ısı akısı değişimleri incelenmiştir.

6.2. TARTIŞMALAR

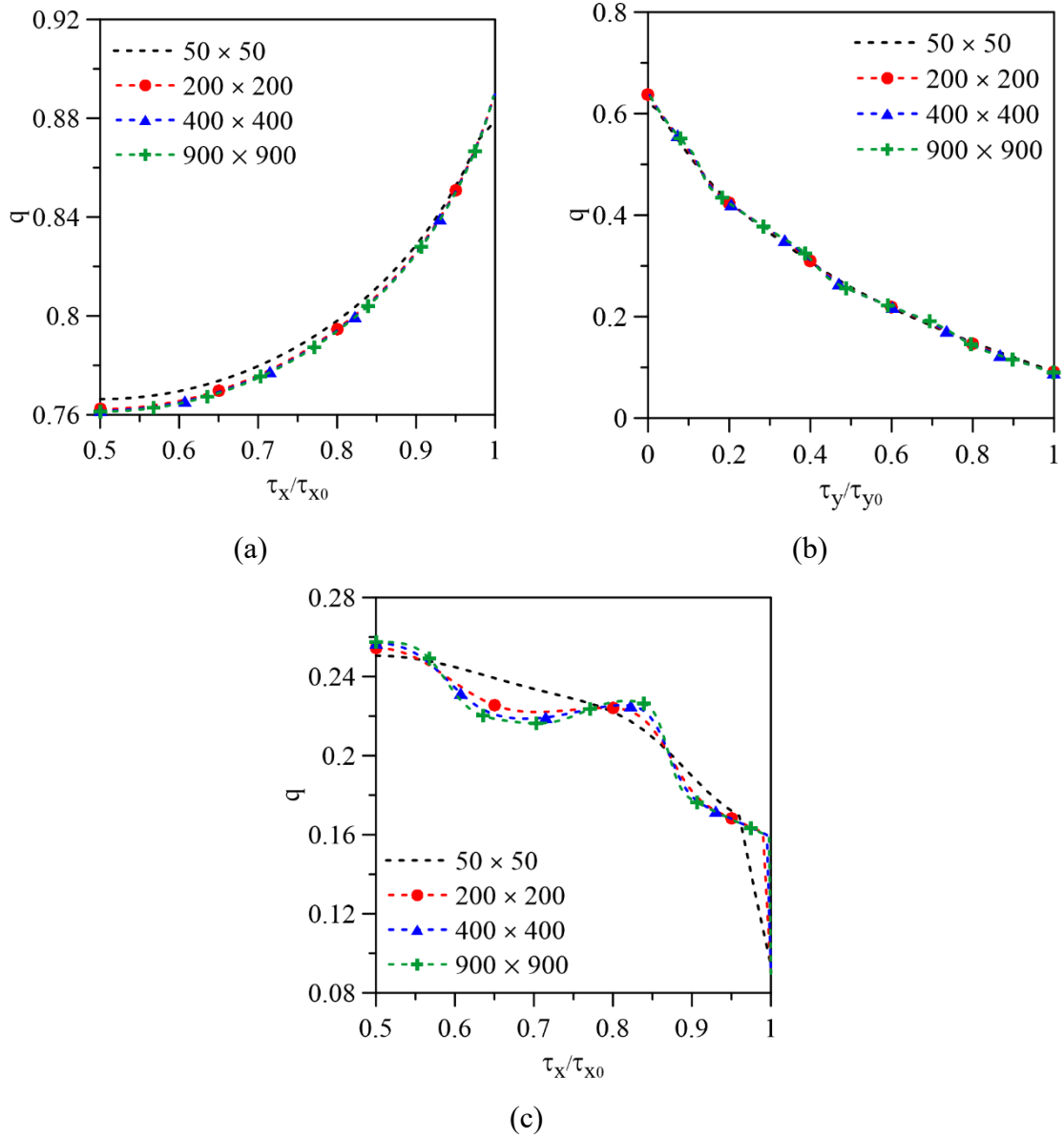
ışıyım ısı akı sonuçlarının kıyaslamasında kullanılan ısı akısı $q = q_r / T_{sicak}^4$ şeklinde boyutsuzlaştırılarak kullanılmıştır.

Test Problemi 1.

Her iki durumlara karşılık gelen dörtgen geometriler için yapılan çözümlerin ışıyım ısı akı ve gelen ışıyım değerleri Crosbie ve Schrenker (1984) tarafından yapılan çalışma ile kıyaslanmıştır. Crosbie ve Schrenker (1984)'in çözümleri literatürde “exact çözüm” denilen gerçek çözüm değerleridir. Ayrıca gelen ışıyım çözüm kıyaslamalarında Tekkalmaz 2003 yılındaki tezinde kullanılmıştır. Tekkalmaz (2003) tezinde gerçek integral transferi ve Sentetik Kernel (SK_N) metodunu kullanarak soğuran, yayan, izotropik ve lineer olarak saçan iki boyutlu ortamlarda ışıyım ısı transfer denklemini çözmüştür. Çalışma sonucunda, üç kuadratür seti önererek, çözümlerin gerçek çözümlere çok iyi yakınsadığını göstermiştir. Bu çalışmada Durum 1 için çözüm kıyaslamalarında, Tekkalmaz'ın SK_2 Set-2 çözümlerine yer verilmiştir.

Durum 1. Kesikli Ordinatlar (DOM, Discrete Ordinates Method) Metodu literatürde geniş yer bulan ve Fluent[®] gibi ticari yazılımlarda standart yöntem olarak yer almaktadır. Şekil 6.2'de saçılma albedosunun 1,0 olduğu durumda $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ boyutlarındaki kare geometride Fluent[®] paket programında farklı homojen ızgaralar kullanılarak elde edilen çözümlerin karşılaştırılması yapılmıştır. DOM S_{12} çözümlerinde açısız ayırıklaştırma için φ ve θ açılarını 6'ya bölünmüştür. Şekil 6.2a'da sıcak yüzeydeki, Şekil 6.2b'de yan yüzeydeki ve Şekil 6.2c'de ise üst yüzeydeki net ısı akısının ağ yapısına göre kıyaslaması verilmiştir. AB hattında $\tau_x / \tau_{x0} = 0,5$ 'de maksimum fark gözlenmektedir. $\tau_x / \tau_{x0} = 0,5$ 'de 900×900 ızgara yapısının, 50×50 'lik ızgara yapısına göre %0,65 fark görülmektedir. Şekil 6.2b'de görüldüğü gibi ızgara yapısının değişimi sonucu pek etkilememektedir. Ancak Şekil 6.2c'deki üst yüzeydeki net ışıyım ısı akısı dağılımında, ızgara yapısının sık olduğu durumda "ışın etkisi" adı verilen ve “gerçek çözüm” civarında salınım içeren dağılım elde

edilmektedir. Ayrıca verilen dörtgen kutunun diğer durumları için elde edilen çözüm kıyaslamalarında Fluent®'deki 400×400 'lik ızgara yapısı kullanılmıştır.

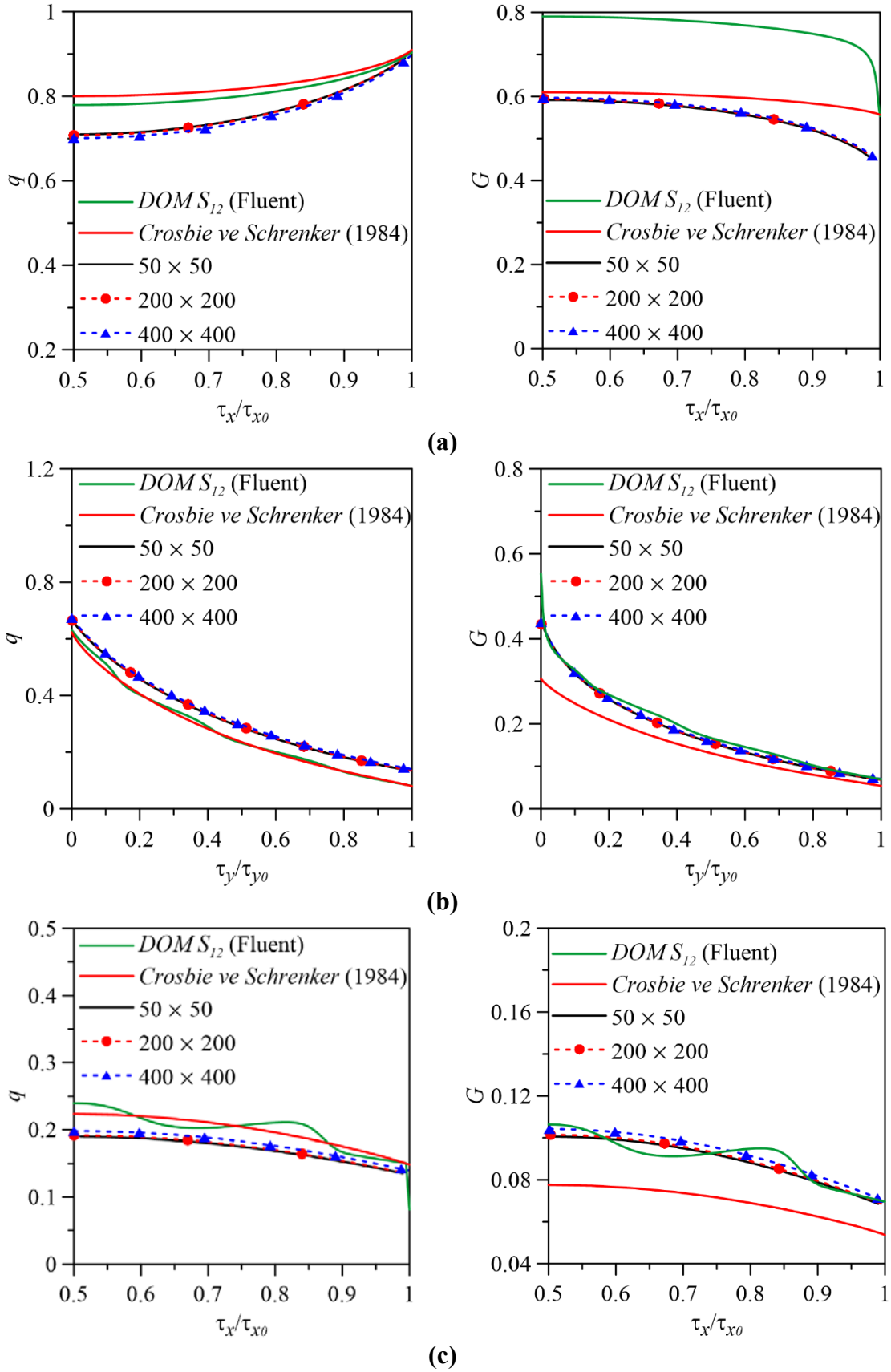


Şekil 6.2. a) AB, b) BC ve c) DC hattında $\omega_0 = 1,0$ ve $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ için ağ yapısının DOM S₁₂ (Fluent®) sonuçları.

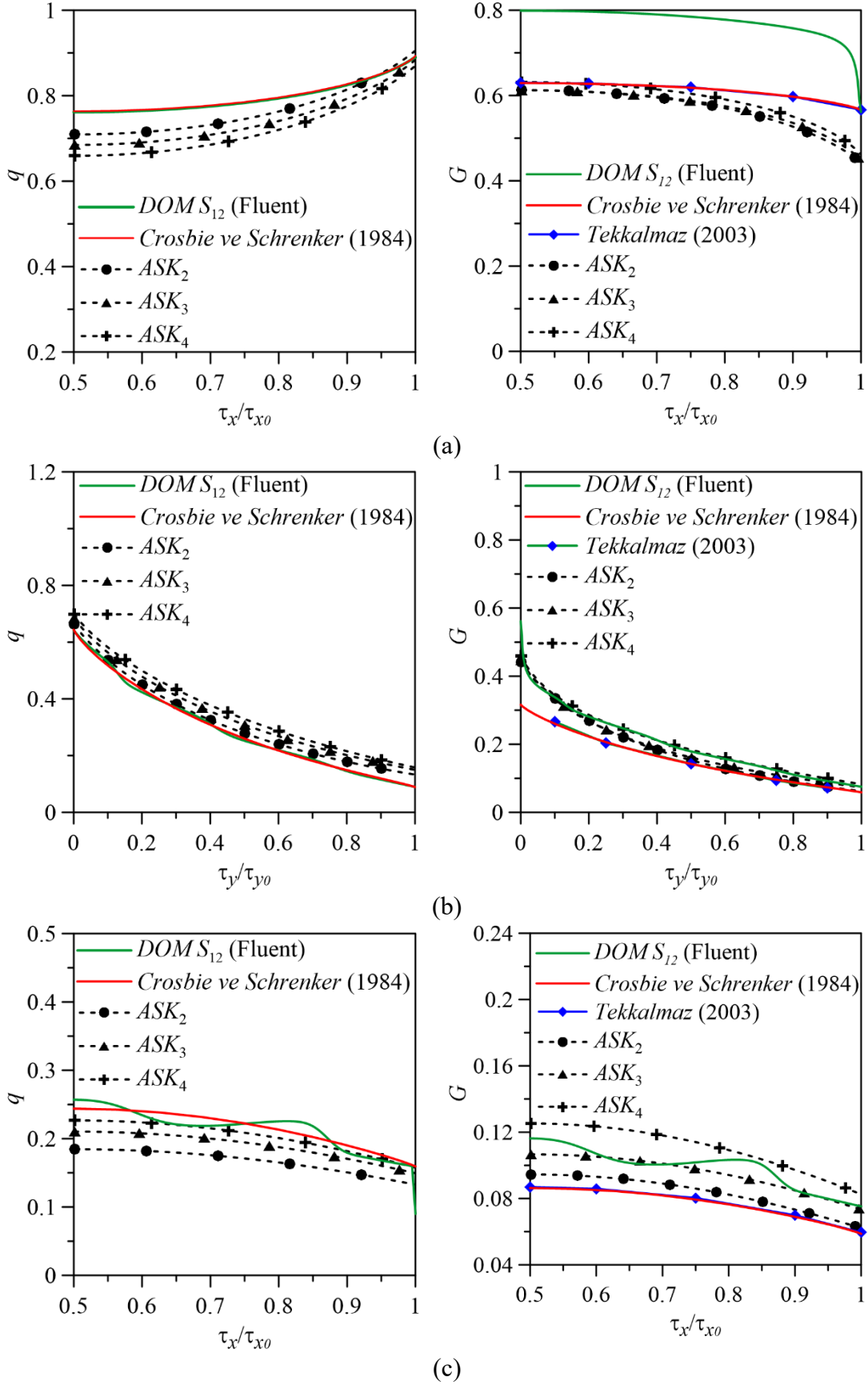
Optik uzunluğu $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ve $\omega_0 = 0,9$ olan kare ortam için çeşitli sayıda düğüm noktalı ağ düzenlemeleri için net ışınım ısı akısı ve gelen ışınım çözümleri izotropik saçılma durumuna göre elde edilmiş ve bu karşılaştırmalar Şekil 6.3'te verilmiştir. Şekil 6.3'te AB, BC ve DC hattında solda boyutsuz net ışınım ısı akıları sağda ise gelen ışınım değerlerine yer verilmiştir. ASK₄ yaklaşım derecesi kullanılarak yapılan çözümlerin kıyaslanmasında, DOM S₁₂ ile Crosbie ve Schrenker (1984) tarafından yapılan çalışmadaki gerçek çözümler

