Kısmi Diferensiyel Denklemler için Korunumluluk Kanunları

Arzu Yakut

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Temmuz 2012

Conservation Laws for Partial Differential Equations

Arzu Yakut

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

July 2012

Kısmi Diferensiyel Denklemler için Korunumluluk Kanunları

Arzu Yakut

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Filiz Taşcan

Temmuz 2012

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Arzu Yakut' un YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Kısmi Diferensiyel Denklemler için Korunumluluk Kanunları" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

İkinci Danışman **: -**

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

Üye : Prof. Dr. M. Naci ÖZER

Üye : Doç. Dr. Ahmet BEKİR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Emrullah YAŞAR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Dursun IRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Korunumluluk kanunları diferensiyel denklemlerin uygulamalarında, çözümünde, fiziğin tüm uygulamalarında önemli bir yere sahiptir. Bu yüksek lisans tezi kapsamında kısmi diferensiyel denklemler için korunumluluk kanunları üzerine çalışılmıştır.

Öncelikle diferensiyel denklemlerle ilgili temel bilgiler, Lie simetri üreteçlerinin nasıl bulunacağı, dönüşümlerin Lie grubu ve bir boyutlu ısı denkleminin Lie simetri üreteçlerinin bulunuşu verilmiştir.

2007 yılında Nail Ibragimov herhangi bir diferensiyel denklem sistemi için temel korunumluluk teoremini ispat etmiştir. Temel korunumluluk teoremi yardımıyla korunumluluk kanunlarını hesaplamak için gerekli olan Euler-Lagrange denklemleri, eşlenik denklem sistemlerinin bulunuşu ve gerekli formüller verilmiştir. Daha sonra modifiye Korteweg-de Vries denkleminin korunumluluk kanunları bulunmuştur.

Karşımıza sıkça çıkan fakat korunumluluk kanunları literatürde bulunmamış olan lineer olmayan reaksiyon denklemlerinin, Boussinessq-Burger denklem sisteminin, Burger Fisher denkleminin korunumluluk kanunları bulunmuştur. Ayrıca lineer olmayan reaksiyon denklemlerinin Lie simetrileri yardımıyla çözümleri hesaplanmıştır.

Korunumluluk kanunlarını hesaplamak için doğrudan metot, Noether yaklaşımı, karakteristik metot, varyasyonel yaklaşım, diferensiyel denklemlerin çözümlerinin uzayında varyasyonel yaklaşım, simetri ve korunumluluk kanunu ilişkisi, kısmi Nother yaklaşımı, sistemler ve eşlenik sistemleri için Noether yaklaşımı kısaca anlatılmıştır. Son olarak lineer olmayan alan denkleminin korunumluluk kanunları verilen bütün yaklaşımlar ile bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Korunumluluk kanunları, Lie simetri üreteçleri, Noether teoremi, temel korunumluluk teoremi

SUMMARY

Conservation laws has important place for applications of differential equations and solutions, also in all physics applications. This master thesis is a scientific work on the consevation laws for partial differential equations.

Firstly the information about differential equations, how to find the Lie symmetry generators, Lie group of transformations and Lie symmetry generators of one dimensional heat equation are given.

In 2007, Nail Ibragimov has given the proof of the fundamental conservation theorem related to any system of differential equations. Necessary formulations, discovery of adjoint equations and Euler-Lagrange equations which is required to get the conservation laws via fundamental conservation theorem. Afterwards, the conservation laws of modified Korteweg-de Vries equation are handed.

Commonly used nonlinear reaction equations which of conservation laws has not been found, such as Boussinessq-Burger and Burger Fisher equation, conservation laws of them are shown. Besides, the solutions of nonlinear reaction equations are derived by the aid of Lie symmetries.

In order to find the conservation laws, direct method, Noether approach, characteristic method, variational approach, variational approach in the space of solutions of differential equations, the relation of symmetry and conservation law, partial Noether approach, Noether approach for pure and adjoint systems are briefly given. Finally, with the help of these approachs it is found conservation laws of nonlinear field equation.

Keywords: Conservation laws, Lie symmetry generators, Noether's theorem, fundamental conservation theorem

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgileriyle bana yardımcı olan, değerli zamanını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan, bana her zaman destek olan saygı değer danışmanım

DOÇ. DR. FİLİZ TAŞCAN' a

sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca desteklerini hep yanımda hissettiğim

AİLEME ve EŞİME

ve çalışmam sırasında vermiş oldukları bursla maddi destek sağlayan

TÜBİTAK' a

teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Doğa, fizik ve mühendislik bilimlerinde, matematiksel modellerin lineer yada lineer olmayan diferensiyel denklemlerinin (ya da denklem sistemlerinin) sistematik çözüm işlemlerinin klasik çözüm metotları ile oluşturulması ve bunların bilgisayara aktarılması çoğu zaman mümkün olmamaktadır.

Matematiksel fizik problemlerin, uygulamalı grup analizi ile çözümünden sahip olunan tecrübe, birçok doğa olayının teorik grup terimleriyle modellenebileceğini gösterdi ve böyle bir modellemenin mutlak sonuçları olarak diferensiyel denklemlerin, korunum kanunlarının, başlangıç değer problemlerinin çözümleri ve benzerleri elde edildi. Örnek olarak, simetri grubu; karmaşık doğa olaylarının kavranmasında ve diferensiyel denklemlerle modellenmiş problemlerin çözümünde başarılı bir şekilde kullanılmaktadır (Kiraz, 2007).

Diferensiyel denklemler konusunda yapılan ilk çalışmalar, 17. yüzyılın ikinci yarısında, diferensiyel ve integral hesabın keşfinden hemen sonra, İngiliz doğa bilimci Isaac Newton (1643-1727) ve Alman filozof Leibnitz (1646-1716) ile başlar. 18. yüzyılın sonlarına kadar adi diferensiyel denklemlerin çözümü için birçok basit metodlar keşfedilmiştir. 19. yüzyılda ise kuvvet serileri tabanlı çözüm yöntemleri ile varlık-teklik teoremi gibi konular ilgi odağı olmuştur. Belli tip diferensiyel denklemlerin, belli şartlar altında bir çözümlerinin varlığının ispatı, diferensiyel denklemler teorisinde varlık teoremi konusunu teşkil etmekte olup, bu da ilk olarak 1820 ile 1830 yılları arasında, Fransız matematikçi A.L. Cauchy tarafından kurulmuş ve bazı bilim adamları tarafından geliştirilmiştir. Bu yüzyılın sonlarına doğru değişmezlik teorisi en gözde araştırma sahalarından olmuştur. Sophus Lie (1842-1899), Felix Klein (1849-1925), David Hilbert, Elie Cartan (1869-1951) gibi birçok ünlü matematikçinin konunun gelişmesine büyük katkıları olmuştur.

Norveçli matematkçi Sophus Lie tarafından diferensiyel denklemlerin integrasyon metodları üzerindeki çalışmaları sonucu diferensiyel denklemlerin simetri analizi, Lie grubu adı verilen dönüşümlerin denklemlerin tanımladığı manifoldu değişmez bırakan yerel dönüşüm gruplarını bularak diferensiyel denklemlerin çözümlerini algoritmik metodlarla elde etmiştir. Lie'nin çalışmalarının faydası uzun süre anlaşılamamış ve Lie teorisinin diferensiyel denklemlere uygulanışı 1950 li yıllarda ancak başlayabilmiştir. Daha sonra Bluman, Kumei, Ibragimov ve Olver tarafından çeşitli uygulamalar yapılmıştır (San, 2011).

Korunumluluk kanunu kavramının fizikte uzun ve derin bir tarihi vardır. Klasik mekanik, akışkan mekaniği, katıhal fiziğinin yanı sıra kuantum mekaniği, kuantum alan teorisi gibi hangi fiziksel kanunları düşünürsek düşünelim, bütün hepsi doğayı açıklamak için temel bileşenler olmuştur. Korunumluluk kanunlarını yücelten termo dinamiğin ilk prensibini kurması ve geniş fizik kanunu dizisinden birisini oluşturmasıdır.

Matematikte korunumluluk kanunları simetri dönüşümlerini kabul eden varyasyonel prensibin var olması ile yakından ilgilidir. Bu önemli gerçek Emmy Noether tarafından 1918 de ortaya konuldu. Noether'in çalışmalarını başta F. Klein ve D. Hilbert olmak üzere birçok bilim adamı takdir etti. Ayrıca Noether'in çalışmaları klasik mekanik ve klasik alan teorisinde korunumluluk kanunlarının anlaşılması için temeller kurdu (Compére, 2007).

Diferensiyel denklemlerin çalışmasında korunumluluk kanunlarının birçok yerde kullanımı vardır. Korunumluluk kanunları kütle, enerji, momentum ve açısal momentum gibi fiziksel korunmuş nicelikleri tanımlar. İntegrallenebilirliğin araştırılması, dönüşümlerin doğrusallaştırılması ve çözümlerin varlığının ve tekliğinin kanıtlanması için önemlidir. Kararlılığın analizi ve çözümlerin evrenselliğinde kullanılır. Aynı zamanda nümerik metodların, yerel olmayan ilgili sistemler ve potansiyel değişkenlerinin bulunması için temel bir başlangıç noktası sağlar. Özellikle korunumluluk kanunları başlangıç değerleri verilen diferensiyel denklemlerde çalışırken temel oluşturur (Bluman, et al., 2010).

Literatürde korunumluluk kanunlarını bulmak için farklı metodlar vardır. Bu metodlardan bazıları doğrudan metot, Noether yaklaşımı, karakteristik metot, varyasyonel yaklaşım, diferensiyel denklemin çözümünündeki uzayda varyasyonel yaklaşım, simetri ve korunumluluk kanunu ilişkisi, korunumluluk kanunları için doğrudan üretme, kısmi Noether yaklaşımı, sistemler ve eşlenik sistemleri için Noether yaklaşımıdır. Bu yöntemler ilerleyen bölümlerde anlatılacak fakat daha çok sistemler ve eşlenik sistemleri için Noether yaklaşımı üzerinde durulacaktır.

Literatürde korunumluluk kanunlarının elde edilmesinde en temel yaklaşım Noether teoremidir. Bu teorem kısaca Euler-Lagrange diferensiyel denklemleri için formal Lagrangian ile ilişkili olan her bir Noether simetrisine bir formül ile açık olarak belirlenebilecek bir korunum kanununun karşılık geldiğini ifade eder. Dolayısıyla korunum kanunları ve simetri ilkeleri arasında birebir ilişki mevcuttur.

Simetrinin fizik ve matematikteki önemli bir sonucu, yukarıda da değinildiği gibi, korunumluluk kanunlarının varlığıdır. Her bir global sürekli simetri için (yani bir fiziksel sistemin dönüşümünün her yerde ve tüm zamanlarda aynı surette etki etmesi) bir ilgili zamandan bağımsız nicelik mevcuttur (Yaşar, 2009).

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diferensiyel denklemler ve diferensiyel denklemler ile ilgili tanımlardan, ileride bahsedilecek olacak olan Lie gruplarından, Lie simetri üreteçlerinin bulunmasından bahsedeceğiz.

2.1 Diferensiyel Denklem

$y = f(x)$ biçiminde bir fonksiyon verilmişse, bu fonksiyonun x değişkenine göre türevinin

$$\frac{dy}{dx} = f^{'}(x)$$

şeklinde olduğu bilinmektedir.

İçinde türev veya diferensiyeller bulunan ifadelere **diferensiyel denklemler** denir. Örneğin;

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

ifadesi bir diferensiyel denklemdir.

Diferensiyel denklemler temel olarak iki kısma ayrılır;

2.1.1 Adi diferensiyel denklem

Tek bir değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme **adi diferensiyel denklem** denir. Bu denklemler en genel olarak

$$F\left(x, y, y^{'}, ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde yazılır. Burada $y^{(n)}$; y nin x e göre n. türevi demektir. Örneğin;

$$y^{''} - 2y^{'} + y = 0$$

denklemi bir adi diferensiyel denklemdir.

2.1.2 Kısmi diferensiyel denklem

İki yada daha çok bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren bir denkleme **kısmi diferensiyel denklem** denir. Birinci mertebeden iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferensiyel denklem en genel olarak;

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

şeklinde yazılır. Burada $z = z(x, y)$ dir. Bundan sonra kısmi diferensiyel denklemler ile ilgileneceğiz.

Bir diferensiyel denklemdeki en yüksek basamaktan türevin basamağına o denklemin **mertebesi (basamağı)** denir. Örneğin;

$$uu_{xy} - u_x u_y = 0$$

denklemi ikinci mertebeden bir kısmi diferensiyel denklemdir.

Bir diferensiyel denklem denklemdeki tüm türevlere göre tam ve rasyonel olacak şekilde yazıldığında, denklemdeki en yüksek türevin derecesine o **denklemin derecesi** denir. Örneğin;

$$u_t - \left(u^3\right)_{xx} - u\left(1 - u^2\right) = 0$$

denklemi birinci dereceden bir kısmi diferensiyel denklemdir.

Bir kısmi diferensiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre kapsamayan bir fonksiyona bu kısmi diferensiyel denklemin bir **özel çözümü** denir.

Bir kısmi diferensiyel denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon kapsayan ve kısmi diferensiyel denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi diferensiyel denklemin **genel çözümü** denir. Keyfi fonksiyon içeren bir yüzey ailesinin, bir kısmi diferensiyel denklemin genel çözümü olabilmesi için bu fonksiyon veya fonksiyonların en az denklemin mertebesi kadar sürekli türevlenebilir olması gerekir.

Tam ve rasyonel şekle konulan bir diferensiyel denklemde, bağımlı değişken ve türevleri yalnız birinci dereceden olup, bunlar denklemde çarpım halinde bulunmuyorlarsa denkleme **lineerdir** denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci mertebeden lineer kısmi diferensiyel denklemin en genel hali;

$$P(x,y)\,z_x + Q(x,y)\,z_y + R(x,y)\,z = S(x,y)$$

şeklindedir. Örneğin;

$$u_t - k\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = 0, k = sabit$$

iki boyutlu ısı denklemi ikinci mertebeden lineer bir denklemdir. Burada x, y, t bağımsız, u bağımlı değişkendir.

$$zz_{xy} - z_x z_y = 0$$

denklemi lineer olmayan bir denklemdir (Koca, 2008).

Bir diferensiyel denklem, denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevlere göre (denklemdeki düşük basamaklı türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinden bağımsız olarak) lineer ise bu denkleme **yarı-lineerdir (kuasi lineer)** denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci mertebeden yarı-lineer denklemin en genel hali;

$$P(x,y,z)\,z_x + Q(x,y,z)\,z_y = R(x,y,z)$$

şeklindedir. Örneğin;

$$z_x z_{xx} + xzz_y = \sin y$$

denklemi yarı-lineer bir denklemdir (Koca, 2008).

NOT: Her lineer denklem aynı zamanda yarı-lineerdir fakat yarı-lineer bir denklem lineer olmayabilir.

Bir diferensiyel denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme **hemen-hemen lineerdir** denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci mertebeden hemen-hemen lineer bir denklemin en genel hali;

$$A(x,y)\,z_{xx} + B(x,y)\,z_{xy} + C(x,y)\,z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0$$

şeklindedir. Örneğin;

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = t + 1$$

denklemi hemen-hemen lineer bir denklemdir (Koca, 2008).

2.2 Dönüşümlerin Lie Grubu

Dönüşüm grupları ile ilgili ilk çalışmalar 19. yüzyılda Sophus Lie tarafından başlatılmıştır. Lie, adi diferensiyel denklemlerin çözüm tekniklerinin belirlenmesinde dönüşüm gruplarını kullanmıştır. Lie, diferensiyel denklemler için daha önce verilmiş olan özel çözüm yöntemlerinin, diferensiyel denklemin sürekli bir simetri grubu altındaki değişmesine dayalı genel integrasyon yöntemlerinin özel durumları olduğunu göstermiştir. Genel anlamda Lie grupları olarak bilinen dönüşüm grupları fizik, mühendislik ve diğer matematiğe dayalı tüm bilimler üzerinde önemli bir etki yaratmıştır.

Lie, bir adi diferensiyel denklemin bir parametreli dönüşüm grubu altında değişmez kalması halinde diferensiyel denklemin mertebesinin bir derece düşürülebileceğini göstermiştir. Mertebesi bir derece azaltılmış denklemin çözümlerinden orjinal denklemin çözümlerine geçmek mümkün olmaktadır. Bir diferensiyel denklemin çok parametreli simetri gruplarına sahip olması durumunda bu durum mertebenin daha çok azaltılmasına olanak tanınması anlamına gelmekle birlikte, diferensiyel denklemin sahip olduğu dönüşüm grubu çözümlenebilen grup şartlarına sahip olmadığı müddetçe mertebesi düşürülmüş denklemin çözümlerinden orjinal denklemin çözümlerine geçiş mümkün olmayabilir.

Yirminci yüzyılda diferensiyel denklemlerde Lie gruplarının uygulamaları çok sayıda matematikçinin yoğun ilgisini çekmiştir. Ovsiannikov (1982) ve onun okulu, ilgili metodları fiziksel olarak önemli olan geniş bir problemler sınıfına uygulamışlardır. Birçok fiziksel problemlerle ilgilenmiş ve yoğun çalışmalar yapmış diğer matematikçiler Ibragimov (1983), Bluman (1989) ve Olver (1993)'dir (Yaşar, 2009).

2.2.1 Grup

G, boş olmayan herhangi bir küme ve G nin elemanları üzerinde ϕ ikili işlemi tanımlansın. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa G ye gruptur denir.

1) Kapalılık Özelliği

G nin herhangi a ve b elemanları için $\phi(a,b)$ G nin elemanıdır.

2) Birleşme özelliği

G nin herhangi a, b ve c elemanları için

$$\phi(a, \phi(b,c)) = \phi(\phi(a,b), c)$$

3) Birim eleman

G nin herhangi a elemanı için tek bir e birim elemanı vardır. Yani;

$$\phi(a,e) = \phi(e,a) = a$$

4) Ters eleman

G nin herhangi a elemanı için tek bir a^{-1} ters elemanı vardır. Yani;

$$\phi\left(a, a^{-1}\right) = \phi\left(a^{-1}, a\right) = e$$

Eğer G deki her a, b elemanları için

$$\phi(a,b) = \phi(b,a)$$

sağlanıyorsa G ye **değişmeli (abelyan) grup** denir.

G nin herhangi bir alt kümesi aynı kurallardaki ϕ işlemi ile grup oluyorsa bu alt kümeye G nin bir **alt grubu** denir (Bluman and Kumei, 1989).

2.2.2 Dönüşüm grupları

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde olsun. D bölgesindeki herbir x için dönüşüm grupları

$$x^* = X(x; \varepsilon)$$

şeklinde tanımlansın. ε parametresi $S \subset \mathbb{R}$ bölgesinde olmak üzere $\phi(\varepsilon, \delta)$ dönüşümü, S bölgesindeki ε ve δ parametreleri ile tanımlı olsun. Bu durumda ϕ dönüşümü D bölgesinde aşağıdaki şartları sağlıyorsa **dönüşüm grubudur** denir.

1) S bölgesindeki herbir ε parametresi için dönüşümler D bölgesinde bire-bir dir. Özellikle x^*, D bölgesindedir.

2) S bölgesi ϕ dönüşümünün kuralları ile G grup formunu alır.

3) Eğer $\varepsilon = e$ ise $x^* = x$ tir. Yani

$$X(x; \varepsilon) = x$$

tir.

4) Eğer $x^* = X(x; \varepsilon), x^{**} = X(x^*; \delta)$ ise

$$x^{**} = X(x; \phi(\varepsilon, \delta))$$

dir (Bluman and Kumei, 1989).

2.2.3 Bir parametreli Lie grup dönüşümleri

Yukarıdaki dönüşüm gruplarında verilen aksiyomlarla beraber aşağıdaki aksiyomlarda sağlanırsa ϕ dönüşüme **bir parametreli Lie grup dönüşümü** denir.

5) ε sürekli bir parametre yani; S bölgesi $\mathbb{R}$ de bir aralık olsun. Bu durumda $\varepsilon = 0$, e etkisiz elemanına karşılık gelir.

6) X; x e göre D bölgesinde her mertebeden sürekli türevlere sahip ve S bölgesinde ε un analitik fonksiyonudur.

7) $\varepsilon \in S$ ve $\delta \in S$ olmak üzere $\phi(\varepsilon, \delta)$, δ ve ε un analitik fonksiyonudur (Bluman and Kumei, 1989).

2.2.4 Sonsuz küçük dönüşümler

$$x^* = X(x; \varepsilon) \tag{2.2}$$

ε parametreli Lie grup dönüşümünü $\varepsilon = 0$ birimi ve ϕ ikili işleminin kuralları ile düşünelim. (2.2) denklemini $\varepsilon = 0$ civarında seriye açarsak;

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon \left(\frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \underset{\varepsilon=0}{|} \right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \underset{\varepsilon=0}{|} \right) + ... \\ &= x + \varepsilon \left(\frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \underset{\varepsilon=0}{|} \right) + o\left(\varepsilon^2\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

elde ederiz.

$$\xi(x) = \frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \underset{\varepsilon=0}{|} \tag{2.4}$$

olsun.

$x + \varepsilon\xi(x)$ dönüşümüne (2.2) ile verilen Lie grup dönüşümünün **sonsuz küçük dönüşümü** denir. $\xi(x)$ e de (2.2) denkleminin **sonsuz küçüğü (infinitesimali)** denir (Bluman and Anco, 2002).

Lie Birinci Temel Teoremi

Yardımcı teorem:

$$x^* = X(x;\varepsilon)$$

bir parametreli Lie grup dönüşümü

$$X(x;\varepsilon + \Delta\varepsilon) = X\left(X(x;\varepsilon);\phi\left(\varepsilon^{-1}, \varepsilon + \varepsilon\Delta\right)\right) \tag{2.5}$$

eşitliğini sağlar.

Teorem:

$$\tau = 0 \quad iken \quad x^* = x \tag{2.6}$$

ile

$$\frac{dx^*}{d\tau} = \xi(x^*) \tag{2.7}$$

şeklindeki birinci mertebeden adi diferensiyel denklem sistemleri için başlangıç değer probleminin çözümü;

$$x^* = X(x;\varepsilon)$$

Lie grup dönüşümlerine eşit olacak şekilde $\tau(\varepsilon)$ parametrizasyonu ile vardır. Burada

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \Gamma\left(\varepsilon'\right) d\varepsilon' \tag{2.8}$$

şeklindedir ve

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\partial \phi(a,b)}{\partial b} \bigg|_{(a,b)=\left(\varepsilon^{-1},\varepsilon\right)} \tag{2.9}$$

ve

$$\Gamma(0) = 1 \tag{2.10}$$

dir. Ayrıca ε^{-1},ε un ters elemanını gösterir (Bluman and Anco, 2002).

2.2.5 Sonsuz küçük üreteç

(2.2) ile verilen bir parametreli Lie grup dönüşümünün sonsuz küçük üreteci

$$X = X(x) = \xi(x)\nabla = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.11}$$

operatörü ile gösterilir. Buradaki ∇ gradient operatörüdür ve

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \tag{2.12}$$

şeklinde gösterilir (Bluman and Kumei, 1989).

