

Solitary Dalga Çözümlerine Sahip Bazı KTD'lere Sonlu Elemanlar Yöntemlerinin
Uygulanması

Engin Yılmaz

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ağustos 2012

Application of Finite Element Methods to the Some PDE's Having Solitary Wave
Solutions

Engin Yılmaz

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

August 2012

Solitary Dalga özümlerine Sahip Bazı KTD'lere Sonlu Elemanlar Yöntemlerinin
Uygulanması

Engin Yılmaz

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Bülent Saka

Ağustos 2012

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Engin Yılmaz'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Solitary Dalga Çözümlerine Sahip Bazı KTD'lere Sonlu Elemanlar Yöntemlerinin Uygulanması” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Bülent Saka

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Bülent Saka

Üye : Prof. Dr. İdris Dağ

Üye : Doç. Dr. Ahmet Bekir

Üye : Yrd. Doç. Dr. Dursun Irk

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz Dereli

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tezde, sonlu elemanlar metodunu kullanarak bazı kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü ile ilgilenilmiştir.

Birinci bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olan bazı tanımlar verilmiştir. İlk olarak soliton dalgalarının kısa hikayesi verildikten sonra lineer olmayan oluşum denklemleri, sonlu elemanlar metodu ve Spline fonksiyonlar tanımlanmıştır. Son olarak, sayısal çözümleri araştırılacak olan equal width (EW), regularized long wave (RLW), modified equal width (MEW) ve modified regularized long wave (MRLW) denklemleri, test problemleri ile birlikte tanıtılmıştır.

İkinci bölümde; EW, RLW, MEW ve MRLW denklemi, sonlu elemanlar metodu kullanılarak çözülmüştür. Solitary dalgalarını ve iki solitary dalgasının çarpışmasını içeren iki test problemi, analitik ve önerilen metotlar arasında karşılaştırma yapmak için kullanılmıştır.

Üçüncü bölümde ise önerilen metotlar kullanılarak elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Solitary dalgaları, sonlu elemanlar metodu, EW, RLW, MEW, MRLW, kübik B-Spline kolekeyşin, kuintik B-Spline kolekeyşin

SUMMARY

This thesis deals with the numerical solution of some partial differential equations by using finite difference methods.

In the first chapter, some definitions needed in the next chapters are given. First brief history of soliton waves are given and the nonlinear evolution equation, finite element methods, spline functions are described. Finally, equal width (EW), regularized long wave (RLW), modified equal width (MEW) and modified regularized long wave (MRLW) equations solved numerically in the next chapters are introduced together with their test problems.

In the second chapter; EW, RLW, MEW and MRLW equations are solved by using element difference methods. Two test problems including solitary waves and interaction of two solitary waves are used to compare between results of analytic and proposed methods.

In the third chapter, the result obtained by using the proposed methods are discussed.

Keywords: Solitary waves, finite element methods, EW, RLW, MEW, MRLW, cubic B-Spline collocation, cuintic B-Spline collocation

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca, derslerimde ve tez çalışmalarımnda, bana danışmanlık eden, beni yönlendiren ve hiçbir yardımını esirgemeyen danışmanım Doç. Dr. Bülent Saka'ya, bu çalışmam sırasında çok büyük yardımını gördüğüm Yrd. Doç. Dr. Dursun İrk'a ve bana her türlü olanağı sağlayan, her zaman yanımda olup beni destekleyen değerli aileme sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
TABLolar DİZİNİ	xii
KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1. TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1 Soliton Teorisine Fiziksel Bakış	1
1.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri	7
1.3 Sonlu Elemanlar Metodu.....	8
1.4 Spline Fonksiyonlar.....	11
1.4.1 Kübik B-Spline kolokeyşin metodu	12
1.4.1 Kuintik B-Spline kolokeyşin metodu	14
1.5 Genel Denklem.....	20
1.5.1 EW denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri	21
1.5.2 RLW denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri	24
1.5.3 MEW denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri.....	27
1.5.4 MRLW denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri	29
2. SAYISAL YÖNTEMİN UYGULANMASI	32
2.1 Birinci Metod - Kübik (M1)	34
2.2 İkinci Metod - Kuintik (M2)	37
2.3 Metotların EW Denkleminin Sayısal Çözümüne Uygulanması	41
2.3.1 Solitary dalga oluşumu	41
2.3.2 İki solitary dalgasının çarpışması	51
2.4 Metotların RLW Denkleminin Sayısal Çözümüne Uygulanması	53
2.4.1 Solitary dalga oluşumu	53
2.4.2 İki solitary dalgasının çarpışması	63
2.5 Metotların MEW Denkleminin Sayısal Çözümüne Uygulanması.....	65

İÇİNDEKİLER(Devam Ediyor)

	<u>Sayfa</u>
2.5.1 Solitary dalga oluşumu	65
2.5.2 İki solitary dalgasının çarpışması	69
2.6 Metotların MRLW Denkleminin Sayısal Çözümüne Uygulanması	72
2.6.1 Solitary dalga oluşumu	72
2.6.2 İki solitary dalgasının çarpışması	79
3. SONUÇLAR.....	81
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	83

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1 Basit bir dalga profili	2
1.2 İki solitary dalgasının çarpışma anı ve sonrası	4
1.3 a) Periyodik lineer bir dalga hareketi.....	4
1.3 b) Lineer olmayan dalga hareketi(Solitary Dalgası).....	4
1.4 Bir solitary dalgasının hareketi	5
2.1 $t = 0$ ve $t = 80$ anındaki dalgaların durumu.....	42
2.2 $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.1$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 80$ zamanındaki hata= $ \text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm} $	44
2.3 $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.1$ ve $-5 \leq x \leq 40$ için $t = 80$ zamanındaki hata= $ \text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm} $	46
2.4 $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.03$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 80$ zamanındaki hata= $ \text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm} $	48
2.5 $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.03$ ve $-5 \leq x \leq 40$ için $t = 80$ zamanındaki hata= $ \text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm} $	50
2.6 İki solitary dalgasının çarpışması	52
2.7 $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu.....	54
2.8 $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki hata= $ \text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm} $	56
2.9 $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1$ ve $-60 \leq x \leq 90$ için $t = 20$ zamanındaki hata= $ \text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm} $	58
2.10 $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.03$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki hata= $ \text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm} $	60
2.11 $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.03$ ve $-100 \leq x \leq 120$ için $t = 20$ zamanındaki hata= $ \text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm} $	62
2.12 İki solitary dalgasının çarpışması	64
2.13 $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu.....	66
2.14 $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $A = 0.25$ ve $0 \leq x \leq 80$ için $t = 20$ zamanındaki hata= $ \text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm} $	68
2.15 İki solitary dalgasının çarpışması	70

ŞEKİLLER DİZİNİ(Devam Ediyor)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.16 t = 0 ve t = 10 anındaki dalgaların durumu.....	72
2.17 h = 0.2, $\Delta t = 0.025$, c = 0.03 ve $-40 \leq x \leq 60$ için t = 10 zamanındaki hata= Analitik çözüm – Sayısal çözüm	75
2.18 h = 0.2, $\Delta t = 0.025$, c = 0.03 ve $-100 \leq x \leq 120$ için t = 10 zamanındaki hata= Analitik çözüm – Sayısal çözüm	77
2.19 h = 0.1, $\Delta t = 0.01$, c = 0.3 ve $0 \leq x \leq 100$ için t = 20 zamanındaki hata= Analitik çözüm – Sayısal çözüm	79
2.20 İki solitary dalgasının çarpışması	80

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
1.1	Bölünme noktalarındaki kuintik B-Spline değerleri 19
2.1	$h = 0.03, \Delta t = 0.05, c = 0.1$ ve $0 \leq x \leq 30$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 43
2.2	$h = 0.03, \Delta t = 0.05, c = 0.1$ ve $-5 \leq x \leq 40$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 45
2.3	$h = 0.03, \Delta t = 0.05, c = 0.03$ ve $0 \leq x \leq 30$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 47
2.4	$h = 0.03, \Delta t = 0.05, c = 0.03$ ve $-5 \leq x \leq 40$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 49
2.5	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 80$ zamanındaki hata normları..... 51
2.6	İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri..... 53
2.7	$h = 0.125, \Delta t = 0.1, c = 0.1$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 55
2.8	$h = 0.125, \Delta t = 0.1, c = 0.1$ ve $-60 \leq x \leq 90$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 57
2.9	$h = 0.125, \Delta t = 0.1, c = 0.03$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 59
2.10	$h = 0.125, \Delta t = 0.1, c = 0.03$ ve $-100 \leq x \leq 120$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 61
2.11	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 20$ zamanındaki hata normları..... 63
2.12	İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri 65
2.13	$h = 0.1, \Delta t = 0.2, A = 0.25$ ve $0 \leq x \leq 80$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 67
2.14	Farklı konum ve zaman artımları için $t = 20$ zamanındaki hata normları..... 69
2.15	İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri 71
2.16	$h = 0.2, \Delta t = 0.025, c = 0.03$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 74
2.17	$h = 0.2, \Delta t = 0.025, c = 0.03$ ve $-100 \leq x \leq 120$ için korunum sabitleri ve hata normları..... 76

TABLolar DİZİNİ (Devam Ediyor)

<u>Tablo</u>		<u>Sayfa</u>
2.18	$h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c = 0.3$ ve $0 \leq x \leq 100$ için korunum sabitleri ve hata normları.....	78
2.19	İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri	81

KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklamalar</u>
EW	Equal Width
KDV	Korteweg de Vries
M1	Metot 1
M2	Metot 2
MEW	Modified Equal Width
MRLW	Modified Regularized Long Wave
RLW	Regularized Long Wave

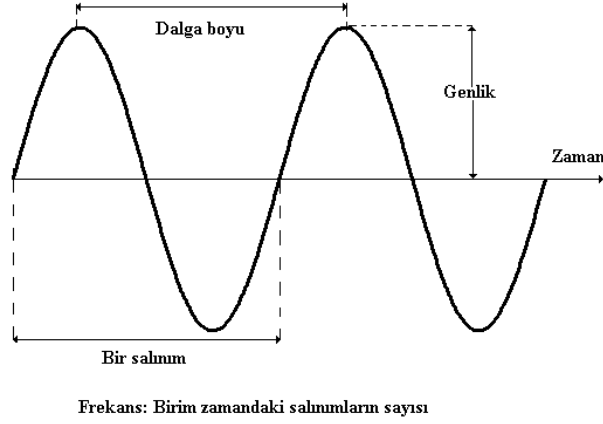
BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Birinci bölümde temel kavramlara yer verilmiştir. Soliton-solitary dalgaları, lineer olmayan oluşum denklemleri, sonlu elemanlar metodu ve sayısal çözümlerde kullanılan Kübik ve Kuintik Spline fonksiyonları açıklanmıştır. Son olarak, sayısal çözümleri araştırılacak olan equal width (EW), regularized long wave (RLW), modified equal width (MEW) ve modified regularized long wave (MRLW) denklemleri ile genel denklem tanıtılmıştır. Bu bölümde yer alan "Soliton Teorisine Fiziksel Bakış", "Sonlu Elemanlar Metodu", "Kübik ve Kuintik B-Spline koleyşin metodu" konuları, (İrk, 2007) çalışmasında kapsamlı olarak yer almaktadır.

1.1 Soliton Teorisine Fiziksel Bakış

Dalga, bir fizik terimi olarak, uzay veya uzay-zamanda yayılan ve sıklıkla enerjinin taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. Pek çok esnek cisimlere bir kuvvet uygulandı, kesildiğinde titreşim hareketi yapar. Yani bu cisimlerin şekilleri bir kez bozulduğu zaman, denge konumuna gelmeye çalışırlar. Dalga hareketi titreşim (salınım) olayı ile yakından ilgilidir. Ses dalgaları, deprem dalgaları, gerilmiş yaydaki dalgalar ve su dalgaları gibi bütün dalgalar, titreşim kaynakları tarafından oluşturulur. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar (bkz. Şekil 1.1).



Şekil 1.1: Basit bir dalga profili

Dünyada pek çok dalga tipi vardır. Bunlar, mekanik ve elektromanyetik dalgalar olmak üzere başlıca iki tiptir. Mekanik dalgalara ses dalgaları, su dalgaları ve tanecik dalgaları örnek olarak verilebilir. Bu dalgaların her biri için bozulabilen bir fiziksel ortam olması gerekmektedir. Bu üç örnekte hava molekülleri, su molekülleri ve taneciklerin titreşimleri ile dalgalar ilerleyebilmektedir. Elektromanyetik dalgalar ise yayılmak için bir ortama gereksinim duymazlar. Elektromanyetik dalgalara ışık, radyo dalgaları, televizyon sinyalleri ve x- ışınları örnek olarak verilebilir.

Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, dalganın bulunduğu ortam dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbirleri ile zıt yönde ilerlemesi sonucunda oluşurlar. İlerleyen dalgalar, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

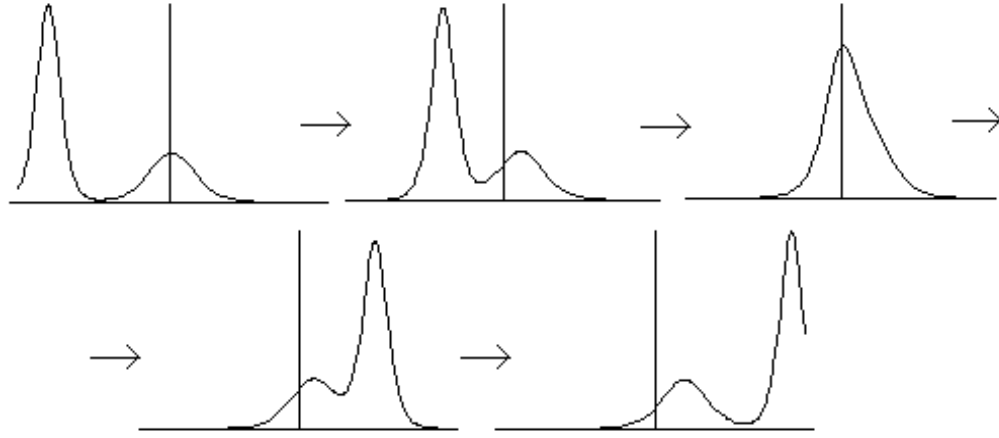
Solitonlar ise şekil ve hız özelliklerini kaybetmeden yayılan ve herhangi bir çarpışma esnasında kendilerine has özelliklerini koruyabilen dalgalardır (Wadati, 1983).

Solitonlar yukarıdaki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir. Şekil ve hız özelliklerini kaybetmeden yayılması, solitary dalga şartıdır ve ilk kez İskoçyalı mühendis olan John Scott Russel (1845) tarafından tanımlanmıştır. Çarpışma esnasında kendilerine has özelliklerini koruyabilmesi, parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir.

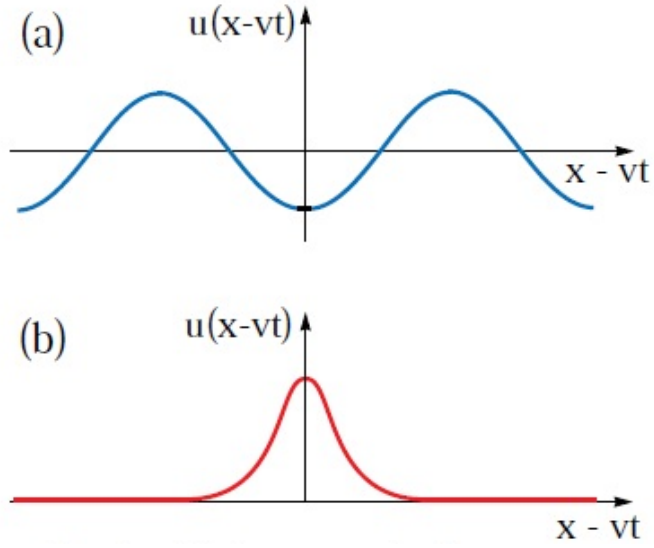
Solitary dalgaları soliton dalgalarına benzeyen dalgalar olarakta tanımlanmaktadır. Yani çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalardır. Bu sebeple solitonumsu dalgalar olarakta adlandırılabilirler.

Solitary dalgaları ilk defa 1834 yılında durgun bir teknenin ön tarafından kopan yuvarlak, düzgün ve oldukça belirgin bir su kümesinin, şeklinde bir değişiklik veya hızında en ufak bir azalma olmaksızın yaklaşık 3 kilometrelik bir kanal boyunca ilerlediğinin Scott Russell tarafından gözlemlenmesiyle bulunmuştur. Birçok matematikçi, kısaca bu konudan bahsetmiş olsa da sığ sulardaki solitary dalgaların profilini gözlemleyen Scott Russell'dan sonraki ilk teorik çalışmalar 1895 yılında Korteweg ve de Vries taraflarından yapılmıştır.

- Solitary dalgaları $hsech^2(k(x - vt))$ şekline sahiptir.
- Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası üretir.
- İki solitary dalga birbirine yaklaştıkça yavaşça deforme olur ve tek bir dalga halini alırlar. Bu dalga hali, bir süre sonra “çarpışma” dan önceki, aynı şekil ve hıza sahip iki solitary dalgası olarak ayrılır (bakınız Şekil 1.2). Çarpışma, hiç bir dalganın dalga formuna zarar vermez. Çarpışma anında dalga genliği iki dalganın toplamından daha küçük olur. Bu lineer olmayan bir davranıştır (bakınız Şekil 1.3).



Şekil 1.2 İki solitary dalgasının çarpışma anı ve sonrası



Şekil 1.3

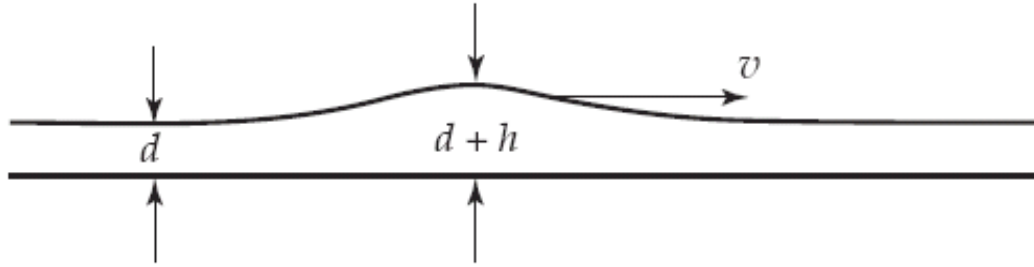
- Periyodik lineer bir dalga hareketi
- Lineer olmayan dalga hareketi (Solitary Dalgası)

- Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar yada dikleşerek sönecek şekilde hareket ederler. Ancak solitary dalgaları kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.

- Solitary dalga uygun başlangıç koşulları ile harekete geçirildiğinde uzun, derinliği ve genişliği sabit olan bir kanal boyunca formunda bir değişikliğe uğramadan ilerleyebilir.
- g yerçekimi ivmesi olmak üzere, h yüksekliğine sahip olan ve d derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgası

$$v = \sqrt{g(d + h)} \quad (1.1)$$

denklemleri ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır (bakınız Şekil 1.4).



Şekil 1.4 Bir solitary dalgasının hareketi

Hızın dalga genliğine bağlı olduğu gerçeği oldukça önemlidir. Büyük genlikli bir solitary dalgası, küçük genlikli bir solitary dalgasına göre daha hızlı hareket eder. Bir solitary dalgasının hızı genliği ile orantılı olduğundan bir solitary dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulağımız her iki seside aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında solitary dalgaları kullanılsaydı, yüksek sesi daha önce duymamız gerekirdi. İnsan vücudundaki sinirler arasındaki iletişim ise normal dalgalar ile yapılmazlar. Sıcak bir çay bardağını elimize aldığımızda, sıcaklığı kademeli olarak hissederken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir fırının içine elimizi yaklaştırdığımızda, sıcaklığı hemen hissederken elimizi çekeriz. Dolayısıyla sinirlerimiz bir nevi solitary dalgası oluşturarak beynimize bilgiyi en kısa şekilde normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletirler.

Russell'ın keşfinden 60 yıl sonra Hollandalı ve Alman matematikçiler olan Korteweg ve de Vries nihayet soliton dalga denklemlerini açıkça ortaya koymuşlardır. Bugünde KdV denklemi olarak bilinen

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \gamma u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

formundaki denklem sığ su dalgalarının hareketi modellemektedir (Korteweg and de Vries, 1895). Denklemden,

- $u(x, t)$: dalganın genliğine,
- $c = \sqrt{gd}$: küçük genlikli dalganın hızına,
- $\varepsilon = c(d^2/6 - T/2\rho g)$: dağılma parametresine,
- γ : lineer olmayan parametreye,
- T : yüzey gerilimine,
- ρ : suyun yoğunluğuna,

karşılık gelmektedir. Korteweg ve de Vries, (1.2) denkleminin

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - vt) \quad (1.3)$$

formunda ve şekli değişmeyen bir hareketli dalga çözümüne sahip olduğunu gösterdiler. Buradaki $\tilde{u}(x - vt)$ terimi, Russell'ın solitary dalga tanımına uymaktadır. Böylece Korteweg ve de Vries, solitary dalgaların varlığını kanıtlamış oldular ve çalışmalarını Korteweg'in danışmanlığında, de Vries'in doktora tezinde yayınladılar (Korteweg and de Vries, 1895). Bununla birlikte, dalgaların kararlı olup olmadıkları ve iki solitary dalgasının çarpışma sonrasında şekillerinin değişip değişmeyeceği gibi sorular tezde cevaplanamamıştır. 1965 yılında Kruskal ve Zabusky, KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümlerini araştırırken, solitary dalgalarının çarpışma

sonrasında şekillerini değiştirmediklerini gözlemlemişler ve bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediğini bularak bu tip dalgalara soliton adını vermişlerdir (Zabusky and Kruskal, 1965). Bu çalışma, soliton teorisi tarihinde önemli bir dönüm noktası olmuştur. 1967 yılında Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından ters saçılma dönüşüm (TSD) metodu geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümlerini analitik olarak verilmiştir (Gardner et.al., 1967).

Solitonların pek çok kullanım alanı vardır. Lineer olmayan bazı dalga denklemlerinin çözümleri olan solitonlar katı hal fiziği ile plazma fiziğindeki bazı problemleri açıklamada kullanılmışlardır. Bunların vakum duruma sahip olmaları parçacık fiziğinde anlamlı çözümlere karşılık gelebileceği şeklinde yorumlanmıştır.

Herhangi bir sinyal iletiminde de solitonlardan yararlanılmıştır. Çünkü sinyalin zarara uğramadan ve yeterli büyüklükte hedefe ulaşması önemlidir. Normal sinyallerin durumları değişebilir ve genişliklerinde farklılıklar olabilir. Bu lineer dalgalardan etrafa yayılabilir ve sinyalleri zayıflayabilir. Lineer dalgalardan yerine soliton dalgalardan kullanılırsa elektromanyetik dalgalardan otomatik olarak yineleyen aletlere ihtiyaç kalmayacaktır. Soliton dalgalardan ile 10.000 km' ye kadar özellikleri değişmeden başarıyla sinyal iletebilmektedir. Bununla birlikte çarpıştıklarında birbirlerinden etkilenmemekte ve sinyaller optik fiberler boyunca her iki yönde iletebilmektedir. Böylece sinyaller, gideceği yere orijinal durumlarında ve yeterince anlaşılabilir büyüklükte ulaştırılabilir (Vvedenskii, 1992).

Russell'ın fikirleriyle başlayan lineer olmayan dalgalardan çözümleri için günümüzde modern bilgisayarlar kullanılmaktadır (Wolfram, 1999).

1.2 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Kısmi türevli denklemlerdeki (KTD) bağımlı değişken (yada değişkenler) ve bunların denklemlerdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemleri, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denklemler lineerdir denir. Aksi halde lineer olmayan denklemler adı alır.

Doğadaki bir çok olayın anlaşılması için yapılan modeller lineer olmayan kısmi

diferansiyel denklemler içermektedir. Lineer olmayan sistemler, fiziğin bir çok alanında örneğin, lineer olmayan optik, hidrodinamik, katıhal fiziği, plazma fiziği, yüksek enerji fiziği gibi birçok fiziksel olayların incelenmesinde karşımıza çıkmaktadır. Son yıllarda lineer olmayan sistemlerin tamamen çözülebilirliği matematikçilerin ve fizikçilerin bir çalışma alanını oluşturmaktadır. En çok bilinen lineer olmayan oluşum denklemi Korteweg-de Vries (KdV) denklemdir.

Genel lineer olmayan oluşum denklemi $K[u]$; $u(x, t)$ ve u değişkeninin x değişkenine göre türevlerine bağlı fonksiyon olmak üzere;

$$u_t = K[u] = K[u, u_x, u_{xx}, \dots]$$

şeklindedir. Eğer $K[u]$, u terimine göre lineer ise, bu tip denklemlere de lineer oluşum denklemleri denilmektedir (Zeng, 2004).

1.3 Sonlu Elemanlar Metodu

Sonlu elemanlar yöntemi, çeşitli mühendislik ve fen alanlarında karşılaşılan problemlerin kabul edilebilir bir yaklaşım ile çözüm aramasıdır. Bu problemlerin veya denklem sistemlerinin analitik çözümlerinin olmadığı ya da analitik çözümlerin çok karmaşık olduğu durumlarda, bu denklemleri çözebilmek için sonlu elemanlar metodu kullanılır.