kullanılmıştır. Sonuç olarak 400×400 ızgara yapısı için sonuçların yeterli doğrulukta olduğuna karar verilmiştir.

Optik uzunluğu $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ve $\omega_0 = 1,0$ olan kare ortam için net ışıınım ısı akısı ve gelen ışıınım sonuçları izotropik saçılma durumu için çözülmüş ve sonuçları grafiksel olarak Şekil 6.4'te verilmiştir. Şekil 6.4a, b ve c'de sırası ile AB, BC ve DC hatlarında solda net ışıınım ısı akısı, sağ da ise gelen ışıınım sonuçlarına yer verilmiştir. ASK_2 , ASK_3 ve ASK_4 çözümleri, Crosbie ve Schrenker (1984)'in gerçek çözümleri, DOM S₁₂ (Fluent®) ve Tekkalmaz (2003)'in standart SK₂ Set-2 kuadratur çözümleri ile kıyaslanmıştır. ASK_2 , ASK_3 ve ASK_4 'ün AB hattı boyunca gelen ışıınım dağılımı incelendiğinde gerçek çözümlere (Crosbie ve Schrenker, 1984) göre mutlak hatada maksimum farkın B noktasında olduğu görülmektedir. Bu mutlak hata B noktasında %10,4 iken, A noktasındaki mutlak hata %1'den daha azdır. Diğer taraftan gelen ışıınımda A noktasındaki DOM S₁₂ çözümünün gerçek hataya göre mutlak hatanın %16,96 olduğu gözlenmiştir. BC hattı boyunca ışıınım ısı akı dağılımında ASK_2 çözümü gerçek çözüm ile daha uyumlu sonuçlar vermiştir, yani ASK_N yaklaşımının yaklaşım derecesi arttıkça gerçek çözümden sapmıştır. Gelen ışıınım çözümünde ise ASK_N 'nin düşük yaklaşım değerleri gerçek çözüm ile uyumlu iken, ASK_4 çözümü ise DOM S₁₂ ile uyumludur. DC hattı boyunca ASK_N yaklaşımından elde edilen ışıınım ısı akı dağılımı, ASK_N 'nin yaklaşım derecesi arttıkça gerçek çözümlere (Crosbie ve Schrenker, 1984) yaklaştığı görülmüştür. Ayrıca DC hattı boyunca DOM S₁₂'den elde edilen gelen ışıınım ve ışıınım ısı akı çözümlerinde ışın etkisi açıkça gözlenmiştir.



Şekil 6.3. $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ve $\omega_0 = 0,9$ için yüzeylerdeki ışıyım ısı akıları (sol) ve gelen ışıyımına (sağ) göre ızgaralama hassasiyeti.

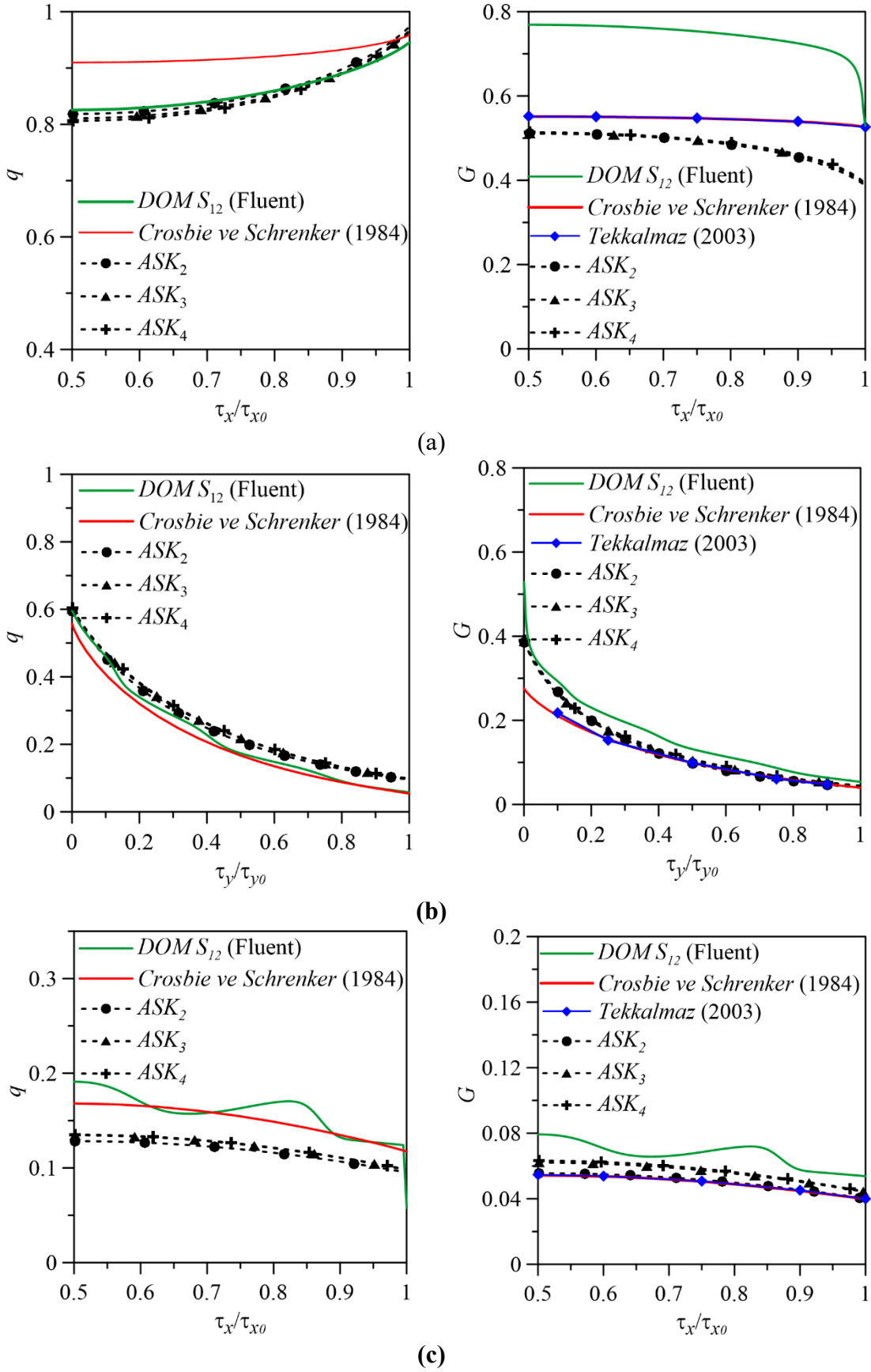


Şekil 6.4. $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ve $\omega_0 = 1,0$ için yüzeylerdeki net ışıınım ısı akıları ve gelen ışıınım dağılımları.

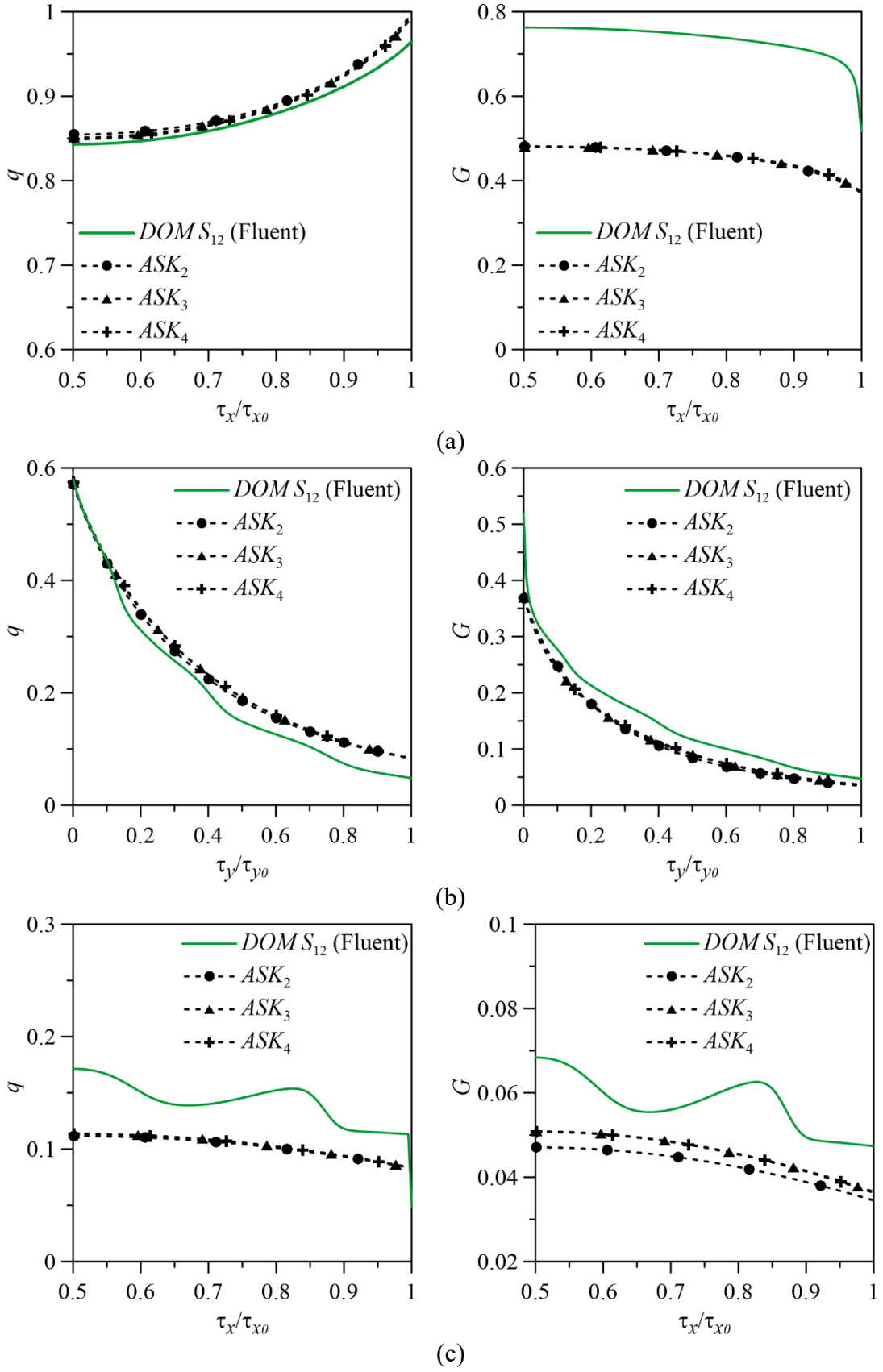
Optik uzunluğu $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ve $\omega_0 = 0,5$ için net ışınım ısı akısı ve gelen ışınım sonuçları izotropik saçılma durumu için çözülmüş ve sonuçları grafiksel olarak Şekil 6.5’de verilmiştir. Işınım ısı akı ve gelen ışınım dağılımları incelendiğinde, $\omega_0 = 1$ durumuna göre benzer özellikler göstermektedir. Işınım ısı akısında, ASK_N yaklaşımının AB hattındaki çözümlere göre, A noktasında fark fazla iken, B noktasına doğru bu fark azalmıştır. Şekil 6.5b’de BC hattındaki ışınım ısı akı ve gelen ışınım dağılımları sunulmuştur. Bu çözümlerde gelen ışınımın $\tau_y/\tau_{y0}=0,2; 0,4; 0,6$ ve $0,8$ değerlerinde, ASK_4 çözümlerinin gerçek çözüme göre yüzde mutlak hataları sırası ile %3,11; %1,34; %0,65 ve %0,41’dir. DC hattında gelen ışınım gerçek çözüm sonuçlarına kıyaslama yapıldığında, ASK_2 çözümleri DOM S_{12} çözümlerine göre daha uyumludur. DC hattında DOM S_{12} çözümlerinde görünen ışın etkisi, ASK_N yaklaşımında gözlenmemektedir.