2.2.6 Değişmez fonksiyon

$F(x)$ sürekli ve her mertebeden türevlenebilir fonksiyon olmak üzere (2.2) ile verilen Lie grup dönüşümünün değişmez (invaryant) fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart herhangi (2.2) ile verilen grup dönüşümü için

$$F(x^*) = F(x)$$

olmasıdır (Bluman and Kumei, 1989).

2.2.7 Bir parametreli Lie grup nokta dönüşümleri

n bağımsız değişkeni x ile, m bağımlı değişkeni u ile gösterelim. Bu durumda;

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, ..., x_n) \\ u &= (u^1, u^2, ..., u^m) \end{aligned}$$

şeklindeki $n+m$ değişkenli uzay üzerinde

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, u; \varepsilon) \\ u^* &= U(x, u; \varepsilon) \end{aligned}$$

formundaki grup dönüşümlerine bir parametreli **Lie grup nokta dönüşümleri** denir (Bluman and Anco, 2002).

2.2.8 Total türev

n bağımsız değişkeni x ile, m bağımlı değişkeni u ile gösterelim. Bu durumda;

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, ..., x_n) \\ u &= (u^1, u^2, ..., u^m) \end{aligned}$$

olsun.

$$u_i^\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial x_i}$$

olmak üzere total türev operatörü;

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} + u_{ij}^\mu \frac{\partial}{\partial u_j^\mu} + ... + u_{ii_1i_2...i_n}^\mu \frac{\partial}{\partial u_{i_1i_2...i_n}^\mu} + ... \tag{2.13}$$

şeklinde gösterilir (Bluman and Kumei, 1989).

2.2.9 Sonsuz küçük üretecin k. uzanımı

$$\eta^0 = \eta(x, y)$$

olmak üzere

$$\eta^{(k)} = D^k \eta - \sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{(k-j)!j!} y_{k-j+1} D^j \xi, k \geq 1$$

şeklinde oluşturulan değerlerle beraber

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+\eta^{(1)}(x,y,y_1)\frac{\partial}{y_1}+... \\ &\quad ...+\eta^{(k)}(x,y,y_1,...,y_k)\frac{\partial}{\partial y_k} \end{aligned} \tag{2.14}$$

değerine bir bağımlı, bir bağımsız değişken için k. uzanım adı verilir.

m bağımlı, n bağımsız değişken için k. uzanımın nasıl olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} x &= (x_1,x_2,...,x_n) \\ u &= (u^1,u^2,...,u^m) \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\eta_i^{(1)\mu}=D_i\eta^\mu-\left(D_i\xi_j\right)u_j^\mu$$

ve

$$\begin{aligned} \eta_{i_1i_2...i_k}^{(k)\mu} &= D_{i_k}\eta_{i_1i_2...i_{k-1}}^{(k-1)\mu}-\left(D_{i_k}\xi_j\right)u_{i_1i_2...i_{(k-1)j}}^\mu \\ &\quad k\geq 2, l=1,2,...,k, i_l=1,2,...,n \end{aligned}$$

verildiğinde k. uzanım;

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta^\mu(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\mu}+\eta_i^{(1)\mu}(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_i^\mu}+... \\ &\quad +\eta_{i_1i_2...i_k}^{(k)\mu}\left(x,u,\partial u,\partial^2u,...,\partial^k u\right)\frac{\partial}{\partial u_{i_1i_2...i_k}^\mu}, k\geq 1 \end{aligned} \tag{2.15}$$

şeklinde verilir. Burada $i=1,2,...,n$, $\mu=1,2,...,m$ dir (Bluman and Anco, 2002).

2.2.10 Uzanım (prolangasyon) formülleri

Bir bağımlı ve bir bağımsız değişken için uzanım formülleri

x bağımsız değişken ve y bağımlı değişken olmak üzere $y=y(x)$ olsun.

$$\begin{aligned} x^* &= X(x,y;\varepsilon) \\ y^* &= Y(x,y;\varepsilon) \end{aligned}$$

şeklindeki Lie grup dönüşümlerinin $(x, y, y_1, ..., y_k)$ uzayındaki k. uzanımları

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, y; \varepsilon) \\ y^* &= Y(x, y; \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1^* &= Y_1(x, y, y_1; \varepsilon) \\ &\ldots \\ y_k^* &= Y_k(x, y, y_1, ..., y_k; \varepsilon) \\ &= \frac{\dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial y} + ... + y_k \dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}}}{\dfrac{\partial X(x; \varepsilon)}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial X(x; \varepsilon)}{\partial y}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\begin{aligned} y_1^* &= Y_1 = Y_1(x, y, y_1; \varepsilon) \\ &= \frac{\dfrac{\partial Y(x; \varepsilon)}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial Y(x; \varepsilon)}{\partial y}}{\dfrac{\partial X(x; \varepsilon)}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial X(x; \varepsilon)}{\partial y}} \end{aligned}$$

ve

$$Y_{k-1} = Y_{k-1}(x, y, y_1, ..., y_{k-1}; \varepsilon)$$

şeklindedir.

$$x^* = X(x, y; \varepsilon) = x + \varepsilon \xi(x, y) + o\left(\varepsilon^2\right) \tag{2.16}$$

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon) = y + \varepsilon \eta(x, y) + o\left(\varepsilon^2\right) \tag{2.17}$$

şeklindeki bir parametreli Lie grup dönüşümlerinin (x, y) uzayında sonsuz küçükleri

$$\xi(x, y), \eta(x, y)$$

ve sonsuz küçük üreteci

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

şeklindedir.

(2.16) ve (2.17) nin k. uzanımı

$$\begin{aligned}
x^* &= X(x,y;\varepsilon) = x + \varepsilon\xi(x,y) + o\left(\varepsilon^2\right) \\
y^* &= Y(x,y;\varepsilon) = y + \varepsilon\eta(x,y) + o\left(\varepsilon^2\right) \\
y_1^* &= Y_1(x,y,y_1;\varepsilon) = y_1 + \varepsilon\eta^{(1)}(x,y,y_1) + o\left(\varepsilon^2\right) \\
& \quad .... \\
y_k^* &= Y_k(x,y,y_1,...,y_k;\varepsilon) = y_k + \varepsilon\eta^{(k)}(x,y,y_1,...,y_k) + o\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}$$

şeklinde verilir. k. uzanımın sonsuz küçükleri

$$\xi(x,y), \eta(x,y), \eta^{(1)}(x,y,y_1), ..., \eta^{(k)}(x,y,y_1,...,y_k)$$

olur ve sonsuz küçük üretecide

$$\begin{aligned}
X^{(k)} &= \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x,y,y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + ... \\
& \quad ... + \eta^{(k)}(x,y,y_1,...,y_k)\frac{\partial}{\partial y_k}
\end{aligned}$$

olur. $k = 1, 2, ...$ için uzanımın $\eta^{(k)}$ şeklindeki sonsuz küçükleri

$$\eta^{(0)} = \eta(x,y)$$

olmak üzere

$$\eta^{(k)}(x,y,y_1,...,y_k) = \frac{D\eta^{(k-1)}}{Dx} - y_k\frac{D\xi(x,y)}{Dx}$$

formülü ile bulunur. Verilen formüle göre

$$\begin{aligned}
\eta^{(1)} &= \eta_x + \left(\eta_y - \xi_x\right)y_1 - \xi_y\left(y_1\right)^2 \\
\eta^{(2)} &= \eta_{xx} + \left(2\eta_{xy} - \xi_{xx}\right)y_1 + \left(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}\right)\left(y_1\right)^2 \\
& \quad -\xi_{yy}\left(y_1\right)^3 + \left(\eta_y - 2\xi_x\right)y_2 - 3\xi_y y_1 y_2 \\
\eta^{(3)} &= \eta_{xxx} + \left(3\eta_{xxy} - \xi_{xxx}\right)y_1 + 3\left(\eta_{xyy} - \xi_{xxy}\right)\left(y_1\right)^2 \\
& \quad + \left(\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy}\right)\left(y_1\right)^3 - \xi_{yyy}\left(y_1\right)^4 + 3\left(\eta_{xy} - \xi_{xx}\right)y_2 \\
& \quad +3\left(\eta_{yy} - 3\xi_{xy}\right)y_1 y_2 - 6\xi_{yy}\left(y_1\right)^2 y_2 - 3\xi_y\left(y_2\right)^2 \\
& \quad + \left(\eta_y - 3\xi_x\right)y_3 - 4\xi_y y_1 y_3
\end{aligned}$$

olur.

Bir bağımlı ve n bağımsız değişken için uzanım formülleri

u bağımlı değişken, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ bağımsız değişkenler ve $u=u(x)$ olsun.

$$x_i^*=X_i(x,u;\varepsilon)=x_i+\varepsilon\xi_i(x,u)+o\left(\varepsilon^2\right) \tag{2.18}$$

$$u^*=U(x,u;\varepsilon)=u+\varepsilon\eta(x,u)+o\left(\varepsilon^2\right) \tag{2.19}$$

bir parametreli Lie grup dönüşümleri verilsin. $i=1,2,...,n$ olmak üzere (x,u) uzayında sonsuz küçük üreteci

$$X=\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

şeklinde olur.

(2.18) ve (2.19) un k. uzanımı

$$\begin{aligned}
x_i^* &= X_i(x,u;\varepsilon)=x_i+\varepsilon\xi_i(x,u)+o\left(\varepsilon^2\right)\\
u^* &= U(x,u;\varepsilon)=u+\varepsilon\eta(x,u)+o\left(\varepsilon^2\right)\\
u_i^* &= U_i(x,u,\partial u;\varepsilon)=u_i+\varepsilon\eta_i^{(1)}(x,u,\partial u)+o\left(\varepsilon^2\right)\\
&\quad ....\\
u_{i_1i_2...i_k}^* &= U_{i_1i_2...i_k}\left(x,u,\partial u,...,\partial^k u;\varepsilon\right)\\
&= u_{i_1i_2...i_k}+\varepsilon\eta_{i_1i_2...i_k}^{(k)}\left(x,u,\partial u,...,\partial^k u\right)+o\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}$$

dır. Burada $i=1,2,...,n$ ve $l=1,2,...,k$ için $i_l=1,2,...,n$ ayrıca $k\geq 1$ dir. $\partial^k u$, u nun x e göre bütün k. mertebeden kısmi türev bileşenlerini gösterir. k. uzanımın sonsuz küçükleri

$$\xi(x,u),\eta(x,u),\eta^{(1)}(x,u,\partial u),...,\eta^{(k)}\left(x,u,\partial u,...,\partial^k u\right)$$

olur ve sonsuz küçük üreteci de

$$X^{(k)}=\xi^i\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta\frac{\partial}{\partial u}+\eta_i^{(1)}\frac{\partial}{u_i}+...+\eta_{i_1i_2...i_k}^{(k)}\frac{\partial}{u_{i_1i_2...i_k}},k\geq 1$$

şeklinde olur.

$k\geq 2$ için uzanımın $\eta_{i_1i_2...i_k}^{(k)}$ şeklindeki sonsuz küçükleri

$$\begin{aligned}
\eta_i^{(1)} &= D_i\eta-\left(D_i\xi_j\right)u_j, i=1,2,...,n\\
\eta_{i_1i_2...i_k}^{(k)} &= D_{i_k}\eta_{i_1i_2...i_{k-1}}^{(k-1)}-\left(D_{i_k}\xi_j\right)u_{i_1i_2...i_{k-1}j}
\end{aligned}$$

$l = 1, 2, ..., k$ için $i_l = 1, 2, ..., n$ dir.

x_1 ve x_2 bağımsız değişkenler ve u bağımlı değişken olmak üzere $\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \eta_{11}^{(2)}$, $\eta_{12}^{(2)}, \eta_{22}^{(2)}$ aşağıdaki gibidir.

$$\eta_1^{(1)} = \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\right] u_1 - \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} u_2 - \frac{\partial \xi^1}{\partial u} (u_1)^2 - \frac{\partial \xi^2}{\partial u} u_1 u_2 \tag{2.20}$$

$$\eta_2^{(1)} = \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2}\right] u_2 - \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} u_1 - \frac{\partial \xi^2}{\partial u} (u_2)^2 - \frac{\partial \xi^1}{\partial u} u_1 u_2 \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} \eta_{11}^{(2)} = {} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \left[2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial x_1^2}\right] u_1 - \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x_1^2} u_2 \\ & + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - 2\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1}\right] u_{11} - 2\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} u_{12} - 2\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x_1 \partial u} u_1 u_2 \\ & + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial x_1 \partial u}\right] (u_1)^2 - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial u^2} (u_1)^3 \\ & - 3\frac{\partial \xi^1}{\partial u} u_1 u_{11} - \frac{\partial \xi^2}{\partial u} u_2 u_{11} - 2\frac{\partial \xi^2}{\partial u} u_1 u_{12} - \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial u^2} (u_1)^2 u_2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} \eta_{12}^{(2)} = {} & \eta_{21}^{(2)} \\ = {} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right] u_2 + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial x_1 \partial x_2}\right] u_1 \\ & - \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} u_{22} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2}\right] u_{12} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} u - \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x_1 \partial u} (u_2)^2 \\ & + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial x_2 \partial u}\right] u_1 u_2 - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial x_2 \partial u} (u_1)^2 \\ & - \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial u^2} u_1 (u_2)^2 - \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial u^2} (u_1)^2 u_2 - 2\frac{\partial \xi^2}{\partial u} u_2 u_{12} \\ & - 2\frac{\partial \xi^1}{\partial u} u_1 u_{12} - \frac{\partial \xi^1}{\partial u} u_2 u_{11} - \frac{\partial \xi^2}{\partial u} u_1 u_{22} \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{22}^{(2)} &= \frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2} + \left[2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2\partial u} - \frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_2^2}\right]u_2 - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_2^2}u_1 - 2\frac{\partial\xi^1}{\partial x_2}u_{12} \\
&+ \left[\frac{\partial\eta}{\partial u} - 2\frac{\partial\xi^2}{\partial x_2}\right]u_{22} + \left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_2\partial u}\right](u_2)^2 \\
&-2\frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_2\partial u}u_1u_2 - \frac{\partial^2\xi^2}{\partial u^2}(u_2)^3 - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial u^2}u_1(u_2)^2 \\
&-3\frac{\partial\xi^2}{\partial u}u_2u_{22} - \frac{\partial\xi^1}{\partial u}u_1u_{22} - 2\frac{\partial\xi^1}{\partial u}u_2u_{12}
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

burada

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \\
u_{11} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

m bağımlı ve n bağımsız değişken için uzanım formülleri

$u = (u^1, u^2, ..., u^m)$ bağımlı değişkenler, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bağımsız değişkenler olmak üzere $u = u(x)$ ve $m \geq 2, n \geq 2$ olsun.

$$x_i^* = X_i(x, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon\xi_i(x, u) + o\left(\varepsilon^2\right) \tag{2.25}$$

$$(u^\mu)^* = U^\mu(x, u; \varepsilon) = u^\mu + \varepsilon\eta^\mu(x, u) + o\left(\varepsilon^2\right) \tag{2.26}$$

bir parametreli Lie grup dönüşümleri verilsin.

(2.25) ve (2.26) nın k. uzanımı

$$
\begin{aligned}
x_i^* &= X_i(x, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon\xi_i(x, u) + o\left(\varepsilon^2\right) \\
(u^\mu)^* &= U^\mu(x, u; \varepsilon) = u^\mu + \varepsilon\eta^\mu(x, u) + o\left(\varepsilon^2\right) \\
(u_i^\mu)^* &= U_i^\mu(x, u, \partial u; \varepsilon) = u_i^\mu + \varepsilon\eta_i^{(1)\mu}(x, u, \partial u) + o\left(\varepsilon^2\right) \\
& \quad .... \\
\left(u_{i_1i_2...i_k}^\mu\right)^* &= U_{i_1i_2...i_k}^\mu\left(x, u, \partial u, ..., \partial^k u; \varepsilon\right) \\
&= u_{i_1i_2...i_k}^\mu + \varepsilon\eta_{i_1i_2...i_k}^{(k)\mu}\left(x, u, \partial u, ..., \partial u^k\right) + o\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned}
$$

dır. Burada $\mu = 1, 2, ..., m,\ i = 1, 2, ..., n$ ve $l = 1, 2, ..., k$ için $i_l = 1, 2, ..., n$ ayrıca $k \geq 2$ dir. $\partial^k u$, u nun x e göre bütün k. mertebeden kısmi türev bileşenlerini gösterir. k. uzanımın sonsuz küçük üreteci

$$X^{(k)} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} + \eta_i^{(1)\mu} \frac{\partial}{u_i^\mu} + ... + \eta_{i_1 i_2 ... i_k}^{(k)\mu} \frac{\partial}{u_{i_1 i_2 ... i_k}^\mu}, k \geq 1$$

şeklinde olur.

$k \geq 2$ için uzanımın $\eta_{i_1 i_2 ... i_k}^{(k)\mu}$ şeklindeki sonsuz küçükleri

$$\begin{aligned} \eta_i^{(1)\mu} &= D_i \eta^\mu - \left(D_i \xi_j\right) u_j^\mu \\ \eta_{i_1 i_2 ... i_k}^{(k)\mu} &= D_{i_k} \eta_{i_1 i_2 ... i_{k-1}}^{(k-1)\mu} - \left(D_{i_k} \xi_j\right) u_{i_1 i_2 ... i_{k-1} j}^\mu \end{aligned}$$

şeklindedir. $l = 1, 2, ..., k$ için $i_l = 1, 2, ..., n$ dir.

n. mertebeden diferensiyel denkleme sonsuz küçük üreteci uygulayabilmek için n. uzanıma ihtiyaç vardır (Bluman and Kumei, 1989).

2.2.11 Lie cebiri

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve ε parametresi $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_r)$ şeklinde olmak üzere

$$x^* = X\left(x; \varepsilon\right)$$

r parametreli Lie grup döünüşümünü

$$\begin{aligned} \xi^{\alpha j}\left(x\right) &= \frac{\partial x_j^*}{\partial \varepsilon_\alpha} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial X_j\left(x; \varepsilon\right)}{\partial \varepsilon_\alpha} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &\quad (\alpha = 1, ..., r, j = 1, ..., n) \end{aligned}$$

olduğunda

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi^{\alpha j}\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_j}, \alpha = 1, ..., r$$

sonsuz küçük üreteci ile düşünelim. Bu durumda X_γ ve X_β nın komütatörü $[,]$

$$\begin{aligned} \left[X_\gamma, X_\beta\right] &= X_\gamma X_\beta - X_\beta X_\gamma \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\left(\xi^{\gamma i}\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \left(\xi^{\beta j}\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \left(\xi^{\beta i}\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \left(\xi^{\gamma j}\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \eta^j\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\eta^{j}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\xi^{\gamma i}(x) \frac{\partial \xi^{\beta j}(x)}{\partial x_i} - \xi^{\beta i}(x) \frac{\partial \xi^{\gamma j}(x)}{\partial x_i} \right]$$

dir.

$\mathcal{F}$ bir cisim ve $\mathcal{L}$ bu cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $\mathcal{L}$ vektör uzayı komütatör işlemine göre kapalı ise $\mathcal{L}$ ye r boyutlu **Lie cebiri** denir. $\mathcal{L}^r$ ile gösterilir. Lie cebiri aşağıdaki özellikleri sağlar.

$X_\alpha, X_\beta, X_\gamma \in \mathcal{L}$ ve $a, b \in \mathcal{F}$ olmak üzere

1) Anti simetri özelliği

$$[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha]$$

2) Bi-lineerlik Özelliği

$$[X_\alpha, aX_\beta + bX_\gamma] = a[X_\alpha, X_\beta] + b[X_\alpha, X_\gamma]$$

ve

$$[aX_\beta + bX_\gamma, X_\alpha] = a[X_\beta, X_\alpha] + b[X_\gamma, X_\alpha]$$

3) Jakobi Özdeşliği

$$[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta, [X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = 0$$

4) $\forall X_\alpha \in \mathcal{L}$ için

$$[X_\alpha, X_\alpha] = 0$$

Eğer herhangi bir $X_\beta, X_\gamma \in \mathcal{L}^r$ için

$$[X_\beta, X_\gamma] = 0$$

ise Lie cebirine **değişmeli (abelyan)** denir.

Özel olarak $\mathcal{L}$ vektör uzayı $\mathbb{R}$ cismi üzerinde Lie cebiri ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

$X_\alpha, X_\beta, X_\gamma \in \mathcal{L}^r, a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

1)$aX_\alpha + bX_\beta \in \mathcal{L}^r$

2)$X_\alpha + X_\beta = X_\beta + X_\alpha$

3)$X_\alpha + (X_\beta + X_\gamma) = (X_\alpha + X_\beta) + X_\gamma$

4) $[X_\alpha, X_\beta] \in \mathcal{L}^r$

5) $[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha]$

6) $[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta, [X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = 0$

7) $[aX_\alpha, bX_\beta, X_\gamma] = a[X_\alpha, X_\gamma] + b[X_\beta, X_\gamma]$

(Bluman and Kumei, 1989).

n. mertebeden bir diferensiyel denklemin bir Lie grubunu kabul etmesi, Lie grubunun sonsuz küçük üretecinin diferensiyel denkleme uygulanmasının diferensiyel denklemin tanımlandığı manifold üzerinde sonucun sıfır vermesi anlamına gelir. Bununla birlikte bir diferensiyel denklemin bir Lie grubunu kabul etmesi, Lie grubunun diferensiyel denklemin çözümlerini denklemin başka çözümlerine dönüştürmesi anlamını taşır. Eğer diferensiyel denklemin mertebesi birden büyükse sonsuz küçük üretecinin ilgili diferensiyel denkleme uygulanması sonucu sonsuz küçük üretecinin katsayıları cinsinden çok belirli bir kısmi türevli diferensiyel denklem takımına ulaşılır. Bu denklem takımının çözümleri diferensiyel denklemin kabul ettiği Lie gruplarının tamamını verir. Eğer bir adi diferensiyel denklemin r parametreli bir Lie grubu varsa diferensiyel denklem $(n-r)$. mertebeden bir diferensiyel denkleme indirgenebilir. Eşleşen r parametreli Lie cebiri, çözümlenebilir Lie cebiri ise ve $(n-r)$. mertebeden diferensiyel denklemin integrali bulunuyorsa bu integralden esas diferensiyel denklemin çözümü r kere ardışık kuadratür ile bulunur. Çözümlenebilen n elemanlı bir Lie cebirinin $(n-1)$ elemanlı bir alt cebiri vardır ve bu alt cebirin elemanları ile Lie cebirinin elemanlarının çarpımı yine alt cebir içerisinde kalır. $(n-1)$ elemanlı Lie cebirinin aynı özelliği taşıyan $(n-2)$ elemanlı bir alt cebiri vardır. Böylece devam ederek 2 elemanlı bir alt cebire ulaşılabilir (Yaşar, 2009).