Sonlu elemanlar metodunda ele alınan problemin çözüm bölgesi alt bölgelere parçalanır ve her alt bölgede aranan fonksiyonun ifadesi polinom olacak şekilde seçilir. Belirli işlemler dahilinde her alt bölgede polinom olarak kabul edilen çözümün katsayıları belirlenmeye çalışılır.

Sonlu elemanlar metodu için aşağıdaki önemli bilgiler verilebilir.

- İlk kullanım 1950'li yıllarda İnşaat Mühendisliği'nde oldu.
- Temeli Ritz Tekniğine dayanmaktadır (1909).
- Günümüz bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ile etkinliği artmıştır.

- Mühendislik ve Matematiksel fiziğin hemen hemen her dalındaki problemlere uygulanmaktadır. Örnek olarak; gerilme analizi, akışkanlar mekaniği, ısı iletimi, dalga yayılımı, statik ve dinamik elastisite problemleri vb. verilebilir.
- Aranan çözüm fksiyonu, her bir sonlu eleman üzerinde kendisi ve belirli bir dereceye kadar türevleri sürekli olan interpolasyon polinomları ile temsil edilir.
- Matematiksel olarak genelleştirilebilir ve çok sayıda problemi çözmek için aynı model kullanılabilir.
- Çoğu fiziksel problem, türevler ve düzensiz sınırlar içeren sınır koşullarına sahiptir. Burada sonlu elemanlar metodu çözüm bölgesinin düzgün yada düzgün olmayan geometrik şekiller olmasına bakmaksızın iyi sonuçlar vermektedir.
- Bölünme noktaları arasındaki bir değer için, her bir alt aralığa karşılık interpolasyon polinomu tanımlandığından, bölünme noktaları arasındaki değerler için de bir yaklaşım yapılabilir.
- Uygulanması kolay olmamasına rağmen sonlu farklar metoduna göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Fakat bu durum probleme bağlıdır ve aksi örnekler bulunabilir.
- Zor işlemler ve bilgisayar programları gerekmektedir.

Ağırlıklı rezidüler ve kolokeyşin, sonlu elemanların temel iki metodudur.

L bir lineer diferansiyel operatör, $f(x)$ bilinen bir fksiyon ve $u(x)$ aranan çözüm olmak üzere

$$Lu(x) = f(x) \quad (1.4)$$

diferansiyel denkleminin sayısal çözümü için ağırlıklı rezidü metodu kullanıldığında, aranan $u(\cdot)$ ifadesi yerine aşağıdaki formda $\tilde{u}(\cdot)$ sonlu yaklaşım serisi kullanılır.

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(x) \quad (1.5)$$

Eşitlikte verilen $\phi_j(x), j = 1, \dots, N$ fonksiyonu diferansiyel denklemin tanım bölgesi üzerinde tanımlı ve $a_j, j = 1, \dots, N$ bilinmeyen katsayılarıdır. $\phi_j(\cdot)$ fonksiyonları problem için verilen tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler ama genelde diferansiyel denklemi sağlamazlar.

(1.5) yaklaşık çözümü (1.4) operatör denkleminde yerine yazılırsa

$$R(x) = L\tilde{u}(x) - f(x) = L\tilde{u}(x) - Lu(x) \quad (1.6)$$

olarak tanımlanan $R(x)$ kalanı elde edilir. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde $R(x)$ kalanı, seçilen $\phi_j(\cdot)$ fonksiyonları ve a_j bilinmeyen parametrelerinin bir fonksiyonudur. Bu yöntemler yardımı ile a_j parametrelerinin belirlenmesinde, $R(x)$ kalanı ile bir W_j ağırlık fonksiyonunun çarpımının Ω bölgesindeki integralinin sıfır olması istenir:

$$\int_{\Omega} W_j(x)R(x)dx = 0, j = 1, \dots, N \quad (1.7)$$

Böylece (1.7) formundaki N bilinmeyenli N denklemden oluşan denklem sistemi elde edilir.

Ağırlıklı rezidü metodunun bir uygulaması olan kolokeyşin metodunda W_i ağırlık fonksiyonları olarak

$$W_i = \delta(x - x_i) \quad (1.8)$$

Dirac Delta fonksiyonları seçilirse $R(x_j) = 0, j = 1, \dots, N$ olduğunda, (1.7) integralinin sonucu sıfır olacaktır. Dolayısıyla kolokeyşin metodu için çözüm, (1.5) eşitliğinin sayısal çözümü aranan denklemde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} L\tilde{u}(x) - Lu(x) &= 0 \\ L\left(\sum_{j=1}^N a_j\phi_j(x)\right) - f(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

formunda elde edilir (Lapidus and Pinder, 1982).

1.4 Spline Fonksiyonlar

İlk olarak Schoenberg (1946) tarafından tanımlanmıştır. Fakat 1960 yılından sonra matematiksel modellere ve fiziksel problemlere uygulanmıştır. Spline fonksiyonlar yapısal özellikleri ve bilgisayarlarla yapılan hesaplamalarda kolaylıklar sağlaması nedeniyle de bir çok alanda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. İnterpolasyon formüllerinin $[a, b]$ aralığının tamamına uygulanması her zaman istenilen sonucu vermeyebilir. Öyle ki yüksek dereceden polinomlar kullanılarak yapılan interpolasyonlardaki işlem hatalarının artmasıyla gerçek anlamda kararsız algoritmalarla karşılaşılır. Birçok durumda kullanılan noktaların sayısının artması çözümün iraksaması anlamına gelir. Ayrıca istenilen fonksiyon $[a, b]$ aralığının değişik kısımlarında değişik özelliklere sahip ise örneğin, bölgenin bir kısmında hızlı diğer kısmında yavaş değişiyorsa fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak uygun sonuçlara götürmez. Bu nedenlerden dolayı yüksek dereceden olmayan birinci, ikinci veya üçüncü dereceden fonksiyonlar ile yaklaşımların yapıldığı spline interpolasyon yöntemini kullanmak daha uygundur. Spline interpolasyon parçalı polinom yaklaşımıdır. Yani verilen çözüm aralığı sonlu sayıda alt aralıklara bölünerek her bir alt aralıkta daha küçük dereceden polinomlar yardımı ile yaklaşımlar elde edilir. Spline fonksiyonlar, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ sonlu parçalanmasının her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında k . dereceden polinomlardır ve her alt aralıkta $(k-1)$. mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlardır. Spline fonksiyonların temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

Spline fonksiyonlar(m);

- Uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır,
- Düzgün (smooth) fonksiyonlardır,
- Türevleri ve integralleri kolay hesaplanabilir,
- Türevleri ve integralleri yine spline fonksiyonlardır,
- Düşük derecedenleri çok esnektir ve polinomlardaki salınım sergilemezler.

1.4.1 Kübik B-Spline kolokeyşin metodu

$[a, b]$ aralığının düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olmak üzere x_m noktalarındaki $\Psi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonları olsun. Kübik B-spline kolokeyşin metodunda, deneme fonksiyonları olarak kübik B-spline fonksiyonlarını kullanarak, $w(x, t)$ çözümü için (1.10) $w_m(x, t)$ yaklaşık çözümü araştırılır.

$$w_m(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \Psi_m(x) \delta_m(t) \quad (1.10)$$

Ψ_m kübik B-spline fonksiyonları, $m = -1, 0, \dots, N + 1$ için $h = (x_{m+1} - x_m)$ olmak üzere aşağıda verilen bağıntı ile hesaplanır (Prenter, 1975).

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (1.11)$$

$\Psi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonu ile onun birinci ve ikinci mertebeden türevi, $x_{m-2} \leq x \leq x_{m+2}$ aralığı dışında sıfırdır. ' ve ', x 'e göre birinci ve ikinci türevi göstermek üzere, $x_{m-2} \leq x \leq x_{m+2}$ aralığında $\Psi_m(x), \Psi'_m(x)$ ve $\Psi''_m(x)$ fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \Psi_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^3} (x_{m-2} - x_{m-2})^3 = 0, \\ \Psi_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m-1} - x_{m-1}) + 3h(x_{m-1} - x_{m-1})^2 \\ &\quad - 3(x_{m-1} - x_{m-1})^3] = 1, \\ \Psi_m(x_m) &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x_m) + 3h(x_{m+1} - x_m)^2 \\ &\quad - 3(x_{m+1} - x_m)^3] = 4, \\ \Psi_m(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^3} (x_{m+2} - x_{m+1})^3 = 1, \\ \Psi_m(x_{m+2}) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi'_m(x_{m-2}) &= \frac{3}{h^3}(x_{m-2} - x_{m-2})^2 = 0, \\
\Psi'_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3}[3h^3 + 6h(x_{m-1} - x_{m-1}) - 9(x_{m-1} - x_{m-1})^2] = \frac{3}{h}, \\
\Psi'_m(x_m) &= \frac{1}{h^3}[-3h^2 - 6h(x_{m+1} - x_m) + 9(x_{m+1} - x_m)^2] = 0, \quad (1.12) \\
\Psi'_m(x_{m+1}) &= -\frac{3}{h^3}(x_{m+2} - x_{m+1})^2 = -\frac{3}{h}, \\
\Psi'_m(x_{m+2}) &= 0, \\
\Psi''_m(x_{m-2}) &= \frac{6}{h^3}(x_{m-2} - x_{m-2}) = 0, \\
\Psi''_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^3}[6h - 18(x_{m-1} - x_{m-1})] = \frac{6}{h^2}, \\
\Psi''_m(x_m) &= \frac{1}{h^3}[6h - 9(x_{m+1} - x_m)] = -\frac{12}{h^2}, \\
\Psi''_m(x_{m+1}) &= \frac{6}{h^3}(x_{m+2} - x_{m+1}) = \frac{6}{h^2}, \\
\Psi''_m(x_{m+2}) &= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

(1.11) deki kübik B-spline fonksiyonları her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $\Psi_{m-1}, \Psi_m, \Psi_{m+1}$ ve Ψ_{m+2} gibi dört spline tarafından örtülür. Ayrıca $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde, 4 ardışık $\Psi_{m-1}, \Psi_m, \Psi_{m+1}$ ve Ψ_{m+2} kübik B-spline fonksiyonu dışındaki diğer tüm fonksiyonlar sıfır olacağından, bu eleman üzerindeki w için yaklaşım idafesi

$$w_m(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \Psi_j(x) \delta_j(t) \quad (1.13)$$

formunda bulunur.

(1.12) ve (1.13) yaklaşık çözümünün kullanılması ile bölünme noktalarında w_m ve ilk iki türevi;

$$\begin{aligned}
w_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \Psi_j(x) \delta_j(t), \\
w_m &= \delta_{m-1} \Psi_{m-1}(x_m) + \delta_m \Psi_m(x_m) + \delta_{m+1} \Psi_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2} \Psi_{m+2}(x_m), \\
w_m &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\
w'_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \Psi'_j(x) \delta_j(t), \\
w'_m &= \delta_{m-1} \Psi'_{m-1}(x_m) + \delta_m \Psi'_m(x_m) + \delta_{m+1} \Psi'_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2} \Psi'_{m+2}(x_m), \\
w'_m &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_m''(x_m, t) &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \Psi_j''(x) \delta_j(t), \\
w_m'' &= \delta_{m-1} \Psi_{m-1}''(x_m) + \delta_m \Psi_m''(x_m) + \delta_{m+1} \Psi_{m+1}''(x_m) + \delta_{m+2} \Psi_{m+2}''(x_m), \\
w_m'' &= \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Sonuç olarak w_m, w_m' , ve w_m'' yaklaşımlarının bölünme noktalarındaki değerleri δ_m parametresine göre

$$\begin{aligned}
w_m &= w_m(x_m, t) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\
w_m' &= w_m'(x_m, t) = \frac{3}{h} (\delta_{m+1} - \delta_{m-1}), \\
w_m'' &= w_m''(x_m, t) = \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}),
\end{aligned} \tag{1.14}$$

olarak elde edilir.

1.4.2 Kuintik B-Spline kolokeyşin metodu

$[a, b]$ aralığının düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olmak üzere x_m noktalarındaki $\Phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonları olsun. Kuintik B-spline kolokeyşin metodunda, deneme fonksiyonları olarak kuintik B-spline fonksiyonlarını kullanarak, $w(x, t)$ çözümü için $w_m(x, t)$ yaklaşık çözümü araştırılır.

$$w_m(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \Phi_m(x) \delta_m(t) \tag{1.15}$$

Φ_m kuintik B-spline fonksiyonları, $m = 0, \dots, N$ için $h = (x_{m+1} - x_m)$ olmak üzere aşağıda verilen bağıntı ile hesaplanır.

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5 & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5 & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (1.16)$$

$\Phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonu ile onun ilk dört mertebeden türevi $x_{m-3} \leq x \leq x_{m+3}$ aralığı dışında sıfırdır. $'$, $''$, $'''$, ve iv , x 'e göre birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevi göstermek üzere, $x_{m-3} \leq x \leq x_{m+3}$ aralığında $\Phi_m(x)$, $\Phi'_m(x)$, $\Phi''_m(x)$, $\Phi'''_m(x)$ ve $\Phi_m^{iv}(x)$ fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \Phi_m(x_{m-3}) &= \frac{1}{h^5}(x_{m-3} - x_{m-3})^5 = 0, \\ \Phi_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^5}[(x_{m-2} - x_{m-3})^5 - 6(x_{m-2} - x_{m-2})^5] = 1, \\ \Phi_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^5}[(x_{m-1} - x_{m-3})^5 - 6(x_{m-1} - x_{m-2})^5 \\ &\quad + 15(x_{m-1} - x_{m-1})^5] \\ &= 26, \\ \Phi_m(x_m) &= \frac{1}{h^5}[(x_m - x_{m-3})^5 - 6(x_m - x_{m-2})^5 \\ &\quad + 15(x_m - x_{m-1})^5 - 20(x_m - x_m)^5] \\ &= 66, \\ \Phi_m(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^5}[(x_{m+1} - x_{m-3})^5 - 6(x_{m+1} - x_{m-2})^5 \\ &\quad + 15(x_{m+1} - x_{m-1})^5 - 20(x_{m+1} - x_m)^5 \\ &\quad + 15(x_{m+1} - x_{m+1})^5] \\ &= 26, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_m(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^5} [(x_{m+2} - x_{m-3})^5 - 6(x_{m+2} - x_{m-2})^5 \\
&\quad + 15(x_{m+2} - x_{m-1})^5 - 20(x_{m+2} - x_m)^5 \\
&\quad + 15(x_{m+2} - x_{m+1})^5 - 6(x_{m+2} - x_{m+2})^5] \\
&= 1, \\
\Phi_m(x_{m+3}) &= 0, \\
\Phi'_m(x_{m-3}) &= \frac{5}{h^5} (x_{m-3} - x_{m-3})^4 = 0, \\
\Phi'_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^5} [5(x_{m-2} - x_{m-3})^4 - 30(x_{m-2} - x_{m-2})^4] \\
&= \frac{5}{h}, \\
\Phi'_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^5} [5(x_{m-1} - x_{m-3})^4 - 30(x_{m-1} - x_{m-2})^4 \\
&\quad + 75(x_{m-1} - x_{m-1})^4] \\
&= \frac{50}{h}, \\
\Phi'_m(x_m) &= \frac{1}{h^5} [5(x_m - x_{m-3})^4 - 30(x_m - x_{m-2})^4 \\
&\quad + 75(x_m - x_{m-1})^4 - 100(x_m - x_m)^4] \\
&= 0, \\
\Phi'_m(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^5} [5(x_{m+1} - x_{m-3})^4 - 30(x_{m+1} - x_{m-2})^4 \\
&\quad + 75(x_{m+1} - x_{m-1})^4 - 100(x_{m+1} - x_m)^4 \\
&\quad + 75(x_{m+1} - x_{m+1})^4] \\
&= -\frac{50}{h}, \\
\Phi'_m(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^5} [5(x_{m+2} - x_{m-3})^4 - 30(x_{m+2} - x_{m-2})^4 \\
&\quad + 75(x_{m+2} - x_{m-1})^4 - 100(x_{m+2} - x_m)^4 \\
&\quad + 75(x_{m+2} - x_{m+1})^4 - 30(x_{m+2} - x_{m+2})^4] \\
&= \frac{5}{h}, \\
\Phi'_m(x_{m+3}) &= 0 \\
\Phi''_m(x_{m-3}) &= \frac{20}{h^5} (x_{m-3} - x_{m-3})^3 = 0, \\
\Phi''_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^5} [20(x_{m-2} - x_{m-3})^3 - 120(x_{m-2} - x_{m-2})^3] \\
&= \frac{20}{h^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_m''(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^5} [20(x_{m-1} - x_{m-3})^3 - 120(x_{m-1} - x_{m-2})^3 \\
&\quad + 300(x_{m-1} - x_{m-1})^3] \\
&= \frac{40}{h^2}, \\
\Phi_m''(x_m) &= \frac{1}{h^5} [20(x_m - x_{m-3})^3 - 120(x_m - x_{m-2})^3 \\
&\quad + 300(x_m - x_{m-1})^3 - 400(x_m - x_m)^3] \\
&= -\frac{120}{h^2}, \\
\Phi_m''(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^5} [20(x_{m+1} - x_{m-3})^3 - 120(x_{m+1} - x_{m-2})^3 \\
&\quad + 300(x_{m+1} - x_{m-1})^3 - 400(x_{m+1} - x_m)^3 \\
&\quad + 300(x_{m+1} - x_{m+1})^3] \\
&= \frac{40}{h^2}, \\
\Phi_m''(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^5} [20(x_{m+2} - x_{m-3})^3 - 120(x_{m+2} - x_{m-2})^3 \\
&\quad + 300(x_{m+2} - x_{m-1})^3 - 400(x_{m+2} - x_m)^3 \\
&\quad + 300(x_{m+2} - x_{m+1})^3 - 120(x_{m+2} - x_{m+2})^3] \\
&= \frac{20}{h^2}, \\
\Phi_m''(x_{m+3}) &= 0 \\
\Phi_m'''(x_{m-3}) &= \frac{60}{h^5} (x_{m-3} - x_{m-3})^2 = 0, \\
\Phi_m'''(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^5} [60(x_{m-2} - x_{m-3})^2 - 360(x_{m-2} - x_{m-2})^2] \\
&= \frac{60}{h^3}, \\
\Phi_m'''(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^5} [60(x_{m-1} - x_{m-3})^2 - 360(x_{m-1} - x_{m-2})^2 \\
&\quad + 900(x_{m-1} - x_{m-1})^2] \\
&= -\frac{120}{h^3}, \\
\Phi_m'''(x_m) &= \frac{1}{h^5} [60(x_m - x_{m-3})^2 - 360(x_m - x_{m-2})^2 \\
&\quad + 900(x_m - x_{m-1})^2 - 1200(x_m - x_m)^2] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_m'''(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^5} [60(x_{m+1} - x_{m-3})^2 - 360(x_{m+1} - x_{m-2})^2 \\
&\quad + 900(x_{m+1} - x_{m-1})^2 - 1200(x_{m+1} - x_m)^2 \\
&\quad + 900(x_{m+1} - x_{m+1})^2] \\
&= \frac{120}{h^3}, \\
\Phi_m'''(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^5} [60(x_{m+2} - x_{m-3})^2 - 360(x_{m+2} - x_{m-2})^2 \\
&\quad + 900(x_{m+2} - x_{m-1})^2 - 1200(x_{m+2} - x_m)^2 \\
&\quad + 900(x_{m+2} - x_{m+1})^2 - 360(x_{m+2} - x_{m+2})^2] \\
\Phi_m'''(x_{m+2}) &= -\frac{60}{h^3}, \\
\Phi_m'''(x_{m+3}) &= 0 \\
\Phi_m^{iv}(x_{m-3}) &= \frac{120}{h^5} (x_{m-3} - x_{m-3}) = 0, \\
\Phi_m^{iv}(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^5} [120(x_{m-2} - x_{m-3}) - 720(x_{m-2} - x_{m-2})] = \frac{120}{h^4}, \\
\Phi_m^{iv}(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^5} [120(x_{m-1} - x_{m-3}) - 720(x_{m-1} - x_{m-2}) \\
&\quad + 1800(x_{m-1} - x_{m-1})] \\
&= -\frac{480}{h^4}, \\
\Phi_m^{iv}(x_m) &= \frac{1}{h^5} [120(x_m - x_{m-3}) - 720(x_m - x_{m-2}) \\
&\quad + 1800(x_m - x_{m-1}) - 2400(x_m - x_m)] \\
&= -\frac{720}{h^4}, \\
\Phi_m^{iv}(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^5} [120(x_{m+1} - x_{m-3}) - 720(x_{m+1} - x_{m-2}) \\
&\quad + 1800(x_{m+1} - x_{m-1}) - 2400(x_{m+1} - x_m) \\
&\quad + 1800(x_{m+1} - x_{m+1})] \\
&= -\frac{480}{h^4}, \\
\Phi_m^{iv}(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^5} [120(x_{m+2} - x_{m-3}) - 720(x_{m+2} - x_{m-2}) \\
&\quad + 1800(x_{m+2} - x_{m-1}) - 2400(x_{m+2} - x_m) \\
&\quad + 1800(x_{m+2} - x_{m+1}) - 720(x_{m+2} - x_{m+2})] \\
&= \frac{120}{h^4}, \\
\Phi_m^{iv}(x_{m+3}) &= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değerleri kolaylık açısından Tablo 1.1’de verilmiştir.

Tablo 1.1: Bölünme noktalarındaki kuintik B-spline değerleri

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
Φ_m	0	1	26	66	26	1	0
$h\Phi'_m$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\Phi''_m$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\Phi'''_m$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4\Phi^{iv}_m$	0	120	-480	720	-480	120	0

(1.15) deki kuintik B-spline fonksiyonları her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı Φ_{m-2} , Φ_{m-1} , Φ_m , Φ_{m+1} , Φ_{m+2} ve Φ_{m+3} gibi altı spline tarafından örtülür ve böylece w için yaklaşım ifadesi

$$w_m(x, t) = \sum_{j=m-2}^{m+3} \Phi_j(x) \delta_j(t) \quad (1.17)$$

olarak formunda bulunur.

Tablo 1.1 ve (1.17) eşitliğinin kullanılmasıyla w_m ve onun ilk dört türevi;

$$\begin{aligned}
w_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \Phi_j(x) \delta_j(t), \\
w_m &= \delta_{m-2} \Phi_{m-2}(x_m) + \dots + \delta_{m+2} \Phi_{m+2}(x_m), \\
w_m &= \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
w'_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \Phi'_j(x) \delta_j(t), \\
w'_m &= \delta_{m-2} \Phi'_{m-2}(x_m) + \dots + \delta_{m+2} \Phi'_{m+2}(x_m), \\
w'_m &= \frac{5}{h} (-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
w''_m(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \Phi''_j(x) \delta_j(t), \\
w''_m &= \delta_{m-2} \Phi''_{m-2}(x_m) + \dots + \delta_{m+2} \Phi''_{m+2}(x_m), \\
w''_m &= \frac{20}{h^2} (\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_m'''(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \Phi_j'''(x) \delta_j(t), \\
w_m''' &= \delta_{m-2} \Phi_{m-2}'''(x_m) + \dots + \delta_{m+2} \Phi_{m+2}'''(x_m), \\
w_m''' &= \frac{60}{h^3} (-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
w_m^{iv}(x_m, t) &= \sum_{j=m-2}^{m+3} \Phi_j^{iv}(x) \delta_j(t), \\
w_m^{iv} &= \delta_{m-2} \Phi_{m-2}^{iv}(x_m) + \dots + \delta_{m+2} \Phi_{m+2}^{iv}(x_m), \\
w_m^{iv} &= \frac{120}{h^4} (\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2})
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Sonuç olarak w_m, w_m', w_m'', w_m''' ve w_m^{iv} yaklaşımlarının bölünme noktalarındaki değerleri δ_m parametresine göre

$$\begin{aligned}
w_m &= w_m(x_m, t) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
w_m' &= w_m'(x_m, t) = \frac{5}{h} (-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
w_m'' &= w_m''(x_m, t) = \frac{20}{h^2} (\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
w_m''' &= w_m'''(x_m, t) = \frac{60}{h^3} (-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
w_m^{iv} &= w_m^{iv}(x_m, t) = \frac{120}{h^4} (\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2})
\end{aligned} \tag{1.18}$$

olarak elde edilir.

1.5 Genel Denklemler

Burada aşağıdaki lineer olmayan

$$u_t + \alpha_1 u_x + \alpha_2 u^p u_x - \alpha_3 u_{xxt} = 0 \tag{1.19}$$

oluşum denklemini tanıtılacaktır. Denklemlerde α_1, α_2 ve α_3 pozitif parametreleri, x konuma göre türevi, t 'de zamana göre türevi, p ise değeri 1 veya 2 olan bir pozitif tamsayıyı göstermektedir.

Denklemin sayısal çözümleri araştırılırken

$$\left. \begin{aligned} u(a, t) = u(b, t) = 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0 \\ u_{xx}(a, t) = u_{xx}(b, t) = 0 \end{aligned} \right\} t \geq 0 \quad (1.20)$$

sınır şartları ve

$$u(x, 0) = f(x) \quad (1.21)$$

başlangıç şartı ele alınacaktır. Burada $f(x)$ ileride verilecektir.