$\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ optik ebatlı kare geometride $\omega_0 = 0,25$ için AB, BC ve DC hatlarında net ışınım ısı akısı ve gelen ışınım sonuçları Şekil 6.6’da verilmiştir. Saçılma albedosunun küçük değerlerinde yaklaşım derecesinin değişimi ile çözüm sonuçları arasında çok fark gözlenmemektedir. Bu yüzden üç farklı yaklaşım mertebesindeki ASK_N çözümlerini birbiri ile kıyaslamaya gerek yoktur. Kıyaslamalarda sadece DOM S_{12} (Fluent®) çözüm sonuçlarına yer verilmiştir.

Test problemi – 1’de alt eşit-dağılı yayıcı (diffüz) yüzeyinden kaynaklanan bir süreksizlik vardır. Bu süreksizlikler, Denklem (3.36) ve (3.40)’da verilen duvarlardan kaynaklanan doğrudan ışınım terimlerinin matematiksel hesaplamalarından ortaya çıkmaktadır. Standart SK_N yaklaşımı gibi metotlarda doğrudan ışınım terimleri analitik hesaplandığından, bu matematiksel süreksizlikler ortadan kaldırılmaktadır. Süreksizlikleri analitik olarak kaldırılamayan DOM, Küresel Harmonikler gibi metotlarda bu süreksizlik çözüm bölgesine yansır. ASK_N yaklaşımında da duvar fonksiyonları analitik olarak hesaplanmadığı için alt yüzeyden (sıcak yüzeyden) kaynaklanan süreksizlik doğar ve bu süreksizlikten gelen ışınım sonuçları, ışınım ısı akı sonuçlarına göre daha çok etkilenir.



Şekil 6.5. $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ve $\omega_0 = 0,5$ için yüzeylerdeki net ışıınım ısı akıları ve gelen ışıınım dağılımları.

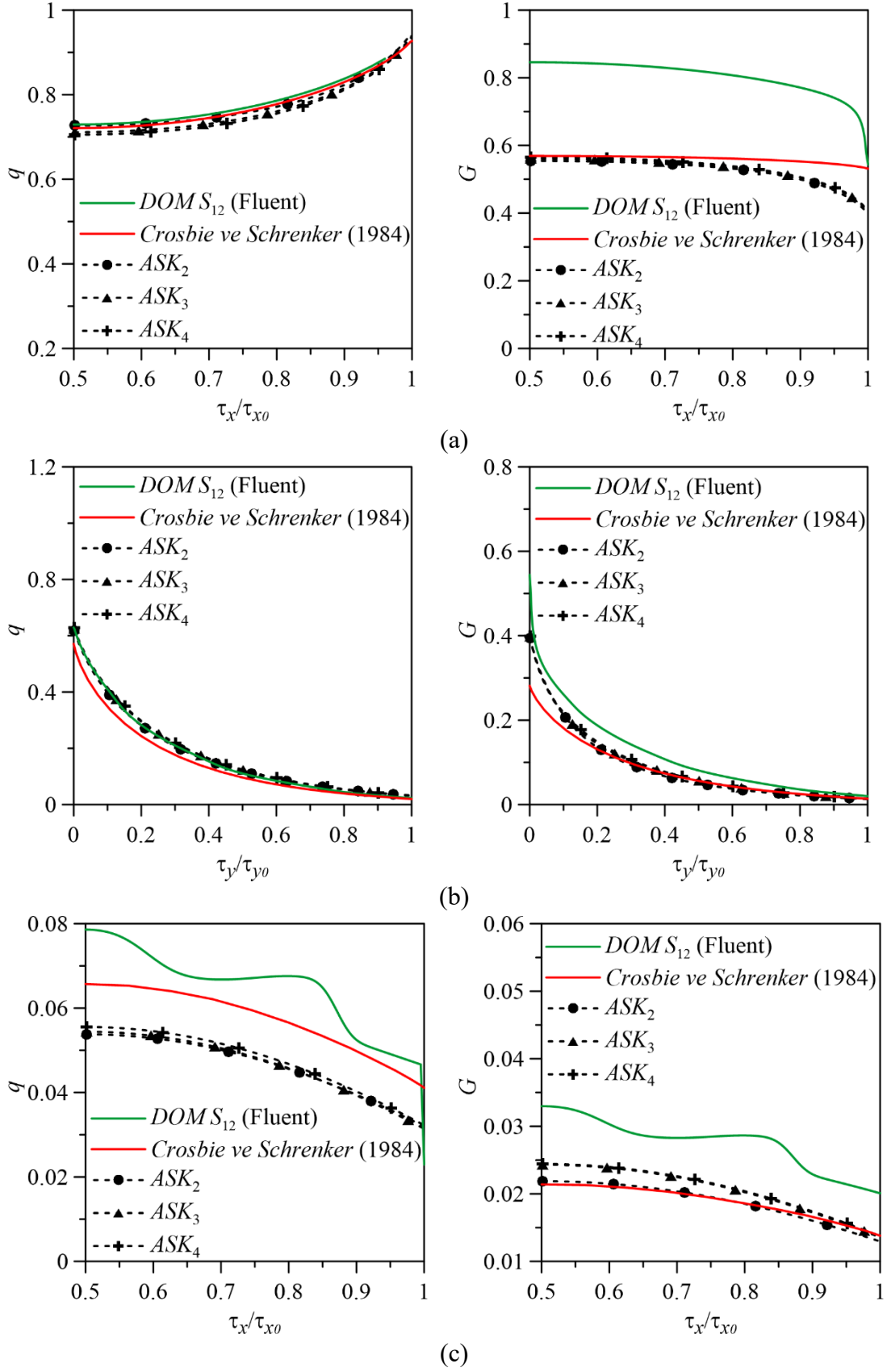


Şekil 6.6. $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ve $\omega_0 = 0,5$ için yüzeylerdeki net ışıınım ısı akıları ve gelen ışıınım dağılımları.

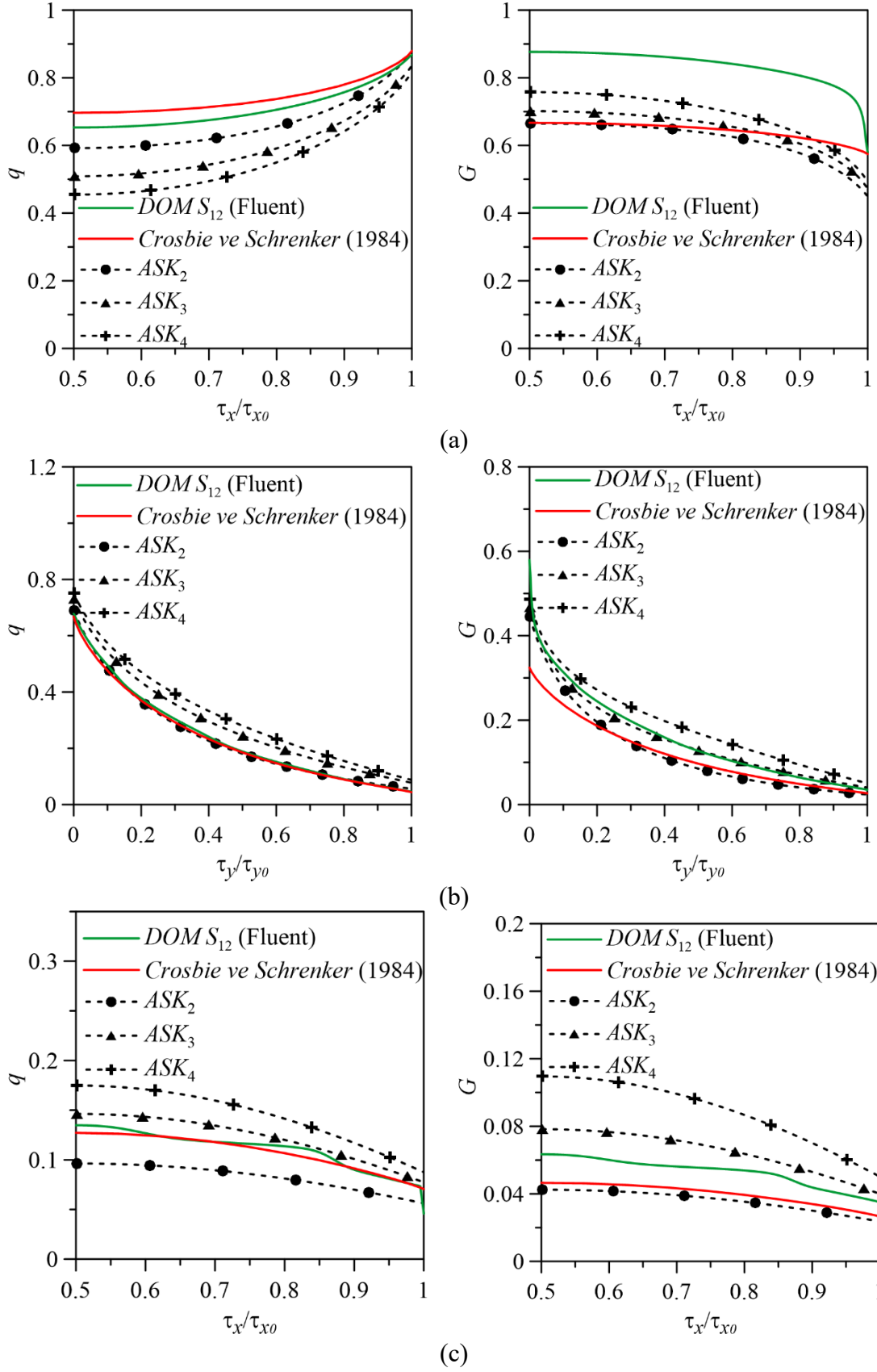
Durum 2. Optik uzunluğu $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 2$ ve $\omega_0 = 0,5$ ve $\omega_0 = 0,9$ için net ışınlım ısı akısı ve gelen ışınlım sonuçları grafiksel olarak verilmiştir.

Şekil 6.7’de $\omega_0 = 0,5$ için optik ebatları $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 2$ mfp olan kare geometride üç yüzeydeki net ışınlım ısı akıları ve gelen ışınlım değerleri verilmiştir. Sonuçların kıyaslanmasında, DOM S₁₂ (Fluent®) ile Crosbie ve Schrenker (1984)’in makalesinde verdiği gerçek çözüm değerlerine yer verilmiştir. Kapalı kutu optik uzunluğu arttıkça, ASK_N yaklaşımından elde edilen gelen enerji ve ışınlım ısı akı dağılımlarında önemli iyileşmeler görülmektedir. Gelen enerjide AB hattında B noktasına doğru gerçek çözüm ile ASK_N yaklaşımının sonucu arasındaki açıklık, kapalı kutu optik uzunluğu arttıkça azalmaktadır. AB hattındaki ışınlım ısı akı dağılımında ASK_2 ve gerçek çözüm sonuçları birbiri ile uyumlu olduğu görülmektedir. Şekil 6.7b’de BC hattındaki gelen ışınlım ısı ve ışınlım ısı akı sonuçlarına yer verilmiştir. Gelen ışınlım sonuçlarında gerçek çözüme kıyasla ASK_N yaklaşımının çözümleri DOM S₁₂ çözümünden daha güzel sonuçlar vermiştir. Diğer optik uzunluk ve saçılma albedosunda bahsedilen süreksizlikten kaynaklanan hata, Şekil 6.7b’deki gelen ışınlım sonuçlarında verilen B noktasında da gözlenmektedir. Şekil 6.7c’de DC hattı boyunca DOM S₁₂ dağılımındaki ışınlım saçılmaları hem ışınlım ısı akı hemde gelen ışınlım sonuçlarında gözlenmektedir. DC hattında ışınlım ısı akı dağılımında ASK_N çözümleri gerçek çözümün yaklaşık %1,26 altında, DOM S₁₂ çözümleri gerçek çözümün yaklaşık %0,78 üstünde sonuçlar vermiştir.

Şekil 6.8’de $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 2$ ve $\omega_0 = 0,9$ olan test problemi-1 için boyutsuz net ışınlım ısı akı ve gelen ışınlım dağılımları sırasıyla AB, BC ve DC hatlarında elde edilmiştir. Elde edilen ASK_2 , ASK_3 ve ASK_4 sonuçları, gerçek çözüm ve DOM S₁₂ çözümleri ile kıyaslanmıştır. AB hattındaki hem gelen ışınlım hemde ışınlım ısı akı sonuçlarının literatür ile kıyaslamalarına en uygun sonuç ASK_2 yaklaşımı ile elde edilmiştir. Buna ilaveten gelen ışınlımda B noktasındaki süreksizlikten kaynaklanan sapma burada da gözlenmektedir. Ayrıca AB hattındaki (Bknz Şekil 6.7a ve 6.8a) sistemden giren ısı aynı olmasına rağmen, saçılma albedosu değeri arttıkça ortamın yüzeyden çıkan ısı değeri arttığı için, yüksek saçılma albedolu ortamdaki sıcak yüzeyin net ışınlım akısı değeri daha küçüktür.