2.2.12 Lie-Bäcklund operatörü

$f\left(x, u, u_{(1)}, ..., u_{(k)}\right)$ fonksiyonlarının sonlu sayıdaki argumanlarına göre yerel (lokal) olarak analitik olduğunu yani tüm argumanlarına göre yerel olarak yakınsak bir taylor serisine açılabildiğini düşünelim. Böyle fonksiyonlara genel olarak Ritt'in diferensiyel polinomları denir ve sonlu mertebeden diferensiyel fonksiyonlar olarak adlandırılırlar. Burada mertebe f deki en yüksek türevi anlatır. Tüm sonlu mertebeli diferensiyel fonksiyonların kümesi $\mathcal{A}$ ile gösterilsin. Bu uzay fonksiyonların bilinen toplama işlemine göre bir vektör uzayıdır ve eğer çarpma işlemi fonksiyonların bilinen çarpma işlemi ile tanımlanırsa, değişmeli cebir olur. Ayrıca $\mathcal{A}$ uzayı (2.13) ile verilen total türev operatörü altında kapalıdır.

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \left(\xi^i, \eta^\alpha \in \mathcal{A}\right) \tag{2.27}$$

formundaki operatörleri düşünelim.

$$\begin{aligned} \zeta_i^\alpha &= D_i \left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right) + \xi^j u_{ji}^\alpha \\ \zeta_{i_1 i_2}^\alpha &= D_{i_1} D_{i_2} \left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right) + \xi^j u_{j i_1 i_2}^\alpha \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2.28}$$

olmak üzere bütün türevlerin uzanımı

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \zeta_{i_1 i_2}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} + \ldots \tag{2.29}$$

ile gösterilsin. Burada ξ^i ve η^α sonlu mertebeden diferensiyel fonksiyonlardır yani $\xi^i, \eta^\alpha \in \mathcal{A}$ dır.

(2.29) ile verilen operatöre **Lie-Bäcklund operatörü** denir. Ayrıca kısaltılmış olarak verilen (2.27) operatörü de Lie-Bäcklund operatörü olarak adlandırılır.

$[[\mathcal{A}]]$ ile; katsayıları $\mathcal{A}$ kümesinde bulunan formal kuvvet serilerinin uzayı gösterilsin (formal kuvvet serisi yakınsaklığı incelenmeden verilen seridir).

Aşağıdaki teoremle Ibragimov herhangi bir Lie-Bäcklund operatörünün $[[\mathcal{A}]]$ uzayında bulunan tanjant dönüşümlerinin formal bir parametreli grubu ürettiğini belirtir.

Teorem: (2.27) gibi herhangi bir Lie-Bäcklund operatörü verilsin. Burada $[[\mathcal{A}]]$ uzayında Lie-Bäcklund denklemlerinin var olan tek çözümü

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{x}_i}{\partial a} &= \xi^i \left(\overline{x}, \overline{u}, ..., \overline{u}_l\right) \quad , \overline{x}_i \Big|_{a=0} = x_i \\ \frac{\partial \overline{u}^\alpha}{\partial a} &= \eta^\alpha \left(\overline{x}, \overline{u}, ..., \overline{u}_k\right) \quad , \overline{u}^\alpha \Big|_{a=0} = u^\alpha \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2.30}$$

şeklindedir. Bu çözüm formal kuvvet serileri ile

$$\begin{aligned} \overline{x}_i &= x_i + \sum_{s=1}^{\infty} A_s^i a^s \\ \overline{u}^\alpha &= u^\alpha + \sum_{s=1}^{\infty} B_s^\alpha a^s \end{aligned} \tag{2.31}$$

şeklinde verilir. Burada katsayılar $A_s^i, B_s^\alpha \in \mathcal{A}$ dır ve

$$\begin{aligned} A_1^i &= \xi^i (x, u, ..., u_l) \\ B_1^\alpha &= \eta^\alpha (x, u, ..., u_k) \end{aligned}$$

dır. Formal bir parametreli grup

$$\begin{aligned} du^\alpha - u_j^\alpha dx_j &= 0 \\ du_i^\alpha - u_{ij}^\alpha dx_j &= 0 \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2.32}$$

sonlu mertebeden teğet koşullarını değişmez bırakır.

Yukarıdaki teoremde elde edilen formal gruplar **formal Lie-Bäcklund dönüşüm grupları** olarak adlandırılır. Herhangi bir formal Lie-Bäcklund dönüşüm grubu formal kuvvet serileri ile verilir ve Lie-Bäcklund operatörü ile oluşturulur.

Eğer (2.31) ile verilen seri yakınsak ise formal Lie-Bäcklund dönüşüm grubu yerel bir parametreli gruptur ve **bir parametreli Lie-Bäcklund dönüşüm grubu** adı verilir.

Teorem: $F \in \mathcal{A}$ k.mertebeden diferensiyel fonksiyon olmak üzere ;

$$F\left(x, u, u_{(1)}, ..., u_{(k)}\right) = 0 \tag{2.33}$$

k. mertebeden diferensiyel denklemi düşünelim. $[F]$ ile; (2.33) ile verilen denklemin kendisini ve bütün türevli dizilerini gösterelim. Bu durumda (2.33) denklemi eğer

$$XF \underset{[F]}{|} = 0 \tag{2.34}$$

ise X Lie-Bäcklund operatörü tarafından üretilen formal Lie-Bäcklund dönüşüm grubunu kabul eder.

(2.34) denklemi Lie-Bäcklund simetri grubunun **belirleyici (determining) denklemi** olarak adlandırılır.

Belirleyici denklemin sonucunda

$$X_* \;=\; \xi^i D_i \quad ,\left(\xi^i \in \mathcal{A}, i=1,...,n\right) \tag{2.35}$$

formunda bütün Lie-Bäcklund operatörleri herhangi diferensiyel denklem tarafından kabul edilir.

(2.35) operatörleri için Lie-Bäcklund denklemlerinin çözülebilir olduğuna dikkat çekeriz. Üstelik tüm (2.35) operatörlerinin kümesi bütün Lie-Bäcklund operatörlerinin Lie cebirinde bir idealdir.

(2.27) ile verilen Lie-Bäcklund operatörünü $\xi^i = 0$ ile düşünürsek;

$$X \;=\; \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad , (\eta^\alpha \in \mathcal{A}, \alpha = 1, \ldots, m) \tag{2.36}$$

olarak bulunur ve **kanonik Lie-Bäcklund operatörü** denir. Özellikle bütün (2.27) operatörleri aşağıdaki şekilde kanonik forma dönüştürülebilir (Ibragimov, 1993).

$$\begin{aligned} \overline{X} \;&=\; X - \xi^i D_i = \left(\eta^\alpha - \xi^i u_i^\alpha\right) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + ... \\ &\quad (i=1,...,n) \end{aligned} \tag{2.37}$$

Örnek: t, x bağımsız değişkenler olsun. Galilean dönüşüm üreteci ve onun kanonik Lie-Bäcklund formu olan (2.37)

$$X = \frac{\partial}{\partial u} - t\frac{\partial}{\partial x} \sim \overline{X} = (1 + tu_x)\frac{\partial}{\partial u} + ...$$

şeklindedir (Yaşar, 2009).

Örnek: Homojen olmayan genleşme üreteci ve onun kanonik Lie-Bäcklund temsili (2.37)

$$X = 2u\frac{\partial}{\partial u} - 3t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x} \sim \overline{X} = (2u + 3tu_t + xu_x)\frac{\partial}{\partial u} + ...$$

şeklindedir (Yaşar, 2009).

Örnek:

$$u_t = u_{xx} \tag{2.38}$$

bir boyutlu ısı denkleminin Lie simetri üreteçlerini bulunuz.

x, t bağımsız değişkenler ve u bağımlı değişken olduğundan simetri üreteci

$$X = \xi\,(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau\,(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi\,(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.39}$$

formunda olur.

İkinci mertebeden diferensiyel denklemler için (2.39) simetri üretecinin ikinci uzanımına ihtiyacımız vardır. O halde ikinci uzanım

$$X^2 = X + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} \tag{2.40}$$

şeklindedir.

$$X^2 \left(u_t - u_{xx}\right) = 0$$

şeklinde (2.40) şeklindeki 2. uzanımı (2.38) denklemine uyguladığımızda

$$\phi^t - \phi^{xx} = 0 \tag{2.41}$$

olarak bulunur. ϕ^t, ϕ^{xx} değerleri ve u_t yerine u_{xx} değeri (2.41) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} &\phi_t + (\phi_u - \tau_t)\, u_{xx} - \xi_t u_x - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 - \phi_{xx} \\ &- (2\phi_{xu} - \xi_{xx})\, u_x + \tau_{xx} u_{xx} - (\phi_{uu} - 2\xi_{ux})\, u_x^2 \\ &+ 2\tau_{xu} u_x u_{xx} + \xi_{uu} u_x^3 + \tau_{uu} u_x^2 u_{xx} - (\phi_u - 2\xi_x)\, u_{xx} + 2\tau_x \\ &u_{xt} + 3\xi_u u_x u_{xx} + \tau_u u_{xx}^2 + 2\tau_u u_x u_{xt} = 0 \end{aligned} \tag{2.42}$$

olarak bulunur. (2.42) denklemindeki u nun türevlerinden

$$\begin{aligned} u_t u_{xt} &: \ \tau_u = 0 \\ u_{xt} &: \ \tau_x = 0 \\ u_{xx}^2 &: \ \tau_u = \tau_u \\ u_x^2 u_{xx} &: \ \tau_{uu} = 0 \\ u_x u_{xx} &: \ \xi_u = 2\tau_{xu} + 3\xi_u \\ u_{xx} &: \ \tau_t - \phi_u = \tau_{xx} - \phi_u + 2\xi_x \\ u_x^3 &: \ \xi_{uu} = 0 \\ u_x^2 &: \ \phi_{uu} = 2\xi_{xu} \\ u_x &: \ \xi_t = \xi_{xx} - 2\phi_{xu} \\ sabitler &: \ \phi_t = \phi_{xx} \end{aligned} \tag{2.43}$$

belirleyici denklemleri bulunur. (2.43) belirleyici denklemlerini çözersek

$$
\begin{aligned}
\tau &= c_1 t^2 + c_2 t + c_3 \\
\xi &= c_1 t x + \frac{1}{2} c_2 x + c_4 t + c_5 \qquad (2.44) \\
\phi &= \left(-\frac{1}{4} c_1 x^2 - \frac{1}{2} c_4 x - \frac{1}{2} c_1 t + c_6 \right) u + \alpha
\end{aligned}
$$

bulunur. (2.44) teki değerlerde $i = 1, 2, ..., 6$ ve $\forall i \neq j$ için $c_i = 1$ ve $c_j = 0$ dediğimizde aşağıdaki 7 tane Lie simetri üretecini buluruz.

$$
\begin{aligned}
X_1 &= u \frac{\partial}{\partial u} && (c_6 = 1) \\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial x} && (c_5 = 1) \\
X_3 &= t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{xu}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} && (c_4 = 1) \\
X_4 &= \frac{\partial}{\partial t} && (c_3 = 1) \qquad (2.45) \\
X_5 &= \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} && (c_2 = 1) \\
X_6 &= xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{x^2 u}{4} + \frac{ut}{2} \right) \frac{\partial}{\partial u} && (c_1 = 1) \\
X_\alpha &= \alpha \frac{\partial}{\partial u}
\end{aligned}
$$

Şimdi (2.45) te bulunan Lie simetrilerinin komütatör tablosunu çizelim.

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	0	0	X_1	$-X_3$	$2X_5$
X_2	0	0	0	$2X_2$	$2X_1$	$4X_4-2X_3$
X_3	0	0	0	0	0	0
X_4	$-X_1$	$-2X_2$	0	0	X_5	$2X_6$
X_5	X_3	$-2X_1$	0	$-X_5$	0	0
X_6	$-2X_5$	$2X_3-4X_4$	0	$-2X_6$	0	0

(2.46)

(Ahmad, 2005).

BÖLÜM 3

KORUNUMLULUK KANUNLARININ BULUNMASI

Bu bölümde korunumluluk kanunlarını bulmak için gerekli olan Euler-Lagrange operatörleri, eşlenik denklem sistemleri, eşlenik denklem sistemleri kullanılarak formal Lagrangianların bulunması, temel korunumluluk teoreminden bahsedeceğiz ve korunumluluk kanunları bulunmuş bir örneği vereceğiz.

3.1 Euler-Lagrange Operatörü

$\mathcal{A}$ uzayında Euler-Lagrange operatörü

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u^{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{s} D_{i_1} \ldots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{i_1 \ldots i_s}} \\ & (\alpha = 1, ..., m) \end{aligned} \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır. Burada herbir s için toplamın 1 den n ye kadar olan $i_1, ..., i_s$ tekrar eden indislerin üzerinde olduğu anlaşılır. Örneğin f fonksiyonunda en yüksek türevin mertebesi 2 ve 1 bağımlı değişken ve 3 bağımsız değişken olsun. u bağımlı değişken ve x, y, z bağımsız değişkenler olmak üzere Euler-Lagrange operatörü;

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u} &= \frac{\partial}{\partial u} + (-1) \left[D_x \frac{\partial}{\partial u_x} + D_y \frac{\partial}{\partial u_y} + D_z \frac{\partial}{\partial u_z} \right] \\ & + (-1)^2 \left[D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + D_y^2 \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + D_z^2 \frac{\partial}{\partial u_{zz}} \right] \\ & + (-1)^2 \left[D_x D_y \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + D_x D_z \frac{\partial}{\partial u_{xz}} + D_y D_z \frac{\partial}{\partial u_{yz}} \right] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $D_x, D_y, D_z, D_x^2, D_y^2, D_z^2, D_x D_y, D_x D_z, D_y D_z$ total türevi gösterir (Eriksson, 2008).

$\frac{\delta}{\delta u^{\alpha}}$ türevine **varyasyonel türev** denir ve

$$\frac{\delta}{\delta u^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + \sum_{s \geq 1} (-1)^{s} D_{i_1} ... D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{i_1 \ldots i_s}}, (\alpha = 1, 2, ..., m) \tag{3.2}$$

olarak tanımlanır (Olver, 1993).

3.1.1 Euler-Lagrange denklemi

$$L = L\left(x, u, u_1, ..., u_k\right) \in \mathcal{A} \tag{3.3}$$

Lagrangian olmak üzere;

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} = 0, (\alpha = 1, ..., m) \tag{3.4}$$

diferensiyel denklemine **Euler-Lagrange denklemi** denir (Ibragimov, 1993).

3.1.2 N^i operatörü

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha \tag{3.5}$$

olmak üzere

$$X = \xi^i D_i + W^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + D_i\left(W^\alpha\right) \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + D_{i_1 i_2}\left(W^\alpha\right) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} + ... \tag{3.6}$$

şeklindeki Lie-Bäcklund operatörü verilsin. $i = 1, ..., n$ olmak üzere n li N^i operatörü bilinen toplam ile

$$N^i = \xi^i + W^\alpha \frac{\delta}{\delta u_i^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \dots D_{i_s}\left(W^\alpha\right) \frac{\delta}{\delta u_{i i_1 \dots i_s}^\alpha} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır (Eriksson, 2008).

Teorem: (3.1) ile verilen Euler-Lagrange operatörü,(3.6) ile verilen Lie-Bäcklund operatörü ve (3.7) ile verilen N^i operatörleri arasında aşağıdaki bağıntı vardır.

$$X + D_i\left(\xi^i\right) = W^\alpha \frac{\delta}{\delta u^\alpha} + D_i N^i \tag{3.8}$$

Burada;

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha, (\alpha = 1, ..., m)$$

dir ve m bağımlı değişken sayısıdır (Eriksson, 2008).

(3.8) ile verilen özdeşlik operatörüne **Noether özdeşliği** denir.

Teorem: Basit olarak $i = 1, ..., n$ ve $\alpha = 1, ..., m$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \overline{x}_i &= f^i\left(x, u, a\right) \\ \overline{u}^\alpha &= \varphi^\alpha\left(x, u, a\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

bir parametreli nokta dönüşüm grubu G yi düşünelim.

$$X = \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{3.10}$$

G nin sonsuz küçük üreteci olsun. G grubu altında herhangi bir $u(x)$ fonksiyonu $\overline{u}(\overline{x})$ fonksiyonuna ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ alanı $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ alanına dönüşür.

Tanım: Eğer her bir Ω alanı ve bütün $u(x)$ düzgün fonksiyonları için

$$\int_\Omega L\left(x, u(x), u_{(1)}(x), ..., u_{(k)}(x)\right) dx = \int_{\overline{\Omega}} L\left(\overline{x}, \overline{u}(\overline{x}), \overline{u}_{(1)}(\overline{x}), ..., \overline{u}_{(k)}(\overline{x})\right) d\overline{x} \tag{3.11}$$

türünde integral varsa (3.9) dönüşümlerinin G grubunun altında

$$\int_\Omega L dx \quad , \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

integralinin değişmez olduğu söylenir.

Teorem: (3.10) sonsuz küçük üreteci ile verilen G nokta dönüşümlerinin grubu altında

$$\int_\Omega L dx \quad , \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

integralinin değişmez olması için gerek ve yeter şart

$$X(L) + LD_i\left(\xi^i\right) = 0 \tag{3.12}$$

olmasıdır.

Aşağıdaki Noether teoreminin özel durumu (3.8) ve (3.12) formüllerinin doğrudan sonucudur.

Teorem: Eğer

$$\int_\Omega L dx \quad , \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

integrali (3.10) sonsuz küçük üreteci ile G grubunun işlemleri altında değişmez ise

$$T^i = N^i(L) \tag{3.13}$$

ile tanımlanan $\mathbf{T} = (T^1, ..., T^n)$ vektörü (3.4) ile verilen Euler-Lagrange denklemi için **korunmuş vektördür**.

Noether; dönüşüm grubunun var olduğunu yani türevleri içerdiğini varsayarak teoremini bu durum için formüle etti. Yukarıdaki teoremin bu genellemesi Noether'in teoreminin bugün ne anlam taşıdığını göstermektedir.

Noether'in Teoremi

Emmy Noether bu teoremini 1918 de ortaya koymustur. Teoremin amacı varyasyonellik ilkesini kabul eden diferensiyel denklem sistemlerinin Euler-Lagrange denklemleri ve simetrileri bilindiğinde yerel korunumluluk kanunlarını bulmaktır.

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + ..., \left(\xi^i, \eta^\alpha \in \mathcal{A}\right) \tag{3.14}$$

Lie-Bäcklund operatörü ile verilen

$$Ldx$$

diferensiyel $n - formu$ bu formal gruba göre değişmez olması için gerek ve yeter şart

$$X(L) + LD_i\left(\xi^i\right) = 0 \tag{3.15}$$

olmasıdır (Ibragimov, 1993).

Not: $\mathbf{T} = (T^1, T^2, ..., T^n)$ vektörünün korunmuş vektör olması için

$$D_i\left(T^i\right) = 0 \tag{3.16}$$

olması gerekir.

Teorem: $L\left(x, u, u_{(1)}, ..., u_{(k)}\right) \in \mathcal{A}$ olmak üzere herhangi bir mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda Euler-Lagrange denklemlerinin

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} = 0, (\alpha = 1, ..., m) \tag{3.17}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Bu durumda;

$$X(L) + LD_i\left(\xi^i\right) = D_i\left(B^i\right) \quad, \left(B^i \in \mathcal{A}\right)$$

olduğunda (3.17) denklemleri için aşağıdaki gibi tanımlanan korunumluluk kanunları bulunur.

$$T^i = N^i(L) - B^i \quad, (i = 1, ..., n) \tag{3.18}$$

Buradaki N^i önceden tanımlanmıştı.

Not: Eğer diferensiyel denklem

$$X=\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

formunda $X_1, X_2, ..., X_r$ olmak üzere r tane simetriye sahipse yani;

$$X_\mu = \xi^i_\mu(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta^\alpha_\mu(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad ,(\mu=1,2,...,r)$$

ise;

$$T^i = L\xi^i+\left(\eta^\alpha-\xi^i u^\alpha_j\right)\frac{\partial L}{\partial u^\alpha_i} \quad ,(i=1,2,...,n)$$

korunmuş vektörü $T_1, T_2, ..., T_r$ olmak üzere r tane

$$T^i_\mu = L\xi^i_\mu+\left(\eta^\alpha_\mu-\xi^i_\mu u^\alpha_j\right)\frac{\partial L}{\partial u^\alpha_i} \quad ,(\mu=1,2,...,r)$$

şeklinde korunmuş vektörleri üretir (Eriksson, 2008).

3.2 Eşlenik (Adjoint) Denklemler

L herhangi bir mertebeden lineer diferensiyel operatör olsun. L nin L^* olan eşlenik operatörü $\forall u, w$ için

$$wL[u]-uL^*[w]=D_i\left(P^i\right)$$

olarak verilir. Burada $P=(p^1,...,p^n)$ şeklinde vektör alanıdır. $L^*[w]=0$ ifadesine $L[u]=0$ ın **eşlenik denklemi** denir.

Genel olarak ikinci mertebeden L oparatörü;

$$L=a^{ij}(x)D_iD_j+b^i(x)D_i+c(x)$$

şeklindedir. Burada $i,j=1,2,...,n$ ve katsayılar simetriktir yani $a^{ij}=a^{ji}$.

Teorem: L nin L^* eşlenik operatörü

$$L^*[w]=D_iD_j\left(a^{ij}w\right)-D_i\left(b^iw\right)+cw$$

formundadır (Eriksson, 2008).

3.2.1 Öz eşlenik (self adjoint) denklemler

Herhangi bir u fonksiyonu için

$$L[u] = L^*[u]$$

oluyorsa L operatörüne **öz eşleniktir** denir (Eriksson, 2008).

Teorem: $L = a^{ij}(x) D_i D_j + b^i(x) D_i + c(x)$ operatörünün öz eşlenik olması için gerek ve yeter şart $b^i(x) = D_j(a^{ij})$ olmasıdır.

3.2.2 Keyfi diferensiyel denklemlerin eşlenik denklem sistemleri

$$F_\alpha\left(x, u, u_{(1)}, ..., u_{(k)}\right) = 0 \quad , (\alpha = 1, ..., m) \tag{3.19}$$

şeklinde k.mertebeden kısmi diferensiyel denklemler sistemini düşünelim.

Burada $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bağımsız değişkenler ve $u = (u^1, u^2, ..., u^m)$ bağımlı değişkenler ve $F_\alpha\left(x, u, u_{(1)}, ..., u_{(k)}\right) \in \mathcal{A}$ diferensiyel fonksiyonlar olsun. Bu durumda (3.19) denklemi için **eşlenik denklem sistemi**;

$$F^*_\alpha\left(x, u, w, ..., u_{(k)}, w_{(k)}\right) \equiv \frac{\delta\left(w^\beta F_\beta\right)}{\delta u^\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, 2, ..., m \tag{3.20}$$

ile tanımlanır ve buradaki $w = (w^1, w^2, ..., w^m)$;

$$w = w(x) \tag{3.21}$$

şeklinde yeni bağımsız değişkenlerdir ve **eşlenik değişkeni** adı verilir (Eriksson, 2008).