1.5.1 EW denklemi, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri

Genel denklemimiz olan (1.19) de $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $p = 1$ ve $\alpha_3 = \mu$ alınırsa aşağıdaki EW denkleminde ulaşılır.

$$u_t + uu_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (1.22)$$

Bu denklemde x ve t konum ve zamana göre türevleri, μ de reel sabiti göstermektedir. (1.22) denklemi için fiziksel sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ iken $u \rightarrow 0$ şeklindedir. Sayısal yöntemi uygulayabilmek için çözüm bölgesi $[a, b]$ aralığına sınırlandırılacaktır. Bir çok fiziksel olayda önemli bir yere sahip olan EW denklemi sığ su dalgaları ve ion akustik plazmalar da modellenmektedir (Peregrine, 1966; Benjamin et.al., 1972). EW denklemi ilk olarak Morrison tarafından önerilmiştir. Morrison lineer olmayan bir ortamda tek boyutlu bir dalğanın yayılmasını modellemek için daha bilindik RLW denkleminin yerine EW denklemini kullanmıştır (Morrison, et.al., 1981).

Gardner ve Gardner (1992) EW denkleminin sayısal çözümü için kübik B-spline Galerkin metodunu kullanarak solitary dalgasının yayılması ve iki solitary dalgasının çarpışması test problemlerini araştırmışlardır. Zaki (2000a) en küçük kareler sonlu elemanlar yöntemini kullanarak EW denkleminin sayısal çözümünü bulmuştur. Daha sonra Zaki (2001) EW denkleminin sayısal çözümü üzerine, Petrov Galerkin sonlu elemanlar metodu ile birlikte kuadratik B-spline şekil fonksiyonlarını kullanarak

çalışmışlardır. Irk ve Saka kübik spline kolokeyşin ve kübik B-Spline kolokeyşin metotları ile EW denklemin sayısal çözümü üzerine çalışmışlardır (Irk et.al, 2003;Saka et.al, 2003). Raslan (2004), EW denkleminin sayısal çözümünü kuintik B-spline kolokeyşin metodunu kullanarak araştırmıştır. Raslan bir yıl sonrada kuartik B-spline kolokeyşin sonlu elemanlar metodunu kullanarak çalışmasında yer vermiştir (Raslan, 2005a). Esen (2005) ise EW denkleminin sayısal çözümü kuadratik B-spline fonksiyonları kullanılarak lumped Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile araştırmıştır. Açık sonlu farklar metodu ile EW ve RLW denkleminin sayısal çözümünü ise Ramos (2006) incelemiştir. Saka (2006) kuadratik B-spline Galerkin sonlu elemanlar metodunu denklemin sayısal çözümü olarak önermiştir. EW denkleminin kuadratik B-spline sonlu elemanlar metodu ile sayısal çözümüne (Dağ et.al., 2007) adlı çalışmada yer verilmiştir. Kuadratik B-spline fonksiyonların kullanıldığı Galerkin metodu, Cosine Expansion tabanlı diferansiyel kuadrature metodu ve radyal tabanlı ağsız metotlarını içeren üç farklı yöntem ile EW denkleminin sayısal çözümü ise (Saka et.al, 2008a) adlı çalışmada incelenmiştir. Daha ayrıntılı bilgi için makaleler ve verdikleri referanslar incelenebilir.

Solitary dalga oluşumu

EW denkleminin solitary dalga çözümü $k = \sqrt{\frac{1}{4\mu}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - ct]), a \leq x \leq b, t \geq 0 \quad (1.23)$$

şeklindedir (Morrison, et.al., 1981).

(1.23) eşitliği $[a, b]$ konum aralığında soldan sağa doğru hareket eden, başlangıç anında tepe noktası x_0 noktasına karşılık gelen $3c$ genliğine ve c dalga hızına sahip bir solitary dalgasını göstermektedir. Bu eşitlikde $t = 0$ alınrsa aşağıdaki başlangıç şartı bulunur.

$$u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0]) \quad (1.24)$$

Sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen, solitary dalga oluşumu için korunum sabitleri

$$\begin{aligned}
C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx \simeq h \sum_{m=0}^N u_m^n, \\
C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx \simeq h \sum_{m=0}^N [(u_m^n)^2 + \mu((u_x)_m^n)^2], \\
C_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} u^3 dx \simeq h \sum_{m=0}^N (u_m^n)^3
\end{aligned} \tag{1.25}$$

eşitlikleri ile gösterilir. (Olver, 1979).

Programın çalışma süresi boyunca korunum sabitlerinin sabit kalmaları beklenir. Bu sabitlerin yaklaşık değerleri, $[a, b]$ tanım aralığında yamuklar kuralı ile hesaplanacaktır. Maple programı kullanarak sabitlerin tam değeri

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{6c}{k}, \\
C_2 &= \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \\
C_3 &= \frac{144c^3}{5k}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

olarak elde edilir.

İki Solitary dalgasının çarpışması

Başlangıç anında $t = 0$ olmak üzere, $x_1 + c_1$ ve $x_2 + c_2$ tepe noktalarına karşılık gelecek şekilde $[a, b]$ konum aralığında yerleştirilen $3c_1$ ve $3c_2$ genliklerine sahip iki solitary dalgasının hareketi $k = \sqrt{\frac{1}{4\mu}}$ olmak üzere

$$u(x, 0) = 3c_1 \operatorname{sech}^2(k[x - x_1 - c_1]) + 3c_2 \operatorname{sech}^2(k[x - x_2 - c_2]) \tag{1.27}$$

formunda modellenebilir (Morrison, et.al., 1981). (1.27) eşitliğinde dalgaların hızları c_1 ve c_2 dir. $c_1 > c_2$ ve $x_2 + c_2 > x_1 + c_1$ seçilirse konum aralığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda, diğeri ise sağda kalacaktır. Genliği daha büyük olan dalganın daha hızlı olduğundan bir müddet sonra öndeki genliği ve hızı düşük olan

dalgaya yetiyecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir. Maple programı kullanılarak aşağıdaki korunum sabitlerinin tam değerleri elde edilir.

$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \left(\frac{c_1 + c_2}{k} \right), \\ C_2 &= \left(\frac{12}{k} + \frac{48k\mu}{5} \right) (c_1^2 + c_2^2), \\ C_3 &= \frac{144}{5k} (c_1^3 + c_2^3) \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.5.2 RLW denklemleri, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri

RLW denklemleri,

$$u_t + u_x + \varepsilon uu_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (1.29)$$

eşitliği ile verilmektedir. Bu eşitlik (1.19) denkleminde $\alpha_1 = 1$, $p = 1$, $\alpha_2 = \varepsilon$ ve $\alpha_3 = \mu$ alındığında ulaşılır. Denklemlerde ε ve μ reel sabitler, x ve t konum ve zamana göre türevleri göstermektedir. RLW denklemleri için fiziksel sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ iken $u \rightarrow 0$ şeklindedir. Sayısal yöntemi uygulayabilmek için çözüm bölgesi $[a, b]$ aralığına sınırlandırılacaktır.

(1.29) İlk olarak Peregrine (1966) tarafından ardışık dalgaları modellemek için RLW denklemleri sunulmuş ve ilk sayısal çözümleri bulmuştur. T. B. Benjamin, J. L. Bona ve J. J. Mahony ise, RLW denklemlerinin çözümlerinin Korteweg-de Vries (KdV) denklemlerinin dalga denklemleri çözümlerine benzerliğini göstermişlerdir (Benjamin et.al., 1972). (Eilbeck and McGuire, 1975) adlı çalışmada birinci ve ikinci mertebeden iki adımlı ve ikinci mertebeden üç adımlı sonlu farklar metodları kullanılarak RLW denklemlerinin sayısal çözümleri üzerinde çalışılmıştır. Eilbeck ve McGuire 1977 yılında, üç adımlı sonlu farklar yöntemi üzerinde daha ayrıntılı bir çalışma yapmışlardır (Eilbeck and McGuire, 1977). Jain ve Iskandar ise RLW denklemlerinin sayısal çözümünü farklı formdaki sonlu farklar metodlarını kullanarak araştırmışlardır (Jain and Iskandar, 1979). Kübik spline şekil fonksiyonları kullanılarak Galerkin metodu ile denklemlerin sayısal çözümü (Alexander and

Morris, 1979) adlı makalede çalışılmıştır. Kübik B-spline Galerkin metodu ile RLW denklemin sayısal çözümü (Gardner and Gardner,1990; Gardner et.al. 1995) adlı makalede araştırılmıştır. (Gardner et.al., 1995) adlı çalışmada kuadratik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümü yapılmıştır. RLW denkleminin sayısal çözümü, en küçük kareler sonlu elemanlar metodunun kullanıldığı (Gardner et.al., 1996) adlı çalışmada araştırılmıştır. (Gardner et.al., 1997) isimli çalışmada kuintik B-spline kullanılarak Petrov-Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümleri üzerinde çalışılmıştır. Dağ, kuadratik B-spline kullanarak en küçük kareler metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümünü (Dağ, 2000) adlı çalışmada araştırmıştır. Kübik B-spline kullanılarak en küçük kareler yöntemiyle RLW denkleminin sayısal çözümünü ise Dağ ve Özer elde etmişlerdir (Dağ and Özer, 2001). Doğan ise kuadratik B-spline ve lineer şekil fonksiyonlarını kullanarak Petrov Galerkin ve Galerkin metotlarıyla RLW denkleminin sayısal çözümü üzerinde çalışmıştır (Doğan, 2001; Doğan, 2002). Kübik B-spline kolokeyşin ve kuintik B-spline Galerkin metotları ile denklemin sayısal çözümü ise (Dağ et.al., 2004; Dağ et.al. 2006) adlı çalışmalarda araştırılmıştır. Kübik spline kolokeyşin sonlu elemanlar yöntemi ile denklemin sayısal çözümü (Irk et.al.,2005) adlı makalede çalışılmıştır. Kübik B-spline sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak RLW denkleminin sayısal çözümü (Raslan, 2005b) adlı çalışmada Raslan tarafından yapılmıştır. Septik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak RLW denkleminin sayısal çözümü ise kolokeyşin metodu ile araştırılmıştır (Soliman and Hussien, 2005). Kutluay ve Esen 2006 yılında yaptıkları çalışmada, RLW denkleminin sayısal çözümü için bir sonlu farklar yöntemini (Kutluay and Esen, 2006) ve aynı denklemin çözümü için kuadratik B-spline şekil fonksiyonlarını kullanarak Lumped Galerkin sonlu elemanlar metodunu (Esen and Kutluay, 2006) önermişlerdir. Saka ve Dağ, RLW denkleminin sayısal çözümü için kuartik B-spline şekil fonksiyonları ile birlikte Galerkin metodunu kullanmışlardır (Saka and Dağ, 2008). Saka ve arkadaşları 2008 yılında Kuintik B-spline kolokeyşin metodunu kullanarak denklemin sayısal metodunu araştırmışlardır (Saka et.al., 2008b).

Solitary dalga oluşumu

RLW denkleminin solitary dalga çözümü $[a, b]$ aralığında tanımlı $3c$ genlikli, $v = 1 + \varepsilon c$ dalga hızlı ve $k = \sqrt{\frac{\varepsilon c}{4\mu v}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - (1 + \varepsilon c)t]) \quad (1.30)$$

şeklinde yazılabilir (Peregrine, 1966). Başlangıç şartını elde edilebilmek için (1.30) eşitliğinde $t = 0$ alınarak aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0]) \quad (1.31)$$

Kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen RLW denklemleri için korunum sabitleri

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx \simeq h \sum_{m=0}^N u_m^n, \\ C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx \simeq h \sum_{m=1}^N [(u_m^n)^2 + \mu((u_x)_m^n)^2], \\ C_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^3 + 3u^2) dx \simeq h \sum_{m=1}^N [(u_m^n)^3 + 3(u_m^n)^2] \end{aligned} \quad (1.32)$$

olarak tanımlanır (Olver, 1979). Maple programı kullanılarak korunum sabitlerinin tam değerleri aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{6c}{k}, \\ C_2 &= \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5}, \\ C_3 &= \frac{36c^2}{5k} (4c + 5) \end{aligned} \quad (1.33)$$

İki Solitary dalgasının çarpışması

Başlangıç anında $t = 0$, x_1 ve x_2 tepe noktalarına karşılık gelecek şekilde $[a, b]$ konum aralığında yerleştirilen $3c_1$ ve $3c_2$ genliklerine sahip iki solitary dalgasının hareketi

$$a_i = \frac{4k_i^2}{1 - 4k_i^2}, \quad i = 1, 2 \text{ olmak üzere}$$

$$u(x, 0) = 3a_1 \operatorname{sech}^2(k_1 [x - x_1]) + 3a_2 \operatorname{sech}^2(k_2 [x - x_2]) \quad (1.34)$$

formunda modellenebilir. (1.34) eşitliğinde $a_1 > a_2$ ve $x_2 > x_1$ seçimleri yapıldığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda kalacaktır. Genlik olarak büyük dalga daha hızlı olduğundan bir müddet sonra öndeki genliği ve hızı düşük olan dalgaya yetişecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir. Maple programı kullanılarak korunum sabitlerinin tam değerleri aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \left(\frac{a_1 k_2 + a_2 k_1}{k_1 k_2} \right), \\ C_2 &= \frac{12}{k_1 k_2} (a_1^2 k_2 + a_2^2 k_1) + \frac{48\mu}{5k_2 k_1} (k_1^2 a_1^2 k_2 + k_2^2 a_2^2 k_1), \\ C_3 &= \frac{36}{5k_1 k_2} (4a_1^3 k_2 + 4a_2^3 k_1 + 5a_1^2 k_2 + 5a_2^2 k_2) \end{aligned} \quad (1.35)$$

1.5.3 MEW denkleminin başlangıç-sınır şartları ve test problemleri

(1.19) denkleminde $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \varepsilon$, $p = 2$ ve $\alpha_3 = \mu$ alınırsa

$$u_t + \varepsilon u^2 u_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (1.36)$$

formundaki MEW denkleminin ulaşılır. Bu denkleminde ε ve μ reel sabit, x ve t konum ve zamana göre türevleri göstermektedir. MEW denkleminin için fiziksel sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ iken $u \rightarrow 0$ şeklindedir. Sayısal yöntemi uygulayabilmek için çözüm bölgesi $[a, b]$ aralığına sınırlandırılacaktır. MEW denkleminde EW denkleminin gibi sığ su dalgaları ve ion akustik plazmalar gibi bir çok fiziksel olayı modellemektedir.

Zaki, kuintik B-spline sonlu elemanları kullanarak Petrov Galerkin metodu ile MEW denkleminin sayısal çözümünü araştırmıştır (Zaki, 2000b). 2005 yılında Evans ve Raslan denklemin sayısal çözümü için kuadratik B-spline fonksiyonlarını kullanarak kolokeyşin metodu ile denklemin sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır

(Evans and Raslan, 2005). Aynı denklemin sayısal çözümü ise kuintik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak Saka tarafından araştırılmıştır (Saka, 2007). Esen ve Kutluay ise MEW denkleminin sayısal çözümü için sonlu farklar metodunu önermiştir (Esen and Kutluay, 2008).

Solitary dalga oluşumu

MEW denkleminin solitary dalga çözümü $[a, b]$ aralığında tanımlı $\sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ genlikli, $v = c$ dalga hızlı, $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ ve $k = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ olmak üzere

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0 - ct]) \quad (1.37)$$

olarak verilebilir (Gardner and Gardner, 1992). (1.37) eşitliğinde $t = 0$ alındığında

$$u(x, 0) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0]) \quad (1.38)$$

başlangıç şartı elde edilebilir.

MEW denklemini için kütle, enerji ve momentuma karşılık gelen korunum sabitleri Olver tarafından (Olver, 1979) adlı çalışmada

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx \simeq h \sum_{m=0}^N u_m^n, \\ C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx \simeq h \sum_{m=1}^N [(u_m^n)^2 + \mu((u_x)_m^n)^2], \\ C_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} u^4 dx \simeq h \sum_{m=1}^N (u_m^n)^4 \end{aligned} \quad (1.39)$$

eşitlikleri ile tanımlanmıştır. Maple programı kullanılarak korunum sabitlerinin

tam değerleri aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{A\pi}{k}, \\
C_2 &= \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3}, \\
C_3 &= \frac{4A^4}{3k}
\end{aligned} \tag{1.40}$$

İki Solitary dalgasının çarpışması

Başlangıç anında $t = 0$, x_1 ve x_2 tepe noktalarına karşılık gelecek şekilde $[a, b]$ konum aralığında yerleştirilen $k = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ olmak üzere $A_1 = \sqrt{\frac{6c_1}{\varepsilon}}$ ve $A_2 = \sqrt{\frac{6c_2}{\varepsilon}}$ genliklerine sahip iki solitary dalgasının hareketi

$$u(x, 0) = A_1 \operatorname{sech}(k[x - x_1]) + A_2 \operatorname{sech}(k[x - x_2]) \tag{1.41}$$

formunda modellenenir. (1.41) eşitliğinde $A_1 > A_2$ ve $x_2 > x_1$ seçimleri yapıldığında genlik olarak daha büyük olan dalga solda kalacaktır ve genlik olarak büyük dalga daha hızlı olduğundan bir müddet sonra önündeki genliği ve hızı düşük olan diğer dalgaya yetişerek bir çarpışma gerçekleşecektir. Maple programı kullanılarak korunum sabitlerinin tam değerleri aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\pi}{k} (A_1 + A_2), \\
C_2 &= \frac{2}{k} (A_1^2 + A_2^2) + \frac{2\mu k}{3} (A_1^2 + A_2^2), \\
C_3 &= \frac{4}{3k} (A_1^4 + A_2^4)
\end{aligned} \tag{1.42}$$

1.5.4 MRLW denkleminin, başlangıç-sınır şartları ve test problemleri

(1.19) denkleminde $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \varepsilon$, $p = 2$ ve $\alpha_3 = \mu$ alınırsa

$$u_t + u_x + \varepsilon u^2 u_x - \mu u_{xxt} = 0 \tag{1.43}$$

formundaki MRLW denkleminin ulaşılır. Denkleminde ε ve μ reel sabit, x ve t alt indisleri konum ve zamana göre türevleri göstermektedir. MRLW denkleminin için

fiziksel sınır şartlarında diğer denklemlerde olduğu gibi $x \rightarrow \pm\infty$ iken $u \rightarrow 0$ şeklinde olup sayısal yöntemi uygulayabilmek için çözüm bölgesi $[a, b]$ aralığına sınırlandırılacaktır.

MRLW denkleminin sayısal çözümü sonlu farklar yöntemi ile Khalifa ve meslektaşları tarafından (Khalifa et.al., 2007) adlı çalışmada araştırılmıştır. (Haq et.al., 2010) adlı çalışmada ise MRLW denkleminin sayısal çözümü kuartik B-spline kolokeyşin metodu ile araştırılmıştır. Raslan ve Danaf ise MRLW denkleminin çözümü için kuintik B-spline kolokeyşin metodunu kullanmıştır (Raslan and Danaf, 2010).

Solitary dalga oluşumu

$[a, b]$ aralığında tanımlı $\sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ genlikli, $v = c + 1$ dalga hızlı MRLW denkleminin analitik çözümü $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ ve $k = \frac{c}{\sqrt{\mu}(c+1)}$ olmak üzere

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0 - (c+1)t]), \quad (1.44)$$

olarak verilebilir. (1.44) eşitliğinde $t = 0$ alındığında

$$u(x, 0) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0]) \quad (1.45)$$

başlangıç şartı elde edilebilir.

MRLW denklemi için korunum sabitleri EW, RLW ve MEW denklemlerinin korunum sabitlerine benzer olarak

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx \simeq h \sum_{m=0}^N u_m^n, \\ C_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + \mu(u_x)^2) dx \simeq h \sum_{m=1}^N [(u_m^n)^2 + \mu((u_x)_m^n)^2], \\ C_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^4 - \frac{6}{\varepsilon} \mu(u_x)^2 \right) dx \simeq h \sum_{m=1}^N \left[(u_m^n)^4 - \frac{6}{\varepsilon} \mu((u_x)_m^n)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.46)$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Olver, 1979). Maple programı kullanılarak korunum

sabitlerinin tam değerleri aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\pi A}{k}, \\
C_2 &= \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \\
C_3 &= \frac{4A^2}{3k\varepsilon} (A^2\varepsilon - 3\mu k^2)
\end{aligned} \tag{1.47}$$

İki Solitary dalgasının çarpışması

$t = 0$ başlangıç anında, tepe noktaları sırasıyla x_1 ve x_2 noktalarına karşılık gelecek şekilde $[a, b]$ konum aralığında yerleştirilen $k_i = \frac{c_i}{\sqrt{\mu}(c_i + 1)}$, $A_i = \sqrt{\frac{6c_i}{\varepsilon}}$, $i = 1, 2$ olmak üzere A_1 ve A_2 genliklerine sahip iki solitary dalgasının hareketi

$$u(x, 0) = A_1 \operatorname{sech}(k_1 [x - x_1]) + A_2 \operatorname{sech}(k_2 [x - x_2]) \tag{1.48}$$

formunda modellenenebilir. (1.48) eşitliğinde $A_1 > A_2$ ve $x_2 > x_1$ seçimleri yapıldığında genlik olarak daha buyk olan dalga solda kalacaktır. Genlik olarak buyk olan dalga daha hızlı olduğundan bir müddet sonra öndeki genliği ve hızı düşük olan dalgaya yetişecek ve bir çarpışma gerçekleşecektir. Maple programı kullanılarak korunum sabitlerinin tam değerleri aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\pi}{k_1 k_2} (k_2 A_1 + k_1 A_2), \\
C_2 &= \frac{2}{k_1 k_2} (k_2 A_1^2 + k_1 A_2^2) + \frac{2\mu}{3k_1 k_2} (k_1^2 k_2 A_1^2 + k_1 k_2^2 A_2^2) \\
C_3 &= \frac{4}{3k_1 k_2 \varepsilon} (\varepsilon k_1 A_2^4 - 3\mu k_1 k_2^2 A_2^2 + \varepsilon k_2 A_1^4 - 3\mu k_1^2 k_2 A_1^2)
\end{aligned} \tag{1.49}$$

BÖLÜM 2

SAYISAL YÖNTEMİN UYGULANMASI

Sayısal yöntemin uygulanması bölümünde, (1.19) genel denklemin sayısal çözümlerinin araştırılması için sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Sayısal çözümün doğruluğunu göstermek için iki test problemi, hata normları, korunum sabitleri hesaplanarak ve grafikler çizilerek incelenmiştir.

(1.19) genel denklemde

$$v = u - \alpha_3 u_{xx} \quad (2.1)$$

$$v_t = u_t - \alpha_3 u_{xxt} \quad (2.2)$$

dönüşümü yapılırsa,

$$v_t = -\alpha_1 u_x - \alpha_2 u^p u_x \quad (2.3)$$

yazılabilir. Δt zaman artımı olmak üzere v 'nin zamana göre Taylor seri açılımından

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t v_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} v_{tt}^n + \frac{\Delta t^3}{6} v_{ttt}^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (2.4)$$

yazılır ve zamana göre ikinci ve üçüncü türev için

$$v_{tt}^n \approx \frac{v_t^{n+1} - v_t^n}{\Delta t} \quad (2.5)$$

$$v_{ttt}^n \approx \frac{v_t^{n+1} - 2v_t^n + v_t^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (2.6)$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t v_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} \theta_1 \left(\frac{v_t^{n+1} - v_t^n}{\Delta t} \right) + \frac{\Delta t^3}{6} \theta_2 \left(\frac{v_t^{n+1} - 2v_t^n + v_t^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \quad (2.7)$$

ve

$$v^{n+1} - v_t^{n+1} \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) = v^n + v_t^n \left(\Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} v_t^{n-1} \quad (2.8)$$

elde edilir. Son eşitlikte v ile v_t yerine sırasıyla (2.1) ile (2.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & (u - \alpha_3 u_{xx})^{n+1} + \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 u_x + \alpha_2 u^p u_x)^{n+1} \\ & = \\ & (u - \alpha_3 u_{xx})^n - \left(\Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) (\alpha_1 u_x + \alpha_2 u^p u_x)^n - \frac{\theta_2 \Delta t}{6} (\alpha_1 u_x + \alpha_2 u^p u_x)^{n-1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

bulunur. Burada metodun doğruluğu en yüksek olacak şekilde sonradan belirlenecek parametreler θ_1 ve θ_2 'dir. Düzenlemeler yapıldıktan sonra aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\begin{aligned} u^{n+1} + \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (u^p)^{n+1}) u_x^{n+1} - \alpha_3 (u_{xx})^{n+1} = \\ u^n - \alpha_3 (u_{xx})^n - \left(\Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) (\alpha_1 (u_x)^n + \alpha_2 (u^p u_x)^n) - \\ \frac{\theta_2 \Delta t}{6} (\alpha_1 (u_x)^{n-1} + \alpha_2 (u^p u_x)^{n-1}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Bulunan denklem, (1.19) denkleminin zamana göre parçalanma yapılmış halidir. Zamana göre parçalanması yapılan denklemin, (1.19) denklemini ile tutarlı olup olmadığını anlamak için kesme hatasının bulunması gerekmektedir. Aranılan u fonksiyonunun çözümü, zaman değişkenine göre istenildiği kadar türevlenebilmesi koşuluyla u^{n+1} , u_x^{n+1} , $(u_{xx})^{n+1}$, u^{n-1} ve $(u_x)^{n-1}$ terimleri için Taylor seri açılımları

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t (u_t)^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 (u_{tt})^n + \frac{1}{3!} \Delta t^3 (u_{ttt})^n + \frac{1}{4!} \Delta t^4 (u_{tttt})^n + \dots$$

$$u^{n-1} = u^n - \Delta t (u_t)^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 (u_{tt})^n - \frac{1}{3!} \Delta t^3 (u_{ttt})^n + \frac{1}{4!} \Delta t^4 (u_{tttt})^n + \dots$$

$$(u_x)^{n+1} = \frac{\partial}{\partial x} u^{n+1}, \quad (u_{xx})^{n+1} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^{n+1}, \quad (u_x)^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x} u^{n-1}$$

olacaktır. Bulunan eşitlikler (2.10) da yerine yazılırsa kesme hataları

(i) $p = 1$ için

a) $\theta_1 = 1$ ve $\theta_2 = 0$ alınırsa

$$T_n = \frac{\Delta t^3}{12} (-3\alpha_1 \alpha_2 (u_x)^n (u_{xt})^n - \alpha_3 \alpha_2^3 (u_x^2)^n (u_{xxt})^n + \dots) + \dots$$

b) $\theta_1 = 1$ ve $\theta_2 = -\frac{1}{2}$ alınırsa

$$T_n = \frac{\Delta t^4}{24} ((u_{tttt})^n - 10\alpha_3 \alpha_2^2 (u_x)^n (u_{xt})^n (u_{xxt})^n + \dots) + \dots$$

(ii) $p = 2$ için

a) $\theta_1 = 1$ ve $\theta_2 = 0$ alınırsa

$$T_n = \frac{\Delta t^3}{12} (2\alpha_2 \alpha_3^2 (u_x)^n (u_{xxt})^n + 6\alpha_2^3 (u^4)^n (u_x^3)^n + \dots) + \dots$$

b) $\theta_1 = 1$ ve $\theta_2 = -\frac{1}{2}$ alınırsa

$$T_n = \frac{\Delta t^4}{24} ((u_{tttt})^n + 2\alpha_1 (u_{xttt})^n - 48\alpha_2^4 (u^5) + \dots) + \dots$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\Delta t \rightarrow 0$ iken $T_n \rightarrow 0$ olduğundan dolayı önerilen metot zaman parçalanmasına göre sayısal çözümü araştırılan denklem ile tutarlıdır.