Şekil 6.7. $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 2$ ve $\omega_0 = 0,5$ 'li Test Problemi-1'de a) AB, b) BC ve c) DC hatları için boyutsuz ışıınım ısı akıları ve gelen ışıınım dağılımları.



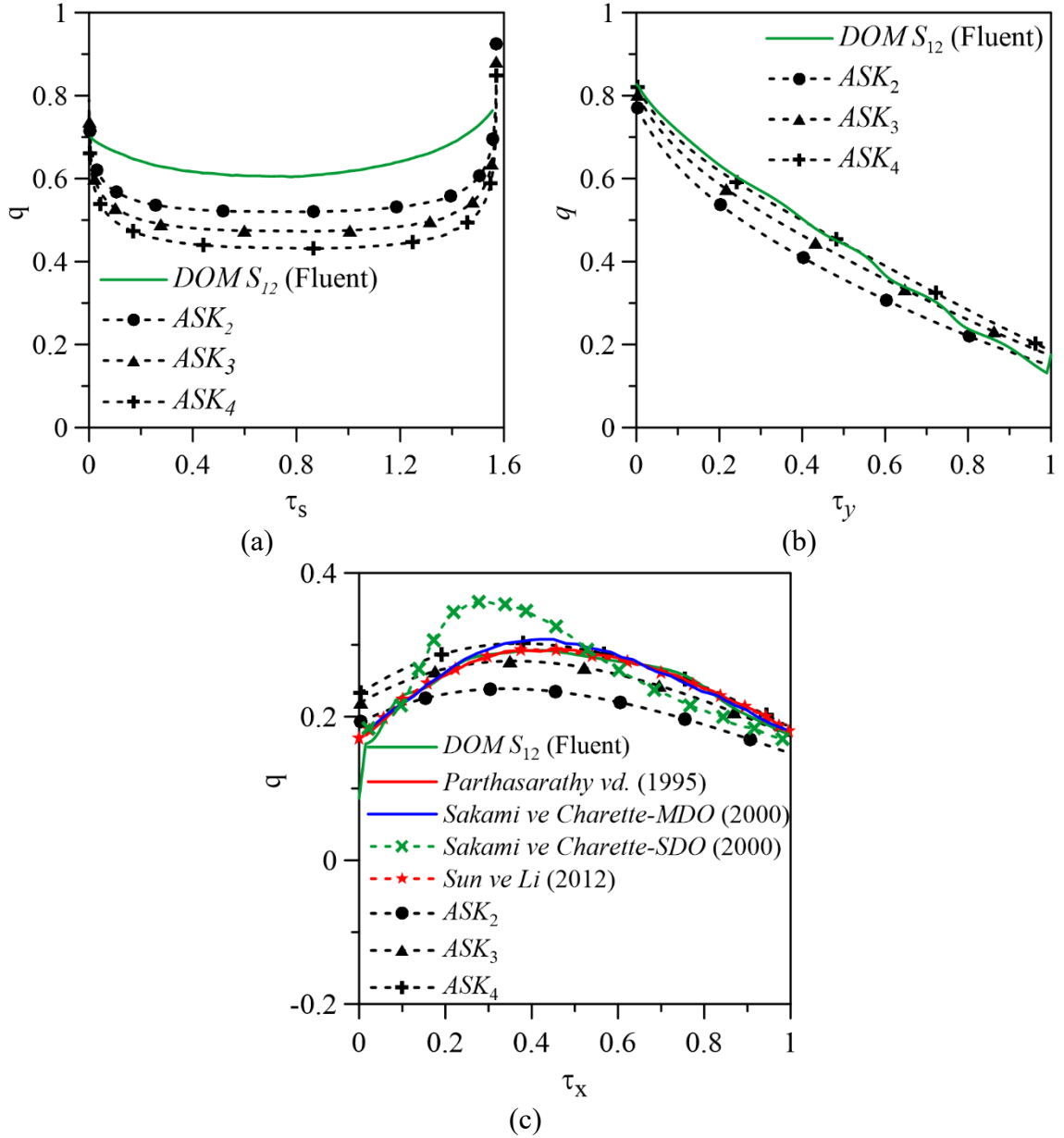
Şekil 6.8. $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 2$ ve $\omega_0 = 0,9$ 'li Test Problemi-1'de a) AB, b) BC ve c) DC hatları için boyutsuz ışıınım ısı akıları ve gelen ışıınım dağılımları.

Şekil 6.8b’de BC hattı boyunca ışınım ısı akı ve gelen ışınım dağılımları verilmiştir. Işınım ısı akısında Crosbie ve Schrenker’in (1984) gerçek çözümleri ile DOM S_{12} ve ASK_2 çözümleri uyumlu iken, gelen ışınım sonuçlarında gerçek çözüm ASK_2 sonuçları ile, DOM S_{12} çözümleri ise ASK_3 sonuçları ile uyumludur. Ayrıca saçılma albedosu artarken, sağ yüzeydeki ışınım enerjisi artar (Bknz Şekil 6.7b ve Şekil 6.8b). Çünkü bu ışınım ısı akısı, saçılma albedosu artarken soğuk ortamdan soğurulmaktan ziyade yan duvarlara doğru daha çok saçılır. $\omega_0 = 0,9$ için sağ yüzeyden çıkan ısı $\omega_0 = 0,5$ durumundan ortalama %13,62 fazladır. Buna benzer şekilde sağ yüzey için gelen ışınım değeri $\omega_0 = 0,9$ değerinden, $\omega_0 = 0,5$ değerine göre %9,68 daha fazla çıktığı görülmüştür. Şekil 6.8b’de DC hattı boyunca ışınım ısı akı ve gelen ışınım dağılımları verilmiştir. ASK_N yaklaşımın yaklaşım derecesi arttıkça, DOM S_{12} ve gerçek çözüm (Crosbie ve Schrenker, 1984) değerlerinden sapma görülmüştür. DC hattında ışınım ısı akısında ASK_2 yaklaşımının gerçek çözüme göre maksimum mutlak fark %3,1 iken, hat boyunca mutlak fark yaklaşık %2,33 civarındadır. Gelen ışınım sonucunda ASK_2 çözümü ile gerçek çözüm arasında ortalama mutlak fark %0,48’dir.

Test Problemi 2.

Bu problemde soğuran, yayan ve izotropik saçan iki boyutlu Şekil 6.1b’de verilen kavisli geometrik ortamdaki ışınım ısı transferi ele alınmıştır. Kavisli yüzey sıcak, diğer yüzeyler ile ortam soğuktur. Bu problemde de bütün yüzeyler siyah olup $\omega_0 = 0,0; 0,5; 0,8$ ve 1,0 değerleri için gelen ışınım ve net ışınım akısı çözümleri elde edilerek kıyaslama yapılmıştır. Çözümlerin kıyaslamaları, Fluent® paket programı kullanılarak elde edilen DOM S_{12} çözümlerinin yanısıra literatürde sonuçları yayımlanmış aşağıda belirtilen diğer yöntemlerle de kıyaslanmıştır. Parthasarathy vd. (1995) aynı problemi Monte-Carlo metodu çözerek beş farklı saçılma albedosu için üst yüzeydeki ışınım ısı akı değerlerine yer vermişlerdir. Sun ve Li (2012) aynı test problemini $\omega_0 = 1,0$ için Collocation Spektral metodu ile çözmüş ve DC hattı boyunca ışınım ısı akısı değerini vermişlerdir. Sakami ve Charette (2000) Standart Kesikli Ordinatlar Metodu (SDO-S4) ve Düzeltilmiş Kesikli Ordinatlar Metodu (MDO-S4) ile $\omega_0 = 1,0$ durumu için üst yüzeyde ışınım ısı akısı profilini vermişlerdir. Bu problemlerin çözümünde 23354 düğüm sayılı ızgaralama tercih edilmiştir.

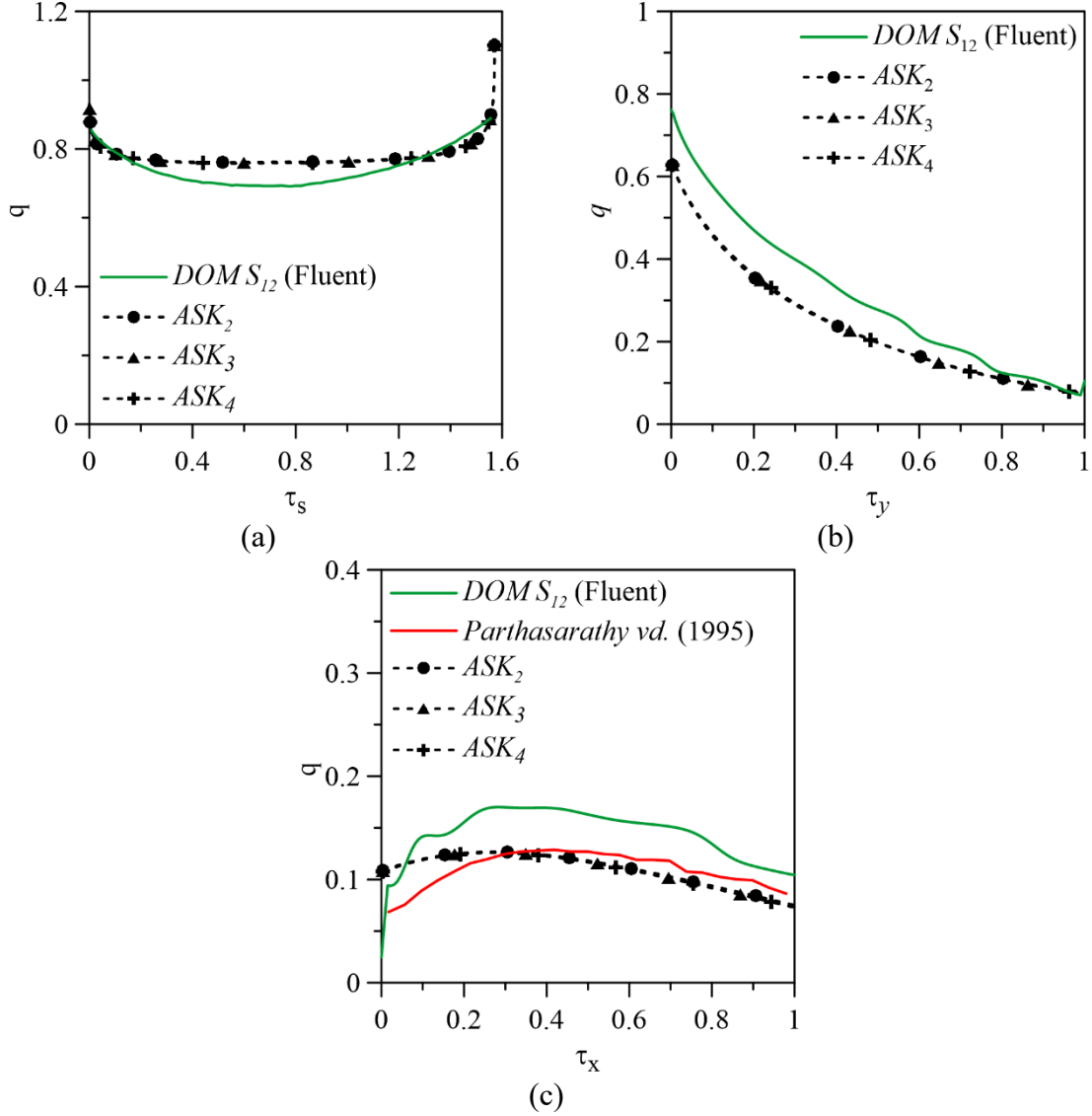
$\omega_0 = 1$ için a) sıcak (AB yayı), b) sağ (BC hattı), c) üst (DC hattı) yüzeylerde net ısı akısı değişimleri Şekil 6.9'da görülmektedir. Literatürde DC hattı boyunca ışıınım ısı akı çözümleri birçok araştırmacı tarafından rapor edilmiştir. Diğer yüzeyler için Fluent® paket programı ile elde edilen DOM S₁₂ çözümleri ile kıyaslamalar yapılmıştır. BC hattı boyunca DOM S₁₂ çözümlerinde bir miktar ışıın dalgalanmaları görülmektedir. Ayrıca BC hattında ASK_N'nin yaklaşım derecesi arttıkça, çözümlerinin DOM S₁₂ çözümlerine yaklaştığı açıkça görülmektedir. Şekil 6.9c'de, Sakami ve Charette (2000)'nin SDO-S4 çözümlerinde belirgin bir pikli ışıın etkisi sergilenirken, DOM S₁₂ çözümü D köşesi haricinde çoğu kısmını literatür ile uyumludur. DC hattı (üst yüzey) için, ASK₃ ve ASK₄ yaklaşımının ışıınım ısı akı sonuçları Parthasarathy vd. (1995), Sun ve Li (2012)'nin ve Sakami ve Charette (2000)'nin MDO-S4 ile elde ettikleri sonuçlar oldukça uyumludur. Ayrıca ortam daha saçıcı olduğunda, yaklaşım derecesinin artışı avantajlıdır.