Örnek:

$$u_t - c(x) u_{xx} = 0$$

ısı denklemini düşünelim. Burada $c(x)$ doğru ölçülerle keyfi fonksiyondur. Isı denkleminin eşlenik denklemini bulalım.

$$F = F\left(x, t, u, u_{(1)}, u_{(2)}\right) = c(x) u_{xx} - u_t = 0$$

olmak üzere burada x, t bağımsız değişkenler ve u bağımlı değişkendir. Eşlenik denklemi bulmak için (3.20) ile verilen denklem kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F^* &= F^*\left(x, t, u, w, u_{(1)}, u_{(2)}, w_{(1)}, w_{(2)}\right) \\
&= \frac{\delta}{\delta u}\left(w\left[c\left(x\right)u_{xx} - u_t\right]\right) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial u} - D_t\frac{\partial}{\partial u_t} - D_x\frac{\partial}{\partial u_x} + D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + D_t^2\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + D_xD_t\frac{\partial}{\partial u_{xt}}\right] \\
&\quad .\left(w\left[c\left(x\right)u_{xx} - u_t\right]\right) \\
&= \left[-D_t\frac{\partial}{\partial u_t} + D_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}}\right]\left(w\left[c\left(x\right)u_{xx} - u_t\right]\right) \\
&= -D_t\left(-w\right) + D_x^2\left(c\left(x\right)w\right) \\
&= w_t + \left(cw\right)_{xx} \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur (Eriksson, 2008).

3.2.3 Keyfi diferensiyel denklemlerin öz eşlenik denklem sistemleri

Eğer (3.20) eşlenik denklemlerinde $w = u$ yazdığımızda (3.19) denklem sistemini buluyorsak (3.19) denklem sistemine **öz eşleniktir** denir (Eriksson, 2008).

Uyarı: Yukarıdaki tanım, (3.20) eşlenik denklem sisteminin sol yanı ile (3.19) denkleminin çakışacağı anlamına gelmez. Dolayısıyla genel olarak (3.19) öz eşlenik olsa bile

$$F_\alpha^*\left(x, u, w, ..., u_{(s)}, w_{(s)}\right) \neq F_\alpha\left(x, u, ..., u_{(s)}\right)$$

olabilir (Yaşar, 2009).

Örnek:

$$u_t = u_{xxx} + uu_x$$

Kortweg-de Vries denklemini düşünelim ve öz eşlenik denklem olup olmadığına bakalım.

$$\begin{aligned} F &= F\left(x,t,u,u_{(1)},u_{(2)},u_{(3)}\right) \\ &= u_t - u_{xxx} - uu_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

olmak üzere burada x, t bağımsız değişkenler ve u bağımlı değişkendir. Eşlenik denklemi bulmak için (3.20) ile verilen denklem kullanılırsa

$$\begin{aligned} F^* &= F^*\left(x,t,u,w,u_{(1)},u_{(2)},u_{(3)},w_{(1)},w_{(2)},w_{(3)}\right) \\ &= \frac{\delta}{\delta u}\left(w\left[u_t - u_{xxx} - uu_x\right]\right) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u} - D_t\frac{\partial}{\partial u_t} - D_x\frac{\partial}{\partial u_x} - D_x^3\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}\right]\left(w\left[u_t - u_{xxx} - uu_x\right]\right) \\ &= -wu_x - D_t w + D_x\left(wu\right) + D_x^3 w \\ &= -wu_x - w_t + w_x u + wu_x + w_{xxx} \\ &= -w_t + w_x u + w_{xxx} \end{aligned}$$

bulunur ve böylece eşlenik denklem

$$w_t = w_x u + w_{xxx}$$

olarak bulunur. Eşlenik denklemde w yerine u yazarsak;

$$u_t = u_x u + u_{xxx}$$

$$\begin{aligned} F^* &= -\left(u_t - u_{xxx} - uu_x\right) \\ &= -F \end{aligned}$$

olduğundan Kortweg-de Vries denklemi öz eşlenik bir denklemdir (Eriksson, 2008).

3.2.4 Eşlenik denklem sistemleri kullanılarak formal Lagrangianların üretilmesi

(3.19) şeklindeki herhangi k. mertebeden diferensiyel denklemini (3.20) şeklindeki eşlenik denklemi ile Lagrangiana sahip olduğunu düşünelim.

$2m$ bağımsız değişkenli $u = (u^1, u^2, ..., u^m)$ ve $w = (w^1, w^2, ..., w^m)$ ile (3.19), (3.20), (3.4) ile verilen Euler Lagrange denklem sisteminin formal Lagrangianı;

$$L = w^\beta F_\beta \tag{3.22}$$

şeklinde tanımlanır (Eriksson, 2008).

Örnek:

$$u_t - c(x)\, u_{xx} = 0$$

ısı denkleminin formal Lagrangianını bulalım.

Isı denkleminin eşlenik denklemi ile beraber formal Lagrangiana sahip olduğunu düşünelim. Böylece formal Lagrangianı (3.22) ile verilen operatör ile bulunursa;

$$L = wu_t - wc(x)\, u_{xx}$$

şeklinde olur. Gerçekten Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta w} &= u_t - c(x)\, u_{xx} &&= 0 \\ \frac{\delta L}{\delta u} &= w_t + (cw)_{xx} &&= F^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan bulunan formal Lagrangian Euler-Lagrange denklemini sağlar (Eriksson, 2008).

Teorem: n bağımsız $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve m bağımlı $u = (u^1, u^2, ..., u^m)$ değişkenli olarak tanımlanan (3.19) denkleminin kabul ettiği üreteç;

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

olsun. O halde (3.20) eşlenik sistemi orjinal sistemin simetrisini kabul eder. Yani (3.19) ile verilen keyfi kısmi diferensiyel denklem X i kabul ederse (3.20) ile verilen eşlenik denklem sistemi

$$Y = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \eta_*^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha} \tag{3.23}$$

şeklindeki uygun $\eta_*^\alpha = \eta_*^\alpha (x, u, v, ...)$ katsayısıyla eşlenik değişkenine (w^α ya) genişletilen X i kabul eder (Eriksson, 2008).

Teorem:

(3.19) ile tanımlanan n bağımsız ve m bağımlı değişkenli k. mertebeden diferensiyel denklem sistemini düşünelim.

Ayrıca (3.19) denklem sisteminin

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{3.24}$$

şeklindeki üreteci kabul ettiğini ve (3.20) şeklinde eşlenik denklem sistemi olduğunu düşünelim. Burada $w = w(x) = (w^1, w^2, ..., w^m)$ yani eşlenik değişkenidir.

Bu durumda (3.19) denklem sisteminin her Lie nokta, Lie-Bäcklund ve lokal olmayan simetrisi (3.19) ve (3.20) denklem sistemlerinden oluşan sistem için korunumluluk kanunu üretir. Korunmuş vektörün bileşenleri

$$L = w^\alpha F_\alpha \left(x, u, ..., u_{(k)}\right)$$

formal Lagrangianı ile

$$\begin{aligned} T^i &= \xi^i L + W^\alpha \frac{\delta L}{\delta u_i^\alpha} + \sum_{s \geq 1} D_{i_1} ... D_{i_s} \left(W^\alpha\right) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 ... i_s}^\alpha} \\ &\quad (i = 1, ..., n\ ) \end{aligned} \tag{3.25}$$

şeklindedir. Burada $W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha$ ve $\alpha = 1, ..., m$ dir. (3.25) formülünden elde edilen korunmuş vektörler (3.20) eşlenik denkleminin keyfi w çözümlerini içerir ve bundan dolayı (3.19) denklem sistemi için sonsuz sayıdaki korunumluluk kanunlarının bir tanesini w belirtilerek bulabiliriz (Yaşar, 2010 a).

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bağımsız değişkenler ve $u = (u^1, u^2, ..., u^m)$ bağımlı değişkenler olmak üzere;

$$L = \left(x, u, u_{(1)}\right)$$

birinci mertebeden Lagrangianı için (3.4) formülünden Euler-Lagrange denklemi;

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta u^\alpha} &\equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right) = 0 \\ &\quad (\alpha = 1, 2, ..., m) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Eğer $L = \left(x, u, u_{(1)}\right)$ Lagrangianlı varyasyonel integrali,

$$X = \xi^i \left(x, u, u_{(1)}, ...\right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \left(x, u, u_{(1)}, ...\right) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

üreteçli G grubu altında değişmez ise bu takdirde $\mathbf{T} = (T^1, ..., T^n)$ korunmuş vektörleri (3.25) formülüne göre;

$$T^i = \xi^i L + \left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right) \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \quad , (i = 1, ..., n)$$

olur.

$$L = \left(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}\right)$$

ikinci mertebeden Lagrangianı için (3.4) formülünden Euler-Lagrange denklemi;

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} &\equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right) + D_i D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\right) = 0 \\ &(\alpha = 1, 2, ..., m)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\mathbf{T} = (T^1, ..., T^n)$ korunmuş vektörleri (3.25) formülüne göre;

$$\begin{aligned}T^i &= \xi^i L + \left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right) \left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\right)\right] + D_k \left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right) \frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha} \\ &(i = 1, ..., n)\end{aligned}$$

olur.

$$L = \left(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)}\right)$$

üçüncü mertebeden Lagrangianı için (3.4) formülünden Euler-Lagrange denklemi;

$$\begin{aligned}\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} &\equiv \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right) + D_i D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}^\alpha}\right) - D_i D_j D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right) = 0 \\ &(\alpha = 1, 2, ..., m)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\mathbf{T} = (T^1, ..., T^n)$ korunmuş vektörleri (3.25) formülüne göre;

$$\begin{aligned}T^i &= \xi^i L + \left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right) \left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - D_j \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha}\right) + D_j D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right)\right] \\ &+ D_j \left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha} - D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right)\right] \\ &+ D_j D_k \left(\eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha\right) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right], (i = 1, ..., n)\end{aligned}$$

olur (Yaşar, 2009).

Temel Korunumluluk Teoremi

(3.19) şeklindeki k. mertebeden n bağımlı değişkenli, m bağımsız değişkenli diferensiyel denklemlerinin herbir Lie nokta, Lie-Bäcklund ve yerel olmayan simetrisi

$$X = \xi^i \left(x, u, u_{(1)}, ...\right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \left(x, u, u_{(1)}, ...\right) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

(3.19) diferensiyel denklemi ve denklemin eşlenik sistemi için korunumluluk kanunu verir (Eriksson, 2008).

Şimdiye kadar biz denklem sistemleri ve eşlenik denklemleri için korunumluluk kanunlarını bulmayı anlattık. Bu yaklaşım Ibragimov'un kullandığı bir yaklaşımdır. Şimdi bir örnek ile yaklaşımı gösterelim.

Örnek:

$$u_t = u_{xxx} + u^2 u_x \tag{3.26}$$

MKdV (modifiye Korteweg-de Vries) denkleminin korunumluluk kanunlarını bulunuz.

MKdV denklemi için

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X_3 &= -x\frac{\partial}{\partial x} - 3t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u} \end{aligned} \tag{3.27}$$

şeklindeki Lie simetri üreteçleri vardır.

(3.26) denklemi klasik Lagrangiana sahip değildir. (3.26) denklemi için eşlenik denklem

$$F^* \left(t, x, u, w, ..., w_{xxx}\right) = \frac{\delta}{\delta u} \left[\left(u_t - u_{xxx} - u^2 u_x\right) w\right] = 0$$

ile bulunursa;

$$F^* = w_t - u^2 w_x - w_{xxx} = 0 \tag{3.28}$$

burada $w = w(x,t)$ eşlenik değişkenidir. (3.28) eşlenik denkleminde w yerine u yazdığımızda (3.26) denklemi elde edilmektedir. Sistem için formal Lagrangian

$$L = \left(u_t - u_{xxx} - u^2 u_x\right) w \tag{3.29}$$

şeklindedir.

(3.28) denklemi için aynı zamanda (3.27) Lie simetri üreteçleri vardır. Bunu X_3 için gösterelim.

$$\tilde{X}^3 (F^*) \underset{F^*=0}{|} = 3\left(-w_t + u^2 w_x + w_{xxx}\right) = 0$$

olduğundan F^* için X_3 simetrisi vardır. Ayrıca (3.26) denklemi (3.27) daki her bir simetri üreteci için

$$X(L) + LD_i\left(\xi^i\right) = 0$$

şeklindeki değişmezlik testini sağlar. Bunu $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ için gösterelim. Burada $\xi = 1, \tau = 0, \eta = 0$ olduğundan

$$D_t(\tau) + D_x(\xi) = 0$$

dır. Ayrıca (3.29) formal Lagrangianı için

$$X(L) = 0$$

dır. O halde değişmezlik koşulu sağlanmaktadır.

(3.26) ve (3.28) denklemleri için (3.25) den;

$$W = \eta - \tau u_t - \xi u_x$$

olmak üzere

$$T^1 = \tau L + W\frac{\partial L}{\partial u_t} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} T^2 = {} & \xi L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} + D_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right)\right] \\ & -D_x(W)\left[D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right)\right] + D_x^2(W)\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}} \end{aligned} \tag{3.31}$$

korunumluluk kanunları bulunur.

Durum1: $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ için korunumluluk kanunlarını bulalım. (3.23) e göre Y_1, X_1 e eşit olur.

$$\begin{aligned} \xi &= 1 \\ \tau &= 0 \\ \eta &= 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

olmasından

$$W = -u_x \tag{3.33}$$

bulunur. $(3.32), (3.33)$ değerleri (3.30) ve (3.31) denklemlerinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} T^1 &= -wu_x \\ T^2 &= wu_t + u_x w_{xx} - w_x u_{xx} \end{aligned} \tag{3.34}$$

korunumluluk kanunları bulunur. (3.26) denkleminin özeşlenik olmasından dolayı (3.34) korunumluluk kanunlarında w yerine u yazarsak;

$$\begin{aligned} T^1 &= -uu_x \\ T^2 &= uu_t \end{aligned}$$

bulunur.

Durum2: $X_2 = \dfrac{\partial}{\partial t}$ üreteci için korunumluluk kanunlarını bulalım.

$$\begin{aligned} \xi &= 0 \\ \tau &= 1 \\ \eta &= 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

olmasından

$$W = -u_t \tag{3.36}$$

bulunur. (3.35), (3.36) değerleri (3.30) ve (3.31) denklemlerinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} T^1 &= -uu_{xxx} \\ T^2 &= u_t u_{xx} - u_x u_{xt} + uu_{xxt} \end{aligned} \tag{3.37}$$

bulunur.

Durum3: $X_3 = -x\dfrac{\partial}{\partial x} - 3t\dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial u}$ üreteci için korunumluluk kanunlarını bulalım.

$$\begin{aligned} \xi &= -x \\ \tau &= -3t \\ \eta &= u \end{aligned} \tag{3.38}$$

olmasından

$$W = u + xu_x + 3tu_t \tag{3.39}$$

bulunur. $(3.39), (3.38)$ değerleri (3.30) ve (3.31) denklemlerinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} T^1 &= 3tuu_{xxx} + 3tu^3u_x + u^2 + xuu_x \\ T^2 &= -4uu_{xx} - xuu_t - 3tu^3u_t - 3tu_tu_{xx} \\ &\quad +2u_x^2 + 3tu_xu_{xt} - 3tuu_{xxt} - u^4 \end{aligned}$$

bulunur (Yaşar, 2010 b).

BÖLÜM 4

KORUNUMLULUK KANUNLARININ BULUNDUĞU ÖRNEKLER

Bu bölümde lineer olmayan reaksiyon denklemlerinin korunumluluk kanunları ve Lie simetri üreteçleri yardımı ile çözümlerini, Boussinessq-Burger denklem sisteminin ve Burger Fisher denkleminin korunumluluk kanunlarını vereceğiz.

Örnek:

$$u_t - \left(u^2\right)_{xx} - u\left(1-u\right) = 0 \tag{4.1}$$

Lineer olmayan reaksiyon denkleminin korunumluluk kanunlarını bulunuz.

(4.1) denklemi için aşağıdaki formal Lagrangian oluşturulursa;

$$\begin{aligned} L &= Fw \\ &= (u_t - 2u_x^2 - 2u_{xx}u - u + u^2)w \\ &= u_t w - 2u_x^2 w - 2u_{xx}uw - uw + u^2 w \end{aligned} \tag{4.2}$$

bulunur. Burada $w = w\left(x,t\right)$ eşlenik değişkenidir. (4.2) eşitliği (3.20) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\delta L}{\delta u} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u} - D_i(\frac{\partial}{\partial u_i}) + D_iD_j(\frac{\partial}{\partial u_{ij}}) + ...\right] L \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u} - D_x(\frac{\partial}{\partial u_x}) - D_t(\frac{\partial}{\partial u_t}) + D_{xx}(\frac{\partial}{\partial u_{xx}})\right] L \\ &= \frac{\partial L}{\partial u} - D_x(\frac{\partial L}{\partial u_x}) - D_t(\frac{\partial L}{\partial u_t}) + D_{xx}(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}) \\ &= -2u_{xx}w - w + 2uw - D_x(-4u_x w) - D_t(w) \\ &\quad + D_{xx}(-2uw) \\ &= -2u_{xx}w - w + 2uw + 4\left(u_{xx}w + u_x w_x\right) - w_t \\ &\quad -2\left(u_{xx}w + u_x w_x + u_x w_x + uw_{xx}\right) \\ &= -w + 2uw - w_t - 2uw_{xx} \end{aligned} \tag{4.3}$$

eşlenik denklemi bulunur. (4.3) denkleminde w yerine u yazılırsa (4.1) denklemini vermediğinden (4.1) denklemi öz eşlenik değildir. Şimdi (4.3) denkleminin çözümünü bulalım. Bunun için (4.3) denkleminin

$$w(x,t) = e^{ax+bt} \tag{4.4}$$

şeklinde çözümünü düşünelim. w_{xx}, w_x, w_t bulunursa;

$$\begin{aligned} w_{xx} &= a^2 w \\ w_x &= aw \\ w_t &= bw \end{aligned}$$

yukarıda bulduğumuz ifadeler (4.3) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} (-2ua^2 - b - 1 + 2u)e^{ax+bt} &= 0 \\ -2ua^2 - b - 1 + 2u &= 0 \end{aligned}$$

$$b = -2ua^2 + 2u - 1 \tag{4.5}$$

bulunur. (4.5) denkleminde $a = 1$ dersek $b = -1$ olarak bulunur. Buradan;

$$w(x,t) = e^{x-t} \tag{4.6}$$

olur. Şimdi verilen denklemin

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\partial}{\partial x} \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X_3 &= e^{-t}u\frac{\partial}{\partial u} + e^{-t}\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

şeklindeki Lie simetri üreteçlerini kullanarak korunumluluk kanunlarını bulalım. Öncelikle

$$X_1 = -\frac{\partial}{\partial x} \tag{4.7}$$

Lie simetri üretecinin

$$X(L) + L(D_i\left(\xi^i\right)) = 0 \tag{4.8}$$

değizmezlik koşulunu sağladığını gösterelim. Bunun için (4.7) simetri üretecinin ikinci uzanımı bulunursa;

$$X^{(2)} = \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} \tag{4.9}$$

olmak üzere (2.20) , (2.21) , (2.22) ile verilen sonsuz küçüklere göre;

$$\begin{aligned} \eta^x &= 0 \\ \eta^t &= 0 \\ \eta^{xx} &= 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

olarak bulunur. (4.10) da bulunan değerler (4.9) uzanımında yerine yazılırsa ve (4.2) formal Lagrangianına uygulanırsa, (4.8) değişmezlik koşulu sağlanıp sağlanmadığına bakılırsa

$$X^{(2)}(L) + L(D_x(\xi^x) + D_t(\xi^t)) = 0$$

olduğu görülür.

(4.7) simetri üreteci için korunumluluk kanunlarını bulalım. (4.7) den;

$$\begin{aligned} \xi^x &= -1 \\ \xi^t &= 0 \\ \eta &= 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

(3.5) ile verilen formülden;

$$\begin{aligned} W &= \eta - \xi^x u_x - \xi^t u_t \\ &= u_x \end{aligned} \tag{4.12}$$

bulunur. (3.25) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned} T_1^t &= \xi^t L + W \left[\frac{\partial L}{\partial u_t} \right] \\ &= u_x w \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$
\begin{aligned}
T_1^x &= \xi^x L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)\right] + D_x(W)\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \\
&= -L + u_x\left[-4u_x w - D_x\left(-2uw\right)\right] + D_x(u_x)\left(-2uw\right) \\
&= -L + u_x\left[-4u_x w + 2\left(u_x w + u w_x\right)\right] - 2u_{xx}uw \qquad (4.14) \\
&= -u_t w + 2u_x^2 w + 2u_{xx}uw + uw - u^2 w - 4u_x^2 w \\
&\quad +2u_x^2 w + 2u_x uw - 2u_{xx}uw \\
&= -u_t w + uw - u^2 w + 2u_x u w_x
\end{aligned}
$$

bulunur. $(4.13), (4.14)$ ün (3.16) ile verilen eşitliğe göre korunumluluk kanunu olup olmadığına bakalım.

1.Yol:

$$
\begin{aligned}
D_t\left(T_1^t\right) + D_x\left(T_1^x\right) &= u_{xt}w + u_x w_t - u_{tx}w - u_t w_x \\
&\quad +u_x w + u w_x - 2u_x uw - u^2 w_x \\
&\quad +2u_x^2 w_x + 2u_{xx}uw_x + 2u_x u w_{xx} \\
&= u_x\left(w_t + w - 2uw + 2uw_{xx}\right) \qquad (4.15) \\
&\quad +w_x\left(-u_t + u - u^2 + 2u_x^2 + 2u_{xx}u\right) \\
&= u_x(0) + w_x\left(0\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olarak bulunduğundan (4.13) ve (4.14) birer korunumluluk kanunudur.

2.Yol:

$$
\begin{aligned}
D_t\left(T_1^t\right) + D_x\left(T_1^x\right) &= u_{xt}w + u_x w_t - u_{tx}w - u_t w_x \\
&\quad +u_x w + u w_x - 2u_x uw - u^2 w_x \\
&\quad +2u_x^2 w_x + 2u_{xx}uw_x + 2u_x u w_{xx} \qquad (4.16) \\
&= u_x w_t - u_t w_x + u_x w + u w_x \\
&\quad -2u_x uw - u^2 w_x + 2u_x^2 w_x \\
&\quad +2u_{xx}uw_x + 2u_x u w_{xx}
\end{aligned}
$$

(4.16) denkleminde (4.6) değeri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} D_t\left(T_1^t\right)+D_x\left(T_1^x\right) &= -u_x w-u_t w+u_x w+uw-2u_x uw\text{-}u^2 w \\ &\quad +2u_x^2 w+2u_{xx}uw+2u_x uw \\ &= -u_t+u-u^2+2u_x^2+2u_{xx}u \\ &= u_t-\left(u^2\right)_{xx}-u\left(1-u\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

olarak bulunduğundan (4.13) ve (4.14) birer korunumluluk kanunudur.

Şimdi

$$X_2=\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.18}$$

simetri üreteci için (4.8) ile verilen değişmezlik koşulunu sağladığını gösterelim. X_2 için ikinci uzanım (4.9) şeklinde olursa (2.20) , (2.21) , (2.22) ile verilen sonsuz küçüklere göre

$$\begin{aligned} \eta^x &= 0 \\ \eta^t &= 0 \\ \eta^{xx} &= 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

bulunur. (4.19) da bulunan değerler (4.9) uzanımında yerine yazılırsa ve (4.2) formal Lagrangiana uygulanırsa, (4.8) değişmezlik koşulunun sağlanıp sağlanmadığına bakılırsa

$$X^{(2)}(L)+L(D_x\left(\xi^x\right)+D_t\left(\xi^t\right))=0$$

olduğu görülür.