2.1 Birinci Metot - Kübik (M1)

(2.10) denkleminde x_m bölünme noktalarında konuma göre türevler için kübik B-spline kolekeyşin yaklaşımı olan (1.14) formundaki eşitlikler kullanıldığında

$$\begin{aligned} (u)_m^n &= \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n \\ (u_x)_m^n &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n) \\ (u_x)_m^{n-1} &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^{n-1} - \delta_{m-1}^{n-1}) \\ (u_{xx})_m^n &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^n - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^n) \\ (u_{xx})_m^{n-1} &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^{n-1} - 2\delta_m^{n-1} + \delta_{m+1}^{n-1}) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^{n+1} \left[1 - \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (\delta_m^{n+1})^p) \frac{3}{h} - \frac{6\alpha_3}{h^2} \right] + \delta_m^{n+1} \left(4 + \frac{12\alpha_3}{h^2} \right) + \\ &\delta_{m+1}^{n+1} \left[1 + \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (\delta_m^{n+1})^p) \frac{3}{h} - \frac{6\alpha_3}{h^2} \right] = \\ &-\frac{\theta_2 \Delta t}{6} (\alpha_1 (u_x)_m^{n-1} + \alpha_2 (u^p u_x)_m^{n-1}) + \\ &u_m^n - \alpha_3 (u_{xx})_m^n - \left(\Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) (\alpha_1 (u_x)_m^n + \alpha_2 (u^p u_x)_m^n) \end{aligned} \quad (2.11)$$

bulunur. (2.11) denklem sistemi x_m , $m = 0, \dots, N$ bölünme noktalarında $N + 1$ denklem ve $N + 3$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. (1.20) olarak bölümün başında verilen sınır şartlarından

$$u(a, t) = \delta_{-1}^{n+1} + 4\delta_0^{n+1} + \delta_1^{n+1} = 0 \quad (2.12)$$

$$u(b, t) = \delta_{N-1}^{n+1} + 4\delta_N^{n+1} + \delta_{N+1}^{n+1} = 0 \quad (2.13)$$

yazılırsa

$$\begin{aligned}\delta_{-1}^{n+1} &= -4\delta_0^{n+1} - \delta_1^{n+1} \\ \delta_{N+1}^{n+1} &= -\delta_{N-1}^{n+1} - 4\delta_N^{n+1}\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan eşitliklerin denklem sisteminde kullanılması sonucunda yeni denklem sistemi artık $N + 1$ bilinmeyen, $N + 1$ denklemden oluşan yeni bir sisteme dönüşür. Böylece sınır şartları uygulanmış denklem sisteminin son hali

$$\begin{aligned}\lambda_{m1} &= 1 - \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (\delta_m^{n+1})^p) \frac{3}{h} - \frac{6\alpha_3}{h^2} \\ \lambda_{m2} &= 4 + \frac{12\alpha_3}{h^2} \\ \lambda_{m3} &= 1 + \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (\delta_m^{n+1})^p) \frac{3}{h} - \frac{6\alpha_3}{h^2} \\ \lambda_{m4} &= u_m^n - \alpha_3 (u_{xx})_m^n - \left(\Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) (\alpha_1 (u_x)_m^n + \alpha_2 (u^p u_x)_m^n) - \\ &\quad \frac{\theta_2 \Delta t}{6} (\alpha_1 (u_x)_m^{n-1} + \alpha_2 (u^p u_x)_m^{n-1})\end{aligned}$$

olmak üzere

$m = 0$ için

$$\begin{aligned}\lambda_{m1} \delta_{-1}^{n+1} + \lambda_{m2} \delta_0^{n+1} + \lambda_{m3} \delta_1^{n+1} &= \lambda_{m4} \\ \lambda_{m1} (-4\delta_0^{n+1} - \delta_1^{n+1}) + \lambda_{m2} \delta_0^{n+1} + \lambda_{m3} \delta_1^{n+1} &= \lambda_{m4} \\ (-4\lambda_{m1} + \lambda_{m2}) \delta_0^{n+1} + (-\lambda_{m1} + \lambda_{m3}) \delta_1^{n+1} &= \lambda_{m4}\end{aligned}$$

$m = 1$ için

$$\lambda_{m1} \delta_0^{n+1} + \lambda_{m2} \delta_1^{n+1} + \lambda_{m3} \delta_2^{n+1} = \lambda_{m4}$$

⋮

(2.14)

$m = N - 1$ için

$$\lambda_{m1} \delta_{N-2}^{n+1} + \lambda_{m2} \delta_{N-1}^{n+1} + \lambda_{m3} \delta_N^{n+1} = \lambda_{m4}$$

$m = N$ için

$$\begin{aligned}\lambda_{m1}\delta_{N-1}^{n+1} + \lambda_{m2}\delta_N^{n+1} + \lambda_{m3}\delta_{N+1}^{n+1} &= \lambda_{m4} \\ \lambda_{m1}\delta_{N-1}^{n+1} + \lambda_{m2}\delta_N^{n+1} + \lambda_{m3}(-\delta_{N-1}^{n+1} - 4\delta_N^{n+1}) &= \lambda_{m4} \\ (\lambda_{m1} - \lambda_{m3})\delta_{N-1}^{n+1} + (\lambda_{m2} - 4\lambda_{m3})\delta_N^{n+1} &= \lambda_{m4}\end{aligned}$$

formunda açık olarak yazılır. Sınır şartları uygulandıktan sonra açık bir şekilde yazılan (2.14) denklem sistemi, katsayılarda bulunan $(\delta_m^{n+1})^p$ teriminden dolayı kapalı bir sistem olduğundan, sisteminin çözülebilmesi için her bir zaman adımında $(\delta_m^{n+1})^p$ yerine ilk olarak bir önceki zaman adımındaki değeri alınmış ve hesaplanan değer sadece $(\delta_m^{n+1})^p$ değerine atanarak bir iç iterasyon yapılmıştır. İç iterasyon işlemi tüm hesaplamalarda 5 kere yapılmıştır. Böylece δ_m^{n+1} terimlerine göre açık bir denklem sistemine ulaşılarak sistem Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

Birinci metot için başlangıç durumu ve sayısal hesaplamalar

İlk zaman adımında ($t = 0$ anında), (1.21) başlangıç şartı yardımıyla $\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0$ bilinmeyenleri bulunabilir.

$\delta_0^1, \delta_1^1, \dots, \delta_N^1$ bilinmeyenlerini hesaplamak için (2.14) denklem sisteminde $n = 0$, $\theta_1 = 1$ ve $\theta_2 = 0$ alınarak kapalı çözüm araştırılırsa sistemin sağ tarafındaki değerler bilindiğinden (2.14) denklem sistemi 3'lü Thomas algoritması yardımıyla kolaylıkla çözülebilir. Böylece $u_0^1, u_1^1, \dots, u_N^1$ değerleri hesaplanır.

$\delta_0^2, \delta_1^2, \dots, \delta_N^2$ bilinmeyenlerini hesaplamak için (2.14) denklem sisteminde $n = 1$, $\theta_1 = 1$ ve $\theta_2 = -\frac{1}{2}$ alınırsa sistemin sağ tarafındaki değerler bilindiğinden (2.14) sistemi 3'lü Thomas algoritması yardımıyla kolaylıkla çözülebilir. Böylece $\delta_0^2, \delta_1^2, \dots, \delta_N^2$ değerleri hesaplanmış olur. Bundan sonra n hesaplanacak zaman adımı olmak üzere $\delta_0^{n+1}, \delta_1^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1}$ bilinmeyenleri hesaplanırken önceki iki zaman adımında bulunan değerler kullanılır.

2.2 İkinci Metot - Kuintik (M2)

(2.10) denkleminde x_m bölünme noktalarında konuma göre türevler için kuintik B-spline kolekeyşin yaklaşımı olan (1.18) formundaki eşitlikler kullanıldığında

$$\begin{aligned}
(u)_m^n &= \delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n \\
(u)_m^{n-1} &= \delta_{m-2}^{n-1} + 26\delta_{m-1}^{n-1} + 66\delta_m^{n-1} + 26\delta_{m+1}^{n-1} + \delta_{m+2}^{n-1} \\
(u_x)_m^n &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n) \\
(u_x)_m^{n-1} &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2}^{n-1} - 10\delta_{m-1}^{n-1} + 10\delta_{m+1}^{n-1} + \delta_{m+2}^{n-1}) \\
(u_{xx})_m^n &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2}^n + 2\delta_{m-1}^n - 6\delta_m^n + 2\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n) \\
(u_{xx})_m^{n-1} &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2}^{n-1} + 2\delta_{m-1}^{n-1} - 6\delta_m^{n-1} + 2\delta_{m+1}^{n-1} + \delta_{m+2}^{n-1})
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\delta_{m-2}^{n+1} \left[1 - \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (\delta_m^{n+1})^p) \frac{5}{h} - \frac{20\alpha_3}{h^2} \right] + \\
&\delta_{m-1}^{n+1} \left[26 - \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (\delta_m^{n+1})^p) \frac{50}{h} - \frac{40\alpha_3}{h^2} \right] + \\
&\delta_m^{n+1} \left(66 + \frac{120\alpha_3}{h^2} \right) + \delta_{m+1}^{n+1} \left[26 + \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (\delta_m^{n+1})^p) \frac{50}{h} - \frac{40\alpha_3}{h^2} \right] + \\
&\delta_{m+2}^{n+1} \left[1 + \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (\delta_m^{n+1})^p) \frac{5}{h} - \frac{20\alpha_3}{h^2} \right] = \\
&u_m^n - \alpha_3 (u_{xx})_m^n - \left(\Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) (\alpha_1 (u_x)_m^n + \alpha_2 (u^p u_x)_m^n) - \\
&\frac{\theta_2 \Delta t}{6} (\alpha_1 (u_x)_m^{n-1} + \alpha_2 (u^p u_x)_m^{n-1})
\end{aligned} \tag{2.15}$$

bulunur. (2.15) denklem sistemi $m = 0, \dots, N$ için toplam $N + 1$ denklem ve $N + 5$ bilinmeyenden oluşan bir sistemdir. (1.20) sınır şartlarından

$$u(a, t) = \delta_{-2}^{n+1} + 26\delta_{-1}^{n+1} + 66\delta_0^{n+1} + 26\delta_1^{n+1} + \delta_2^{n+1} = 0 \tag{2.16}$$

$$u(b, t) = \delta_{N-2}^{n+1} + 26\delta_{N-1}^{n+1} + 66\delta_N^{n+1} + 26\delta_{N+1}^{n+1} + \delta_{N+2}^{n+1} = 0 \tag{2.17}$$

$$u_x(a, t) = \frac{5}{h}(-\delta_{-2}^{n+1} - 10\delta_{-1}^{n+1} + 10\delta_1^{n+1} + \delta_2^{n+1}) = 0 \tag{2.18}$$

$$u_x(b, t) = \frac{5}{h}(-\delta_{N-2}^{n+1} - 10\delta_{N-1}^{n+1} + 10\delta_{N+1}^{n+1} + \delta_{N+2}^{n+1}) = 0 \tag{2.19}$$

yazılabilir. (2.16) ve (2.18) sınır şartlarından

$$\delta_{-2}^{n+1} = -\frac{\delta_2^{n+1}}{8} - \frac{9\delta_1^{n+1}}{4} - \frac{33\delta_0^{n+1}}{8} \quad (2.20)$$

$$\delta_{-1}^{n+1} = \frac{9\delta_2^{n+1}}{4} + \frac{65\delta_1^{n+1}}{2} + \frac{165\delta_0^{n+1}}{4} \quad (2.21)$$

ve (2.17) ve (2.19) sınır şartlarından

$$\delta_{N+1}^{n+1} = -\frac{\delta_{N-2}^{n+1}}{8} - \frac{9\delta_{N-1}^{n+1}}{4} - \frac{33\delta_N^{n+1}}{8} \quad (2.22)$$

$$\delta_{N+2}^{n+1} = \frac{9\delta_{N-2}^{n+1}}{4} + \frac{65\delta_{N-1}^{n+1}}{2} + \frac{165\delta_N^{n+1}}{4} \quad (2.23)$$

bulunur. Bulunan eşitliklerin denklem sisteminde kullanılması sonucunda yeni denklem sistemi artık $N + 1$ bilinmeyen, $N + 1$ denklemden oluşan yeni bir sisteme dönüşür. Böylece sınır şartları uygulanmış denklem sisteminin son hali

$$\begin{aligned} (u)_m^n &= \delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n \\ (u_x)_m^n &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n) \\ (u_x)_m^{n-1} &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2}^{n-1} - 10\delta_{m-1}^{n-1} + 10\delta_{m+1}^{n-1} + \delta_{m+2}^{n-1}) \\ (u_{xx})_m^n &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2}^n + 2\delta_{m-1}^n - 6\delta_m^n + 2\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n) \end{aligned}$$

$$\lambda_{m1} = 1 + \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (\delta_m^{n+1})^p) \frac{5}{h} - \frac{20\alpha_3}{h^2}$$

$$\lambda_{m2} = 26 + \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (\delta_m^{n+1})^p) \frac{50}{h} - \frac{40\alpha_3}{h^2}$$

$$\lambda_{m3} = 66 + \frac{120\alpha_3}{h^2}$$

$$\lambda_{m4} = 26 - \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (\delta_m^{n+1})^p) \frac{50}{h} - \frac{40\alpha_3}{h^2}$$

$$\lambda_{m5} = 1 - \left(\frac{\theta_1 \Delta t}{2} + \frac{\theta_2 \Delta t}{6} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 (\delta_m^{n+1})^p) \frac{5}{h} - \frac{20\alpha_3}{h^2}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{m6} &= u_m^n - \alpha_3 (u_{xx})_m^n - \left(\Delta t - \frac{\theta_1 \Delta t}{2} - \frac{\theta_2 \Delta t}{3} \right) (\alpha_1 (u_x)_m^n + \alpha_2 (u^p u_x)_m^n) - \\ &\quad \frac{\theta_2 \Delta t}{6} (\alpha_1 (u_x)_m^{n-1} + \alpha_2 (u^p u_x)_m^{n-1}) \end{aligned}$$

ve

$$\delta_{m+2}^{n+1}\lambda_{m1} + \delta_{m+1}^{n+1}\lambda_{m2} + \delta_m^{n+1}\lambda_{m3} + \delta_{m-1}^{n+1}\lambda_{m4} + \delta_{m-2}^{n+1}\lambda_{m5} = \lambda_{m6}$$

olmak üzere

$m = 0$ için

$$\begin{aligned} &\delta_2^{n+1}\lambda_{m1} + \delta_1^{n+1}\lambda_{m2} + \delta_0^{n+1}\lambda_{m3} + \delta_{-1}^{n+1}\lambda_{m4} + \delta_{-2}^{n+1}\lambda_{m5} = \lambda_{m6}, \\ &\delta_2^{n+1}\lambda_{m1} + \delta_1^{n+1}\lambda_{m2} + \delta_0^{n+1}\lambda_{m3} + \left(-\frac{\delta_2^{n+1}}{8} - \frac{9\delta_1^{n+1}}{4} - \frac{33\delta_0^{n+1}}{8}\right)\lambda_{m4} + \\ &\left(\frac{9\delta_2^{n+1}}{4} + \frac{65\delta_1^{n+1}}{2} + \frac{165\delta_0^{n+1}}{4}\right)\lambda_{m5} = \lambda_{m6}, \\ &\left(\lambda_{m3} - \frac{33\lambda_{m4}}{8} + \frac{165\lambda_{m5}}{4}\right)\delta_0^{n+1} + \\ &\left(\lambda_{m2} - \frac{9\lambda_{m4}}{4} + \frac{65\lambda_{m5}}{2}\right)\delta_1^{n+1} + \\ &\left(\lambda_{m1} - \frac{\lambda_{m4}}{8} - \frac{9\lambda_{m5}}{4}\right)\delta_2^{n+1} = \lambda_{m6} \end{aligned}$$

$m = 1$ için

$$\begin{aligned} &\delta_3^{n+1}\lambda_{m1} + \delta_2^{n+1}\lambda_{m2} + \delta_1^{n+1}\lambda_{m3} + \delta_0^{n+1}\lambda_{m4} + \delta_{-1}^{n+1}\lambda_{m5} = \lambda_{m6}, \\ &\delta_3^{n+1}\lambda_{m1} + \delta_2^{n+1}\lambda_{m2} + \delta_1^{n+1}\lambda_{m3} + \\ &\delta_0^{n+1}\lambda_{m4} + \left(-\frac{\delta_2^{n+1}}{8} - \frac{9\delta_1^{n+1}}{4} - \frac{33\delta_0^{n+1}}{8}\right)\lambda_{m5} = \lambda_{m6}, \\ &\left(\lambda_{m4} - \frac{33\lambda_{m5}}{8}\right)\delta_0^{n+1} + \left(\lambda_{m3} - \frac{9\lambda_{m5}}{4}\right)\delta_1^{n+1} + \\ &\left(\lambda_{m2} - \frac{\lambda_{m5}}{8}\right)\delta_2^{n+1} + \delta_3^{n+1}\lambda_{m1} = \lambda_{m6} \end{aligned}$$

$m = 2$ için

$$\delta_4^{n+1}\lambda_{m1} + \delta_3^{n+1}\lambda_{m2} + \delta_2^{n+1}\lambda_{m3} + \delta_1^{n+1}\lambda_{m4} + \delta_0^{n+1}\lambda_{m5} = \lambda_{m6}$$

⋮

(2.24)

$m = N - 2$ için

$$\delta_N^{n+1}\lambda_{m1} + \delta_{N-1}^{n+1}\lambda_{m2} + \delta_{N-2}^{n+1}\lambda_{m3} + \delta_{N-3}^{n+1}\lambda_{m4} + \delta_{N-4}^{n+1}\lambda_{m5} = \lambda_{m6}$$

$m = N - 1$ için

$$\begin{aligned} & \delta_{N+1}^{n+1} \lambda_{m1} + \delta_N^{n+1} \lambda_{m2} + \delta_{N-1}^{n+1} \lambda_{m3} + \delta_{N-2}^{n+1} \lambda_{m4} + \delta_{N-3}^{n+1} \lambda_{m5} = \lambda_{m6}, \\ & \left(-\frac{\delta_{N-2}^{n+1}}{8} - \frac{9\delta_{N-1}^{n+1}}{4} - \frac{33\delta_N^{n+1}}{8} \right) \lambda_{m1} + \delta_N^{n+1} \lambda_{m2} + \\ & \delta_{N-1}^{n+1} \lambda_{m3} + \delta_{N-2}^{n+1} \lambda_{m4} + \delta_{N-3}^{n+1} \lambda_{m5} = \lambda_{m6}, \\ & \left(\lambda_{m4} - \frac{\lambda_{m1}}{8} \right) \delta_{N-2}^{n+1} + \left(\lambda_{m3} - \frac{9\lambda_{m1}}{4} \right) \delta_{N-1}^{n+1} \\ & \left(\lambda_{m2} - \frac{33\lambda_{m1}}{8} \right) \delta_N^{n+1} + \delta_{N-3}^{n+1} \lambda_{m5} = \lambda_{m6} \end{aligned}$$

$m = N$ için

$$\begin{aligned} & \delta_{N+2}^{n+1} \lambda_{m1} + \delta_{N+1}^{n+1} \lambda_{m2} + \delta_N^{n+1} \lambda_{m3} + \delta_{N-1}^{n+1} \lambda_{m4} + \delta_{N-2}^{n+1} \lambda_{m5} = \lambda_{m6}, \\ & \left(\frac{9\delta_{N-2}^{n+1}}{4} + \frac{65\delta_{N-1}^{n+1}}{2} + \frac{165\delta_N^{n+1}}{4} \right) \lambda_{m1} + \left(-\frac{\delta_{N-2}^{n+1}}{8} - \frac{9\delta_{N-1}^{n+1}}{4} - \frac{33\delta_N^{n+1}}{8} \right) \lambda_{m2} + \\ & \delta_N^{n+1} \lambda_{m3} + \delta_{N-1}^{n+1} \lambda_{m4} + \delta_{N-2}^{n+1} \lambda_{m5} = \lambda_{m6}, \\ & \left(\lambda_{m5} - \frac{\lambda_{m2}}{8} + \frac{9\lambda_{m1}}{4} \right) \delta_{N-2}^{n+1} + \left(\lambda_{m4} - \frac{9\lambda_{m2}}{4} + \frac{65\lambda_{m1}}{2} \right) \delta_{N-1}^{n+1} + \\ & \left(\lambda_{m4} - \frac{33\lambda_{m2}}{8} + \frac{165\lambda_{m1}}{4} \right) \delta_N^{n+1} = \lambda_{m6} \end{aligned}$$

formunda yazılır. Sınır şartları uygulandıktan sonra düzenlenen (2.24) denklem sistemi, katsayılarda bulunan $(\delta_m^{n+1})^p$ teriminden dolayı kapalı bir sistem olduğundan, sisteminin çözülebilmesi için her bir zaman adımında Metot 1 de yapılan iç iterasyon işlemleri kullanılacaktır. Böylece her bir zaman adımında δ_m^{n+1} terimlerine göre açık bir denklem sistemine ulaşılır ve sistem 5'li Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

İkinci metot için başlangıç durumu ve sayısal hesaplamalar

İlk zaman adımında ($t = 0$ anında), (1.21) başlangıç şartı yardımıyla $\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0$ bilinmeyenleri bulunur. Bu değerler (2.20-2.23) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0$$

çözümleri bulunur.

$$\delta_{-2}^1, \delta_{-1}^1, \delta_0^1, \delta_1^1, \dots, \delta_N^1, \delta_{N+1}^1, \delta_{N+2}^1$$

bilinmeyenlerini hesaplamak için (2.24) denklem sisteminde $n = 0$, $\theta_1 = 1$ ve $\theta_2 = 0$ alınarak kapalı çözüm araştırılırsa sistemin sağ tarafındaki değerler bilindiğinden (2.24) denklem sistemi 5'li Thomas algoritması yardımıyla çözümlenerek öncelikle $\delta_0^1, \delta_1^1, \dots, \delta_N^1$ değerleri ve bulunan değerler (2.20-2.23) eşitliklerinde kullanıldığında istenilen bilinmeyenler elde edilir.

$$\delta_{-2}^2, \delta_{-1}^2, \delta_0^2, \dots, \delta_N^2, \delta_{N+1}^2, \delta_{N+2}^2$$

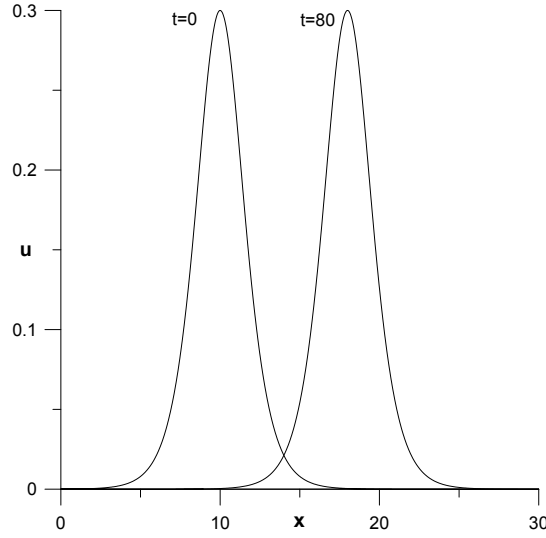
bilinmeyenlerini hesaplamak için (2.24) denklem sisteminde $n = 1$, $\theta_1 = 1$ ve $\theta_2 = -\frac{1}{2}$ alınırsa sistemin sağ tarafındaki değerler bilindiğinden (2.24) sistemi 5'li Thomas algoritması yardımıyla kolaylıkla çözümlenir. Böylece $\delta_0^2, \delta_1^2, \dots, \delta_N^2$ değerleri hesaplanmış olur. Sınır şartlarından bulunan (2.20-2.23) eşitliklerinin kullanılmasıyla da istenilen değerlere ulaşılabilir. Bundan sonraki tüm zaman adımları için n hesaplanacak zaman adımı olmak üzere $\delta_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \dots, \delta_{N+2}^{n+1}$ bilinmeyenleri hesaplanırken önceki iki zaman adımında bulunan bilinmeyenler kullanılır.