Şekil 6.9. $\omega_0 = 1,0$ için a) kavisli yüzey-AB hattı b) sağ yüzey-BC hattı, c) üst yüzey-DC hattı için net ışıınım ısı akısı değişimleri.

Şekil 6.10'da $\omega_0 = 0$ için test problemi-2'nin üç yüzeydeki net ışıınım ısı akıları verilmiştir. AB ve BC hatları için Fluent® paket programı ile elde edilen DOM S₁₂ çözümleri ile kıyaslama yapılmıştır. DC hattında ise DOM S₁₂ çözümü haricinde Monte Carlo çözümü (Parthasarathy vd., 1995) ile de kıyaslanmıştır. DOM S₁₂ çözümlerinde, ışın etkileri sonucunda meydana gelen dalgalanmalar görülmektedir. $\omega_0 = 0$ için ASK₂, ASK₃ ve ASK₄ yaklaşımlarının ışıınım ısı akı dağılımları çözümleri birbirine çok yakın sonuçlar üretmiştir. DC hattında ASK_N yaklaşımının Monte Carlo çözümüne göre D noktasında sapma gözlenmiştir. Bu sapmanın sebebi, A noktası için duvar fonksiyonlarının hesaplanmasından

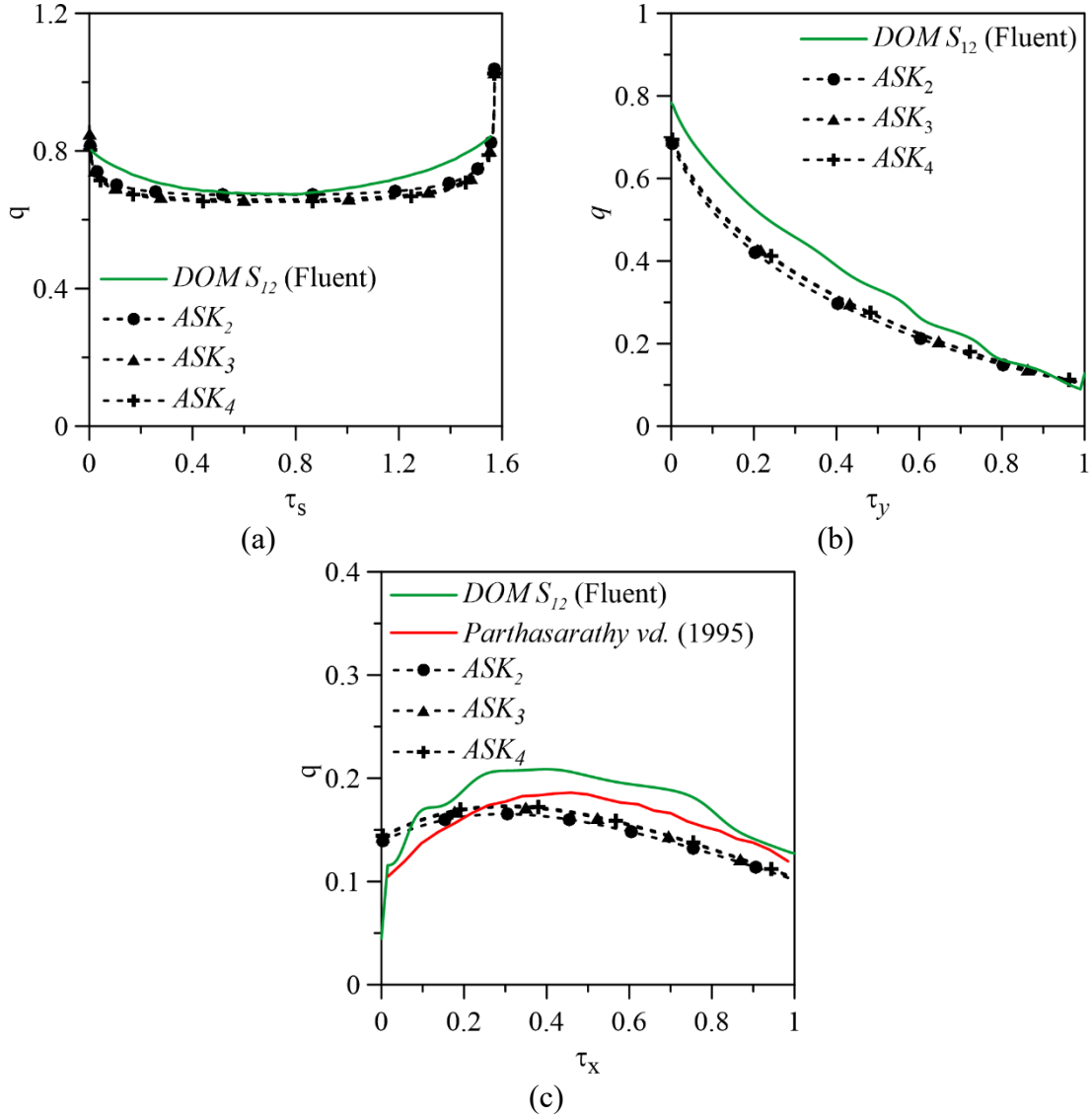
kaynaklanan süreksizliktir. A noktası D noktasına daha yakın olduğu için, DC hattındaki D noktasındaki fark daha bariz gözlenmektedir.



Şekil 6.10. $\omega_0 = 0$ için a) AB hattı, b) BC hattı, c) DC hattı için net ışıınım ısı akısı değişimleri.

Şekil 6.11’de $\omega_0 = 0,5$ için üç yüzeydeki net ışıınım ısı akıları verilmiştir. Şekil 6.11a ve b’de test problemi 2 için net ışıınım ısı akısı değeri ile Fluent® paket programı ile elde edilen $DOM S_{12}$ çözümleri kıyaslamaları verilmiştir. $\omega_0 = 0,5$ için ASK_N yaklaşımının ışıınım ısı akı dağılımları $DOM S_{12}$ çözümlerinden daha iyidir. Şekil 6.10a, Şekil 6.11a ve Şekil 6.12a’da sırası ile $\omega_0 = 0,0$; $0,5$ ve $0,8$ için sıcak yüzeye ait net ışıınım ısı akısı değişimleri verilmiştir. Kavisli yüzeyden sisteme giren ısı aynı olmasına rağmen, saçılma albedusu değeri arttıkça ortamın yüzeyden çıkan ısı değeri arttığı için, yüksek saçılma

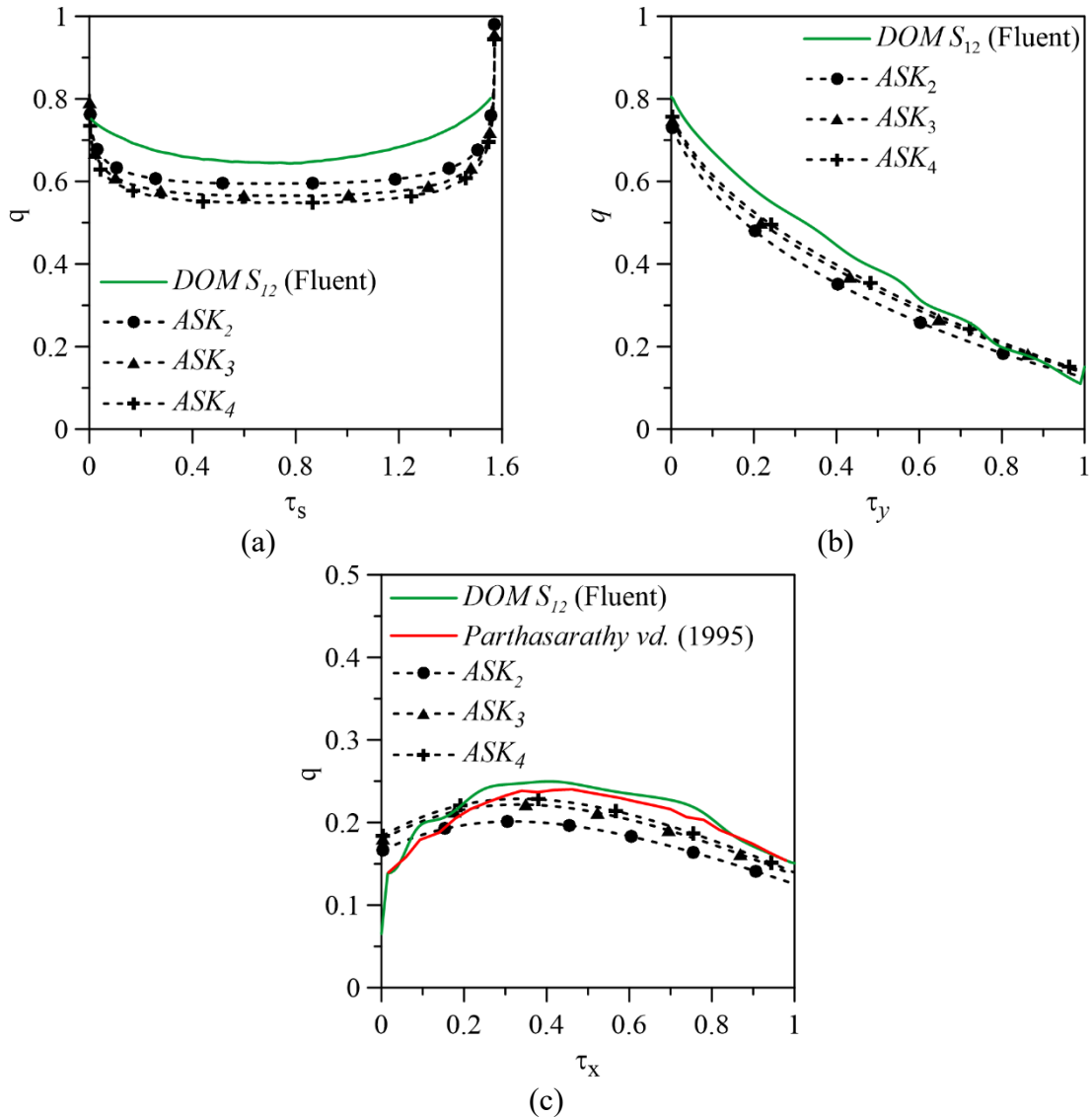
albedolu ortamdaki sıcak yüzeyin net ışıma ısı akısı değeri daha küçüktür. Saçılma albedosu $\omega_0 = 0,0$ değeri için sıcak yüzeydeki net ısı $\omega_0 = 0,5$ durumunda ortalama %12 fazla iken, $\omega_0 = 0,8$ durumuna göre ortalama %23,5 fazladır.



Şekil 6.11. $\omega_0 = 0,5$ için a) AB hattı, b) BC hattı, c) DC hattı için net ışıma ısı akısı değişimleri.

$\omega_0 = 0,8$ için dört yüzey üzerindeki net ışıma ısı akısı değişimleri Şekil 6.12’de verilmiştir. Üst yüzeydeki (DC hattı) net ışıma ısı akısı hem Fluent® paket programı ile elde edilen DOM çözümleri hemde Parthasarathy vd. (1995)’nin çalışması ile kıyaslanmaktadır. Diğer yüzeyler ise sadece Fluent® paket programı ile kıyaslanmaktadır. Ortamın saçılma albedosu arttıkça, ASK_2 , ASK_3 ve ASK_4 çözümlerinin ışıma ısı akı dağılımları birbirinden

ayrılmaya başlar. $\omega_0 = 0,8$ için ASK_N yaklaşımının yaklaşım derecesi arttıkça, ışıınım ısı akı dağılımı gerçek çözüm değerlerine giderek yakınlaştığı görülmektedir. DC hattındaki çözümlerde literatüre göre en uyumlu sonuçlar ASK_4 ile elde edilmiştir. Şekil 6.12c'de üst yüzeydeki net ışıınım ısı akılarında, D noktasında Parthasarathy vd. (1995)'deki elde edilen sonuçlara göre mutlak hata oranı yaklaşık %5,10'larda iken, τ_x 'nin artması ile literatür ile fark oldukça azalmıştır. Örneğin: ASK_4 çözümlerinin Parthasarathy vd. (1995)'nin çalışmasına göre $\tau_x=0,4$ ve $0,6$ iken mutlak hataları sırası ile %1,08 ve %1,72'dir.