(4.18) simetri üreteci için korunumluluk kanunlarını bulalım. (4.18) den;

$$\begin{aligned} \xi^x &= 0 \\ \xi^t &= 1 \\ \eta &= 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

(3.5) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned} W &= \eta-\xi^x u_x-\xi^t u_t \\ &= -u_t \end{aligned} \tag{4.21}$$

olarak bulunur. (3.25) ile verilen formül kullanılırsa;

$$
\begin{aligned}
T_2^t &= \xi^t L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_t}\right] \\
&= L + (-u_t)\, w \qquad (4.22) \\
&= u_t w - 2u_x^2 w - 2u_{xx} u w - u w + u^2 w - u_t w \\
&= -2u_x^2 w - 2u_{xx} u w - u w + u^2 w
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_2^x &= \xi^x L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)\right] + D_x(W)\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \\
&= -u_t\left[-4u_x w - D_x(-2uw)\right] + D_x(-u_t)(-2uw) \qquad (4.23) \\
&= -u_t\left[-4u_x w + 2(u_x w + u w_x)\right] + 2uwu_{tx} \\
&= 2u_x u_t w - 2u_t u w_x + 2u_{xt} u w
\end{aligned}
$$

olur. $(4.22), (4.23)$ ün (3.16) ile verilen eşitliğe göre korunumluluk kanunu olup olmadığına bakalım.

1 Yol:

$$
\begin{aligned}
D_t\left(T_2^t\right) + D_x\left(T_2^x\right) &= -4u_x u_{xt} w - 2u_x^2 w_t - 2u_{xx} u_t w - 2u_{xxt} u w \\
&\quad -2u_{xx} u w_t - u_t w - u w_t + 2u_t u w + u^2 w_t \\
&\quad +2u_{xx} u_t w + 2u_x u_{tx} w + 2u_x u_t w_x - 2u_t u_x w_x \\
&\quad -2u_{tx} u w_x - 2u_t u w_{xx} + 2u_{xxt} u w + 2u_{xt} u_x w + 2u_{xt} u w_x \\
&= -2u_x^2 w_t - 2u_{xx} u w_t - u_t w - u w_t + 2u_t u w + u^2 w_t \\
&\quad -2u_t u w_{xx} \\
&= w_t\left(-2u_x^2 - 2u_{xx} u - u + u^2\right) + u_t\left(-w + 2uw - 2w_{xx} u\right) \\
&= w_t(-u_t) + u_t(w_t) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olarak bulunduğundan (4.22) ve (4.23) birer korunumluluk kanunudur.

2.Yol:

$$\begin{aligned} D_t\left(T_2^t\right)+D_x\left(T_2^x\right) &= -4u_xu_{xt}w-2u_x^2w_t-2u_{xx}u_tw-2u_{xxt}uw \\ &\quad -2u_{xx}uw_t-u_tw-uw_t+2u_tuw+u^2w_t \\ &\quad +2u_{xx}u_tw+2u_xu_{tx}w+2u_xu_tw_x \\ &\quad -2u_tu_xw_x-2u_{tx}uw_x-2u_tuw_{xx} \\ &\quad +2u_{xxt}uw+2u_{xt}u_xw+2u_{xt}uw_x \\ &= -2u_x^2w_t-2u_{xx}uw_t-u_tw-uw_t \\ &\quad +2u_tuw+u^2w_t-2u_tuw_{xx} \end{aligned} \tag{4.24}$$

(4.24) denkleminde (4.6) değeri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} D_t\left(T_2^t\right)+D_x\left(T_2^x\right) &= 2u_x^2w+2u_{xx}uw-u_tw+uw \\ &\quad +2u_tuw-u^2w-2u_tuw \\ &= 2u_x^2+2u_{xx}u-u_t+u-u^2 \\ &= u_t-2u_x^2-2u_{xx}u-u+u^2 \\ &= u_t-\left(u^2\right)_{xx}-u\left(1-u\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunduğundan (4.22) ve (4.23) birer korunumluluk kanunudur.

Şimdi

$$X_3=e^{-t}\frac{\partial}{\partial t}+e^{-t}u\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.25}$$

simetri üreteci için (4.8) ile verilen değişmezlik koşulunu sağladığını gösterelim. X_3 için ikinci uzanım (4.9) şeklinde olursa (2.20) , (2.21) , (2.22) ile verilen sonsuz küçüklere göre

$$\begin{aligned} \eta^x &= e^{-t}u_x \\ \eta^t &= -e^{-t}u+2e^{-t}u_t \\ \eta^{xx} &= e^{-t}u_{xx} \end{aligned} \tag{4.26}$$

bulunur. (4.26) da bulunan değerler (4.9) uzanımında yerine yazılırsa ve (4.2) formal Lagrangiana uygulanırsa, (4.8) değişmezlik koşulunun sağlanıp sağlanmadığına bakılırsa

$$X^{(2)}(L)+L(D_x\left(\xi^x\right)+D_t\left(\xi^t\right))=0$$

olduğu görülür.

(4.18) simetri üreteci için korunumluluk kanunlarını bulalım. (4.18) den;

$$\begin{aligned} \xi^x &= 0 \\ \xi^t &= e^{-t} \\ \eta &= e^{-t}u \end{aligned} \tag{4.27}$$

(3.5) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned} W &= \eta - \xi^x u_x - \xi^t u_t \\ &= e^{-t}u - e^{-t}u_t \end{aligned} \tag{4.28}$$

olarak bulunur. (3.25) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned} T_3^t &= \xi^t L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_t}\right] \\ &= e^{-t}L + \left(e^{-t}u - e^{-t}u_t\right)w \\ &= e^{-t}u_t w - 2e^{-t}u_x^2 w - 2e^{-t}uu_{xx}w \\ &\quad -e^{-t}uw + e^{-t}u^2 w + e^{-t}uw - e^{-t}u_t w \\ &= -2e^{-t}u_x^2 w - 2e^{-t}uu_{xx}w + e^{-t}u^2 w \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} T_3^x &= \xi^x L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)\right] + D_x(W)\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \\ &= \left(e^{-t}u - e^{-t}u_t\right)\left[-4u_x w - D_x\left(-2uw\right)\right] \\ &\quad +D_x(e^{-t}u - e^{-t}u_t)\left(-2uw\right) \\ &= \left(e^{-t}u - e^{-t}u_t\right)\left[-4u_x w + 2u_x w + 2uw_x\right] \\ &\quad -2uw\left(e^{-t}u_x - e^{-t}u_{xt}\right) \\ &= -4e^{-t}uu_x w + 2e^{-t}u^2 w_x + 2e^{-t}u_x u_t w \\ &\quad -2e^{-t}uu_t w_x + 2e^{-t}uu_{xt}w \end{aligned} \tag{4.30}$$

olur. $(4.29), (4.30)$ un (3.16) ile verilen eşitliğe göre korunumluluk kanunu olup olmadığına bakılırsa;

$$\begin{aligned} D_t\left(T_3^t\right) + D_x\left(T_3^x\right) &= -2e^{-t}u_x^2 w - 2e^{-t}u_x^2 w_t - 2e^{-t}uu_{xx}w \\ &\quad -2e^{-t}uu_{xx}w_t - e^{-t}u^2 w + 2e^{-t}uu_t w \\ &\quad +e^{-t}u^2 w_t + 2e^{-t}u^2 w_{xx} - 2e^{-t}uu_t w_{xx} \end{aligned} \tag{4.31}$$

olur. (4.31) denkleminde (4.6) değeri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} D_t\left(T_3^t\right)+D_x\left(T_3^x\right) &= -2e^{-t}u_x^2w+2e^{-t}u_x^2w-2e^{-t}uu_{xx}w \\ &\quad +2e^{-t}uu_{xx}w-e^{-t}u^2w+2e^{-t}uu_tw \\ &\quad -e^{-t}u^2w+2e^{-t}u^2w-2e^{-t}uu_tw \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunduğundan (4.29) ve (4.30) birer korunumluluk kanunudur.

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\partial}{\partial x} \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X_3 &= e^{-t}u\frac{\partial}{\partial u}+e^{-t}\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

şeklindeki denklemin sonsuz küçük üreteçlerinin komütatör tablosunu çizerek Lie Braketi altında kapalı olduğu gösterilse;

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3
X_1	0	0	0
X_2	0	0	X_3
X_3	0	$-X_3$	0

bulunur. Böylece denklemin simetrilerinin kabul ettiği bir parametreli grup;

$$\begin{aligned} G_1 &: (x,t,u)\rightarrow(x-\epsilon,t,u) \\ G_2 &: (x,t,u)\rightarrow(x,t+\epsilon,u) \\ G_3 &: (x,t,u)\rightarrow\left(x,t-\ln\left|1-\epsilon e^t\right|,u\left(1+e^{2\epsilon e^t}\right)/2\right) \end{aligned}$$

dir.

$$X_3u=0$$

bulunursa;

$$\frac{dt}{e^{-t}}=\frac{du}{e^{-t}u}=\frac{dx}{0}$$

olarak bulunur.

$$\frac{dx}{0}\Rightarrow x=c_1 \tag{4.32}$$

$$\frac{dt}{e^{-t}} = \frac{du}{e^{-t}u}$$

$$\Rightarrow \quad t = \ln u - c_1$$

$$u = c_1 e^t \tag{4.33}$$

(4.32) ve (4.33) ten;

$$x = ue^{-t} = f(x)$$

$$u = e^t f(x) \tag{4.34}$$

(4.34) ifadesi (4.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$-2f'^2 - 2ff'' + f^2 = 0 \tag{4.35}$$

adi diferensiyel denklemi bulunur. Burada $f' = \dfrac{df}{dx}$ dir. (4.35) denkleminin çözümü

$$f(x) = \mp \frac{\sqrt{e^x\left(c_1 e^{2x} - c_2\right)}}{e^x} \tag{4.36}$$

olarak bulunur. Buradan (4.36) ifadesi (4.34) ifadesinde yerine yazılırsa (4.1) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = \mp e^{t-x}\sqrt{e^x\left(c_1 e^{2x} - c_2\right)}$$

olarak bulunur.

Örnek:

$$u_t - \left(u^3\right)_{xx} - u\left(1 - u^2\right) = 0 \tag{4.37}$$

Lineer olmayan reaksiyon denkleminin korunumluluk kanunlarını bulunuz.

(4.37) denklemi için aşağıdaki formal Lagrangian oluşturulursa;

$$\begin{aligned} L &= Fw \\ &= (u_t - 6u_x^2 u - 3u_{xx}u^2 - u + u^3)w \qquad (4.38) \\ &= u_t w - 6u_x^2 uw - 3u_{xx}u^2 w - uw + u^3 w \end{aligned}$$

bulunur. Burada $w = w(x,t)$ eşlenik değişkenidir. (4.38) eşitliği (3.20) denkleminde yerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
F^* &= \frac{\delta L}{\delta u} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial u} - D_i(\frac{\partial}{\partial u_i}) + D_i D_j(\frac{\partial}{\partial u_{ij}}) + ...\right] L \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial u} - D_x(\frac{\partial}{\partial u_x}) - D_t(\frac{\partial}{\partial u_t}) + D_{xx}(\frac{\partial}{\partial u_{xx}})\right] L \\
&= \frac{\partial L}{\partial u} - D_x(\frac{\partial L}{\partial u_x}) - D_t(\frac{\partial L}{\partial u_t}) + D_{xx}(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}) \qquad (4.39) \\
&= -6u_x^2 w - 6u_{xx}uw - w + 3u^2 w - D_x(-12u_x uw) \\
&\quad -D_t(w) + D_{xx}(-3u^2 w) \\
&= -6u_x^2 w - 6u_{xx}uw - w + 3u^2 w + 12\left(u_x^2 w + u_{xx}uw + u_x uw_x\right) \\
&\quad -w_t - 3\left(D_x\left(2u_x uw + u^2 w_x\right)\right) \\
&= -w + 3u^2 w - w_t - 3u^2 w_{xx}
\end{aligned}
$$

eşlenik denklemi bulunur. (4.39) denkleminde w yerine u yazdığımızda (4.37) denklemini vermediğinden (4.37) denklemi öz eşlenik değildir.

Şimdi (4.39) denkleminin çözümünü bulalım. Bunun için (4.39) denkleminin

$$w(x,t) = e^{ax+bt} \qquad (4.40)$$

şeklinde çözümünü düşünelim. w_{xx}, w_x, w_t bulunursa;

$$
\begin{aligned}
w_{xx} &= a^2 w \\
w_x &= aw \\
w_t &= bw
\end{aligned}
$$

yukarıda bulduğumuz ifadeleri (4.39) denkleminde yerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
(-3u^2a^2 - b - 1 + 3u^2)e^{ax+bt} &= 0 \\
-3u^2a^2 - b - 1 + 3u^2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$b = -3u^2a^2 - 1 + 3u^2 \qquad (4.41)$$

bulunur. (4.41) denkleminde $a = 1$ dersek $b = -1$ olarak bulunur. Buradan;

$$w(x,t) = e^{x-t} \tag{4.42}$$

olur. Şimdi verilen denklemin

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\partial}{\partial x} \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X_3 &= e^{-2t}u\frac{\partial}{\partial u} + e^{-2t}\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

şeklindeki Lie simetri üreteçlerini kullanarak korunumluluk kanunlarını bulalım. Öncelikle

$$X_1 = -\frac{\partial}{\partial x} \tag{4.43}$$

Lie simetri üretecinin

$$X(L) + L(D_i\left(\xi^i\right)) = 0 \tag{4.44}$$

değizmezlik koşulunu sağladığını gösterelim. Bunun için (4.43) simetri üretecinin ikinci uzanımını bulunursa;

$$X^{(2)} = \xi^x\frac{\partial}{\partial x} + \xi^t\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} \tag{4.45}$$

olmak üzere (2.20) , (2.21) , (2.22) ile verilen sonsuz küçüklere göre;

$$\begin{aligned} \eta^x &= 0 \\ \eta^t &= 0 \\ \eta^{xx} &= 0 \end{aligned} \tag{4.46}$$

olarak bulunur. (4.46) da bulunan değerler (4.45) uzanımında yerine yazlırsa ve (4.38) formal Lagrangianına uygulanırsa, (4.44) değişmezlik koşulu sağlanıp sağlanmadığına bakılırsa

$$X^{(2)}(L) + L(D_x\left(\xi^x\right) + D_t\left(\xi^t\right)) = 0$$

olduğu görülür.

(4.43) simetri üreteci için korunumluluk kanunlarını bulalım. (4.43) ten;

$$\begin{aligned} \xi^x &= -1 \\ \xi^t &= 0 \\ \eta &= 0 \end{aligned} \tag{4.47}$$

(3.5) ile verilen formülden;

$$\begin{aligned} W &= \eta - \xi^x u_x - \xi^t u_t \\ &= u_x \end{aligned} \tag{4.48}$$

bulunur. (3.25) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned} T_1^t &= \xi^t L + W \left[\frac{\partial L}{\partial u_t} \right] \\ &= u_x w \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned} T_1^x &= \xi^x L + W \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x \left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) \right] + D_x(W) \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \\ &= -L + u_x \left[-12 u_x u w - D_x \left(-3u^2 w \right) \right] + D_x(u_x) \left(-3u^2 w \right) \\ &= -u_t w + 6u_x^2 u w + 3u^2 u_{xx} w + uw - u^3 w \\ &\quad -12 u_x^2 u w + 6 u_x^2 u w + 3u^2 u_x w_x - 3u^2 w u_{xx} \\ &= -u_t w + uw - u^3 w + 3u^2 u_x w_x \end{aligned} \tag{4.50}$$

bulunur. (4.49) , (4.50) nin (3.16) ile verilen eğiştliğe göre korunumluluk kanunu olup olmadığına bakalım.

1.Yol:

$$\begin{aligned} D_t \left(T_1^t \right) + D_x \left(T_1^x \right) &= u_{xt} w + u_x w_t - u_{tx} w - u_t w_x + u_x w + u w_x \\ &\quad -3u^2 u_x w - u^3 w_x + 6u_x^2 u w_x \\ &\quad +3u^2 u_{xx} w_x + 3u^2 u_x w_{xx} \\ &= u_x \left(w_t + w - 3u^2 w + 3u^2 w_{xx} \right) \\ &\quad + w_x \left(-u_t + u - u^3 + 6u_x^2 u + 3u^2 u_{xx} \right) \\ &= u_x(0) + w_x(0) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.51}$$

olarak bulunduğundan (4.49) ve (4.50) birer korunumluluk kanunudur.

2.Yol:

$$\begin{aligned} D_t\left(T_1^t\right)+D_x\left(T_1^x\right) &= u_{xt}w+u_xw_t-u_{tx}w-u_tw_x+u_xw+uw_x \\ &\quad -3u^2u_xw-u^3w_x+6u_x^2uw_x+3u^2u_{xx}w_x \\ &\quad +3u^2u_xw_{xx} \\ &= u_xw_t-u_tw_x+u_xw+uw_x-3u^2u_xw \\ &\quad -u^3w_x+6u_x^2uw_x+3u^2u_{xx}w_x \\ &\quad +3u^2u_xw_{xx} \end{aligned} \tag{4.52}$$

(4.52) denkleminde (4.42) değeri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} D_t\left(T_1^t\right)+D_x\left(T_1^x\right) &= -u_xw-u_tw+u_xw+uw-3u^2u_xw-u^3w \\ &\quad +6u_x^2uw+3u^2u_{xx}w+3u^2u_xw \\ &= -u_t-6u_x^2u-3u^2u_{xx}-u+u^3 \\ &= u_t-\left(u^3\right)_{xx}-u\left(1-u^2\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.53}$$

olarak bulunduğundan (4.49) ve (4.50) birer korunumluluk kanunudur.

Şimdi

$$X_2=\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.54}$$

simetri üreteci için (4.44) ile verilen değişmezlik koşulunu sağladığını gösterelim. X_2 için ikinci uzanım (4.45) şeklinde olursa (2.20), (2.21), (2.22) ile verilen sonsuz küçüklere göre

$$\begin{aligned} \eta^x &= 0 \\ \eta^t &= 0 \\ \eta^{xx} &= 0 \end{aligned} \tag{4.55}$$

şeklinde bulunur. (4.55) te bulunan değerler (4.45) uzanımında yerine yazılırsa ve (4.38) formal Lagrangiana uygulanırsa, (4.44) değişmezlik koşulunun sağlanıp sağlanmadığına bakılırsa

$$X^{(2)}(L)+L(D_x\left(\xi^x\right)+D_t\left(\xi^t\right))=0$$

olduğu görülür.

(4.54) simetri üreteci için korunumluluk kanunlarını bulalım. (4.54) ten;

$$\begin{aligned} \xi^x &= 0 \\ \xi^t &= 1 \\ \eta &= 0 \end{aligned}$$

(3.5) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned} W &= \eta - \xi^x u_x - \xi^t u_t \\ &= -u_t \end{aligned} \tag{4.56}$$

bulunur. (3.25) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned} T_2^t &= \xi^t L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_t}\right] \\ &= L + (-u_t)\, w \\ &= u_t w - 6u_x^2 uw - 3u_{xx}u^2 w - uw + u^3 w - u_t w \\ &= -6u_x^2 uw - 3u_{xx}u^2 w - uw + u^3 w \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned} T_2^x &= \xi^x L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)\right] + D_x(W)\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \\ &= -u_t\left[-12u_x uw - D_x\left(-3u^2 w\right)\right] + D_x(-u_t)\left(-3u^2 w\right) \\ &= -u_t\left[-12u_x uw + 3\left(2u_x uw + u^2 w_x\right)\right] - 3u^2 w u_{tx} \\ &= 6u_x u_t uw - 3u^2 u_t w_x + 3u^2 w u_{xt} \end{aligned} \tag{4.58}$$

olur. $(2.35), (2.36)$nın (3.16) ile verilen eşitliğe göre korunumluluk kanunu olup olmadığına bakalım.

1 Yol:

$$\begin{aligned} D_t\left(T_2^t\right) + D_x\left(T_2^x\right) &= -6u_x^2 u_t w - 12uu_x u_{xt} w \text{-} 6u_x^2 uw_t - 6u_{xx}uu_t w - 3u_{xxt}u^2 w \\ &\quad -3u_{xx}u^2 w_t - u_t w - uw_t + 3u^2 u_t w + u^3 w_t - 3u^2 u_{tx} w_x \\ &\quad +6u_{xx}u_t uw + 6u_x u_t uw_x + 6u_x u_{tx} uw - 6uu_x u_t w_x + 6u_x^2 u_t w \\ &\quad -3u^2 u_t w_{xx} + 6uu_x w u_{xt} + 3u^2 w_x u_{xt} + 3u^2 w u_{xxt} \\ &= \text{-}6uu_x^2 w_t \text{-} 3u^2 u_{xx} w_t \text{-} u_t w \text{-} uw_t + 3u^2 u_t w + u^3 w_t \text{-} 3u^2 u_t w_{xx} \\ &= w_t\left(-6uu_x^2 - 3u^2 u_{xx} - u + u^3\right) + u_t\left(-w + 3u^2 w - 3u^2 w_{xx}\right) \\ &= w_t\left(-u_t\right) + u_t\left(w_t\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunduğundan (4.57) ve (4.58) birer korunumluluk kanunudur.

2.Yol:

$$\begin{aligned} D_t\left(T_2^t\right) + D_x\left(T_2^x\right) &= -6u_x^2 u_t w - 12uu_x u_{xt} w - 6u_x^2 u w_t \\ &\quad -6u_{xx} u u_t w - 3u_{xxt} u^2 w - 3u_{xx} u^2 w_t \\ &\quad -u_t w - u w_t + 3u^2 u_t w + u^3 w_t \\ &\quad +6u_x^2 u_t w + 6u_{xx} u_t u w + 6u_x u_t u w_x \\ &\quad +6u_x u_{tx} u w - 6uu_x u_t w_x - 3u^2 u_{tx} w_x \\ &\quad -3u^2 u_t w_{xx} + 6uu_x w u_{xt} + 3u^2 w_x u_{xt} \\ &\quad +3u^2 w u_{xxt} \\ &= -6uu_x^2 w_t - 3u^2 u_{xx} w_t - u_t w - u w_t \\ &\quad +3u^2 u_t w + u^3 w_t - 3u^2 u_t w_{xx} \end{aligned} \tag{4.59}$$

(4.59) denkleminde (4.42) değeri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} D_t\left(T_2^t\right) + D_x\left(T_2^x\right) &= 6uu_x^2 w + 3u^2 u_{xx} w - u_t w + uw + 3u^2 u_t w - u^3 w - 3u^2 u_t w \\ &= 6uu_x^2 + 3u^2 u_{xx} - u_t + u + 3u^2 u_t - u^3 - 3u^2 u_t \\ &= u_t - 6uu_x^2 - 3u^2 u_{xx} - u + u^3 \\ &= u_t - \left(u^3\right)_{xx} - u\left(1 - u^2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunduğundan (4.57) ve (4.58) birer korunumluluk kanunudur.