2.3 Metotların EW Denkleminin Sayısal Çözümüne Uygulanması

$u_t + \alpha_1 u_x + \alpha_2 u^p u_x - \alpha_3 u_{xxt} = 0$ denkleminde $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $p = 1$ ve $\alpha_3 = \mu$ alındığında EW denklemi elde edilir.

2.3.1 Solitary dalga oluşumu

EW dekleminizde $v = c$ hızı ile sağa doğru hareketini $0 \leq x \leq 30$ tanım aralığı ve $\mu = 1$, $x_0 = 10$ alınarak $3c$ genlikli solitary dalgasının $0 \leq t \leq 80$ zaman aralığında çalışılmıştır. (1.23) analitik çözümü kullanarak $c = 0.1$ seçimi ile $t = 0$ ve $t = 80$ anındaki dalgaların durumu aşağıdaki Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Dalga $c = 0.1$ birim hız ile ilerlemekte olduğundan 80 birim zaman sonra solitary dalgası 8 birim yol alabilecektir. Bu yüzden $t = 80$ anında solitary dalgasının tepe noktası aşağıda da görüldüğü gibi $x_0 + 80c = 18$ konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.1: $t = 0$ ve $t = 80$ anındaki dalgaların durumu

Program $t = 80$ anına kadar $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.1$ değerleri seçilerek çalıştırılmış ve daha önce yapılan çalışmaların sonuçları ile birlikte, seçilen zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri iki metot içinde hesaplanmış olarak Tablo 2.1’de verilmiştir. Seçilen değerler için korunum sabitlerinin analitik değerleri (1.26) eşitliklerinden

$$C_1 = \frac{6c}{k} = 1.2$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} = 0.288$$

$$C_3 = \frac{144c^3}{5k} = 0.0576$$

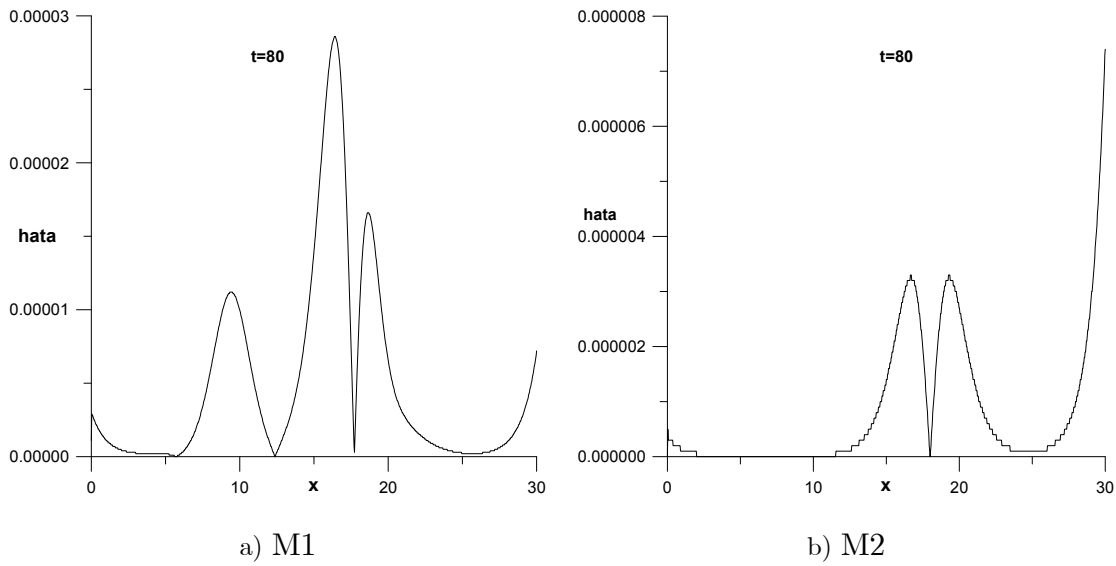
bulunur. Aşağıdaki tabloya bakıldığında, Metot 2’nin (M2) hata normlarının Metot 1’e (M1) göre daha iyi sonuçları olduğu görülebilir. M1 ve M2 içinde korunum sabitleri analitik çözümler ile uyumludur. Metotlar, önceki yıllarda yapılan çalışmaların sonuçları ile kıyaslandığında, yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

Tablo 2.1: $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.1$ ve $0 \leq x \leq 30$ için korunum sabitleri

ve hata normları							
M1							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3		
0	0	0	1.1999430	0.2879998	0.0576000		
20	0.01953	0.01517	1.1999840	0.2879998	0.0576000		
40	0.02710	0.01805	1.1999960	0.2879998	0.0576000		
60	0.02835	0.01674	1.199990	0.2879997	0.0575999		
80	0.04546	0.02858	1.1999860	0.2879997	0.0575999		
M2							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3		
0	0	0	1.1999455	0.2880000	0.0576000		
20	0.00512	0.00737	1.1999855	0.2880000	0.0576000		
40	0.00713	0.00375	1.1999981	0.2880000	0.0576000		
60	0.01382	0.00727	1.1999981	0.2880000	0.0576000		
80	0.00818	0.00737	1.1999855	0.2880000	0.0576000		
Diğer çalışmalar ($t = 80$)							
	h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
Gardner et.al.,1997)	0.03	0.03	3.849	2.646	1.1910	0.2855	0.0558
(Zaki, 2000a)	0.03	0.03	7.444	4.373	1.1964	0.2858	0.0569
(Irk et.al., 2003)	0.03	0.05	0.062	0.053	1.20004	0.28800	0.05760
(Saka et.al.,2003)	0.03	0.05	0.049	0.0336	1.99999	0.28800	0.05756
(Esen, 2005)	0.03	0.05	0.029	0.021	1.19995	0.28798	0.05759
(Saka, 2006)	0.03	0.05	0.003	0.002	1.19999	0.28801	0.05760
(Dağ et.al., 2007)	0.03	0.05	0.040	0.024	1.19998	0.2880	0.05799

Program, $0 \leq x \leq 30$ konum aralığında $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.1$ seçimleri ile $t = 80$ zamanına kadar çalıştırıldığında, analitik ve sayısal çözümleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafikler Şekil 2.2'de gösterilmiştir. M1 için

çizilen grafik incelendiğinde maksimum hatanın $x = 18$ noktası civarında, M2’de ise hatanın konum aralığının sonunda olduğu görülebilir. M2’deki hatanın konum aralığının sonunda olmasına rağmen M1’deki hataya göre daha iyi sonuç verdiği söylenilebilir. M2’de hatanın konum aralığının uç noktalarında görünmesinin sebebi dalganın yeterince sifıra yakın değerleri alacak şekilde aralığının seçilmemesinden kaynaklanmaktadır. Örnek olarak solitary dalgası $t = 0$ anında konum aralığının başında $u(0, 0) = 0.000054$ ve $t = 80$ anında konum aralığının sonunda $u(30, 80) = 0.0000074$ değerlerini almaktadır. Sınır şartlarındaki kabullerden dolayı metotlar ne kadar iyi olursa olsun en az bu kadar hatanın olması kaçınılmazdır.



Şekil 2.2 : $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.1$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 80$ zamanındaki

$$\text{Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

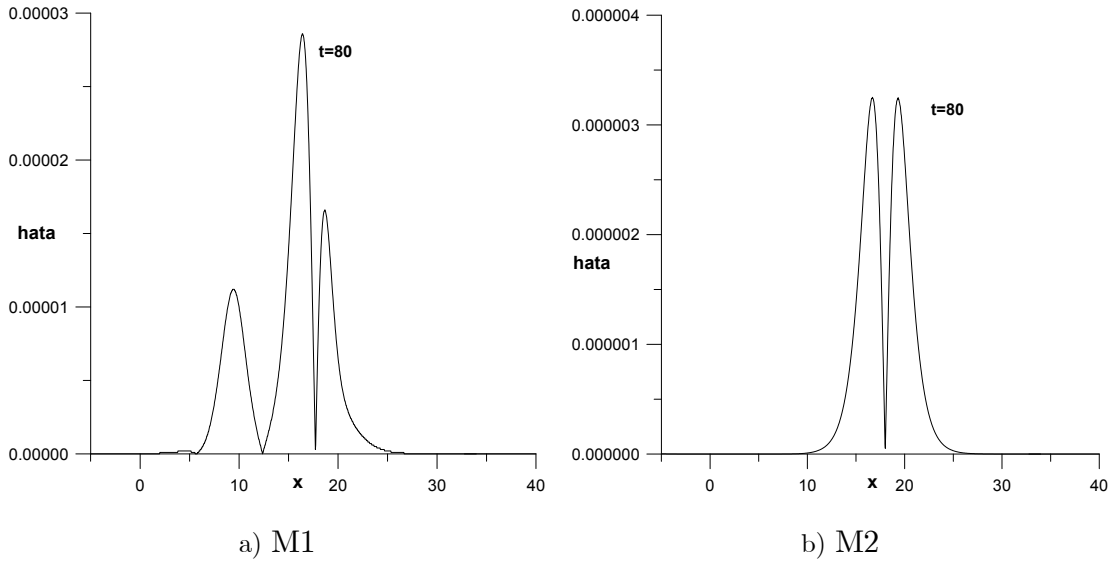
Bu sefer programı $-5 \leq x \leq 40$ konum aralığında çalıştırılırsa Tablo 2.2’den de anlaşılacağı gibi sonuçların daha iyi olduğu görülebilir. Özellikle M2’nin iyi sonuçlar verdiği söylenebilir.

Tablo 2.2: $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.1$ ve $-5 \leq x \leq 40$ için korunum sabitleri

ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	1.1999990	0.2879998	0.0576000
20	0.01929	0.01518	1.1999980	0.2879997	0.0576000
40	0.02706	0.01806	1.1999980	0.2880001	0.0576000
60	0.02826	0.01673	1.1999990	0.2879999	0.0576000
80	0.04511	0.02856	1.1999990	0.2879997	0.0576000
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	1.1999997	0.2880000	0.0576000
20	0.00042	0.00023	1.1999999	0.2880000	0.0576000
40	0.00712	0.00376	1.2000000	0.2880000	0.0576000
60	0.01381	0.00729	1.2000000	0.2880000	0.0576000
80	0.00615	0.00325	1.2000000	0.2880000	0.0576000

Şekil 2.3'te $t = 80$ ve $-5 \leq x \leq 40$ konum aralığında çizilen hata grafikleri verilmiştir. Grafikten de anlaşılacağı gibi konum aralığının genişletilmesi maksimum hatanın her iki program içinde dalganın tepe noktasına karşılık geldiği $x = 18$ civarındadır. Maksimum hatanın, konum aralığının uç noktalarında gelmemiş olmasının sebebi genişlettiğimiz sınır şartlarının metotlara iyi uygulanmasının sonucudur. Şekillerden de görüldüğü gibi aralığın uç noktalarında $u(a, t) = u(b, t) \approx 0$ olacak şekilde aralık genişletildiğinde maksimum hatalar artık uç noktalarda gelmemektedir.



Şekil 2.3 : $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.1$ ve $-5 \leq x \leq 40$ için $t = 80$ zamanındaki

$$\text{Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

İkinci test problemi olarak solitary dalgasının oluşması için dalganın hızı yani c değeri değiştirilmiştir. Program $t = 80$ anına kadar $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.03$ değerleri seçilerek çalıştırılmış ve seçilen zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri iki metot içinde hesaplanmış olarak Tablo 2.3'te verilmiştir. Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$C_1 = \frac{6c}{k} = 0.36$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} = 0.02592$$

$$C_3 = \frac{144c^3}{5k} = 0.00156$$

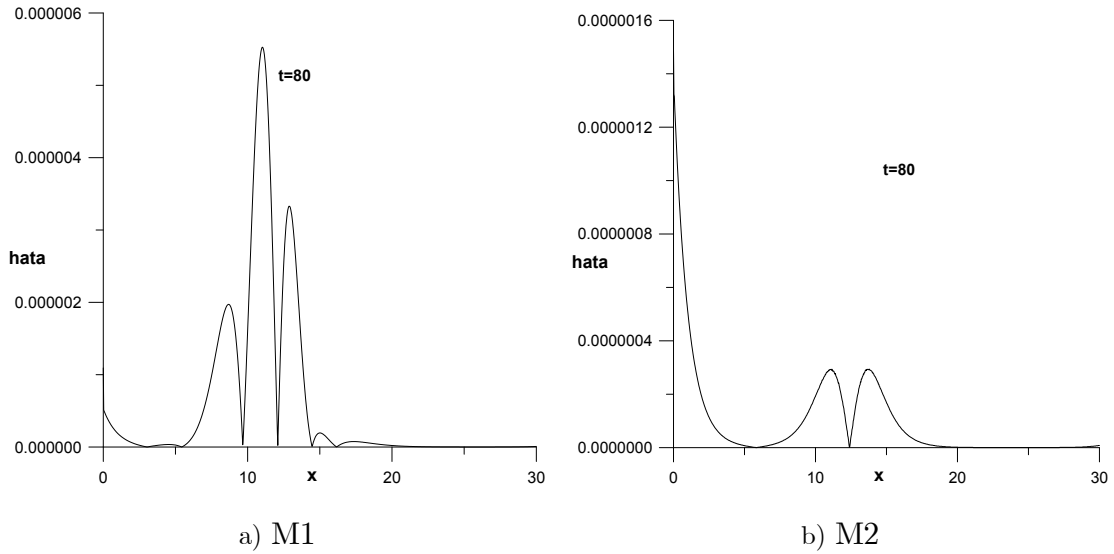
olarak bulunabilir. Tablo 2.3 incelendiğinde M2'nin M1'e göre hata normlarının daha iyi sonuçlar verdiği görülür. Her iki metot içinde korunum sabitleri analitik çözümler ile uyumludur.

Tablo 2.3: $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.03$ ve $0 \leq x \leq 30$ için korunum sabitleri

ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	0.3599834	0.0259200	0.0015552
20	0.00592	0.00836	0.3599829	0.0259200	0.0015552
40	0.00440	0.00443	0.3599909	0.0259200	0.0015552
60	0.00489	0.00360	0.3599953	0.0259200	0.0015552
80	0.00715	0.00553	0.3599976	0.0259200	0.0015552
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	0.3599836	0.0259200	0.0015552
20	0.00645	0.00897	0.3599820	0.0259200	0.0015552
40	0.00356	0.00492	0.3599902	0.0259200	0.0015552
60	0.00226	0.00270	0.3599947	0.0259200	0.0015552
80	0.00114	0.00148	0.3599971	0.0259200	0.0015552

Programı, $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.03$ seçimleri ile $0 \leq x \leq 30$ konum aralığında ve $t = 80$ anına kadar çalıştırıldığında, analitik ve sayısal çözümleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafikler Şekil 2.4'te verilmiştir. M1 için çizilen grafik incelendiğinde maksimum hatanın $x = 12$ noktası civarında olduğu görülmektedir. Bunun sebebi dalganın 80 birim sonra tepe noktasının gideceği yolun $80c = 2.4$ birim olmasıdır. M2'de ise hatanın konum aralığının başında olduğu görülebilir. M2'deki hatanın konum aralığının başında görünmesinin sebebi dalganın yeterince sıfıra yakın değerleri alacak şekilde aralığının seçilmemesinden kaynaklanmaktadır. Solitary dalgası $t = 0$ anında konum aralığının başında $u(0,0) = 0.0000163$ değerini almaktadır.



Şekil 2.4 : $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.03$ ve $0 \leq x \leq 30$ için $t = 80$ zamanındaki

$$\text{Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

Program konum aralığı $-5 \leq x \leq 40$ olarak genişletilerek tekrar çalıştırıldığında $0 \leq x \leq 30$ konum aralığına göre sonuçların daha iyi olduğu Tablo 2.4'ten görülebilir. Tablo 2.4 incelendiğinde M2 metodu kullanıldığında daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

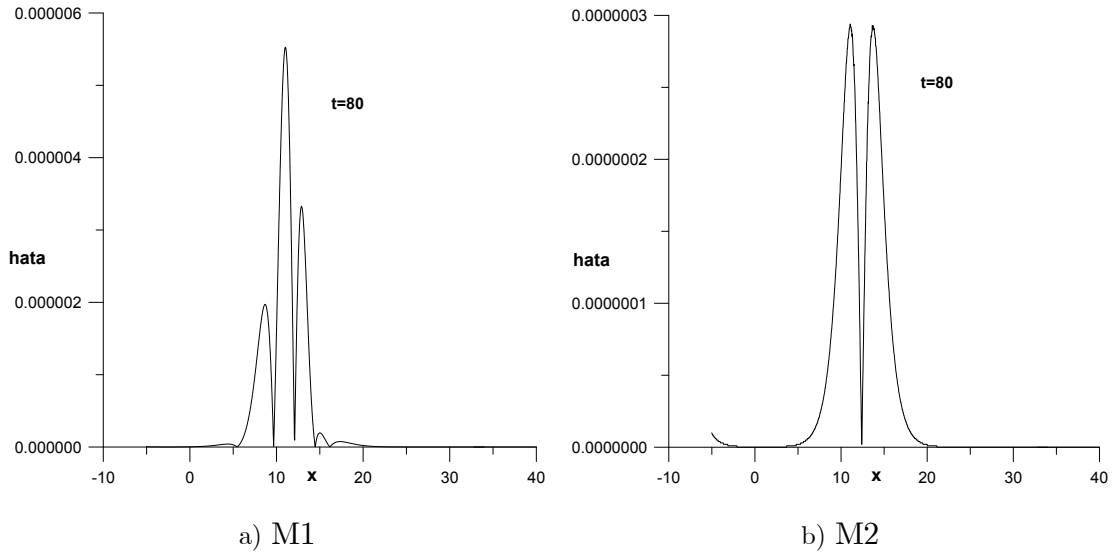
Açıklamak gerekirse; M2 için $t = 80$ anında $0 \leq x \leq 30$ konum aralığında $L_{\infty} \times 10^3 = 0.01486$ değeri bulunmuşken, konum aralığı $-5 \leq x \leq 40$ olacak şekilde genişletildiğinde $L_{\infty} \times 10^3 = 0.00029$ değeri bulunmuştur. Dolayısıyla M2'de konum aralığı genişletildiğinde hatanın daha da azaldığı görülmektedir. M1'de ise konum aralığının genişletilmesi, büyük bir iyileşme sağlamayacaktır.

Tablo 2.4: $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.03$ ve $-5 \leq x \leq 40$ için korunum sabitleri

ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	0.3599995	0.0259200	0.0015552
20	0.00189	0.00146	0.3599997	0.0259200	0.0015552
40	0.00339	0.00264	0.3599996	0.0259200	0.0015552
60	0.00473	0.00360	0.3599997	0.0259200	0.0015552
80	0.00713	0.00553	0.3599997	0.0259200	0.0015552
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	0.3599999	0.0259200	0.0015552
20	0.00006	0.00006	0.3599999	0.0259200	0.0015552
40	0.00064	0.00034	0.3599999	0.0259200	0.0015552
60	0.00124	0.00066	0.3600000	0.0259200	0.0015552
80	0.00055	0.00029	0.3600000	0.0259200	0.0015552

Her iki metot için programlar $5 \leq x \leq 40$ konum aralığında çalıştırılarak $t = 80$ anındaki sayısal çözümle tam çözüm arasındaki farkın mutlak değeri yeni mutlak hatayı veren grafikler Şekil 2.5'te verilmiştir. Bir önceki Şekil 2.4'teki durumun aksine her iki metot içinde maksimum hata, konum aralığının orta noktaları civarında olduğu görülmektedir. Hatanın konum aralığının orta noktalarında, maksimum çıkması beklenen bir durumdur. Bunun sebebi dalga zamanla ilerlerken dalganın en yüksek değeri aldığı yerlerde maksimum hata gözlenmelidir. Aşağıdaki grafikler incelendiğinde M2 için maksimum hatanın (yaklaşık olarak 0.0000003) M1 için maksimum hatadan (yaklaşık olarak 0.000006) daha düşük olduğuda söylenebilir. Aslında bu hata değerleride tam olarak Tablo 2.4'te $t = 80$ anında verilen L_∞ hatasına eşittir.



Şekil 2.5 : $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $c = 0.03$ ve $-5 \leq x \leq 40$ için $t = 80$ zamanındaki

$$\text{Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

Tablo 2.5'te $c_1 = 0.1, 0.03$ ve farklı konum-zaman artımı değerleri için hesaplanan hata normlarının değerleri verilmiştir. Konum ve zaman artım değerleri büyüdükçe hata normlarının değerlerinde her iki metot için arttığı görülebilir. M1 için tabloda hata olarak gösterilmiş olan değerler, hata normlarının değerlerinin çok büyük olduğunu göstermektedir. M2 için ise böyle bir durum söz konusu değildir. Büyük zaman ve konum artımları için metotların iyi sonuçlar vermesi istenilen bir durumdur. Aşağıdaki sonuçlar incelendiğinde M2'nin M1'e göre daha iyi olduğu söylenir.

Tablo 2.5: Farklı konum ve zaman artımları için $t = 80$ zamanındaki

hata normları

 $c = 0.1, 0 \leq x \leq 30$

		M1		M2	
h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.025	0.08033	0.04690	0.05674	0.02977
0.05	0.05	0.11657	0.07381	0.00826	0.00737
0.125	0.1	0.68718	0.43510	0.01521	0.00748
0.25	0.2	2.80660	1.76125	0.00857	0.00737
0.5	0.4	11.47883	7.12566	0.13110	0.08589
1.0	0.8	49.70960	29.91049	4.65822	2.66129
2.0	0.8	236.27296	114.00000	134.86362	74.35630

 $c = 0.03, -5 \leq x \leq 40$

		M1		M2	
h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.025	0.00880	0.00631	0.00518	0.00268
0.05	0.05	0.01918	0.01482	0.00112	0.00148
0.125	0.1	0.11705	0.09023	0.00153	0.00148
0.25	0.2	0.47293	0.36445	0.00159	0.00148
0.5	0.4	1.91802	1.46857	0.02864	0.02301
1.0	0.8	8.00007	5.80080	0.88842	0.71898
3.0	0.8	hata	hata	43.01404	18.77288

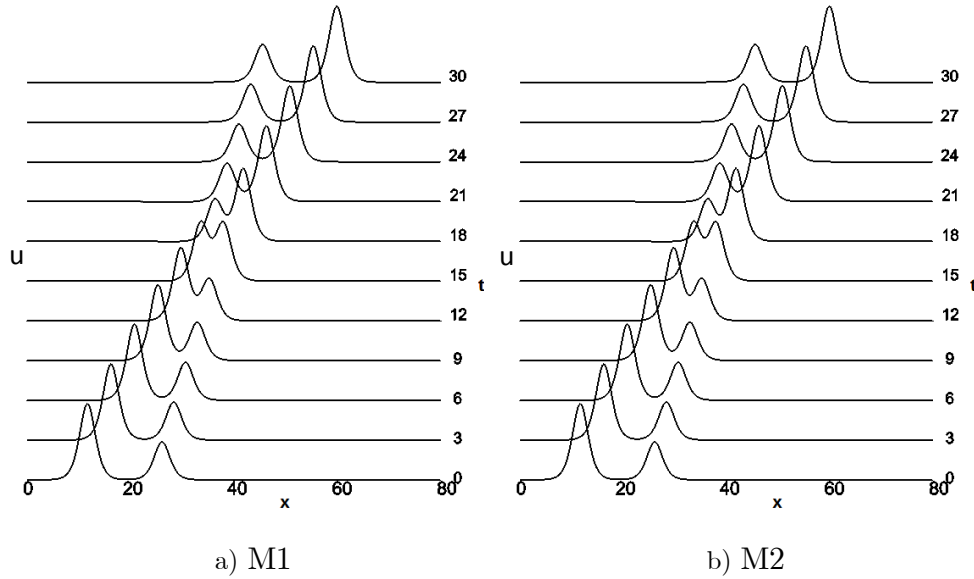
2.3.2 İki solitary dalgasının çarpışması

Birinci bölümde verilen iki solitary dalgasının çarpışma probleminin başlangıç şartında, yani (1.27) eşitliğinde $x_1 = 10$, $x_2 = 25$, $k = 0.5$, $c_1 = 1.5$ ve $c_2 = 0.75$ seçimleri yapıldığında

$$u(x, 0) = 4.5\text{sech}^2(0.5[x - 10 - 1.5]) + 2.25\text{sech}^2(0.5[x - 25 - 0.75]) \quad (2.25)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır.