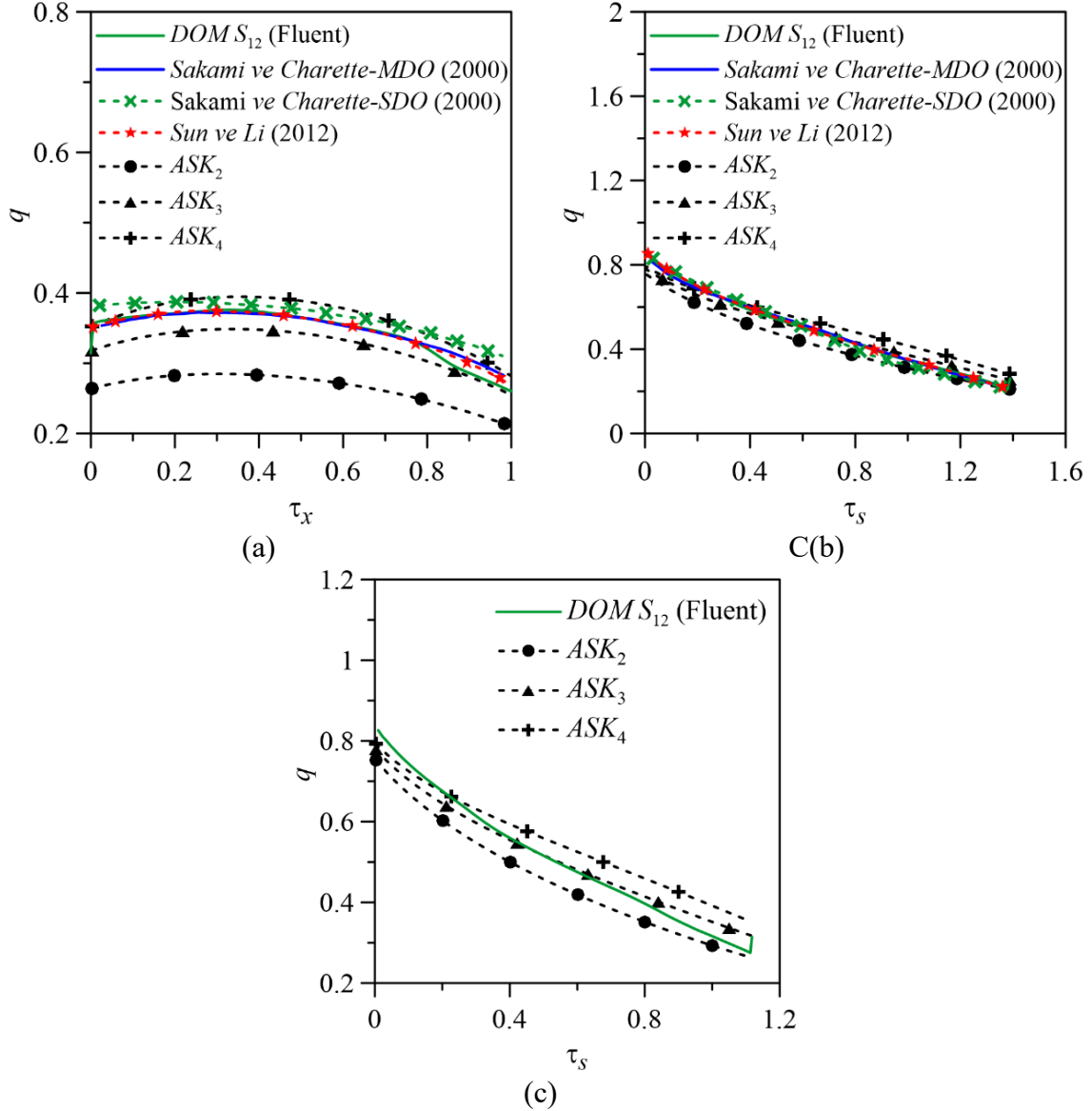
Şekil 6.12. Test problemi-2'de $\omega_0 = 0,8$ için a) AB hattı, b) BC hattı, c) DC hattı için net ışıınım ısı akısı değişimleri.

Test Problemi 3.

İzotropik saçılma durumu için sabit saçılma albedolu (homojen ortam) test problemi-3'de ışınım transfer problemi oluşturulmuştur (Bkz Şekil 6.1c). Ortamda sadece yamuğun alt yüzeyinde izotropik birim ışınım etkisi vardır, yamuğun diğer yüzeylerinde birim ışınım etkisi yoktur. Alt cidarı sıcak olan yamuk için yapılan koşturmelerde düğüm sayısının 71426 olduğu ızgaralama yapısı tercih edilmiştir. Bütün kenarların yayma oranı $\varepsilon=1$ ve ortam saçılma albedosu 0,2;0,5;1,0 ele alınmıştır. Tüm geometri ve saçılma albedosu için yüzeylerdeki net ışınım ısı akısı çözümleri elde edilmiştir. Kıyaslamalarda Sakami ve Charette'nin (2000) çalışması ele alınmıştır. Bu çalışma kapsamında Standart Kesikli Ordinatlarda Metodu (SDO-S4) ve Düzeltilmiş Kesikli Ordinatlarda Metodu (MDO-S4) ile izotropik yalın saçılmalı ($\omega_0 = 1,0$) ortamlarda üst yüzeydeki ışınım ısı akısı değerlerini elde etmişlerdir. Ayrıca kıyaslamalarda Parthasarathy vd.'nin (1995) çalışmaları ele alınmıştır ve bu çalışma kapsamında yayan, soğuran, izotropik ve anizotropik saçılmalı alt yüzeyi sıcak yamuk ortamdaki ışınım ısı transferi üzerine çalışmışlardır. Beş farklı saçılma albedosunda Monte-Carlo metodu ile elde ettikleri çözümleri yamuğun sağ duvarı (BC hattı) için net ışınım ısı akısı değişimlerini grafik üzerinde sunmuşlardır. Kıyaslamalarda ele alınan diğer bir çalışma Sun ve Li'nin (2012) kullandıkları etkili bir nümerik metot olan Sıralamalı Spektral Metodudur (Collocation Spectral Method). Bu çalışmada iki boyutlu dikdörtgen olmayan bölgelerde ışınım ısı transfer problemlerini çözmüşlerdir. Çalışmada ele aldıkları geometrilerden biri Şekil 6.1c'de verilen alt yüzeyi sıcak, diğer yüzeyin ve ortamın soğuk olduğu yamuktur. Yalın saçılma albedo ($\omega_0 = 1,0$) durumu için BC ve DC hattında boyutsuz ısı akı değişimi sonuçlarına çalışmalarında yer vermişlerdir. Sun ve Li (2012) elde ettikleri çalışma sonuçlarını, Wang vd.'nin (2010) hazırlamış olduğu çalışma sonuçları ile kıyaslamışlar ve bu kıyaslama sonuçlarının birbirini ile mükemmel uyumlu olduğunu göstermişlerdir. Wang vd. (2010) iki ve üç boyutlu dikdörtgen olmayan bölgelerde ışınım transfer denklemini çözmek için Meshless Method (Ağsız Method) kullanmışlardır. Kullandıkları metotta ikinci dereceden kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için hareketli en küçük kareler yaklaşımı uygulanmıştır. Bu iki çalışma sonuçları birbirini ile uyumlu olduğu için kıyaslamalarda sadece Sun ve Li (2012)'nin çalışmasına yer verilmiştir.

Alt yüzeyden ısıtılan test problemi-3'de $\omega_0 = 1,0$ için Şekil 6.20'de a) üst, b) sağ ve c) alt yüzeydeki net ışınım ısı akısı değişimi verilmiştir. Sakami ve Charette (2000)'nin

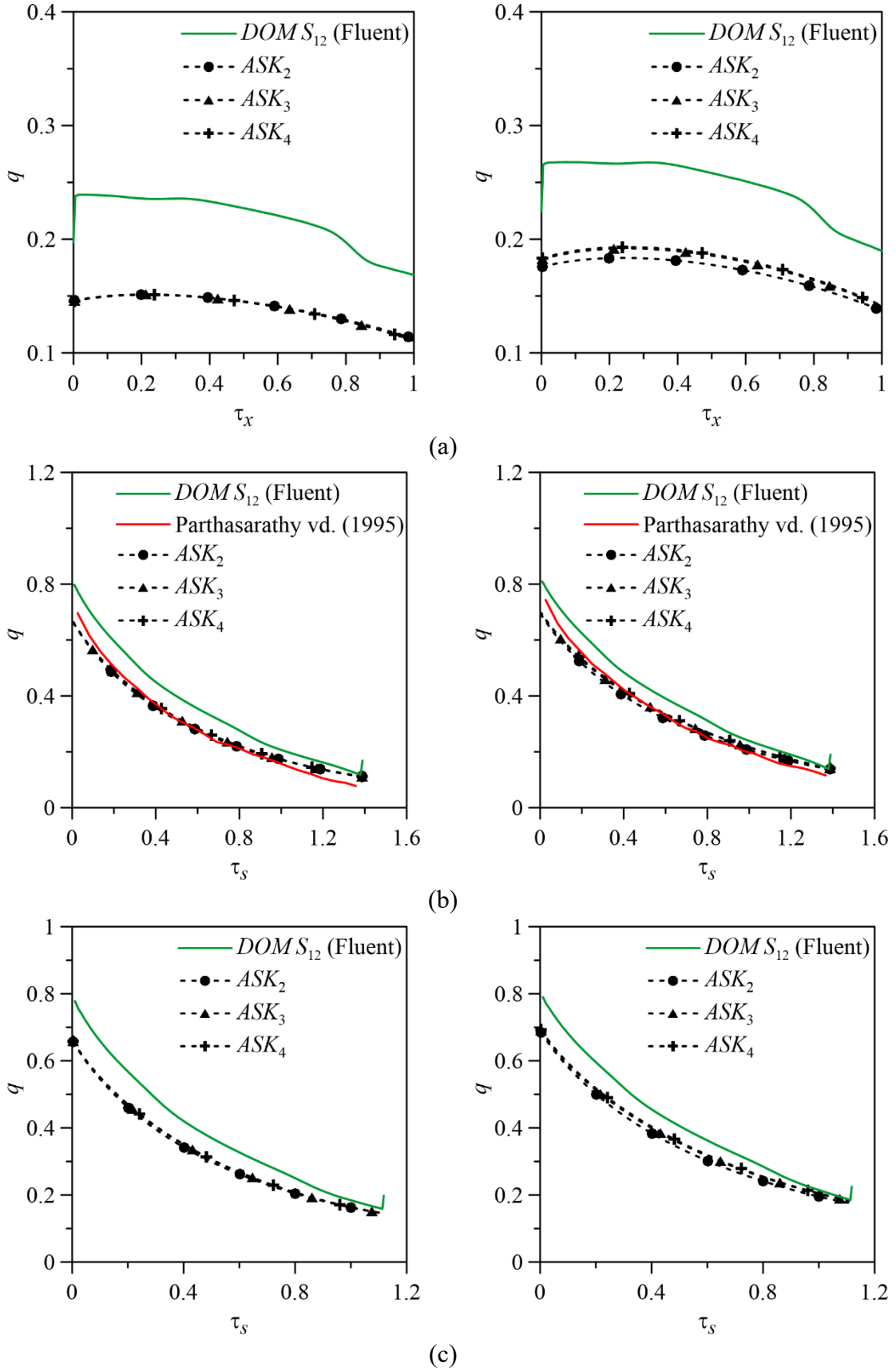
çalışmalarındaki hem SDO hemde MDO metotlarındaki S4 yaklaşımları ile elde edilen çözümleri kıyaslamada kullanılmıştır.



Şekil 6.13. Test problemi-3'de $\omega_0 = 1,0$ için net ışınım ısı akısı değişiminin kıyası (a-DC, b-BC, c-AD hattı boyunca).

Şekil 6.13a'da DC hattı boyunca ASK_4 'ün ışınım ısı akı dağılımı SDO S4 (Sakami ve Charette, 2000) ile uyumludur. MDO S4 ve Sıralamalı Spektral Metot sonuçları kendi arasında uyumlu iken, $DOM S_{12}$ çözümleri ise cidar noktalarında sapma göstermiştir. Şekil 6.13b'de BC hattı boyunca ASK_3 'ün ışınım ısı akı dağılımı MDO S4 (Sakami ve Charette, 2000) ve Sıralamalı Spektral Metot (Sun ve Li, 2012) ile uyumlu çıkmıştır. AD hattında ASK_4 çözümleri ile Fluent® paket programından elde edilen DOM çözümleri arasında %4,25 fark vardır.

Test problemi-3'de $\omega_0 = 0,5$ ve $\omega_0 = 0,2$ için net ışıınım ısı akısı sonuçları grafiksel olarak Şekil 6.14'de verilmiştir. Saçılma albedosu küçüldükçe, Alternatif SK_N denklemlerinde yaklaşım derecesinin değişimi ile sonuçların birbirine yakın çıktığı görülmektedir. Özellikle bu farkın en belirgin olduğu hat, üst yüzey yani DC hattıdır. Kıyaslamaların yapılabilmesi için DC hattında ASK_2 çözümünün ASK_4 çözümüne göre ortalama farkları incelendiğinde, saçılma albedosunun $\omega_0 = 1,0$ olduğundaki ortalama fark %29,76; saçılma albedosunun $\omega_0 = 0,5$ olduğundaki ortalama fark %4,76; saçılma albedosunun $\omega_0 = 0,2$ olduğundaki ortalama fark %0,8'dir. Şekil 6.14b'de ASK_N yaklaşımı çözümlerinin, Monte Carlo (Parthasarathy vd., 1995) sonucuna göre $\omega_0 = 0,2$ için BC hattında C köşesine doğru saptığı gözlenmiştir. C köşesinde ASK_N yaklaşımının Monte Carlo sonucuna göre mutlak hata farkı %3,37 iken, DOM S_{12} 'nin Monte Carlo çözümüne göre mutlak hata farkı %9,08'dir. $\omega_0 = 0,5$ için BC hattında ASK_N yaklaşımının tüm çözümleri Monte Carlo çözümü ile uyumludur. Şekil 6.14c'de ise solda $\omega_0 = 0,2$, sağda $\omega_0 = 0,5$ için AD hattındaki ışıınım ısı akı dağılımları verilmiştir. AD hattındaki kıyaslamalar, DOM S_{12} çözümleri ile yapılmıştır. AD hattındaki saçılma albedosunun 0,5 olduğu ortamdaki net ışıınım ısı akısı, saçılma albedosunun 0,2 olduğu ortama göre %19,16 daha büyüktür. Saçılma albedosu artarken, soğuk yüzeylerdeki ışıınım enerjisi artar. Çünkü bu ışıınım ısı akısı, saçılma albedosu artarken soğuk ortamdan soğurulmaktan ziyade yan duvarlara doğru daha çok saçılır.