Şimdi

$$X_3 = e^{-2t}\frac{\partial}{\partial t} + e^{-2t} u \frac{\partial}{\partial u} \tag{4.60}$$

simetri üreteci için (4.44) ile verilen değişmezlik koşulunu sağladığını gösterelim. X_3 için ikinci uzanım (4.45) şeklinde olursa (2.20), (2.21), (2.22) ile verilen sonsuz küçüklere göre

$$\begin{aligned} \eta^x &= e^{-2t} u_x \\ \eta^t &= -2e^{-2t} u + 3e^{-2t} u_t \\ \eta^{xx} &= e^{-2t} u_{xx} \end{aligned} \tag{4.61}$$

şeklinde olur. (4.61) de bulunan değerler (4.45) uzanımında yerine yazılırsa ve (4.38) formal Lagrangiana uygulanırsa, (4.44) değişmezlik koşulunun sağlanıp sağlanmadığına bakılırsa

$$X^{(2)}(L)+L(D_x(\xi^x)+D_t(\xi^t))=0$$

olduğu görülür.

(4.54) simetri üreteci için korunumluluk kanunlarını bulalım. (4.54) ten;

$$\begin{aligned}
\xi^x &= 0 \\
\xi^t &= e^{-2t} \\
\eta &= e^{-2t}u
\end{aligned} \tag{4.62}$$

(3.5) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
W &= \eta-\xi^x u_x-\xi^t u_t \\
&= e^{-2t}u-e^{-2t}u_t
\end{aligned} \tag{4.63}$$

bulunur. (3.25) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
T_3^t &= \xi^t L+W\left[\frac{\partial L}{\partial u_t}\right] \\
&= e^{-2t}L+(e^{-2t}u-e^{-2t}u_t)\,w \\
&= -6e^{-2t}u_x^2uw-3e^{-2t}u_{xx}u^2w+e^{-2t}u^3w
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
T_3^x &= \xi^x L+W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x}-D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)\right]+D_x(W)\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \\
&= (e^{-2t}u-e^{-2t}u_t)\left[-12u_xuw-D_x\left(-3u^2w\right)\right] \\
&\quad +D_x(e^{-2t}u-e^{-2t}u_t)\left(-3u^2w\right) \\
&= (e^{-2t}u-e^{-2t}u_t)\left[-12u_xuw+3\left(2u_xuw+u^2w_x\right)\right] \\
&\quad -3u^2w\left(e^{-2t}u_x-e^{-2t}u_{xt}\right) \\
&= -9e^{-2t}u^2u_xw+3e^{-2t}u^3w_x+6e^{-2t}uu_tu_xw \\
&\quad -3e^{-2t}u_tu^2w_x+3e^{-2t}u^2u_{xt}w
\end{aligned} \tag{4.65}$$

olur. (4.64), (4.65) in (3.16) ile verilen eşitliğe göre korunumluluk kanunu olup olmadığına bakılırsa;

$$\begin{aligned}
D_t(T_3^t)+D_x(T_3^x) &= -6e^{-2t}u_x^2uw_t-3e^{-2t}u_{xx}u^2w_t \\
&\quad -2e^{-2t}u^3w+3e^{-2t}u^2u_tw+e^{-2t}u^3w_t \\
&\quad +3e^{-2t}u^3w_{xx}-3e^{-2t}u^2u_tw_{xx} \\
&\quad -6e^{-2t}uu_x^2w-3e^{-2t}u^2u_{xx}w
\end{aligned} \tag{4.66}$$

olur. (4.66) denkleminde (4.42) değeri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} D_t\left(T_3^t\right)+D_x\left(T_3^x\right) &= 6e^{-2t}u_x^2uw+3e^{-2t}u_{xx}u^2w-2e^{-2t}u^3w \\ &\quad +3e^{-2t}u^2u_tw-e^{-2t}u^3w+3e^{-2t}u^3w \\ &\quad -3e^{-2t}u^2u_tw-6e^{-2t}uu_x^2w-3e^{-2t}u^2u_{xx}w \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunduğundan (4.64) ve (4.65) birer korunumluluk kanunudur.

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\partial}{\partial x} \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X_3 &= e^{-2t}u\frac{\partial}{\partial u}+e^{-2t}\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

şeklindeki denklemin sonsuz küçük üreteçlerinin komütatör tablosunu çizerek Lie Braketi altında kapalı olduğu gösterilirse;

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3
X_1	0	0	0
X_2	0	0	$2X_3$
X_3	0	$-2X_3$	0

bulunur. Böylece (4.37) denkleminin simetrilerinin kabul ettiği bir parametreli grup;

$$\begin{aligned} G_1 &: (x,t,u)\rightarrow(x-\epsilon,t,u) \\ G_2 &: (x,t,u)\rightarrow(x,t+\epsilon,u) \\ G_3 &: (x,t,u)\rightarrow\left(x,t-\ln\left|1-\epsilon e^t\right|,u\left(1+e^{2\epsilon e^t}\right)/2\right) \end{aligned}$$

dir.

$$X_3u=0$$

bulunursa;

$$\frac{dt}{e^{-2t}}=\frac{du}{e^{-2t}u}=\frac{dx}{0}$$

olarak bulunur.

$$\frac{dx}{0}\Rightarrow x=c_1 \tag{4.67}$$

$$\frac{dt}{e^{-2t}} = \frac{du}{e^{-2t}u}$$

$$\Rightarrow \ t = \ln u - c_1$$

$$u = c_1 e^t \tag{4.68}$$

(4.67) ve (4.68) den;

$$x = ue^{-t} = f(x)$$

$$u = e^t f(x) \tag{4.69}$$

(4.69) ifadesi (4.37) denkleminde yerine yazılırsa;

$$-6f^{'2} - 3ff^{''} + f^2 = 0 \tag{4.70}$$

adi diferensiyel denklemi bulunur. Burada $f^{'} = \dfrac{df}{dx}$ dir. (4.70) denkleminin çözümü

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{2}\left(e^{2x}\left(-12c_1e^{2x} + 12c_2\right)\right)^{1/3} \tag{4.71}$$

$$f(x) = -\frac{e^{-x}}{4}\left(e^{2x}\left(-12c_1e^{2x} + 12c_2\right)\right)^{1/3}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right) \tag{4.72}$$

olarak bulunur. Buradan (4.71)ve (4.72) ifadeleri (4.69) ifadesinde yerine yazılırsa (4.37) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = \frac{e^{t-x}}{2}\left(e^{2x}\left(-12c_1e^{2x} + 12c_2\right)\right)^{1/3}$$

ve

$$u(x,t) = -\frac{e^{t-x}}{4}\left(e^{2x}\left(-12c_1e^{2x} + 12c_2\right)\right)^{1/3}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right)$$

olarak bulunur.

Örnek:

$$\begin{aligned} u_t + 2uu_x - \frac{1}{2}v_x &= 0 \\ v_t - \frac{1}{2}u_{xxx} + 2u_xv + 2uv_x &= 0 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Boussinesq-Burger denklem sisteminin korunumluluk kanunlarını bulunuz.

(4.73) denklemi için aşağıdaki formal Lagrangian oluşturulursa;

$$L = w\left(u_t + 2uu_x - \frac{1}{2}v_x\right) + h\left(v_t - \frac{1}{2}u_{xxx} + 2u_xv + 2uv_x\right) \tag{4.74}$$

bulunur. Burada $w = w(x,t), h = h(x,t)$ eşlenik değişkenidir. Şimdi

$$\frac{\delta L}{\delta u}, \frac{\delta L}{\delta v}, \frac{\delta L}{\delta w}, \frac{\delta L}{\delta h}$$

değerleri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{\delta L}{\delta u} &= \left[\frac{\partial}{\partial u} - D_i\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right) + D_iD_j\left(\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\right) - D_iD_jD_k\left(\frac{\partial}{\partial u_{ijk}}\right)\right] L \\
&= \frac{\partial L}{\partial u} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) - D_xD_xD_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right) \\
&= 2u_xw + 2v_xh - D_x(2uw + 2vh) - D_t(w) \\
&\quad -D_xD_xD_x\left(-\frac{1}{2}h\right) \qquad (4.75) \\
&= 2u_xw + 2v_xh - 2u_xw - 2uw_x - 2v_xh - 2vh_x \\
&\quad -w_t + \frac{1}{2}h_{xxx} \\
&= -w_t + \frac{1}{2}h_{xxx} - 2uw_x - 2vh_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta L}{\delta v} &= \left[\frac{\partial}{\partial v} - D_i\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)\right] L \\
&= \frac{\partial L}{\partial v} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial v_x}\right) - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial v_t}\right) \\
&= 2u_xh - D_x\left(-\frac{1}{2}w + 2uh\right) - D_t(h) \qquad (4.76) \\
&= 2u_xh + \frac{1}{2}w_x - 2u_xh - 2uh_x - h_t \\
&= -h_t - 2uh_x + \frac{1}{2}w_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta L}{\delta w} &= \frac{\partial L}{\partial w} \\
&= u_t + 2uu_x - \frac{1}{2}v_x \qquad (4.77)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta L}{\delta h} &= \frac{\partial L}{\partial h} \\
&= v_t - \frac{1}{2}u_{xxx} + 2u_x v + 2uv_x
\end{aligned} \tag{4.78}
$$

bulunur. (4.75) ve (4.76) denklemlerinde w yerine v,h yerine u yazılırsa, (4.73) denklem sistemini verdiğinden (4.73) denklem sistemi öz eşleniktir.

Şimdi verilen denklemin

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \\
X_2 &= -\frac{\partial}{\partial t} \\
X_3 &= -2t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u} \\
X_4 &= -u\frac{\partial}{\partial u} - 2v\frac{\partial}{\partial v} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned}
$$

şeklindeki sonsuz küçük üreteçlerinin komütatör tablosu çizilirse ve Lie Braketi altında kapalı olduğunu gösterilirse;

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	0	0	X_1
X_2	0	0	$2X_1$	$2X_2$
X_3	0	$-2X_1$	0	$-X_3$
X_4	$-X_1$	$-2X_2$	X_3	0

olur. (4.73) denkleminin sonsuz küçük üreteçlerini kullanarak korunumluluk kanunlarını bulalım. Öncelikle

$$
X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \tag{4.79}
$$

sonsuz küçük üreteci için korunumluluk kanunlarını bulalım.

(4.79) dan;

$$\begin{aligned}\xi^x &= 1\\ \xi^t &= 0\\ \eta^u &= 0\\ \eta^v &= 0\end{aligned}$$

olduğundan (3.25) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned}T_1^x &= L\xi^x + \left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} + D_x D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right)\right]\\ &\quad + \left(\eta^v - \xi^x v_x - \xi^t v_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial v_x}\right] + D_x\left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right)\\ &\quad \left[-D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right)\right] + D_x D_x\left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right]\\ &= L - u_x\left[2uw + 2vh + D_x D_x\left(-\frac{1}{2}h\right)\right] - v_x\left[-\frac{1}{2}w + 2uh\right]\\ &\quad + D_x\left(-u_x\right)\left[-D_x\left(-\frac{1}{2}h\right)\right] + D_x D_x\left(-u_x\right)\left[-\frac{1}{2}h\right] \qquad (4.80)\\ &= u_t w + 2uu_x w - \frac{1}{2}v_x w + v_t h - \frac{1}{2}u_{xxx}h + 2u_x vh + 2uv_x h\\ &\quad -2uwu_x - 2vhu_x + \frac{1}{2}h_{xx}u_x + \frac{1}{2}wv_x - 2uhv_x\\ &\quad -\frac{1}{2}u_{xx}h_x + \frac{1}{2}u_{xxx}h\\ &= u_t w + v_t h + \frac{1}{2}h_{xx}u_x - \frac{1}{2}u_{xx}h_x\end{aligned}$$

bulunur.

(4.80) de w yerine v,h yerine u yazarsak;

$$\begin{aligned}T_1^x &= u_t v + v_t u + \frac{1}{2}u_{xx}u_x - \frac{1}{2}u_{xx}u_x\\ &= u_t v + v_t u\end{aligned} \qquad (4.81)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} T_1^t &= L\xi^t + \left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_t}\right] \\ &\quad + \left(\eta^v - \xi^x v_x - \xi^t v_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial v_t}\right] \\ &= -u_x w - v_x h \end{aligned} \tag{4.82}$$

bulunur.

(4.82) de w yerine v,h yerine u yazılırsa;

$$T_1^t = -u_x v - v_x u \tag{4.83}$$

elde edilir.

$(4.80)\,,(4.82)$ nin (3.16) ile verilen eşitliğe göre korunumluluk kanunu olup olmadığına bakalım.

$$\begin{aligned} D_x\left(T_1^x\right) + D_t\left(T_1^t\right) &= u_{tx}v + u_t v_x + v_{tx}u + v_t u_x \\ &\quad -u_{xt}v - u_x v_t - v_{xt}u - v_x u_t \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan (4.80) ve (4.82) birer korunumluluk kanunudur.

Şimdi

$$X_2 = -\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.84}$$

Lie simetri üreteci için korunumluluk kanunlarını bulalım.

(4.84) ten;

$$\begin{aligned} \xi^x &= 0 \\ \xi^t &= -1 \\ \eta^u &= 0 \\ \eta^v &= 0 \end{aligned}$$

(3.25) ile verilen formül kullanılırsa;

$$
\begin{aligned}
T_2^x &= L\xi^x + \left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} + D_x D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right)\right] \\
&\quad + \left(\eta^v - \xi^x v_x - \xi^t v_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial v_x}\right] + D_x\left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right) \\
&\quad \left[-D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right)\right] + D_x D_x\left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right] \\
&= -u_t\left[2uw + 2vh + D_x D_x\left(-\frac{1}{2}h\right)\right] + v_t\left[-\frac{1}{2}w + 2uh\right] \\
&\quad + D_x\left(u_t\right)\left[-D_x\left(-\frac{1}{2}h\right)\right] + D_x D_x\left(u_t\right)\left[-\frac{1}{2}h\right] \\
&= 2uwu_t + 2vhu_t - \frac{1}{2}h_{xx}u_t - \frac{1}{2}wv_t \\
&\quad + 2uhv_t + \frac{1}{2}h_x u_{xt} - \frac{1}{2}hu_{xxt}
\end{aligned}
\tag{4.85}
$$

bulunur.

(4.85) te w yerine v,h yerine u yazarsak;

$$
\begin{aligned}
T_2^x &= 2uvu_t + 2vuu_t - \frac{1}{2}u_{xx}u_t - \frac{1}{2}vv_t \\
&\quad + 2u^2 v_t + \frac{1}{2}u_x u_{xt} - \frac{1}{2}uu_{xxt} \\
&= 4uvu_t - \frac{1}{2}u_{xx}u_t - \frac{1}{2}vv_t \\
&\quad + 2u^2 v_t + \frac{1}{2}u_x u_{xt} - \frac{1}{2}uu_{xxt}
\end{aligned}
\tag{4.86}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
T_2^t &= L\xi^t + \left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_t}\right] \\
&\quad + \left(\eta^v - \xi^x v_x - \xi^t v_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial v_t}\right] \\
&= -L + u_t w + v_t h \\
&= -u_t w - 2uu_x w + \frac{1}{2}v_x w - v_t h + \frac{1}{2}u_{xxx}h \\
&\quad -2u_x vh - 2uv_x h + u_t w + v_t h \\
&= -2uu_x w + \frac{1}{2}v_x w + \frac{1}{2}u_{xxx}h - 2u_x vh - 2uv_x h
\end{aligned} \tag{4.87}
$$

bulunur.

(4.87) de w yerine v,h yerine u yazarsak;

$$
\begin{aligned}
T_2^t &= -2uu_x v + \frac{1}{2}v_x v + \frac{1}{2}u_{xxx}u - 2uu_x v - 2u^2 v_x \\
&= -4uu_x v + \frac{1}{2}v_x v + \frac{1}{2}u_{xxx}u - 2u^2 v_x
\end{aligned} \tag{4.88}
$$

elde edilir.

(4.85) , (4.87) nin (3.16) ile verilen eşitliğe göre korunumluluk kanunu olup olmadığına bakalım.

$$
\begin{aligned}
D_x\left(T_2^x\right) + D_t\left(T_2^t\right) &= 4u_x v u_t + 4uv_x u_t + 4uvu_{tx} - \frac{1}{2}u_{xxx}u_t \\
&\quad -\frac{1}{2}u_{xx}u_{tx} - \frac{1}{2}v_x v_t - \frac{1}{2}vv_{tx} \\
&\quad +4uu_x v_t + 2u^2 v_{tx} + \frac{1}{2}u_{xx}u_{xt} \\
&\quad +\frac{1}{2}u_x u_{xxt} - \frac{1}{2}u_x u_{xxt} - \frac{1}{2}uu_{xxxt} \\
&\quad -4u_t u_x v - 4uu_{xt}v - 4uu_x v_t + \frac{1}{2}v_{xt}v \\
&\quad +\frac{1}{2}v_x v_t + \frac{1}{2}u_{xxxt}u + \frac{1}{2}u_{xxx}u_t \\
&\quad -4uu_t v_x - 2u^2 v_{xt} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olduğundan (4.85) ve (4.87) birer korunumluluk kanunudur.

Şimdi

$$X_3 = -2t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u} \tag{4.89}$$

için korunumluluk kanunlarını bulalım.

(4.89) dan;

$$\begin{aligned}
\xi^x &= -2t \\
\xi^t &= 0 \\
\eta^u &= -1 \\
\eta^v &= 0
\end{aligned}$$

(3.25) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
T_3^x &= L\xi^x + \left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} + D_x D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right)\right] \\
&+ \left(\eta^v - \xi^x v_x - \xi^t v_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial v_x}\right] + D_x\left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right) \\
&\left[-D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right)\right] + D_x D_x\left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right] \\
&= -2tL + (-1 + 2tu_x)\left[2uw + 2vh + D_x D_x\left(-\frac{1}{2}h\right)\right] \\
&+2tv_x\left[-\frac{1}{2}w + 2uh\right] + D_x(-1 + 2tu_x)\left[-D_x\left(-\frac{1}{2}h\right)\right] \\
&+D_x D_x(-1 + 2tu_x)\left[-\frac{1}{2}h\right] \\
&= -2tu_t w + tv_x w - 2tv_t h - 2uw - 2vh \\
&+\frac{1}{2}h_{xx} - h_{xx}tu_x - wtv_x + tu_{xx}h_x
\end{aligned} \tag{4.90}$$

bulunur.

(4.90) da w yerine v,h yerine u yazarsak;

$$\begin{aligned} T_3^x &= -2tu_tv + tv_xv - 2tv_tu - 2uv - 2vu \\ &\quad + \frac{1}{2}u_{xx} - u_{xx}tu_x - vtv_x + tu_{xx}u_x \\ &= -2tu_tv - 2tv_tu - 4uv + \frac{1}{2}u_{xx} \end{aligned} \tag{4.91}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} T_3^t &= L\xi^t + \left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_t}\right] \\ &\quad + \left(\eta^v - \xi^x v_x - \xi^t v_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial v_t}\right] \\ &= \left(-1 + 2tu_x\right)w + 2tv_xh \\ &= -w + 2tu_xw + 2tv_xh \end{aligned} \tag{4.92}$$

bulunur.

(4.92) de w yerine v,h yerine u yazarsak;

$$T_3^t = -v + 2tu_xv + 2tv_xu \tag{4.93}$$

elde edilir.

(4.90) , (4.92) nin (3.16) ile verilen eşitliğe göre korunumluluk kanunu olup olmadığına bakalım.

$$\begin{aligned} D_x\left(T_3^x\right) + D_t\left(T_3^t\right) &= -2tu_{tx}v - 2tu_tv_x - 2tv_{tx}u - 2tv_tu_x \\ &\quad -4u_xv - 4uv_x + \frac{1}{2}u_{xxx} - v_t + 2u_xv \\ &\quad +2tu_{xt}v + 2tu_xv_t + 2v_xu + 2tv_{xt}u \\ &\quad +2tv_xu_t \\ &= -2u_xv - 2uv_x + \frac{1}{2}u_{xxx} - v_t \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan (4.90) ve (4.92) birer korunumluluk kanunudur.

Şimdi

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} - 2v\frac{\partial}{\partial v} \tag{4.94}$$

için korunumluluk kanunlarını bulalım.

(4.94) ten;

$$\begin{aligned}
\xi^x &= x \\
\xi^t &= 2t \\
\eta^u &= -u \\
\eta^v &= -2v
\end{aligned}$$

(3.25) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
T_4^x &= L\xi^x + \left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} + D_x D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right)\right] \\
&+ \left(\eta^v - \xi^x v_x - \xi^t v_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial v_x}\right] + D_x\left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right) \\
&\left[-D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right)\right] + D_x D_x\left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right) \\
&\left[\frac{\partial L}{\partial u_{xxx}}\right] \\
&= xL + (-u - xu_x - 2tu_t)\left[2uw + 2vh + D_x D_x\left(-\frac{1}{2}h\right)\right] \\
&+ (-2v - xv_x - 2tv_t)\left[-\frac{1}{2}w + 2uh\right] \\
&+ D_x(-u - xu_x - 2tu_t)\left[-D_x\left(-\frac{1}{2}h\right)\right] \\
&+ D_x D_x(-u - xu_x - 2tu_t)\left[-\frac{1}{2}h\right]
\end{aligned} \tag{4.95}$$

bulunur.

(4.95) te gerekli işlemleri yapıp w yerine v,h yerine u yazarsak;

$$\begin{aligned}
T_4^x &= u_t vx + v_t ux - 8u^2 v + 2u_{xx}u \\
&-8uvtu_t + u_{xx}tu_t + v^2 + tv_t v \\
&-4u^2 tv_t - u_x^2 - u_x tu_{xt} + utu_{xxt}
\end{aligned} \tag{4.96}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} T_4^t &= L\xi^t + \left(\eta^u - \xi^x u_x - \xi^t u_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_t}\right] \\ &\quad + \left(\eta^v - \xi^x v_x - \xi^t v_t\right)\left[\frac{\partial L}{\partial v_t}\right] \\ &= 2tL + \left(-u - xu_x - 2tu_t\right) w \\ &\quad + \left(-2v - xv_x - 2tv_t\right) h \end{aligned} \tag{4.97}$$

bulunur.

(4.97) de w yerine v,h yerine u yazarsak;

$$T_4^t = 8uu_xvt - v_xvt - u_{xxx}ut + 4u^2v_xt - 3uv - xu_xv - xv_xu \tag{4.98}$$

elde edilir.

$(4.95), (4.97)$ nin (3.16) ile verilen eşitliğe göre korunumluluk kanunu olup olmadığına bakalım.

$$\begin{aligned} D_x\left(T_4^x\right) + D_t\left(T_4^t\right) &= u_tv + v_tu - 16uu_xv - 8u^2v_x \\ &\quad +2u_{xxx}u + 2vv_x + 8uu_xv \\ &\quad -v_xv - u_{xxx}u + 4u^2v_x - 3u_tv - 3uv_t \\ &= -2u_tv - 2v_tu - 8uu_xv - 4u^2v_x \\ &\quad +u_{xxx}u + vv_x \\ &= -2v\left(u_t - \frac{1}{2}v_x + 2uu_x\right) \\ &\quad -2u\left(v_t - \frac{1}{2}u_{xxx} + 2uv_x + 2u_xv\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan (4.95) ve (4.97) birer korunumluluk kanunudur.