(2.25) eşitliği, sırası ile genlikleri 4.5, 2.25 olan iki solitary dalgasını vermektedir. Program $t = 30$ zamanına kadar $h = \Delta t = 0.1$ ve $[0, 80]$ konum aralığı seçimiyle çalıştırıldığında elde edilen sonuçlar, üç boyutlu olarak her iki metot içinde Şekil 2.6'da verilmiştir. Şekilden de anlaşılacağı gibi her iki metot içinde çarpışmanın yaklaşık aynı zamanlarda başladığı ve bittiği görülmektedir. Ek olarak solitary dalgaların özelliklerinden biri olan dalgaların çarpıştıktan sonra şekillerini kaybetmeden yollarına devam etme durumları kolaylıkla gözlenebilmektedir.



Şekil 2.6 : İki solitary dalgasının çarpışması

(2.25) için korunum sabitlerinin tam değerleri (1.28) eşitliklerinden aşağıdaki şekilde bulunur.

$$C_1 = 6 \left(\frac{c_1 + c_2}{k} \right) = 12(1.5 + 0.75) = 27,$$

$$C_2 = \left(\frac{12}{k} + \frac{48k\mu}{5} \right) (c_1^2 + c_2^2) = 28.8(1.5^2 + 0.75^2) = 81,$$

$$C_3 = \frac{144}{5k} (c_1^3 + c_2^3) = 57.6(1.5^3 + 0.75^3) = 218.7$$

Aşağıdaki Tablo 2.6 da korunum sabitleri için sayısal değerler gösterilmiştir. Sayısal yöntemlerden elde edilen sonuçlar ile analitik değerlerin sonuçlarının uyumlu olduğu

görülebilmektedir. Korunum sabitlerindeki değişimlerin küçük olması istenirse, zaman ve konum artım değerleri daha da küçük seçilmelidir.

Tablo 2.6: İki solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

Zaman	M1			M2		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
0	26.9998100	81.0004000	218.7028000	26.9998175	81.0004196	218.7028325
6	27.0000100	81.0469400	218.9106000	26.9999930	81.0471749	218.9115620
12	26.9999900	81.0926600	219.1107000	26.9999838	81.0929302	219.1123652
18	27.0000100	81.1141100	219.1991000	26.9999804	81.1141651	219.2010817
24	26.9999700	81.1586500	219.3966000	26.9999715	81.1592532	219.3995046
30	26.9999800	81.2061600	219.6092000	26.9999605	81.2069883	219.6129129

2.4 Metotların RLW Denklemine Sayısal Çözümüne Uygulanması

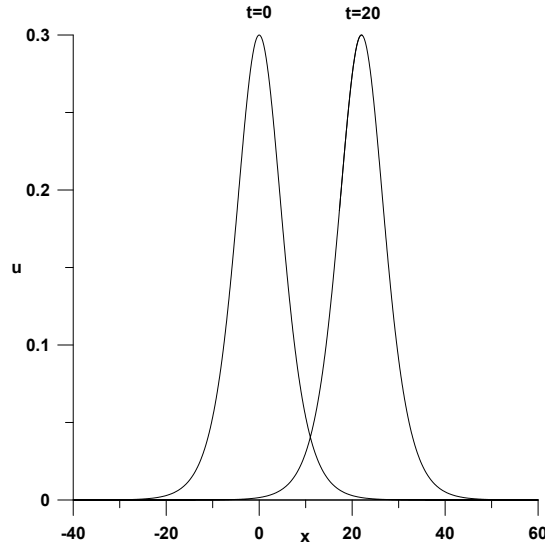
Genel denkleminiz olan (1.19) denkleminde $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \varepsilon$, $p = 1$ ve $\alpha_3 = \mu$ alındığında RLW denklemi elde edilir.

2.4.1 Solitary dalga oluşumu

RLW denkleminin (1.30) solitary dalga çözümü $-40 \leq x \leq 60$ tanım aralığında $3c$ genlikli, $v = 1 + \varepsilon c$ dalga hızı, $\varepsilon = \mu = 1$, $x_0 = 0$ olmak üzere $x_0 = 0$ noktası tepe noktası olacak şekilde yerleştirilmiş ve $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığında çalışılmıştır. Dalganın, $c = 0.1$ seçimiyle $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki durumu Şekil 2.7'de gösterilmiştir. Aşağıdaki şekilden de anlaşıldığı gibi $t = 20$ anında dalganın tepe noktası

$$x_0 + vt = 0 + [1 + 1.(0.1)] 20 = 22$$

konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.7: $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu

Bu test probleminde konum artımı $h = 0.125$, zaman artımı $\Delta t = 0.1$ ve genlik $3c = 0.3$ olarak alınmıştır. Alınan parametrelere göre 0.3 genlikli tek dalga çözümü için korunum sabitlerinin analitik değerleri (1.33) eşitliklerinden

$$C_1 = \frac{6c}{k} \simeq 3.97995,$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} \simeq 0.81046,$$

$$C_3 = \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k} \simeq 2.57901$$

olarak hesaplanır.

Program $t = 20$ oluncaya kadar çalıştırılmış ve $t = 20$ olduğu ana kadarki çeşitli zamanlardaki L_2 , L_∞ hata normlarıyla beraber C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitleri Tablo 2.7’de M1 ve M2 için verilmiştir. Ayrıca aynı genlik değerini kullanan farklı çalışmalar sonucunda elde edilen hata normlarının değerleride aynı tabloda gösterilmiştir. Çalışma boyunca hesaplanan korunum sabitleri ile analitik sonuçların birbiri ile oldukça uyumlu oldukları görülebilir. Daha önceki yıllarda yapılan çalışmalar ile elde edilen sonuçlar kıyaslandığında önerilen metotların oldukça iyi sonuçlar verdikleri, özellikle M2’nin sonuçlarının oldukça iyi olduğu söylenir.

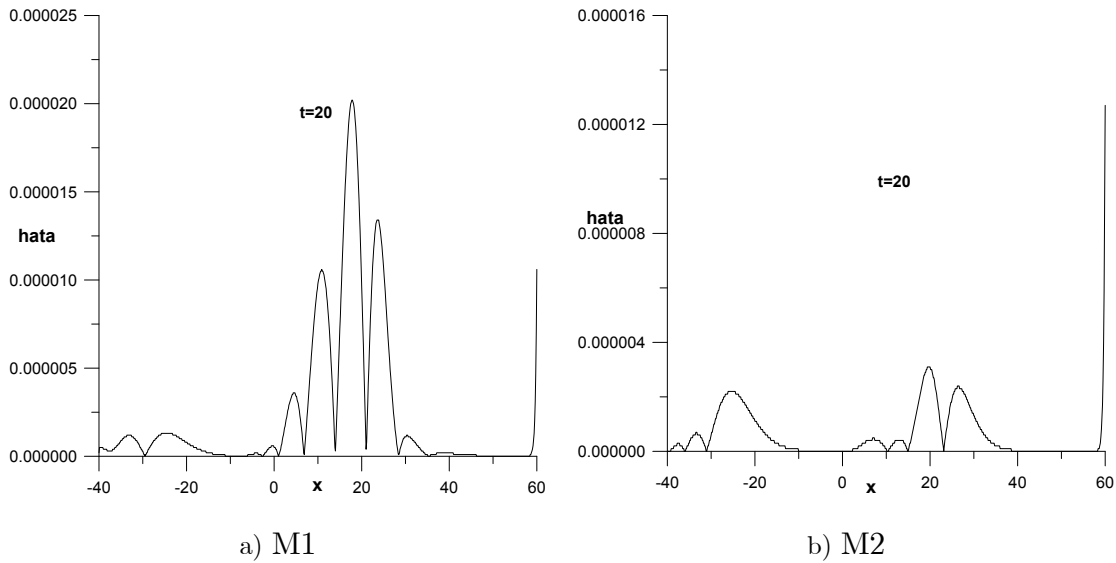
Tablo 2.7: $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için korunum sabitleri

ve hata normları

M1							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3		
0	0	0	3.9799250	0.8104621	2.5790070		
4	0.01285	0.00568	3.9799330	0.8104629	2.5790080		
8	0.02278	0.01016	3.9799320	0.8104632	2.5790110		
12	0.03260	0.01424	3.9799380	0.8104640	2.5790130		
16	0.04131	0.01750	3.9799320	0.8104642	2.5790130		
20	0.04921	0.02020	3.9799000	0.8104646	2.5790160		
M2							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3		
0	0	0	3.9799267	0.8104625	2.5790075		
4	0.00547	0.00284	3.9799299	0.8104630	2.5790092		
8	0.00630	0.00261	3.9799284	0.8104635	2.5790109		
12	0.00707	0.00244	3.9799259	0.8104641	2.5790126		
16	0.00848	0.00337	3.9798834	0.8104651	2.5790160		
20	0.01171	0.01268	3.9798834	0.8104651	2.5790160		
Diğer çalışmalar ($t = 20$)							
	h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
(Dağ and Özer, 2001)	0.125	0.1	0.018	1.566	3.96160	0.80419	2.55829
(Dağ et.al., 2004)	0.125	0.1	0.3	0.116	3.97988	0.81028	2.57839
(Irk et.al., 2005)	0.125	0.1	0.301	0.114	3.97996	0.81027	2.57839
(Raslan, 2005b)	0.1	0.1	0.532	0.227	3.97804	0.80972	2.57657
(Kutluay and Esen, 2006)	0.1	0.1	0.55	0.21	3.97997	0.81046	2.57901

Şekil 2.8 de $t = 20$ anındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değerini temsil eden grafik çizilmiştir. Grafik incelendiğinde M1’de maksimum hatanın dalganın ortalarında olduğu, M2’de ise hatanın konum aralığının so-

nunda olduğu görülebilir. M2'deki hatanın konum aralığının sonunda olmasına rağmen M1'deki hataya göre daha iyi sonuç verdiği ise bir önceki tablodan söylenebilir. M2'de hatanın konum aralığının uç noktalarında görülmesinin sebebi dalganın yeterince sifıra yakın değerleri alacak şekilde aralığının seçilmemesinden kaynaklanmaktadır. Sınır şartından gelen hatayı dahada azaltabilmek için konum aralığı genişletilebilir.



Şekil 2.8 : $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki

$$\text{Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

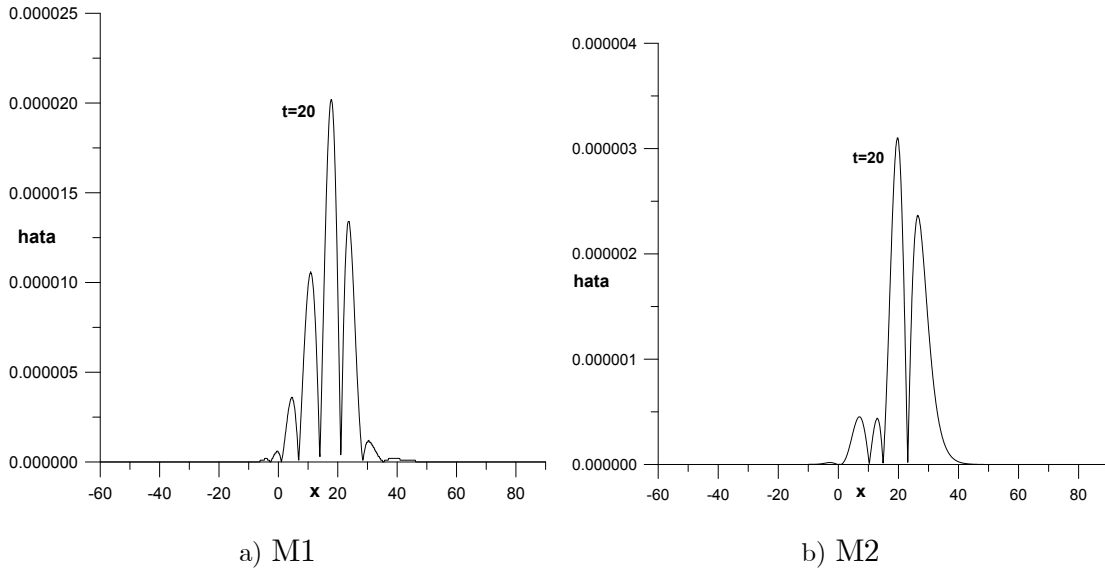
Konum aralığı $-60 \leq x \leq 90$ aralığına genişletirilerek programlar tekrar çalıştırılmıştır. Programlar çalıştırdıktan sonra elde edilen hata normları ve korunum sabitlerinin çeşitli zamanlardaki değerleri Tablo 2.8'de verilmiştir. Tablo 2.7 ile Tablo 2.8 karşılaştırıldığında konum aralığı genişletildikten sonra M2'nin çok daha iyi sonuçlar verdiği söylenilebilir. M1'de çok fazla değişiklik olmamasının sebebi ise maksimum hatanın zaten konum aralığının orta noktalarında gelmesidir.

Tablo 2.8: $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1$ ve $-60 \leq x \leq 90$ için korunum sabitleri

ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	3.9799480	0.8104621	2.5790070
4	0.01232	0.00568	3.9799490	0.8104629	2.5790080
8	0.02247	0.01016	3.9799450	0.8104632	2.5790110
12	0.03237	0.01424	3.9799490	0.8104640	2.5790130
16	0.04109	0.01750	3.9799490	0.8104642	2.5790130
20	0.04877	0.02020	3.9799480	0.8104646	2.5790160
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	3.9799497	0.8104625	2.5790075
4	0.00150	0.00069	3.9799497	0.8104630	2.5790092
8	0.00223	0.00102	3.9799497	0.8104635	2.5790109
12	0.00382	0.00168	3.9799497	0.8104641	2.5790126
16	0.00583	0.00239	3.9799497	0.8104646	2.5790143
20	0.00792	0.00310	3.9799497	0.8104651	2.5790160

Şekil 2.9'da $t = 20$ anında $-60 \leq x \leq 90$ konum aralığında çizilen hata grafikleri gösterilmektedir. Konum aralığı genişletildikten sonra çizilen bu grafiklerden kolaylıkla görülebileceği gibi artık maksimum hatalar konum aralığının orta noktalarında olmaktadır. Ayrıca M2 için hatanın oldukça küçük olduğunda grafikten kolaylıkla söylenilebilir. Grafikteki maksimum hataların Tablo 2.8'de $t = 20$ anında verilen L_∞ hatası kadar olduğunda kolaylıkla söylenilebilir.



Şekil 2.9 : $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.1$ ve $-60 \leq x \leq 90$ için $t = 20$ zamanındaki

$$Hata = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

Solitary dalgasının oluşması test probleminde ikinci olarak dalganın hızı olan c değeri değiştirilerek problem incelenmiştir. Bu durumda programlar $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.03$ seçimleriyle $t = 20$ anına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri her iki metot içinde Tablo 2.9'da verilmiştir. Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$C_1 = \frac{6c}{k} \simeq 2.10941,$$

$$C_2 = \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} \simeq 0.12730,$$

$$C_3 = \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k} \simeq 0.38881$$

olarak bulunur. Tablo 2.9 incelendiğinde M1'in M2'ye göre hata normları incelendiğinde daha iyi sonuçlar verdiği görülebilir. M2'nin M1'e göre daha kötü sonuç vermesinin sebebi M2'de ilave olarak türev sınır şartlarının kullanılmasıdır. c yani dalganın hızı azaltıldığında dalganın genliğide hızına bağlı olduğundan azalacaktır. Dalganın genliği azalınca dalganın genişliği artacağından uç noktalarda dalganın aldığı değerler büyüyecektir. Dolayısıyla sınır şartlarına karşı hassas olan M2'de

biraz daha fazla bozulma olacaktır. Bununla birlikte her iki metot içinde korunum sabitleri analitik çözümler ile uyumludur. Fakat M1 için sonuçlar analitik değerlere daha yakındır.

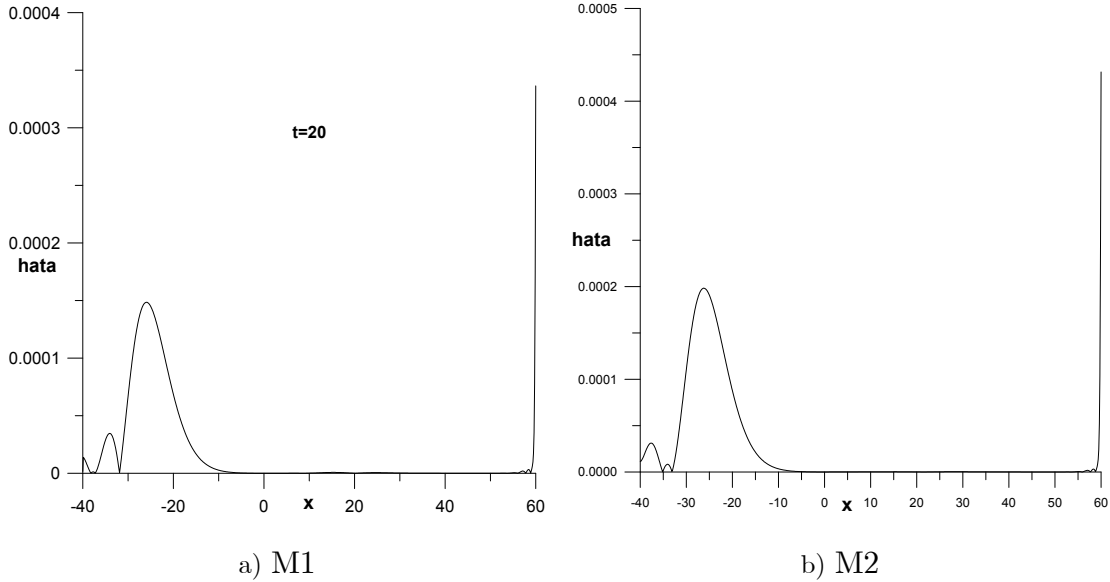
Tablo 2.9: $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.03$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için korunum sabitleri

ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	2.1070460	0.1273011	0.3888044
4	0.32944	0.18159	2.1073040	0.1273011	0.3888038
8	0.39200	0.17097	2.1072820	0.1273010	0.3888038
12	0.40080	0.16224	2.1070890	0.1273011	0.3888040
16	0.40503	0.16707	2.1065920	0.1273011	0.3888042
20	0.42247	0.33643	2.1053880	0.1273009	0.3888025
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	2.1070467	0.1273013	0.3888046
4	0.41512	0.23040	2.1070889	0.1273011	0.3888041
8	0.51254	0.22140	2.1068905	0.1273011	0.3888041
12	0.53650	0.21284	2.1065464	0.1273011	0.3888040
16	0.54482	0.21387	2.1059232	0.1273012	0.3888037
20	0.56836	0.43151	2.1045962	0.1273013	0.3888023

$h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.03$ seçimleri ile $-40 \leq x \leq 60$ konum aralığında $t = 20$ zamanına kadar çalıştırılan programların analitik ve sayısal çözümleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafikler Şekil 2.10'da verilmiştir. M1 ve M2 içinde maksimum hatanın konum aralığının sonunda olduğu görülebilir. Az önce bahsedildiği gibi hatanın konum aralığının sonunda görülmesinin sebebi dalganın yeterince sifra yakın değerleri alacak şekilde aralığının seçilmemesinden kaynaklanmaktadır. Örnek olarak solitary dalgası $t = 20$ anında konum aralığının sonunda

$u(60, 20) = 0.00001268$ değerini almaktadır. Fakat yaklaşık çözüm aranırken bu değer sınır şartından dolayı sıfır kabul edilmiştir.



Şekil 2.10 : $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.03$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 20$ zamanındaki

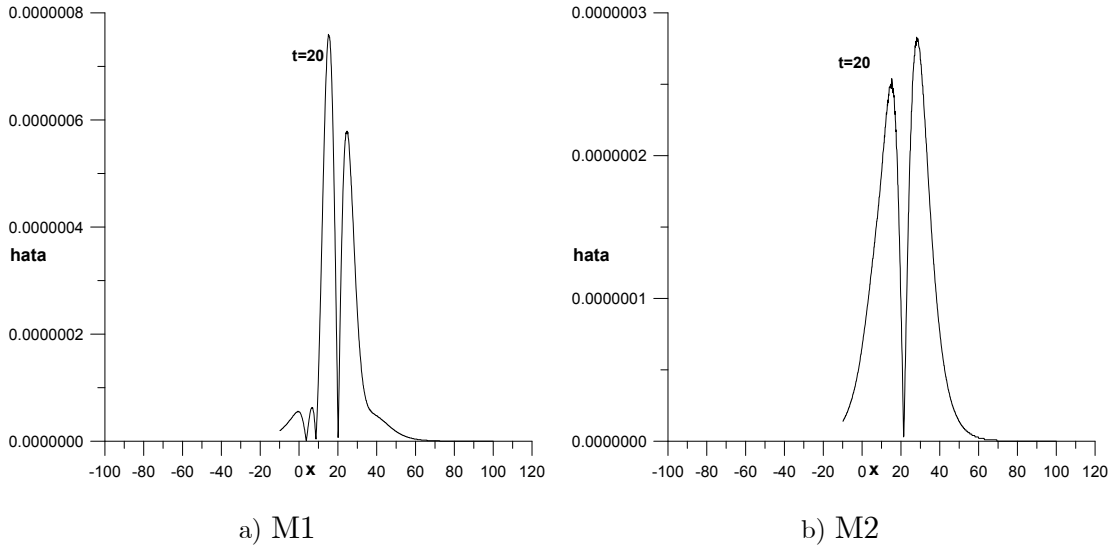
$$\text{Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

Konum aralığını $-100 \leq x \leq 120$ aralığına genişleterek her iki program tekrar çalıştırıldığında $-40 \leq x \leq 60$ konum aralığına göre sonuçların daha iyi olduğu Tablo 2.10'dan görülebilir. Artık M2 çok daha iyi sonuçlar vermektedir. $t = 20$ anında L_∞ hatası virgülden sonra 6 sıfırdan sonra değer almaktadır ki bu değer neredeyse tam sonuç demektir. Ayrıca konum aralığı genişletildikten sonra korunum sabitleride analitik değerlerin aldığı değerleri almaktadır. Dolayısıyla konum aralığının genişletilmesi sonuçları oldukça iyi hale getirmiştir.

Tablo 2.10: $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.03$ ve $-100 \leq x \leq 120$ için korunum sabitleri ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	2.1094020	0.1273015	0.3888057
4	0.00035	0.00012	2.1094030	0.1273016	0.3888055
8	0.00062	0.00021	2.1094060	0.1273016	0.3888054
12	0.00109	0.00039	2.1094040	0.1273016	0.3888057
16	0.00165	0.00058	2.1094020	0.1273015	0.3888060
20	0.00223	0.00076	2.1094050	0.1273017	0.3888057
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	2.1094074	0.1273017	0.3888060
4	0.00006	0.00002	2.1094074	0.1273017	0.3888060
8	0.00013	0.00004	2.1094074	0.1273017	0.3888060
12	0.00034	0.00009	2.1094074	0.1273017	0.3888060
16	0.00076	0.00019	2.1094074	0.1273017	0.3888061
20	0.00118	0.00028	2.1094074	0.1273017	0.3888061

Hata grafikleri yeni konum aralığı için çizildiğinde, maksimum hatanın artık konum aralığının uç noktalarında değilde orta kısımlarda ve oldukça küçük değerlerde olduğu kolaylıkla görülebilir. Her iki metot için oluşan maksimum hatanın Tablo 2.10 da verilen L_∞ hatası kadar olduğuda görülebilir.



Şekil 2.11 : $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $c = 0.03$ ve $-100 \leq x \leq 120$ için $t = 20$ zamanındaki

$$\text{Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

$c_1 = 0.1, 0.03$ ve farklı konum-zaman artımı değerleri için hesaplanan hata normlarının değerleri Tablo 2.11’de verilmiştir. Konum ve zaman artım değerleri büyüdükçe hata normlarının değerlerinde her iki metot için arttığı tablodan kolaylıkla söylenilebilir. Aynı zamanda M2’nin M1’e göre daha iyi sonuçlar verdiği ve bu test problemi için M2’nin M1’e göre daha iyi olduğu söylenilebilir.