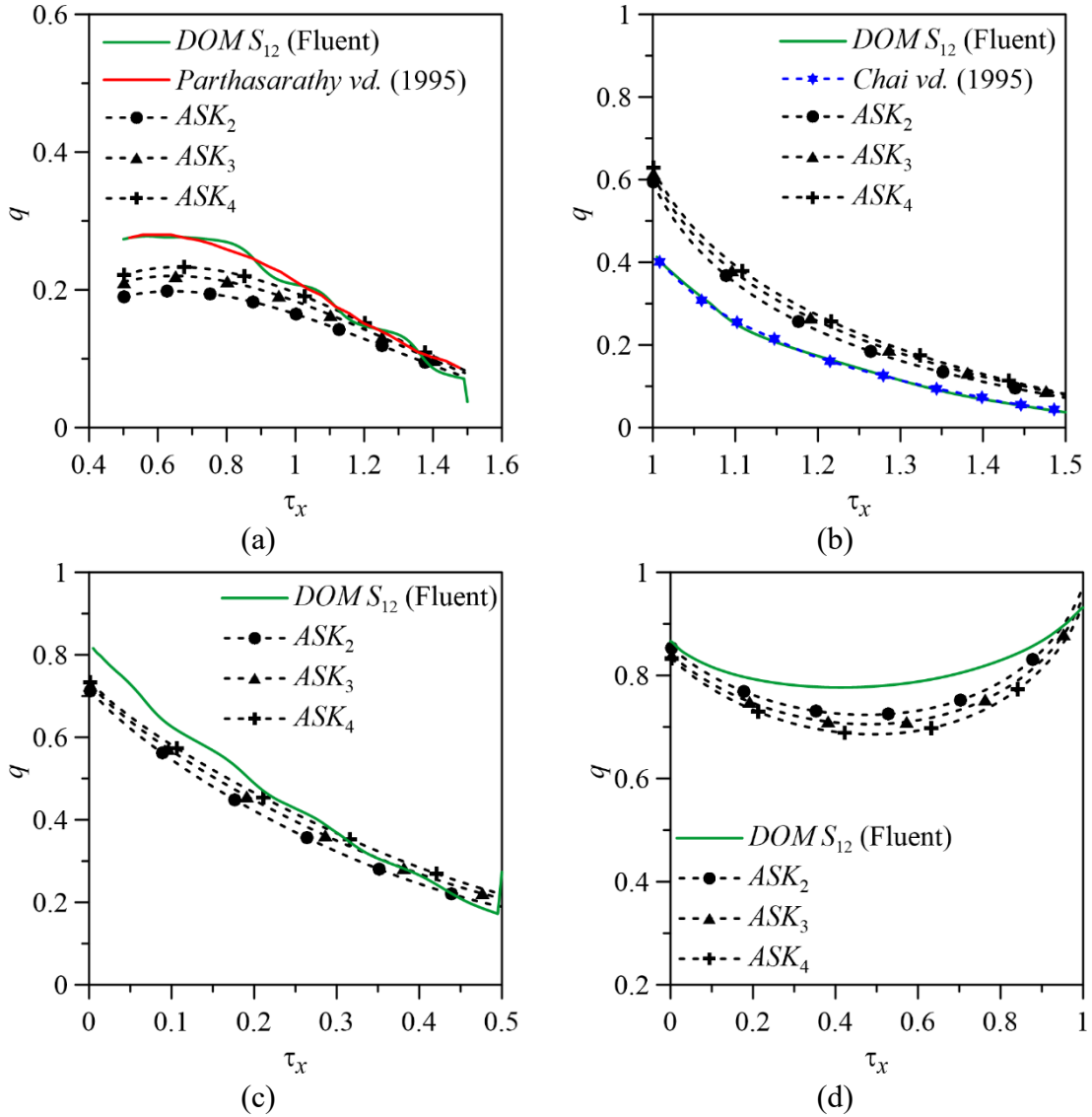


Şekil 6.14. a-DC, b-BC, c-AD hattı boyunca test problemi-3’de saçılma albedosuna göre net ışınım ısı akısı miktarları (sol taraf $\omega_0 = 0,2$, sağ taraf $\omega_0 = 0,5$).

Test Problemi 4.

Yapılan analizlerde 35604 düğüm sayılı ızgara yapısı kullanılmıştır. Kıyaslamada Parthasarathy vd.'nin (1995) çalışmaları ele alınmıştır ve bu çalışmada soğuran, yayan, izotropik ve anizotropik saçan üç farklı dikdörtgen olmayan bölgede ışınım ısı transferi çözümlerini Monte-Carlo yöntemi uygulayarak elde etmişlerdir. İnceledikleri üç farklı dikdörtgen olmayan bölgeden biri Şekil 6.1d'de verilen paralelkenardır. Parthasarathy vd. (1995) çalışmalarında $\omega_0 = 0; 0,2; 0,5; 0,8$ ve 1 değerleri için sol üst köşeden başlayarak üst duvar boyunca (DC hattı) ısı akı değişimini grafiksel olarak vermişlerdir. Yaptıkları bu çalışmayı, özellikle dikdörtgen olmayan bölgede ışınım ısı transferi için yeni çözüm metodu geliştirenlerin doğrulama yapmakta kullanabileceği yararlı bir kaynak olduğunu savunmuşlardır.

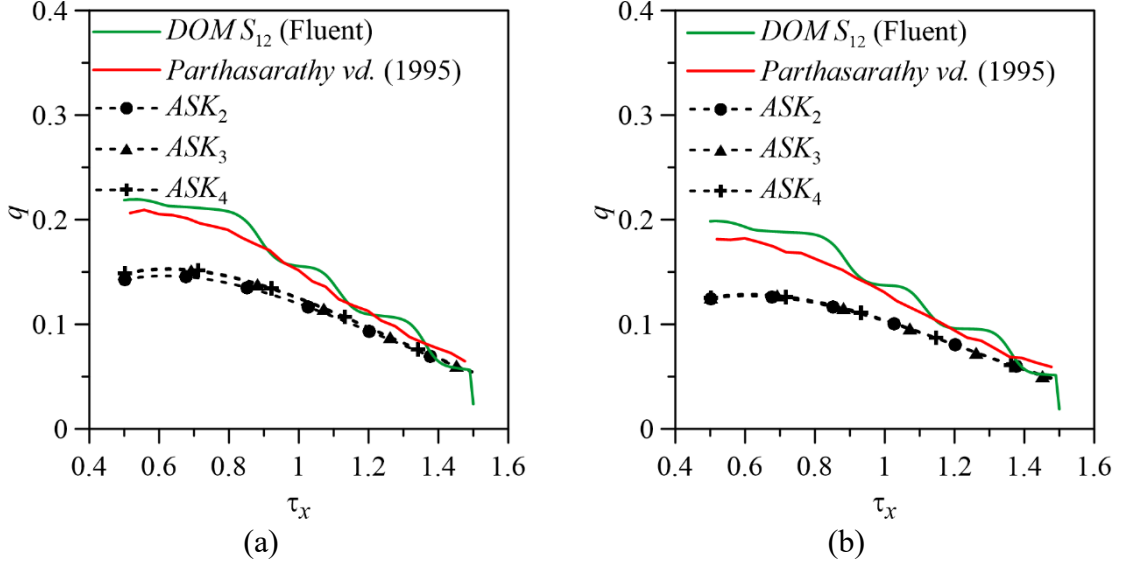
Şekil 6.15'te $\omega_0 = 1,0$ olan test problemi-4 için a) DC, b) BC, c) AD ve d) AB hattındaki çıkan ışınım ısı miktarları verilmiştir. DOM S₁₂ (Fluent®) ısı akı çözümlerinde ışın saçılmalarındaki dalgalanma açıkça gözlenmektedir. DC hattında τ_x 'in 0,7 değerine kadar çıkan ışınım ısı miktarları artmış, τ_x 'in artması ile çıkan ışınım ısı miktarı azalmıştır. DC hattında Parthasarathy vd. (1995) çalışması ile en uyumlu sonuçları ASK_4 çözümünde yakalamıştır. Yani literatür çözümlerine göre, ASK_N çözümlerinin saçılma albedosu ve yaklaşım derecesinin artması ile daha uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. Üst yüzey yani DC hattı için çıkan ışınım ısı akısının Parthasarathy vd. 1995 yılındaki elde ettiği çözümlerin kıyaslaması incelenecek olursa; $\tau_x=0,5$ 'deki mutlak hata %5,24; $\tau_x=0,7$ 'deki mutlak hata %4,11; $\tau_x=0,9$ 'daki mutlak hata %2,61; $\tau_x=1,1$ 'deki mutlak hata %0,74; $\tau_x=1,3$ 'deki mutlak hata %0,16'dır. Şekil 6.24a'da literatürler ile maksimum mutlak hatalar D noktasında gözlenmekte, Şekil 6.24b'de maksimum mutlak hata B noktasında gözlenmiştir. BC hattındaki B noktasındaki ASK_4 ve Chai vd. (1995)'in çalışmalarının çözümleri arasındaki mutlak hata %19,42'dir.



Şekil 6.15. Test problemi-4’de $\omega_0 = 1,0$ için a) DC, b) BC, c) AD ve d) AB hattında ışıınım ısı akısı değişimi.

$\omega_0 = 0,5$ ve $\omega_0 = 0,2$ olan test problemi-4 için DC hattından çıkan ışıınım ısı akısı çözümleri grafiksel olarak Monte Carlo metodu ve $DOM S_{12}$ (Fluent®) ile kıyaslamalı olarak Şekil 6.16’da verilmiştir. Parthasarathy vd. (1995) tarafından yapılan Monte-Carlo metodu ile kıyaslama incelenecek olursa; $\omega_0 = 0,5$ olduğu ortam için $\tau_x=0,5$ ’deki mutlak hata %5,66, $\tau_x=0,7$ ’deki mutlak hata %4,68; $\tau_x=0,9$ ’daki mutlak hata %3,61; $\tau_x=1,1$ ’deki mutlak hata %1,68; $\tau_x=1,3$ ’deki mutlak hata %1’dir. Buna benzer şekilde $\omega_0 = 0,2$ olduğu ortam için $\tau_x=0,5$; 0,7; 0,9; 1,1 ve 1,3’deki mutlak hatalar sırayla %5,64; %4,46; %3,4 ; %1,92 ve %1,16’dır. Buna ek olarak; diğer geometrilere görüldüğü gibi ortam saçılmasının azalması ile ASK_N denkleminin yaklaşım mertebesindeki değiştilmesi sonucu fazla etkilememektedir.

Örneğin; ortam saçılmasının 0,5 olduğunda ASK_2 'in ASK_4 çözümlerine göre DC hattı boyunca ortalama %3,96 fark varken, saçılmanın 0,2 olduğu ortamda ASK_2 'in ASK_4 çözümlerine göre fark %0,28'dir. Öyleyse, saçılma albedosunun küçük değerlerinde ASK_N 'in yaklaşım derecesi değişimi çözüm sonuçlarını çok etkilememektedir.



Şekil 6.16. Test problemi-4'de DC hattında a) $\omega_0 = 0,5$ ve b) $\omega_0 = 0,2$ için ışıınım ısı akısı değişimi.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Alternatif SK_N (ASK_N) metodunun homojen iki boyutlu katılımcı ortamlara uyarlanarak yöntemin doğruluğunu ve geçerliliğini tespit etmek için literatürde kıyaslama amacıyla kullanılan dört test problemi kullanılmıştır. Bu test problemleri soğuran, yayan ve izotropik olarak saçan iki boyutlu dikdörtgen ve dikdörtgen olmayan geometrilerden oluşmaktadır. Literatürde çeşitli yöntemler ile yapılan gelen ışınım enerjisi ve ışınım ısı akısı çözümlerin kıyaslamaları yapılarak aşağıdaki sonuçlar çıkarılmıştır:

Standart SK_N yaklaşımında doğrudan ışınım bileşenleri ($f_G(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{f}_q(\mathbf{r})$) her farklı geometri ve yüzey için analitik olarak hesaplanması gereklidir. Bu analitik türetmeler oldukça zor iken, nümerik olarak hesaplanabilirler ancak nümerik hesaplama da çok zaman alıcıdır. ASK_N yaklaşımında, bu doğrudan ışınım ifadelerini analitik hesaplamaktan kaçınmak için, diffüz bileşenlere uygulandığı gibi, üstel terimler toplamı yaklaşımına benzer şekilde hesaplama yapılmaktadır. Bu yüzden, ASK_N yaklaşımı, standart SK_N yaklaşımına nazaran daha az çözüm süresi gerektirir.