Örnek:

$$u_t + uu_x + u_{xx} + u(1-u) = 0 \tag{4.99}$$

Burger Fisher denkleminin korunumluluk kanunlarını bulunuz.

(4.99) denklemi için aşağıdaki formal Lagrangian oluşturulursa;

$$\begin{aligned} L &= Fw \\ &= (u_t + uu_x + u_{xx} + u - u^2)w \\ &= u_t w + u_x uw + u_{xx} w + uw - u^2 w \end{aligned} \tag{4.100}$$

bulunur. Burada $w = w\,(x,t)$ eşlenik değişkenidir. (4.100) eşitliğini (3.20) denkleminde yerine yazılırsa ve eşlenik denklemi bulunursa;

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\delta L}{\delta u} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u} - D_i(\frac{\partial}{\partial u_i}) + D_i D_j(\frac{\partial}{\partial u_{ij}}) + ...\right] L \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u} - D_x(\frac{\partial}{\partial u_x}) - D_t(\frac{\partial}{\partial u_t}) + D_{xx}(\frac{\partial}{\partial u_{xx}})\right] L \\ &= \frac{\partial L}{\partial u} - D_x(\frac{\partial L}{\partial u_x}) - D_t(\frac{\partial L}{\partial u_t}) + D_{xx}(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}) \\ &= u_x w + w - 2uw - D_x(uw) - D_t(w) + D_{xx}(w) \\ &= u_x w + w - 2uw - u_x w - uw_x - w_t + w_{xx} \\ &= w_{xx} - uw_x - w_t - 2uw + w \end{aligned} \tag{4.101}$$

elde edilir. (4.101) denkleminde w yerine u yazdığımızda (4.99) denklemini vermediğinden (4.99) denklemi öz eşlenik değildir. Şimdi (4.101) denkleminin çözümünü bulalım. Bunun için (4.101) denkleminin

$$w(x,t) = e^{ax+bt} \tag{4.102}$$

şeklinde çözümünü arayalım. w_{xx}, w_x, w_t bulalım;

$$\begin{aligned} w_{xx} &= a^2 w \\ w_x &= aw \\ w_t &= bw \end{aligned}$$

yukarıda bulduğumuz ifadeleri (4.101) denkleminde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} (a^2 - ua - b - 2u + 1)e^{ax+bt} &= 0 \\ a^2 - ua - b - 2u + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$b = a^2 - ua - 2u + 1 \tag{4.103}$$

bulunur. (4.103) denkleminde $a = -2$ dersek $b = 5$ olarak bulunur. Buradan;

$$w(x,t) = e^{-2x+5t} \tag{4.104}$$

olur. Verilen denklemin

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

şeklindeki sonsuz küçük üreteçlerinin komütatör tablosunu çizerek Lie Braketi altında kapalı olduğu gösterilirse;

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2
X_1	0	0
X_2	0	0

olur.

(4.99) denkleminin sonsuz küçük üreteçlerini kullanarak korunumluluk kanunlarını bulalım. Öncelikle

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \tag{4.105}$$

Lie simetri üretecinin

$$X(L) + L(D_i(\xi^i)) = 0 \tag{4.106}$$

değizmezlik koşulunu sağladığını gösterelim. Bunun için (4.105) simetri üretecinin ikinci uzanımını bulalım.

$$X^{(2)} = \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} \tag{4.107}$$

olmak üzere (2.20), (2.21), (2.22) ile verilen sonsuz küçüklere göre;

$$\begin{aligned} \eta^x &= 0 \\ \eta^t &= 0 \\ \eta^{xx} &= 0 \end{aligned} \tag{4.108}$$

olarak bulunur. (4.108) de bulunan değerler (4.107) uzanımında yerine yazılırsa ve (4.100) formal Lagrangianına uygulanırsa, (4.106) değişmezlik koşulu sağlanıp sağlanmadığına bakılırsa

$$X^{(2)}(L) + L(D_x(\xi^x) + D_t(\xi^t)) = 0$$

olduğu görülür.

(4.105) simetri üreteci için korunumluluk kanunlarını bulalım. (4.105) ten;

$$\begin{aligned} \xi^x &= 1 \\ \xi^t &= 0 \\ \eta &= 0 \end{aligned} \tag{4.109}$$

(3.5) ile verilen formülden;

$$\begin{aligned} W &= \eta - \xi^x u_x - \xi^t u_t \\ &= -u_x \end{aligned} \tag{4.110}$$

olur. (3.25) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned} T_1^t &= \xi^t L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_t}\right] \\ &= -u_x w \end{aligned} \tag{4.111}$$

$$\begin{aligned} T_1^x &= \xi^x L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)\right] + D_x(W)\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \\ &= L - u_x\left[uw - D_x(w)\right] + D_x(-u_x)w \\ &= L - u_x\left[uw - w_x\right] - u_{xx}w \\ &= u_t w + u_x uw + u_{xx}w + uw - u^2 w - u_x uw + u_x w_x - u_{xx}w \\ &= u_t w + uw - u^2 w + u_x w_x \end{aligned} \tag{4.112}$$

bulunur.

(4.111) , (4.112) nin (3.16) ile verilen eşitliğe göre korunumluluk kanunu olup olmadığına bakalım. Bunun için iki yoldanda bakalım;

1.Yol:

$$
\begin{aligned}
D_t\left(T_1^t\right)+D_x\left(T_1^x\right) &= -u_x w_t-u_{xt}w+u_{tx}w+u_t w_x+u_x w\text{-}uw_x \\
&\quad -2u_x uw-u^2 w_x+u_{xx}w_x+u_x w_{xx} \\
&= u_x\left(-w_t+w-2uw+w_{xx}\right) \\
&\quad +w_x\left(u_t+u-u^2+u_{xx}\right) \\
&= u_x(uw_x)+w_x\left(-uu_x\right) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.113}
$$

olarak bulunduğundan (4.111) ve (4.112) birer korunumluluk kanunudur.

2.Yol:

$$
\begin{aligned}
D_t\left(T_1^t\right)+D_x\left(T_1^x\right) &= -u_x w_t-u_{xt}w+u_{tx}w+u_t w_x+u_x w+uw_x \\
&\quad -2u_x uw-u^2 w_x+u_{xx}w_x+u_x w_{xx} \\
&= -u_x w_t+u_t w_x+u_x w+uw_x-2u_x uw \\
&\quad -u^2 w_x+u_x w_{xx}+u_{xx}w_x
\end{aligned}
\tag{4.114}
$$

(4.114) denkleminde (4.104) değeri yerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
D_t\left(T_1^t\right)+D_x\left(T_1^x\right) &= -5u_x w-2u_t w+u_x w-2uw-2u_x uw \\
&\quad +2u^2 w-2u_{xx}w+4u_x w \\
&= -2u_t-2u-2u_x u+2u^2-2u_{xx} \\
&= u_t+u_x u+u_{xx}+u\left(1-u\right) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.115}
$$

olarak bulunduğundan (4.111) ve (4.112) birer korunumluluk kanunudur.

Şimdi

$$X_2=\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.116}$$

simetri üreteci için (4.106) ile verilen değişmezlik koşulunu sağladığını gösterelim. X_2 için ikinci uzanım (4.107) şeklinde olursa (2.20) , (2.21) , (2.22) ile verilen sonsuz küçüklere göre

$$\begin{aligned} \eta^x &= 0 \\ \eta^t &= 0 \\ \eta^{xx} &= 0 \end{aligned} \tag{4.117}$$

olarak bulunur. (4.117) de bulunan değerler (4.107) uzanımında yerine yazılırsa ve (4.100) formal Lagrangiana uygulanırsa, (4.106) değişmezlik koşulunun sağlanıp sağlanmadığına bakılırsa

$$X^{(2)}(L) + L(D_x(\xi^x) + D_t(\xi^t)) = 0$$

olduğu görülür.

(4.116) simetri üreteci için korunumluluk kanunlarını bulalım. (4.116) dan;

$$\begin{aligned} \xi^x &= 0 \\ \xi^t &= 1 \\ \eta &= 0 \end{aligned} \tag{4.118}$$

(3.5) ile verilen formülden;

$$\begin{aligned} W &= \eta - \xi^x u_x - \xi^t u_t \\ &= -u_t \end{aligned} \tag{4.119}$$

olur. (3.25) ile verilen formül kullanılırsa;

$$\begin{aligned} T_2^t &= \xi^t L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_t}\right] \\ &= L + (-u_t)\, w \\ &= u_t w + u_x w u + u_{xx} w + uw - u^2 w - u_t w \\ &= u_x w u + u_{xx} w + uw - u^2 w \end{aligned} \tag{4.120}$$

$$\begin{aligned} T_2^x &= \xi^x L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)\right] + D_x(W)\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \\ &= -u_t\left[uw - D_x(w)\right] + D_x(-u_t)w \\ &= -u_t\left[uw - w_x\right] - u_{xt} w \\ &= -u_t w u + u_t w_x - u_{xt} w \end{aligned} \tag{4.121}$$

bulunur.

$(4.120), (4.121)$ in (3.16) ile verilen eşitliğe göre korunumluluk kanunu olup olmadığına bakalım. Bunun için iki yoldan bakalım;

1 Yol:

$$\begin{aligned}
D_t\left(T_2^t\right)+D_x\left(T_2^x\right) &= u_t u_x w+u_{xt} u w+u_x u w_t+u_{xxt} w+u_{xx} w_t \\
&\quad +u_t w+u w_t-2 u_t u w-u^2 w_t-u_{xt} u w-u_t u_x w \\
&\quad -u_t u w_x+u_{xt} w_x+u_t w_{xx}-u_{xxt} w-u_{xt} w_x \\
&= w_t\left(u_x u+u_{xx}+u-u^2\right)+u_t\left(w-2 u w-u w_x+w_{xx}\right) \\
&= w_t\left(-u_t\right)+u_t\left(w_t\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunduğundan (4.120) ve (4.121) birer korunumluluk kanunudur.

2.Yol:

$$\begin{aligned}
D_t\left(T_2^t\right)+D_x\left(T_2^x\right) &= u_t u_x w+u_{xt} u w+u_x u w_t+u_{xxt} w \\
&\quad +u_{xx} w_t+u_t w+u w_t-2 u_t u w \\
&\quad -u^2 w_t-u_{xt} u w-u_t u_x w \\
&\quad -u_t u w_x+u_{xt} w_x+u_t w_{xx}-u_{xxt} w-u_{xt} w_x \\
&= u_x u w_t+u_{xx} w_t+u_t w+u w_t-2 u_t u w \\
&\quad -u^2 w_t-u_t u w_x+u_t w_{xx}
\end{aligned} \tag{4.122}$$

(4.122) denkleminde (4.104) değeri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
D_t\left(T_2^t\right)+D_x\left(T_2^x\right) &= 5 u_x u w+5 u_{xx} w+u_t w+5 u w-2 u_t u w \\
&\quad -5 u^2 w+2 u_t u w+4 u_t w \\
&= 5 u_x u+5 u_{xx}+u_t+5 u \\
&\quad -2 u_t u-5 u^2+2 u_t u+4 u_t \\
&= 5 u_t+5 u_x u+5 u_{xx}+5 u-5 u^2 \\
&= u_t+u_x u+u_{xx}+u-u^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunduğundan (4.120) ve (4.121) birer korunumluluk kanunudur.

BÖLÜM 5

KORUNUMLULUK KANUNLARININ BULUNMASINDA KULLANILAN YAKLAŞIMLAR

Bu bölümde korunumluluk kanunlarını bulmak için literatürde olan farklı yaklaşımlarından bahsedeceğiz ve lineer olmayan alan denkleminin korunumluluk kanunlarını verilen bütün yaklaşımlar ile bulacağız.

5.1 Doğrudan Metot

Bu metot bazı iyi bilinen diferensiyel denklemlerin korunum kanunlarını elde etmede başarılı olmuştur.

(3.19) şeklinde diferensiyel denklem olmak üzere $T^1, ..., T^n$ korunmuş vektörleri için

$$D_i T^i \underset{F_\alpha = 0}{|} = 0 \tag{5.1}$$

şeklindeki denklemin çözülmesiyle korunumluluk kanunları elde edilir.

Bu yaklaşım ilk defa Laplace tarafından kullanılmıştır ve bütün yerel korunumluluk kanunlarını verir.

5.2 Noether Yaklaşımı

Bu metot korunumluluk kanunlarını bulmak için kolay ve uygulanabilir bir metoddur.

5.2.1 Euler-Lagrange diferensiyel denklemleri

(3.19) şeklindeki diferensiyel denklem için

$$L = L\left(x, u, u_{(1)}, ..., u_{(k)}\right) \in \mathcal{A} \tag{5.2}$$

Lagrangian olsun. Bu durumda

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} = 0, (\alpha = 1, ..., m) \tag{5.3}$$

şeklindeki sisteme Euler-Lagrange diferensiyel denklemleri denir.

5.2.2 Noether simetri üreteci

X Noether simetri üreteci olsun. Bu durumda

$$X(L) + LD_i(\xi^i) = D_i(B^i) \tag{5.4}$$

eşitliğini sağlayan $B = (B^1, B^2, ..., B^n)$ vektörü olsun.

5.2.3 Noether korunmuş vektörleri

Her bir X noether simetri üreteci için $T = (T^1, T^2, ..., T^n)$ korunmuş vektörleri

$$\begin{aligned} T^i &= B^i - N^i L \\ &= B^i - \xi^i L - W^\alpha \frac{\delta L}{\delta u_i^\alpha} - \sum_{s \geq 1} D_{i_s \ldots i_s} (W^\alpha) \frac{\delta L}{\delta u_{i_1 \ldots i_s}^\alpha} \end{aligned} \tag{5.5}$$

formülü ile bulunur.

5.3 Karakteristik Metot

Steudel tarafından ortaya konulan bir yaklaşımdır. (3.19) şeklinde verilen diferensiyel denklem için karakteristik formda korunumluluk kanunu

$$D_i T^i = Q^\alpha F_\alpha \tag{5.6}$$

şeklinde bulunur. Burada Q^α karakteristiklerdir. Karakteristikler denklemi tam hale getiren çarpanlardır.

5.4 Varyasyonel Yaklaşım

Bu yaklaşım Olver tarafından ortaya konulmuştur ve (5.6) ile verilen denklemin varyasyonel türevlerini içerir yani

$$\frac{\delta}{\delta u^{\beta}}\left(Q^{\alpha}F_{\alpha}\right)=0 \tag{5.7}$$

şeklindedir. (5.7) durumu $u(x^1, x^2, ..., x^n)$ keyfi fonksiyonlarını bulundurur.

5.5 Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Uzayında Varyasyonel Yaklaşım

Bu yaklaşımda (5.6) ile verilen denklemin varyasyonel türevi diferensiyel denklemin çözümünün olduğu uzayda hesaplanır. Yani;

$$\frac{\delta}{\delta u^{\beta}}\left(Q^{\alpha}F_{\alpha}\right)\underset{F_{\alpha}=0}{|}=0 \tag{5.8}$$

(5.8) koşulunda, (5.7) koşulundan daha az koşula ihtiyaç vardır ve (5.8) ile hesaplanan karateristikler korunumluluk kanunlarına karşılık gelmeyebilir ama eşlenik simetrilere karşılık gelebilir.

5.6 Simetri ve Korunumluluk Kanunu İlişkisi

Bu yaklaşım Kara ve Muhammed' in kullandığı bir yaklaşımdır. Diferensiyel denklemler için X Lie-Bäcklund simetri üreteci ve T korunmuş vektörü arasındaki temel ilişki

$$X\left(T^{i}\right)+D_{k}\left(\xi^{k}\right)T^{i}-D_{k}\left(\xi^{i}\right)T^{k}=0 \tag{5.9}$$

şeklindedir. (5.9) ve (5.1) koşulları T^i korunmuş vektörleri kullanmak için kullanılır. Burada doğrudan metoda simetri koşulları eklenmiştir.

5.7 Kısmi Noether Yaklaşımı

Eğer standart Lagrangian yoksa ya da bulmak çok zor ise kısmi Lagrangianı yazarız ve Kara ve Mahomed tarafından bulunan kısmi Noether yaklaşımı ile korunumluluk kanunlarını buluruz.

5.7.1 Kısmi Lagrangian

k. mertebeden (3.19) ile verilen diferensiyel denklem sisteminin

$$F_\alpha = F_\alpha^0 + F_\alpha^1 = 0 \tag{5.10}$$

şeklinde yazıldığını düşünelim. Bazı β lar için $F_\beta^1 \neq 0$ olduğunda eğer (3.19) sistemi

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} = f_\alpha^\beta F_\beta^1$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa

$$L = L(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, ..., u_{(l)}), l \leq k$$

fonksiyonu (3.19) sisteminin kısmi Lagrangianı olarak adlandırılır. Burada $\left(f_\alpha^\beta\right)$ ters matristir.

5.7.2 Kısmi Noether operatörü

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha, \alpha = 1, ..., m$$

olmak üzere

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + W^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + D_i \left(W^\alpha\right) \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + D_i D_j \left(W^\alpha\right) \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha} + ...$$

şeklinde tanımlanan X operatörü

$$X\left(L\right) + LD_i\left(\xi^i\right) = D_i\left(B^i\right) + W\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} \tag{5.11}$$

($i = 1, 2, ..., n$ ve $\alpha = 1, 2, ..., m$) eşitliğini sağlar. Bu operatöre kısmi Noether operatörü denir ve L kısmi Lagrangianına bağlıdır.

5.7.3 Kısmi Noether korunmuş vektörleri

(3.19) sisteminin korunmuş vektörleri L kısmi Lagrangianına ve X kısmi Noether operatörü ile ilişkili olarak bulunabilir. Böyle korunmuş vektörleri (5.5) ile verilen formül ile bulabiliriz. Burada W^{α} korunumluluk kanununun karakteristiğidir. Kısmi Noether yaklaşımını Lagrangiana sahip denklemler için her zaman kullanabiliriz.

5.8 Sistemler ve Eşlenik Sistemleri İçin Noether Yaklaşımı

5.8.1 Eşlenik denklemler

(3.19) ile verilen k. mertebeden diferensiyel denklemlerin eşlenik denklemleri (3.20) şeklindedir. $w = w\,(x)$ tir ve eşlenik değişkeni olarak adlandırılır.

5.8.2 Eşlenik denklemlerin simetrileri

(3.19) ile verilen diferensiyel denklem sisteminin

$$X = \xi^{i}\frac{\partial}{\partial x_{i}} + \eta^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \tag{5.12}$$

simetri üretecini kabul ettiğini düşünelim.

(3.20) eşlenik sistemi

$$Y = \xi^{i}\frac{\partial}{\partial x_{i}} + \eta^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} + \eta_{*}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial w^{\alpha}} \tag{5.13}$$

üretecini kabul eder. Burada

$$\eta_{*}^{\alpha} = -\left(\lambda_{\beta}^{\alpha} w^{\beta} + w^{\alpha} D_{i}\left(\xi^{i}\right)\right)$$

ve

$$X\left(F_{\alpha}\right) = \lambda_{\alpha}^{\beta} F_{\beta}$$

şeklindedir.

5.8.3 Korunumluluk teoremi

k. mertebeden (3.19) ile verilen diferensiyel denklem sisteminin bütün Lie nokta, Lie-Bäcklund ve lokal olmayan simetrileri korunumluluk kanunu verir. Bu durumda korunumluluk kanunu bileşenleri L formal Lagrangianı

$$L = w^{\alpha} F_{\alpha} \tag{5.14}$$

şeklinde olmak üzere

$$\begin{aligned} T^i &= \xi^i L + W^{\alpha} \frac{\delta L}{\delta u_i^{\alpha}} + \sum_{s \geq 1} D_{i_1} ... D_{i_s} \left(W^{\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{i_1 ... i_s}} \\ & (i = 1, ..., n\ ) \end{aligned} \tag{5.15}$$

ile bulunur. (5.15) ile bulunan korunmuş vektörlerde eşlenik denklemin keyfi w çözümlerini içerir ve böylece (3.19) denklemi için w ye bağlı sonsuz korunumluluk kanunu buluruz (Naz, et al., 2008).

Yukarıda verilen korunumluluk kanunlarını bulmak için verilen yöntemlerin hepsi ile bir örnek çözelim.

Örnek:

$$u_{tx} + u^2 = 0 \tag{5.16}$$

şeklindeki lineer olmayan alan denkleminin korunumluluk kanunlarını yukarıda anlatılan bütün yollar ile bulalım.

Doğrudan metot

$T^1 \left(t, x, u, u_t, u_x\right)$ ve $T^2 \left(t, x, u, u_t, u_x\right)$ vektörleri ile (5.1) denklemi

$$D_t T^1 + D_x T^2 \quad \Big|_{u_{tx}+u^2=0} = 0$$

yada

$$T_t^1 + T_u^1 u_t + T_{u_t}^1 u_{tt} + T_{u_x}^1 u_{tx} + T_x^2 + T_u^2 u_x + T_{u_x}^2 u_{xx} + T_{u_t}^2 u_{xt} \quad \Big|_{u_{tx}+u^2=0} = 0 \tag{5.17}$$

formuna gelir.

u_{tt} ve u_{xx} terimlerine göre ayrıldığında, sırasıyla u_t ve u_x terimlerinden bağımsız T^1 ve T^2 ifadelerini verir. (5.17) denkleminin kalan terimleri ($u_{tx} = -u^2$ yazılarak)

$$T_t^1 + T_u^1 u_t + T_x^2 + T_u^2 u_x - u^2 \left(T_{u_x}^1 + T_{u_t}^2\right) = 0 \tag{5.18}$$

dir.

Eğer T^1 ve T^2 yi

$$\begin{aligned} T^1 &= a(t,x,u)\frac{u_x^2}{2} + b(t,x,u) \\ T^2 &= c(t,x,u)\frac{u_t^2}{2} + d(t,x,u) \end{aligned} \tag{5.19}$$

şeklinde seçersek ve (5.18) denkleminde yerine yazarsak;

$$\frac{1}{2}c_u u_t^2 u_x + \frac{1}{2}a_u u_t u_x^2 + \frac{1}{2}c_x u_t^2 + \frac{1}{2}a_t u_x^2 + \left(b_u - cu^2\right)u_t + \left(d_u - au^2\right)u_x + b_t + d_x = 0 \tag{5.20}$$

bulunur. (5.20) ü u nun türevlerine göre ayırırsak;

$$\begin{aligned} u_x u_t^2 &: c_u = 0 \\ u_t u_x^2 &: a_u = 0 \\ u_t^2 &: c_x = 0 \\ u_x^2 &: a_t = 0 \\ u_t &: b_u - cu^2 = 0 \\ u_x &: d_u - au^2 = 0 \\ sabit &: b_t + d_x = 0 \end{aligned} \tag{5.21}$$

olur. (5.21) ile verilen sistemi a, b, c, d ye göre çözersek korunumluluk kanunları bulunur. O halde $a = -x, b = \frac{1}{3}tu^3, c = t, d = -\frac{1}{3}xu^3$ ise;

$$\begin{aligned} T^1 &= -\frac{1}{2}xu_x^2 + \frac{1}{3}tu^3 \\ T^2 &= \frac{1}{2}tu_t^2 - \frac{1}{3}xu^3 \end{aligned} \tag{5.22}$$

$a = 0, b = \frac{1}{3}u^3, c = 1, d = 0$ ise;

$$\begin{aligned} T^1 &= \frac{1}{3}u^3 \\ T^2 &= \frac{1}{2}u_t^2 \end{aligned} \tag{5.23}$$

$a = 1, b = 0, c = 0, d = \frac{1}{3}u^3$ ise;

$$\begin{aligned} T^1 &= \frac{1}{2}u_x^2 \\ T^2 &= \frac{1}{3}u^3 \end{aligned} \tag{5.24}$$

şeklinde bulunur.