Tablo 2.11:Farklı konum ve zaman artımları için $t = 20$ zamanındaki hata normları

$$c = 0.1, -60 \leq x \leq 90$$

h	Δt	M1		M2	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.025	0.02062	0.00609	0.02148	0.00622
0.05	0.05	0.00644	0.00224	0.00250	0.00076
0.125	0.1	0.04877	0.02020	0.00792	0.00310
0.25	0.2	0.19127	0.07834	0.03865	0.01646
0.5	0.4	0.85198	0.34966	0.30783	0.13036
1.0	0.8	4.45079	1.80784	2.47032	1.04780
2.0	0.8	15.36714	5.97369	2.60436	1.07847

$$c = 0.03, -100 \leq x \leq 120$$

h	Δt	M1		M2	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.025	0.00453	0.00099	0.00454	0.00099
0.05	0.05	0.00051	0.00013	0.00054	0.00012
0.125	0.1	0.00223	0.00076	0.00118	0.00028
0.25	0.2	0.00661	0.00238	0.00158	0.00057
0.5	0.4	0.03038	0.01102	0.01232	0.00441
1.0	0.8	0.16622	0.06023	0.09907	0.03509
2.0	0.8	0.53323	0.18854	0.10078	0.03603

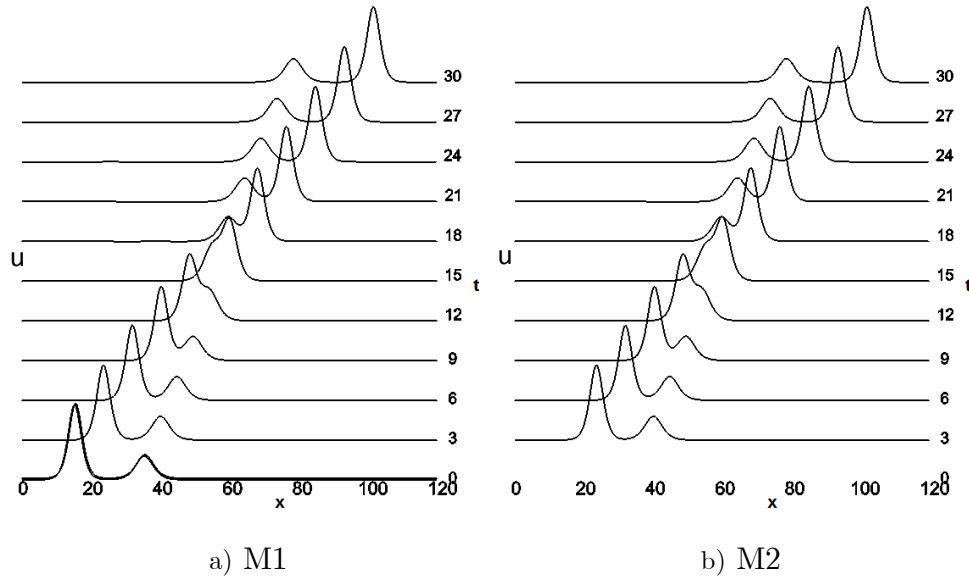
2.4.2 İki solitary dalgasının çarpışması

Birinci bölümde verilen iki solitary dalganın çarpışma problemi için başlangıç şartında yani (1.34) eşitliğinde $x_1 = 15$, $x_2 = 35$, $k_1 = 0.4$ ve $k_2 = 0.3$ seçimleri yapıldığında

$$u(x, 0) = 5.33333 \operatorname{sech}^2(0.4[x - 15]) + 1.68750 \operatorname{sech}^2(0.3[x - 35]) \quad (2.26)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır.

$h = 0.3$, $\Delta t = 0.1$ ve $[0, 120]$ konum aralığı seçimiyle program $t = 30$ zamanına kadar çalıştırılarak elde edilen sonuçlar üç boyutlu olarak her iki metot içinde Şekil 2.12'de verilmiştir. Her iki metot içinde çarpışmanın yaklaşık aynı zamanlarda gerçekleştiği ve aynı zamanlarda sona erdiği şekilden görülebilir. Çarpışma öncesi ve sonrasında solitary dalgaların şekillerinde bir bozulma olmadığı da grafikten söylenebilir.



Şekil 2.12 : İki solitary dalgasının çarpışması

Korunum sabitlerinin tam değerleri (1.35) eşitliklerinden

$$C_1 = 6 \left(\frac{a_1 k_2 + a_2 k_1}{k_1 k_2} \right) \simeq 37.91667,$$

$$C_2 = \frac{12}{k_1 k_2} (a_1^2 k_2 + a_2^2 k_1) + \frac{48\mu}{5k_2 k_1} (k_1^2 a_1^2 k_2 + k_2^2 a_2^2 k_1) \simeq 120.51861,$$

$$C_3 = \frac{36}{5k_1 k_2} (4a_1^3 k_2 + 4a_2^3 k_1 + 5a_1^2 k_2 + 5a_2^2 k_1) \simeq 744.04234$$

olarak bulunur. Korunum sabitlerinin her iki metot için yaklaşık değerleri ise Tablo 2.12'de $t = 30$ zamanına kadarki bazı zamanlar için verilmiştir. Sonuçların analitik çözümlere yakın olduğu söylenilebilir. Bununla birlikte konum ve zaman artımları

dahada küçültüldüğünde korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri tam sonuçlara daha yaklaşıacaktır.

Tablo 2.12: İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

Zaman	M1			M2		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
0	37.9165000	120.5261000	744.1150000	37.9165101	120.5272077	744.1149038
6	37.9166000	120.8254000	746.5846000	37.9165164	120.8349449	746.6740857
12	37.9166400	121.0992000	748.4232000	37.9165061	121.0679443	748.6034122
18	37.9166500	121.2022000	749.7343000	37.9164990	121.2234345	749.9410579
24	37.9166200	121.5025000	752.2565000	37.9164734	121.5380861	752.5615731
30	37.9166100	121.8118000	754.8401000	37.9163934	121.8598288	755.2484191

2.5 Metotların MEW Denklemine Sayısal Çözümüne Uygulanması

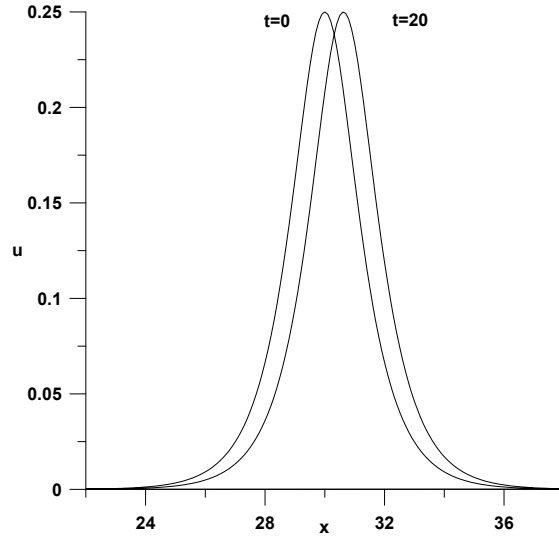
Genel denklemimiz olan (1.19) denkleminde $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \varepsilon$, $p = 2$ ve $\alpha_3 = \mu$ alındığında MEW denklemi elde edilir.

2.5.1 Solitary dalga oluşumu

İlk olarak $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$ parametreleri ve $0 \leq x \leq 80$ tamam aralığı seçilerek $A = \sqrt{2c}$ genlikli, sola yerleştirilmiş tek dalganın $v = c$ hızla sağa doğru hareketi $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığında incelenmiştir. $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu $A = 0.25$ genlik değeri için Şekil 2.13'te gösterilmiştir. Dalganın genliği küçük seçildiğinden dolayı dalganın hızda oldukça yavaştır. Şekilden de görülebileceği gibi dalga çok az yol aldığından şeklin anlaşılır olabilmesi için konum aralığının küçük bir bölgesinde şekil çizilmiştir. Dalganın tepe noktası tam olarak

$$x_0 + ct = 30 + \frac{(0.25)^2}{2} 20 = 30.625$$

noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.13: $t = 0$ ve $t = 20$ anındaki dalgaların durumu

Program $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $A = 0.25$ seçimleriyle $t = 20$ anına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri her iki metot içinde Tablo 2.13'te verilmiştir. Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$C_1 = \frac{A\pi}{k} \simeq 0.78540,$$

$$C_2 = \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \simeq 0.166667,$$

$$C_3 = \frac{4A^4}{3k} \simeq 0.00521$$

olarak hesaplanır. Tablo 2.13 incelendiğinde M2'nin M1'e göre daha iyi sonuçlar verdiği açıkça görülebilir. Her iki metot için de korunum sabitleri analitik çözümler ile uyumludur. Diğer makaleler ile yapılan kıyaslamalarda da metotların oldukça iyi sonuçlar verdiği özellikle M2'nin verdiği sonuçların çok iyi olduğu söylenebilir. Korunum sabitlerinin ise analitik değerleri tam olarak verdiği görülebilir. Sonuç olarak bu test problemi için önerilen metotlar diğer çalışmalarda göz önüne alındığında oldukça iyi sonuçlar vermiştir.

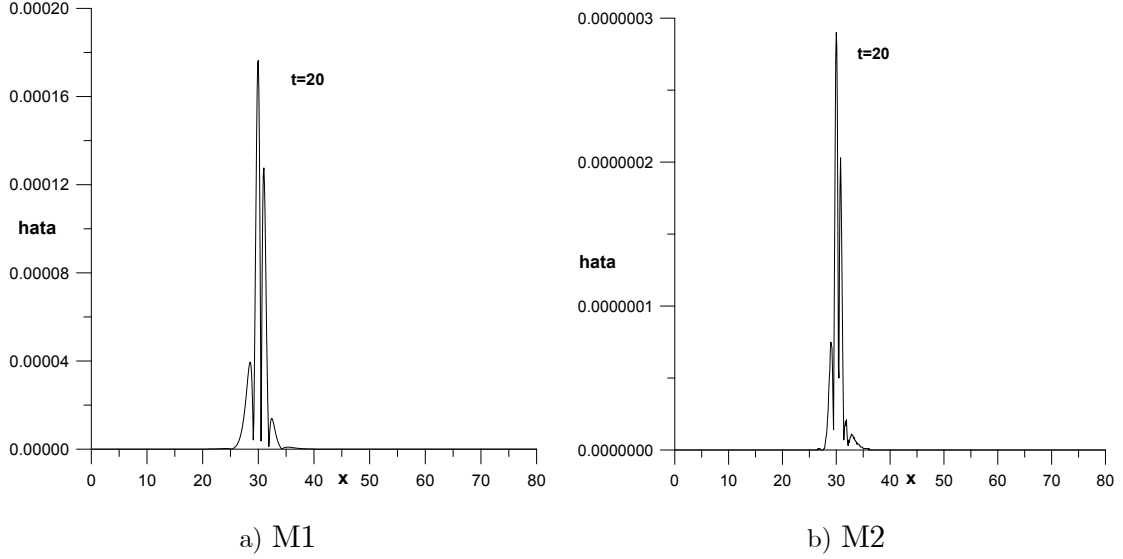
Tablo 2.13: $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $A = 0.25$ ve $0 \leq x \leq 80$ için korunum sabitleri

ve hata normları

M1							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3		
0	0	0	0.7853977	0.1666664	0.0052083		
4	0.03578	0.03375	0.7853979	0.1666664	0.0052083		
8	0.07135	0.06912	0.7853981	0.1666664	0.0052083		
12	0.10655	0.10532	0.7853978	0.1666664	0.0052083		
16	0.14119	0.14135	0.7853982	0.1666665	0.0052083		
20	0.17516	0.17636	0.7853982	0.1666665	0.0052083		
M2							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3		
0	0	0	0.7853982	0.1666667	0.0052083		
4	0.00006	0.00007	0.7853982	0.1666667	0.0052083		
8	0.00010	0.00012	0.7853982	0.1666667	0.0052083		
12	0.00015	0.00016	0.7853982	0.1666667	0.0052083		
16	0.00019	0.00020	0.7853982	0.1666667	0.0052083		
20	0.00024	0.00029	0.7853982	0.1666667	0.0052083		
Diğer çalışmalar ($t = 20$)							
	h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
(Zaki, 2000)	0.1	0.05	0.00345	0.00203	0.78539	0.16667	0.00521
(Evans and Raslan, 2005)	0.1	0.2	0.202	0.157	0.78529	0.16658	0.00521
	0.1	0.05	0.291	0.250	0.78495	0.16648	0.00520
(Esen and Kutluay, 2008)	0.1	0.2	0.270	0.258	0.78540	0.16647	0.00521
	0.1	0.05	0.269	0.257	0.78540	0.16647	0.00521

Konum artımı $h = 0.1$, zaman artımı $\Delta t = 0.2$ ve $A = 0.25$ seçimleri ile $0 \leq x \leq 80$ konum aralığında $t = 20$ oluncaya kadar çalıştırılan programların sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkı temsil eden grafik Şekil 2.14'te gösteril-

miştir. Her iki metot içinde maksimum hatanın konum aralığının orta noktaları civarında olduğu görülebilir.



Şekil 2.14 : $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $A = 0.25$ ve $0 \leq x \leq 80$ için $t = 20$ zamanındaki

$$\text{Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

$A = 0.25$, $A = 1$ genlikleri ile farklı konum ve zaman artımı için hata normlarının değerleri Tablo 2.14'te verilmiştir. Genlik değeri küçükken sonuçların daha iyi olduğu ve hata normları kıyaslandığında M2'nin M1'e göre daha iyi sonuçlar verdiği görülebilir.

Tablo 2.14:Farklı konum ve zaman artımları için $t = 20$ zamanındaki

hata normları

$$A = 0.25, 0 \leq x \leq 80$$

		M1		M2	
h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.01	0.01	0.00361	0.00314	0.00232	0.00142
0.025	0.01	0.01240	0.01244	0.00231	0.00142
0.05	0.05	0.04368	0.04430	0.00012	0.00008
0.1	0.1	0.17528	0.17649	0.00039	0.00042
0.2	0.2	0.70261	0.70511	0.00412	0.00494
0.5	0.4	4.50227	4.29048	0.28895	0.34033
1.0	0.8	22.35282	15.99954	9.46492	7.61909
2.0	0.8	75.61200	39.01426	69.05392	36.26697

$$A = 1, 0 \leq x \leq 80$$

		M1		M2	
h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.01	0.01	0.18264	0.11754	0.14763	0.09047
0.025	0.01	0.37722	0.26135	0.14762	0.09045
0.05	0.05	0.89763	0.65120	0.07311	0.04896
0.1	0.1	3.44489	2.51950	0.50045	0.33845
0.2	0.2	12.60936	9.33667	3.96827	2.68690
0.5	0.4	95.16979	68.19055	23.48180	16.41206
1.0	0.8	733.79329	405.39930	338.46906	206.13810
2.0	0.8	1902.68160	996.58210	1852.03529	990.88560

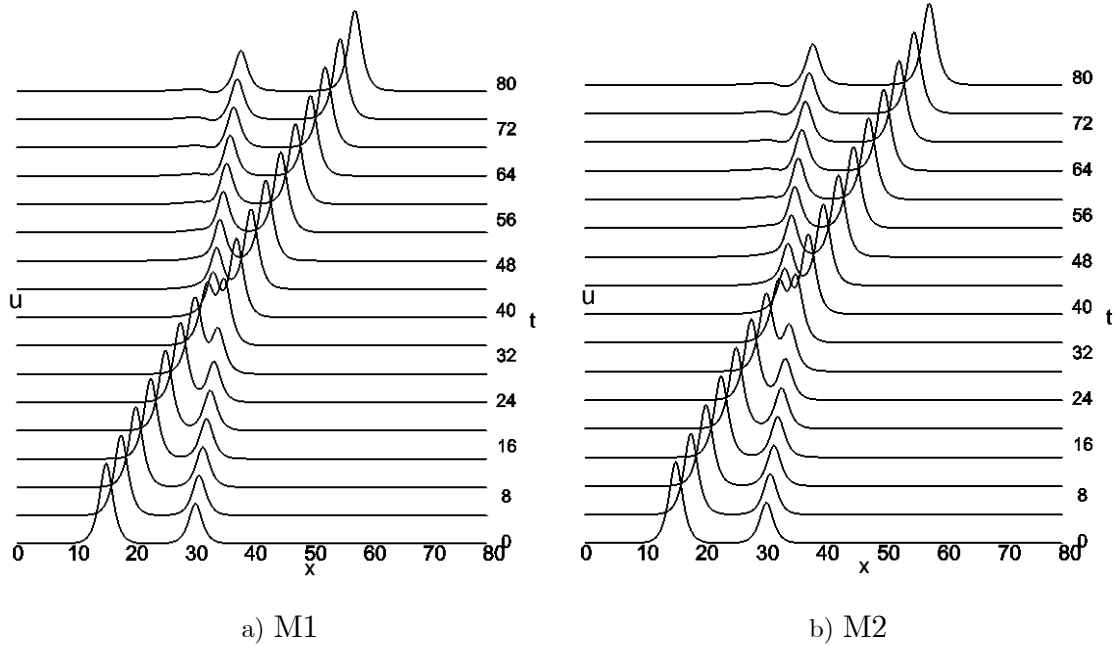
2.5.2 İki solitary dalgasının çarpışması

Birinci bölümde verilen iki solitary dalganın çarpışma problemi için başlangıç şartında yani (1.41) eşitliğinde $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $k = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $x_1 = 15$ ve $x_2 = 30$, seçimleri yapıldığında

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}(x - 15) + 0.5\operatorname{sech}(x - 30) \quad (2.27)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır.

$h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $[0, 80]$ konum aralığı seçimiyle program $t = 80$ zamanına kadar çalıştırılarak elde edilen sonuçlar üç boyutlu olarak her iki metot içinde Şekil 2.15'te verilmiştir. Her iki metot içinde çarpışmanın yaklaşık aynı zamanlarda gerçekleştiği, aynı zamanlarda sona erdiği ve çarpışma sonrasında solitary dalgalarının şekillerinde bir bozulma olmadığı görülebilir.



Şekil 2.15 : İki solitary dalgasının çarpışması

Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$C_1 = \frac{\pi}{k} (A_1 + A_2) \simeq 4.71239,$$

$$C_2 = \frac{2}{k} (A_1^2 + A_2^2) + \frac{2\mu k}{3} (A_1^2 + A_2^2) \simeq 3.33333$$

$$C_3 = \frac{4}{3k} (A_1^4 + A_2^4) \simeq 1.41667$$

olarak bulunur. Tablo 2.15'te korunum sabitlerinin yaklaşık çözümleri incelendiğinde sonuçların oldukça iyi olduğu görülebilir. Özellikle M2 için bulunan korunum sabitlerinin yaklaşık değerleri analitik değerlere oldukça yakındır.

Tablo 2.15: İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

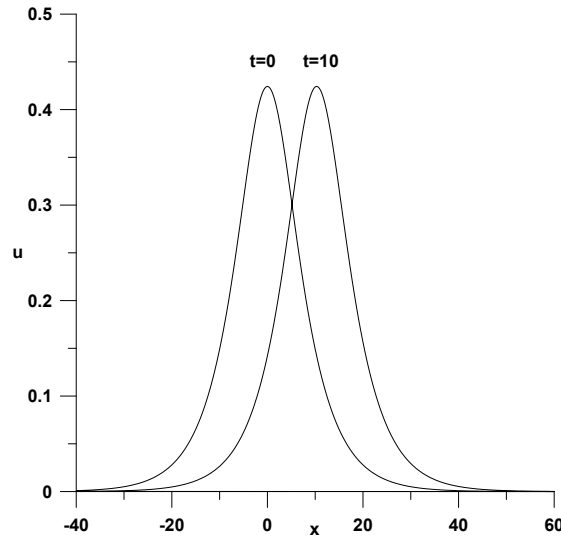
Zaman	M1			M2		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
0	4.7123860	3.3333300	1.4166690	4.7123884	3.3333358	1.4166697
10	4.7123890	3.3333400	1.4166720	4.7123890	3.3333389	1.4166729
20	4.7123890	3.3333430	1.4166760	4.7123890	3.3333421	1.4166760
30	4.7123870	3.3334540	1.4166770	4.7123890	3.3333451	1.4166790
40	4.7123890	3.3332900	1.4166800	4.7123890	3.3333463	1.4166804
50	4.7123890	3.3332520	1.4166840	4.7123890	3.3333494	1.4166834
60	4.7123870	3.3332890	1.4166860	4.7123890	3.3333526	1.4166866
70	4.7123880	3.3333340	1.4166900	4.7123890	3.3333558	1.4166898
80	4.7123890	3.3333530	1.4166920	4.7123890	3.3333590	1.4166930

2.6 Metotların MRLW Denkleminin Sayısal Çözümüne Uygulanması

Genel denklemimiz olan (1.19) denkleminde $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \varepsilon$, $p = 2$ ve $\alpha_3 = \mu$ alındığında MRLW denklemini elde edilir.

2.6.1 Solitary dalga oluşumu

İlk olarak $\varepsilon = \mu = 1$, $x_0 = 0$ parametreleri ve $-40 \leq x \leq 60$ tanım aralığı seçilerek $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ genlikli solitary dalgasının $v = c + 1$ hızla sağa doğru hareketi $0 \leq t \leq 10$ zaman aralığında incelenmiştir. $c = 0.03$ seçimiyle $t = 0$ ve $t = 10$ anındaki dalgaların durumu (1.44) analitik çözümü yardımıyla Şekil 2.16'da gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi $t = 10$ anında dalganın tepe noktası $x_0 + 10c + 10 = 10.3$ konum noktasına karşılık gelmektedir.



Şekil 2.16: $t = 0$ ve $t = 10$ anındaki dalgaların durumu

Program $\varepsilon = \mu = 1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$, $c = 0.03$ seçimleriyle $t = 10$ anına kadar çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ile birlikte korunum sabitleri her iki metot içinde Tablo 2.16'da verilmiştir. Tabloda ayrıca daha önce yapılan çalışmaların sayısal sonuçları da bulunmaktadır. Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\pi A}{k} \simeq 7.80988, \\
C_2 &= \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \simeq 2.12989 \\
C_3 &= \frac{4A^2}{3k\varepsilon} (A^2\varepsilon - 3\mu k^2) \simeq 0.13025
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Tablo 2.16 incelendiğinde M1'in M2'ye göre hata normlarının daha iyi sonuçlar verdiği görülebilir. M2'nin M1'e göre daha kötü sonuçlar vermesinin sebebi, konum aralığının uç noktalarında M2'nin sınır şartlarını tam olarak sağlayamamasından kaynaklanmaktadır. Bununla birlikte her iki metot içinde korunum sabitleri analitik çözümler ile uyumludur.

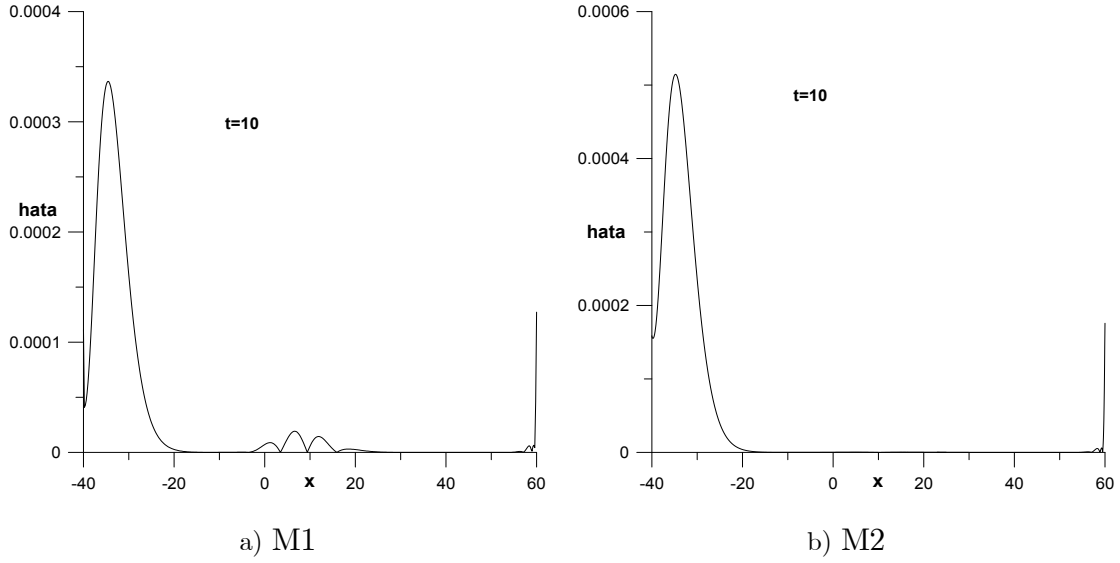
Tablo 2.16: $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$, $c = 0.03$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için korunum sabitleri

ve hata normları

M1							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3		
0	0	0	7.8043080	2.1298830	0.1302511		
2	0.24137	0.22859	7.8046790	2.1298830	0.1302497		
4	0.27945	0.16247	7.8051580	2.1298840	0.1302501		
6	0.30966	0.14581	7.8052930	2.1298850	0.1302500		
8	0.32471	0.14149	7.8052750	2.1298830	0.1302499		
10	0.32904	0.13744	7.8051590	2.1298840	0.1302499		
M2							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3		
0	0	0	7.80430	2.12988	0.13025		
2	0.80444	0.64751	7.80626	2.12989	0.13025		
4	0.98074	0.54594	7.80798	2.12989	0.13025		
6	1.12637	0.53428	7.80961	2.12989	0.13025		
8	1.21459	0.52481	7.81121	2.12989	0.13025		
10	1.25515	0.51463	7.81274	2.12989	0.13025		
Diğer çalışmalar ($t = 10$)							
	h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
(Khalifa et.al., 2007)	0.2	0.025	0.698	0.1995	7.80932	2.12988	0.13032

$h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$, $c = 0.03$ seçimleri ile $-40 \leq x \leq 60$ konum aralığında $t = 10$ zamanına kadar çalıştırılan programların analitik ve sayısal çözümleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafikler Şekil 2.17'de çizilmiştir. M1 ve M2 için çizilen grafik incelendiğinde maksimum hatanın konum aralığının başlarında olduğu görülebilir. Metotlardaki hatanın konum aralığının uç noktalarında görünmesinin sebebi yukarıda da bahsettiğimiz gibi dalganın yeterince sifıra yakın değerleri alacak şekilde aralığın seçilmemesinden kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla metotlar ne kadar iyi olursa olsun sınır şartlarındaki kabullerden dolayı en az bu kadar hatanın

yapılması kaçınılmazdır.