ASK_N yaklaşımın kaynağı ışınım integral transfer denklemi olduğundan katı açığı içermemekte ve açısal ayrıklaştırma yöntemleri kullanılmamaktadır. Böylelikle ASK_N metodunda, DOM S_{12} yönteminde gözlenen çözümdeki fiziksel olmayan salınımlar (yani ışın etkisi) gözlenmez.

Saçılma albedosu azaldıkça ($\omega_0 \rightarrow 0,0$), ASK_N denkleminin yaklaşım derecesinin değişimi (N) ile elde edilen çözümler arasında çok fark gözlenmemektedir. $\omega_0 \rightarrow 1,0$ için yaklaşım derecesi (N) arttıkça çözümler arasında farklılıklar gözlenmektedir. Ancak yaklaşım derecesi artmasıyla çözümün doğruluğunda tutarsızlıklar gözlenmektedir. Bazı problemlerde N arttıkça yakınsar iken bazı durumlarda N arttıkça ıraksamaktadır.

ASK_N denkleminin küçük yaklaşım derecelerindeki çözüm sonuçları standart SK_N 'e kıyasla daha az doğru sonuçlar verir. Fakat ASK_2 yaklaşımının çözümleri çoğu duruma göre DOM çözüm sonuçları ile rekabet edecek düzeydedir.

ASK_N yaklaşımının çözüm doğruluğu ortamın saçılma albedosu ile de ilişkilidir. Gelen ışınım ve ışınım ısı akı hesabında yüksek soğurmalı ortamlarda ($\kappa > \sigma_s$) doğrudan ışınım enerjisi dağılımı çözümleri daha baskın iken, yüksek saçılmalı ortamlarda ($\kappa < \sigma_s$) ise diffüz ışınım bileşen çözümleri daha baskındır. Bu yüzden yüksek saçılmalı ortamlarda hesaplanan gelen ışınım ve ışınım ısı akı değerleri, doğrudan ışınım bileşenlerinin etkileri azaldığı için sonuçlar daha doğrudur.

Sonuç olarak, gerçek fiziksel sistemlerde ışınım ısı transfer hesabı için ASK_N yaklaşımı kullanılabilir bir potansiyele sahiptir. İlk yaklaşım olarak bir boyutlu düzlemde türetilen sınır şartları kullanmak yerine, iki boyutlu geometrilerde sınır koşullar türetilerek kullanılırsa, düzensiz geometrilerdeki sonuçlar daha uyumlu çıkabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abramowitz, M., Stegun, I. A., 1972, Handbook of mathematical functions, UK: Dover Publications Inc., p 1046.
- Altaç, Z., 1989, The SK_N approximation: A new method for solving the integral transport equations, Ph. D. Thesis, Iowa State University, Ames, Iowa, 108p. (published)
- Altaç, Z., Spinrad, B. I., 1990, The SK_N method I: A high order transport approximation to neutron transport problems, Nuclear Science and Engineering, 106, 471-479.
- Altaç, Z., 2002, The SKN approximation for solving radiative transfer problems in absorbing, emitting, and linearly anisotropically scattering plane-parallel medium: Part 2, Journal of Heat Transfer, 124, 685-695.
- Altaç, Z., Tekkalmaz, M., 2004, Solution of the radiative integral transfer equations in rectangular participating and isotropically scattering inhomogenous medium, 47, 101-109.
- Altaç, Z., Tekkalmaz, M., 2013, Nodal synthetic kernel (N- SK_N) method for solving radiative heat problems in one- and two- dimensional participating medium with isotropic scattering, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 129, 214-235.
- Altaç, Z., 2014, On radiative transfer using synthetic kernel and simplified spherical harmonics methods in linearly anisotropically scattering media, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 147, 8-23.
- Bayazıtöğlü, Y. , Higenyi, J., 1979, The higher-order differential equations of radiative transfer: P3 approximation, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 17, 424-431.
- Butkovskiy, A. G., 1982, Green's functions and transfer functions handbook (Mathematical and its applications), John Wiley & Sons, p 238.
- Carlson, B. G., Lathrop, K. D., 1968, Transport theory – the method of discrete ordinates, In Computing Methods in Reactor Physics, eds. H. Greenspan, C. N. Kelber, and D. Okrent, Gordon & Breach, NewYork.
- Chai, J. C., Lee, H. S., Patankar, S. V., 1993, Ray effect and false scattering in the discrete ordinates method, Numerical Heat Transfer, Part B, 24,373–389.
- Chai, J. C., Parthasarathy, G., Lee, H. S., Patankar, S. V., 1995, Finite volume radiative heat transfer procedure for irregular geometries, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 9(3), 410-415.
- Chandrasekhar S. Radiative Transfer. Dover Publications, New York; 1960.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Coelho, P.J., 2002, The role of ray effects and false scattering on the accuracy of the standard and modified discrete ordinates methods, *Journal of Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer*, 73, 231–238.
- Çengel, Y., 2011, *Isı ve kütle transferi – pratik bir yaklaşım*, 3. Baskı, İzmir Güven Kitabevi.
- Dalal, A., Eswaran, D., and Biswas, G., 2008, A Finite-Volume Method For Navier-Stokes Equations on Unstructured Izgaraes, *Numerical Heat Transfer, Part B*, 54, 238-259.
- Davison, B., Sykes, J.B., 1957, *Neutron transport theory*, Oxford UK: Clarendon Press.
- Döner, N. K., 2003, Katılımcı silindirik ortamlarda ışınım ısı transferinin SK_{NY}öntemi ile hesabı, Doktora tezi, ESOGU Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, 92 s. (yayımlanmış)
- Gelbard, E. M., 1961, Simplified spherical harmonics equations and their use in shielding problems, Bettis Atomic Power Laboratory; Technical Report, WAPD-T-1182.
- Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., 2007, *Table of Integrals, Series and Products*, Yayınevi, p 1762.
- Hottel, H.C., Cohen, E. S., 1958, Radiant heat exchange in a gas-filled enclosures: Allowance for non uniformity of gas temperature, *American Institute of Chemical Engineers Journal*, 4, 3-14.
- Hunter, B., Guo, Z., 2015, Numerical smearing, ray effect, and angular false scattering in radiation transfer computation, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 81, 63-74.
- Incropera, F. P., DeWitt, D. P., 2005, *Isı ve kütle geçişinin temelleri*, 4. Basımdan Çeviri, Literatür Yayıncılık, s 311-312.
- Lathrop, K. D., 1966, Use of discrete ordinate methods for solution of photon transport problems, *Nuclear Science and Engineering*, 24, 381-388.
- Lee, C. E., 1962, The discrete S_N approximation to transport theory, Technical Information Series Report, LA2595, Lawrence Livermore Laboratory. (Erişim adresi: <http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=mdp.39015086458612;view=1up;seq=11>)
- Lewis, E. E., Miller, W. F., 1984, *Computational methods of neutron transport*, John Wiley & Sons, New York.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Marguez, W. G. R., Modest, M. F., Roy, S. P., 2015, Implementation of high-order spherical harmonics methods for radiative heat transfer on OPENFOAM, *Journal of Heat Transfer*, 137, 052701.
- Mengüç, M.P., Viskanta R., 1985, Radiative transfer in three-dimensional rectangular enclosures containing inhomogeneous, anisotropically scattering media, *Journal of Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer*, 33, 533-549.
- Mengüç, M. P., Iyer, R. K., 1988, Modeling of radiative transfer using multiple spherical harmonics approximations, *Journal of Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer*, 39, 445-461.
- Modest, M. F., 1989, The modified differential approximation for radiative transfer in general three-dimensional media, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 3, 283-288.
- Modest, M. F., Yang, J., 2008, Elliptic PDE formulation and boundary conditions of the spherical harmonics method of arbitrary order for general three-dimensional geometries, *Journal of Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer*, 109, 1641–1666.
- Modest, M. F., 2012, Further developments of the elliptic PN-approximation formulation and its marshak boundary conditions, *Numerical Heat Transfer, Part B*, 62, 181–202.
- Modest, M. F., 2013, *Radiative Heat Transfer*, 3rd ed., New York: Academic Press.
- Murthy, J. Y., 2002, *Numerical Methods in Heat, Mass, and Momentum Transfer*, Purdue University Draft Notes, p. 67-89. Internet Erişim Adresi: <https://engineering.purdue.edu/ME608/webpage/main.pdf>, son erişim tarihi: 05.01.2016
- Ou, SS., Liou, K., 1982, Generalization of the spherical harmonic method to radiative transfer in multi-dimensional space, *Journal of Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer*, 4, 271–288.
- Özişik, M. N., Menning, J., Hälg, W., 1975, Half-range moment method for solution of the transport equation in a spherically symmetric geometry, *Journal of Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer*, 15, 1101-1106.
- Parthasarathy, G., Lee, H. S., Chai, J. C., Patankar, S. V., 1995, Monte Carlo solutions for radiative heat transfer in irregular two-dimensional geometries, *Transactions of the ASME*, 117, p. 792-794.
- Ramankutty, M. A., Crosbie, A. L., 1997, Modified discrete ordinates solution of radiative transfer in two-dimensional rectangular enclosures, *Journal of Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer*, 57, 107-140.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Ratzel, A. C., Howell J. R., 1983, Two-dimensional radiation in absorbing-emitting-scattering media using the P-N approximation, *Journal of Heat Transfer*, 105, 33-40.
- Ravishankar, M., Mazumder, S., Kumar, A., 2010, Finite-volume formulation and solution of the P3 equations of radiative transfer on unstructured meshes, *ASME Journal of Heat Transfer*, 132, 023402.
- Sakami, M., Charette, A., 2000, Application of a modified discrete ordinates method to two-dimensional enclosures of irregular geometry, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 64, p. 275-298.
- Schuster. A., 1905, Radiation through a foggy atmosphere, *Astrophysical Journal*, 21, 1–22.
- Schwarzschild, K., 1906, Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphären (Equilibrium of the sun's atmosphere), *Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. Nachr*, 195, 41–53.
- Spiegel, M. R., 2007, *Matematik Formülleri Tabloları El Kitabı*, Bilim Teknik Yayınevi, s 262.
- Spinrad, B. I., Sterbentz, J. S., 1985, Approximations to neutron transport problems in complex geometries: Part I., *Nuclear Science and Engineering*, 90, 431-441.
- Sun. Y. S., Li, B. W., 2012, Prediction of radiative heat transfer in 2D irregular geometries Using the collocation spectral method based on body-fitted coordinates, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 113, p. 2205-2212.
- Tekkalmaz, M., 2003, Katılımcı ortamlarda ışınım ısı transferinin SKN yöntemi ile hesabı, Doktora tezi, ESOGU Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, 146 s. (yayımlanmış)
- Tekkalmaz, M., Altaç, Z., 2005, Yutan, yayan ve izotropik olarak saçan homojen iç içe küre ortamında ışınım ısı transferinin SKN yöntemiyle hesabı, 15. Ulusal Isı Bilimi ve Tekniği Kongresi Bildiriler Kitabı, Cilt 1, 229-234.
- Tekkalmaz, M., Altaç, Z., 2007, Solution of the radiative transfer equation using the synthetic kernel (SKN) method in participating, linearly anisotropically scattering hollow spherical medium with SKN method, *Journal of Thermal Science and Technology*, 27, 23-38.
- Tekkalmaz, M., Altaç, Z., 2008, Application of synthetic kernel (SKN) method to participating linearly anisotropically scattering solid spherical medium, *Journal of Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer*, 109, 210-219.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Tong, T.W., Swathi P.S., 1987, Radiative heat transfer in emitting-absorbing-scattering spherical media, *Journal of Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer*, 1(2), 162-170.
- Tsai, J. H., 1991, Double spherical harmonics approximation applied to combined conduction-radiation in a planar medium, *International Communications Heat and Mass Transfer*, 18, 741-756.
- Wan, F. S., Wilson, S. J., Sen K. K., 1977, Radiative transfer in an isothermal slab with anisotropic scattering, *Journal of Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer*, 17, 571-575.
- Wang, C. A., Sadat, S., Ledez, V., Lemonnier, D., 2010, Meshless method for solving radiative transfer problems in complex two-dimensional and three-dimensional geometries, *International Journal of Thermal Sciences*, 49, p. 2282-2288
- Wu, C.Y., Sutton, W. H., Love, T. J., 1987, Successive improvement of the modified differential approximation in radiative heat transfer, *Journal of Thermophys Heat Transfer*, 1, 296-300.
- Yang, J., Modest, M.F., 2007, Elliptic PDE formulation of general, three-dimensional high order PN-approximations for radiative transfer, *Journal of Quantitative Spectroscopy Radiative Transfer*, 104, 217-227.
- Yuen, W. W., Takara, E. E., 1994, Development of a general zonal method for analysis of radiative transfer in absorbing and anisotropically scattering media, *Numerical Heat Transfer – Part B: Fundamentals*, 25, 75-96.
- Yvon, J., 1957, La diffusion macroscopique des neutrons une methode d'approximation, *Journal of Nuclear Energy*, 4, 305-318.

ÖZGEÇMİŞ

ZERRİN SERT, 1985 yılında Eskişehir’de doğdu. 2003 yılında Eskişehir Anadolu Lisesinden, 2007 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makine Mühendisliğinden, 2010 yılında aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalından mezun olmuştur. 2010 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalında doktora eğitimine başladı ve halen bu üniversitede araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk annesidir.