Noether yaklaşımı

(5.16) denklemi için $\dfrac{\delta L}{\delta u}=0$ Euler-Lagrange denklemlerini sağlayan Lagrangian

$$L=-\frac{u_t u_x}{2}+\frac{u^3}{3} \tag{5.25}$$

şeklindedir. Biz şimdi (5.25) deki Lagrangian için Noether nokta simetrilerinin nasıl bulunacağını göstereceğiz.

$$\begin{aligned}\zeta_t &= D_t\eta-u_tD_t\tau-u_xD_t\xi\\ \zeta_x &= D_x\eta-u_tD_x\tau-u_xD_x\xi\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}D_t &= \frac{\partial}{\partial t}+u_t\frac{\partial}{\partial u}+u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t}+u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_x}+...\\ D_x &= \frac{\partial}{\partial x}+u_x\frac{\partial}{\partial u}+u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_t}+u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}+...\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}X &= \tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t}+\xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}+\xi_t(t,x,u,u_t,u_x)\frac{\partial}{\partial u_t}\\ &\quad+\xi_x(t,x,u,u_t,u_x)\frac{\partial}{\partial u_x}\end{aligned} \tag{5.26}$$

olsun. (5.4) denklemi ile Noether simetrisi belirleyici denklemi

$$XL+L\left(D_t\tau+D_x\xi\right)=D_tB^1+D_xB^2 \tag{5.27}$$

olarak bulunur. Burada $B^1=B^1(t,x,u)$ ve $B^2=B^2(t,x,u)$ ölçü terimidir.

(5.27) denklemi kullanılarak L için Noether operatörü bulunabilir.

$$\begin{aligned}&\eta u^2-\frac{u_x}{2}\left[\eta_t+\eta_u u_t-\tau_t u_t-\tau_u u_t^2-\xi_t u_x-\xi_u u_x u_t\right]\\ &-\frac{u_t}{2}\left[\eta_x+\eta_u u_x-\tau_x u_t-\tau_u u_t u_x-\xi_x u_x-\xi_u u_x^2\right]\\ &+\left(-\frac{u_t u_x}{2}+\frac{u^3}{3}\right)\left[\tau_t+\tau_u u_t+\xi_x+\xi_u u_x\right]=B_t^1+B_u^1 u_t+B_x^2+B_u^2 u_x\end{aligned}$$

Noether operatöründe sadeleştirmelerden sonra u ya göre türevleri ayırırsak;

$$\begin{aligned}
u_x u_t^2 &: \tau_u = 0 \\
u_t u_x^2 &: \xi_u = 0 \\
u_x u_t &: \eta_u = 0 \\
u_t^2 &: \tau_x = 0 \\
u_x^2 &: \xi_t = 0 \\
u_t &: \frac{u^3}{3}\tau_u - \frac{\eta_x}{2} = B_u^1 \\
u_x &: \frac{u^3}{3}\xi_u - \frac{\eta_t}{2} = B_u^2 \\
sabit &: \eta u^2 + \frac{u^3}{3}\xi_x + \frac{u^3}{3}\tau_t = B_t^1 + B_x^2
\end{aligned} \tag{5.28}$$

(5.28) ile verilen denklemin çözülmesinden;

$$\begin{aligned}
\tau &= c_1 t + c_2 \\
\xi &= -c_1 x + c_3 \\
\eta &= 0 \\
B^1 &= D(x,t) \\
B^2 &= E(x,t) \\
D_t + E_x &= 0
\end{aligned} \tag{5.29}$$

olarak bulunur. Burada c_1, c_2 ve c_3 sabitlerdir. $D = E = 0$ diyebiliriz çünkü korunumluluk kanunlarını bulmak için önemsizdirler. Uzanım formunda üç Noether operatörü

$$\begin{aligned}
X_1 &= t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x} - u_t\frac{\partial}{\partial u_t} + u_x\frac{\partial}{\partial u_x} \quad (c_1 = 1) \\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \quad (c_2 = 1) \\
X_3 &= \frac{\partial}{\partial x} \quad (c_3 = 1)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

olarak bulunur. (5.5) eşitliğinden birinci mertebeden Noether Korunmuş vektörü

$$\begin{aligned} T^1 &= B^1 - \tau L - (\eta - \tau u_t - \xi u_x) \frac{\partial}{\partial u_t} \\ T^2 &= B^2 - \xi L - (\eta - \tau u_t - \xi u_x) \frac{\partial}{\partial u_x} \end{aligned} \tag{5.31}$$

olarak bulunur ve (5.29) eşitliğinde bulunan değerler yerine yazılırsa korunmuş vektörler

$$\begin{aligned} T^1 &= -(c_1 t + c_2) \frac{u^3}{3} - (-c_1 x + c_3) \frac{u_x^2}{2} \\ T^2 &= -(-c_1 x + c_3) \frac{u^3}{3} - (c_1 t + c_2) \frac{u_x^2}{2} \end{aligned} \tag{5.32}$$

olarak bulunur.

Karakteristik metot

Q ve T^i nin en fazla birinci mertebeden türevlere sahip olduğunu düşünerek (5.16) denkleminde bu yaklaşımı kullanırsak

$$T_t^1 + T_u^1 u_t + T_{u_t}^1 u_{tt} + T_{u_x}^1 u_{tx} + T_x^2 + T_u^2 u_x + T_{u_x}^2 u_{xx} + T_{u_t}^2 u_{xt} = Q\left(u_{tx} + u^2\right) \tag{5.33}$$

u_{tx} in katsayılarını eşitlediğimizde

$$Q = T_{u_t}^2 + T_{u_x}^1 \tag{5.34}$$

olarak bulunur.

u_{tt} ve u_{xx} terimlerine göre ayrıldığında, sırasıyla u_t ve u_x terimlerinden bağımsız T^1 ve T^2 ifadelerini verir. (5.33) denklemi (5.34) denklemi kullanılarak (5.18) denklemine indirgenir.

Varyasyonel yaklaşım

$Q = Q(t, x, u, u_x, u_t)$ olsun. (5.16) denkleminde varyasyonel yaklaşımı kullanırsak;

$$\frac{\delta}{\delta u}\left[Q(t, x, u, u_x, u_t)\left(u_{tx} + u^2\right)\right] = 0 \tag{5.35}$$

varyasyonel türevin tanımından;

$$Q_u\left(u_{tx} + u^2\right) - D_t\left[Q_{u_t}\left(u_{tx} + u^2\right)\right] - D_x\left[Q_{u_x}\left(u_{tx} + u^2\right)\right] + D_t D_x(Q) + 2uQ = 0 \tag{5.36}$$

olarak bulunur. (5.36) denklemi u nun ikinci mertebeden türevlerine göre ayırırsak aşağıdaki belirleyici denklem sistemini buluruz;

$$\begin{aligned}
u_{xx}u_{tt} &: Q_{u_t u_x} = 0 \\
u_{xx} &: u_t Q_{uu_x} - u^2 Q_{u_x u_x} + Q_{tu_x} = 0 \\
u_{tt} &: u_x Q_{uu_t} - u^2 Q_{u_t u_t} + Q_{xu_t} = 0 \\
u_{xt} &: u^2 Q_{u_t u_x} - Q_u = 0 \\
sabitler &: u_x u_t Q_{uu} + u_t \left(Q_{ux} - u^2 Q_{uu_t} - 2uQ_{u_t}\right) \\
& \quad +u_x \left(Q_{ut} - u^2 Q_{uu_x} - 2uQ_{u_x}\right) \\
& \quad +u^2 \left(Q_u - Q_{tu_t} - Q_{xu_x}\right) \\
& \quad +2uQ + Q_{tx} = 0
\end{aligned} \tag{5.37}$$

(5.37) denklem sisteminin çözülmesinden;

$$Q = (d_1 t + d_2)\, u_t + (-d_1 x + d_3)\, u_x \tag{5.38}$$

olarak bulunur ve burada d_1, d_2, d_3 sabittir.

$$Q\left(u_{tx} + u^2\right) = D_t T^1 + D_x T^2 \tag{5.39}$$

sisteminde (5.38) değeri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\left[(d_1 t + d_2)\, u_t + (-d_1 x + d_3)\, u_x\right]\left[u_{tx} + u^2\right] &= D_t \left[\frac{1}{2}(-d_1 x + d_3)\, u_x^2 + \frac{1}{3}(d_1 t + d_2)\, u^3\right] \\
& \quad + D_x \left[\frac{1}{2}(d_1 t + d_2)\, u_t^2 + \frac{1}{3}(-d_1 x + d_3)\, u^3\right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
T^1 &= \frac{1}{2}(-d_1 x + d_3)\, u_x^2 + \frac{1}{3}(d_1 t + d_2)\, u^3 \\
T^2 &= \frac{1}{2}(d_1 t + d_2)\, u_t^2 + \frac{1}{3}(-d_1 x + d_3)\, u^3
\end{aligned} \tag{5.40}$$

şeklinde korunumluluk kanunları bulunur.

Diferensiyel denklemlerin çözümlerinin uzayında varyasyonel yaklaşım

(5.16) denklemi için (5.8) ile verilen koşuldan

$$\frac{\delta}{\delta u}\left[Q\left(t, x, u, u_x, u_t\right)\left(u_{tx} + u^2\right)\right] \Big|_{u_{tx}+u^2=0} = 0 \tag{5.41}$$

olarak bulunur. (5.41) ile verilen denklemi açarsak ve $u_{tx} = -u^2$ yazarsak;

$$\begin{aligned} & u_{xx}u_{tt}Q_{u_tu_x} + u_{xx}\left[u_tQ_{uu_x} - u^2Q_{u_x}u_x + Q_{tu_x}\right] \\ & +u_{tt}\left[u_xQ_{uu_t} - u^2Q_{u_tu_x} + Q_{xu_x}\right] \\ & +u_xu_tQ_{uu} + u_t\left(Q_{ux} - u^2Q_{uu_t} - 2uQ_{u_t}\right) \\ & +u_x\left(Q_{ut} - u^2Q_{uu_x} - 2uQ_{u_x}\right) + u^4Q_{u_tu_x} \\ & -u^2\left(Q_u + Q_{tu_t} + Q_{xu_x}\right) + 2uQ + Q_{tx} = 0 \end{aligned} \tag{5.42}$$

bulunur. (5.42) sistemini u nun ikinci mertebeden türevlerine göre ayırırsak ve bulunan sistemi çözersek

$$Q = (d_1t + d_2)\,u_t + \left[(d_4 - d_1)\,x + d_3\right]u_x + ud_4 \tag{5.43}$$

olarak bulunur. Burada d_1, d_2, d_3, d_4 sabittir. Önceki durumdaki gibi d_1, d_2, d_3 sabitlerine karşılık gelen çarpanlardan korunmuş vektörler elde edilir. d_4 e karşılık $xu_x + u$ çarpanı karşılık gelir ve T^1, T^2 yoktur yani;

$$(xu_x + u)\left(u_{tx} + u^2\right) \neq D_tT^1 + D_xT^2$$

Bu $xu_x + u$ çarpanına karşılık korunumluluk kanunu olmadığını gösterir.

Simetri ve korunumluluk kanunu ilişkisi

(5.16) denkleminin uzanım formunda Lie nokta simetri üreteci

$$\begin{aligned} X &= \left[k_1 + k_3t\right]\frac{\partial}{\partial t} + \left[k_2 - (k_3 + k_4)\,x\right]\frac{\partial}{\partial x} + k_4u\frac{\partial}{\partial u} \\ & \quad + \left[k_4 - k_3\right]u_t\frac{\partial}{\partial u_t} + \left[2k_4 + k_3\right]u_x\frac{\partial}{\partial u_x} \end{aligned}$$

olsun. $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 1, k_4 = 0$ olmak üzere

$$X = t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x} - u_t\frac{\partial}{\partial u_t} + u_x\frac{\partial}{\partial u_x} \tag{5.44}$$

simetri üreteci için korunumluluk kanunlarını bulalım.

$T^1 = T^1(t, x, u, u_x), T^2 = T^2(t, x, u, u_x)$ olmak üzere (5.19) deki gibi kısıtlamak yerine (5.9) koşulunu ve (5.18) denklemini kullandığımızda

$$X\left(T^1\right) + T^1D_x(\xi) - T^2D_x(\tau) = 0 \tag{5.45}$$

$$X\left(T^2\right) + T^2D_t(\tau) - T^1D_t(\xi) = 0 \tag{5.46}$$

bulunur ve ξ, τ değerleri yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} XT^1 - T^1 &= 0 \\ XT^2 + T^2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.47}$$

bulunur ve X, (5.44) de verilmişti. (5.47) denkleminin çözümünden;

$$\begin{aligned} T^1 &= tf\left(a, \alpha, \beta\right) \\ T^2 &= xg\left(a, \alpha, \gamma\right) \end{aligned} \tag{5.48}$$

olarak bulunur ve burada

$$\begin{aligned} a &= xt \\ \alpha &= u \\ \beta &= xu_x \\ \gamma &= tu_t \end{aligned}$$

dir. $(2.28)\,,(5.18)$ denkleminde yerine yazıldığında

$$f + a\frac{\partial f}{\partial a} + \gamma\frac{\partial f}{\partial \alpha} - a\alpha^2\frac{\partial f}{\partial \beta} + g + a\frac{\partial g}{\partial a} - a\alpha^2\frac{\partial g}{\partial \gamma} + \beta\frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0 \tag{5.49}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned} f &= -\frac{\beta^2}{2a} + \frac{\alpha^3}{3} \\ g &= \frac{\gamma^2}{2a} - \frac{\alpha^3}{3} \end{aligned} \tag{5.50}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} T^1 &= -\frac{xu_x^2}{2} + \frac{tu^3}{3} \\ T^2 &= \frac{xu_t^2}{2} - \frac{xu^3}{3} \end{aligned} \tag{5.51}$$

olarak bulunur. Diger iki korunumluluk kanunu benzer şekilde bulunabilir.

Kısmi Noether yaklaşımı

$$L = -\frac{1}{2}u_t u_x$$

kısmi Lagrangianı düşündüğümüzde (5.16) denklemi

$$\frac{\delta L}{\delta u} = -u^2 \tag{5.52}$$

olur. Kısmi Noether simetri belirleyici denklemi (5.11) ile

$$X^{[1]}L + L\left(D_t\tau + D_x\xi\right) = D_tB^1 + D_xB^2 + \left(\eta - \tau u_t - \xi u_x\right)\frac{\delta L}{\delta u} \tag{5.53}$$

$L = -\frac{1}{2}u_tu_x$ için (5.53) denklemi

$$\begin{aligned}
&-\frac{u_x}{2}\left[\eta_t + \eta_u u_t - \tau_t u_t - \tau_u u_t^2 - \xi_t u_x - \xi_u u_x u_t\right] \\
&-\frac{u_t}{2}\left[\eta_x + \eta_u u_x - \tau_x u_t - \tau_u u_t u_x - \xi_x u_x - \xi_u u_x^2\right] \\
&-\frac{u_tu_x}{2}\left[\tau_t + \tau_u u_t + \xi_x + \xi_u u_x\right] = B_t^1 + B_u^1 u_t + B_x^2 \\
&+B_u^2 u_x - u^2\left[\eta - \tau u_t - \xi u_x\right]
\end{aligned} \tag{5.54}$$

haline döner. (5.54) denklemini u nun türevlerine göre ayırırsak ve çözersek;

$$\begin{aligned}
\tau &= c_1t + c_2 \\
\xi &= -c_1x + c_3 \\
\eta &= 0 \\
B^1 &= -\frac{u^3}{3}\left(c_1t + c_2\right) + D\left(t, x\right) \\
B^2 &= -\frac{u^3}{3}\left(-c_1x + c_3\right) + E\left(t, x\right) \\
D_t + E_x &= 0
\end{aligned} \tag{5.55}$$

olarak bulunur. Burada c_1, c_2, c_3 sabitlerdir. (5.52) kısmi Euler-Lagrange denklemleri türevlerden bağımsızdır olduğundan (5.30) te bulunan Noether operatörleriyle aynı kısmi Noether operatörünü buluruz. Noether ve kısmi Noether operatörleri için B^1, B^2 terimleri farklıdır.

Birinci mertebeden kısmi Noether korunmuş vektörü $T = (T^1, T^2)$, (5.55) ile (5.31) ten bulunabilir.

Korunumluluk teoremi

Ibragimov tarafından verilen korunumluluk teoremini düşünelim. (5.16) denklemi için eşlenik denklem

$$F^* = \frac{\delta}{\delta u}\left[w\left(u_{tx}+u^2\right)\right] = 0, w = w(t,x) \tag{5.56}$$

yardımıyla

$$w_{tx} + 2uw = 0 \tag{5.57}$$

olarak bulunur.

Şimdi (5.16) denklemi ve (5.57) eşlenik denklemini düşünelim. Bu sistem için formal Lagrangian (5.14) den

$$L = w\left(u_{tx}+u^2\right) \tag{5.58}$$

olur.

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta w} &= u_{tx} + u^2 = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta u} &= w_{tx} + 2uw = 0 \end{aligned} \tag{5.59}$$

olarak bulunur. (5.16) ve (5.57) sisteminin korunmuş vektörleri simetriler ve (5.15) yardımıyla

$$W = \eta - \tau u_t - \xi u_x$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} T^1 &= \tau L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_t} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_{tt}}\right) - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{tx}}\right)\right] \\ &\quad + D_t(W)\frac{\partial L}{\partial u_{tt}} + D_x(W)\frac{\partial L}{\partial u_{tx}} \\ T^2 &= \xi L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_t\left(\frac{\partial L}{\partial u_{tx}}\right) - D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)\right] \\ &\quad + D_t(W)\frac{\partial L}{\partial u_{tx}} + D_x(W)\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \end{aligned} \tag{5.60}$$

olarak bulunur.

(5.16) denklemi için Lie nokta simetrileri simetri ve korunumluluk kanunlarında verilmişti.

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

simetri üretecini düşünelim. (5.13) ile verilen formülden Y_1 ile X_1 aynı olur. Karakteristik fonksiyon $W = -u_t$ olur ve (5.60) ten korunmuş vektörler

$$\begin{aligned} T^1 &= u^2 w + u_t w_x \\ T^2 &= u_t w_t - u_{tt} w \end{aligned} \tag{5.61}$$

olarak bulunur. (5.61) korunmuş vektörleri (5.57) eşlenik denkleminin w çözümlerini içerir ve böylece sonsuz tane korunumluluk kanunu verir. Benzer olarak diğer simetrilerle de korunumluluk kanunları bulabiliriz. Ancak korunumluluk kanunlarının bir tanesini bulmak için eşlenik denklemin çözümü gerekir (Naz, et al., 2008).

olarak bulunduğundan (4.120) ve (4.121) birer korunumluluk kanunudur.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Nail Ibragimov tarafından bulunan korunumluluk kanunları hesaplama yöntemi gösterilmiştir. Öncelikle gerekli bütün bilgiler verilmiş ve literatürde korunumluluk kanunu hesaplanmamış olan bazı denklemlerin korunumluluk kanunları hesaplanmıştır. Böylece sonsuz tane korunumluluk kanunu hesaplanmıştır. Ayrıca eşlenik denklemlerin çözümlerinin yardımıyla denklemlerin korunumluluk kanunlarından bir tanesi bulunmuştur.

Lie simetri üreteçleri verilen denklemler üzerinde hesaplamalar yaptık ve her bir simetri üreteci yardımıyla denklemler için korunumluluk kanunlarını hesapladık. Böylece korunumluluk kanunları ve Lie simetri üreteçleri arasındaki ilişkiden bahsetmiş olduk.

Denklemlerin farklı Lie simetri üreteçleri için bazen aynı olan korunumluluk kanunları bulunabileceğini gördük. Her zaman farklı Lie simetri üreteci için farklı korunumluluk kanunu olamayacağını hesaplamalarımız sonucunda gördük.

Lie simetri üreteçlerinin sadece korunumluluk kanunlarını bulmak için değil denklemlerin çözümlerine ulaşmada da bize yardımcı olduğunu simetri üreteçleri yardımıyla denklemleri çözerek gördük.

Bu tez çalışmasında sadece kısmi diferensiyel denklem sistemleri ve eşlenik sistemleri kullanılarak korunumluluk kanunlarını hesapladık. Bundan sonraki tez çalışmalarında kısaca anlattığımız farklı yaklaşımlar ile kısmi diferensiyel denklemlerin korunumluluk kanunları bulunabilir ve bulunan sonuçlar üzerinde tartışılabilir

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ahmad, A., 2005, Symmetry solutions of some nonlinear pde's, Master thesis, Deanship of Graduate Studies King Fahd University of Petroleum and Minerals Dhahran Saudi Arabia, 133 p.

Bluman, G.W., Anco, S.C., 2002, Symmetry and integration methods for differential equations with 18 illustrations, Springer-Verlag, New York, 419 p.

Bluman, G.W., Kumei, S., 1989, Symmetries and differential equations with 21 illustrations, Springer-Verlag, New York, 412 p.

Bluman, G.W., Cheviakov, A.F. and Anco, S.C., 2010, Applications of symmetry methods to partial differential equations, Springer-Verlag, New York, 398 p.

Compére, G., 2007, Symmetries and conservation laws in Lagrangian gauge theories with applications to the mechanics of black holes and to Gravity in three dimensions, Ph. d. thesis, Université Libre de Bruxells Faculté des Sciences, 205 p.

Eriksson, M., 2008, Symmetries and conservation laws obtained by Lie group analysis for certain physical systems, Diploma thesis, Uppsala School of Engineering and Department of Astronomy and Space Physics, Uppsala University, Sweden, 88 p.

Ibragimov, N.H., 1993, Crc handbook of Lie group analysis of differential equations volume1 symmetries exact solutions and conservation laws, CRC Press. Inc, United States of America, 429 p.

Kiraz, Açıl F., 2007, Kısmi türevli diferensiyel denklemlerin Lie simetrileri üzerine, Doktora tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 96 s.

Koca, K., 2008, Kısmi türevli denklemler, Gündüz Eğitim Yayıncılık, Ankara, 232 s.

Naz, R., Mahomed, F.M. and Mason, D.P., 2008, Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics, Applied Mathematics and Computation, 205, 212-230.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

Olver, P. J., 1993, Applications of Lie groups to differential equations second edition, Springer-Verlag, New York, 513 p.

San, S., 2011, Kısmi diferensiyel denklemlerin simetrileri ve çözümleri, Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 77 s.

Yaşar, E., 2009, Oluşum türü denklemlerin yerel ve yerel olmayan yeni korunum kanunları, Doktora tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 93 s.

Yaşar, E., 2010 a, Conservation laws for a class of soil water equations, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 15, 3193-3200.

Yaşar, E., 2010 b, On the conservation laws and invariant solutions of the mKdV equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 363, 174-181.