Şekil 2.17 : $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$, $c = 0.03$ ve $-40 \leq x \leq 60$ için $t = 10$ zamanındaki

$$\text{Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

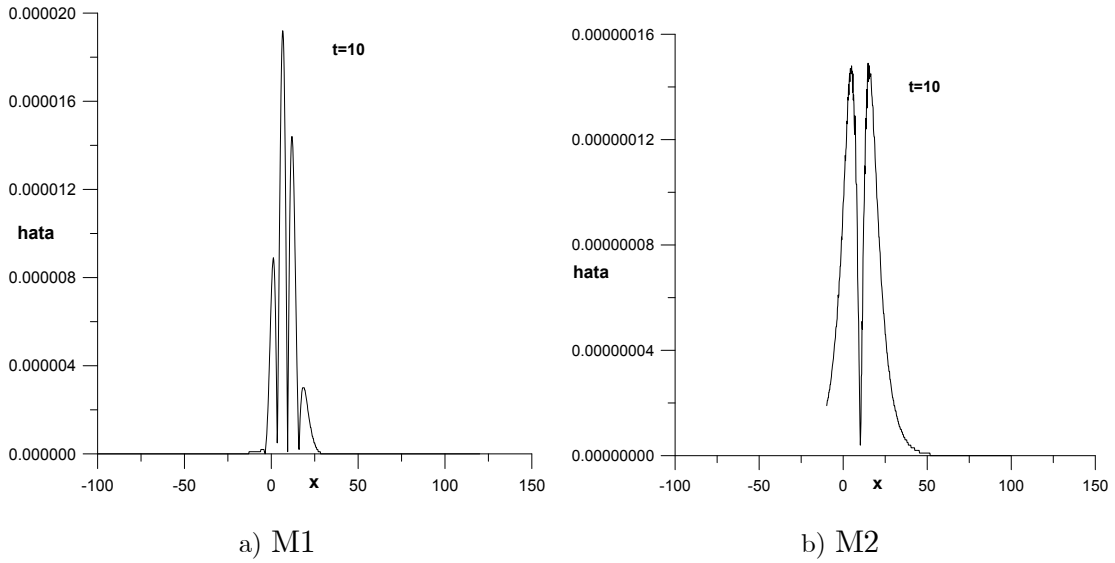
Daha iyi sonuçlar elde edebilmek için konum aralığını $-100 \leq x \leq 120$ aralığına genişleterek programlar tekrar çalıştırıldığında sonuçların çok daha iyi olduğu Tablo 2.17'den görülebilir. Özellikle M2'deki iyileşme oldukça fazladır. Korunum sabitleri ise artık analitik sonuçlarla aynı değerdedir. Bu test probleminde de görüldüğü gibi konum aralığının seçimi oldukça önemlidir. Aralığın uç noktalarında dalganın analitik değerinin aldığı değer sınır şartına ne kadar yakınsa yaklaşık çözümlerde o kadar iyi olmaktadır.

Tablo 2.17 $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$, $c = 0.03$ ve $-100 \leq x \leq 120$ için korunum sabitleri

ve hata normları

M1					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	7.8098710	2.1298850	0.1302509
2	0.00942	0.00414	7.8098690	2.1298860	0.1302508
4	0.01910	0.00865	7.8098720	2.1298860	0.1302509
6	0.02848	0.01299	7.8098610	2.1298880	0.1302509
8	0.03744	0.01695	7.8098680	2.1298860	0.1302508
10	0.04384	0.01919	7.8098730	2.1298870	0.1302509
M2					
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0	0	7.8098753	2.1298872	0.1302508
2	0.00019	0.00005	7.8098753	2.1298872	0.1302508
4	0.00092	0.00023	7.8098753	2.1298872	0.1302508
6	0.00203	0.00052	7.8098753	2.1298872	0.1302508
8	0.00308	0.00079	7.8098753	2.1298872	0.1302508
10	0.00142	0.00037	7.8098753	2.1298872	0.1302508

Şekil 2.18'de $-100 \leq x \leq 120$ konum aralığında çizilen hata grafikleri verilmiştir. Konum aralığı genişletilerek çizilen bu grafiklerden kolayca görülebileceği gibi artık maksimum hatanın her iki program içinde konum aralığının orta noktaları civarında olduğu görülmektedir. Ayrıca maksimum hatanın bir önceki tabloda verilen L_∞ hataları kadar olduğuda kolaylıkla kontrol edilebilir.



Şekil 2.18 : $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$, $c = 0.03$ ve $-100 \leq x \leq 120$ için $t = 10$ zamanındaki

$$\text{Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

Solitary dalganın oluşması test probleminde ikinci olarak dalganın hızını yani c değerini değiştirerek problem incelenmiştir. Bu durumda programlar $\varepsilon = 6$, $\mu = 1$, $x_0 = 40$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c = 0.3$ seçimleriyle $t = 20$ anına kadar $0 \leq x \leq 100$ konum aralığında çalıştırılmış ve belirli zamanlardaki hata normları ve korunum sabitleri her iki metot içinde Tablo 2.18’de verilmiştir. Bu parametreler için korunum sabitlerinin analitik değerleri

$$C_1 = \frac{\pi A}{k} \simeq 3.58197,$$

$$C_2 = \frac{2A^2}{k} + \frac{2\mu k A^2}{3} \simeq 1.34508,$$

$$C_3 = \frac{4A^2}{3k\varepsilon} (A^2\varepsilon - 3\mu k^2) \simeq 0.15372$$

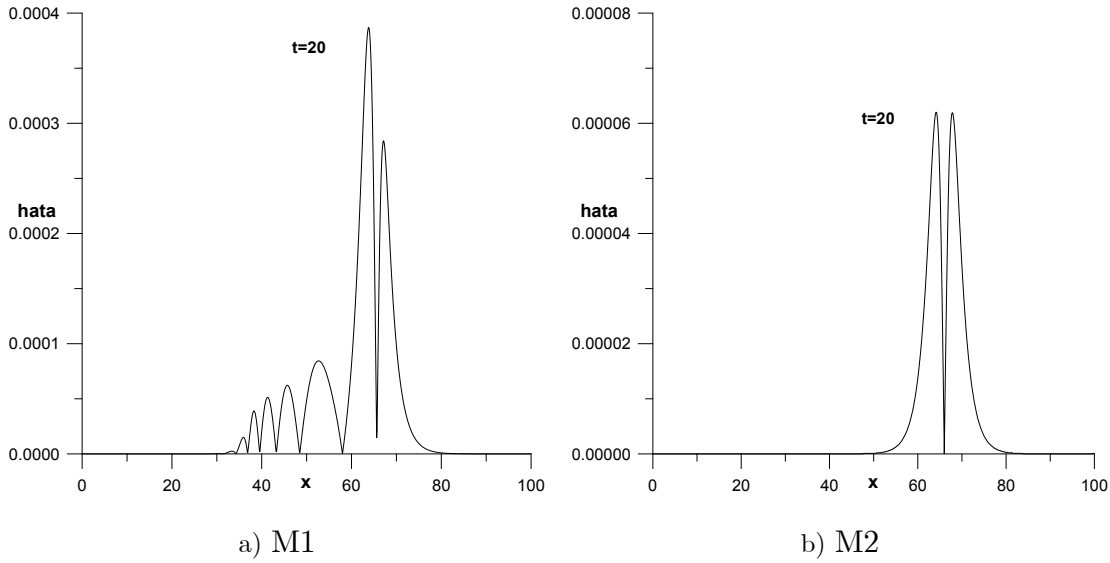
olarak bulunur. Tablo 2.18’den kolaylıkla görülebileceği gibi hata normları incelendiğinde M2’nin M1’e göre daha iyi sonuçlar verdiği görülebilir. Ayrıca her iki metot içinde korunum sabitleri analitik çözümler ile uyumludur.

Tablo 2.18: $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c = 0.3$ ve $0 \leq x \leq 100$

için korunum sabitleri ve hata normları

M1							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3		
0	0	0	3.5819650	1.3450760	0.1537231		
4	0.26266	0.15740	3.5819650	1.3450760	0.1537230		
8	0.41531	0.22003	3.5819640	1.3450760	0.1537231		
12	0.54525	0.27600	3.5819640	1.3450760	0.1537230		
16	0.67217	0.33143	3.5819650	1.3450760	0.1537231		
20	0.79960	0.38698	3.5819660	1.3450770	0.1537230		
M2							
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3		
0	0	0	3.5819667	1.3450765	0.1537230		
4	0.00128	0.00055	3.5819667	1.3450765	0.1537230		
8	0.03546	0.01509	3.5819667	1.3450765	0.1537230		
12	0.07235	0.03075	3.5819667	1.3450765	0.1537230		
16	0.10923	0.04639	3.5819667	1.3450765	0.1537230		
20	0.14608	0.06203	3.5819667	1.3450765	0.1537230		
Diğer çalışmalar ($t = 20$)							
	h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
(Haq et.al., 2010)	0.1	0.01	0.051	0.0022	3.58197	1.34508	0.15372

$h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c = 0.3$ seçimleri ile $0 \leq x \leq 100$ konum aralığında $t = 20$ zamanına kadar çalıştırılan programların analitik ve sayısal çözümleri arasındaki farkın mutlak değerini gösteren grafikler Şekil 2.19'da verilmiştir. M1 ve M2 için çizilen grafik incelendiğinde maksimum hatanın konum aralığının ortalarında olduğu görülebilir.



Şekil 2.19 : $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c = 0.3$ ve $0 \leq x \leq 100$ için $t = 20$ zamanındaki

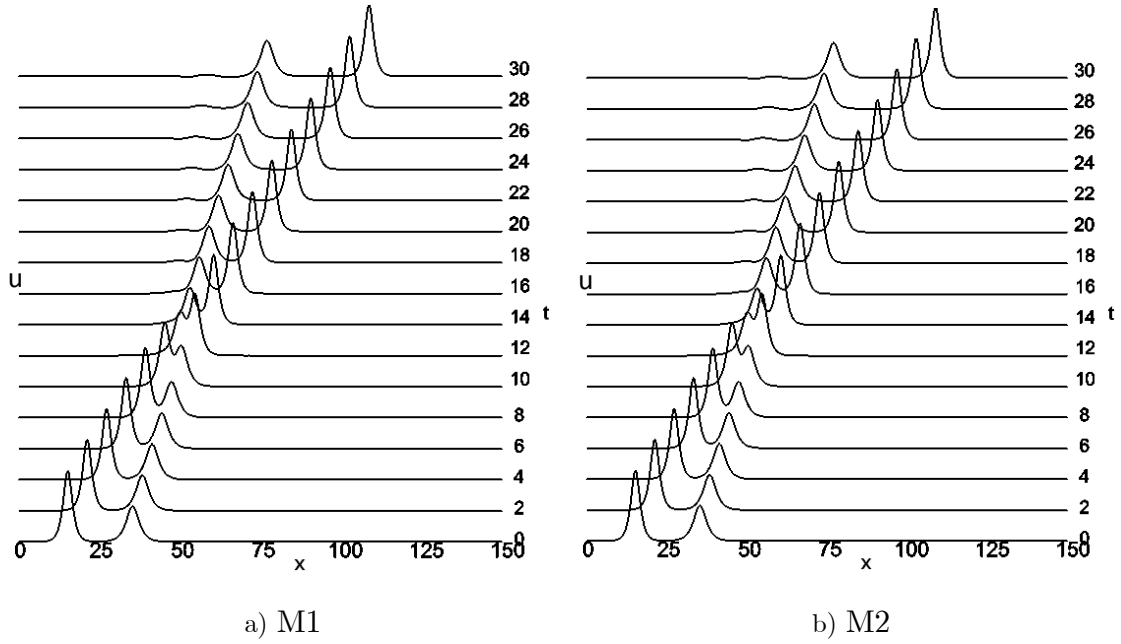
$$\text{Hata} = |\text{Analitik çözüm} - \text{Sayısal çözüm}|$$

2.6.2 İki solitary dalgasının çarpışması

Birinci bölümde verilen iki solitary dalganın çarpışma problemi için başlangıç şartında yani (1.48) eşitliğinde $\varepsilon = \mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 35$, $c_1 = 2$, $c_2 = 0.5$, $A_1 = \sqrt{12}$, $A_2 = \sqrt{3}$, $k_1 = \frac{2}{3}$ ve $k_2 = \frac{1}{3}$ alındığında

$$u(x, 0) = \sqrt{12} \operatorname{sech} \left(\frac{2}{3} [x - 15] \right) + \sqrt{3} \operatorname{sech} \left(\frac{1}{3} [x - 35] \right)$$

formundaki eşitliğe ulaşılır. $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $[0, 150]$ konum aralığı seçimiyle program $t = 30$ zamanına kadar çalıştırılarak elde edilen sonuçlar üç boyutlu olarak her iki metot içinde Şekil 2.20 'de verilmiştir. Her iki metot içinde çarpışmanın yaklaşık aynı zamanlarda gerçekleştiği ve aynı zamanlarda sona erdiği şekilden görülebilir. Ayrıca çarpışma öncesi ve çarpışma sonrasında solitary dalgalarının şekillerinde bir bozulma olmadığında söylenebilir.



Şekil 2.20 : İki solitary dalgasının çarpışması

Korunum sabitlerinin tam değerleri ise Maple programı yardımıyla

$$C_1 = \frac{\pi}{k_1 k_2} (k_2 A_1 + k_1 A_2) \simeq 22.75342678,$$

$$C_2 = \frac{2}{k_1 k_2} (k_2 A_1^2 + k_1 A_2^2) + \frac{2\mu}{3k_1 k_2} (k_1^2 k_2 A_1^2 + k_1 k_2^2 A_2^2) \simeq 47.47285495$$

$$C_3 = \frac{4}{3k_1 k_2 \varepsilon} (\varepsilon k_1 A_2^4 - 3\mu k_1 k_2^2 A_2^2 + \varepsilon k_2 A_1^4 - 3\mu k_1^2 k_2 A_1^2) \simeq 209.8155859$$

olarak bulunur. Korunum sabitleri için sayısal değerler ise Tablo 2.19'da gösterilmiştir. Sayısal yöntemler sonucunda elde edilen sonuçlar ile analitik değerlerin oldukça uyumlu oldukları söylenebilir.

Tablo 2.19: İki Solitary dalgasının çarpışması problemi için korunum sabitleri

Zaman	M1			M2		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
0	22.7533800	47.4741500	209.8318000	22.7533860	47.4741891	209.8316495
6	22.7534400	47.4750500	209.8401000	22.7534162	47.4749549	214.0099194
12	22.7534600	47.4780000	209.8303000	22.7534194	47.4754151	227.9642681
18	22.7534900	47.4759600	209.8547000	22.7534217	47.4760815	213.2834679
24	22.7535100	47.4768200	209.8634000	22.7534238	47.4768539	213.3535908
30	22.7535100	47.4776000	209.8724000	22.7534254	47.4776265	213.4053162

BÖLÜM 3

SONUÇLAR

Bu çalışmada EW, RLW, MEW ve MRLW denklemlerinin, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonları yardımıyla sonlu elemanlar metodunun kolokeyşin yöntemi kullanılarak sayısal çözümleri incelendi. Bu denklemlerin sayısal çözümleri araştırılırken, solitary dalga oluşumu ve iki solitary dalgasının çarpışması, test problemleri kullanıldı.

Birinci bölümde temel kavramlara yer verilmiştir. Bu kavramlar; Soliton teorisinin fiziksel anlamı, lineer olmayan oluşum denklemleri, sonlu elemanlar metodu, spline fonksiyonlar ve sayısal çözümleri araştırılacak olan dalga denklemleri hakkında kısaca bahsedilmiştir.

İkinci bölümde Taylor seri açılımı kullanarak denklemin zamana göre parçalanması yapılmış ve konum parçalanması için de iki farklı sonlu elemanlar metodu olan kübik B-Spline kolekeyşin (M1) ve kuintik B-Spline kolekeyşin (M2) metodları kullanılmıştır. M1'in elde edilen denklem sistemine uygulanmasından dolayı, denklem sistemi ile bilinmeyen arasında 2 bilinmeyen fazlalığı oluşmuştur. Sınır şartlarının sisteme ilave edilmesiyle, bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşitlenmiştir. Aynı durum M2 için de söz konusu olmuştur. Burada bilinmeyen sayısı denklem sayısından 4 fazla olduğundan dolayı türev yaklaşımlarının sınırdaki değerleride kullanılarak, sistem eşitlenmiştir. Denklem sayısı ile bilinmeyen sayısı aynı olduktan sonra genel denklemin katsayılarının özel seçimleri ile sırasıyla EW, RLW, MEW ve MRLW denklemlerin sayısal çözümleri, test problemleri yardımıyla incelenmiştir.

İncelenen sayısal çözümler de M2'nin M1'e göre oldukça iyi sonuçlar verdiği görülebilir. Konum aralığının yeterince geniş seçilmediği durumlarda, M2 sınırlara yakın bölgelerde hatalar vermektedir. Sınır şartlarının daha iyi sağlandığı ve konum aralığının genişletildiği durumlarda M2 çok daha iyi sonuçlar vermiştir.

Sonuç olarak çok adımlı metotların tek adımlı metotlara göre uygulama zorlukları ve yüksek maliyetli programlara ihtiyacı vardır. Buna karşın tek adımlı kübik ve

kuintik B-spline kolokeyşin metotlarının yerine çok adımlı kübik ve kuintik B-spline kolokeyşin metotları kullanıldığında daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmüştür. Bu nedenle lineer olmayan KDD'lerin sayısal çözümlerinde, kübik ve kuintik B-spline kolokeyşin metotlarının kullanılabilirliği önerilmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Alexander, M.E. and Morris, J.L.L. 1979, Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive waves, *Journal of Computational Physics* 30, 428-451.
- Benjamin, T.B., Bona, J.L. and Mahony, J.J., 1972, Model Equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philosophical Transactions for the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 272, 47-78.
- Dağ, İ., 2000, Least squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 182, 205-215.
- Dağ, İ. and Özer, M. N., 2001, Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method, *Applied Mathematical Modelling* 25, 221-231.
- Dağ, İ., Saka, B. and Irk, D., 2004, Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation, *Applied Mathematics and Computation* 159(2), 373-389.
- Dağ, İ., Saka, B. and Irk, D., 2006, Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 190(1-2), 532-547.
- Dağ, İ., Irk, D. and Boz, A., 2007, Simulation of EW wave generation via Quadratic B-spline finite element method, *International Journal of Mathematics and Statistics* 1(A07), 46-59.
- Doğan, A., 2001, Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 17, 485-494.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Doğan, A., 2002, Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method, *Applied Mathematical Modelling* 26(7), 771-783.
- Eilbeck, J.C. and McGuire, G.R., 1975, Numerical study of the regularized long-wave equation I: numerical methods, *Journal of Computational Physics* 19, 43-57.
- Eilbeck, J.C. and McGuire, G. R., 1977, Numerical study of the regularized long-wave equation II: interaction of solitary waves, *Journal of Computational Physics* 23, 63-73.
- Esen, A., 2005, A numerical solution of the equal width wave equation by a lumped Galerkin method, *Applied Mathematics and Computation* 168, 270-282.
- Esen, A. and Kutluay, S., 2006, Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation, *Applied Mathematics and Computation* 174, 833-845.
- Esen, A. and Kutluay, S., 2008, Solitary wave solutions of the modified equal width wave equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 13, 1538-1546.
- Evans D.J. and Raslan K.R., 2005, Solitary waves for the generalized equal width (GEW) equation. *International Journal of Computer Mathematics* 82(4), 445-455.
- Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. and Miura, R.M., 1967, Method for solving the Korteweg-deVries equation, *Physical Review Letters* 19, 1095-1097.
- Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., 1990, Solitary waves of the regularized long wave equation, *Journal of Computational Physics* 91, 441-459.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A., 1992, Solitary waves of the equal width wave equation, *Journal of Computational Physics* 101, 218-223.
- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A. and Dağ, İ., 1995, A B-spline finite element method for the regularized long wave equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 11, 59-68.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. and Doğan, A., 1996, A least-squares finite element scheme for the RLW equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 12(11), 795-804.
- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ayoub, F. A. and Amein N.K., 1997, Modelling an undular bore with B-splines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 147, 147-152.
- Haq, F., İslam, S. and Tirmizi, I.A., 2010, A numerical technique for solution of the MRLW equation using quartic B-splines, *Applied Mathematical Modelling*, 34(12), 4151-4160
- Irk, D., Saka, B. and Dağ, İ., 2003, Cubic spline method for the equal width equation, *Hadronic Journal Supplement* 18, 201-214.
- Irk, D., Dağ, İ. and Doğan, A., 2005, Numerical integration of the RLW equation using cubic splines, *Anziam Journal* 47, 131-142.
- Irk, D., 2007, Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 148 s.
- Jain, P.C. and Iskandar, L., 1979, Numerical solutions of the regularized long wave equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 20, 195-201.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Khalifa, A.K., Raslan, K.R. and Alzubaidi, H.M., 2007, A finite difference scheme for the MRLW and solitary wave interections, *Applied Mathematics and Computation* 189, 346-354.
- Korteweg, D.J and De Vries, G., 1895, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, *Philosophical Magazine* 39, 422-443.
- Kutluay, S. and Esen, A., 2006, A finite difference solution of the regularized long wave equation, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 85743, 14 pages, doi:10.1155/MPE/2006/85743.
- Lapidus, L. and Pinder, G.F., 1982, *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering*, John Wiley and Sons, 677 p.
- Morrison, P.J., Meiss, J.D. and Carey, J.R., 1981, Scattering of RLW solitary waves, *Physica* 11D, 324-336.
- Olver, P.J., 1979, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 85, 143-159.
- Peregrine, D.H., 1966, Calculations of the development of an undular bore, *Journal of Fluid Mechanics* 25(2), 321-330.
- Prenter, P., 1975. *Splines and Variational Methods*, Wiley Classics
- Ramos, J.I., 2006, Explicit finite difference methods for the EW and RLW equations, *Applied Mathematics and Computation* 179, 622-638.
- Raslan, K.R., 2004, A computational method for the equal width equation, *International Journal of Computer Mathematics* 81(1), 63-72.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Raslan, K.R., 2005a, Collocation method using quartic B-spline for the equal width (EW) equation, *Applied Mathematics and Computation* 168, 795-805.
- Raslan, K.R., 2005b, A computational method for the regularized long wave (RLW) equation, *Applied Mathematics and Computation* 167(2), 1101–1118.
- Raslan, K.R. and El-Danaf, T.S., 2010, Solitary wave solutions of the MRLW equation using quintic B-splines, *Journal of King Saui University*, 22(3), 161–166.
- Russell, J. S., 1845. Report on Waves. Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, September, pp 311-390, London.
- Saka, B., Irk, D. and Dağ, İ., 2003, A numerical study of the equal width equation, *Hadronic Journal Supplement* 18, 99-196.
- Saka, B., 2006, A finite element method for equal width equation, *Applied Mathematics and Computation* 175, 730-747.
- Saka, B., 2007, Algorithms for numerical solution of the modified equal width wave equation using collocation method, *Mathematical and Computer Modelling* 45(9-10), 1096-1117.
- Saka, B. and Dağ, İ., 2008, A numerical solution of the RLW equation by Galerkin method using quartic B-splines, *Communications in Numerical Methods in Engineering* 24, 1339-1361.
- Saka, B., Dağ, İ., Dereli Y. and Korkmaz, A. 2008a, Three different methods for numerical solution of the EW equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 32, 556-566.
- Saka, B., Dağ, İ. and Irk, D., 2008b, Quintic B-spline collocation method for numerical solution of the RLW equation, *Anziam Journal* 49, 389-410.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Schoenberg, I.J., 1946. Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions, Quarterly of Applied Mathematics., 4, 45-99.
- Soliman, A.A. and Hussien, M.H., 2005, Collocation solution for RLW equation with septic spline, Applied Mathematics and Computation 161, 623–636.
- Vvedenskii, D., 1992. Partial Differential Equations with Mathematica. Wokingham (England) etc.:Addison-Wesley.
- Wadati, M., 1983. Stochastic Korteweg–de Vries equation, Journal of the Physical Society of Japan 52,2642-2648.
- Wolfram, S., 1999. The Mathematica Book. Cambridge (UK): Cambridge University Press.
- Zabusky, N.J. and Kruskal, M.D., 1965, Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and recurrence of initial states, Physical Review Letters 15, 240-243.
- Zaki, S.I., 2000a, A least squares finite element scheme for the EW equation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 189, 381-392.
- Zaki, S.I., 2000b, Solitary wave interactions for the modified equal width equation, Computer Physics Communications 126, 219-231.
- Zaki, S.I., 2001, Solitary waves induced by the boundary forced EW equations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190, 4881-4887.
- Zheng, S., 2004, Nonlinear evolution equations, Chapman & Hall/CRC, 304 p.